Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

LAS GRÁFICAS FINITAS TIENEN n-ÉSIMO PRODUCTO SIMÉTRICO SUSPENSIÓN ÚNICO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA
M.C. Germán Montero Rodríguez

DIRECTORES DE TESIS
Dr. David Herrera Carrasco
Dr. Fernando Macías Romero

14 de marzo de 2022

Dedicatoria

A mis padres:

Agradecimientos

Te agradezco a ti.....

Índice general

Introducción

El contenido de esta tesis pertenece a la rama de la Matemática conocida como Topología, específicamente al área de Teoría de Continuos, en esta área se ha estudiado ampliamente el relevante tema de unicidad de hiperespacios.

Un *continuo* es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo. El conjunto de los enteros positivos lo denotamos por $\mathbb{N}$.

Dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$ se consideran clases de subconjuntos de X que poseen alguna propiedad específica, a estas clases se les llama *hiperespacios*. Los hiperespacios más conocidos de X son:

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \text{ es un subconjunto cerrado y no vacío de } X\}, \\ F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos }\}, \text{ y} \\ C_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}. \end{aligned}$$

Note que $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$. Todos estos hiperespacios son considerados con la *métrica de Hausdorff* H [**?**, Theorem 2.2]. El hiperespacio $F_n(X)$ se llama *n-ésimo producto simétrico* de X.

En 1979 Sam B. Nadler, Jr. introdujo el *hiperespacio suspensión de un continuo* X, $HS_1^1(X)$ (véase [**?**]). Después en 2004, Sergio Macías introdujo el *n-ésimo hiperespacio suspensión de un continuo* X, $HS_n^n(X)$, donde $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ (véase [**?**]). Más aún, en 2008, Juan Carlos Macías introdujo el *n-ésimo pseudo-hiperespacio suspensión de un continuo* X, $HS_1^n(X)$ (véase [**?**]). El estudio del *(n,m)-ésimo hiperespacio suspensión de un continuo* X, $HS_m^n(X)$, donde $n, m \in \mathbb{N}$, y $n \geq m$, es una generalización y ha ganado interés recientemente (véase [**?**]).

El *n-ésimo producto simétrico suspensión de un continuo* X lo introdujo en el 2010 por Franco Barragán Mendoza, considerado como el espacio cociente $F_n(X)/F_1(X)$, denotado por $SF_n(X)$, que se obtiene de $F_n(X)$ al identificar a $F_1(X)$ a un punto, con la topología cociente (véase [**?**]).

Dado un continuo X, el símbolo q_X denota la proyección natural $q_X : F_n(X) \to SF_n(X)$, y F_X denota el elemento $q_X(F_1(X))$. Note que $q_X|_{F_n(X)-F_1(X)} : F_n(X) - F_1(X) \to SF_n(X) - \{F_X\}$ es un homeomorfismo. Escribimos q_X^* en lugar de $q_X|_{F_n(X)-F_1(X)}$.

Para un continuo X, sea $\mathcal{H}(X)$ cualquiera de los hiperespacio mencionados anteriormente. Decimos que X tiene *hiperespacio único* $\mathcal{H}(X)$ si la siguiente implicación se cumple: si Y es un continuo y $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y. El interés de esta tesis sigue la línea de investigación del problema **??**, para el caso particular de las gráficas finitas.

Problema 0.1. *Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un continuo X tenga hiperespacio único $SF_n(X)$.*

El problema de encontrar condiciones que se satisfacen en un continuo X para que él tenga hiperespacio único $\mathcal{H}(X)$ ha sido ampliamente estudiado (véase [**?**]–[**?**], [**?**], [**?**], [**?**]–[**?**], [**?**], [**?**]–[**?**]).

Una *gráfica finita* es un continuo que se puede escribir como la unión finita de arcos de tal manera que sean ajenos o se intersectan en uno o en ambos puntos extremos.

En el caso particular de las gráficas finitas se conocen los siguientes resultados:

(a) Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, entonces X tiene hiperespacio único $F_n(X)$ (véase [**?**, Corolario 5.9]).

(b) Si X es una gráfica finita distinto de un arco o de una curva cerrada simple, entonces X tiene hiperespacio único $C_1(X)$ (véase [**?**, Teorema 1] y [**?**, 9.1]).

(c) Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, entonces X tiene hiperespacio único $C_n(X)$ (véase [**?**] y [**?**, Teorema 3.8]).

(d) Si X es una gráfica finita y $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$, entonces X tiene hiperespacio único $HS_m^n(X)$ (véase [**?**, Teorema 3.6], [**?**, Teorema 3.2], y [**?**, Teorema 5.7]).

Con relación al Problema **??**, el objetivo de esta tesis es probar:

Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, entonces X tiene hiperespacio único $SF_n(X)$ (véase Teorema **??**).

Las gráficas finitas tienen n-ésimo producto simétrico suspensión único

Montero

14 de marzo de 2022

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Nociones generales

A lo largo de este trabajo se condirerará la siguiente notación. Si X es un espacio topológico y A un subconjunto de X, los símbolos $\mathrm{cl}_X(A)$, $\mathrm{bd}_X(A)$ e $\mathrm{int}_X(A)$ denotan la **cerradura** de A, la **frontera** de A y el **interior** de A en X, respectivamente. La cardinalidad de un conjunto A se representa por $|A|$. Como es usual, los símbolos $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}^2$, representan el conjunto vacío, los números reales, los números enteros positivos y el plano euclidiano, respectivamente.

Sean X un espacio topológico y $p \in X$; un subconjunto V de X es una **vecindad** de p si existe un conjunto abierto U en X tal que $p \in U \subset V$.

Sean X un espacio métrico, con métrica d, $p \in X$, $A \subset X$ y $\varepsilon > 0$. La **bola abierta** en X con centro en p y radio ε es el conjunto $\{x \in X : d(p,x) < \varepsilon\}$, se denota por $B_X(p,\varepsilon)$ aunque escribimos $B(p,\varepsilon)$ cuando no exista confusión. La **nube** de radio ε alrededor de A: $\{x \in X : d(x,a) < \varepsilon, \text{ para algún } a \in A\}$, se denota por $N_X(\varepsilon, A)$ aunque escribimos $N(\varepsilon, A)$ cuando no exista confusión.

Sean X un espacio topológico y $p \in X$. El espacio X es **localmente conexo en** p si para cada conjunto abierto U en X tal que $p \in U$, existe un conjunto abierto y conexo V en X tal que $p \in V \subset U$. Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos decimos que X es **localmente conexo**.

Un **arco** es un espacio topológico homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideramos que la métrica de $\mathbb{R}^n$ es la euclideana $||x||_n$. Una **n-celda** es un espacio topológico homeomorfo a la bola unitaria $B_n(\mathbf{0},1) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon ||x||_n \leq 1\}$. Una **curva cerrada simple** es un espacio topológico homeomorfo a la circunferencia unitaria $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x||_2 = 1\}$.

Un espacio topológico X es **arco-conexo**, si para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe un arco contenido en X que une a x y y.

Sea X un espacio topológico. Si $x \in X$, el espacio X es **localmente arco-conexo en** x si para cualquier abierto U de X tal que $x \in U$, existe V abierto de X y arco-conexo tal que $x \in V \subset U$. El espacio X es **localmente arco-conexo** si es localmente arco-conexo en cada uno de sus puntos.

1.2. Continuos

En bastantes ramas de la matemática, como en el análisis matemático y la teoría de la medida, las propiedades de conexidad y compacidad son muy útiles porque se preservan bajo funciones continuas y propiedades que se dan de manera local en estos espacios se dan de manera global, por estas y otras razones es importante e interesante el estudio de los continuos. En esta sección, se expresan los continuos que estaremos trabajando dando ejemplos con ilustraciones que los representen.

Un **continuo** X es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.

Sean X un continuo, $p \in X$ y β un número cardinal. Decimos que p **tiene orden en** X menor o igual a β, denotado por $ord(p, X) \leq \beta$, si p tiene una base de vecindades $\mathfrak{B}$ en X tal que $|\operatorname{bd}_X(U)| \leq \beta$, para cada $U \in \mathfrak{B}$. Decimos que p **tiene orden en** X igual a β ($ord(p, X) = \beta$) si $ord(p, X) \leq \beta$ y $ord(p, X) \nleq \alpha$ para todo número cardinal $\alpha < \beta$. Sean $E(X) = \{x \in X : ord(x, X) = 1\}$, $O(X) = \{x \in X : ord(x, X) = 2\}$ y $R(X) = \{x \in X : ord(x, X) \geq 3\}$. Los elementos de $E(X)$ (respectivamente, $O(X)$ y $R(X)$) son llamados **puntos extremos** (respectivamente, **puntos ordinarios** y **puntos de ramificación**) de X.

Una **gráfica finita** es un continuo que es la unión finita de arcos tales que dos a dos son ajenos o se intersectan solamente en uno o ambos puntos extremos.

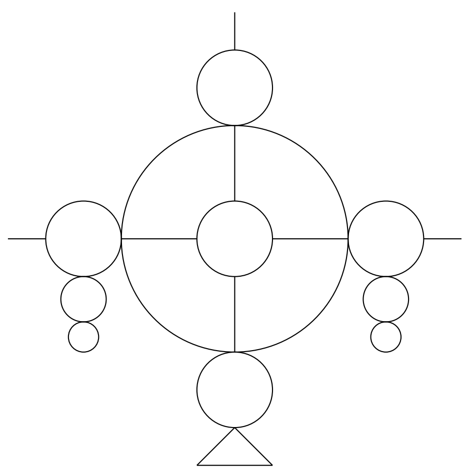

Figura 1.1: Gráfica finita.

Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 3$. Un **n-odo simple** Y es la unión de n arcos $L_1, \ldots, L_n$ de Y tales que $L_i \cap L_j = \{v\}$ si $i \neq j$ y v es un punto extremo de los arcos L_i, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. El punto v es el **vértice** del n-odo simple Y. Un 3-odo simple es llamado **triodo simple**.

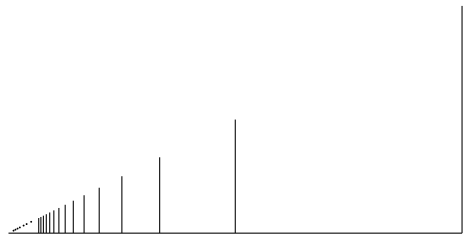

Figura 1.2: Continuo que no es una gráfica finita.

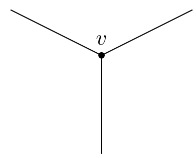

Figura 1.3: Triodo simple

Dada una gráfica finita X, un **ciclo** en X es una curva cerrada simple J en X tal que $J - \{a\}$ es un subconjunto abierto de X, para algún $a \in J$. Un **arco libre** en X es un arco α en X con puntos extremos p y q tales que $\alpha - \{p, q\}$ es abierto en X. Un **arco libre maximal** en X es un arco libre en X que es maximal, con respecto a la inclusión. Sean
$\mathcal{A}_R(X) = \{J \subset X \colon J \text{ es un ciclo en } X\}$,
$\mathcal{A}_E(X) = \{J \subset X \colon J \text{ es un arco libre maximal tal que } |J \cap R(X)| = 1\}$,
$\mathcal{A}_S(X) = \{J \subset X \colon J \text{ es un arco libre maximal en } X\} \cup \mathcal{A}_R(X)$.
Los elementos de $\mathcal{A}_S(X)$ son las **aristas** de la gráfica finita X.

Dado un continuo X, los conceptos que siguen fueron introducidos en [**?**, págs. 1583 y 1584]:

$$\mathcal{G}(X) = \{p \in X \colon \text{ existe una gráfica finita } G \text{ en } X \text{ tal que } p \in \operatorname{int}_X(G)\},$$

$$\mathcal{P}(X) = X - \mathcal{G}(X),$$

X es **casi enrejado** si el conjunto $\mathcal{G}(X)$ es denso en X.

Ejemplo 1.1. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *sea* $\left[\left(0, \frac{1}{2^n}\right), \left(1, \frac{1}{2^n}\right)\right]$ *el segmento de recta que une los puntos* $\left(0, \frac{1}{2^n}\right)$ *y* $\left(1, \frac{1}{2^n}\right)$ *en* $\mathbb{R}^2$. *Para para cada* $k \in \{0, \dots, 2^n\}$ *sea* $\left[\left(\frac{k}{2^n}, 0\right), \left(\frac{k}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right]$. *Sean*

$$A_n = \bigcup_{k=0}^{2^n} \left[\left(\frac{k}{2^n}, 0\right), \left(\frac{k}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right)\right].$$

Luego,

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup \left[\left(0, \frac{1}{2^n}\right), \left(1, \frac{1}{2^n}\right)\right]$$

es un continuo casi enrejado, véase la Figura **??**.

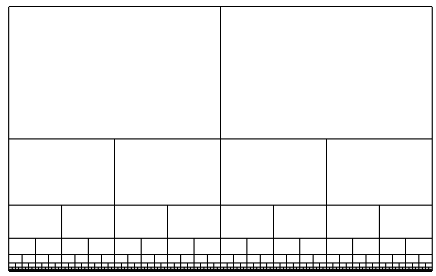

Figura 1.4: Continuo casi enrejado

Lema 1.2. *Si X es una gráfica finita, entonces $\mathcal{G}(X)-R(X)$ es un subconjunto denso de X.*

Demostración. Note que $\mathcal{G}(X) = X$ y por [**?**, Teorema 9.10], $R(X)$ es un conjunto finito. Veamos que $X \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X) - R(X))$.

