BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

ESPACIOS CGWH

TESIS PRESENTADA PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRÍA
EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA
BRUNO LÓPEZ GARCÍA

DIRECTORES DE TESIS
DOC. AGUSTÍN CONTRERAS CARRETO
DOC. IVAN FERNANDO VILCHIS MONTALVO

MARZO 2022

Agradecimientos a mi papá donde esté
y a mi mamá que sigue conmigo.
Agradecimientos a mis asesores
por no rendirse conmigo.

Índice general

Introducción

La frase “categoría conveniente de espacios topológicos” antecede a Steenrod [9] por varios años; la introducción de Brown [4] dice: *It may be turn out that the category of Hausdorff k-spaces is adequate and convenient for all purposes of topology.* Los requerimientos para que una categoría sea conveniente se enuncian en Brown [2]. A pesar de que usualmente se piensa en Steenrod en realidad Brown [3] fue el primero en probar que los k-espacios Hausdorff formaban lo que hoy en día es llamado una categoría cartesianamente cerrada, influenciado por Cohen [7]. Una categoría conveniente de espacios topológicos es una subcategoría $\mathscr{C}$ de la categoría **Top** de todos los espacios topológicos que es plena y repleta tal que cumple las siguientes condiciones:

(a) Todo complejo CW es un objeto de $\mathscr{C}$;

(b) $\mathscr{C}$ es cartesianamente cerrada;

(c) $\mathscr{C}$ es completa y cocompleta.

Se debe notar que los límites y colímites en $\mathscr{C}$ no necesariamente coinciden con los correspondientes límites y colímites en **Top**, excepto bajo ciertas condiciones. Algunas categorías convenientes son reflexivas o coreflexivas en **Top**, las cuales son cerradas bajo límites o colímites respectivamente. Por otro lado, los productos de objetos de $\mathscr{C}$ en **Top** no están en $\mathscr{C}$ necesariamente, por lo cual en esta situación el producto en $\mathscr{C}$ y el producto en **Top** no coinciden necesariamente. Este es el caso particular de los espacios compactamente generados, más aún, el “producto compactamente generado” es a veces preferido ante el producto usual en **Top**, por ejemplo, si X y Y son complejos CW, el producto usual no necesariamente es un complejo CW, pero si lo es con el producto compactamente generado [10].

En el libro *Categories for the Working Mathematician* de Saunders Mac Lane al final de la sección dedicada al estudio de los espacios Hausdorff compactamente generados nos dice: "*...this suggests in Top we have been studying the wrong mathematical objects. The right ones are the spaces in CGH*". Los espacios compactamente generados fueron originalmente llamados k-espacios por la palabra germana kompakt y fueron estudiados por Hurewicz; y se pueden encontrar en *General Topology* de Kelley, *Topology* de Dugundji y *Rational Homotopy Theory* de Felix, Halperin y Thomas. La motivación para su estudio a mayor profundidad inicio en la década de los sesenta pues la categoría usual de espacios topológicos tenía deficiencias, en contraposición con los espacios topológicos usuales, los espacios compactamente generados forman una categoría cartesianamente cerrada, siendo suficientemente generales aun para la mayoría de los propósitos de la topología general, formando una categoría conveniente de espacios topológicos [15].

La noción de espacios débilmente Hausdorff fue introducida por M. C. McCord [12] para remediar la inconveniencia de trabajar con la categoría de espacios Hausdorff. En [12] McCord nos dice que: *The paper [15] of Steenrod shows why it is convenient to work in the category of compactly generated Hausdorff spaces. In some contexts, though, the requirement of the Hausdorff condition can be a problem, because certain standard operations on spaces can lead outside the category. For example, if* (X, A) *is a closed pair of spaces in the category,* X/A *may not be in the category. There is a more general problem for adjunction spaces, and a problem for unions of expanding sequences. In the presence of certain extra conditions (see [15]) one can be guaranteed that the spaces remain in the category. But in some situations these conditions may be absent or difficult to verify. I have learned from J. C. Moore how one can slightly enlarge the category so that it has better closure properties, but still has the convenient technical properties in [15]. We proceed as follows...* Este agrandamiento se refiere justamente a trabajar con espacios que son debilmente Hausdorff en lugar de los espacios Hausdorff como veremos en la primer sección de esta tesis. Hoy en día los espacios compactamente generados han llegando a ser usados en la fundamentación de la topología algebraica y la teoría de homotopías en conjunto con la propiedad de ser débilmente Hausdorff, dando lugar a su forma más moderna como espacios compactamente generados débilmente Hausdorff (CGWH) gracias a McCord [12].

Inicialmente está tesis estaba pensada para abordar el estudio de teoría musical desde un punto de vista matemático, en particular el artículo [6], de ahí la necesidad de estudiar la categoría conveniente de espacios CGWH. Seguiremos el trabajo de Strickland [16], que me parece una visión condensada y moderna de esta categoría.

Capítulo 1

Espacios CGWH

1.1 Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que un subconjunto $Y \subseteq X$ es k-cerrado si para cada espacio K que sea compacto y Hausdorff y cada función continua $u : K \to X$, $u^{-1}(Y)$ es cerrado en K. Denotaremos por μ a la familia de cerrados de (X, τ) y por $k(\mu)$ a la familia de k-cerrados, además notemos que $\mu \subseteq k(\mu)$.

1.2 Lema. Sea $X \in \mathbf{Set}$ y $\eta \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que:

(a) $X, \emptyset \in \eta$.

(b) La intersección de cualquier subfamilia de η está en η.

(c) La unión de cualquier subfamilia finita de η está en η.

Entonces $\tau = \{X \setminus U | U \in \eta\}$ es una topología en X y η es la familia de cerrados de (X, τ).

1.3 Corolario. Sea (X, τ) un espacio topológico y $\eta := k(\mu)$ la familia de k-cerrados respecto a τ, entonces $k(\tau) := \{X \setminus U | U \in \eta\}$ es una topología en X y η es la familia de cerrados de $(X, k(\tau))$. Notemos que $k(\tau)$ es una topología más fina que τ, es decir $\tau \subseteq k(\tau)$.

Demostración. Es claro que η cumple el inciso (a) del lema anterior, probaremos los incisos restantes. Sean K un espacio compacto y Hausdorff, $u : K \to X$ una función continua y $\{A_i\}$ una subfamilia de η. Notemos que $u^{-1}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} u^{-1}(A_i)$ es una intersección de cerrados en K, por lo tanto $\bigcap_{i \in I} A_i \in \eta$. Ahora supongamos que $\{A_i\}$ es una subfamilia finita, entonces $u^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} u^{-1}(A_i)$ es una unión finita de cerrados en K, por lo tanto $\bigcup_{i \in I} A_i \in \eta$. $\square$

1.4 Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico. En lo que sigue denotaremos $kX = (X, k(\tau))$. Diremos que X es compactamente generado (CG) si $\tau = k(\tau)$, es decir, si $(X, \tau) = kX$.

1.5 Definición. Sea X un espacio topológico. Diremos que es débilmente Hausdorff (WH) si para cada espacio K que sea compacto y Hausdorff y cada función continua $u : K \to X$, $u(K)$ es cerrado en X.

1.6 Ejemplo. Sea X un conjunto no numerable con la topología conumerable, la topología que consiste del conjunto vacío y todos los subconjuntos de X que tienen complemento numerable, veamos que es un espacio WH pero no es un espacio Hausdorff. Sean A y B subconjuntos abiertos de X y supongamos que son disjuntos, luego $A \cap B$ también es abierto en X entonces $X \setminus (A \cap B) = X$ es numerable pero esto es una contradicción ya que X es no numerable, por lo tanto cualesquiera dos subconjuntos abiertos de X tienen intersección distinta del vacío, por lo tanto X no es un espacio Hausdorff. Por otro lado, supongamos que C es un subconjunto compacto e infinito de X y sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión infinita de elementos distintos de C. Consideremos los subconjuntos abiertos $V_m = X \setminus \{a_{m+n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de X con $m \in \mathbb{N}$, los cuales satisfacen que $V_{m_1} \subseteq V_{m_2}$ si $m_1 \leq m_2$. Tenemos que $\{V_m | m \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de C, entonces existe una subcubierta finita $\{V_{m_i} | i \in \{0, ..., N\}\}$ de C, sin perdida de generalidad supongamos que $m_i < m_{i+1}$. Entonces C está contenido en $\bigcup_{i=0}^{N} V_{m_i} = V_{m_N}$ pero $a_{m_N}, a_{m_N+1}, ... \notin V_{m_N}$ lo que es una contradicción, por lo tanto los subconjuntos compactos de X son finitos. Sean K un espacio compacto y Hausdorff y $u : K \to X$ una función continua, entonces $u(K)$ es compacto en X, se sigue que $u(K)$ es finito y por lo tanto numerable, entonces $u(K)$ es cerrado en X.

1.7 Observación. Sea X un espacio topológico. Si X es Hausdorff entonces sus subconjuntos compactos son cerrados; si X es compacto entonces sus subconjuntos cerrados son compactos.

1.8 Lema. Sea X un espacio topológico: X es compacto y Hausdorff $\Rightarrow$ X es compacto, regular y Hausdorff $\Rightarrow$ X es normal y Hausdorff $\Rightarrow$ X es localmente compacto.

Demostración. La demostración se puede encontrar en [14]. $\square$

1.9 Corolario. Todo espacio Hausdorff es WH.

Demostración. Sea X un espacio Hausdorff, K un espacio compacto y Hausdorff y $u : K \to X$ una función continua. Sabemos que $u(K)$ es compacto y por ser X Hausdorff, $u(K)$ es cerrado. $\square$

1.10 Lema. Sea X un espacio WH.

(a) Cada subconjunto unitario es cerrado (y por lo tanto T_1).

(b) Si K es compacto y Hausdorff y $u : K \to X$ es continua, entonces $u(K)$ es compacto y Hausdorff respecto a la topología heredada de X.

(c) Un subconjunto $Y \subseteq X$ es k-cerrado si y sólo si $Y \cap K$ es cerrado en K para cada subconjunto $K \subseteq X$ que sea compacto y Hausdorff respecto a la topología heredada de X.

Demostración. (a)Sean $x \in X$, el subespacio $\{x\} \subseteq X$ que es compacto y Hausdorff y la inclusión $\iota : \{x\} \to X$ que es una función continua. Como X es WH se tiene que $\iota(\{x\}) = \{x\}$ es cerrado en X.
(b)Veamos que $u(K)$ es Hausdorff. Sean $a, b \in u(K)$ tal que $a \neq b$, luego $\{a\}$ y $\{b\}$ son cerrados en X por (a), por lo tanto cerrados en $u(K)$ así $u^{-1}(a)$ y $u^{-1}(b)$ son subconjuntos cerrados y disjuntos en K. Por el lema 1.8 existen abiertos disjuntos U y V en K tal que $u^{-1}(a) \subseteq U$ y $u^{-1}(b) \subseteq V$. Sean

$$\begin{aligned} U' &:= \{x \in u(K) | u^{-1}(x) \subseteq U\} \\ &= \{x \in u(K) | u^{-1}(x) \bigcap U^c = \emptyset\} \\ &= \{x \in u(K) | x \notin u(U^c)\} \\ &= u(K) \setminus u(U^c) \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} V' &:= \{x \in u(K) | u^{-1}(x) \subseteq V\} \\ &= \{x \in u(K) | u^{-1}(x) \bigcap V^c = \emptyset\} \\ &= \{x \in u(K) | x \notin u(V^c)\} \\ &= u(K) \setminus u(V^c) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Por la manera en que definimos U' y V' sabemos que $a \in U'$, $b \in V'$ y que U' y V' son disjuntos. Por otro lado U^c es cerrado y por lo tanto compacto, entonces $u(U^c)$ es compacto y por lo tanto cerrado, luego $u(K) \setminus u(U^c)$ es abierto en $u(K)$; de la misma manera $u(K) \setminus u(V^c)$ es abierto en $u(K)$. Así hemos encontrado abiertos disjuntos para a y b respectivamente, por lo tanto

$u(K)$ es Hausdorff.
(c)Sea $Y \subseteq X$ un k-cerrado y $K \subseteq X$ como en la hipótesis, veamos que $Y \cap K$ es cerrado en K. Sea $\iota : K \to X$ la inclusión que es continua, por lo tanto $\iota^{-1}(Y) = Y \cap K$ es cerrado en K. Ahora si suponemos que $Y \cap K$ es cerrado en $K \subseteq X$ compacto y Hausdorff, veamos que Y es k-cerrado en X. Sea K' un espacio compacto y Hausdorff y $u : K' \to X$ una función continua. Por el inciso (b), $u(K') \subseteq X$ es compacto y Hausdorff, entonces $u(K') \cap Y$ es cerrado en $u(K')$, luego $u^{-1}(Y) = u^{-1}(Y \cap u(K'))$ es cerrado en K', por lo tanto Y es k-cerrado. $\square$

1.11 Definición. Sea X un espacio topológico y Y un subconjunto de X. Decimos que Y es secuencialmente cerrado si cada vez que una sucesión $\{y_n\}$ en Y converja a un punto x en X, se cumple que x también está en Y; claramente cada subespacio cerrado es secuencialmente cerrado. Decimos que X es un espacio secuencial si cada subconjunto secuencialmente cerrado es cerrado. También diremos que X es primero contable si cada punto tiene una base contable de vecindades. Es fácil ver que los espacios métricos son primero contables y que los espacios primero contables son espacios secuenciales.

1.12 Proposición. Todo espacio secuencial es CG.

Demostración. Sea (X, τ) un espacio secuencial, mostraremos que $\tau = k(\tau)$, o lo que es lo mismo, ver que cada k-cerrado es cerrado, para esto nos basta ver que cada k-cerrado es secuencialmente cerrado. Sea $Y \subseteq X$ un k-cerrado y $\{y_n\}$ una sucesión en Y que converge a $x \in X$. Sea $K = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la compactificación a un punto de $\mathbb{N}$ y $u : K \to X$ definida por $u(n) = y_n$ y $u(\infty) = x$. Notemos que u es continua pues si A es un conjunto abierto en X:

(a) Si $x \notin A$ entonces $\infty \notin u^{-1}(A)$ y $u^{-1}(A) \subseteq \mathbb{N}$ que discreto, por lo tanto $u^{-1}(A)$ es abierto en K.

(b) Si $x \in A$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $y_n \in A$, entonces $u^{-1}(A)$ es de la forma $(n, \infty]$ que es abierto en K.

Como Y es k-cerrado y K es compacto y Hausdorff, $u^{-1}(Y)$ es cerrado en K, de esto se sigue que $\mathbb{N} \subseteq \overline{\mathbb{N}} \subseteq u^{-1}(Y)$, entonces $\infty \in u^{-1}(Y)$, luego $x \in Y$, por lo tanto Y es secuencialmente cerrado. $\square$

1.13 Proposición. Todo espacio localmente compacto y Hausdorff es CGWH.

Demostración. Sea X un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff y sea $Y \subseteq X$ un k-cerrado, para mostrar que X es CG basta mostrar que Y es cerrado. Sea $x \in \overline{Y}$, veamos que $x \in Y$. Por ser X localmente compacto existe una vecindad U de x tal que $K = \overline{U}$ es compacto. Sea V otra vecindad de x, se sigue que $V \cap K$ también es vecindad de x y como x está en $\overline{Y}$, $V \cap K \cap Y \neq \emptyset$, por lo tanto $x \in \overline{K \cap Y}$. Por otro lado, como K es compacto y Hausdorff, Y es k-cerrado y la inclusión $\iota : K \to X$ es continua, $\iota^{-1}(Y) = K \cap Y$ es cerrado en K, entonces $x \in Y$. □

1.14 Lema. Si K es compacto y Hausdorff entonces una función $u : K \to X$ es continua respecto a τ si y sólo si es continua respecto a $k(\tau)$, con τ una topología sobre X.

Demostración. Ya sabemos que $\tau \subseteq k(\tau)$, haciendo claro que si u es continua respecto a $k(\tau)$ también lo es respecto a τ. Ahora, supongamos u es continua respecto a τ, necesitamos probar que la preimagen bajo u de cada k-cerrado es cerrada en K. Sea Y un k-cerrado que por definición cumple que $u^{-1}(Y)$ es cerrado en K, por lo tanto u es continua respecto a $k(\tau)$. □

1.15 Corolario. Para todo espacio X se cumple que $k^2X = kX$ diciéndonos que kX es compactamente generado.

Demostración. Sea Y un k-cerrado de X, veamos que es k-cerrado en kX. Sea K un espacio compacto y Hausdorff y $u : K \to kX$ una función continua, por el lema 1.14 $u : K \to X$ es continua y por ser Y un k-cerrado de X, $u^{-1}(Y)$ es cerrado en K, por lo tanto Y es k-cerrado en kX. □

1.16 Corolario. Sean X un espacio CG y (Y, τ) un espacio cualquiera. Una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si es continua respecto a la topología $k(\tau)$.

Demostración. Supongamos que $f : X \to Y$ es continua respecto a $k(\tau)$ que es una topología más fina que τ, es claro que f es continua respecto a la topología τ.
Ahora supongamos que $f : X \to Y$ es continua y $Z \subseteq Y$ es un k-cerrado, demostraremos que $f^{-1}(Z)$ es cerrado en X. Sea K un espacio compacto y Hausdorff y $u : K \to X$ una función continua, se sigue que $fu : K \to Y$ es continua y como Z es k-cerrado, $(fu)^{-1}(Z) = u^{-1}(f^{-1}(Z))$ es cerrado en K, esto implica que $f^{-1}(Z)$ es k-cerrado en X que es lo mismo que ser cerrado en X, por lo tanto f es continua respecto a la topología $k(\tau)$. □

1.17 Proposición. Sean X un espacio CG y Y un espacio cualquiera. Entonces $f : X \to Y$ es una función continua si y sólo si $fu : K \to Y$ es continua para cada espacio K que sea compacto y Hausdorff y cada función continua $u : K \to X$.

Demostración. Si f es continua es inmediato que fu es continua. Ahora supongamos que fu es continua. Sea $Z \subseteq Y$ cerrado, entonces $(fu)^{-1}(Z) = u^{-1}(f^{-1}(Z))$ es cerrado en K, esto implica que $f^{-1}(Z)$ es k-cerrado en X que es lo mismo que ser cerrado en X, por lo tanto f es continua. $\square$

1.18 Proposición. Si τ y γ son topologías sobre X tales que $\tau \subseteq \gamma$ entonces $k(\tau) \subseteq k(\gamma)$.

Demostración. Sea $Y \subseteq X$ un k-cerrado respecto a τ, queremos ver que es k-cerrado respecto a γ. Sea K un espacio compacto y Hausdorff y $u : K \to X$ continua respecto a γ, como γ es una topología más fina que τ, u es continua respecto a τ y como Y es k-cerrado respecto a τ, $u^{-1}(Y)$ es cerrado en K, por lo tanto Y es k-cerrado respecto a γ. $\square$

Capítulo 2

Nuevos espacios por viejos

2.1 Proposición. Si X es un espacio CG y E es una relación de equivalencia sobre X entonces el espacio cociente $Y = X/E$ es CG.

Demostración. Sea $q : X \to Y$ la función cociente. Sea Z un k-cerrado en Y, veamos que es cerrado. Por el corolario 1.16, $q : X \to kY$ es continua, entonces $q^{-1}(Z)$ es cerrado en X, y por ser q función cociente, $q^{-1}(Z)$ es cerrado si y sólo si Z es cerrado en Y. $\square$

2.2 Proposición. Si $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios CG, la unión disjunta $X = \coprod X_i$ también lo es.

Demostración. Sea $Z \subseteq X$ un k-cerrado, veremos que Z es cerrado en X. Notemos que Z es de la forma $\coprod Z_i$, con $Z_i = Z \cap X_i$. Primero mostremos que cada Z_i es k-cerrado en X_i. Sea K un espacio compacto y Hausdorff, $u : K \to X_i$ una función continua e $\iota_i : X_i \to X$ la inclusión, tenemos que $\iota_i u : K \to X$ es continua, entonces $(\iota_i u)^{-1}(Z) = u^{-1}(Z_i)$ es cerrado en K por ser Z un k-cerrado en X, por lo tanto Z_i es k-cerrado en X_i. Sea $(x, j) \in X$ tal que $(x, j) \notin Z$, se tiene que $x \in X_j$ y $x \notin Z_j$, entonces existe un abierto U_j en X_j que contiene a x y no toca a Z_j, luego $\iota_j(U_j) = U_j$ es un abierto en X que contiene a x y no toca a Z, por lo tanto Z es cerrado en X. $\square$

2.3 Definición. Dados dos espacios X y Y, escribiremos $X \times_0 Y$ para denotar al espacio producto equipado con la topología usual del producto. Este espacio no necesariamente sera CG aun cuando X y Y lo sean. Así definiremos $X \times Y = k(X \times_0 Y)$. Similarmente, dada una familia indicada (posiblemente infinita) de espacios X_i escribiremos $\prod_{0,i} X_i$ para el producto de estos espacios con la topología usual del producto y $\prod_i X_i = k(\prod_{0,i} X_i)$.

