



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Cosmología FLRW Inflacionaria en un Modelo con un
Campo Escalar con Acoplamiento no Mínimo

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito para la obtención del grado de

Licenciado en Física Aplicada

Por

Alejandro Flores Chávez

Asesorado por

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero

Puebla, Pue.

Diciembre, 2021

Título: Cosmología FLRW Inflacionaria en un Modelo con un Campo Escalar con Acoplamiento no Mínimo.

Estudiante: Alejandro Flores Chávez.

Jurado

Dr. Gerardo F. Torres del Castillo
Presidente

Dra. Ana A. Ávilez López
Secretario

Dr. Víctor Manuel Vázquez Báez
Vocal

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Asesor

Dra. Mercedes P. Velázquez Quesada
Suplente

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado para la realización de este trabajo de tesis. A los profesores de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la BUAP por su dedicación, enseñanza y apoyo, en especial al Dr. Gerardo Torres del Castillo, a la Dra. C. Cecilia Uribe Estrada, al Dr. Juan Castillo Mixcóatl, y a mi asesor de tesis el Dr. Cupatitzio Ramírez Romero. Finalmente a mis padres por su apoyo incondicional en esta crucial etapa, por depositar en mi su total confianza y cariño.

Resumen

En este trabajo de tesis se realiza un análisis de un modelo cosmológico inflacionario propuesto mediante una acción con un campo escalar acoplado a la métrica FLRW. Tal acción es obtenida a partir de dos modelos: inflación básica con un campo escalar, y una teoría $f(R)$. Esto con el propósito de explorar en qué regiones de los parámetros hay soluciones que satisfacen condiciones básicas para inflación, con un número de e-folds arriba de 40.

Índice general

Resumen	i
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes Históricos	1
1.1.1 Primeros Modelos del Universo	1
1.1.2 Universo Infinito y Estacionario	3
1.1.3 Universo en Expansión	3
1.2. Big Bang	4
1.3. Inflación	4
1.4. Reseña	5
2. Fundamentos teóricos	7
2.1. Conceptos de Cosmología Moderna	7
2.1.1 Convenciones y unidades de medición	7
2.1.2 Universo	10
2.1.3 El Principio Cosmológico	11
2.1.4 CMB	12
2.1.5 Expansión y Redshift	13
2.1.6 Ecuación de Friedmann y el factor de escala	14
2.1.7 Geometría del universo	16
2.1.8 Hot Big Bang	19
2.1.9 Métrica FLRW	23
2.1.10 Teoría Inflacionaria	27
2.1.11 Medición de la cantidad de Inflación e Inflación ne- cesaria	34
2.1.12 Campo Escalar	38
2.2. Métodos Numéricos	42
2.2.1 Método de Euler	43

2.2.2 Método de Euler Mejorado	43
2.2.3 Método de Adams-Bashforth	45
2.2.4 Método de Adams-Moulton	47
3. Desarrollo	48
3.1. Motivación	48
3.2. Análisis	49
3.2.1 Soluciones para geometrías no euclidianas	56
3.2.2 Soluciones para una geometría euclidiana	59
4. Conclusión	68
Apéndice A.	70
A 1. Cálculo de Variaciones	70
Apéndice B.	75
B 1. La ecuación de Euler-Lagrange y la segunda ley de Newton	75
B 2. El Principio de D´Alembert y las ecuaciones de Euler- Lagrange	77
Apéndice C.	86
C 1. Leyes de Conservación	86
Bibliografía	92

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes Históricos

El origen del universo ha sido materia de estudio desde tiempos remotos. Por medio de la observación y de la abstracción se han creado los llamados *modelos cosmológicos*, evolucionando a medida que se construía el método científico y avanzaba la tecnología hasta llegar a los modelos sofisticados y precisos de hoy en día.

1.1.1 Primeros Modelos del Universo

Hacia el año 350 a.C. Aristóteles [1] propuso un primer modelo cosmológico donde situaba a la Tierra en el centro del universo y al Sol con los demás astros, moviéndose alrededor de esta en órbitas circulares que se creía eran perfectas ya que se encontraban en la región supralunar que, según Aristóteles, era una zona inalterable e imperecedera, a diferencia de la región sublunar, donde situaba a la Tierra, que sí estaba sometida al cambio.