Sea $p \in R(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos a $p_n \in B_X(p, \frac{1}{n}) - R(X)$. Como la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p, entonces $p \in \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X) - R(X))$. Así, $R(X) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X) - R(X))$. Esto implica que

$$X = \mathcal{G}(X) = (\mathcal{G}(X) - R(X)) \cup R(X) \subset \mathrm{cl}_X(\mathcal{G}(X) - R(X)).$$

Por tanto, $\mathcal{G}(X) - R(X)$ es un subconjunto denso de X. $\square$

1.3. Hiperespacios de un continuo

Dado un continuo X, los **hiperespacios** del continuo X son clases de subconjuntos de X que cumplen cierta propiedad específica.

Dados un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, consideremos los hiperespacios de X siguientes.

$$\begin{array}{rcl} 2^X & = & \{A \subset X : A \text{ es no vacío y es cerrado de } X\}, \\ F_n(X) & = & \{A \in 2^X : A \ \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}, \\ C_n(X) & = & \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}. \end{array}$$

Todos estos hiperespacios son considerados con la métrica de Hausdorff H [**?**, Teorema 2.2]. El hiperespacio $F_n(X)$ es el **n-ésimo producto simétrico** de X y $C_n(X)$ es el **n-ésimo hiperespacio** de X. Escribimos simplemente $C(X)$ para denotar a $C_1(X)$. Es claro que $C(X)$ es la clase de los subcontinuos de X, conocido como el **hiperespacio de los subcontinuos** de X. Note que $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ es una copia isométrica de X.

Sean X un continuo, $n, r \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_r$ subconjuntos no vacíos de X. El **vietórico** de $A_1, \ldots, A_r$, denotado por $\langle A_1, \ldots, A_r \rangle$ el conjunto $\langle A_1, \ldots, A_r \rangle_{2^X} \cap F_n(X)$, donde $\langle A_1, \ldots, A_r \rangle_{2^X}$, es el conjunto

$$\left\{ B \in 2^X : B \subset \bigcup_{i=1}^{r} A_i \text{ y } B \cap A_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, r\} \right\}.$$

Teorema 1.3. *[?, Teorema 1.2] Si X es un continuo con una topología τ, entonces la colección*

$$\{ \langle S_1, \ldots, S_r \rangle_{2^X} : S_i \in \tau \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, r\}, r \in \mathbb{N} \},$$

es una base para la topología para 2^X.

La topología generada por la base mencionada en el Teorema **??** es conocida como la **topología de Vietoris**.

Dada una gráfica finita X y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, consideramos

$$\mathcal{N}_n(X) = \{ A \in F_n(X) - F_{n-1}(X) \colon A \cap R(X) = \emptyset \} \text{ y}$$

$$R_n(Z) = \{ A \in F_n(Z) \colon A \cap R(Z) \neq \emptyset \}.$$

Lema 1.4. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto y no vacío de $F_n(X)$. Por Lema **??**, $\mathcal{U} \cap (F_n(X) - F_{n-1}(X)) \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{U} \cap (F_n(X) - F_{n-1}(X))$ y supongamos que $A = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Como $\mathcal{U}$ es abierto de $F_n(X)$, existe un $r_1 > 0$ tal que $B_{F_n(X)}(A, r_1) \subset \mathcal{U}$.

Sea $\delta = \text{mín}\{d(p_i, p_j) \colon i, j \in \{1, \ldots, n\} \text{ donde } i \neq j\}$. Sea $r = \text{mín}\{r_1, \frac{\delta}{2}\}$. Note que $B_X(p_i, r) \cap B_X(p_j, r) = \emptyset$, donde $p_i, p_j \in A$ y $i \neq j$. Como X es una gráfica finita, por Lema **??**, $\mathcal{G}(X) - R(X)$ es un subconjunto denso de X. Así, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $B_X(p_i, r) \cap (\mathcal{G}(X) - R(X)) \neq \emptyset$. Así, existe $b_i \in B_X(p_i, r) \cap (\mathcal{G}(X) - R(X))$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Esto implica que $B \in B_{F_n(X)}(A, r) \subset \mathcal{U}$ y $B \in \mathcal{N}_n(X)$. Así, $\mathcal{U} \cap \mathcal{N}_n(X) \neq \emptyset$. Por tanto, $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. □

Lema 1.5. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, entonces $F_n(X) - F_{n-1}(X)$ es denso en $F_n(X)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $F_n(X)$ y $A \in \mathcal{U}$ arbitrario, digamos $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, para algún $m \leq n$.

Caso 1. Si $m = n$, entonces $A \in (F_n(X) - F_{n-1}(X)) \cap \mathcal{U}$.

Caso 2. Si $m < n$, como $\mathcal{U}$ es abierto en $F_n(X)$, existe $r > 0$ tal que $B_{F_n(X)}(A, r) \subset \mathcal{U}$. Por [**?**, Proposición 2.22], existen $a_{m+1}, \ldots, a_n \in B_X(a_1, r)$ distintos de $a_1, \ldots, a_m$. Sea $B = \{a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n\}$. Como $H(A, B) < r$, se tiene que $B \in B_{F_n(X)}(A, r) \subset \mathcal{U}$, y por tanto $B \in (F_n(X) - F_{n-1}(X)) \cap \mathcal{U}$.

Por lo tanto, $F_n(X) - F_{n-1}(X)$ es denso en $F_n(X)$. □

Capítulo 2

El n-ésimo producto simétrico suspensión

Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. El n-ésimo producto simétrico suspensión de X, denotado por $SF_n(X)$, es el espacio cociente

$$SF_n(X) = F_n(X)/F_1(X).$$

que se obtiene de $F_n(X)$ al identificar a $F_1(X)$ a un punto, con la topología cociente, véase [**?**].

La función cociente q_X es la proyección natural $q_X \colon F_n(X) \to SF_n(X)$ y F_X denota el elemento $q_X(F_1(X))$.

Dado un continuo X y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, la restricción de q_X al subespacio $F_n(X) - F_1(X)$ es un homeomorfismo, es decir,

$$q_X|_{F_n(X)-F_1(X)} \colon F_n(X) - F_1(X) \longrightarrow SF_n(X) - \{F_X\}$$

es un homeomorfismo.

De ahora en adelante, escribimos

$$q_X^* = q_X|_{F_n(X)-F_1(X)}.$$

El siguiente resultado es uno de los primeros en el estudio del n-ésimo producto simétrico suspensión. Demostrado por Franco Barrán.

Teorema 2.1. *[**?**, Teorema 5.2] Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Entonces X es localmente conexo si y solo si $SF_n(X)$ es localmente conexo.*

2.1. El segundo producto simétrico suspensión del arco

Vamos a considerar a X como el continuo $[0, 1]$. A continuación, presentamos un modelo del n-ésimo producto simétrico suspensión de X para el caso particular cuando $n = 2$.

Ejemplo 2.2. *Sea X un arco. En [**?**, pág. 51] se demuestra que un modelo para el hiperespacio $F_2(X)$ es el triángulo en el plano con vértices en $(0,0), (0,1)$ y $(1,1)$, el cual es una 2-celda, donde $F_1(X)$ es homeomorfo al segmento que une el punto $(0,0)$ con el punto $(1,1)$. Si identificamos $F_1(X)$ a un punto, obtenemos un espacio homeomorfo a este triángulo. Así, el hiperespacio $SF_2(X)$, también es una 2-celda. La Figura **??** ilustra lo dicho.*

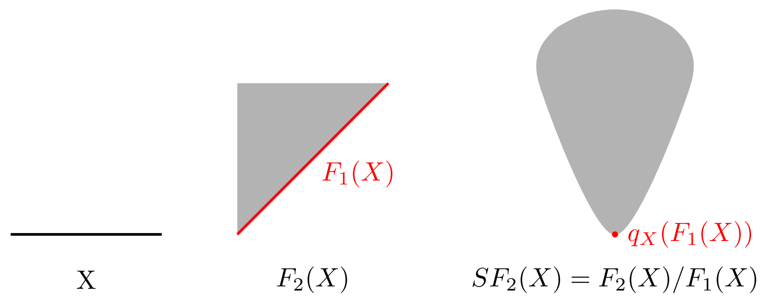

Figura 2.1: El segundo producto simétrico suspensión del arco.

2.2. El segundo producto simétrico suspensión del triodo simple

Ahora consideramos a T como el continuo que se conoce como triodo simple. A continuación, presentamos el n-ésimo producto simétrico suspensión de T para el caso particular cuando $n = 2$.

Ejemplo 2.3. *En [**?**, pág. 55] se demuestra que un modelo para el hiperespacio $F_2(T)$ es el espacio que se muestra en la Figura **??**, el cual es una 2-celda D_0 que contiene tres 2-celdas, D_1, D_2 y D_3, pegadas de tal manera que $D_0 \cap D_i$ es un arco para cada $i \in \{1,2,3\}$ y la intersección $D_1 \cap D_2 \cap D_3$ es un punto p. Además, $F_1(T)$ está contenido en la frontera como variedad de D_1, D_2, D_3 y $F_1(T) \cap D_0 = \{p\}$. Así, al identificar $F_1(T)$ a un punto, obtenemos un espacio homeomorfo a $F_2(T)$. Por tanto, $SF_2(T)$ es homeomorfo a $F_2(T)$. En la Figura **??** podemos observar un bosquejo de cómo se llega al espacio $SF_2(T)$.*

2.3. El espacio $\mathcal{E}_n(X)$

Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Consideramos el siguiente subespacio de $F_n(X)$:

$$\mathcal{E}_n(X) = \{A \in F_n(X) \colon A \text{ tiene una vecindad en } F_n(X) \text{ que es una } n\text{-celda}\}.$$

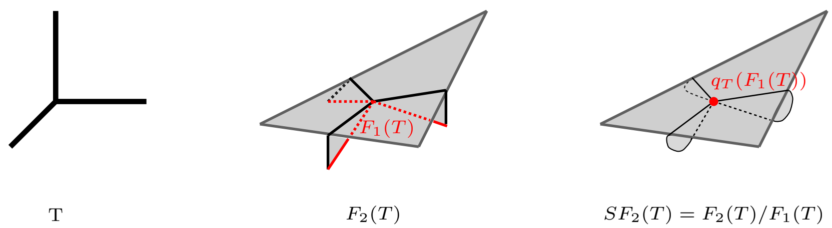

Figura 2.2: Segundo producto simétrico suspensión del triodo simple.

Lema 2.4. *Si X es un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$.*

Demostración. Si $B \in \mathcal{E}_n(X)$, entonces existe una n-celda $\mathcal{M}$ en $F_n(X)$ tal que $B \in \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M})$. Así, existe un subconjunto abierto $\mathcal{U}$ de $F_n(X)$ tal que $B \in \mathcal{U} \subset \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Sea $B_1 \in \mathcal{U} - \{B\}$. Esto implica que $B_1 \in \mathcal{U} \subset \text{int}_{F_n(X)}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}$ es una n-celda en $F_n(X)$, entonces $B_1 \in \mathcal{E}_n(X)$. Por tanto, $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}_n(X)$. Así, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. □

Lema 2.5. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{N}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$.*

Demostración. Sea $A \in \mathcal{N}_n(X)$. Supongamos que $A = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Como $p_i \notin R(X)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y X es una gráfica finita, podemor encontrar $J_1, \ldots, J_n$ arcos ajenos por pares de X tal que $(J_1 \cup \cdots \cup J_n) \cap R(X) = \emptyset$ y $p_i \in \text{int}_X(J_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Note que, la asociación que manda $(t_1, \ldots, t_n)$ al conjunto $\{t_1, \ldots, t_n\}$ es un homeomorfismo. Así, $J_1 \times \cdots \times J_n$ es homeomorfo a $\langle J_1, \ldots, J_n \rangle$. Por tanto, $\langle J_1, \ldots, J_n \rangle$ es una n-celda y es vecindad de A en $F_n(X)$. Por tanto, $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Luego, $\mathcal{N}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$. □

Teorema 2.6. *[**?**, Lema 3.1] Si X es un continuo localmente conexo y $A \in \mathcal{E}_n(X)$, entonces ningún punto de A es el vértice de un triodo simple de X.*

El siguiente resultado es una caracterización de gráficas finitas, el cual nos ayuda en la prueba del resultado principal de la sección Familia $SF_n(X)$- cerrada.

Teorema 2.7. *[**?**, Teorema 3.4] Un continuo localmente conexo X es una gráfica finita si y solo si para algún (para cada) $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto y denso de $F_n(X)$ con un número finito de componentes.*

Teorema 2.8. *[**?**, Teorema 3.5] Sea X un continuo localmente conexo tal que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso en $F_n(X)$, donde $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si $A \in F_{n-1}(X)$, entonces no existe vecindades de A en $F_n(X)$ encajables en $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 2.9. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$, entonces $\mathcal{E}_n(X) = \mathcal{N}_n(X)$.*

Demostración. Por Lema **??**, $\mathcal{N}_n(X) \subset \mathcal{E}_n(X)$.

Sea $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Por Teorema **??**, no existen puntos de A que sean el vértice de un triodo simple de X, es decir, $A \cap R(X) = \emptyset$. Como X es una gráfica finita, por Teorema **??**, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. Supongamos que $A \in F_{n-1}(X)$. Por Teorema **??**, no existen vecindades de A en $F_n(X)$ encajables en $\mathbb{R}^n$, lo cual es una contradicción ya que $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Esto implica que $A \in F_n(X) - F_{n-1}(X)$. Por tanto, $A \in \mathcal{N}_n(X)$. Así, $\mathcal{E}_n(X) = \mathcal{N}_n(X)$. □

De ahora en adelante, cuando nos referimos a X como una gráfica finita, significa que X tiene $E_1, \ldots, E_m$ aristas, con $m \in \mathbb{N}$.