2.4 Proposición. Sea $\{X_i\}$ una familia de espacios CG. Entonces las proyecciones $\pi_i : \prod_i X_i \to X_i$ son continuas. Más aun, para cada espacio Y que sea CG, una función $f : Y \to \prod X_i$ es continua si y sólo si cada componente $f_i = \pi_i \circ f$ es continua. (Esto significa que $\prod_i X_i$ es el producto de los objetos X_i en la categoría **CTop** de espacios CG.)

Demostración. Sabemos que las proyecciones $\pi_i : \prod_{0,i} X_i \to X_i$ son continuas y que dado un abierto en X_i, su preimagen en $\prod_{0,i} X_i$ es abierta, pero la topología en $\prod_i X_i$ es más fina, entonces la preimagen de X_i en $\prod_i X_i$ es abierta, por lo tanto las proyecciones $\pi_i : \prod_i X_i \to X_i$ son continuas.
Si f es continua, es inmediato que cada f_i es continua. Ahora supongamos que $f_i = \pi_i \circ f$ es continua, pero esta afirmación sigue siendo valida si pensamos en $f : Y \to \prod_{0,i} X_i$, esto implica que f es continua y por el corolario 1.16, $f : Y \to k(\prod_{0,i} X_i)$ es continua. □

2.5 Lema. (Lema del tubo). Dados dos espacios X y Y, con X compacto, y un elemento de Y y U un abierto en $X \times_0 Y$ tal que $X \times_0 \{y\} \subseteq U$, entonces existe una vecindad V de y en Y tal que $X \times_0 V \subseteq U$.

Demostración. Para cada $x \in X$, $(x, y) \in U$. Al ser U es abierto, existen vecindades abiertas U_x en X y V_y en Y de x y y respectivamente tal que $(x, y) \in U_x \times_0 V_y \subseteq U$. Como X es compacto existe una cubierta finita de vecindades $\{U_{x_1}, ..., U_{x_n}\}$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Sea $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$, claramente V es una vecindad abierta de y tal que $X \times_0 V \subseteq U$. □

2.6 Proposición. Si X es un espacio localmente compacto y Hausdorff y Y es un espacio CG entonces $X \times_0 Y$ es un espacio CG y por lo tanto $X \times_0 Y = X \times Y$.

Demostración. Sea $Z \subseteq X \times_0 Y$ un k-cerrado, veamos que Z es cerrado en $X \times_0 Y$. Por la proposición 1.13 X es CGWH. Supongamos que $(x, y) \notin Z$, demostraremos que existe una vecindad abierta de (x, y) disjunta con Z. Sea $i_y : X \to X \times_0 Y$ dada por $i_y(x') = (x', y)$. Veamos que $i_y^{-1}(Z)$ es k-cerrado en X. Sea K un espacio compacto y Hausdorff y $u : K \to X$ continua, luego $u^{-1}(i_y^{-1}(Z)) = (i_y u)^{-1}(Z)$ que es cerrado en K por ser Z un k-cerrado en $X \times_0 Y$, por lo tanto $i_y^{-1}(Z)$ es k-cerrado, y por lo tanto cerrado en X. Como $x \notin i_y^{-1}(Z)$, existe un abierto U^* disjunto de $i_y^{-1}(Z)$ que contiene a x, luego por ser X localmente compacto, existe una vecindad abierta U de x talque $\overline{U}$ es compacto y $\overline{U} \subseteq U^*$, por lo tanto $\overline{U} \bigcap i_y^{-1}(Z) = \emptyset$, o lo que es lo mismo, $\overline{U} \times \{y\} \cap Z = \emptyset$. Ahora sea $V = \{y' \in Y | \overline{U} \times \{y'\} \bigcap Z = \emptyset\}$, afirmamos que

V es abierto en Y. Por ser Y un espacio CG, será suficiente ver que para un espacio K que sea compacto y Hausdorff y una función continua $u : K \to Y$, $u^{-1}(V)$ es abierto en K. Llamemos Z' a la preimagen de Z bajo la función $\iota \times u : \overline{U} \times_0 K \to X \times_0 Y$. Al ser Z un k-cerrado, Z' es cerrado en el compacto y Hausdorff $\overline{U} \times_0 K$, por lo tanto es compacto, se sigue que la proyección de Z' en K es compacta, por lo tanto es cerrada. Notemos que dicha proyección es el conjunto de los $a \in K$ tal que existe $x' \in \overline{U}$ para el cual $(x', u(a)) \in Z$; por otro lado $u^{-1}(V)$ es el conjunto de los $a \in K$ tal que para toda $x' \in \overline{U}$, $(x, u(a)) \notin Z$. Claramente estos conjuntos son complementarios, por lo tanto $u^{-1}(V)$ es abierto en K como se deseaba mostrar. Así, $U \times_0 V$ es un abierto que contiene a (x, y) y que no intersecta a Z. Por lo tanto Z es cerrado en $X \times_0 Y$. $\square$

2.7 Proposición. Supongamos que X y Y son ambos primeros contables (y por lo tanto espacios CG). Entonces $X \times_0 Y$ también es primero contable y por consiguiente CG, así $X \times_0 Y = X \times Y$.

Demostración. Sea un elemento $(x, y) \in X \times_0 Y$, podemos elegir una base contable de vecindades U_i de x en X, y una base contable de vecindades V_j de y en Y. Entonces las vecindades $U_i \times_0 V_j$ forman una base contable de vecindades de (x, y) en $X \times_0 Y$. $\square$

2.8 Definición. Sean X y Y espacios CG. Para cada espacio K que sea compacto y Hausdorff, cada función $u : K \to X$ y cada abierto $U \subseteq Y$, escribiremos

$$W(u, K, U) = \{f : X \to Y | fu(K) \subseteq U\}. \tag{2.1}$$

Si K es un subsepacio compacto de X y $u : K \to X$ es la inclusión, escribiremos $W(K, U)$ en lugar de $W(u, K, U)$. Escribiremos $C_0(X, Y)$ para el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es el de las funciones continuas de X a Y equipado con la topología más pequeña para la cual los conjuntos $W(u, K, U)$ forman una subbase (esta topología es llamada $compacto - abierta$). Escribiremos $C(X, Y) = kC_0(X, Y)$.

2.9 Observación. Si Z es un subespacio cerrado de Y entonces $C(X, Z)$ es cerrado en $C(X, Y)$, pues $C(X, Z) = \bigcap_x W(\{x\}, Z^c)^c$.

Demostración. En efecto, cada $W(\{x\}, Z^c)^c$ es cerrado en $C_0(X, Y)$ y por lo tanto es k-cerrado, entonces es cerrado en $C(X, Y)$. Por otro lado $W(\{x\}, Z^c)^c$ es el conjunto las funciones $\{f : X \to Y | f(x) \in Z\}$, entonces $\bigcap_x W(\{x\}, Z^c)^c$

es el conjunto $\{f : X \to Y | f(X) \subseteq Z\} = C(X, Z)$ y como es una intersección de cerrados, $C(X, Z)$ es cerrado en $C(X, Y)$. $\square$

2.10 Lema. Si $g : Y \to Z$ es una función continua, entonces también lo es $g_* : C(X, Y) \to C(X, Z)$ definida por $g_*(t) = g \circ t$. Si $f : W \to X$ es continua, entonces también lo es $f^* : C(X, Y) \to C(W, Y)$ definida por $f^*(t) = t \circ f$.

Demostración. Pensemos en la función $g_* : C_0(X, Y) \to C_0(X, Z)$ y consideremos un espacio K que sea compacto y Hausdorff, una función continua $u : K \to X$ y un subconjunto abierto U de Z, tenemos que

$$\begin{aligned} g_*^{-1}(W(u, K, U)) &= \{t : X \to Y | gtu(K) \subseteq U\} \\ &= \{t : X \to Y | tu(K) \subseteq g^{-1}(U)\} \\ &= W(u, K, g^{-1}(U)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Esto quiere decir que la preimagen de los subbasicos de $C_0(X, Z)$ son subbasicos de $C_0(X, Y)$, entonces las preimagenes de abiertos de $C_0(X, Z)$ son abiertas en $C_0(X, Y)$ y por lo tanto abiertas en $C(X, Y)$. Entonces se tiene que $g_* : C(X, Y) \to C_0(X, Z)$ es continua, luego por el corolario 1.16, $g_* : C(X, Y) \to C(X, Z)$ es continua. La demostración de que f^* es continua es análoga. $\square$

2.11 Proposición. Definamos las funciones $ev_{X,Y} : X \times C(X, Y) \to Y$ y $inj_{X,Y} : Y \to C(X, X \times Y)$ dadas por $ev(x, f) = f(x)$ y $inj(y)(x) = (x, y)$. Entonces las funciones $ev_{X,Y}$ y $inj_{X,Y}$ son continuas.

Demostración. Primero demostremos que la función $inj_{X,Y}$. Por el corolario 1.16 será suficiente demostrar que la función $inj_{X,Y} : Y \to C_0(X, X \times Y)$ es continua, o equivalentemente, que $inj_{X,Y}^{-1}(W(u, K, U))$ es abierta en Y para K un espacio compacto y Hausdorff, $u : K \to X$ continua y U subconjunto abierto de $X \times Y$. Como Y es CG sólo debemos mostrar que $v^{-1}(inj_{X,Y}^{-1}(W(u, K, U)))$ es abierta en L, con L un espacio compacto y Hausdorff y $v : L \to Y$ continua. Notemos que $u \times v : K \times L \to X \times Y$ es continua y por lo tanto $(u \times v)^{-1}(U)$ es abierto en $K \times L$. Definamos ahora el conjunto $M = \{b \in L | K \times \{b\} \subseteq (u \times v)^{-1}(U)\}$, afirmamos que M es abierto en L. Tomemos un elemento $b \in M$ y veamos que existe una vecindad abierta V de b tal que $V \subseteq M$. Por el lema del tubo existe una vecindad V de b tal que $K \times V \subseteq (u \times v)^{-1}(U)$. Sea $a \in V$, es claro que $K \times \{a\} \subseteq (u \times v)^{-1}(U)$, por lo tanto $a \in M$ y $V \subseteq M$, se sigue que M es abierto en L. Ahora notemos

que $inj_{X,Y}^{-1}(W(u,K,U)) = \{y \in Y | u(K) \times \{y\} \subseteq U\}$ y también notemos que $v^{-1}(inj_{X,Y}^{-1}(W(u,K,U))) = \{b \in L | K \times \{b\} \subseteq (u \times v)^{-1}(U)\} = M$, por lo tanto $v^{-1}(inj_{X,Y}^{-1}(W(u,K,U)))$ que es abierto en L como se quería.
Ahora veamos que $ev_{X,Y}$ es continua. Sea U un abierto en Y, demostraremos que $ev_{X,Y}^{-1}(U)$ es abierto. Como $X \times C(X,Y)$ es CG, será suficiente ver que $V = u^{-1}(ev^{-1}(U))$ es abierto en K, con K un espacio compacto y Hausdorff y $u : K \to X \times C(X,Y)$ una función continua. Sean $v : K \to X$ y $w : K \to C(X,Y)$ las componentes de u, de aquí que

$$\begin{aligned} V &= \{b \in K | (v(b), w(b)) \in ev^{-1}(U)\} \\ &= \{b \in K | w(b)(v(b)) \in U\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sea $a \in V$. Como $w(a) \circ v$ es continua, $L' = (w(a) \circ v)^{-1}(U)$ es abierto en K y por lo tanto $a \in L'$, entonces por ser K localmente compacto, pues es compacto y Hausdorff, podemos encontrar una vecindad abierta L^* de a tal que $L = \overline{L^*}$ es compacto y $L \subseteq L'$, se sigue que $w(a)v(L) \subseteq U$. Esto implica que $w(a) \in W(v,L,U) \subseteq C(X,Y)$. Como $w : K \to C(X,Y)$ es continua, el conjunto $N = w^{-1}(W(v,L,U))$ que es igual a $\{b \in K | w(b)(v(L)) \subseteq U\}$ es una vecindad abierta de a en K. Afirmamos que $L \bigcap N \subseteq V$. Sea $b \in L \bigcap N$, entonces $w(b)(v(b)) \in w(b)(v(L)) \subseteq U$, por lo tanto $b \in V$. Así $L \bigcap N$ es una vecindad abierta de a contenida en V mostrando que V es abierto en K. $\square$

2.12 Observación. Recordemos que un par de funtores $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ y $G : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ son adjuntos ($F \dashv G$) si $Hom_{\mathscr{B}}(F(A), B) \cong Hom_{\mathscr{A}}(A, G(B))$ naturalmente para cada $A \in Ob(\mathscr{A})$ y $B \in Ob(\mathscr{B})$. Esto significa que hay un isomorfismo natural entre los funtores

$$Hom_{\mathscr{B}}(F(\ ),\ ) : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathbf{Set}$$

y

$$Hom_{\mathscr{A}}(\ , G(\ )) : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathbf{Set}$$

contravariantes en la primer entrada y covariante en la segunda entrada.
También recordemos que una categoría $\mathscr{A}$ es cartesianamente cerrada si para cada $A \in Ob(\mathscr{A})$, el funtor

$$(\ \times A) : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$$

tiene adjunto derecho. En algunas categorías importantes como **Set** el adjunto derecho será el funtor

$$Hom_{\mathscr{A}}(A,\ ) : \mathscr{A} \to \mathscr{A}.$$

2.13 Proposición. Existe un homeomorfismo $adj_{X,Y,Z} : C(X, C(Y,Z)) \to C(X \times Y, Z)$ dado por $adj_{X,Y,Z}(f)(x,y) = f(x)(y)$ para cada $f : X \to C(Y,Z)$.

Demostración. Escribamos $D(X,Y)$ para el conjunto de todas las funciones (posiblemente discontinuas) que van de X a Y. Definamos la función $adj'_{X,Y,Z} : D(X, D(Y,Z)) \to D(X \times Y, Z)$ con la regla de asociación evidente y veamos que es biyectiva. Sean $f, f' \in D(X, D(Y,Z)$ funciones tales que $adj'(f) = adj'(f')$, esto quiere decir que para cada $(x,y) \in X \times Y$, $f(x)(y) = f'(x)(y)$, de ahí que $f = f'$, por lo tanto adj' es inyectiva. Sea $g : X \times Y \to Z$, veamos que existe $\overline{g} \in D(X, D(Y,Z))$ tal que $adj'(\overline{g}) = g$. Definamos $\overline{g}(x) = g(x, \ ) : Y \to Z$, entonces $adj'(\overline{g})(x,y) = \overline{g}(x)(y) = g(x,y)$, por lo tanto adj' es sobreyectiva.
Ahora veamos que adj' manda elementos de $C(X, C(Y,Z))$ a elementos de $C(X \times Y, Z)$. Sean $f \in D(X, D(Y,Z))$ y $g = adj'(f) \in D(X \times Y, Z)$, afirmamos que g es continua si y sólo si:

(1) $f(x) : Y \to Z$ es continua para cada $x \in X$, de modo que f pueda ser considerada una función de X a $C(Y,Z)$;

(2) f es continua cuando la consideramos como una función de X a $C(Y,Z)$.

Si f cumple ambas condiciones podemos ver que g es lo mismo que la composición

$$X \times Y \xrightarrow{f \times 1_Y} C(Y,Z) \times Y \xrightarrow{ev_{Y,Z}} Z$$

que es continua por ser una composición de continuas. Por el otro lado, supongamos que g es continua. Sea $x \in X$ y consideremos la función continua $i_x : Y \to X \times Y$ dada por $i_x(y) = (x,y)$, luego $g \circ i_x(y) = g(x,y) = f(x)(y)$ para cada $y \in Y$, entonces $f(x) = g \circ i_x$ es continua, más aun f es la composición

$$X \xrightarrow{inj_{Y,X}} C(Y, X \times Y) \xrightarrow{g_*} C(Y,Z)$$

pues para $x \in X$ y $y \in Y$, $g_* \circ inj_{Y,X}(x)(y) = g(x,y) = f(x)(y)$, entonces $g_* \circ inj_{Y,X}(x) = f(x)$. Por lo tanto f es continua por ser igual a una composición de funciones continuas.
Hasta ahora hemos visto que $adj_{X,Y,Z} : C(X, C(Y,Z)) \to C(X \times Y, Z)$ está bien definida y es una biyección, ahora veamos que es continua. Primero

notemos que la función $adj^{-1}_{X,Y,Z} : C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y, Z))$ está dada por $adj^{-1}_{X,Y,Z}(g)(x) = g(x, \ ) : Y \to Z$. Consideremos las funciones continuas

$$Y \times C(Y, Z) \xrightarrow{ev_{Y,Z}} Z \quad \text{y} \quad X \times C(X, C(Y, Z)) \xrightarrow{ev_{X,C(Y,Z)}} C(Y, Z)$$

Llamemos h a la composición

$$Y \times X \times C(X, C(Y, Z)) \xrightarrow{1_Y \times ev_{X,C(Y,Z)}} Y \times C(Y, Z) \xrightarrow{ev_{Y,Z}} Z$$

dada por $h(y, x, f) = f(x)(y)$, evidentemente continua por ser composición de continuas. Consideremos

$$C(C(X, C(Y, Z)) \times X \times Y, Z) \xrightarrow{adj^{-1}_{C(X,C(Y,Z)),X \times Y,Z}} C(C(X, C(Y, Z)), C(X \times Y, Z)),$$

tenemos que $adj^{-1}_{X,Y,Z}(h)(f)(x, y) = h(\ , \ , f)(x, y) = f(x)(y)$ pero esto es justamente $adj_{X,Y,Z}(f)(x, y)$ y como vimos antes, adj^{-1} manda continuas en continuas, por lo tanto $adj_{X,Y,Z}$ es continua. Para terminar veamos que $adj^{-1}_{X,Y,Z}$ también es continua.Consideremos las funciones

$$X \times Y \times C(X \times Y, Z) \xrightarrow{ev_{X \times Y,Z}} Z$$

$$C(X \times C(X \times Y, Z) \times Y, Z) \xrightarrow{adj^{-1}_{X \times C(X \times Y,Z),Y,Z}} C(X \times C(X \times Y, Z), C(Y, Z))$$

$$C(C(X \times Y, Z) \times X, C(Y, Z)) \xrightarrow[adj^{-1}_{C(X \times Y,Z),X,C(Y,Z)}]{} C(C(X \times Y, Z), C(X, C(Y, Z)))$$

Tenemos que

$$adj^{-1}_{X \times C(X \times Y,Z),Y,Z}(ev_{X \times Y,Z})(x, g) = ev_{X \times Y,Z}(\ , x, g) = g(x, \ ). \tag{2.4}$$

Ahora

$$adj^{-1}_{C(X \times Y,Z),X,C(Y,Z)}(adj^{-1}_{X \times C(X \times Y,Z),Y,Z}(ev_{X \times Y,Z}))(g)(x) = g(x, \ ) \tag{2.5}$$

pero esto no es más que $adj^{-1}_{X,Y,Z}(g)(x)$, igual que antes, hemos demostrado que $adj^{-1}_{X,Y,Z}$ es continua. Por lo tanto $adj_{X,Y,Z}$ es homeomorfismo. □

2.14 Corolario. La categoría **CTop** de espacios CG es cartesianamente cerrada.

Demostración. Probaremos que los funtores $(\ \times Y), C(Y,\ ) : \mathbf{CTop} \to \mathbf{CTop}$ son adjuntos $((\ \times Y) \dashv C(Y,\ ))$ para cada $Y \in Ob(\mathbf{CTop})$, para ello es suficiente probar que existe un isomorfismo natural η entre los funtores

$$C(C(\ \times Y),\ ) : \mathbf{CTop} \times \mathbf{CTop} \to \mathbf{Set}$$

y

$$C(\ , C(Y,\ ))\mathbf{CTop} \times \mathbf{CTop} \to \mathbf{Set},$$

esto significa que, para cada $X, Z \in Ob(\mathbf{CTop})$, exista un homeomorfismo

$$\eta_{X,Z} : C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y, Z))$$

pero este es justamente $adj_{X,Y,Z}$. □

2.15 Proposición. Un espacio X que es CG, es WH si y sólo si el subespacio diagonal $\Delta_X = \{(x, x)|x \in X\}$ es cerrado en $X \times X$.