Ptolomeo, durante el siglo II d.C. desarrolló un modelo cosmológico bajo la misma línea que el de Aristóteles, un modelo geocéntrico donde la Tierra permanecía inmóvil rodeada de ocho esferas cristalinas que llevaban a los astros; el Sol, la Luna, las estrellas y los cinco planetas conocidos que eran estrellas en el firmamento, que no estaban fijas con respecto al patrón de las constelaciones ya que avanzaban lentamente por el cielo y luego retrocedían

para volver a avanzar. A éstas estrellas les pusieron por nombre planetas que significa “errantes”; Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno. Este modelo era más o menos plausible porque permitía hacer predicciones aproximadas de las posiciones de los cuerpos celestes, pero se tendría que partir de la hipótesis de que el movimiento orbital de la Luna la llevaría algunas veces a estar al doble de la distancia a la Tierra lo cual implicaba que la Luna se tendría que ver en ocasiones a la mitad o al doble de su tamaño. A pesar de esta inconsistencia, de que no explicaba el movimiento de todos los astros y de que era complejo de entender, el modelo geocéntrico de Ptolomeo fue generalmente aceptado y además adoptado por la iglesia.

Estas ideas de Aristóteles y Ptolomeo se quedaron arraigadas por mucho tiempo hasta que, en 1514, Nicolás Copérnico [2] propuso un modelo del universo más simple aunque radicalmente diferente, ya que la Tierra dejaba de ser el centro del universo, tema controversial para la época, ocupando su lugar el Sol en reposo con la Tierra y los demás cuerpos celestes moviéndose alrededor en órbitas circulares. Sin embargo, el nuevo modelo heliocéntrico de Copérnico no fue tomado en serio durante casi un siglo, hasta que Johannes Kepler y Galileo Galilei comenzaron a hacer público su apoyo al modelo copernicano a pesar de que las trayectorias que describía no coincidían a la perfección con las observaciones.

En 1609 Galileo comenzó a observar al planeta Júpiter con mucho más detalle gracias al telescopio, inventado un año antes. Esto le permitió observar que alrededor de Júpiter orbitaban varios satélites lo cual implicaba que no todos los cuerpos celestes en el universo conocido tendrían por qué orbitar directamente alrededor de la Tierra, dejando atrás la teoría geocéntrica de Aristóteles y Ptolomeo mediante observaciones, mientras Kepler ya se encontraba modificando la teoría de Copérnico proponiendo órbitas elípticas alrededor del Sol en lugar de circulares, descubriendo casi por accidente que las predicciones del modelo con esta corrección encajaban mejor con las observaciones.

Gracias a todo lo anterior, la idea de que el universo tenía una frontera, como se pensaba, ya no era necesaria, además fue natural inferir que, si ahora el Sol era el centro del universo conocido en aquella época y casi todas las estrellas, salvo los llamados planetas, parecían inmóviles en el cielo, pues esas estrellas fijas fueran objetos como nuestro Sol, pero mucho más lejanos.

1.1.2 Universo Infinito y Estacionario

Debido a la Ley de Gravitación Universal de Isaac Newton [3], esas estrellas fijas no deberían permanecer así, pues la fuerza gravitacional haría que se atrajeran todas en algún punto, situación que no ocurriría si hubiera una cantidad infinita de estrellas esparcidas en un universo infinito, de ésta manera no habría ningún punto preferencial en donde se juntasen las estrellas, pues cada punto podría considerarse como el centro en un universo infinito, y a la vez también se puede prescindir de la idea de que existiese un centro en tal universo, así el centro estaría en todas partes y en ningún lado a la vez.