Sean X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$. Dados $i_1, \ldots, i_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $i_1 + \cdots + i_m = n$, consideramos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ como el subconjunto de $F_n(X)$ tal que cada elemento de $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ tiene exactamente i_j puntos en el interior de la arista E_j, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, es decir, $A \in \mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ implica que $i_j = |A \cap \mathrm{int}_X(E_j)|$.
En lo que sigue, utilizaremos la siguiente notación. Dados $j, l \in \{1, \ldots, m\}$ sean

$$\mathcal{K}_X^j = \mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) \text{ si } i_j = n \text{ y}$$
$$\mathcal{K}_X(j,l) = \mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) \text{ si } j \neq l \text{ y } i_j + i_l = n.$$

Note que, $\mathcal{K}_X^j \subset \langle \mathrm{int}_X(E_j) \rangle$ y $\mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X^j) = \langle E_j \rangle$.

Lema 2.10. *Si X es una gráfica finita, entonces las siguientes resultados se cumplen.*

(*a*) $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ *es arco conexo.*

(*b*) $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) \cap \mathcal{K}_X(l_1, \ldots, l_m) = \emptyset$ *si y solo si existe* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *tal que* $i_j \neq l_j$.

(*c*) $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ *es un subconjunto abierto de* $\mathcal{E}_n(X)$.

Demostración. (a). Sea $A, B \in \mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$, con $A \neq B$. Sea $M = \{j \in \{1, \ldots, m\} \colon i_j \neq \emptyset\}$. Fijamos $j \in M$. Notemos que $B \cap \mathrm{int}_X(E_j) \neq \emptyset$. Sea $A_j = A \cap \mathrm{int}_X(E_j)$ y $B_j = B \cap \mathrm{int}_X(E_j)$. Luego, A_j y B_j son conjuntos no vacíos, $|A_j| = |B_j| = i_j$ y $A_j, B_j \in \langle \mathrm{int}_X(E_j) \rangle$. Sea L el intervalo de la recta real el cual es homeomorfo a $\mathrm{int}_X(E_j)$. Identificamos $\mathrm{int}_X(E_j)$ con L.

Supongamos que $A_j = \{a_1, \ldots, a_{i_j}\}$ y $B_j = \{b_1, \ldots, b_{i_j}\}$, donde $a_1 < \ldots < a_{i_j}$ y $b_1 < \ldots < b_{i_j}$. Consideramos la función $\mu_j \colon [0,1] \to \langle \mathrm{int}_X(E_j) \rangle$ definida como $\mu_j(t) = \{tb_1 + a_1(1-t), \ldots, tb_{i_j} + a_{i_j}(1-t)\}$, para cada $t \in [0,1]$. Sean $t_0 \in [0,1]$ y $\varepsilon_0 > 0$. Es claro que, la función $\alpha_l(t) = tb_l + a_l(1-t)$ es continua en t_0, para cada $l \in \{1, ..., i_j\}$. Luego, existe $\delta_l > 0$ tal que si $t \in [0,1]$ y $|t_0 - t| < |\delta_l$, entonces $d(\alpha_l(t_0), \alpha_l(t)) < \varepsilon_0$. Sea $\delta_0 = \mathrm{mín}\{\delta_1, \ldots, \delta_{i_j}\}$. Si $t \in [0,1]$ y $|t_0 - t| < \delta_0$, entonces $d(\alpha_l(t_0), \alpha_l(t)) < \varepsilon_0$, para cada $l \in \{1, ..., i_j\}$. Así, $\mu_j(t_0) \subset N(\varepsilon_0, \mu_j(t))$ y $\mu_j(t) \subset N(\varepsilon_0, \mu_j(t_0))$. Luego, $H(\mu_j(t_0), \mu_j(t)) < \varepsilon_0$. Por tanto, μ_j es continua. Notemos que $\mu_j(0) = A_j$ y $\mu_j(1) = B_j$. Más aún, $|\mu_j(t)| = i_j$, para cada $t \in [0,1]$. Luego, la función $\mu : [0,1] \to \mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ definida como $\mu(t) = \bigcup\{\mu_j(t) \colon j \in M\}$, para cada $t \in [0,1]$, es continua. Así,

$\mu([0,1])$ es un continuo localmente conexo. Como $A, B \in \mu([0,1])$, existe un arco con puntos extremos A, B. Por tanto, se cumple (a).

(b). Supongamos que $A \in \mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) \cap \mathcal{K}_X(l_1, \ldots, l_m)$. Por un lado, $|A \cap \mathrm{int}_X(E_j)| = i_j$ y por otro lado, tenemos que $|A \cap \mathrm{int}_X(E_j)| = l_j$, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Así, $i_j = l_j$, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Por tanto, $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) = \mathcal{K}_X(l_1, \ldots, l_m)$.

(c). Sea $A \in \mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$. Esto implica que $A \in \mathcal{N}_n(X)$. Por Lema **??**, $A \in \mathcal{E}_n(X)$. Así, $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) \subset \mathcal{E}_n(X)$. Supongamos que $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Sean $I_1, \ldots, I_n$ arcos ajenos por pares de X tales que $I_i \cap R(X) = \emptyset$ y $a_i \in \mathrm{int}_X(I_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Luego, $A \in \langle \mathrm{int}_X(I_1), \ldots, \mathrm{int}_X(I_n) \rangle$. Como $\langle I_1, \ldots, I_n \rangle$ es homeomorfo a $I_1 \times \cdots \times I_n$, tenemos que $\langle \mathrm{int}_X(I_1), \ldots, \mathrm{int}_X(I_n) \rangle$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{E}_n(X)$. Note que, si $B \in \langle \mathrm{int}_X(I_1), \ldots, \mathrm{int}_X(I_n) \rangle - \{A\}$, entonces $|B| = n$. Dado $j \in \{1, \ldots, m\}$, como $|A \cap \mathrm{int}_X(E_j)| = i_j$, entonces $\mathrm{int}_X(E_j)$ contiene i_j de los arcos $I_1, \ldots, I_n$. Digamos que $\mathrm{int}_X(E_j)$ contiene los arcos $I_1, \ldots, I_{i_j}$. Así, $B \cap \mathrm{int}_X(I_1) \subset \mathrm{int}_X(E_j), \ldots, B \cap \mathrm{int}_X(I_{i_j}) \subset \mathrm{int}_X(E_j)$. Como los arcos $I_1, \ldots, I_n$ son ajenos por pares, tenemos que $|B \cap \mathrm{int}_X(E_j)| = i_j$. Esto implica que $B \in \mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$. Así, tenemos $\langle \mathrm{int}_X(I_1), \ldots, \mathrm{int}_X(I_n) \rangle \subset \mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$. Por tanto, $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{E}_n(X)$. □

El siguente resultado nos dice cómo son las componentes del subespacio $\mathcal{E}_n(X)$, para una gráfica finita X.

Teorema 2.11. *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si X es una gráfica finita, entonces las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$ son los conjuntos de la forma:*

$$\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m).$$

Demostración. Supongamos que X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Note que $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m) \subset \mathcal{N}_n(X)$. Así, la unión de los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ es un subconjunto de $\mathcal{N}_n(X)$. Sea $A \in \mathcal{N}_n(X)$. Para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$, sea $l_k = |A \cap \mathrm{int}_X(E_k)|$. Como $|A| = n$, entonces $l_1 + \cdots + l_m = n$. Así, $A \in \mathcal{K}_X(l_1, \ldots, l_m)$. Luego, $\mathcal{N}_n(X)$ es un subconjunto de la unión de los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$. Por tanto, $\mathcal{N}_n(X)$ es la unión de los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$. Por el Lema **??**, tenemos que $\mathcal{E}_n(X)$ es la unión de los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$. Por el Lema **??**, los conjuntos $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ son abiertos, conexos y ajenos por pares de $\mathcal{E}_n(X)$, y por tanto, éstos son las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$. □

Capítulo 3

Unicidad del n-ésimo producto simétrico suspensión

Este capítulo está formado por las siguientes secciones: en la Sección **??**, se demuestra que la clase de las gráficas finitas es SF_n-cerrada. En la Sección **??**, se demuestra la unicidad del n-ésimo producto simétrio suspensión en un arco y en una curva cerrada simple. En la sección **??**, se demuestra la unicidad del n-ésimo producto simétrio suspensión en una θ_m gráfica. Finalmente, en la sección **??**, se demuestra la unicidad del n-ésimo producto simétrio suspensión en una gráfica finita.

En la literatura, [**?**], [**?**], [**?**], [**?**], [**?**], se puede observar que un camino para conocer continuos que tienen hiperespacio único es explorar el concepto de $\mathcal{H}$-cerrada. Parte del trabajo en el que estamos interesados es el problema que sigue:

Problema 3.1. *Determinar las clases de continuos que sean $\mathcal{H}$-cerradas.*

En relación al Problema **??**, en el caso particular de las gráficas finitas se conocen los siguientes resultados:

(a) La clase de las gráficas finitas es C_2-cerrada (véase [**?**, pág. 356]).

(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$, la clase de las gráficas finitas es C_n-cerrada (véase [**?**, Teorema 3.8, pág. 186]).

(c) Para cada $n \in \mathbb{N}$. La clase de las gráficas finitas es F_n-cerrada (véase [**?**, Corolario 3.5]).

(d) Para cada $n \in \mathbb{N}$. La clase de las gráficas finitas es HS_n-cerrada (véase [**?**, Teorema 3.2]).

(e) Para cada $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$. La clase de las gráficas finitas es HS^n_m-cerrada (véase [**?**, Teorema 3.3]).

En relación con el Problema **??**, en este capítulo se exponen dos resultados:

(f) Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si X y Y son continuos tales que $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, entonces X es un continuo localmente conexo casi enrejado si y solo si Y es un continuo localmente conexo casi enrejado (véase el Teorema **??**).

(g) Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si X y Y son continuos tales que $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, entonces X es gráfica finita si y solo si Y es gráfica finita (véase el Teorema **??**).

3.1. Familia SF_n-cerrada.

Como primer paso para probar que las gráficas finitas tienen n-ésimo producto simétrico suspensión único, se demuestra la propiedad que se conoce como SF_n-cerrada.

Dado un continuo X, denotamos por $\mathcal{H}(X)$ un hiperespacio de X. Una clase de continuos λ es *$\mathcal{H}$-cerrada* si para cualesquiera $X \in \lambda$ y Y un continuo tal que $\mathcal{H}(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{H}(Y)$, se cumple que $Y \in \lambda$.

En esta sección se demuestra: (i) que la familias de los continuos localmente conexos casi enrejado es SF_n- cerrada, Teorema **??**, y (ii) que la familia de las gráficas finitas es SF_n- cerrada, vea Teorema **??**.

Lema 3.2. *Sean X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$.*

(a) Si $A \in \operatorname{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m))$, entonces $|A \cap \operatorname{int}_X(E_j)| \leq i_j$, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$.

(b) La única componente de $\mathcal{E}_n(X)$ contenida en $\operatorname{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m))$ es $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$.

Demostración. (a) Sea $A \in \operatorname{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m))$. Supongamos que existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $|A \cap \operatorname{int}_X(E_j)| > i_j$. Sea $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ que converge a A. Notemos que $|A \cap E_j| \geq |A \cap \operatorname{int}_X(E_j)| > i_j$. Por otro lado, la sucesión $\{A_k \cap E_j\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $A \cap E_j$ y $|A_k \cap E_j| = i_j$ lo cual es una contradicción.

(b) Por Teorema **??**, $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ es una componente de $\mathcal{E}_n(X)$ contenida en $\operatorname{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m))$. Supongamos que existe $\mathcal{K}_X(l_1, \ldots, l_m)$ componente de $\mathcal{E}_n(X)$ distinto de $\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m)$ contenida en $\operatorname{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m))$. Por Lema **??**(b), existe $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $i_{j_0} \neq l_{j_0}$.

Caso 1. $i_{j_0} < l_{j_0}$.

Sea $A \in \mathcal{K}_X(l_1, \ldots, l_m)$. Esto implica que $l_{j_0} = |A \cap \operatorname{int}_X(E_{j_0})|$. Como $A \in \operatorname{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m))$, por (a), $|A \cap \operatorname{int}_X(E_{j_0})| \leq i_{j_0}$. Así, $l_{j_0} \leq i_{j_0}$ lo cual es una contradicción.

Case 2. $i_{j_0} > l_{j_0}$.

Esto implica que existe $j_1 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $i_{j_1} < l_{j_1}$. De manera similar como en el Caso 1, tenemos una contradicción. □

Teorema 3.3. *[**?**, Teorema 3.1] Para un continuo localmente conexo X las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) X es casi enrejado.

(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$.

(c) Cada subconjunto abierto y no vacío de X contiene un arco libre de X.

Teorema 3.4. *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si X es un continuo localmente conexo casi enrejado, entonces no existen vecindades de F_X en $SF_n(X)$ encajables en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de $SF_n(X)$ tal que $F_X \in \mathcal{U}$. Por un lado, $\mathcal{U} - \{F_X\}$ es un subconjunto abierto de $SF_n(X)$, y como la función cociente q_X^* es continua, entonces $(q_X^*)^{-1}(\mathcal{U} - \{F_X\})$ es un subconjunto abierto de $F_n(X)$. Sea $\mathcal{V} = (q_X^*)^{-1}(\mathcal{U} - \{F_X\})$. Sea $\{a\} \in F_1(X)$. Como q_X es continua, existe un $\delta > 0$ tal que

$$q_X(B_{F_n(X)}(\{a\}, \delta)) \subset \mathcal{U}. \tag{3.1}$$

Como X es conexo, la cardinalidad de $B_X(a, \delta)$ no es finito. Así, podemos tomar $b \in B_X(a, \delta)$ tal que $b \neq a$. Luego, $\{a, b\} \in B_{F_n(X)}(\{a\}, \delta)$. Por (**??**), $q_X^*(\{a, b\}) \in \mathcal{U}$. Más aún, $q_X^*(\{a, b\}) \in \mathcal{U} - \{F_X\}$. Así, $\{a, b\} \in \mathcal{V}$.