Demostración. Supongamos X es WH, veamos que el subespacio diagonal es cerrado en $X \times X$. Recordemos del lema 1.10 que si un espacio es WH implica que es T_1. Consideremos un espacio K que es compacto y Hausdorff y $u = (v, w) : K \to X \times X$ una función continua. Será suficiente mostrar que $u^{-1}(\Delta_X) = \{k \in K|v(k) = w(k)\}$ es cerrado en K. Sea $a \notin u^{-1}(\Delta_X)$, entonces $v(a) \neq w(a)$. Demostraremos que existe una vecindad abierta de a en K disjunta de $u^{-1}(\Delta_X)$. Por ser X T_1, $\{w(a)\}$ es cerrado en X, luego entonces $U = v^{-1}(\{w(a)\}^c) = \{b \in K|v(b) \neq w(a)\}$ es una vecindad abierta de a. Por ser K un espacio compacto y Hausdorff, es un espacio localmente compacto, entonces existe una vecindad abierta V de a tal que $\overline{V} \subseteq U$, de aquí se sigue que $w(a) \notin v(\overline{V})$. Notemos que a esta en el conjunto $W = w^{-1}(v(\overline{V})^c) = \{k \in K|w(k) \notin v(\overline{V})\}$. Por ser $\overline{V}$ compacto y Hausdorff y por ser X WH, $v(\overline{V})$ es cerrado en X y por lo tanto W abierto en K. Afirmamos que $(V \cap W) \cap u^{-1}(\Delta_X) = \emptyset$. En efecto, si $b \in V \cap W$ se sigue que $w(b) \notin v(\overline{V})$ y $v(b) \in v(\overline{V})$, esto implica que $v(b) \neq w(b)$, por lo tanto $u(b) = (v(b), w(b)) \notin \Delta_X$. Esto demuestra que existe una vecindad abierta $V \cap W$ de a disjunta de $u^{-1}(\Delta_X)$, por lo tanto Δ_X es cerrado en $X \times X$.
Ahora supongamos que Δ_X es cerrado en $X \times X$ y mostremos que X es WH. Sean K un espacio compacto y Hausdorff y una función continua $u : K \to X$.

Dado otro espacio L que sea compacto y Hausdorff y otra función continua $v : L \to X$ definamos $M = \{(a,b) \in K \times L | v(a) = w(b)\} \subseteq K \times L$. Este conjunto también puede ser visto como $(u,v)^{-1}(\Delta_X)$ que es cerrado y por lo tanto compacto pues $K \times L$ es compacto y Hausdorff. Se sigue que la proyección sobre L de M es compacta y por lo tanto cerrada en L, aun más $\pi_L(M) = \{l \in L | v(l) = u(k) \text{ para algún } k \in K\} = v^{-1}(u(K))$, por lo tanto $u(K)$ es un k-cerrado de X que es lo mismo que ser cerrado en X, por lo tanto X es WH. $\square$

2.16 Corolario. Si X y Y son espacios CGWH y $f, g : X \to Y$ son funciones continuas entonces $\{x \in X | f(x) = g(x)\} = (f,g)^{-1}(\Delta_Y)$ es cerrado en X.

2.17 Corolario. El producto de una familia arbitraria de espacios CGWH (con topología CG) es CGWH.

Demostración. Consideremos el producto $X = \prod_{i \in I} X_i$ y las proyecciones canónicas $\pi_i : X \to X_i$. Ya sabemos que Δ_{X_i} es cerrado en X_i y que la función $\pi_i \times \pi_i : X \times X \to X_i \times X_i$ es continua, entonces será cerrado en $X \times X$ el conjunto $D_j = (\pi_j \times \pi_j)^{-1}(\Delta_{X_j}) = \{((x_i),(y_i)) \in X \times X | x_j = y_j\}$. Notemos que $\bigcap_{i \in I} D_i = \{((x_i),(x_i)) | (x_i) \in X\} = \Delta_X$ que es cerrado en $X \times X$, por lo tanto X es un espacio WH. $\square$

2.18 Proposición. Sean X y Y espacios CG y E una relación de equivalencia sobre X. Sea E' la relación de equivalencia sobre $X \times Y$ definida por $(x_0, y_0)E'(x_1, y_1)$ si y sólo si $x_0 E x_1$ y $y_0 = y_1$. Entonces la biyección obvia $(X \times Y)/E' \to (X/E) \times Y$ es un homeomorfismo.

Demostración. Sean $q : X \to X/E$ y $q' : X \times Y \to (X \times Y)/E'$ las funciones cociente. Tenemos la función $q \times 1_Y : X \times Y \to (X/E) \times Y$. Notemos que si $(x_0, y_0)E'(x_1, y_1)$, $q \times 1_Y(x_0, y_0) = (\overline{x_0}, y_0) = (\overline{x_1}, y_1) = q \times 1_Y(x_1, y_1)$, entonces $q \times 1_Y$ respeta la relación E', luego $q \times 1_Y$ induce una función continua $f : (X \times Y)/E' \to (X/E) \times Y$ dada por $f(\overline{(x,y)}) = (\overline{x}, y)$. Por otro lado consideremos los homeomorfismos

$$C(X \times Y, (X \times Y)/E') \xrightarrow{adj^{-1}_{X,Y,(X\times Y)/E'}} C(X, C(Y, (X \times Y)/E'))$$

$$C(X/E, C(Y, (X \times Y)/E')) \xrightarrow{adj_{X/E,Y,(X\times Y)/E'}} C(X/E \times Y, (X \times Y)/E')$$

Tenemos que $adj^{-1}(q')(x)(y) = \overline{(x,y)}$. Notemos que si $x_0 E x_1$, entonces para cada $y \in Y$, $\overline{(x_0,y)} = \overline{(x_1,y)}$, entonces $adj^{-1}(q')(x_0) = adj^{-1}(q')(x_1)$, por lo tanto $adj^{-1}(q')$ respeta la relación E, induciendo así una función continua $g' : X/E \to C(Y, (X \times Y)/E')$ dada por $g'(\overline{x})(y) = \overline{(x,y)}$ que está bien definida pues si $x_0 E x_1$, $\overline{(x_0,y)} = \overline{(x_1,y)}$ para cada $y \in Y$. Ahora llamemos g a la función $adj_{X/E,Y,(X\times Y)/E'}(g') : (X/E) \times Y \to (X \times Y)/E'$, dada por $g(\overline{x}, y) = \overline{(x,y)}$. Es claro que $gf = 1_{(X\times Y)/E'}$ y $fg = 1_{(X/E)\times Y}$. □

2.19 Definición. Una función $f : X \to Y$ es una función cociente si es sobreyectiva, y Y tiene la topología cociente respecto a X. Explícitamente, nos referimos a que un subconjunto es cerrado en Y si y sólo si su preimagen bajo f es cerrada en X. Es claro que la composición de funciones cocientes es una función cociente.

2.20 Observación. Si $f : X \to Y$ es una función continua y sobreyectiva y es abierta o cerrada, entonces f es una función cociente.

2.21 Proposición. Si $f : W \to X$ y $g : Y \to Z$ son funciones cociente de espacios CG, entonces $f \times g : W \times Y \to X \times Z$ también es una función cociente.

Demostración. Primero veamos que la función $f \times 1_Y : W \times Y \to X \times Y$ es una función cociente. Sea $U \subseteq X \times Y$, demostraremos que U es cerrado en $X \times Y$ si y sólo si $(f \times 1_Y)^{-1}(U)$ es cerrado en $W \times Y$.

(1) Supongamos que U es cerrado en $X \times Y$, entonces U es un k-cerrado. Sean K un espacio compacto y Hausdorff y $u : K \to W \times Y$ una función continua, se sigue que $(f \times 1_Y) \circ u$ es una función continua, entonces $u^{-1}((f \times 1_Y)^{-1}(U))$ es cerrado en K lo que implica que $(f \times 1_Y)^{-1}(U)$ es k-cerrado en $W \times Y$, que es lo mismo que ser cerrado en $W \times Y$.

(2) Supongamos que $(f \times 1_Y)^{-1}(U)$ es cerrado en $W \times Y$. Usaremos la construcción vista en la proposición 2.18. Sea E la relación de equivalencia en $W \times Y$ tal que $(w_0, y_0) E (w_1, y_1)$ si y sólo si $f(w_0) = f(w_1)$ y $y_0 = y_1$ y sea $f' : W \times Y \to (W \times Y)/E$ la función cociente. Definamos $\varphi : (W \times Y)/E \to X \times Y$ dada por $\varphi(\overline{(w,y)}) = (f(w), y)$. Notemos que $(f \times 1_Y)^{-1}(U) = (f')^{-1}(\varphi^{-1}(U))$, entonces $(f')^{-1}(\varphi^{-1}(U))$ es cerrado en $W \times Y$, pero esto pasa si y sólo si $\varphi^{-1}(U)$ es cerrado en $(W \times Y)/E$ y como φ es el homeomorfismo del que se habla en la proposición 2.18, $\varphi\varphi^{-1}(U) = U$ es cerrado en $X \times Y$.

De la misma manera se demuestra que $1_X \times g : X \times Y \to Z \times Y$ es función cociente, además $f \times g = (1_X \times g) \circ (f \times 1_Y)$, por lo tanto es función cociente. $\square$

2.22 Corolario. Sea E una relación de equivalencia sobre un espacio X que es CG. Entonces X/E es WH si y sólo si E es cerrado en $X \times X$.

Demostración. De la proposición 2.15 sabemos que X/E es WH si y sólo si $\Delta_{X/E}$ es cerrado en $X/E \times X/E$. Sea $q : X \to X/E$ la función cociente. De la proposición 2.21 sabemos que $q \times q : X \times X \to X/E \times X/E$ es cociente, entonces $\Delta_{X/E}$ es cerrado en $X/E \times X/E$ si y sólo si $(q \times q)^{-1}(\Delta_{X/E})$ es cerrado en $X \times X$. Notemos que $(q \times q)^{-1}(\Delta_{X/E}) = \{(x, y) \in X \times X | q(x) = q(y)\} = E$. Por lo tanto X/E es WH si y sólo si E es cerrado en $X \times X$. $\square$

2.23 Proposición. Sea X un espacio CG. Entonces existe una relación de equivalencia cerrada E sobre X que es la más pequeña. Si denotamos $hX = X/E$ entonces h define un funtor de los espacios CG a los espacios CGWH, que es adjunto izquierdo de la inclusión de los espacios CGWH a los espacios CG. En otras palabras, cualquier morfismo de X a un espacio CGWH se factoriza unívocamente a través de hX.

Demostración. Sea $\mathcal{R}$ el conjunto de todas las relaciones de equivalencia cerradas R sobre X, i.e., R es cerrada como subconjunto de $X \times X$. Este conjunto no es vacío pues al menos la relación $R = X \times X$ está en él. Es fácil ver que $E = \bigcap_{\mathcal{R}} R$ es una relación de equivalencia sobre X y que es cerrada; claramente la más pequeña. Por la proposición 2.22 sabemos que $hX = X/E$ es un espacio CGWH. Si Y es un espacio CGWH y $f : X \to Y$ es una función continua entonces $R' = \{(x, x') \in X \times X | f(x) = f(x')\} = (f \times f)^{-1}(\Delta_Y)$ es una relación de equivalencia cerrada sobre X, pues al ser Y un espacio CGWH, Δ_Y es cerrado en Y, por lo tanto R' es cerrado en $X \times X$. Se sigue que $E \subseteq R'$. Definamos $f^\circ : hX \to Y$ dada por $f^\circ(\overline{x}) = f(x)$ que está bien definida pues si $\overline{x} = \overline{y}$ entonces xEy, luego $xR'y$ lo que significa que $f(x) = f(y)$, por lo tanto $f^\circ(\overline{x}) = f^\circ(\overline{y})$. De lo anterior tenemos que $f = f^\circ \circ q$, con $q : X \to hX$ la función cociente, entonces por tener hX la topología final respecto a X y q y ser f continua, f° es continua.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \\
& hX = X/E \arrow[ur, "f^\circ"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora veamos que en efecto h define un funtor. Sean X y Y espacios CG con sus correspondientes funciones cocientes $q : X \to hX$ y $q' : Y \to hY$, y sea $f : X \to Y$, definamos $h(f) = (q' \circ f)^\circ$ que claramente hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "q"'] & Y \arrow[r, "q'"] & hY \\ & hX \arrow[ur, "(q' \circ f)^\circ"'] & \end{tikzcd}$$

entonces $h(f)$ está bien definida. Que h respeta identidades y composiciones es inmediato, por lo tanto h es un funtor. Por último demostremos que h es adjunto izquierdo de la inclusión de los espacios CGWH en los espacios CG, para esto es suficiente mostrar que existe un isomorfismo natural $\eta : C(h\ ,\ ) \to C(\ ,\iota(\ ))$ con ι la inclusión de la que hablamos, pero esto es lo mismo que para cualquier espacio X que sea CG y cualquier espacio Y que sea CGWH exista una biyección $\eta_{X,Y} : C(X,Y) \to C(hX,Y)$ que definiremos por $\eta(f) = f^\circ$ para $f : X \to Y$. Es claro, por la construcción de f°, que $\eta_{X,Y}$ es biyectiva. $\square$

No se demostrará aquí pero la categoría **CTop** de espacios CG es una subcategoría plena y bicompleta de **Top**, esto quiere decir que cada vez que se tenga un diagrama pequeño $D : I \to CG$, y considerando la inclusión $F : CG \to \mathbf{Top}$, podemos encontrar el límite (colímite) L de $F \circ D$ y mostrar que L es un espacio CG, entonces CG tiene límites y colímites para diagramas pequeños.

2.24 Corolario. La categoría de espacios CGWH tiene colímites para diagramas pequeños, que se obtienen de aplicar h al colímite calculado en la categoría de espacios CG.

Demostración. Sea $D : I \to CGWH$ un diagrama y consideremos la inclusión $\iota : CGWH \to CG$, entonces podemos encontrar el colímite de $\iota \circ D$, pero por ser h el adjunto izquierdo de ι, h preserva colímites [11], por lo tanto $h(L)$ es el colímite de D. $\square$

2.25 Proposición. Si X es un espacio CG y Y es un espacio CGWH entonces $C(X,Y)$ es un espacio CGWH. Por lo tanto la categoría de espacios CGWH es cartesianamente cerrada.

Demostración. Por definición $C(X,Y)$ es un espacio CG, sólo necesitamos ver que es un espacio WH, o lo que es lo mismo, que $\Delta_{C(X,Y)}$ es cerrado en $C(X,Y) \times C(X,Y)$. Definamos $ev_x : C(X,Y) \to Y$ por $ev_x(f) = f(x)$ para $f \in C(X,Y)$. Para todo subconjunto abierto U de Y se va a tener que $ev_x^{-1}(U) = \{f : X \to Y | f(\{x\}) \subseteq U\} = W(\{x\}, U)$ que es abierto en $C(X,Y)$, por lo tanto ev_x es continua. Notemos que $(ev_x \times ev_x)^{-1}(\Delta_Y) = \{(f,g)|f(x) = g(x)\}$, entonces $\bigcap_x (ev_x \times ev_x)^{-1}(\Delta_Y) = \{(f,g)|f = g\} = \Delta_{C(X,Y)}$ que es cerrado en $C(X,Y) \times C(X,Y)$ pues Δ_Y es cerrado. $\square$

2.26 Definición. Sea X un espacio CGWH (con topología ξ), y sea Y un subconjunto de X. Denotaremos por ξ_Y^0 la topología de subespacio ordinaría sobre Y y denotemos $\xi_Y = k(\xi_Y^0)$; llamaremos a esta topología la topología de subespacio CGWH. Sea $\iota_Y : Y \to X$ la inclusión. Como $\xi_Y^0 \subseteq \xi_Y$, se tiene que ι_Y es continua respecto a ξ_Y y ξ.

2.27 Lema. Si Y es cerrado o abierto entonces $\xi_Y = \xi_Y^0$.

Demostración. Supongamos que Y es cerrado. Sea U un k-cerrado de Y, K un espacio compacto y Hausdorff y $u : K \to X$ continua. Notemos que $u|^Y : K \to Y$ es continua, entonces $(u|^Y)^{-1}(U) = u^{-1}(U)$ es cerrada en K, por lo tanto U es un k-cerrado de X y por ende cerrado en X, entonces $Y \cap U = U$ es un elemento de ξ_Y^0, por lo tanto U es cerrado en Y y $\xi_Y = \xi_Y^0$. Ahora supongamos que Y es abierto. Sea F un k-cerrado, tenemos que mostrar que F es cerrado en Y, esto es lo mismo que mostrar que $V = Y - F$ es abierto en Y pero esto es lo mismo que mostrar que V es abierto en X. Como X es CG basta con ver que $u^{-1}(V)$ es abierto en K, para K un espacio compacto y Hausdorff y $u : K \to X$ una función continua. Sea $a \in u^{-1}(V)$, mostraremos que existe una vecindad abierta de a contenida en $u^{-1}(V)$. Como Y es abierto y $u^{-1}(V) \subseteq u^{-1}(Y)$, $u^{-1}(Y)$ es vecindad abierta de a en K. Por ser K compacto y Hausdorff, K es localmente compacto, entonces existe una vecindad abierta N de a tal que $\overline{N} \subseteq u^{-1}(Y)$ y $\overline{N}$ es compacta y Hausdorff. Sea $v = u|_{\overline{N}} : \overline{N} \to X$ que es continua. Como $v(\overline{N}) \subseteq Y$ tenemos que $v^{-1}(F)$ es cerrado en $\overline{N}$, esto implica que $v^{-1}(V)$ es abierto en $\overline{N}$ pues $v^{-1}(V)^c = v^{-1}(F)$. Notemos que $v^{-1}(V) = \{n \in \overline{N} | n \in u^{-1}(V)\}$ pero este conjunto no es más que $\overline{N} \cap u^{-1}(V)$, de esto se sigue que $v^{-1}(V) \cap N = u^{-1}(V) \cap N$ es abierto en N y por lo tanto en K, luego $u^{-1}(V) \cap N$ es la vecindad abierta de a contenida en $u^{-1}(V)$ que buscábamos, por lo tanto $u^{-1}(V)$ es abierto en K. $\square$

2.28 Definición. Se dice que una función continua $i : Y \to X$ de espacios CGWH es una inmersión si es inyectiva, y la función inducida por i,

$Y \to i(Y)$, es un homeomorfismo dado que le demos a $i(Y)$ la topología de subespacio CGWH heredada de X. Si Y es subconjunto de X, la inclusión $\iota : Y \to X$ también es una inmersión.

2.29 Corolario. Sea $i : Y \to X$ una inmersión, $i(Y)$ es cerrado en X si y sólo si para cada subconjunto cerrado $U \subseteq Y$, $i(U)$ es cerrado en X.

Demostración. Supongamos que $i(Y)$ es cerrado en X, queremos demostrar que $i(U)$ es cerrado en X, pero esto es lo mismo que demostrar que es cerrado en $i(Y)$. Como $i(Y)$ tiene topología CG por el lema 2.27, es suficiente ver que, para un espacio K que es compacto y Hausdorff y una función continua $u : K \to i(Y)$, $u^{-1}(i(U))$ es cerrado en K. Sea $\varphi : i(Y) \to Y$ el homeomorfismo del que se habló, entonces $\varphi u : K \to Y$ es continua y por lo tanto $u^{-1}(\varphi^{-1}(U)) = u^{-1}(i(U))$ es cerrado en K. Ahora, si i envía subconjuntos cerrados de Y en subconjuntos cerrados de X es claro que $i(Y)$ es cerrado en X. $\square$

2.30 Definición. Si $i : Y \to X$ es una inmersión tal que $i(Y)$ es cerrado en X se dirá que i es una inmersión cerrada.

2.31 Lema. Sea $i : Y \to X$ una función continua e inyectiva entre espacios CGWH. Entonces i es una inmersión si y sólo si tiene la siguiente propiedad: si T es un espacio CGWH y $f : T \to Y$ es tal que $if : T \to X$ es continua, entonces f es continua.

Demostración. Denotemos por $P(i)$ la sentencia de que i cumple con la propiedad mencionada antes.
Primero demostremos que si Y es subconjunto de X e $\iota : Y \to X$ es la inclusión, entonces $P(\iota)$ es cierta. Sea T un espacio CGWH y sea $f : T \to Y$ tal que ιf es continua. Sea $U \subseteq X$ cerrado, entonces $f^{-1}(\iota^{-1}(U)) = f^{-1}(U \cap Y)$ es cerrado en T, esto implica que f es continua respecto a la topología ξ_Y^0 (que es la topología de subespacio ordinaria), entonces f es continua respecto a ξ_Y. Ahora si $i : Y \to X$ es una inmersión, demostremos que $P(i)$ es cierta. Sea T un espacio CGWH y $f : T \to Y$ tal que if es continua. Consideremos el homeomorfismo $\varphi : Y \to i(Y)$ y la inclusión $\iota : i(Y) \to X$. Tenemos que $if = \iota\varphi f$, entonces como se cumple $P(\iota)$, φf es continua y como φ es homeomorfismo, f es continua y por lo tanto se cumple $P(i)$.
Ahora supongamos que se cumple $P(i)$, demostraremos que i es una inmersión. Sea $\varphi : Y \to i(Y)$ definida por $\varphi(y) = i(y)$ que claramente es una biyección, demostraremos que es homeomorfismo. Consideremos la inclusión

$\iota : i(Y) \to X$ y notemos que $i = \iota\varphi$ y que $\iota = i\varphi^{-1}$. Como se cumple $P(i)$ y, como ya vimos para la inclusión ι, se cumple $P(\iota)$, entonces φ y φ^{-1} son continuas, por lo tanto i es una inmersión. $\square$

2.32 Corolario. Sean $i : Y \to X$ y $r : X \to Y$ funciones continuas entre espacios CGWH tales que $ri = 1_Y$. Entonces i es una inmersión cerrada y r es una función cociente.