Los problemas de un universo infinito y estacionario eran muchos. Uno de ellos era que prácticamente cualquier punto observable en el cielo terminaría en alguna estrella haciendo que este siempre se viera brillante, incluso de noche y aunque hubiera materia entre las estrellas y los puntos de observación la materia terminaría calentándose y brillando debido a la absorción de la luz de las estrellas, a menos que las estrellas no hubieran brillado siempre sino que hubieran comenzado a brillar en un momento en el pasado finito.

La creencia de un universo estacionario era tan fuerte que incluso Albert Einstein, cuando formuló la teoría de la relatividad general en 1915, seguía convencido de que el universo tenía que ser así, tanto que añadió a sus ecuaciones una “constante cosmológica”, que funcionaba como una fuerza oponente a la fuerza gravitacional. La constante cosmológica dotaba al espacio-tiempo la cualidad intrínseca de expandirse, siendo contrarrestada por la fuerza atractiva de gravedad [véase 4].

1.1.3 Universo en Expansión

Hasta antes del siglo XX se pensaba que el universo había existido eternamente o bien se había creado en un tiempo finito atrás de manera más o menos igual a como se observa en el presente, de tal forma que pareciera como si hubiera existido siempre [4]. También se creía que la galaxia donde habita-

mos, La Vía Láctea, era todo el universo, hasta que en 1924 Edwin Hubble demostró que la nuestra no era la única galaxia, sino que había muchas otras más, con grandes espacios vacíos entre ellas. En 1929 se observó que las estrellas lejanas, en cualquier dirección del cielo, se estaban alejando rápidamente, ya que la frecuencia luminosa de ondas que provienen de ellas se estaba desplazando al rojo debido al efecto Doppler, es decir, que el universo se estaba expandiendo. Éste descubrimiento fue una de las grandes revoluciones del siglo pasado. En 1922 Alexander Friedmann propuso dos simples hipótesis sobre el universo [5] con el objetivo de facilitar la resolución las ecuaciones de la relatividad general deducidas por Albert Einstein en 1915. La primera consistía en que el universo se ve igual en cualquier dirección en la que se observe y la segunda en que esto se cumple también para cualquier punto en el universo desde donde se observe, así logró demostrar que el universo se expande, hecho que años más tarde fue corroborado por Hubble mediante observaciones ya mencionadas. Desde luego que estas hipótesis hechas por Friedmann no son ciertas, a menos que el universo se vea a gran escala, a algunos miles de millones de años luz, en comparación con las distancias típicas entre galaxias, y aun así se cumplen de manera aproximada. Éstas hipótesis de Friedmann, de un universo homogéneo e isótropo, dieron lugar al primer modelo aproximado del universo real.

1.2. Big Bang

Sobre la base anterior, se ha podido formular modelos de los primeros momentos del universo, considerando las hipótesis de Friedmann, que son la base del llamado *principio cosmológico* [6], y las ecuaciones de Einstein. La idea del Big Bang surge a partir de las soluciones de Friedmann que dicen que la distancia entre galaxias vecinas era nula en algún momento, entre 10,000 y 20,000 millones de años en el pasado, haciendo que el universo, cuya temperatura era extremadamente alta en ese instante (de ahí el nombre de Hot Big Bang, como se verá más adelante), tuviese una densidad y curvatura del espacio-tiempo infinitas, implicando que la teoría de la relatividad general predijera la existencia de un punto singular en el universo, donde el espacio y el tiempo habrían tenido comienzo [4].