Como X es un continuo localmente conexo casi enrejado, por Teorema **??**, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$. Como $\{a, b\} \in F_{n-1}(X)$ y $\mathcal{V}$ es una vecindad de $\{a, b\}$ en $F_n(X)$, por Teorema **??**, tenemos que $\mathcal{V}$ no es encajable en $\mathbb{R}^n$. Así, $q_X^*(\mathcal{V}) = \mathcal{U} - \{F_X\}$, no es encajable en $\mathbb{R}^n$. Como $\mathcal{U} - \{F_X\} \subset \mathcal{U}$, tenemos que $\mathcal{U}$ no es encajable en $\mathbb{R}^n$. □

Teorema 3.5. *[**?**, Proposición 1] Sean X un continuo y $k \in \mathbb{N}$.*

(a) Si $V \subset X$ es una k-celda y U es un subconjunto abierto de X tal que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces existe una k-celda τ tal que $\tau \subset U \cap V$.

(b) Si $V \subset X$ es tal que $V \approx I^\infty$ y U es un subconjunto abierto de X tal que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $U \cap V$ contiene un espacio homeomorfo a I^∞.

Dado $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y un continuo Z, consideramos la siguiente notación.

$$\mathcal{SE}_n(Z) = \{A \in SF_n(Z)\colon A \text{ tiene una vecindad en } SF_n(Z) \text{ la cual es una } n\text{-celda}\}.$$

Observación 3.6. *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$.*

(a) Si Z es un continuo, entonces $\mathcal{SE}_n(Z)$ es un subconjunto abierto de $SF_n(Z)$.

(b) Si X es una gráfica finita, entonces las componentes de $\mathcal{SE}_n(X)$ son los conjuntos de la forma:

$$q_X^*(\mathcal{K}_X(i_1,\ldots,i_m)).$$

Teorema 3.7. *Sean X, Y continuos localmente conexos casi enrejados y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$.*

(a) Entonces $q_Y^*(\mathcal{E}_n(Y)) = \mathcal{SE}_n(Y)$.

(b) Si $h\colon SF_n(X) \to SF_n(Y)$ es un homeomorfismo, entonces $h(q_X^*(A)) \neq F_Y$, para cada $A \in \mathcal{E}_n(X)$.

Demostración. *(a)* Por el Teorema **??**, $\mathcal{E}_n(Y) \subset F_n(Y) - F_1(Y)$. Sean $A \in \mathcal{E}_n(Y)$ y $\mathcal{U}$ una vecindad de A en $F_n(Y)$ tal que $\mathcal{U}$ es una n-celda. Por el Teorema **??**, podemos suponer que $\mathcal{U} \subset F_n(Y) - F_1(Y)$. Como q_Y^* es un homeomorfismo, $q_Y^*(\mathcal{U})$ es una vecindad de $q_Y^*(A)$ en $SF_n(Y)$ la cual es una n-celda. Así, $q_Y^*(A) \in \mathcal{SE}_n(Y)$. Por tanto, $q_Y^*(\mathcal{E}_n(Y)) \subset \mathcal{SE}_n(Y)$.

Por otro lado, por el Teorema **??**, $F_Y \notin \mathcal{SE}_n(Y)$. Así, $\mathcal{SE}_n(Y) \subset SF_n(Y) - \{F_Y\}$. Como q_Y^* es un homeomorfismo, de manera similar al párrafo anterior, $(q_Y^*)^{-1}(\mathcal{SE}_n(Y)) \subset \mathcal{E}_n(Y)$. Así, $q_Z^*(\mathcal{E}_n(Y)) = \mathcal{SE}_n(Y)$

(b) Se sigue del Teorema **??** y el inciso *(a)*. □

Lema 3.8. *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si X y Y son gráficas finitas y $h : SF_n(X) \to SF_n(Y)$ es un homeomorfismo, entonces $\mathcal{E}_n(X) = (q_X^*)^{-1}(h^{-1}(q_Y^*(\mathcal{E}_n(Y))))$.*

Demostración. Por el Teorema **??***(a)*, tenemos que

$$q_Y^*(\mathcal{E}_n(Y)) = \mathcal{SE}_n(Y) = h(\mathcal{SE}_n(X)) = h(q_X^*(\mathcal{E}_n(X))).$$

□

Lema 3.9. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$ si y solo si $\mathcal{SE}_n(X)$ es un subconjunto denso de $SF_n(X)$.*

Demostración. Como $q_X^*\colon F_n(X) - F_1(X) \to SF_n(X) - \{F_X\}$ es un homeomorfismo, entonces $q_X^*(\mathcal{E}_n(X) - F_1(X)) = \mathcal{SE}_n(X) - \{F_X\}$. Así, $\mathcal{E}_n(X) - F_1(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X) - F_1(X)$ si y solo si $\mathcal{SE}_n(X) - \{F_X\}$ es un subconjunto denso de $SF_n(X) - \{F_X\}$. Así, el resultado se sigue del hecho de que $F_n(X) - F_1(X)$ es denso en $F_n(X)$ y $SF_n(X) - \{F_X\}$ es denso en $SF_n(X)$. □

Lema 3.10. *Sean X y Y continuos tales que $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, para algún $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Entonces X es un continuo localmente conexo casi enrejado si y solo si Y es un continuo localmente conexo casi enrejado.*

Demostración. Sea $h\colon SF_n(X) \to SF_n(Y)$ un homeomorfismo y supongamos que X es un continuo localmente conexo casi enrejado. Por el Teorema **??**, Y es un continuo localmente conexo. Por el Teorema **??**, tenemos que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$ y así, por el Lema **??**, $\mathcal{SE}_n(X)$ es un subconjunto denso de $SF_n(X)$. Así, $h(\mathcal{SE}_n(X))$ es un subconjunto denso de $SF_n(Y)$. Como $h(\mathcal{SE}_n(X)) = \mathcal{SE}_n(Y)$, por el Lema **??**, tenemos que $\mathcal{E}_n(Y)$ es un subconjunto denso de $F_n(Y)$. Así, por el Teorema **??**, Y es un continuo localmente conexo casi enrejado. □

Teorema 3.11. *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si X, Y son continuos tales que $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, entonces X es gráfica finita si y solo si Y es gráfica finita.*

Demostración. Supongamos que X es una gráfica finita. Por el Teorema **??**, tenemos que $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto denso de $F_n(X)$ con un número finito de componentes. Por Lema **??**, tenemos que $\mathcal{SE}_n(X)$ es un subconjunto denso de $SF_n(X)$; más aún, por Teorema **??** (a), $\mathcal{SE}_n(X)$ tiene un número finito de componentes. Así, $\mathcal{SE}_n(Y)$ es un subconjunto denso de $SF_n(Y)$ con un número finito de componentes. Por otro lado, por el Lema **??**, Y es un continuo localmente conexo casi enrejado. Por el Lema **??** y Teorema **??** (a), tenemos que $\mathcal{E}_n(Y)$ es un subconjunto denso de $F_n(Y)$ con un número finito de componentes. Por el Teorema **??**, Y es una gráfica finita. □

El Teorema **??** demuestra lo que se conoce como: la clase de las gráficas finitas es SF_n-cerrada.

3.2. En los espacios I y S^1

Sea $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 3$. Una θ_m gráfica es la unión de m arcos $E_1, \ldots, E_m$ compartiendo los mismos puntos extremos u y v y que satisfacen que $E_i \cap E_j = \{u, v\}$, para $i \neq j$. Véase [**?**, p. 221].

Lema 3.12. *Sean $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, y X una gráfica finita con $R(X) \neq \emptyset$. Si X no es una θ_m gráfica, entonces*

$$\bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X)\} = \{F_X\}.$$

Si X es una θ_m gráfica, entonces

$$\bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X)\} = \{F_X, q_X(\{u, v\})\}.$$

Demostración. Sean $E_j \in \mathcal{A}_S(X)$ y $p \in \mathrm{int}_X(E_j)$. Como $\{p\}$ se puede aproximar por elementos de $\mathcal{K}_X^j$, tenemos que $\{p\} \in \mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X^j)$. Así, $F_X \in \mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j))$. Luego, $F_X \in \bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X)\}$. Además, si X es una θ_m gráfica, entonces $u, v \in E_j$, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Como $n \geq 2$, podemos aproximarnos a $\{u, v\}$ con elementos de $\mathcal{K}_X^j$. Esto implica que $\{u, v\} \in \mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X^j)$. Así, $q_X(\{u, v\}) \in \mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j))$. Por tanto, $q_X(\{u, v\}) \in \bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X)\}$.

Supongamos que existe $\chi \in \bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X)\} - \{F_X\}$. Sea $A \in F_n(X) - F_1(X)$ tal que $q_X(A) = \chi$. Como X es una gráfica finita y $R(X) \neq \emptyset$, sabemos que $|\mathcal{A}_S(X)| \geq 2$ y $|\bigcap \mathcal{A}_S(X)| \leq 2$. Dado $E_j \in \mathcal{A}_S(X)$, existe una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ en $\mathcal{K}_X^j$ tal que $\{q_X(A_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a χ. Así, la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a A. Luego, $A \subset E_j$. Por tanto,

$$A \subset \bigcap \mathcal{A}_S(X). \tag{3.2}$$

Como $|A| \geq 2$, por (**??**), tenemos que $|\bigcap \mathcal{A}_S(X)| = 2$. Así, $|A| = 2$.

Si X no es una θ_m gráfica, tenemos que $|\bigcap \mathcal{A}_S(X)| < 2$. Por (**??**), tenemos que $|A| < 2$, lo cual es una contradicción. Por tanto, tal χ no existe. Por tanto, $\bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X)\} = \{F_X\}$.

Si X es una θ_m gráfica, tenemos que $\bigcap \mathcal{A}_S(X) = \{u, v\}$. Como $A \subset \bigcap \mathcal{A}_S(X)$ y $A \notin F_1(X)$, entonces $A = \{u, v\}$. Así, tenemos que $\chi = q_X(\{u, v\})$. Por tanto, $\chi \in \{F_X, q_X(\{u, v\})\}$. Así, $\bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X)\} = \{F_X, q_X(\{u, v\})\}$. □

Lema 3.13. *Sea Y un continuo localmente conexo.*

(a) Si Y es homeomorfo a $[0,1]$ o a S^1, y $n \in \{2, 3\}$, entonces $\mathcal{E}_n(Y) = F_n(Y)$.

(b) Si $R(Y) \neq \emptyset$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{E}_n(Y) \subsetneq F_n(Y)$.

Demostración. (a) Como $R(Y) = \emptyset$, por [**?**, Lema 5.1], $F_n(Y) \subset \mathcal{E}_n(Y)$.

(b) Como $R(Y) \neq \emptyset$, por Teorema **??**, $\mathcal{E}_n(Y) \subsetneq F_n(Y)$. □

Teorema 3.14. *[**?**, Teorema 2.5] Sean X un continuo localmente conexo y $n \in \mathbb{N}$. Si $A \in F_n(X)$ y $\mathcal{U}$ es una vecindad de A en $F_n(X)$, entonces existe una colección finita $V_1, \ldots, V_{|A|}$ de subconjuntos ajenos por pares, abiertos y conexos de X tales que $A \in \langle V_1, \ldots, V_{|A|}\rangle \subset \mathrm{int}_{F_n(X)}(\mathcal{U})$.*

Dada una variedad $\mathcal{M}$, la *frontera como variedad* de $\mathcal{M}$ la denotamos por $\partial\mathcal{M}$.

Teorema 3.15. *Sean Y un continuo y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$.*

(a) Si $SF_n(Y)$ es homeomorfo a $SF_n([0,1])$, entonces Y es un arco.

(b) Si $SF_n(Y)$ es homeomorfo a $SF_n(S^1)$, entonces Y es una curva cerrada simple.

Demostración. Durante toda la prueba vamos a considerar a X como el espacio $[0,1]$ o el espacio S^1 y sea $h : SF_n(X) \to SF_n(Y)$ un homeomorfismo. Por Teorema **??**, tenemos que Y es un continuo localmente conexo.

Caso 1. $n \in \{2, 3\}$.

Lo primero que haremos en este caso es demostrar que $R(Y) = \emptyset$. Para hacer esto, supongamos que existe $a_1 \in R(Y)$ y sea $a_2 \in Y - \{a_1\}$. Si $q_Y(\{a_1, a_2\}) = h(F_X)$, entonces $q_Y(\{a_1, a\}) \neq h(F_X)$, para cada $a \in Y - \{a_1, a_2\}$. Por tanto, podemos suponer que $q_Y(\{a_1, a_2\}) \neq h(F_X)$. Sea $A = \{a_1, a_2\}$. Notemos que $h^{-1}(q_Y(A)) \in SF_n(X) - \{F_X, h^{-1}(F_Y)\}$. Así, $(q_X^*)^{-1}(h^{-1}(q_Y(A))) \in F_n(X) - F_1(X)$. Como $R(X) = \emptyset$, por Lema **??**(a), $(q_X^*)^{-1}(h^{-1}(q_Y(A))) \in \mathcal{E}_n(X)$. Así, existe una vecindad $\mathcal{U}$ de $(q_X^*)^{-1}(h^{-1}(q_Y(A)))$ en $F_n(X) - F_1(X)$ la cual es una n-celda. Luego, $q_X(\mathcal{U})$ es una n-celda y es vecindad de $h^{-1}(q_Y(A))$ en $SF_n(X) - \{F_X\}$. Por tanto, existe una vecindad $\mathcal{U}'$ de $h^{-1}(q_Y(A))$ la cual es una n-celda tal que $\mathcal{U}' \subset q_X(\mathcal{U}) \cap (SF_n(X) - \{F_X, h^{-1}(F_Y)\})$. Así, $h(\mathcal{U}')$ es una n-celda y es vecindad de $q_Y(A)$ en $SF_n(Y) - \{h(F_X), F_Y\}$. Así, $(q_Y^*)^{-1}(h(\mathcal{U}'))$ es una n-celda y es vecindad de A en $F_n(Y) - F_1(Y)$. Por tanto, $A \in \mathcal{E}_n(Y)$.