Demostración. Sea $f : T \to Y$ una función tal que if es continua, entonces $rif = f$ es continua, por el lema 2.31 i es una inmersión. Ahora veamos que $i(Y) = (ir, 1_X)^{-1}(\Delta_X)$ que es cerrado en X. Sea $x \in i(Y)$, entonces existe $y \in Y$ tal que $i(y) = x$, de esto se sigue que $ir(x) = iri(y) = x$, por lo tanto $x \in (ir, 1_X)^{-1}(\Delta_X)$. Ahora supongamos que $x \in (ir, 1_X)^{-1}(\Delta_X)$, entonces $ir(x) = x$, pero esto nos dice que existe $r(x)$ en Y tal que $i(r(x)) = x$, por lo tanto $x \in i(Y)$. De lo anterior se sigue que $i(Y)$ es cerrado en X, por lo tanto i es una inmersión cerrada. Ahora veamos que r es una función cociente. Es claro que r es una función sobreyectiva. Sea $A \subseteq Y$, demostraremos que A es cerrado si y sólo si $r^{-1}(A)$ es cerrado. Es claro que si A es cerrado entonces su preimagen es cerrada en X. Supongamos que $r^{-1}(A)$ es cerrado en X, entonces $i^{-1}(r^{-1}(A)) = (ri)^{-1}(A) = A$ es cerrado en Y, por lo tanto r es una función cociente. $\square$

2.33 Proposición. La categoría $\mathscr{U}$ de espacios CGWH tiene límites para todos los diagramas pequeños, y el funtor que olvida $U : \mathscr{U} \to$ **Set** los preserva.

Demostración. Sea $D : I \to \mathscr{U}$ un diagrama. Como **Top** es una categoría completa tiene todos los límites de diagramas pequeños. El límite para el diagrama UD va a ser el conjunto

$$X = \{(x_i) \in \prod X_i | f_{ijr}(x_i) = x_j\}_{i,j,r} \tag{2.6}$$

con $i, j \in Ob(I)$, $m_{ijr} \in Hom_I(i, j)$, $X_i = UD(i)$ y $f_{ijr} = UD(m_{ijr})$. Démosle la topología de producto CGWH a $\prod X_i$ y probemos que X es un subsespacio cerrado. Consideremos la función $(f_{ijr} \circ \pi_i, 1_{X_j} \circ \pi_j) : \prod X_i \to X_j \times X_j$ y notemos que $A_{i,j} = \{(x_i) \in \prod X_i | f_{ijr}(x_i) = x_j\} = (f_{ijr} \circ \pi_i, 1_{X_j} \circ \pi_j)^{-1}(\Delta_{X_j})$ es un subconjunto cerrado en $\prod X_i$ y que $X = \bigcap_{i,j} A_{i,j}$, por lo tanto X es cerrado en $\prod X_i$. Si le damos a X la topología de supespacio, por el lema 2.27, X es un espacio CGWH siendo el límite de D. $\square$

2.34 Proposición. Sean $i : X \to Y$ y $j : Y \to Z$ funciones continuas entre espacios CGWH.

(a) Si i y j son inmersiones entonces ji también lo es.

(b) Si i y j son inmersiones cerradas entonces ji también lo es.

(c) Si ji es una inmersión entonces i también lo es.

(d) Si ji es una inmersión cerrada entonces i también lo es.

Demostración. (a) Sea $f : T \to Y$ una función tal que jif es continua, como j es inmersión se tiene que if es continua, pero una vez más y como i es inmersión, f es continua y por lo tanto ji es una inmersión.
(b) Debemos demostrar que $ji(X)$ es cerrado en Z. Como i es una inmersión cerrada se tiene que $i(X)$ es cerrado en Y y por el corolario 2.29 $j(i(X))$ es cerrado en Z.
(c) Sea $f : T \to Y$ una función tal que if es continua. Como if es continua entonces jif es continua y por ser ji una inmersión, f es continua, por lo tanto i es una inmersión.
(d) Demostraremos que $i(X)$ es cerrado en Y. Llamemos $Y' = j^{-1}(ji(X))$, entonces como $ji(X)$ es cerrado en Z, Y' es cerrado en Y, además $i(X) \subseteq Y'$. Sea $\iota : Y' \to Y$ la inclusión y sea $i' = i|^{Y'} : X \to Y'$, notemos que $i = \iota i'$. Por otro lado, sea $y \in Y'$, entonces para algún $x \in X$, $j(y) = ji(x)$ y como ji es inyectiva, esta x, que denotaremos por $r(y)$, es única. Definamos $r : Y' \to X$ de la manera obvia y notemos que $j\iota(y) = j(y) = jir(y)$, luego $j\iota = jir$. Como $j\iota$ es continua, jir es continua y por ser ji inmersión, r es continua. Ahora notemos que $ji = j\iota i' = jiri'$ y para $x \in X$ $ji(x) = jiri'(x)$, como ji es inyectiva se tiene que $x = ri'(x)$, entonces $ri' = 1_X$. Por el corolario 2.32 se tiene que i' es una inmersión cerrada, además como $\iota(Y') = Y'$ es cerrado en Y, ι es una inclusión cerrada, de esto se sigue que $\iota i' = i$ es una inmersión cerrada por el inciso (b). $\square$

2.35 Proposición. Sean X, Y y Z espacios CGWH, y sea $i : X \to Y$ una inmersión. Entonces la función $i \times 1_Z : X \times Z \to Y \times Z$ también es una inmersión. Si i es una inmersión cerrada, también lo es $i \times 1_Z$.

Demostración. Sea $(u, v) : W \to X \times Z$ una función tal que $(i \times 1_Z) \circ (u, v) = (iu, v)$ es continua, se sigue que iu y v son continuas y por ser i una inmersión entonces u es continua, por lo tanto (u, v) es continua e $i \times 1_Z$ es una inmersión. Si i es una inmersión cerrada entonces $i(X)$ es cerrada en Y, se sigue que $i(X) \times Z$ es cerrado en $Y \times Z$, por lo tanto $i \times_Z$ es una inmersión cerrada. $\square$

2.36 Proposición. Supongamos que tenemos un cuadrado pullback como se muestra abajo, en el cual i es una inmersión. Entonces i' también es una inmersión. Más aun, si i es una inmersión cerrada también lo es i'.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "f'"'] & Y' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "i"'] & Y \end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $u : W \to X'$ una función tal que $i'u$ es continua, vamos a demostrar que u es continua. Se sigue que $fi'u$ es continua, entonces $if'u$ también es continua, luego como i es una inmersión $f'u$ es continua. Ahora tenemos que $i'u$ y $f'u$ son continuas, entonces, por ser el diagrama un cuadrado pullback, u es continua, por lo tanto i' es una inmersión. Por último, supongamos que i es una inmersión cerrada. Demostremos que $i'(X') = f^{-1}(i(X))$ que es cerrado en Y'. Sea $y' \in i'(X')$, entonces existe $x' \in X'$ tal que $i'(x') = y'$, luego $fi'(x') = f(y')$, entonces $if'(x') = f(y')$, por lo tanto $f(y') \in i(X)$, de aquí que $y' \in f^{-1}(i(X))$. Ahora supongamos que $y' \in f^{-1}(i(X))$, entonces $f(y') \in i(X)$, esto implica que existe $x \in X$ tal que $i(x) = f(y')$, por propiedades del pullback, existe $x' \in X'$ tal que $i'(x') = y'$ y $f'(x') = x$, por lo tanto $y' \in i'(X')$. Por lo tanto i' es una inmersión cerrada. $\square$

2.37 Lema. Si el diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "k"'] & Z \end{tikzcd}$$

es un pullback de conjuntos y f es una inmersión cerrada, entonces es un pullback de espacios CGWH.

Demostración. Como es un pullback de conjuntos, entonces

$$W = \{(x, y) \in X \times Y | h(x) = k(y)\} = (h, k)^{-1}(\Delta_Z), \tag{2.7}$$

$f = \pi_X|_W$ y $g = \pi_Y|_W$. Notemos que W es cerrado en $X \times Y$, entonces si le damos la topología de subespacio CGWH, por el lema 2.27, W es un espacio CGWH y es el pullback en la categoría de espacios CGWH. □

2.38 Proposición. Supongamos que tenemos un cuadrado pushout como se muestra abajo, en el cual i es una inclusión cerrada. Entonces j también es una inclusión cerrada, y el cuadrado también es pullback. Más aun, el pushout se creo en la categoría **Set**.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\
Y \arrow[r, "j"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Demostración. Para facilitar esta prueba, como i es una inclusión cerrada, vamos a tratar a W como un subespacio cerrado de X y a i como la inclusión. Primero vamos a construir el pushout de i y f en **Set**. Sea $Z' = (X - W) \coprod Y$ y definamos una función $p : X \coprod Y \to Z'$ dada por $p(x) = x$ si $x \notin W$, $p(x) = f(x)$ si $x \in W$ y $p(y) = y$. Ahora demos la relación de equivalencia $E = \{(a, b) \in (X \coprod Y)^2 | p(a) = p(b)\}$ y notemos $Z' = (X \coprod Y)/E$, más aun, p manda a cada elemento a su clase de equivalencia. Definamos $g' : X \to Z'$ y $j' : Y \to Z'$ como $g' = p\iota_X$ y $j' = p\iota_Y$ como se muestra en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "i"] \arrow[dd, "f"'] & & X \arrow[dl, "\iota_X"] \arrow[dd, "g'"] \\
& X \coprod Y \arrow[dr, "p"] & \\
Y \arrow[ur, "\iota_Y"] \arrow[rr, "j'"'] & & Z'
\end{tikzcd}$$

Veamos que es un cuadrado pushout. Sean $g'' : X \to Z''$ y $j'' : Y \to Z''$ tales que $g''i = j''f$, entonces la función $u : Z' \to Z''$ dada por $u(x) = g''(x)$ si

$x \notin W$, $u(x) = j''(f(x))$ si $x \in W$ y $u(y) = j''(y)$ para $y \in Y$, es la única tal que $j'' = uj'$ y $g'' = ug'$, por lo tanto el cuadrado es pushout. Ahora queremos ver que Z' es un espacio CGWH, ya sabemos que es CG, demostraremos que es WH y para esto es suficiente ver que E es una relación de equivalencia cerrada en $X \coprod Y$. Consideremos el conjunto

$$G = (1_W, f)(W) = \{(w, y) \in W \times Y | y = f(w)\} \tag{2.8}$$

y veamos que es cerrado en $W \times Y$, pero esto es lo mismo que demostrar que es k-cerrado en $W \times Y$. Sea K un espacio compacto y Hausdorff y $\alpha = (\beta, \gamma) : K \to W \times Y$ una función continua entonces

$$\alpha^{-1}(G) = \{k \in K | f\beta(k = \gamma(k))\} = (f\beta, \gamma)^{-1}(\Delta_Y) \tag{2.9}$$

que es cerrado en K. De lo anterior se sigue que G es cerrado en $W \times Y$ y como W es un subespacio cerrado de X, G también es cerrado en $X \times Y$. Sea $G' = \{(y, x) \in Y \times X | (x, y) \in G\}$ que es cerrado en $Y \times X$. Sea

$$E_0 = \{(w, w') \in W \times W | f(w) = f(w')\} = (f \times f)^{-1}(\Delta_Y) \tag{2.10}$$

que es cerrado en $W \times W$ y por ende en $X \times X$, y sea

$$E_1 = (\Delta_X \cup E_0) \coprod G \coprod G' \coprod \Delta_Y \tag{2.11}$$

que es un subconjunto cerrado de $X^2 \coprod (X \times Y) \coprod (Y \times X) \coprod Y^2 = (X \coprod Y)^2$. Demostremos que $E_1 = E$. Sea $(a, b) \in E_1$ entonces:

(a) Si $(a, b) \in \Delta_X \cup E_0$ entonces $a = b$ o $f(a) = f(b)$, en ambos casos $p(a) = p(b)$ y por lo tanto $(a, b) \in E$.

(b) Si $(a, b) \in G$ entonces $a \in W$ y $b = f(a)$, luego $p(a) = f(a) = b = p(b)$, por lo tanto $(a, b) \in E$.

(c) Si $(a, b) \in G'$ podemos ver que $(a, b) \in E$ de manera análoga al inciso (b).

(d) Si $(a, b) \in \Delta_Y$ entonces $a = b \in Y$, por lo tanto $p(a) = p(b)$ y así $(a, b) \in E$.

Por lo tanto $E_1 \subseteq E$. Ver que $E \subseteq E_1$ es inmediato, por lo tanto E es una relación de equivalencia cerrada en $X \coprod Y$. Así Z' es un espacio CGWH y es el pushout en la categoría $\mathscr{U}$ de espacios CGWH, además que la función cociente correspondiente es $p : X \coprod Y \to (X \coprod Y)/E$. Entonces podemos identificar Z con Z', j con j' y g con g'. Veamos que j' es una inmersión cerrada. Es claro que $j' = p\iota_Y$ es inyectiva por como está definida p, además $Y \to j'(Y) = Y$ es un homeomorfismo, entonces por definición j' es una inmersión. Sea F un subconjunto cerrado de Y, entonces se tiene que $p^{-1}(F) = p^{-1}(j'(F)) = F \cup f^{-1}(F)$ un subconjunto cerrado de $X \coprod Y$, entonces $j'(F)$ es cerrado en Z', esto nos dice que j envía subconjuntos cerrados de Y en subconjuntos cerrados de Z', entonces j' es una inmersión cerrada, por lo tanto j es una inmersión cerrada. Por último veamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g'"] \\
Y \arrow[r, "j'"'] & Z'
\end{tikzcd}$$

es pullback. Sean $u_1 : U \to Y$ y $u_2 : U \to X$ funciones tales que $g'u_2 = j'u_1$, necesitamos demostrar que existe una función única $u : U \to W$ tal que $u_1 = fu$ y $u_2 = iu$ pero está función no es más que $u = u_2|^W : U \to W$, por lo tanto es un cuadrado pullback y por el lema 2.37 es un pullback de espacios CGWH. $\square$

2.39 Proposición. Consideremos un cuadrado pullback en $\mathscr{U}$ como se muestra abajo, en el cual q es una función cociente. Entonces p también es una función cociente.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & X \arrow[d, "q"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Demostración. Primero consideremos el caso especial donde g es una inmersión cerrada. La proposición 2.29 nos dice que f también es una inmersión cerrada. Como el pullback lo hemos creado en **Set** sabemos que

$W = \{(x, y) \in X \times Y | q(x) = g(y)\}$ y que $f = \pi_X|_W$ y $p = \pi_Y|_W$. Primero demostraremos que p es sobreyectiva y que para todo $F \subseteq Y$ se cumple que $q^{-1}g(F) = fp^{-1}(F)$. Sea $y \in Y$, entonces $g(y) \in Z$, luego por ser q sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $q(x) = g(y)$ pero esto nos dice que $(x, y) \in W$, entonces $p(x, y) = y$, por lo tanto p es sobreyectiva. Ahora sea $F \subseteq Y$. Sea $x \in q^{-1}g(F)$ entonces $q(x) \in g(F)$, entonces existe $y \in F$ tal que $g(y) = q(x)$, de esto se sigue que $(x, y) \in W$, más aun $(x, y) \in p^{-1}(F)$, por lo tanto $f(x, y) = x \in fp^{-1}(F)$. Por otro lado, sea $x \in fp^{-1}(F)$, entonces existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in p^{-1}(F) \subseteq W$ pero esto es lo mismo que exista $y \in Y$ tal que $p(x, y) = y \in F$ y $f(x, y) = x$, de esto se sigue que $q(x) = g(y) \in g(F)$, por lo tanto $x \in q^{-1}g(F)$. Ahora supongamos que $p^{-1}(F)$ es cerrado en W, como f es una inmersión cerrada, $fp^{-1}(F) = q^{-1}g(F)$ es cerrado en X, luego por ser q una función cociente, $g(F)$ es cerrado en Z. Como g es una inmersión, es una función inyectiva, de aquí que $g^{-1}g(F) = F$ es cerrado en Y, por lo tanto p es una función cociente. Ahora para el caso general consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "{(f,p)}"] \arrow[d, "p"'] & X \times Y \arrow[d, "q\times 1_Y"] \\ Y \arrow[r, "{(g,1_Y)}"'] & Z \times Y \end{tikzcd}$$

Notemos que el pullback de $(g, 1_Y)$ y $q \times 1_Y$ es el conjunto

$$W' = \{(x, y, y') \in X \times Y \times Y | (x, y) \in W \wedge y' = y\} \tag{2.12}$$

con las funciones $r : W' \to X \times Y$ y $s : W' \to Y$ dadas por $r(x, y, y) = (x, y)$ y $s(x, y, y) = y$. Es claro que podemos identificar W con W', r con (f, p) y s con p, por lo tanto el cuadrado anterior es pullback. Por la proposición 2.21 la función $q \times 1_Y$ es una función cociente. Consideremos la función continua $\pi_Y : Z \times Y$ y notemos que $\pi_Y \circ (g, 1_Y) = 1_Y$, entonces por el corolario 2.32 $(g, 1_Y)$ es una inmersión cerrada, entonces p es una función cociente usando el argumento anterior del caso especial. $\square$

2.40 Proposición. Sean X, Y y Z espacios CGWH, y sea $i : X \to Y$ una inmersión. Entonces la función $i_* : C(Z, X) \to C(Z, Y)$ también es una inmersión. Más aun, si i es una inmersión cerrada también lo es i_*.

Demostración. Consideremos $f : T \to C(Z,X)$ tal que $i_* f : T \to C(Z,Y)$ es continua, vamos a demostrar que f es continua. Consideremos los homeomorfismos

$$C(T, C(Z,Y)) \xrightarrow{adj_{T,Z,Y}} C(T \times Z, Y)$$

$$C(T, C(Z,X)) \xrightarrow{adj_{T,Z,X}} C(T \times Z, X).$$

Como $i_* f$ es una función continua entonces $adj_{T,Z,Y}(i_* f) : T \times Z \to Y$, dada por $adj_{T,Z,Y}(i_* f)(t,z) = i_* f(t)(z) = (i \circ f(t))(z)$, es continua, pero esto no es más que la composición $i \circ adj_{T,Z,X}(f) : T \times Z \to Y$ dada por $i \circ adj_{T,Z,X}(f)(t,z) = i(f(t)(z)) = (i \circ f(t))(z)$. Por ser i una inmersión, $adj_{T,Z,X}(f)$ es continua pero esto implica que f es continua, por lo tanto i_* es inmersión. Si i es una inmersión cerrada se cumple que $i(X)$ es cerrado en Y y podemos pensar a X e $i(X)$ como el mismo subespacio cerrado de Y, entonces tiene sentido decir que $C(Z, i(X)) = i_*(C(Z,X))$, luego por la observación 2.9 $C(Z, i(X)) = i_*(C(Z,X))$ es cerrado en $C(Z,Y)$, por lo tanto i_* es una inmersión cerrada. $\square$

2.41 Definición. Sea X un espacio CGWH, y sea Y un subespacio cerrado de X. Definimos X/Y como el espacio que hace el diagrama abajo a la izquierda un cuadrado pushout:

$$\begin{tikzcd} Y \coprod \{0\} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "c"'] & X \coprod \{0\} \arrow[d, "q"] \\ \{1\} \arrow[r, "z"'] & X/Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \{1\} \arrow[r, "z"'] & X/Y \end{tikzcd}$$

Por la proposición 2.38, el pushout es creado en la categoría **Set**, y el cuadrado también es pullback. Por estar construido en **Set**, $X/Y = (X - Y) \coprod \{0\}$ junto con la función cociente $\phi : X \coprod \{0\} \coprod \{1\} \to X/Y$ dada por $\phi(x) = x$ si $x \notin Y \coprod \{0\}$, $\phi(x) = 1$ si $x \in Y \coprod \{0\}$ y $\phi(1) = 1$, entonces $q = \phi \circ \iota_{X \coprod \{0\}}$ y $z = \phi \circ \iota_{\{1\}}$. Si $Y = \emptyset$ entonces $X/Y = X \coprod \{0\}$, de otra manera el cuadrado de la derecha también es pushout y pullback. Definimos una función $p : X \coprod \{0\} \to X/Y$ dado por $p(x) = 1$, entonces $\{x \in X | p(x) = q(x)\} = Y \coprod \{0\}$.

2.42 Observación. Si $F \subseteq X$ es un subconjunto cerrado entonces $q^{-1}(q(F))$ es igual a F (si $F \cap Y = \emptyset$) o es igual a $F \cap Y$. De cualquier manera $q^{-1}(q(F))$ es cerrado en X, además no es difícil probar que q es una función cociente, por lo tanto $q(F)$ es cerrado mostrando que q es una función cerrada.

Capítulo 3

Límites y regularidad

En este capitulo tendremos un punto de vista más categórico de la categoría $\mathscr{U}$. De ahora en adelante la palabra espacio se va a referir a un espacio CGWH a menos que se especifique otra cosa.