1.3. Inflación

Las motivaciones de la inflación nacieron con el fin de encontrar respuestas a problemas de las condiciones iniciales del Big Bang, como el problema de la planitud o también llamado problema de la edad. En este caso casi todas las condiciones iniciales llevan, bien, a un término de curvatura positivo donde se tiene un universo con curvatura esférica cerrado sobre sí mismo que colapsa muy rápido, o a un término de curvatura negativo, es decir, un universo abierto y divergente que entra en un régimen dominado por la curvatura tardando sólo un segundo en enfriarse por debajo de los 3 K, entonces, ¿cómo es que el universo es tan viejo hoy en día? El problema del horizonte, que es el más importante del modelo del Big Bang, concierne a la comunicación entre diferentes regiones del universo. Como el universo tiene una edad finita y la luz pudo haber viajado solo cierta distancia formando una región conocida como el universo observable, la luz que vemos en lados opuestos en el cielo apenas ha llegado hasta nosotros desde un tiempo cercano al big bang entonces no ha habido tiempo de que dos regiones opuestas en el cielo interactúen de alguna manera para haber llegado a un equilibrio térmico, situación que, según las observaciones, en efecto debió ocurrir pues la radiación de fondo de microondas vista de todas partes del cielo tiene prácticamente la misma temperatura medida con una alta precisión de 2.725 K con desviaciones de tan solo una parte por cien mil. Otro detalle a resolver es que, si el big bang comenzó con una temperatura muy alta entonces reliquias que no se pueden observar hoy en día hubiesen sobrevivido hasta hoy, como defectos topológicos y monopolos magnéticos.

Los modelos inflacionarios, donde el universo pasa por una etapa de crecimiento exponencial llamada *inflación* [7], dan una descripción muy simple que reproduce con mucha precisión los resultados obtenidos de la radiación de fondo de microondas.

1.4. Reseña

En este trabajo de tesis se pretende obtener un modelo que reproduzca una etapa de inflación en el universo temprano a partir de la combinación de dos modelos previos; inflación básica con un campo escalar, y una teoría $f(R)$. A partir de estos, se formula un modelo mixto, no estudiado, que será analizado

como ejercicio académico para obtener, si es posible, una etapa inflacionaria para tres tipos de geometrías; esférica, hiperbólica, y plana. También se hará énfasis en las condiciones y parámetros necesarios para predecir inflación, junto con sus implicaciones en el momento y en la duración de esta.

Primero se abordarán conceptos teóricos de la cosmología moderna en la primera sección del capítulo 2. Se definirán unidades de medición y se revisarán algunos conceptos importantes, como el principio cosmológico, el Big Bang, la teoría inflacionaria, y el campo escalar. También se obtendrá la métrica FLRW que se usará en el modelo mixto.

En la segunda sección del capítulo 2 se expondrá la teoría de algunos métodos numéricos de un solo paso y multipaso, con los cuales se construyen los métodos de Adams, utilizados en el capítulo 3.

En el capítulo 3, por una parte, se desarrolla la motivación de la tesis, detallando la combinación requerida para obtener la acción a partir de la cual se extraerán las ecuaciones de movimiento propias del sistema descrito por el modelo mixto propuesto. En la segunda sección del capítulo 3 se hace un análisis de las ecuaciones de movimiento del modelo, obtenidas a partir de un principio variacional de la acción resultante, y clasificándolas de acuerdo a los parámetros utilizados en la acción y a los valores del parámetro de curvatura para las tres geometrías ya mencionadas, discutiendo los resultados obtenidos. Se observa que el modelo mixto propuesto produce una etapa inflacionaria en el universo temprano para una geometría plana, además de ser capaz de predecir formación de estructuras y así explicar la homogeneidad del CMB. Después se detalla una breve conclusión de los resultados finales y de las herramientas utilizadas.

En los apéndices A, B y C, se desarrollan ciertos conceptos de la mecánica analítica que son necesarios para justificar el análisis y desarrollo del capítulo 3, tales como el cálculo de variaciones, las ecuaciones de Euler-lagrange, y la hamiltoniana como una cantidad conservada a partir de ciertas características de la Lagrangiana del modelo a estudiar.

Finalmente se presenta la bibliografía consultada, en el orden de aparición de cada referencia de esta tesis.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

2.1. Conceptos de Cosmología Moderna

Es necesaria la revisión de algunos conceptos, como los de Inflación, El Principio Cosmológico, Fondo Cósmico de Microondas, Campo Escalar, entre otros, que son necesarios para el desarrollo del modelo propuesto en este trabajo de tesis.