Por otro lado, por Teorema **??**, $A \notin \mathcal{E}_n(Y)$. Así, tenemos una contradicción. Por tanto, Y es un arco o una curva cerrada simple

(Caso $n = 2$) Como $SF_2(S^1)$ es homeomorfo al Plano Proyectivo Real $\mathbb{RP}^2$ y $SF_2([0,1])$ es homeomorfo a $[0,1]^2$ ([**?**, Ejemplos 3.1 y 3.3]), tenemos que Y es homeomorfo a X.

(Caso $n = 3$) Como $SF_2(S^1)$ se puede encajar en $SF_3(S^1)$, entonces $SF_3(S^1)$ no es encajable en $\mathbb{R}^3$. Por otro lado, un modelo para $F_3([0,1])$ es una esfera unitaria (véase [**?**, Section 3]), donde $F_1([0,1])$ es un diámetro. Así, $SF_3([0,1])$ se puede encajar en $\mathbb{R}^3$. Por tanto, Y es homeomorfo a X.

Caso 2. $n \geq 4$.

Por Teorema **??**, Y es una gráfica finita.

Como $|\mathcal{A}_S(X)| = 1$, por Lema **??**, tenemos que $\mathcal{E}_n(X)$ tiene una única componente. Por Lema **??**, $\mathcal{E}_n(Y)$ es conexo. Así, $|\mathcal{A}_S(Y)| = 1$. Por tanto, Y es un arco o una curva cerrada simple.

Afirmación 1. Si $B \in \mathcal{E}_n(S^1)$ y $\mathcal{M}$ es una vecindad de B en $F_n(S^1)$ la cual es una n-celda, entonces B está en el interior como variedad de $\mathcal{M}$.

Prueba de la Afirmación 1. Como $R(S^1) = \emptyset$, por [**?**, Corolario 4.4], tenemos que $B \in F_n(S^1) - F_{n-1}(S^1)$. Por Teorema **??**, existen subconjuntos abiertos y conexos ajenos por pares $V_1, \ldots, V_n$ de S^1 tales que $B \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle \subset \operatorname{int}_{F_n(S^1)}(\mathcal{M})$. Notemos que V_i es homeomorfo a $(0,1)$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ası, $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ es homeomorfo a $(0,1)^n$. Luego, B está en el interior como variedad de $\mathcal{M}$.

Afirmación 2. Si $A \in \mathcal{E}_n([0,1])$ y $A \cap \{0,1\} \neq \emptyset$, entonces existe una vecindad $\mathcal{M}$ de A en $F_n([0,1])$ la cual es una n-celda tal que $A \in \partial\mathcal{M}$.

Prueba de la Afirmación 2. Supongamos que $0 \in A$. Como $A \in \mathcal{E}_n([0,1])$, entonces $A \in F_n([0,1]) - F_{n-1}([0,1])$. Así, $A = \{0, a_2, \ldots, a_n\}$, donde $a_2, \ldots, a_n$ son puntos distintos en $[0,1]$. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en $[0,1]$ arcos ajenos por pares tales que $0 \in \operatorname{int}_{[0,1]}(\alpha_1), a_2 \in \operatorname{int}_{[0,1]}(\alpha_2), \ldots, a_n \in \operatorname{int}_{[0,1]}(\alpha_n)$. Sea $\mathcal{M} = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$. Así, $A \in \operatorname{int}_{F_n([0,1])}(\mathcal{M})$. Notemos que $\mathcal{M}$ es una n-celda la cual es vecindad de A en $F_n([0,1])$. Como $0 \in \partial\alpha_1$, tenemos que $A \in \partial\mathcal{M}$. Por tanto, se cumple la Afirmación 2.

Por la Afiramación 1 y la Afirmación 2, tenemos que $\mathcal{E}_n(S^1)$ no es homeomorfo a $\mathcal{E}_n([0,1])$. Por Lema **??**, tenemos que $\mathcal{E}_n(X)$ es homeomorfo a $\mathcal{E}_n(Y)$. Como Y es un arco o una curva cerrada simple, se concluye que X es homeomorfo a Y. □

3.3. En una θ_m gráfica

De ahora en adelante, cuando Y sea una gráfica finita, significa que Y tiene $E'_1, \ldots, E'_{m'}$ aristas, con $m' \in \mathbb{N}$.

Ahora, el siguiente resultado nos muestra una fuerte relación entre los elementos de $\mathcal{A}_S(X)$ con los elementos de $\mathcal{A}_S(Y)$, para dos gráficas finitas X, Y.

Teorema 3.16. *Sean X, Y gráficas finitas, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$ y $h\colon SF_n(X) \to SF_n(Y)$ un homeomorfismo. Entonces se cumple lo siguiente:*

(a) *Para cada* $E_j \in \mathcal{A}_S(X)$*, tenemos que* $h(q_X(\mathcal{K}_X^j)) = q_Y(\mathcal{K}_Y^{j_h})$*, para algún* $E'_{j_h} \in \mathcal{A}_S(Y)$*.*

(b) *La relación* $E_j \mapsto E'_{j_h}$ *es una biyección entre* $\mathcal{A}_S(X)$ *y* $\mathcal{A}_S(Y)$*.*

Demostración. (a) Sea $E_j \in \mathcal{A}_S(X)$. Por los Teoremas **??** y **??**, tenemos que $h(q_X(\mathcal{K}_X^j)) = q_Y(\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'}))$, para alguna componente $\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'})$ de $\mathcal{E}_n(Y)$. Vamos a considerar el conjunto $M' = \{j \in \{1, \ldots, m'\} : i_j \neq 0\}$ y sea $r' = |M'|$. Por conveniencia, supongamos que $M' = \{j_1, \ldots, j_{r'}\}$ y notemos que $\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'}) \subset \langle \mathrm{int}_Y(E'_{j_1}), \ldots, \mathrm{int}_Y(E'_{j_{r'}})\rangle$. Vamos a demostrar que $r' = 1$. Para esto supongamos que $r' \geq 2$.
Afirmación. $\mathrm{int}_{F_n(Y)}(\mathrm{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'}))) = \mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'})$.
Prueba de la afirmación. Notemos que

$$\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'}) \subset \mathrm{int}_{F_n(Y)}(\mathrm{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'}))).$$

Vamos a demostrar que $\mathrm{int}_{F_n(Y)}(\mathrm{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'}))) \subset \mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'})$. Para probar esto, sea $A \in \mathrm{int}_{F_n(Y)}(\mathrm{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'})))$. Vamos a probar que (i) $A \cap R(Y) = \emptyset$ y (ii) $A \in F_n(Y) - F_{n-1}(Y)$.
Demostremos (i). Supongamos que existe $p \in A \cap R(Y)$. Sea $r > 0$.

Como $A \in \mathrm{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'}))$, existe $B \in \mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'})$ de tal manera que $H(A, B) < \frac{r}{4}$. Así, existe un punto $b \in B$ de tal manera que $d_Y(p, b) < \frac{r}{4}$. Como $B \in \langle \mathrm{int}_Y(E'_{j_1}), \ldots, \mathrm{int}_Y(E'_{j_{r'}})\rangle$, existe $E'_s \in \{E'_{j_1}, \ldots, E'_{j_{r'}}\}$ tal que $b \in \mathrm{int}_Y(E'_s)$. Como $p \in R(Y)$, existe $E'_t \in \mathcal{A}_S(Y) - \{E'_s\}$ tal que $p \in E'_t$. Sea $c \in \mathrm{int}_Y(E'_t) - B$ tal que $d_Y(c, p) < \frac{r}{4}$ y sea $C = (B - \{b\}) \cup \{c\}$. Como $d_Y(c, b) < \frac{r}{2}$, tenemos que $H(C, B) < \frac{r}{2}$. Así, $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C) < r$. Más aún, $|C \cap \mathrm{int}_Y(E'_t)| = 1 + |B \cap \mathrm{int}_Y(E'_t)|$. Como $B \in \mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'})$, tenemos que $|C \cap \mathrm{int}_Y(E'_t)| = 1 + i_t$. Por Lema **??**(a), tenemos que $C \notin \mathrm{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'}))$.

Así, $A \notin \mathrm{int}_{F_n(Y)}(\mathrm{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'})))$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $A \cap R(Y) = \emptyset$. Luego, (i) se cumple.

Demostremos (ii). Supongamos que $A \in F_{n-1}(Y)$. Como $A \cap R(Y) = \emptyset$, tenemos que $A \in \langle \mathrm{int}_Y(E'_{j_1}), \ldots, \mathrm{int}_Y(E'_{j_{r'}})\rangle \cap \mathrm{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'}))$. Por Lema **??**(a), tenemos que $|A \cap \mathrm{int}_Y(E'_j)| \leq i_j$, para cada $j \in M'$. Como $A \in F_{n-1}(Y)$, existe un elemento $j_k \in M'$ tal que $|A \cap \mathrm{int}_Y(E'_{j_k})| < i_{j_k}$. Como $r' \geq 2$, podemos tomar $j_s \in M' - \{j_k\}$. Sean $l = n - |A|$ y $r > 0$. Eligiendo puntos distintos por pares $b_1, \ldots, b_l \in \mathrm{int}_Y(E'_{j_s}) - A$ tales que $H(A, B) < r$, donde $B = A \cup \{b_1, \ldots, b_l\}$. Notemos que $|B \cap \mathrm{int}_Y(E'_j)| = |A \cap \mathrm{int}_Y(E'_j)|$, para cada $j \in M' - \{j_s\}$.

Supongamos que $|B \cap \mathrm{int}_Y(E'_{j_s})| \leq i_{j_s}$. Notemos que

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{j \in M'} |B \cap \mathrm{int}_Y(E'_j)| \\ &= \sum_{j \in M' - \{j_k, j_s\}} |B \cap \mathrm{int}_Y(E'_j)| + |B \cap \mathrm{int}_Y(E'_{j_k})| + |B \cap \mathrm{int}_Y(E'_{j_s})| \\ &= \sum_{j \in M' - \{j_k, j_s\}} |A \cap \mathrm{int}_Y(E'_j)| + |A \cap \mathrm{int}_Y(E'_{j_k})| + |B \cap \mathrm{int}_Y(E'_{j_s})|. \end{aligned}$$

Por Lema **??**(a) y como $|A \cap \mathrm{int}_Y(E'_{j_k})| < i_{j_k}$, se sigue que

$$\begin{array}{rcl} |B| & \leq & \displaystyle\sum_{j \in M' - \{j_k, j_s\}} i_j + |A \cap \mathrm{int}_Y(E'_{j_k})| + i_{j_s} \\ & < & \displaystyle\sum_{j \in M' - \{j_k, j_s\}} i_j + i_{j_k} + i_{j_s}. \end{array}$$

Como $\displaystyle\sum_{j \in M'} i_j = n$, tenemos que $|B| < n$ lo cual es una contradicción. Esto implica que $|B \cap \mathrm{int}_Y(E'_{j_s})| > i_{j_s}$. Luego, por el Lema **??** (a), $B \notin \mathrm{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'}))$. Así, dado $r > 0$, $B(A, r) \not\subset \mathrm{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'}))$. Por tanto, $A \notin \mathrm{int}_{F_n(Y)}(\mathrm{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'})))$ lo cual es una contradicción. Por tanto, $A \in F_n(Y) - F_{n-1}(Y)$. Luego, (ii) se cumple.

De acuerdo con [**?**, Corolario 4.4], $A \in \mathcal{E}_n(Y)$. Sea $\mathcal{C}$ la componente de $\mathcal{E}_n(Y)$ que contiene a A. Por Lema **??**, tenemos que $\mathcal{C}$ es un subconjunto abierto de $F_n(Y)$. Como $A \in \mathrm{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'}))$, entonces $\mathcal{C} \cap \mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'}) \neq \emptyset$. Por Teorema **??**, tenemos que $\mathcal{C} = \mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'})$. Así, $A \in \mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'})$. Por tanto, $\mathrm{int}_{F_n(Y)}(\mathrm{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'}))) \subset \mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'})$. Esto completa la prueba de la Afirmación.

Consideremos $A \in F_n(X)$ tal que $h(q_X(A)) = F_Y$ y $A' \in F_n(Y)$ tal que $h^{-1}(q_Y(A')) = F_X$. Sean $\mathcal{F} = F_n(X) - (F_1(X) \cup \{A\}$, $\mathcal{F}' = F_n(Y) - (F_1(Y) \cup \{A'\})$, y g el homeomorfismo $(q_Y|_{\mathcal{F}'})^{-1} \circ h \circ (q_X|_{\mathcal{F}})$ de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}'$. Notemos que $\mathcal{K}_X^j \subset \mathcal{F}$, por la parte (b) del Teorema **??**. Así, $\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'}) \subset \mathcal{F}'$. Como $\mathrm{cl}_{\mathcal{F}}(\mathcal{K}_X^j) = \langle E_j \rangle \cap \mathcal{F}$, tenemos que $\mathrm{int}_{\mathcal{F}}(\mathrm{cl}_{\mathcal{F}}(\mathcal{K}_X^j)) = \langle \mathrm{int}_X(E_j) \rangle \cap \mathcal{F}$. Por la Afirmación y como $\mathcal{F}'$ es un subconjunto abierto de $F_n(Y)$, tenemos que $\mathrm{int}_{\mathcal{F}'}(\mathrm{cl}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'})))$

$$\begin{array}{cl} = & \mathrm{int}_{\mathcal{F}'}(\mathrm{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'})) \cap \mathcal{F}') \\ = & \mathrm{int}_{F_n(Y)}(\mathrm{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'})) \cap \mathcal{F}') \cap \mathcal{F}' \\ = & \mathrm{int}_{F_n(Y)}(\mathrm{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'}))) \cap \mathrm{int}_{F_n(Y)}(\mathcal{F}') \cap \mathcal{F}' \\ = & \mathrm{int}_{F_n(Y)}(\mathrm{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'}))) \cap \mathcal{F}' \\ = & \mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'}) \cap \mathcal{F}' \\ = & \mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'}). \end{array}$$

Notemos que: $g(\mathrm{int}_{\mathcal{F}}(\mathrm{cl}_{\mathcal{F}}(\mathcal{K}_X^j)) = \mathrm{int}_{\mathcal{F}'}(\mathrm{cl}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'})))$. Así, tenemos lo siguiente $g(\langle \mathrm{int}_X(E_j) \rangle \cap \mathcal{F}) = \mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'})$, lo cual contradice al hecho de que $g(\mathcal{K}_X^j) = \mathcal{K}_Y(i_1, \ldots, i_{m'})$, pues $\mathrm{int}_{\mathcal{F}}(\mathrm{cl}_{\mathcal{F}}(\mathcal{K}_X^j)) \neq \mathcal{K}_X^j$. Por tanto, $r' = 1$.