3.1. Regularidad

Sea $\mathcal{C}$ una categoría con límites y colímites finitos. Cada pareja de morfismos $f, g : A \to B$ tienen igualador y coigualador. Vamos a escribir $eq(f)$ para el igualador de los morfismos $f\pi_1, f\pi_2 : A \times A \to B$ y $coeq(f)$ para el coigualador de $\tau_1 f, \tau_2 f : A \to B \sqcup B$. Si existe algún morfismo $q : Y \to A \times A$ ($q : B \sqcup B \to Y$) tal que $f\pi_1 q = f\pi_2 q$ ($q\tau_1 f = q\tau_2 f$) entonces existe un único morfismo $\beta : Y \to eq(f)$ ($\beta : coeq(f) \to Y$) tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} eq(f) \arrow[r, "p"] & A \times A \arrow[r, shift left, "f\pi_1"] \arrow[r, shift right, "f\pi_2"'] & B \\ Y \arrow[u, dashed, "\beta"] \arrow[ur, "q"'] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "\tau_1 f"] \arrow[r, shift right, "\tau_2 f"'] & B \sqcup B \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "q"'] & coeq(f) \arrow[d, dashed, "\beta"] \\ & & Y \end{tikzcd}$$

o

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, dashed, "\beta"] \arrow[drr, "\pi_1 q"] \arrow[ddr, "\pi_2 q"'] & & \\
& eq(f) \arrow[r, "\pi_1 p"] \arrow[d, "\pi_2 p"] & A \arrow[d, "f"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "p\tau_1"] \arrow[ddr, "q\tau_1"] & \\
B \arrow[r, "p\tau_2"'] \arrow[drr, "q\tau_2"'] & coeq(f) \arrow[dr, dashed, "\beta"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

Notemos que $eq(f) = (f \times f)^{-1}(\Delta_B) = \{(a_1, a_2) \in A \times A | f(a_1) = f(a_2)\}$ y $coeq(f) = (B - f(A)) \coprod B = B \coprod B/E$ junto con la función cociente $p : B \coprod B \to (B - f(A)) \coprod B$ dada por $p(b, 1) = (b, 1)$ si $b \notin f(A)$, $p(b, 1) = (b, 2)$ si $b \in f(A)$ y $p(b, 2) = (b, 2)$, y la relación de equivalencia $E = \{((b, i), (b', j)) \in (B \coprod B)^2 | p(b, i) = p(b, j)\}$ donde $i, j \in \{1, 2\}$.

3.1 Definición. Un morfismo $f : B \to C$ es un epimorfismo regular si es el coigualador de alguna pareja de morfismos $g, h : A \to B$, o equivalentemente si es el coigualador de la pareja de morfismos $\pi_1 p, \pi_2 p : eq(f) \to B$. Dualmente, f es un monomorfismo regular si es el igualador de alguna pareja de morfismos $g, h : C \to D$, o equivalentemente si es el igualador de la pareja de morfismos $p\tau_1, p\tau_2 : C \to coeq(f)$. Decimos que una categoría es regular si cada morfismo puede ser factorizado como un epimorfismo regular seguido de un monomorfismo, y pullbacks de epimorfismos regulares son epimorfismos regulares. Decimos que es coregular si cada morfismo puede ser factorizado como un epimorfismo seguido de un monomorfismo regular, y pushouts de monomorfismos regulares son monomorfismos regulares. Birregular significa regular y coregular.

3.2 Teorema.

(a) Un morfismo en $\mathscr{U}$ es un monomorfismo si y sólo si es inyectivo; es un epimorfismo si y sólo si tiene imagen densa.

(b) Un morfismo en $\mathscr{U}$ es un monomorfismo regular si y sólo si es una inmersión cerrada.

(c) Un morfismo en $\mathscr{U}$ es un epimorfismo regular si y sólo si es un morfismo cociente.

(d) El producto, coproducto y la composición de monomorfismos (regulares) es un monomorfismo (regular).

(e) El coproducto, el producto finito y la composición de epimorfismos (regulares) es un epimorfismo (regular).

(f) $\mathscr{U}$ es birregular.

Demostración. (a)Sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{U}$.
"$\Rightarrow$"Supongamos que f es monomorfismo. Por definición, f es monomorfismo si y sólo si $f_* : \mathscr{U}(X, A) \to \mathscr{U}(X, B)$ es inyectiva para cada $X \in Ob(\mathscr{U})$. Sea $X = \{x\}$, para cada $a \in A$ tenemos una función $x_a : X \to A$ tal que $x_a(x) = a$, entonces para $a_1, a_2, \in A$, $f_*(x_{a_1}) = fx_{a_1} = fx_{a_2} = f_*(x_{a_2})$ implica que $x_{a_1} = x_{a_2}$ y de esto se sigue que $a_1 = a_2$, por lo tanto f es inyectiva.
"$\Leftarrow$"Ahora supongamos que f es inyectiva. Sean $g, h \in \mathscr{U}(X, A)$ tales que $fg = fh$, entonces para cada $x \in X$ tenemos que $f(h(x)) = f(g(x))$, luego $h(x) = g(x)$, de esto se sigue que $h = g$ y por lo tanto f es un monomorfismo.
"$\Rightarrow$"Supongamos que f es epimorfismo. Llamemos $A' := \overline{f(A)}$. De la definición 2.41 tenemos el par de morfismos $p, q : B \to B/A'$ dados por $q(b) = b$ si $b \notin A'$, $q(b) = 1$ si $b \in A'$ y $p(b) = 1$. Es claro que $pf = qf$ y por ser f epimorfismo, $p = q$, de aquí que $A' = B$.
"$\Leftarrow$"Ahora supongamos que f tiene imagen densa. Sean $h, g : B \to C$ morfismos tales que $hf = gf$. Notemos que $f(A) \subseteq eq(h, g) = (g \times h)^{-1}(\Delta_C)$ y $(g \times h)^{-1}(\Delta_C)$ es cerrado en B, entonces $f(A) = \overline{f(A)} = B$, luego entonces $(g \times h)^{-1}(\Delta_C) = B$, por lo tanto $h = g$.

(b)Sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{U}$.
"$\Rightarrow$"Supongamos que f es un monomorfismo regular, entonces existen un par de morfismos $g, h : B \to C$ tal que $A = eq(g, h)$. Sea $l : X \to A$ un morfismo en **Set** tal que fl es un morfismo en $\mathscr{U}$(una función continua). Es claro que $gfl = hfl$, por lo tanto existe un único morfismo $l' : X \to A$ en $\mathscr{U}$ tal que $fl' = fl$, pero es justamente l, por lo tanto l es morfismo en $\mathscr{U}$ y f es inmersión.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & C \\ X \arrow[u, "l'=l"] \arrow[ur, "fl"'] & & \end{tikzcd}$$

Ahora como $A = eq(g, h) = (g \times h)^{-1}(\Delta_B)$ que es cerrado en B y $f(A) = A$, f es inmersión cerrada.
"$\Leftarrow$"Sea $f : A \to B$ una inmersión cerrada, entonces podemos pensar en A como un subconjunto cerrado de B y en f como la inclusión. Recordemos los

morfismos de la definición 2.41 y notemos que $f : A \to B$ es el igualador de $p, q : B \to B/A$ pues si existiera un morfismo $g : X \to B$ tal que $qg = pg$ podemos encontrar un único morfismo $\beta : X \to A$ definido por $\beta(x) = g(x)$ tal que $g = f\beta$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & B/A \\
X \arrow[u, "\beta"] \arrow[ur, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

(c)Sea $f : A \to B$ un morfismo en $\mathscr{U}$.
"$\Rightarrow$"Supongamos que f es epimorfismo regular, entonces es el coigualador de alguna pareja de morfismos $g, h : X \to A$. Existen relaciones de equivalencia cerradas $R \subseteq A \times A$ tal que contengan a $S = \{(g(x), h(x))|x \in X\}$, por ejemplo $R = A \times A$. Sea R la intersección de tales relaciones, claramente una relación de equivalencia cerrada también. Tenemos el morfismo cociente $q : A \to A/R$ con A/R en $\mathscr{U}$ pues por ser R cerrada en $A \times A$, A/R es WH y por estar A en $\mathscr{U}$, A/R está en $\mathscr{U}$. Está construcción es precisamente la de coigualador en **Set**, un tipo particular de pushout y como ya hemos visto podemos construir pushouts en **Set** y ver que funcionan en la categoría $\mathscr{U}$, entonces $q : A \to A/R$ es el coigulador de g y h, por lo tanto podemos identificar f con q y B con A/R, por lo tanto f es un morfismo cociente.
"$\Leftarrow$"Sea $f : A \to B$ un morfismo cociente, entonces existe alguna relación de equivalencia R en $A \times A$ tal que $B = A/R$, con R cerrada pues $B = A/R$ es WH. Es claro que B es el coigualador de las proyecciones $\pi_1, \pi_2 : R \to A$ pues si existiera otro morfismo $g : A \to X$ tal que $g\pi_1 = g\pi_2$ podemos encontrar un único morfismo $\beta : A/R \to X$ dado por $\beta(\overline{a}) = g(a)$ tal que $g = \beta f$.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\
& & X
\end{tikzcd}$$

(d)Sean $(\prod A_i, \pi_i)$ y $(\prod B_i, \rho_i)$ los productos de las familias $(A_i)_{i \in I}$ y $(B_i)_{i \in I}$ y para cada $i \in I$ existe $f_i : A_i \to B_i$, entonces el producto $\prod f_i$ es el único morfismo que hace conmutar al diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\prod A_i \arrow[r, "\prod f_i"] \arrow[d, "\pi_j"] & \prod B_i \arrow[d, "\rho_j"'] \\
A_j \arrow[r, "f_j"'] & B_j
\end{tikzcd}
$$

Veamos que si cada f_j es monomorfismo entonces $\prod f_i$ es monomorfismo. Sean $g, h : X \to \prod A_i$ morfismos tales que $\prod f_i g = \prod f_i h$, luego entonces $\rho_j \prod f_i g = \rho_j \prod f_i h$, esto implica que $f_j \pi_j g = f_j \pi_j h$, por ser f_j un monomorfismo $\pi_j g = \pi_j h$ para cada $j \in I$, por lo tanto $h = g$, así $\prod f_i$ es un monomorfismo. Ahora supongamos que cada $f_j : A_j \to B_j$ es un monomorfismo regular, entonces es el igualador para alguna pareja de morfismos:

$$
eq(h_j, g_j) = A_j \xrightarrow{f_j} B_j \underset{g_j}{\overset{h_j}{\rightrightarrows}} C_j
$$

Sea $(\prod C_i, \varrho_i)$ el producto de la familia $(C_i)_{i \in I}$, notemos que el siguiente diagrama conmuta respectivamente:

$$
\begin{tikzcd}
\prod A_i \arrow[r, "\prod f_i"] \arrow[d, "\pi_j"] & \prod B_i \arrow[r, shift left, "\prod h_i"] \arrow[r, shift right, "\prod g_i"'] \arrow[d, "\rho_j"] & \prod C_i \arrow[d, "\varrho_j"'] \\
A_j \arrow[r, "f_j"] & B_j \arrow[r, shift left, "h_j"] \arrow[r, shift right, "g_j"'] & C_j
\end{tikzcd}
$$

por lo tanto $\prod g_i \prod f_i = \prod h_i \prod f_i$. Queremos ver que $\prod A_i$, junto con $\prod f_i$, es el igualador de $\prod h_i$ y $\prod g_i$. Supongamos que existe $\varphi : X \to \prod B_i$ un morfismo tal que $\prod h_i \varphi = \prod g_i \varphi$, entonces $\varrho_j \prod h_i \varphi = \varrho_j \prod g_i \varphi$, luego $h_j \rho_j \varphi = g_j \rho_j \varphi$, de esto se sigue que existe un único morfismo $\beta_j : X \to A_j$

que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_j \arrow[rr, "f_j"] & & B_j \arrow[r, shift left, "h_i"] \arrow[r, shift right, "g_i"'] & C_j \\
& \prod B_i \arrow[ur, "\rho_j"'] & & \\
X \arrow[uu, dashed, "\beta_j"'] \arrow[ur, "\varphi"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Definamos un morfismo $\beta : X \to \prod A_i$ dado por $\beta(x) = (\beta_i(x))$ que está bien definida y es continua por la proposición 2.4. Notemos que β hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\beta"] \arrow[drr, "\varphi"] \arrow[ddr, "\beta_j"'] & & & \\
& \prod A_i \arrow[r, "\prod f_i"] \arrow[d, "\pi_j"] & \prod B_i \arrow[r, shift left, "\prod h_i"] \arrow[r, shift right, "\prod g_i"'] \arrow[d, "\rho_j"] & \prod C_i \arrow[d, "\varrho_j"'] \\
& A_j \arrow[r, "f_j"] & B_j \arrow[r, shift left, "h_j"] \arrow[r, shift right, "g_j"'] & C_j
\end{tikzcd}$$

pues $\rho_j\varphi = f_j\beta_j = f_j\pi_j\beta = \rho_j \prod f_i\beta$ para cada $j \in I$, entonces $\varphi = \prod f_i\beta$. Es fácil ver que β es único, por lo tanto $\prod f_i : \prod A_i \to \prod B_i$ es el igualador de $\prod h_i$ y $\prod g_i$.
Ahora sean $(\coprod A_i, \pi_i)$ y $(\coprod B_i, \rho_i)$ los coproductos de las familias $(A_i)_{i\in I}$ y $(B_i)_{i\in I}$ y para cada $i \in I$ existe un morfismo $f_i : A_i \to B_i$, el coproducto $\coprod f_i$ es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\coprod A_i \arrow[r, "\coprod f_i"] & \coprod B_i \\
A_j \arrow[u, "\pi_j"] \arrow[r, "f_j"'] & B_j \arrow[u, "\rho_j"']
\end{tikzcd}$$

Veamos que $\coprod f_i$ es monomorfismo si cada f_i es monomorfismo. Supongamos que existen $g, h : X \to \coprod A_i$ tales que $\coprod f_i g = \coprod f_i h$. Sea $x \in X$, entonces $\coprod f_i g(x) = (b, j) = \coprod f_i h(x)$ para algún $(b, j) \in \coprod B_i$, esto implica que $g(x), h(x) \in A_j$ y que $f_j(g(x)) = f_j(h(x))$, como f_j es monomorfismo (inyectivo) se tiene que $h(x) = g(x)$ y como esto se hizo para cualquier $x \in X$ se cumple que $h = g$, por lo tanto $\coprod f_i$ es un monomorfismo. Ahora supongamos que cada $f_j : A_j \to B_j$ es monomorfismo regular, entonces es el igualador para alguna pareja de morfismos:

$$\begin{tikzcd} eq(h_j, g_j) = A_j \arrow[r, "f_j"] & B_j \arrow[r, shift left, "h_j"] \arrow[r, shift right, "g_j"'] & C_j \end{tikzcd}$$

Sea $(\coprod C_i, \varrho_i)$ el coproducto de la familia $(C_i)_{i \in I}$, notemos que el siguiente diagrama conmuta respectivamente:

$$\begin{tikzcd} \coprod A_i \arrow[r, "\coprod f_i"] & \coprod B_i \arrow[r, shift left, "\coprod h_i"] \arrow[r, shift right, "\coprod g_i"'] & \coprod C_i \\ A_j \arrow[u, "\pi_j"] \arrow[r, "f_j"] & B_j \arrow[u, "\rho_j"] \arrow[r, shift left, "h_j"] \arrow[r, shift right, "g_j"'] & C_j \arrow[u, "\varrho_j"'] \end{tikzcd}$$

por lo tanto $\coprod g_i \coprod f_i = \coprod h_i \coprod f_i$. Sea $\varphi : X \to \coprod B_i$ un morfismo tal que $\coprod h_i \varphi = \coprod g_i \varphi$. Sea $x \in X$, entonces $\varphi(x) = (b, j)$ para algún $(b, j) \in \coprod B_i$, luego $(h_j(b), j) = (g_j(b), j)$ y como $A_j = eq(g_j, h_j) = \{b \in B_j | g_j(b) = h_j(b)\}$ se tiene que $b \in A_j$. Definimos $\beta : X \to \coprod A_i$ dado por $\beta(x) = \varphi(x)$, notemos que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \coprod A_j \arrow[r, "\coprod f_j"] & \coprod B_j \arrow[r, shift left, "\coprod h_i"] \arrow[r, shift right, "\coprod g_i"'] & \coprod C_j \\ X \arrow[u, dashed, "\beta"] \arrow[ur, "\varphi"'] & & \end{tikzcd}$$

Es claro que β es continua por la manera en que la definimos y es fácil ver que es único, por lo tanto $\coprod f_i : \coprod A_i \to \coprod B_i$ es el igualador de $\coprod h_i$ y $\coprod g_i$.

Ya sabemos que la composición de monomorfismos es un monomorfismo, por último veremos que la composición de monomorfismos regulares es un monomorfismo regular. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ monomorfismos regulares, entonces se cumple que son los igualadores de $\rho\tau_1$, $\rho\tau_2$, $\varrho\tau_1$, y $\varrho\tau_2$ como se muestra en los siguientes diagramas.

$$eq(\rho\tau_1, \rho\tau_2) = A \xrightarrow{f} B \underset{\rho\tau_2}{\overset{\rho\tau_1}{\rightrightarrows}} coeq(f)$$

y

$$eq(\varrho\tau_1, \varrho\tau_2) = B \xrightarrow{g} C \underset{\varrho\tau_2}{\overset{\varrho\tau_1}{\rightrightarrows}} coeq(g)$$

Veremos que $gf : A \to C$ es el igualador de $r\tau_1$ y $r\tau_2$ como se muestra en el diagrama:

$$eq(r\tau_1, r\tau_2) = A \xrightarrow{gf} C \underset{r\tau_2}{\overset{r\tau_1}{\rightrightarrows}} coeq(gf)$$

Los morfismos $\rho : B \coprod B \to coeq(f)$, $\varrho : C \coprod C \to coeq(g)$ y $r : C \coprod C \to coeq(gf)$ son los morfismos cociente correspondientes y τ_1 y τ_2 son las inclusiones correspondientes. Notemos que $coeq(gf) \subseteq coeq(g)$ y que $r\tau_1 gf = r\tau_2 gf$. Sea $\varphi : X \to C$ un morfismo tal que $r\tau_1\varphi = r\tau_2\varphi$. Sea $x \in X$, entonces $r\tau_1\varphi(x) = r\tau_2\varphi(x)$, esto quiere decir que $(\varphi(x), 1)$ y $(\varphi(x), 2)$ están en la misma clase de equivalencia en $coeq(gf)$ (esto nos dice que $\varphi(x) \in gf(A)$) por lo tanto están en la misma clase de equivalencia en $coeq(g)$, entonces $\varrho\tau_1\varphi(x) = \varrho\tau_2\varphi(x)$, luego existe un único morfismo $\alpha : X \to B$ que hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, shift left, "\varrho\tau_1"] \arrow[r, shift right, "\varrho\tau_2"'] & coeq(g) \\
X \arrow[u, dashed, "\alpha"] \arrow[ur, "\varphi"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ahora sea $x \in X$, se tiene que $\alpha(x) \in B$, veamos que $\alpha(x) \in f(A)$. Como $\varphi(x) = g\alpha(x)$ y $\varphi(x) \in gf(A)$ entonces $g\alpha(x) \in gf(A)$, entonces $\alpha(x) \in f(A)$ pues g es monomorfismo. De lo anterior tenemos que $\rho\tau_1\alpha = \rho\tau_2\alpha$, entonces existe un único morfismo $\beta : X \to A$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "\rho\tau_1"] \arrow[r, shift right, "\rho\tau_2"'] & coeq(f) \\
X \arrow[u, dashed, "\beta"] \arrow[ur, "\alpha"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Combinando los resultados anteriores tenemos que $\varphi = g\alpha = gf\beta$, entonces β es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "gf"] & C \arrow[r, shift left, "r\tau_1"] \arrow[r, shift right, "r\tau_2"'] & coeq(gf) \\
X \arrow[u, dashed, "\beta"] \arrow[ur, "\varphi"'] & &
\end{tikzcd}
$$

por lo tanto $gf : A \to C$ es el igualador de $r\tau_1$ y $r\tau_2$.

(e)La demostración de que el coproducto de epimorfismos (regulares) es epimorfismo (regular) es del mismo estilo que el inciso anterior. Ahora de la proposición 2.21 obtenemos que el producto finito de morfismos cociente es morfismo cociente, entonces el producto finito de epimorfismos regulares es epimorfismo regular y como sabemos, un epimorfismo regular es un epimorfismo, entonces el producto finito de epimorfismos (regulares) es epimorfismo (regular). Por último la composición de morfismos cocientes es morfismo cociente, luego la composición de epimorfismos regulares es epimorfismo regular y también la composición de epimorfismos es epimorfismo.