2.1.1 Convenciones y unidades de medición

Una de las unidades de longitud más usadas en cosmología es el megaparsec (Mpc)

$$1\text{pc} = 3.261\text{yl} = 3.086 \times 10^{16}\text{mts}$$

$$1\text{Mpc} = 1 \times 10^6\text{pc}$$

$$1\text{Mpc} = 3.26156 \times 10^6\text{yl} \approx 3.0857 \times 10^{22}\text{m}.$$

En unidades de masa m , longitud l , y tiempo t , la escala de la velocidad de la luz, la constante gravitacional y la constante de Planck, en 4 dimensiones es, respectivamente, $[c] = lt^{-1}$, $[G] = l^3t^{-2}m^{-1}$, $[\hbar] = l^2t^{-1}m$. En la relatividad general, las constantes universales son la gravitacional G , y la velocidad de la

luz c , mientras que en la teoría cuántica de campos se tienen las constantes c , y \hbar . Esta última llamada la constante de Planck. En caso de unir ambas teorías en una teoría de gravedad cuántica se esperaría que estas tres constantes jueguen un papel en ella.

De las unidades de G , c y \hbar resulta que la expresión

$$l_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.6163 \times 10^{-35} \text{m}, \quad (2.1)$$

llamada *longitud de Planck*, es el único producto de potencias de las constantes dimensionales universales que posee unidades de longitud. Como las constantes \hbar , G y c describen los procesos fundamentales de la mecánica cuántica, la gravedad, y la relatividad, respectivamente, la escala de longitud que se obtiene de esta expresión sería la típica de procesos descritos por una teoría de gravedad cuántica relativista.

De manera similar se obtienen el tiempo y la masa de Planck,

$$t_{Pl} := \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5.3912 \times 10^{-44} \text{s},$$

$$m_{Pl} := \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 1.2209 \times 10^{19} \text{GeV } c^2.$$

También se usará la masa de Planck reducida

$$M_{Pl} := \frac{m_{Pl}}{\sqrt{8\pi}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G}} = 2.435 \times 10^{18} \text{GeV}.$$

Y la temperatura de Planck

$$T_{Pl} \approx 1.4 \times 10^{32} \text{K}.$$

Si se adoptan unidades naturales, la velocidad de la luz c y la constante de Planck \hbar son adimensionales

$$c = 1, \quad \hbar = 1.$$

También se define el parámetro de Hubble [6]

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)},$$

que es una función de $\dot{a}(t)$ y de $a(t)$ que, como se verá más adelante, a esta última se le llama el *factor de escala*. Al parámetro de Hubble de hoy en día se le conoce como la *constante de Hubble*, y conviene expresarlo como sigue

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1},$$

donde h es un parámetro adimensional que toma el valor determinado por observaciones astronómicas con respecto a 100, cuyo valor es de

$$h = 0.72 \pm 0.08.$$

Así, el tiempo de Hubble se define como

$$H^{-1}(t_0) = H_0^{-1} = 9.77h^{-1} \times 10^9 \text{ yrs}$$

Y la longitud de Hubble

$$\frac{H^{-1}}{a}.$$

Se usará la constante gravitacional G cuyo valor es

$$G = 6.67428 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}.$$

Los índices griegos que aparezcan, α, β, \dots etcétera, correrán cuatro coordenadas desde 0 o 1 hasta 3 o 4;

$$\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu, \dots = 0, \dots, 3$$

ó

$$\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu, \dots = 1, \dots, 4$$

según sea el caso. Mientras que los índices latinos parten de 0 o 1 y correrán solo tres coordenadas

$$a, b, \dots, i, j, \dots = 0, 1, 2$$

ó

$$a, b, \dots, i, j, \dots = 1, 2, 3$$

de acuerdo a como se indique.

Los índices primados, latinos o griegos, se referirán a coordenadas de un sistema de referencia distinto que describan el mismo punto o evento que sus respectivos índices, latinos o griegos, no primados.

2.1.2 Universo

El universo se define como un sistema físico que contiene la totalidad del espacio- tiempo, de la materia, energía y momento. La *cosmología* [6] estudia su origen, formación y evolución, además de las estructuras cósmicas en este a escalas espaciales muy grandes. Tales estructuras están ordenadas de manera jerárquica.