(b) Como $\mathcal{K}_X^j$ es asociado a $\mathcal{K}_Y^{j_h}$, entonces E_j es asociado a E'_{j_h}. Supongamos que E_l es asociado a E'_{l_h} y que $E'_{j_h} = E'_{l_h}$. Esto implica que, $\mathcal{K}_Y^{j_h} = \mathcal{K}_Y^{l_h}$. Así, $q_Y^*(\mathcal{K}_Y^{j_h}) = q_Y^*(\mathcal{K}_Y^{l_h})$. Por la parte (a), tenemos que $h(q_X^*(\mathcal{K}_X^j)) = h(q_X^*(\mathcal{K}_X^l))$, y esto implica que $q_X^*(\mathcal{K}_X^j) = q_X^*(\mathcal{K}_X^l)$. Por tanto, $\mathcal{K}_X^j = \mathcal{K}_X^l$. Así, tenemos que $E_j = E_l$. $\square$

El siguiente resultado muestra que las θ_m gráficas tienen n-ésimo producto simétrico suspensión único.

Teorema 3.17. *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si X es una θ_m gráfica, entonces X tiene n-ésimo producto simétrico suspensión único.*

Demostración. Sean Y un continuo tal que $h\colon SF_n(X) \to SF_n(Y)$ es un homeomorfismo. Por el Teorema **??**, Y es una gráfica finita. Por el Teorema **??**, $R(Y) \neq \emptyset$. Recordar que $E'_1, \ldots, E'_{m'}$ son las aristas de Y, para algún $m' \in \mathbb{N}$. Por la parte (b) del Teorema **??**, tenemos que la asociación $E_j \mapsto E'_j$ es una biyección entre $\mathcal{A}_S(X)$ y $\mathcal{A}_S(Y)$, es decir, $m = m'$. Más aún, por el Lema **??** y la parte (a) del Teorema **??**:

$$\begin{aligned} 2 &= |\{F_X, q_X(\{u,v\})\}| \\ &= |h(\{F_X, q_X(\{u,v\})\})| \\ &= |h(\bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X)\})| \\ &= |\bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(Y)}(h(q_X(\mathcal{K}_X^j))) : E_j \in \mathcal{A}_S(X)\}| \\ &= |\bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(Y)}(q_Y(\mathcal{K}_Y^{j_h})) : E'_{j_h} \in \mathcal{A}_S(Y)\}|. \end{aligned}$$

Así, por el Lema **??**, Y es una $\theta_{m'}$ gráfica. Por tanto, Y es homeomorfo a X. □

3.4. En una gráfica finita

En esta sección, demostramos la unicidad del n-ésimo producto simétrico suspensión para cualquier gráfica finita.

Teorema 3.18. *Sea X es una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$ y X no es una θ_m gráfica. Si $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, Y una gráfica finita y $h\colon SF_n(X) \to SF_n(Y)$ un homeoforfismo, entonces $h(F_X) = F_Y$.*
Si también suponemos:

(1) *$E_j \in \mathcal{A}_R(X)$ si y solo si $E'_{j_h} \in \mathcal{A}_R(Y)$ y*

(2) *$E_j \in \mathcal{A}_E(X)$ si y solo si $E'_{j_h} \in \mathcal{A}_E(Y)$,*

entonces X is homeomorphic to Y.

Demostración. Por el Lema **??**,

$$\bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X)\} = \{F_X\}. \tag{3.3}$$

Por el Teorema **??**, Y no es homeomorfo a una $\theta_{m'}$ gráfica, con $m' \in \mathbb{N}$. Así que, por el Lema **??**,

$$\bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(Y)}(q_Y(\mathcal{K}_Y^{j_h})) : E'_{j_h} \in \mathcal{A}_S(Y)\} = \{F_Y\}. \tag{3.4}$$

Por (**??**), por Teorema **??** (a) y por (**??**), tenemos que

$$\begin{aligned} h(\{F_X\}) &= \bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(Y)}(h(q_X(\mathcal{K}_X^j))) : E_j \in \mathcal{A}_S(X)\} \\ &= \bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(Y)}(q_Y(\mathcal{K}_Y^{j_h})) : E'_{j_h} \in \mathcal{A}_S(Y)\} \\ &= \{F_Y\} \end{aligned}$$

Por tanto, $h(F_X) = F_Y$.

Notemos que, si $A \in F_n(X)-F_1(X)$, entonces $q_X(A) \neq F_X$. Así, $h(q_X(A)) \neq F_Y$. Por tanto, existe $B_A \in F_n(Y)-F_1(Y)$ tal que $q_Y(B_A) = h(q_X(A))$, es decir, la función

$$g = (q_Y^*)^{-1} \circ h \circ q_X^* \colon F_n(X) - F_1(X) \to F_n(Y) - F_1(Y),$$

dada por $g(A) = B_A$, es un homeomorfismo.

Para cada $E_j \in \mathcal{A}_S(X)$, sea

$$\mathcal{K}_n(E_j, X) = \mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X^j) - F_1(X).$$

De acuerdo al Teorema **??**, tenemos que $h(q_X(\mathcal{K}_X^j)) = q_Y(\mathcal{K}_Y^{j_h})$, para algún $E'_{j_h} \in \mathcal{A}_S(Y)$, donde $\mathcal{K}_Y^{j_h} \subset \langle \mathrm{int}_Y(E'_{j_h}) \rangle$.

Afirmación 1. Sea $E_j \in \mathcal{A}_S(X)$. Entonces

(I) $g(\mathcal{K}_n(E_j, X)) = \mathcal{K}_n(E'_{j_h}, Y)$.

(II) $|E_j \cap R(X)| = |E'_{j_h} \cap R(Y)|$.

(III) Si $A \in \mathcal{K}_n(E_j, X)$, entonces $|A \cap R(X)| = |g(A) \cap R(Y)|$.

(IV) Si $A, B \in \mathcal{K}_n(E_j, X)$ tales que $A \cap R(X) = \{p\}$ y $B \cap R(X) = \{p\}$, entonces $g(A) \cap R(Y) = g(B) \cap R(Y)$.

Prueba de la Afirmación 1.

(I) Como g es un homeomorfismo, por Teorema **??** (a), tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{K}_n(E_j, X)) &= g(\mathrm{cl}_{F_n(X)}\ (\mathcal{K}_X^j) - F_1(X)) \\
&= g(\mathrm{cl}_{F_n(X)-F_1(X)}(\mathcal{K}_X^j)) \\
&= \mathrm{cl}_{F_n(Y)-F_1(Y)}(\mathcal{K}_Y^{j_h}) \\
&= \mathrm{cl}_{F_n(Y)}(\mathcal{K}_Y^{j_h}) - F_1(Y) \\
&= \mathcal{K}_n(E'_{j_h}, Y).
\end{aligned}$$

Por tanto se cumple (I).

(II) Esto se sigue de (1) y (2).

(III) Sea $A \in \mathcal{K}_n(E_j, X)$.

Notemos que $|A \cap R(X)| = 0$ si y solo si $A \in \mathrm{int}_{F_n(X)}(\langle E_j \rangle)$ si y solo si $g(A) \in \mathrm{int}_{F_n(Y)}(\langle E'_{j_h} \rangle)$ si y solo si $|g(A) \cap R(Y)| = 0$.

Caso 1. Supongamos que $|E_j \cap R(X)| = 1$.

Por (II), note que $|E'_{j_h} \cap R(Y)| = 1$. Luego, $|A \cap R(X)| = 1$ si y solo si $A \in \mathrm{bd}_{F_n(X)}(\langle E_j \rangle) - F_1(X)$ si y solo si $g(A) \in \mathrm{bd}_{F_n(Y)}(\langle E'_{j_h} \rangle) - F_1(Y)$ si y solo si $|g(A) \cap R(Y)| = 1$.

Caso 2. Supongamos que $|E_j \cap R(X)| = 2$.

Sea $\{p, q\} = E_j \cap R(X)$, con $p \neq q$. Por (1) y (2), tenemos que $E'_{j_h} \cap R(Y) = \{p', q'\}$, donde $p' \neq q'$. Consideremos lo siguiente en $F_n(X)$.

$$\mathcal{A}_1 = \{B \in \mathrm{bd}_{F_n(X)}(\langle E_j \rangle) - F_1(X) : B \cap R(X) = \{p\}\},$$

$$\mathcal{A}_2 = \{B \in \mathrm{bd}_{F_n(X)}(\langle E_j \rangle) - F_1(X) : B \cap R(X) = \{q\}\},$$

$$\mathcal{A}_3 = \{B \in \mathrm{bd}_{F_n(X)}(\langle E_j \rangle) - F_1(X) : B \cap R(X) = \{p, q\}\}.$$

Notemos que $\mathrm{bd}_{F_n(X)}(\langle E_j \rangle) - F_1(X) = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$. De manera similar, definimos en $F_n(Y)$, $\mathcal{A}_1^{'}, \mathcal{A}_2^{'}, \mathcal{A}_3^{'}$, para obtener $\mathrm{bd}_{F_n(Y)}(\langle E_{j_h}^{'} \rangle) - F_1(Y) = \mathcal{A}_1^{'} \cup \mathcal{A}_2^{'} \cup \mathcal{A}_3^{'}$.
De lo anterior obtenemos lo siguiente: (i) $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ son subconjuntos abiertos de $\mathrm{bd}_{F_n(X)}(\langle E_j \rangle) - F_1(X)$. De manera natural, $\mathcal{A}_1^{'}, \mathcal{A}_2^{'}$ son subconjuntos abiertos de $\mathrm{bd}_{F_n(Y)}(\langle E_{j_h}^{'} \rangle) - F_1(Y)$. (ii) el interior de $\mathcal{A}_3$ en $\mathrm{bd}_{F_n(X)}(\langle E_j \rangle) - F_1(X)$ es vacío. De manera natural, el interior de $\mathcal{A}_3^{'}$ en $\mathrm{bd}_{F_n(Y)}(\langle E_{j_h}^{'} \rangle) - F_1(Y)$ es vacío.

Como $g(\mathrm{bd}_{F_n(X)}(\langle E_j \rangle) - F_1(X)) = \mathrm{bd}_{F_n(Y)}(\langle E_{j_h}^{'} \rangle) - F_1(Y)$, entonces $g(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1^{'} \cup \mathcal{A}_2^{'} \cup \mathcal{A}_3^{'}$. Por (i) y (ii), tenemos que $g(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1^{'} \cup \mathcal{A}_2^{'}$. De manera similar, obtenemos que $g^{-1}(\mathcal{A}_1^{'} \cup \mathcal{A}_2^{'}) \subset \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. Así, $g(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2) = \mathcal{A}_1^{'} \cup \mathcal{A}_2^{'}$. Luego, $g(\mathcal{A}_3) = \mathcal{A}_3^{'}$. Es decir, $|A \cap R(X)| = |g(A) \cap R(Y)|$. Por tanto, se cumple (III).

(IV) Supongamos que $A = \{p, a_1, \ldots, a_s\}$ y $B = \{p, b_1, \ldots, b_l\}$ tales que $l \leq s$.

Sea $\alpha_i \colon [0,1] \to E_j$ una función continua tal que $\alpha_i(0) = a_i$ y $\alpha_i(1) = b_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$. Dado $i \in \{1, \ldots, l\}$, como $a_i, b_i \in \mathrm{int}_X(E_j)$ podemos suponer que $\alpha_i(t) \notin R(X)$, para cada $t \in [0,1]$.

Si $l < s$, sea $\alpha_k \colon [0,1] \to E_j$ una función continua tal que $\alpha_k(0) = a_k$ y $\alpha_k(1) = p$, para cada $k \in \{l+1, \ldots, s\}$. Dado $k \in \{l+1, \ldots, s\}$, como $a_k \in \mathrm{int}_X(E_j)$, podemos suponer que $\alpha_k(t) \notin R(X)$, para cada $t \in [0,1)$.

La función $\alpha \colon [0,1] \to \mathcal{K}_n(E_j, X)$ definida por $\alpha(t) = \{p\} \cup \bigcup_{i=1}^{s}\{\alpha_i(t)\}$, para cada $t \in [0,1]$ es continua. Además, $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$. Note que $p \in \alpha(t) \cap R(X)$, para cada $t \in [0,1]$. Dado $t \in (0,1)$, sea $w \in \alpha(t) \cap R(X)$. Thus, $w = p$ o $w \in \bigcup_{i=1}^{s}\{\alpha_i(t)\}$. Si $w \in \bigcup_{i=1}^{s}\{\alpha_i(t)\}$, entonces existe $s_0 \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $\alpha_{s_0}(t) = w$. Así, $\alpha_{s_0}(t) \in R(X)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $w = p$. Luego, $\alpha(t) \cap R(X) = \{p\}$, para cada $t \in [0,1]$. Por (III), tenemos que $|g(A) \cap R(Y)| = 1$. Sea $\{p'\} = g(A) \cap R(Y)$.