(f) Sea $f : A \to B$, y denotemos $R = eq(f) = (f \times f)^{-1}(\Delta_B)$ que es una relación de equivalencia cerrada en A, también denotemos $C = \overline{f(A)}$ con la topología heredada de B. Veamos que f se puede factorizar de la siguiente manera

$$A \xrightarrow{q} A/R \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{i} B$$

con q, φ e i los morfismos evidentes y φq un epimorfismo, i un monomorfismo regular, q un epimorfismo regular y $i\varphi$ un monomorfismo. Es claro que $\varphi q(A) = f(A)$, entonces $\overline{\varphi q(A)} = \overline{f(A)} = C$, luego φq tiene imagen densa, por lo tanto es epimorfismo. Es claro que i es una inmersión cerrada, por lo tanto es monomorfismo regular. De nuevo como los morfismos cocientes son los epimorfismos regulares, q es un epimorfismo regular. Por último es claro que i y φ son inyectivos, entonces $i\varphi$ es inyectivo y por lo tanto monomorfismo. De la proposición 2.39 tenemos que pullbacks de epimorfismos regulares son epimorfismos regulares, así $\mathcal{U}$ es regular. De la proposición 2.38 tenemos que pushouts de monomorfismos regulares son monomorfismos regulares, así $\mathcal{U}$ es birregular. $\square$

3.2. Colímites filtrados

3.3 Definición. Se dice que una categoría I está filtrada si

(a) $I \neq \emptyset$.

(b) Para cualquier par de objetos $i, j \in Ob(I)$ existe otro objeto k y morfismos $u : i \to k$ y $v : j \to k$ en I.

(c) Para cualquier par de morfismos $u, v : i \to j$ en I existe otro morfismo $w : j \to k$ en I tal que $wu = wv$.

3.4 Lema. Sea I una categoría filtrada y $D : I \to \mathscr{U}$ un diagrama de inmersiones cerradas entre espacios $\{X_i\}_{i \in I}$, con colímite X. Entonces el conjunto subyacente de X es el colímite de los conjuntos subyacentes de cada X_i, y los morfismos $X \to X_i$ son inmersiones cerradas.

Demostración. Primero veamos que si $u, v : i \to j$ son morfismos en I, entonces $D(u), D(v) : X_i \to X_j$, que llamaremos f_u y f_v, son iguales. Por el inciso (c) de la definición anterior existe $w : j \to k$ en I tal que $wu = wv$, de esto se sigue que $D(w)D(u) = D(wu) = D(wv) = D(w)D(v)$, por lo tanto $f_w f_u = f_w f_v$. Sea $x \in X_i$, se sigue que $f_w(f_u(x)) = f_w(f_v(x))$, luego por ser f_w una inmersión cerrada, f_w es inyectiva, entonces $f_u(x) = f_v(x)$, por lo tanto $f_u = f_v$. Ahora supongamos que i, j, k son objetos en I y que existen morfismos $u : i \to k$ y $v : j \to k$. Definamos el conjunto

$$R_{ij}^k = \{(x, y) \in X_i \times X_j | f_u(x) = f_v(y)\} = (f_u, f_v)^{-1}(\Delta_{X_k}) \qquad (3.1)$$

que es cerrado en $X_i \times X_j$. Notemos que este conjunto es independiente de la elección de u y v, pues si $u' : i \to k$ y $v' : j \to k$ son otros morfismo, se cumple que $f_u = f_{u'}$ y $f_v = f_{v'}$. En el caso en el que $i = j = k$ podemos tomar $u = v = 1_i$, así $R^i_{ii} = \Delta_{X_i}$. Supongamos que existe $w : k \to k'$ y veamos que

$$\begin{aligned} &\{(x, y) \in X_i \times X_j | f_w(f_u(x)) = f_w(f_v(y))\} \\ &= \{(x, y) \in X_i \times X_j | f_u(x) = f_v(y)\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

por ser f_w inyectiva, pero esto es lo mismo que $R^{k'}_{ij} = R^k_{ij}$. Incluso si no existiera un morfismo $k \to k'$, lo anterior es cierto. Como estamos considerando $R^{k'}_{ij}$, esto está definido respecto a las funciones de la forma $i \to k'$ y $j \to k'$ así que consideremos funciones $u' : i \to k'$ y $v' : j \to k'$, luego por el inciso (b) de la definición, existe un objeto k'' y morfismos $w : k \to k''$ y $w' : k' \to k''$. De todo lo anterior podemos ver que $R^k_{ij} = R^{k''}_{ij} = R^{k'}_{ij}$. Escribiremos R_{ij} para este conjunto. Ahora para los conjuntos R_{ij} y R_{jk}, veamos que si $(x, y) \in R_{ij}$ y $(y, z) \in R_{jk}$ entonces $(x, z) \in R_{ik}$. Consideremos los morfismos $u : i \to m$, $v : j \to m$, $v' : j \to m'$ y $u' : k \to m'$, entonces existen un objeto m'' y morfismos $w : m \to m''$ y $w' : m' \to m''$, todo esto ilustrado en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "u"] & m \arrow[d, "w"'] & j \arrow[l, "v"'] \arrow[d, "v'"] \\ & m'' & m' \arrow[l, "w'"] \\ & & k \arrow[u, "u'"'] \end{tikzcd}$$

Notemos que $f_{wu}(x) = f_{wv}(y)$ y $f_{w'v'}(y) = f_{w'u'}(z)$, pero $f_{wv} = f_{w'v'}$, entonces $f_{wu}(x) = f_{w'u'}(z)$, por lo tanto $(x, z) \in R_{ik}$.

Ahora vamos a construir el colímite X. Denotemos $T = \coprod_i X_i$, no es difícil ver que $T \times T = \coprod_{i,j} X_i \times X_j$. Sea $R = \coprod_{i,j} R_{ij}$, es claro que $(\tau_i, \tau_j)^{-1}(R) = R_{ij}$ cerrado en $X_i \times X_j$ para cada $i, j \in I$, entonces R es cerrado en $T \times T$, más aun es una relación de equivalencia cerrada en T, entonces $X = T/R$ es un espacio CGWH. Sea $q : T \to X$ el correspondiente morfismo cociente y definamos $\varphi_i : X_i \to X$ dado por $\varphi_i(x) = q\tau_i(x)$. Veamos que en efecto X junto con las funciones φ_i, es el colímite deseado. Primero veamos que si $u : i \to j$ es un morfismo en I, $\varphi_j f_u = \varphi_i$. Consideremos $R_{ij} = (f_u, 1_{X_j})^{-1}(\Delta_{X_j})$ y notemos que $(x, f_u(x)) \in R_{ij}$ para $x \in X_i$, por otro lado $\varphi_j(f_u(x)) = q(f_u(x), j)$ y $\varphi_i(x) = q(x, i)$ pero como $(x, f_u(x)) \in R_{ij}$, sus clases de equivalencia bajo q son la misma, o sea que $q(x, i) = q(f_u(x), j)$, por lo tanto $\varphi_i = \varphi_j f_u$ para cada $i, j \in I$. Ahora supongamos que existen un conjunto Y y morfismos $\phi_i : X_i \to Y$ tal que $\phi_i = \phi_j f_u$, debemos mostrar que existe un único morfismo $\epsilon : X \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "f_u"] \arrow[dr, "\varphi_i"] \arrow[ddr, "\phi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\varphi_j"'] \arrow[ddl, "\phi_j"] \\
& X \arrow[d, dashed, "\epsilon"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Sea $\overline{(x,i)} \in X$ y definamos $\epsilon\overline{(x,i)} = \phi_i(x)$ y veamos que es independiente del representante de clase. Sea $\overline{(y,j)} \in X$ tal que $\overline{(x,i)} = \overline{(y,j)}$, se sigue que $(x,y) \in R_{ij}$, entonces $f_u(x) = y$, por lo tanto $\phi_i(x) = \phi_j(y)$ y ϵ está bien definido. No es difícil ver que ϵ es único, por lo tanto X es el colímite y lo hemos construido en **Set** y como hemos visto antes, esté es también el colímite en $\mathscr{U}$. Nos falta demostrar que los morfismos φ_i son inmersiones cerradas en **Set**, i.e., cada φ_i es inyectivo y manda cerrados en cerrados. Sean $x, y \in X_i$ tal que $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$, esto quiere decir que $\overline{(x,i)} = \overline{(y,i)}$ que es lo mismo que decir que $(x,y) \in R_{ii} = \delta_{X_i}$, por lo tanto $x = y$ y φ_i es inyectiva. Por último, sea $F \subseteq X_i$ cerrado, veamos que $\varphi_i(F)$ es cerrado en X, para esto es suficiente ver que $\tau_j^{-1}(q^{-1}(\varphi_i(F))) = X_j \cap q^{-1}(\varphi_i(F))$ es cerrado en X_j para cada $j \in I$. Notemos que

$$X_j \cap q^{-1}(\varphi_i(F)) = \{x \in X_j | \exists y \in F : q(x,j) = q(y,i)\}. \tag{3.3}$$

Por otro lado tomemos objetos y morfismos $u : i \to k$ y $v : j \to k$ en I, entonces tenemos que $f_v^{-1}(f_u(F))$ son las $x \in X_j$ tal que existe $y \in F$ que cumple que $f_v(x) = f_u(y)$, de esto se sigue que $(y,x) \in R_{ij} \subseteq R$, entonces $q(x,j) = q(y,i)$, por lo tanto

$$f_v^{-1}(f_u(F)) = \{x \in X_j | \exists y \in F : q(x,j) = q(y,i)\} \tag{3.4}$$

que es cerrado en X_j por ser f_u y f_v inmersiones cerradas, por lo tanto φ_i es una inmersión cerrada. $\square$

3.5 Definición.

(a) Una clase dirigida hacía arriba es una clase parcialmente ordenada con la propiedad de que para cada pareja de elementos existe una cota superior.

(b) Cualquier funtor que va de una clase dirigida hacia arriba (considerada como categoría) hacía una categoría $\mathscr{C}$ es llamada un sistema directo en $\mathscr{C}$.

(c) Si I es una clase dirigida hacía arriba, $D : I \to \mathscr{C}$ es una sistema directo en $\mathscr{C}$ y $(L, \{l_i\}_{i \in I})$ es el colímite de D, entonces $(L, \{l_i\}_{i \in I})$ es aveces llamado el límite directo de D y denotado $L = \lim\limits_{\to i} D_i$.

(d) Diremos que $\mathscr{C}$ tiene límites directos si para cada conjunto I que sea dirigido hacía arriba, cada funtor $D : I \to \mathscr{C}$ tiene colímite.

3.6 Definición. Decimos que un diagrama filtrado $\{A_i\}$ de inmersiones cerradas está fuertemente filtrado si cada subconjunto compacto de $(A, \{\varphi_i\}_{i \in I}) = \lim\limits_{\to i} A_i$ está en algún $\varphi_i(A_i)$.

3.7 Lema. Sea $\{A_i\}$ un sistema dirigido y $(A, \varphi_i) = \lim\limits_{\to i} A_i$. Supongamos que existen conjuntos disjuntos B_j tal que cada A_i es la unión disjunta de una cantidad finita de estos conjuntos. Entonces la familia $\{A_i\}$ está fuertemente filtrada.

Demostración. Si I es una clase dirigida hacía arriba no es difícil ver que es una categoría filtrada. Demostremos que el diagrama está fuertemente filtrado. Sea $C \subseteq A$ un subconjunto compacto. Para cada j tal que $B_j \cap C \neq \emptyset$ escojamos $b_j \in B_j \cap C$. Sea D el conjunto de todas estas b_j y sean $E \subseteq D$ y cualquier i, entonces $E \cap A_i$ es finito y como A_i es CGWH, es una unión finita de cerrados, por lo tanto cerrado en A_i. Como ya hemos visto antes E es cerrado en A si y sólo si $\varphi_i^{-1}(E) = E \cap A_i$ es cerrado en A_i para cada $i \in I$, por lo tanto E es cerrado en A. Como lo anterior es valido para cada subconjunto de D, tenemos que D es un subconjunto discreto y cerrado en C que es compacto, esto implica que D es compacto en C y por lo tanto es finito. De lo anterior se sigue que C está contenido en alguna unión finita de B_j's. Ahora consideremos a los A_i's que intersectan esta unión, como $\{A_i\}$ es un diagrama dirigido hacía arriba podemos encontrar un A_i que contiene a todos estos B_j's y por lo tanto $C \subseteq A_i$. $\square$

3.8 Corolario. Una sucesión de inmersiones cerradas está fuertemente filtrada. El diagrama de subcomplejos finitos de un complejo CW está fuertemente filtrado.

Demostración. En el primer caso tomemos $B_i = A_i - A_{i-1}$; en el segundo caso tomemos a los B_j's como las células abiertas del complejo CW y apliquemos el resultado anterior. $\square$

3.9 Lema. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia dirigida de subconjuntos cerrados de B, y escribamos $A = \cup A_i \subseteq B$. Consideremos las condiciones

(a) A es cerrado en B, y es homeomorfo a $\varinjlim_i A_i$.

(b) Para cada conjunto compacto $C \subseteq B$, tenemos que $C \cap A = C \cap A_i$ para algún $i \in I$.

Entonces (b) implica (a), y si $\{A_i\}$ está fuertemente filtrada, (a) implica (b).

Demostración. "(b)⇒(a)":Primero veamos que A es cerrado en B. Sean K un espacio compacto y Hausdorff y $u : K \to B$ una función continua, como B es WH, $u(K)$ es cerrado y compacto en B, entonces $u(K)\cap A = u(K)\cap A_i$, para algún $i \in I$, que es cerrado en $u(K)$ pues A_i es cerrado en B. Ahora notemos que

$$\begin{aligned} u^{-1}(A) &= \{k \in K | u(k) \in u(K) \cap A\} \\ &= \{k \in K | u(k) \in u(K) \cap A_i\} \\ &= \{k \in K | k \in u^{-1}(u(K) \cap A_i)\} \\ &= u^{-1}(u(K) \cap A_i) \end{aligned} \tag{3.5}$$

que claramente es cerrado en K, por lo tanto A es cerrado en B. Ahora veamos que A es homeomorfo a $\varinjlim_i A_i$. Como $\{A_i\}$ es una familia dirigida, los morfismos entre los elementos de la familia son inclusiones, así notamos que los elementos de $\varinjlim_i A_i = (\sqcup A_i)/R$ son de la forma $\{(a, i) | a \in A_i\}$ mostrando que hay una biyección entre A y $\varinjlim_i A_i$ que manda a $\overline{(a, i)}$ en a. Sea $D \subseteq A$ tal que $D \cap A_i$ es cerrado en A y por lo tanto en B para cada $i \in I$, veamos que D es cerrado en A. Para esto es suficiente ver que es cerrado en B. Sea K un espacio compacto y Hausdorff y $u : K \to B$ una función continua. Como $u(K)$ es compacto en B, podemos elegir una $i \in I$ tal que $u(K)\cap A = u(K)\cap A_i$ que es cerrado en $u(K)$, luego $D\cap u(K) = D\cap u(K)\cap A_i$ que también es cerrado en $u(K)$ pues $D \cap A_i$ es cerrado en B. Ahora notemos que

$$\begin{aligned} u^{-1}(D) &= \{k \in K | u(k) \in D \cap u(K)\} \\ &= \{k \in K | k \in u^{-1}(D \cap u(K))\} \\ &= u^{-1}(D \cap u(K)) \end{aligned} \tag{3.6}$$

que claramente es cerrado en K, por lo tanto D es cerrado en B y por ende en A. De esto podemos ver que A tiene topología final respecto a las inclusiones $A_i \hookrightarrow A$, de aquí se ve que la biyección de la que se habló antes es un homeomorfismo.
"(a)⇒(b)":Ahora supongamos que $\{A_i\}$ está fuertemente filtrada. Sea $C \subseteq B$ compacto. Como A es cerrado en B, $C \cap A$ es compacto, además como $A = \varinjlim_i A_i$ es un colímite fuertemente filtrado, sabemos que $C \cap A \subseteq A_i$ para algún $i \in I$, por lo tanto $C \cap A = C \cap A_i$ para algún $i \in I$. $\square$

3.10 Lema. Si X es compacto, entonces el funtor $C(X, \ )$ preserva colímites fuertemente filtrados de inmersiones cerradas.

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ un diagrama fuertemente filtrado con colímite $(A, \{\varphi_i\})$.

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "f_m"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & A_j \arrow[dl, "\varphi_j"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

$A = (\bigsqcup A_i)/R$ con R la mínima relación de equivalencia que contiene todas las parejas $((a_0, i), (a_1, j)) \in \bigsqcup A_i \times \bigsqcup A_i$ tal que existe $f_m : A_i \to A_j$ tal que $f_m(a_0) = a_1$. De la proposición 2.40 y del hecho que $C(X, \ )$ tiene adjunto izquierdo se sigue que el diagrama $\{C(X, A_i)\}_{i\in I}$ es de inmersiones cerradas y que existe el colímite $(\varinjlim_i C(X, A_i), \phi_i)_{i\in I}$ en $\mathscr{U}$.

$$\begin{tikzcd} C(X, A_i) \arrow[rr, "f_{m*}"] \arrow[dr, "\phi_i"] & & C(X, A_j) \arrow[dl, "\phi_j"'] \\ & \varinjlim_i C(X, A_i) & \end{tikzcd}$$

$\varinjlim_i C(X, A_i) = (\bigsqcup C(X, A_i))/R'$ donde R' es la mínima relación de equivalencia que contiene a todas las parejas $((g_0, i), (g_1, j)) \in \bigsqcup C(X, A_i) \times \bigsqcup C(X, A_i)$ tal que existe $f_m : A_i \to A_j$ tal que $f_{m*}(g_0) = f_m g_0 = g_1$.
Sean $g \in C(X, A_i)$ y $f_m : A_i \to A_j$ y notemos que

$$\varphi_{j_*} f_{m*}(g) = \varphi_j f_m g = \varphi_i g = \varphi_{i*}(g) \tag{3.7}$$

entonces existe una única función continua $b : \lim\limits_{\to i} C(X, A_i) \to C(X, A)$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C(X,A_i) \arrow[rr, "f_{m*}"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, "\varphi_{i*}"'] & & C(X,A_j) \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, "\varphi_{j*}"] \\
& \lim\limits_{\to i} C(X,A_i) \arrow[d, "b"'] & \\
& C(X,A) &
\end{tikzcd}$$