Sea $T = \{t \in [0,1] : p' \in g(\alpha(t))\}$. Notemos que T es un subconjunto cerrado del $[0,1]$ y $0 \in T$. Supongamos que $T \neq [0,1]$. Sea $t_0 = \mathrm{ínf}([0,1] - T)$ y sea $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos en $[0,1] - T$ la cual converge a t_0. Sea $w \in E_{j_h}' \cap R(Y) - \{p'\}$. Entonces $w \in g(\alpha(t_i))$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Como $\{g(\alpha(t_i))\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $g(\alpha(t_0))$, tenemos que $w \in g(\alpha(t_0))$. Como $t_0 \in T$, tenemos que $w, p' \in g(\alpha(t_0))$, lo cual es una contradicción, ya que por (III), $|g(\alpha(t_0)) \cap R(Y)| = 1$. Así, $T = [0,1]$. Por tanto, $g(B) \cap R(Y) = \{p'\}$. Así, $g(A) \cap R(Y) = g(B) \cap R(Y)$. Esto completa la prueba de la Afirmación 1.

Vamos a definir una biyección entre $R(X)$ y $R(Y)$.

Sea $p \in R(X)$ y supongamos que $p \in E_1$. Sea $A \in \mathcal{K}_n(E_1, X)$ fijo tal que $A \cap R(X) = \{p\}$. Por Afirmación 1 (I), $g(A) \in \mathcal{K}_n(E_{1_h}', Y)$. Por Afirmación 1 (III), $|g(A) \cap R(Y)| = 1$. Sea $p' \in Y$ tal que $\{p'\} = g(A) \cap R(Y)$. Notemos que $p' \in E_{1_h}'$.

Vamos a probar que p' no depende de la elección de A ni de la elección de E_1, es decir, si $t \in \{2, \ldots, m\}$ es tal que $p \in E_t$ y $B \in \mathcal{K}_n(E_t, X)$ de tal manera que $B \cap R(X) = \{p\}$, entonces $g(B) \cap R(Y) = \{p'\}$. Para probar esto, vamos a considerar E_1, E_t, A y B como los acabamos de mencionar.

Por Afirmación 1 (I), $g(B) \in \mathcal{K}_n(E'_{t_h}, Y)$ y por Afirmación 1 (III), $|g(B) \cap R(Y)| = 1$. Sea $q' \in Y$ tal que $q' = g(B) \cap R(Y)$ y note que $q' \in E'_{t_h}$.

Tenemos que probar $q' = p'$.

Fijamos $t \in \{2, \ldots, m\}$ tal que $i_1 + i_t = n$. Como $\mathcal{K}_X(1, t)$ es una componente de $\mathcal{E}_n(X)$, entonces $g(\mathcal{K}_X(1, t))$ es una componente de $\mathcal{E}_n(Y)$. Por [**?**, Lema 4.1], existe una componente $\langle \mathrm{int}_Y(E'_{l_1}), \ldots, \mathrm{int}_Y(E'_{l_{r'}}) \rangle$ de $F_n(Y) - R_n(Y)$ tal que

$$g(\mathcal{K}_X(1, t)) \subset \langle \mathrm{int}_Y(E'_{l_1}), \ldots, \mathrm{int}_Y(E'_{l_{r'}}) \rangle. \tag{3.5}$$

Afirmación 2. Existen $z, s \in \{l_1, \ldots, l_{r'}\}$ tales que $E'_z = E'_{1_h}$ and $E'_s = E'_{t_h}$.

Prueba de la afirmación 2. Sean $a \in \mathrm{int}_X(E_1)$ y $C = \{p, a\}$. Así, $C \in \mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(1, t)) \cap \mathcal{K}_n(E_1, X)$. Por (**??**) y por Afirmación 1 (I), tenemos que $g(C) \in \mathrm{cl}_{F_n(Y)}(\langle \mathrm{int}_Y(E'_{l_1}), \ldots, \mathrm{int}_Y(E'_{l_{r'}}) \rangle) \cap \mathcal{K}_n(E'_{1_h}, Y)$. Por Afirmación 1 (III), $|g(C) \cap R(Y)| = 1$. Como $h(F_X) = F_Y$, tenemos que $g(C) \notin F_1(Y)$. Así, de $g(C) \in \mathcal{K}_n(E'_{1_h}, Y)$, tenemos que $g(C) \cap \mathrm{int}_Y(E'_{1_h}) \neq \emptyset$. Si $E'_{1_h} \neq E'_j$, para cada $j \in \{l_1, \ldots, l_{r'}\}$, entonces $g(C) \notin \mathrm{cl}_{F_n(Y)}(\langle \mathrm{int}_Y(E'_{l_1}), \ldots, \mathrm{int}_Y(E'_{l_{r'}}) \rangle)$, lo cual es una contradicción. Así, existe $z \in \{l_1, \ldots, l_{r'}\}$ tal que $E'_z = E'_{1_h}$. De una manera similar, existe $s \in \{l_1, \ldots, l_{r'}\}$ tal que $E'_s = E'_{t_h}$. Esto completa la prueba de la Afirmación 2.

Ahora, de (**??**) y la Afirmación 2, se mantiene la siguiente:

$$g(\mathcal{K}_X(1, t)) \subset \langle \mathrm{int}_Y(E'_{1_h}), \mathrm{int}_Y(E'_{t_h}), \ldots, \mathrm{int}_Y(E'_{l_{r'}}) \rangle. \tag{3.6}$$

Afirmación 3. $p', q' \in E'_{1_h} \cap E'_{t_h}$.

Prueba de la afirmación 3. Fijamos $C \in \mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(1, t)) \cap \mathcal{K}_n(E_1, X)$ tal que $C \cap R(X) = \{p\}$. Por Afirmación 1 (III), $|g(C) \cap R(Y)| = 1$. Como $C \in \mathcal{K}_n(E_1, X)$, por Afirmación 1 (IV), $g(C) \cap R(Y) = \{p'\}$. Por (**??**) y por Afirmación 1 (I), $g(C) \in \langle \mathrm{int}_Y(E'_{1_h}), \mathrm{int}_Y(E'_{t_h}), \ldots, \mathrm{int}_Y(E'_{l_{r'}}) \rangle \cap \mathcal{K}_n(E'_{1_h}, Y)$. Como $g(C) \in \mathcal{K}_n(E'_{1_h}, Y)$ y $g(C) \cap R(Y) = \{p'\}$, entonces $g(C) - \{p'\} \subset \mathrm{int}_Y(E'_{1_h})$. Como $g(C) \in \langle \mathrm{int}_Y(E'_{1_h}), \mathrm{int}_Y(E'_{t_h}), \ldots, \mathrm{int}_Y(E'_{l_{r'}}) \rangle$, entonces $g(C) \cap E'_{t_h} \neq \emptyset$. Así, $g(C) \cap E'_{t_h} = \{p'\}$. Luego, $p' \in E'_{t_h}$.

De una manera similar, si fijamos $D \in \mathrm{cl}_{F_n(X)}(\mathcal{K}_X(1, t)) \cap \mathcal{K}_n(E_t, X)$ tal que $D \cap R(X) = \{p\}$, entonces $g(D) \cap E'_{1_h} = \{q'\}$. Así, $q' \in E'_{1_h}$.

Por tanto, $p', q' \in E'_{1_h} \cap E'_{t_h}$. Esto completa la prueba de la Afirmación 3.

Sea $\mathcal{P} = \{E_j \in \mathcal{A}_S(X) : p \in E_j\}$ y $k = |\mathcal{P}|$.

Supongamos que $p' \neq q'$:

Sea $E_j \in \mathcal{P}$. Fijamos $C \in \mathcal{K}_n(E_j, X)$ tal que $C \cap R(X) = \{p\}$. Por Afirmación 1 (III), $|g(C) \cap R(Y)| = 1$. Sea $p* \in Y$ tal que $g(C) \cap R(Y) = \{p*\}$. Note que $p* \in E'_{j_h}$. Al tomar E_j en lugar de E_t en las Afirmaciones 2 y 3 tenemos que $p', p* \in E'_{1_h} \cap E'_{j_h}$. De manera similar, se obtiene que $q', p* \in E'_{t_h} \cap E'_{j_h}$. Así,

$$p', q' \in E'_{j_h}, \text{ para cada } E_j \in \mathcal{P}. \tag{3.7}$$

Como Y no es una $\theta_{m'}$ gráfica, existe $E'_{\lambda_h} \in \mathcal{A}_S(Y)$ tal que $p' \in E'_{\lambda_h}$ y $q' \notin E'_{\lambda_h}$, o $p' \notin E'_{\lambda_h}$ y $q' \in E'_{\lambda_h}$. Es suficiente considerar solo el caso en que $p' \in E'_{\lambda_h}$ y $q' \notin E'_{\lambda_h}$. El otro caso también nos conduce a una contradicción.

Recordemos que $A \cap R(X) = \{p\}$ y $p \in E_1$. Más aún, sabemos que $g(A) \cap R(Y) = \{p'\}$ y $g(A) \in \mathcal{K}_n(E'_{1_h}, Y)$. Tomamos $B' \in \mathcal{K}_n(E'_{\lambda_h}, Y)$ tal que $B' \cap R(Y) = \{p'\}$. Por la Afirmación 1 (III), $|g^{-1}(B') \cap R(X)| = 1$. Sea $q_1 \in X$ tal que $g^{-1}(B') \cap R(X) = \{q_1\}$. Notemos que $q_1 \in E_\lambda$.

Dado que Y satisface condiciones métricas como X, con argumentos similares como en la Afirmación 2 y Afirmación 3, obtenemos que $p, q_1 \in E_1 \cap E_\lambda$. Así, $E_\lambda \in \mathcal{P}$. Por (**??**), $p', q' \in E'_{\lambda_h}$, lo cual es una contradicción.

Por tanto, $q' = p'$.

Sea $\mathcal{P}' = \{E'_j \in \mathcal{A}_S(Y) : p' \in E'_j\}$. Por tanto, $E_j \in \mathcal{P}$ si y solo si $E'_{j_h} \in \mathcal{P}'$. Así, $|\mathcal{P}| = |\mathcal{P}'|$. Con esta última igualdad y las hipótesis (a), (b), tenemos que $\mathrm{ord}(p, X) = \mathrm{ord}(p', Y)$.

Como p' no depende de la elección de $E_j \in \mathcal{P}$ ni del elemento $B \in \mathcal{K}_n(E_j, X)$, lo denotamos como p_h. De esta manera, tenemos una funión $\varphi\colon R(X) \to R(Y)$ dada por $\varphi(p) = p_h$. Notemos que φ satisface la siguiente propiedad:

Si $p \in R(X)$ y $A \in \mathcal{K}_n(E_j, X)$ tal que $A \cap R(X) = \{p\}$, entonces $g(A) \in \mathcal{K}_n(E'_{j_h}, Y)$ tal que $g(A) \cap R(Y) = \{p_h\}$.

De acuerdo al Teorema **??**, X y Y satisfacen condiciones simétricas. Con argumentos similares, podemos definir la función $\phi : R(Y) \to R(X)$, dada por $\phi(q) = q_{h^{-1}}$, la cual satisface que:

Si $q \in R(Y)$ y $B \in \mathcal{K}_n(E'_{j_h}, Y)$ tal que $B \cap R(Y) = \{q\}$, entonces $g^{-1}(B) \in \mathcal{K}_n(E_j, X)$ tal que $g^{-1}(B) \cap R(X) = \{q_{h^{-1}}\}$.

Por las propiedades que satisfacen φ y ϕ, obtenemos que ϕ es la inversa de φ. Por tanto, φ es una biyección entre $R(X)$ y $R(Y)$.

Ahora, podemos extender φ a un homeomorfismo entre X y Y.

Tomamos $E_j \in \mathcal{A}_S(X)$. Notemos que $|E_j \cap R(X)| = 2$ implica que E_j es un arco. Sea p y q los puntos extremos de E_j. Entonces $\{p, q\} = E_j \cap R(X)$. Por Afirmación 1 (II), E'_{j_h} es un arco con puntos extremos $\varphi(p)$ y $\varphi(q)$. Podemos considerar un homeomorfismo $\varphi_j\colon E_j \to E'_{j_h}$ tal que $\varphi_j(p) = \varphi(p)$ y $\varphi_j(q) = \varphi(q)$. En el caso de que $|E_j \cap R(X)| = 1$, digamos que $E_j \cap R(X) = \{w\}$, sabemos que $E'_{j_h} \cap R(Y) = \{\varphi(w)\}$. Por (a) y (b), existe un homeomorfismo $\varphi_j : E_j \to E'_{j_h}$ tal que $\varphi_j(w) = \varphi(w)$.

Así, definimos $\psi : X \to Y$ como $\psi(x) = \varphi_j(x)$, si $x \in E_j$. Por [**?**, Teorema 9.4, pág. 83], ψ es un homeomorfismo entre X y Y. □

Con el teorema siguiente tenemos por terminado la unicidad del n-ésimo producto simétrico suspensión para las gráficas finitas.

Teorema 3.19. *Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si X es una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$ y X no es una θ_m gráfica, entonces X tiene n-ésimo producto simétrico suspensión único.*

Demostración. Sean Y un continuo y $h\colon SF_n(X) \to SF_n(Y)$ un homeomorfismo. Como X es una gráfica finita, por el Teorema **??**, Y es una gráfica finita.

Como $R(X) \neq \emptyset$, por el Teorema **??**, $R(Y) \neq \emptyset$. Como X no es una θ_m gráfica para cada $m \in \mathbb{N}$, por el Teorema **??**, tenemos que Y no es una $\theta_{m'}$ gráfica para cada $m' \in \mathbb{N}$.

Sea $E_j \in \mathcal{A}_S(X)$. Por el Teorema **??**, podemos encontrar $E'_{j_h} \in \mathcal{A}_S(Y)$ tal que $h(q_X(\mathcal{K}^j_X)) = q_Y(\mathcal{K}^{j_h}_Y)$. Esto implica que $h(q_X(\langle E_j \rangle) - \{F_X\}) = q_Y(\langle E'_{j_h} \rangle) - \{F_Y\}$. Por la primera parte del Teorema **??**, tenemos que $h(q_X(\langle E_j \rangle)) = q_Y(\langle E'_{j_h} \rangle)$. Consideramos el homeomorfismo $h^* = h|_{q_X(\langle E_j \rangle)} : q_X(\langle E_j \rangle) \to q_Y(\langle E'_{j_h} \rangle)$. Como $q_X(\langle E_j \rangle)$ es homeomorfo a $SF_n(E_j)$ y $q_Y(\langle E'_{j_h} \rangle)$ es homeomorfo a $SF_n(E'_{j_h})$, por el Teorema **??**, tenemos que E_j es ciclo si y solo si E'_{j_h} es un ciclo y E_j es un arco si y solo si E'_{j_h} es un arco.

Sea $E_j \in \mathcal{A}_E(X)$. Por el párrafo anterior, tenemos que E'_{j_h} es un arco. Vamos a probar que $E'_{j_h} \in \mathcal{A}_E(Y)$. Supongamos que $E'_{j_h} \notin \mathcal{A}_E(Y)$. Sea $g : F_n(X) - F_1(X) \to F_n(Y) - F_1(Y)$ la función definida como $g(A) = (q^*_Y)^{-1} \circ h \circ q^*_X(A)$. Como $E_j \in \mathcal{A}_E(X)$, entonces $|E_j \cap R(X)| = 1$. Sean $p, a \in X$ los puntos extremos de E_j de tal manera que $E_j \cap R(X) = \{p\}$. Elegimos puntos $a_2, \ldots, a_n \in \mathrm{int}_X(E_j) - \{a\}$ ajenos por pares. Sea $A = \{a, a_2, \ldots, a_n\}$. Notemos que $A \in \mathcal{K}^j_X$. Por el Teorema **??**, tenemos que $g(A) \in \mathcal{K}^{j_h}_Y$. Como E_j es un arco, usando la Afirmación 2 del Teorema **??**, existe una vecindad $\mathcal{M}$ de A en $F_n(E_j)$ la cual es una n-celda y $A \in \partial\mathcal{M}$. Por el Teorema **??**, podemos suponer que $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}^j_X$. Así, $g(\mathcal{M})$ es una vecindad de $g(A)$ la cual es una n-celda y $g(A) \in \partial g(\mathcal{M})$. Como $g(A) \in \mathcal{K}^{j_h}_Y$, tenemos que $|g(A)| = n$. Por el Teorema **??**, existen subconjuntos ajenos por pares, abiertos y conexos $V_1, \ldots, V_n$ de E'_{j_h} tal que $g(A) \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle \subset \mathrm{int}_{F_n(E'_{j_h})}(g(\mathcal{M}))$. Como $E'_{j_h} \notin \mathcal{A}_E(Y)$ y $g(A) \in \mathcal{K}^{j_h}_Y$, entonces $g(A)$ no tiene puntos extremos de E'_{j_h}. Más aún, podemos suponer que $V_i \cap R(Y) = \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así, cada V_i es homeomorfo a $(0,1)$. Por tanto, $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ es homeomorfo a $(0,1)^n$. Luego, $g(A) \notin \partial g(\mathcal{M})$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $E'_{j_h} \in \mathcal{A}_E(Y)$.

De manera similar podemos probar que si $E'_{j_h} \in \mathcal{A}_E(Y)$, entonces $E_j \in \mathcal{A}_E(X)$.

Así, tenemos probado las condiciones (1) y (2) del Teorema **??**. Por tanto, X es homeomorfo a Y. $\square$

Como consecuencia de los Teoremas **??**, **??** y **??**, tenemos nuestro resultado principal.

Teorema 3.20. *Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$, entonces X tiene n-ésimo producto simétrico suspensión único.*

Demostración. Si $R(X) = \emptyset$, por el Teorema **??** X tiene n-ésimo producto simétrico suspensión único.

Si X es una θ_m gráfica, por el Teorema **??** X tiene n-ésimo producto simétrico suspensión único.

Si $R(X) \neq \emptyset$ y X no es una θ_m gráfica, por el Teorema **??** X tiene n-ésimo producto simétrico suspensión único. $\square$

Conclusiones

Los resultados más importantes de este trabajo, son fundamentales para poder llegar a demostrar que las gráficas finitas tienen n-ésimo producto simétrico suspensión único.

* Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, entonces las componentes de $\mathcal{E}_n(X)$ son los conjuntos de la forma:

$$\mathcal{K}_X(i_1, \ldots, i_m).$$

* Si X es un continuo localmente conexo casi enrejado y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$, entonces no existen vecindades de F_X en $SF_n(X)$ encajables en $\mathbb{R}^n$.

* Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si X, Y son continuos tales que $SF_n(X)$ es homeomorfo a $SF_n(Y)$, entonces X es gráfica finita si y solo si Y es gráfica finita.

* Sean $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, y X una gráfica finita con $R(X) \neq \emptyset$.

  Si X no es la gráfica θ_m, entonces

$$\bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X)\} = \{F_X\}.$$

  Si X es la gráfica θ_m, entonces

$$\bigcap\{\mathrm{cl}_{SF_n(X)}(q_X(\mathcal{K}_X^j)) : E_j \in \mathcal{A}_S(X)\} = \{F_X, q_X(\{u, v\})\}.$$

* Sean Y un continuo y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$.

  (a) Si $SF_n(Y)$ es homeomorfo a $SF_n([0,1])$, entonces Y es homeomorfo a $[0,1]$.

  (b) Si $SF_n(Y)$ es homeomorfo a $SF_n(S^1)$, entonces Y es homeomorfo a S^1.

* Sean X, Y gráficas finitas, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ y $h \colon SF_n(X) \to SF_n(Y)$ un homeomorfismo. Entonces se cumple lo siguiente:

(a) Para cada $E_j \in \mathcal{A}_S(X)$, tenemos que $h(q_X(\mathcal{K}_X^j)) = q_Y(\mathcal{K}_Y^{j_h})$, para algún $E'_{j_h} \in \mathcal{A}_S(Y)$.

(b) La relación $E_j \mapsto E'_{j_h}$ es una biyección entre $\mathcal{A}_S(X)$ and $\mathcal{A}_S(Y)$.

* Sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si X es la gráfica θ_m, entonces X tiene n-ésimo producto simétrico suspensión único.

* Sea X es una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$ y X no es la gráfica θ_m. Si $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, Y una gráfica finita y $h\colon SF_n(X) \to SF_n(Y)$ un homeoforfismo, entonces $h(F_X) = F_Y$.

  Si también suponemos:

  (1) $E_j \in \mathcal{A}_R(X)$ si y solo si $E'_{j_h} \in \mathcal{A}_R(Y)$ y

  (2) $E_j \in \mathcal{A}_E(X)$ si y solo si $E'_{j_h} \in \mathcal{A}_E(Y)$,

  entonces X es homeomorfo a Y.

* Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$. Si X es una gráfica finita tal que $R(X) \neq \emptyset$ y X no es la gráfica θ_m, entonces X tiene n-ésimo producto simétrico suspensión único.

* Si X es una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 4$, entonces X tiene n-ésimo producto simétrico suspensión único.

Problema 3.21. *Para futuros trabajos se pretende resolver los casos para cuando $n = 2$ y $n = 3$.*

Bibliografía

[1] G. Acosta (2002), *Continua with unique hyperspace*, Continuum Theory, 33–49. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 130, New York and Basel: Marcel Dekker, Inc. 2002.

[2] G. Acosta, R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, *Dendrites and symmetric products*, Glas. Math. Ser. III 44 (1) (2009), 195–210.

[3] G. Acosta, D. Herrera-Carrasco, *Dendrites without unique hyperspace,* Houst. J. Math. 35 (2) (2009), 451–467.

[4] G. Acosta, D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Local dendrites with unique hyperspace* $C(X)$, Topol. Appl. 157 (2010), 2069–2085.

[5] J. G. Anaya, D. Maya, F. Vázquez-Juárez, *The hyperspace* $HS_m^n(X)$ *for a finite graph* X *is unique*, Topology Appl. 157 (2018), 428–439.

[6] J. G. Anaya, E. Castañeda-Alvarado, A. Illanes, *Continua with unique symmetric product.* Comment. Math. Univ. Carolin. 54 (2013), 397–406.

[7] F. Barragán, *On the n-fold symmetric product suspensions of continuum,* Topology Appl. 157 (2010), 297–604.

[8] K. Borsuk, S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931), 875–882.

[9] J. J. Charatonik, A. Illanes, *Local connectedness in hyperspaces*, Rocky Mt. J. Math. 36 (2006), 811–856.

[10] E. Castañeda, A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topol. Appl. 153 (2006), 1434–1450.

[11] D. Curtis, N.T. Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to* $\aleph_0$*-dimensional linear metric spaces.* Topology Appl. 19 (1985), 251–260.

[12] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph,* I, Fund. Math. 62 (1968) 265–286.

[13] J. Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1978.

[14] R. Escobedo, M. de J. López, S. Macías, *On the hyperspace suspension of a continuum,* Topology Appl. 138 (2004), 109–124.

[15] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Uniqueness of hyperspaces for Peano continua*, Rocky Mt. J. Math. 43 (5) (2013), 1583–1624.

[16] R. Hernández-Gutiérrez, A. Illanes, V. Martínez-de-la-Vega, *Rigidity of hyperspaces,* Rocky Mt. J. Math. 45 (1) (2015), 213–236.

[17] R. Hernández-Gutiérrez, V. Martínez-de-la-Vega, *Rigidity of symmetric products,* Topol. Appl. 160 (2013), 1577–1587.

[18] D. Herrera-Carrasco, *Dendrites with unique hyperspace,* Houst. J. Math. 33 (3) (2007), 795–805.

[19] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Dendrites with unique hyperspace* $C_2(X)$, Topol. Appl. 156 (2009), 549–557.

[20] D. Herrera-Carrasco, A. Illanes, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Finite graphs have unique hyperspace* $HS_n(X)$, Topol. Proc. 44 (2014), 75–95.

[21] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Dendrites with unique symmetric products,* Topol. Proc. 34 (2009), 175–190.

[22] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Framed continua have unique* n*-fold hyperspace suspension,* Topol. Appl. 196 (2015), 652–667.

[23] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua have unique second symmetric product,* Topol. Appl. 209 (2016), 1–13.

[24] D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Almost meshed locally connected continua without unique* n*-fold hyperspace suspension*, Houston J. Math. 44 (4) (2018), 1335-1365.

[25] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Dendrites with unique* n*-fold hyperspace,* Topol. Proc. 32 (2008), 321–337.

[26] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, *Local dendrites with unique* n*-fold hyperspace,* Topol. Appl. 158 (2011), 244–251.

[27] D. Herrera-Carrasco, F. Macías-Romero, F. Vázquez-Juárez, *Peano continua with unique symmetric products,* J. Math. Res. 4 (4) (2012), 1–9.

[28] W. Hurewicks, H. Wallman, *Dimension theory*, Princenton University Press, Princenton, ninth printing, N.J. 1974.

[29] A. Illanes, *The hyperspace $C_2(X)$ for a finite graph X is unique,* Glas. Mat. 37 (57) (2002) 347–363.

[30] A. Illanes, *Finite graphs X have unique hyperspaces $C_n(X)$,* Topol. Proc. 27 (2003) 179–188.

[31] A. Illanes, *Uniqueness of Hyperspaces,* Quest. Answ. Gen. Topol. 30 (2012), 21–44.

[32] A. Illanes, *Models of Hyperspaces,* Topol. Proc. 41 (2013), 39–64.

[33] A. Illanes, S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances,* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[34] A. de Jesús Libreros López, *Rigidez del producto simétrico para continuos alambrados*, Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2018.

[35] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. II, Academic Press, New York, N.Y., 1968.

[36] J. C. Macías, *On the n-fold pseudo-hyperspace suspensions of continua*, Glas. Mat. 43 (2008), 439–449.

[37] S. Macías, *Aposyndetic properties of symmetric products of continua*, Topology Proc. 22 (1997), 281–296.

[38] S. Macías, *On the n-fold hyperspace suspension of continua*, Topol. Appl. 138 (2004) 125–138.

[39] S. Macías, *On the n-fold hyperspace suspension of continua, II*, Glasnik Mat. 41(61)(2006), 335–343.

[40] S. Macías, *Topics on continua*, 2nd ed., Springer, Cham, Switzerland, 2018.

[41] S. Macías, S. B. Nadler Jr., *Absolute n-fold hyperspace suspension*, Col. Mat. 105(2) (2006) 221-231.

[42] G. Montero-Rodríguez, D. Herrera-Carrasco, M. de J. López, F. Macías-Romero, *Finite graphs have unique n-fold symmetric product suspension*, por aparecer en Houston J. Math.

[43] U. Morales-Fuentes, *Finite graphs have unique n-fold pseudo-hyperspace suspension*, Topology Proc. 52 (2018), 219–233.

[44] S. B. Nadler, Jr., *A fixed point theorem for hyperspace suspensions*, Houston J. Math. 5 (1) (1979), 125–132.

[45] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, 1978.

[46] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory. An introduction.* Monographs and Texbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, ISBN:0-8247-8659-9, 1992.