Dado $\overline{(g,i)} \in \lim\limits_{\to i} C(X, A_i)$ definamos $b\overline{(g,i)} = \varphi_i g$ y veamos que es independiente del representante de clase. Sean $\overline{(g_0, i)} = \overline{(g_1, j)} \in \lim\limits_{\to i} C(X, A_i)$, entonces, sin perdida de generalidad, existe $f_m : A_i \to A_j$ tal que $f_{m*}(g_0) = g_1$, entonces

$$b\overline{(g_0,i)} = \varphi_i g_0 = \varphi_j f_m g_0 = \varphi_j g_1 = b\overline{(g_1,j)} \tag{3.8}$$

por lo tanto b está bien definida. Ahora veamos que es b es una biyección. Sean $\overline{(g_0,i)}, \overline{(g_1,j)} \in \lim\limits_{\to i} C(X, A_i)$ tales que $b\overline{(g_0,i)} = b\overline{(g_1,j)}$, esto quiere decir que $\varphi_i g_0 = \varphi_j g_1$. Sea $x \in X$, entonces $\varphi_i(g_0(x)) = \varphi_j(g_1(x))$, de esto se sigue que $\overline{(g_0(x), i)} = \overline{(g_1(x), j)}$ en A, esto significa que existe $f_m : A_i \to A_j$ tal que $f_m(g_0(x)) = g_1(x)$ y como x fue cualquier elemento de X, $f_m g_0 = g_1$, lo que significa que $\overline{(g_0,i)} = \overline{(g_1,j)}$, por lo tanto b es inyectiva. Ahora sea $h : X \to A$, como tiene imagen compacta en A, de la definición de diagrama fuertemente filtrado sabemos que existe alguna $i \in I$ tal que $h(X) \subseteq \varphi_i(A_i)$, veamos que existe $\overline{(g_h, i)} \in \lim\limits_{\to i} C(X, A_i)$ tal que $b\overline{(g_h,i)} = h$. Definamos $g_h : X \to A_i$ por $g_h(x) = a$ tal que $h(x) = \overline{(a,i)}$, claramente $\varphi_i g_h = h$. Veamos que g_h es continua. Sea $D \subseteq A_i$ cerrado, notemos que $g_h^{-1}(D) = h^{-1}(\varphi_i(D))$, entonces es suficiente mostrar que $\varphi_i(D)$ es cerrado en A pero esto pasa si y sólo si $\varphi_j^{-1}(\varphi_i(D))$ es cerrado en A_j para cada $j \in I$. Como todas las funciones de la forma $f_m : Ai \to A_j$ y $f_l : A_j \to A_i$ son inmersiones cerradas se cumple que $\varphi_j^{-1}(\varphi_i(D))$ es igual a D, a $A_j \cap D$ o al conjunto vacío, todos cerrados, entonces $g_h^{-1}(D)$ es cerrado en X, por lo tanto g_h es continua y $b\overline{(g,i)} = h$ concluyendo de esto que b es biyectiva. Ahora para mostrar que b es un homeomorfismo consideremos otro espacio compacto W y los homeomorfismos de la proposición 2.13. Definamos los morfismos del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\lim\limits_{\to i} C(W, C(X, A_i)) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "a"] & C(W, \lim\limits_{\to i} C(X, A_i)) \arrow[r, "b_*"] & C(W, C(X, A)) \\
\lim\limits_{\to i} C(W \times X, A_i) \arrow[rr, "c"'] & & C(W \times X, A) \arrow[u, "d"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
a\overline{(\alpha, i)} &= \overline{(adj_{W,X,A_i}(\alpha), i)} \\
\phi\overline{(\alpha, i)} &= \phi_i \alpha \\
d(\beta) &= adj^{-1}_{W,X,A}(\beta) \\
c\overline{(g, i)} &= \varphi_i g
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Dado que $W \times X$ es compacto, el morfismo c esta definido de manera analoga a b y por lo tanto también es una biyección. Los morfismos a y d son biyectivos por la manera en que están definidos. El morfismos ϕ es una biyección, esto se demuestra de manera análoga a como se demostró que b era una biyección. Veamos que el diagrama conmuta. Sea $\overline{(\alpha, i)} \in \lim\limits_{\to i} C(W, C(X, A_i))$, entonces

$$\begin{aligned}
b_* \phi\overline{(\alpha, i)} &= b\phi_i \alpha = \varphi_{i*}\alpha \\
dca\overline{(\alpha, i)} &= adj^{-1}_{W,X,A}(\varphi_i adj_{W,X,A_i}(\alpha))
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Ambos morfismos elementos de $C(W, C(X, A))$. Sean $w \in W$ y $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned}
b_* \phi\overline{(\alpha, i)}(w)(x) &= \varphi_i \alpha(w)(x) = \overline{(\alpha(w)(x), i)} \\
dca\overline{(\alpha, i)}(w)(x) &= adj^{-1}_{W,X,A}(\varphi_i adj_{W,X,A_i}(\alpha))(w)(x) \\
&= \varphi_i adj_{W,X,A_i}(\alpha)(w, x) \\
&= \varphi_i(\alpha(w)(x)) \\
&= \overline{(\alpha(w)(x), i)}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

mostrando que el diagrama conmuta. Como b es inyectiva se tiene que b_* es un monomorfismo y como el diagrama conmuta, b_* es un epimorfismo, por ende una biyección. Como todo espacio es un colímite de espacios compactos [9], concluimos que $C(W, \lim\limits_{\to i} C(X, A_i)) \simeq C(W, C(X, A))$ también para espacios W que no son compactos. Ahora del lema de Yoneda tenemos la inmersión de Yoneda

$$Y : [C(\lim_{\to i} C(X, A_i), \ \ ), C(C(X, A), \ \ )] \to C(C(X, A), \lim_{\to i} C(X, A_i)) \tag{3.12}$$

definido por $Y(\eta) = \eta_{\lim\limits_{\to i} C(X,A_i)}(1_{\lim\limits_{\to i} C(X,A_i)})$. Sea η una transformación natural en $[C(\lim\limits_{\to i} C(X, A_i), \ \ ), C(C(X, A), \ \ )]$ que definimos de la siguiente manera, $\eta_Z(\alpha)(h) = \alpha(b^{-1}(h))$ para $h \in C(X, A)$, $\alpha \in C(\lim\limits_{\to i} C(X, A_i), Z)$ y Z un espacio. Entonces

$$Y(\eta) = \eta_{\lim\limits_{\to i} C(X,A_i)}(1_{\lim\limits_{\to i} C(X,A_i)}) : C(X, A) \to \lim_{\to i} C(X, A_i) \tag{3.13}$$

está dada por $1_{\lim\limits_{\to i} C(X,A_i)}(b^{-1}(h)) = b^{-1}(h)$ para $h \in C(X, A)$. Claramente $Y(\eta) = b^{-1}$, por lo tanto b^{-1} es continua y por lo tanto $C(X, A)$ es homeomorfo a $\lim\limits_{\to i} C(X, A_i)$.

Por último veamos que todo subconjunto compacto de $C(X, A)$ está en $b\phi_i(C(X, A_i))$ para algúna $i \in I$. Sea $K \subseteq C(X, A)$ compacto. Consideremos el morfismo evaluación $ev : K \times X \to A$ dado por $ev(f, x) = f(x) \in A$. Es claro que $ev(K \times X)$ es un subespacio compacto de A, entonces está contenido en $\varphi_i(A_i)$ para algún $i \in I$, de aquí que $f(X) \subseteq \varphi_i(A_i)$ para cada $f \in K$. Para cada $x \in X$ existe $a_{f(x)} \in A_i$ tal que $f(x) = \overline{(a_{f(x)}, i)}$. Definamos $g : X \to A_i$ dada por $g(x) = a_{f(x)}$, es claro que $\varphi_i g(x) = \varphi_i(a_{f(x)}) = \overline{(a_{f(x)}, i)} = f(x)$, por lo tanto $f = b\phi_i(g) \in b\phi_i(C(X, A_i))$, esto significa que $K \subseteq b\phi_i(C(X, A_i))$. Así, el diagrama $\{C(X, A_i)\}$ está fuertemente filtrado. $\square$

3.11 Lema. Considere un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "f_0"'] & A_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "f_2"'] & \ldots \\
B_0 \arrow[r, "j_0"'] & B_1 \arrow[r, "j_1"'] & B_2 \arrow[r, "j_2"'] & \ldots
\end{tikzcd}$$

en el cual todas las flechas son inmersiones cerradas y todos los cuadrados son pullbacks de conjuntos (y por lo tanto de espacios por el lema 2.37).

Denotemos por A_∞ y B_∞ a los colímites obvios. Entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_k \arrow[r, "\varphi_k"] \arrow[d, "f_k"'] & A_\infty \arrow[d, "f_\infty"] \\
B_k \arrow[r, "\phi_k"'] & B_\infty
\end{tikzcd}$$

es un cuadrado pullback de inmersiones cerradas.

Demostración. Por el lema 3.4, A_∞ y B_∞ son los colímites de los conjuntos subyacentes de los espacios A_k y B_k respectivamente y los morfismos φ_k y ϕ_k son inmersiones cerradas, con $k \in \mathbb{N}$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A_k \arrow[rr, "i_k"] \arrow[dr, "\varphi_k"] \arrow[dd, "f_k"'] & & A_{k+1} \arrow[dl, "\varphi_{k+1}"'] \arrow[dd, "f_{k+1}"] \\
& A_\infty \arrow[dd, dashed, "f_\infty"' near start] & \\
B_k \arrow[rr, "j_k"] \arrow[dr, "\phi_k"] & & B_{k+1} \arrow[dl, "\phi_{k+1}"'] \\
& B_\infty &
\end{tikzcd}$$

como $\phi_k f_k = \phi_{k+1} f_{k+1} i_k$, entonces existe un único morfismo $f_\infty : A_\infty \to B_\infty$ tal que $\phi_k f_k = f_\infty \varphi_k$. Primero notemos que los elementos de A_∞ son de la forma $\{(a,k),(a,k+1),..\}$ con k el menor número natural tal que $a \in A_k$; lo análogo pasa con los elementos de B_∞. Sean X y los morfismos $g : X \to A_\infty$ y $h : X \to B_k$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\epsilon"] \arrow[drr, "g"] \arrow[ddr, "h"'] & & \\
& A_k \arrow[r, "\varphi_k"] \arrow[d, "f_k"] & A_\infty \arrow[d, "f_\infty"] \\
& B_k \arrow[r, "\phi_k"'] & B_\infty
\end{tikzcd}$$

conmuta. Demostraremos que existe $\epsilon : X \to A_k$ que hace conmutar el diagrama. Sea $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned} g(x) &= \{(a_x, l), (a_x, l+1), ..\} \\ f_\infty(g(x)) &= \{(a_x, r), (a_x, r+1), ..\} \\ \phi_k(h(x)) &= \{(h(x), s), (h(x), s+1), ..\} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Como $f_\infty(g(x)) = \phi_k(h(x))$, tenemos que $h(x) = a_x$, $s = r$ y $s \leq k$, de aquí que $a_x \in A_k$. Definamos ϵ tal que para $x \in X$, $\epsilon(x) = a_x$, que es la función que necesitábamos, por lo tanto el diagrama es un cuadrado pullback de conjuntos y por el lema 2.37 pullback de espacios. Resta ver que f_∞ es una inmersión cerrada, primero veamos que es inyectiva. Sean $\overline{a_0}, \overline{a_1} \in A_\infty$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_0, a_1 \in A_k$, y supongamos que $f_\infty(\overline{a_0}) = f_\infty(\overline{a_1})$, entonces $f_\infty \varphi_k(a_0) = f_\infty \varphi_k(a_1)$, de esto se sigue que $\phi_k f_k(a_0) = \phi_k f_k(a_1)$ pero esto implica que $a_0 = a_1$, por lo tanto f_∞ es inyectiva. Ahora veamos que manda subconjuntos cerrados de A_∞ en subconjuntos cerrados en B_∞. Sea $C \subseteq A_\infty$ cerrado, queremos demostrar que $f_\infty(C)$ es cerrado en B_∞, para ello es suficiente ver que $\phi_k^{-1}(f_\infty(C))$ es cerrado en B_k para cada $k \in \mathbb{N}$. Notemos que

$$\begin{aligned} f_k^{-1}(\phi_k^{-1}(f_\infty(C))) &= \{a \in A_k | f_k(a) \in \phi_k^{-1}(f_\infty(C))\} \\ &= \{a \in A_k | \phi_k f_k(a) \in f_\infty(C)\} \\ &= \{a \in A_k | f_\infty \varphi_k(a) \in f_\infty(C)\} \\ &= \{a \in A_k | \varphi_k(a) \in C\} \\ &= \varphi_k^{-1}(C) \subseteq A_k \end{aligned} \tag{3.15}$$

es cerrado en A_k, entonces $f_k(f_k^{-1}(\phi_k^{-1}(f_\infty(C)))) = \phi_k^{-1}(f_\infty(C))$ es cerrado en B_k para toda $k \in \mathbb{N}$, por lo tanto $f_\infty(C)$ es cerrado en B_∞ y así f_∞ es una inmersión cerrada. $\square$

3.12 Corolario. Sea $\{A_k, l\}$ un diagrama de inmersiones cerradas indicado por $\mathbb{N}^2$, tal que cada cuadrado

$$\begin{tikzcd} A_{k,l} \arrow[r] \arrow[d] & A_{k+1,l} \arrow[d] \\ A_{k.l+1} \arrow[r] & A_{k+1,l+1} \end{tikzcd}$$

es un pullback. Definamos $A_{\infty,l}$, $A_{k,\infty}$ y $A_{\infty,\infty}$ como los colímites obvios. Entonces el diagrama resultante indicado por $\mathbb{N}^2 \cup \{\infty\}$ nuevamente consiste de cuadrados pullback de inmersiones cerradas.

Apéndice A

Complejos CW

A.1 Definición. Si X y Y son espacios topológicos, $A \subseteq X$ y $f : A \to Y$ una función continua, el espacio de adjunción $Y \cup_f X$ es el espacio $Y \sqcup Y X/ \sim$ donde $\sim$ es la relación que pega a X con Y a través de f, i.e., es la relación de equivalencia generada por $x \sim y$ si y sólo si $x \in A$ y $f(x) = y$.

A.2 Proposición. Si X y Y son espacios topológicos, $A \subseteq X$ y $f : A \to Y$ una función continua, $m : A \to X$, $i : X \to Y \sqcup Y$ y $j : Y \to Y \sqcup X$ inclusiones y $p : Y \sqcup X \to Y \cup_f X$ la función cociente, entonces el siguiente diagrama es un cuadrado pushout:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, hook, "m"'] & & Y \arrow[dl, "j"] \arrow[dd, "pj"] \\
& Y \sqcup X \arrow[dr, "p"] & \\
X \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "pi"'] & & Y \cup_f X
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sean Z un espacio topológico y un par de funciones continuas $g : Y \to Z$ y $h : X \to Z$ tales que $gf = hm$. Necesitamos encontrar una función continua $\epsilon : Y \cup_f X \to Z$ que haga conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "m"'] & Y \arrow[d, "pj"] \arrow[ddr, "g"] & \\
X \arrow[r, "pi"'] \arrow[drr, "h"'] & Y \cup_f X \arrow[dr, dashed, "\epsilon"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

Definamos ϵ por $\epsilon(\overline{x}) = gf(x)$ si $x \in A$, $\epsilon(\overline{x}) = h(x)$ si $x \in X - A$ y $\epsilon(\overline{y}) = g(y)$ si $y \in Y$. Es claro que $g = \epsilon pj$ y $h = \epsilon pi$, resta probar que ϵ es continua. Sea $C \subseteq Z$ un subconjunto cerrado. Notemos que $(\epsilon pi)^{-1}(C) = h^{-1}(C)$ y $(\epsilon pj)^{-1}(C) = g^{-1}(C)$ son cerrados en X y Y respectivamente, por lo tanto $\epsilon^{-1}(C)$ es cerrado en $Y \cup_f X$. $\square$

A.3 Definición. Si $f : A \to Y$ es continua y $A \subseteq X$, se dice que $Y \cup_f X$ conserva la propiedad topológica $\mathcal{P}$ si, el que X y Y cumplan la propiedad $\mathcal{P}$, implica que $Y \cup_f X$ cumple la propiedad $\mathcal{P}$.

A.4 Proposición. Si $f : A \to Y$ es continua y $A \subseteq X$ un subconjunto cerrado, entonces $Y \cup_f X$ conserva las propiedades de ser T_1 y ser normal.

Demostración. Primero recordemos que un espacio topológico es T_1 si y sólo si cada uno de sus subconjuntos unitarios es un cerrado. Sean X y Y espacios T_1, $f : A \to Y$ una función continua y $A \subseteq X$ conexo. Sea $a \in Y \cup_f X$, veamos que $\{x\}$ es cerrado, para esto es suficiente mostrar que $(pi)^{-1}(\{a\})$ es cerrado en X y que $(pj)^{-1}(\{a\})$ es cerrado en Y. Notemos que $(pi)^{-1}(\{a\})$ es de la forma $\{x \in X | \overline{f(x)} = a\}$, $\{x\}$ o $\emptyset$, todos subconjuntos cerrados en X, por su parte $(pj)^{-1}(\{x\})$ siempre es un subconjunto unitario de Y. Por lo tanto $\{x\}$ es cerrado en $Y \cup_f X$ y $Y \cup_f X$ es T_1.

Ahora supongamos que X y Y son espacios normales. Sean F y G subconjuntos cerrados y disjuntos en $Y \cup_f X$, entonces $(pj)^{-1}(F)$ y $(pj)^{-1}(G)$ son cerrados y disjuntos en Y. Por el lema de Urysohn existe una función continua $\varphi_Y : Y \to I$ tal que:

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in (pj)^{-1}(F) \\ 1 & \text{si } y \in (pj)^{-1}(G) \end{cases}$$

Sean $B = (pi)^{-1}(F) \cup A \cup (pi)^{-1}(G)$ que es un subconjunto cerrado de X y $\psi : B \to I$ tal que:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (pi)^{-1}(F) \\ \varphi_Y \circ f(x) & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in (pi)^{-1}(G) \end{cases}$$

Notemos que ψ es continua pues si C es un subconjunto cerrado de I entonces

$$\psi^{-1}(C) = \begin{cases} (\varphi_y f)^{-1}(C) & \text{si } 0,1 \notin C \\ (pi)^{-1}(F) \cup (\varphi_y f)^{-1}(C) & \text{si } 0 \in C \quad \text{y} \quad 1 \notin C \\ (\varphi_y f)^{-1}(C) \cup (pi)^{-1}(G) & \text{si } 0 \notin C \quad \text{y} \quad 1 \in C \\ (pi)^{-1}(F) \cup (\varphi_y f)^{-1}(C) \cup (pi)^{-1}(G) & \text{si } 0,1 \in C \end{cases}$$

es cerrado en B. Ahora por ser B cerrado en X y X normal, el teorema de de extensión de Tietze nos dice que existe una extensión $\varphi_X : X \to I$ tal que $\varphi_X|_B = \psi$.

Consideremos la función continua $(\varphi_Y, \varphi_X) : Y \sqcup X \to I$. Notemos que si $x, y \in Y \sqcup X$ son tales que $p(x) = p(y)$ $(y = f(x))$ tenemos que

$$\begin{aligned} (\varphi_Y, \varphi_X)(x) &= \varphi_X(x) \\ &= \varphi_Y(f(x)) \\ &= \varphi_Y(y) \\ &= (\varphi_Y, \varphi_X)(y) \end{aligned} \tag{A.1}$$

entonces, como $Y \cup_f X$ tiene la topología final respecto a $X \sqcup Y$ y p, existe una única función continua que hace conmutar el siguiente diagrama [14]:

$$\begin{tikzcd} Y \sqcup X \arrow[rr, "(\varphi_Y,\varphi_X)"] \arrow[dr, "p"'] & & I \\ & Y \cup_f X \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces se cumple que $\varphi(F) = \varphi(p(p^{-1}(F))) = (\varphi_Y, \varphi_X)(p^{-1}(F)) = \{0\}$, de manera análoga $\varphi(G) = \{1\}$, así por el lema de Urysohn $Y \cup_f X$ es normal. $\square$

A.5 Definición. Sea $\{\sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ una familia de conjuntos ajenos tal que $\sigma_0 \neq \emptyset$. Consideremos, inductivamente, una familia de espacios topológicos $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ de la siguiente manera:

a. $P_0 = \sigma_0$ con la topología discreta.

b. Supongamos construido P_{n-1}. Si $\sigma_n = \emptyset$ entonces $P_n = P_{n-1}$. Si $\sigma \neq \emptyset$ entonces para cada $x \in \sigma_n$ consideremos $S_x^{n-1} \cong S^{n-1}$, $D_x^n \cong D^n$ y supongamos definida una función continua $\varphi_x : S_x^{n-1} \to P_{n-1}$. Definamos $X_n := \coprod_{x \in \sigma_n} D_x^n$; $A_n := \coprod_{x\in\sigma_n} S_x^{n-1}$; $f_n : A_n \to P_{n-1}$ tal que $f_n|_{S_x^{n-1}} = \varphi_x$ y $P_n := P_{n-1} \cup_{f_n} X_n$.

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_n"'] & X_n \arrow[d, "pi_{X_n}"'] \\ P_{n-1} \arrow[r, "pi_{P_{n-1}}"'] & P_n \end{tikzcd}$$

Se dice que P_n se obtiene pegando n-células a P_{n-1} a través de la familia de funciones $\{\varphi_x | x \in \sigma_n\}$. Definimos $P := (\cup_{n=0}^{\infty} P_n, \tau)$ donde τ es la topología final respecto a la familia de inclusiones $\{j_n : P_n \hookrightarrow P\}_{n=0}^{\infty}$. P se llama complejo CW definido por $\{\sigma_n\}$ y $\{\varphi_\xi\}_{\xi\in\sigma_n,\ n=0,1,...}$, estás últimas llamadas funciones características del complejo CW. Para cada $n \in \mathbb{N}$, P_n se llama el n-esqueleto de P. Si existe n tal que $\sigma_m = \emptyset$ para toda $m > n$, diremos que P tiene dimensión n. Si para toda n existe $m > n$ tal que $\sigma_m \neq \emptyset$ entonces diremos que la dimensión de P es ∞.

A.6 Ejemplos.
1.Si $\sigma_0 = \{x\}$, $\sigma_n = \{y\}$ y $\sigma_m = \emptyset$ para $m \neq 0$ y $m \neq n$. Entonces se tiene que $P = P_n \cong S^n$. En este caso $P_{n-1} = \{x\}$, $A_n = S_y^{n-1}$, $X_n = D_y^n$ y f_n es la función constante que manda todo elemento en x. Recordemos que existen funciones $h_1 : D_y^n - S_y^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ y $h_2 : S^n - \{(1,0,...)\} \to \mathbb{R}^n$ que son homeomorfismos. Definamos $h : D_y^n \to S^n$ dada por $h(z) = h_2^{-1} h_1(z)$ si $z \notin S_y^{n-1}$ y $h(z) = (1,0,...)$ si $z \in S_y^{n-1}$, que también es un homeomorfismo, y $r : \{x\} \to S^n$ dada por $r(x) = (1,0,...)$. Mostraremos que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} S_y^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_n"'] & D_y^n \arrow[d, "h"] \\ \{x\} \arrow[r, "r"'] & S^n \end{tikzcd}$$

es pushout. Sean Y un espacio topológico y funciones continuas $h' : D^n_y \to Y$ y $r' : \{x\} \to Y$ tales que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1}_y \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_n"'] & D^n_y \arrow[d, "h"] \arrow[ddr, "h'"] & \\
\{x\} \arrow[r, "r"'] \arrow[drr, "r'"'] & S^n \arrow[dr, dashed, "\epsilon"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

Mostraremos que existe una función continua $\epsilon : S^n \to Y$ que hace conmutar el diagrama anterior. Definamos ϵ dado por $\epsilon(b) = h'h^{-1}(b)$ si $b \neq (1, 0, ...)$ y $\epsilon(b) = r'(x)$ si $b = (1, 0, ...)$. Es claro que $\epsilon h = h'$ y $\epsilon r = r'$. Por último veamos que ϵ es continua. Sea $C \subseteq Z$ cerrado, entonces $h'^{-1}(C) = h^{-1}\epsilon^{-1}(C)$ es cerrado en D^n_y, de esto se sigue que $\epsilon^{-1}(C)$ es cerrado en S^n, por lo tanto ϵ es continua. Así hemos mostrado que $P_n \cong S^n$.

2.Si $\sigma_0 = \{x\}$, $\sigma_n = \{y\}$, $\sigma_{n+1} = \{z\}$, $\sigma_m = \emptyset$ con $m \notin \{0, n, n+1\}$ y $\varphi_z : S^n_z \to P_n$ un homeomorfismo. Entonces $P = P_{n+1} \cong D^{n+1}$. En este caso $X_{n+1} = D^{n+1}_z$, $A_{n+1} = S^n_z$ y $f_n + 1 = \varphi_z$ y sabemos que $P_n \cong S^n$, entonces tenemos el cuadrado pushout

$$\begin{tikzcd}
S^n_z \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & D^{n+1}_z \arrow[d] \\
S^n \arrow[r] & P_{n+1}
\end{tikzcd}$$

Recordemos que $P_{n+1} = S^n \cup_{f_{n+1}} D^{n+1}_z$, y en este caso cada elemento de S^n_z está identificado con uno y sólo un elemento de S^n, entonces $P_{n+1} \cong D^{n+1}$.

3. Sea $\sigma = \{n\}$, entonces $P_0 = \{0\}$ y $P_1 = S^1$. Definamos $\varphi_2 : S^1_2 \to S^1$ tal que para cada $z \in S^1_2$ (pensado como número complejo) $\varphi_2(z) = z^2$, en este caso tenemos que $X_2 = D^2_2$, $A_2 = S^1_2$, $f_2 = \varphi_2$. Notemos que en $S^1 \cup_{f_2} D^2_2$, los elementos de la frontera de D^2_2 se identifican con el elemento de la frontera

diametralmente opuesto, siendo esto claramente la construcción de $\mathbb{R}P^2$, el espacio proyectivo real de dimensión 2, por lo tanto $P_2 = \mathbb{R}P^2$. Recordemos que hay dos formas de construir el espacio proyectivo real de dimensión n:

(a) Empezamos con la esfera unitaria S^n en $\mathbb{R}^{n+1}$ e identificamos cada elemento con el diametralmente opuesto.

(b) Empezamos con el disco unitario D^n en $\mathbb{R}^n$ e identificamos cada elemento de su frontera con el elemento de la frontera que es diametralmente opuesto.

Ahora veamos que si $\varphi_n : S_n^{n-1} \to P_{n-1} = \mathbb{R}P^{n-1} = S^{n-1}/\sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia que pega puntos diametralmente opuestos y φ_n la función cociente correspondiente entonces $P_n = \mathbb{R}P^n$. En este caso $X_n = D_n^n$, $A_n = S_n^{n-1}$ y $f_n = \varphi_n$.

$$\begin{tikzcd}
S_n^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_n"'] & D_n^n \arrow[d] \\
S^{n-1}/\sim \arrow[r] & S^{n-1}/\sim \cup_{f_n} D_n^n
\end{tikzcd}$$

Notemos que en $S^{n-1}/\sim \cup_{f_n} D_n^n$ se identifica cada elemento de la frontera de D_n^n con el elemento de la frontera diametralmente opuesto, por lo tanto $P_n = \mathbb{R}P^n$.

A.7 Proposición. Si P es un complejo CW entonces, P_m es cerrado en P para toda $m \in \{0, 1, ...\}$.

Demostración. Primero, P_n es cerrado en P_{n+1} si $(pi_{P_n})^{-1}(P_n) = P_n$ es cerrado en P_{n+1} y $(pi_{X_{n+1}})^{-1}(P_n) = A_n$ es cerrado en X_n, por lo tanto P_n es cerrado en P_{n+1}. Ahora si $m > n$, veamos que P_n es cerrado en P_m, para esto necesitamos probar que $(pi_{P_{m-1}})^{-1}(P_n) = P_n$ es cerrado en P_{m-1} y que $(pi_{X_m})^{-1}(P_n) \subseteq A_m$ es cerrado en X_m, esto último siendo cierto. Como se puede notar deberemos probar que P_n es cerrado en cada esqueleto de dimensión mayor a n y menor o igual a m, este proceso es finito y termina cuando probamos que P_n es cerrado en P_{n+1}, pero esto ya lo hemos probado, por lo tanto P_n es cerrado en P_m. Por último consideremos la familia de inclusiones $\{j_n : P_n \hookrightarrow P\}_{n=0}^{\infty}$ y notemos que

$$j_n^{-1}(P_m) = \begin{cases} P_m & \text{si } n > m \\ P_n & \text{si } n \leq m \end{cases}$$

por lo tanto $j_n^{-1}(P_m)$ es cerrado en P_n para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto P_m es cerrado en P. □

Notemos que $pi_{P_{n-1}} : P_{n-1} \to P_n$ es una inmersión y como $pi_{P_{n-1}}(P_{n-1})$ es cerrado en P_n, $pi_{P_{n-1}}$ es una inmersión cerrada, entonces podemos pensar a P_{n-1} como subespacio de P_n. Esto será de utilidad para demostrar que todo complejo CW es un espacio CG.

A.8 Proposición. Si P es un complejo CW entonces P es normal y Hausdorff.

Demostración. Primero veamos que P es T_1. Es claro que P_0 es T_1, demostraremos inductivamente que todo P_m es T_1. Supongamos que P_n es T_1 y notemos que X_{n+1} también lo es, luego entonces por la proposición A.4 sabemos que $P_n \cup_{f_{n+1}} X_{n+1} = P_{n+1}$ es T_1. Sea $x \in P$ entonces $j_n^{-1}(x)$ es un subconjunto unitario o es vacío en P_n, esto implica que $\{x\}$ es cerrado, por lo tanto P es T_1.

Ahora veamos que P es normal. De manera análoga al párrafo anterior se prueba inductivamente que P_n es normal para toda $n \in \mathbb{N}$. Por el lema de Urysonh, dado que P_n es normal, existe una función continua $f_n : P_{n-1} \to I$ tal que

$$f_{n-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in F \cap P_{n-1} \\ 1 & \text{si } y \in G \cap P_{n-1} \end{cases}$$

Sea $B := (F \cap P_n) \cup P_{n-1} \cup (G \cap P_n)$ y sea $g_n : B \to I$ dada por

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in F \cap P_n \\ f_{n-1}(x) & \text{si } x \in P_{n-1} \\ 1 & \text{si } x \in G \cap P_n \end{cases}$$

que está bien definida. Veamos que g_n es continua. Sea $C \subseteq I$ un subconjunto cerrado, entonces

$$g_n^{-1}(C) = \begin{cases} f_{n-1}^{-1}(C) & \text{si } 0,1 \notin C \\ (F \cap P_n) \cup f_{n-1}^{-1}(C) & \text{si } 0 \in C \quad \text{y} \quad 1 \notin C \\ f_{n-1}^{-1}(C) \cup (G \cap P_n) & \text{si } 0 \notin C \quad \text{y} \quad 1 \in C \\ (F \cap P_n) \cup f_{n-1}^{-1}(C) \cup (G \cap P_n) & \text{si } 0,1 \in C \end{cases}$$

es cerrado en B, por lo tanto g_n es continua. Luego por ser P_n normal y B cerrado en P_n, por el teorema de extensión de Tietze, existe $f_n : P_n \to I$ continua tal que $f_n|_B = g_n$. Definamos $f : P \to I$ tal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} P_n \arrow[rr, "f_n"] \arrow[dr, "j_n"'] & & I \\ & P \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Sea $C \subseteq I$ un subconjunto cerrado, como $(fj_n)^{-1}(C) = f_n^{-1}(C)$ es cerrado en P_n se tiene que $f^{-1}(C)$ es cerrado en P y por lo tanto f es continua, todo esto basado en el hecho de que P tiene la topología final respecto a la familia de inclusiones $\{j_n : P_n \hookrightarrow P\}_{n=0}^{\infty}$. Es claro que $f(F) = 0$ y $f(G) = 1$, por lo tanto P es normal. Por último sean $x, y \in P$, por ser P un espacio T_1, $\{x\}$ y $\{y\}$ son subconjuntos cerrados de P, luego por ser P un espacio normal existen abiertos disjuntos que contienen a $\{x\}$ y $\{y\}$ respectivamente, por lo tanto P es Hausdorff. $\square$

A.9 Definición. Sea P un complejo CW y $x_0 \in \sigma_n$, consideremos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} IntD^n_{x_0} \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u"] & D^n_{x_0} \arrow[r, "\varphi^*_{x_0}"] \arrow[d, "v"] & P_n \arrow[r, "j_n"] & P \\ \coprod_{x\in\sigma_n}(IntD^n_x) \arrow[r, "m_n"'] & \coprod_{x\in\sigma_n} D^n_x \arrow[r, "i_{X_n}"'] & \coprod_{x\in\sigma_n} D^n_x \sqcup P_{n-1} \arrow[u, "p"] & \end{tikzcd}$$

donde v, m_n, w y u son las inclusiones correspondientes. Entonces:

1. $e_{x_0} := j_n \circ \varphi^*_{x_0} \circ w(IntD^n_{x_0})$ se llama la n-célula abierta de P correspondiente a x_0.

2. $s_{x_0} := j_n \circ \varphi^*_{x_0}(D^n_{x_0})$ se llama la n-célula cerrada de P correspondiente a x_0.

A.10 Observación. Si $x_0 \in \sigma_0$, entonces $e_{\xi_0} = s_{x_0} = \{x_0\}$.

A.11 Proposición. Si P es un complejo CW y $x \in \sigma_n$ entonces:

(a) e_x es abierto en P_n aunque no necesariamente en P.

(b) $s_x = \overline{e_x}$ en P.

Demostración.
(a)$e_x = pi_{X_n} m_n u(IntD^n_x)$ y es claro que u y $pi_{X_n} m_n$ son inmersiones cerradas, por lo tanto e_x es abierto en P_n.
(b)Sea $x \in \sigma_n$. Si $n = 0$, $e_x = \{x\}$ que es cerrado en P por ser Hausdorff, luego $\{x\} = e_x \subseteq \overline{e_x} \subseteq s_x = \{x\}$. Si $n > 0$, como D^n_x es compacto y P es Hausdorff, $s_x = j_n \circ \varphi^*_x(D^n_x)$ es cerrado, por lo tanto $\overline{e_x} \subseteq s_x$. Por otro lado

$$\begin{aligned} s_x &= j_n \circ \varphi^*_x(D^n_x) \\ &= j_n \circ \varphi^*_x(\overline{w(IntD^n_x)}) \subseteq \overline{j_n \circ \varphi^*_x(w(IntD^n_x))} \\ &= \overline{e_x} \end{aligned} \tag{A.2}$$

□

A.12 Proposición. Todo complejo CW es la unión ajena de sus células abiertas.

Demostración. Sea P un complejo CW, $P = \cup_{n=0}^{\infty} P_n$ y $P_{n-1} \subseteq P_n$, entonces $P = P_0 \cup (\cup_{n=1}^{\infty} P_n - P_{n-1})$, una unión disjunta. Notemos que

$$P_n = p(P_{n-1} \sqcup \coprod D^n_\xi) = P_{n-1} \cup p(\coprod IntD^n_\xi) \tag{A.3}$$

es una unión disjunta, se sigue que

$$P_n = P_{n-1} \cup (\bigcup_{\xi \in \sigma_n} e_\xi) \tag{A.4}$$

por lo tanto

$$P = P_0 \cup (\cup_{\xi \in \sigma_n} e_\xi)_{n=1}^{\infty} \tag{A.5}$$

□

A.13 Observación. Si P es un complejo CW y $x \in \sigma_n$ entonces, para toda $m \geq n$, existe $r_x^m : s_x \to P_m$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
s_x \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "r_x^m"'] & & P \\
& P_m \arrow[ur, "j_m"'] &
\end{tikzcd}$$

A.14 Observación. Si P es un complejo CW entonces, para toda $m = 0, 1, .., P_m$ tiene la topología final respecto a la familia $\{r_x^m : s_x \to P_m\}_{x \in \sigma_n, n \leq m}$.[6]

A.15 Corolario. Si P es un complejo CW entonces tiene la topología final respecto a la familia $\{j_m r_x^m : s_x \to P\}_{n=0}^{\infty}$.

A.16 Definición. Si P es un complejo CW y $Q \subseteq P$, se dice que Q es un subcomplejo de P si cumple que:

1. $Q \neq \emptyset$.

2. Si para alguna célula abierta e_x de P, $Q \cap e_x \neq \emptyset$, entonces $s_x \subset Q$.

A.17 Proposición. Si Q es un subcomplejo de P y $\{e_{x_i}\}_{i \in I}$ es la familia de células abiertas que intersectan a Q, entonces $Q = \cup_{i \in I} e_{x_i} = \cup_{i \in I} s_{x_i}$.

Demostración. $\cup_{i \in I} s_{x_i} \subseteq Q \subseteq \cup_{i \in I} e_{x_i} \subseteq \cup_{i \in I} s_{x_i}$. □

A.18 Ejemplos.
1. P es subcomplejo de si mismo.

2. Para $n \in \{0, 1, ...\}$, P_n es subcomplejo de P.

A.19 Proposición. Si P es un complejo CW y $\{Q_i\}_{i \in I}$ es una familia de subcomplejos de P, entonces:

(a) $\cup_{i \in I} Q_i$ es subcomplejo de P.

(b) Si $\cap_{i \in I} Q_i \neq \emptyset$ entonces $\cap_{i \in I} Q_i$ es subcomplejo de P.

Demostración.
(a)Si $(\cup_{i \in I} Q_i) \cap e_x \neq \emptyset$ entonces existe $i \in I$ tal que $Q_i \cap e_x \neq \emptyset$, se sigue que $s_x \subseteq Q_i \subseteq \cup_{i \in I} Q_i$.
(b)Si $\cap_{i \in I} Q_i \neq \emptyset$ y $(\cap_{i \in I} Q_i) \cap e_x \neq \emptyset$ entonces, para toda $i \in I$, $e_x \cap Q_i \neq \emptyset$, por lo tanto $s_x \subseteq Q_i$ para toda $i \in I$, entonces $s_x \subseteq \cap_{i \in I} Q_i$ □

A.20 Definición. Si P es un complejo CW y $X \subseteq P$, denotaremos por $C(X)$ a la intersección de todos los subcomplejos de P que contienen a X.

A.21 Proposición. Si P es un complejo CW y $X \subseteq P$ es compacto entonces X intersecta sólo a un número finito de células abiertas de P.

Demostración. Primero veamos el caso cuando $X \subseteq P_n$. Sea $\{e_{x_i}\}_{i\in I}$ el conjunto de n-células abiertas que intersectan a X, y para toda $i \in I$, sea $y_i \in e_{x_i} \cap X$. Sean $A = \{y_i\}_{i\in I}$ y $B \subseteq A$, entonces si $x \in \sigma_m$ con $m \leq n$, $(r_x^n)^{-1}(B) = B \cap s_x$ es vacío o unitario, por lo tanto es cerrado por ser P un espacio T_1. Por la observación A.14 B es cerrado en P_n pero por ser P_n cerrado en P, B también es cerrado en P y como B fue cualquier subconjunto de A, se sigue que A es cerrado en P, además es discreto y como X es compacto, A debe ser finito. Por lo tanto X sólo intersecta un número finito de n-células abiertas con $n = \mathbb{N}$.
Ahora para el caso general sea $\{e_{x_i}\}_{i\in I}$ la familia de células abiertas que intersectan a X, y para toda $i \in I$, sea $y_i \in e_{x_i} \cap X$. Sean $A = \{y_i\}_{i\in I}$, $B \subseteq A$ y s_x una n-célula cerrada de P, entonces $B \cap s_x = (B \cap e_x) \cup (B \cap \varphi_x(S_x^{n-1}))$. Pero $B \cap e_x$ es vacío o unitario, y como $\varphi_x(S_x^{n-1})$ es compacto y $\varphi_x(S_x^{n-1}) \subseteq P_{n-1}$, por la primer parte de la demostración $\varphi_x(S_x^{n-1})$ intersecta a un número finito de células abiertas de P. Como B tiene a lo más un punto en cada célula abierta de P se sigue que $B \cap \varphi_x(S_x^{n-1})$ es finito, por lo tanto $B \cap s_x$ es finito. □

Ahora veremos que los complejos CW son compactamente generados.

A.22 Proposición. D^n es un espacio CG.

Demostración. Sea τ la topología sobre D^n inducida por la topología usual (formada por los subconjuntos cerrados) en $\mathbb{R}^n$. Sabemos que $\tau \subseteq k(\tau)$, veamos que $k(\tau) \subseteq \tau$. Sea $A \in k(\tau)$ y consideremos $1 : D^n \to D^n$, como D^n es compacto y T_2, $1^{-1}(A) = A$ es cerrado en D^n, por lo tanto $A \in \tau$ y así $k(\tau) = \tau$, o lo que es lo mismo, D^n es un espacio CG. □

A.23 Corolario. $X_n = \coprod_{x\in\sigma_n} D_x^n$ es un espacio CG.

Demostración. La prueba sale directamente de la proposición 2.2. □

A.24 Proposición. Todo complejo CW es un espacio CG.

Demostración. Sea P un complejo CW. Primero veamos que todo esqueleto de dimensión n es un espacio CG. Sea τ la topología en P_0, sabemos que $\tau \subseteq k(\tau)$, pero por ser τ la topología discreta $k(\tau) \subseteq \tau$, por lo tanto P_0 es CG. Ahora demostraremos que si P_{n-1} es CG, entonces P_n es CG. Por la proposición 2.2, $P_{n-1} \sqcup X_n$ es CG y por la proposición 2.1, $P_{n-1} \cup_{f_n} X_n = P_n$ es CG. Ahora veamos que P es un espacio CG. Haremos uso del lema 3.9. Notemos que la familia $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ junto con los morfismos pj_{P_n} es una familia dirigida de subconjuntos cerrados de P. Por otro lado, sea $C \subseteq P$ compacto, entonces C intersecta a un número finito de células abiertas de P, de aquí que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $C \subseteq P_n$, de aquí se sigue que $B \cap C = P_n \cap C$. Entonces por el lema 3.9 P es homeomorfo a $\lim\limits_{\to n} P_n$. Como cada P_n es CG, por el corolario 2.24 el colímite $\lim\limits_{\to n} P_n$ es un espacio CGWH, por lo tanto P es un espacio CGWH. $\square$

Bibliografía

[1] Booth P. I., Tillotson J., *Monoidal closed, Cartesian closed and convenient categories of topological spaces*, Pacific Journal of Mathematics, 88, (1980), 33-53

[2] Brown R., *Function spaces and product topologies*, The Quarterly Journal of Mathematics, 15, (1964), 238–250

[3] Brown R., *Some problems of algebraic topology: a study of function spaces, function complexes, and FD-complexes*, Ph.D. thesis, Oxford University, (1961)

[4] Brown R., *Ten topologies for $X\times Y$*, The Quarterly Journal of Mathematics, 14, (1963), 303–319

[5] Brown R., *Topology and Groupoids*, ISBN 1-4196-2722-8, (2006)

[6] Clark T. L., *On the topological characterization of gestures in a convenient category of spaces*, Journal of Mathematics and Music, 15, (2020), 37-61

[7] Cohen D. E., *Spaces with weak topology*, The Quarterly Journal of Mathematics, 5, (1954), 77–80

[8] Dummit D. S., Foote R. M., *Abstract algebra*, John Wiley & Sons, Inc, (2004)

[9] Escardó M., Lawson J., Simpson A., *Comparing Cartesian closed categories of (core) compactly generated spaces*, Topology and its

Applications, 143, (2004), 105-145

[10] Hatcher A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, (2002)

[11] Herrlich H., Strecker G. E., Adámek J., *Abstract and concrete categories:The joy of cats*, Dover Publications, (2009)

[12] McCord, M. C., *Classifying spaces and infinite symmetric products*, Transactions of the American Mathematical Society, 146, (1969), 273–298

[13] Mitchell B., *Theory of categories*, Academic Press Inc, (1965)

[14] Salicrup G., *Introduccón a la topología*, Sociedad matemática mexicana, (1997)

[15] Steenrod N., *A convenient category of topological spaces*, Michigan Mathematical Journal, 14, (1967), 133-152

[16] Strickland N. P., *The category of CGWH spaces*, preimpresión
https://neil-strickland.staff.shef.ac.uk/courses/homotopy/cgwh.pdf, (2009)

[17] Van Oosten J., *Basic category theory and topos theory*, Spring, (2016)