- *Estrellas.* Son la principal fuente de luz visible en el universo debido a la fusión nuclear dentro de ellas.
- *Galaxias.* Son estructuras enormes que se componen de grandes cantidades de estrellas llegando a contener hasta 10^{11} , como en el caso de la Vía Láctea.
- *El grupo local.* Es un conjunto formado por algunas pocas galaxias, cúmulos y supercúmulos, que son grupos de galaxias que, junto con los espacios vacíos entre estas forman las estructuras más grandes del universo observable.

Estudiar estas estructuras a tan grandes distancias de la Tierra (de cientos o incluso miles de megapársecs), es útil también para visualizar el universo a tiempos remotos debido a la finitud de la velocidad de la luz.

Según la relatividad general [8], el espacio-tiempo depende de la distribución de la masa-energía y esta, a su vez, curva el espacio-tiempo. Además, si la materia rota, el espacio-tiempo también se “tuerce”, de esta manera, la curvatura del universo, debido a la materia-energía que contiene, determina su propia dinámica. Esto viene representado por las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\alpha'\beta'} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha'\beta'} + \Lambda g_{\alpha'\beta'} = \kappa^2 T_{\alpha'\beta'} \quad (2.2)$$

donde $\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4}$

El lado izquierdo de la ecuación contiene la información geométrica, siendo $g_{\alpha'\beta'}$, $R_{\alpha'\beta'}$, R y Λ , el tensor métrico, el tensor de Ricci, el invariante de Ricci y la constante cosmológica, respectivamente (véase [9]). De aquí se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden para la *métrica* [6]. De la métrica se obtiene la distancia entre dos eventos en el universo de esta geometría. En el lado derecho de la ecuación, el tensor de energía-momento contiene la información de la distribución de masa-energía, siendo κ^2 la constante de acoplamiento con la materia [10] y G la constante gravitacional de Newton.

Para describir la contribución de materia y energía del universo en promedio, hay que definir sus componentes y sus propiedades termodinámicas.

Para describir el espacio-tiempo, se tiene que definir una métrica en $4D$ compuesta de tres dimensiones espaciales y una temporal.

2.1.3 El Principio Cosmológico

La Cosmología es el estudio de la naturaleza a muy grandes escalas. Estas van de un rango de entre 1 y 8000 megapársecs, desde el grupo local de galaxias más cercano hasta la luz más distante que se puede detectar.

La distribución de galaxias cerca del grupo local es bastante irregular y se caracteriza por varios súper cúmulos de galaxias donde la materia visible está mucho más concentrada que en otras regiones casi vacías llamadas gigantes vacías. Sin embargo, a mayores escalas la distribución de galaxias se vuelve cada vez más uniforme en todas las direcciones. Con buena aproximación, la distribución de materia parece ser *homogénea*, esto es, independiente del punto desde donde se observe, e *isótropa*, o sea, independiente de la dirección de observación. Esto es más evidente a escalas aún mayores, es decir, las hipótesis de Friedmann [5]. De hecho, el cielo también se llena de manera uniforme con un fondo de radiación de origen cósmico, *cosmic microwave background* (CMB) [11], o radiación de fondo de microondas.

Tales observaciones verifican las hipótesis que hoy se formulan como el *Principio Cosmológico*, que es una generalización del principio Copernicano cuya premisa es que el universo no posee una dirección o un punto privilegiados. En este sentido, “punto” significa una vecindad local lo suficientemente grande.

2.1.4 CMB

El CMB [11] se considera como una instantánea del universo que se remonta a hace más de 13 mil millones de años, cuando la materia, un plasma caliente y homogéneo de bariones y otras partículas, se volvieron transparentes a la radiación por primera vez en una época del universo llamada *decoupling* [6] o desacople, cuando este tenía apenas una millonésima parte de su tamaño actual y una temperatura de unos $3 \times 10^6 K$.

Se sabe que la energía necesaria para ionizar un átomo de hidrógeno, en el estado base (véase [6]), es de 13.6 eV y al menos 10.2 eV para llevar al electrón a su primer estado excitado.

A la temperatura del universo en esa etapa, los fotones tenían la energía suficiente para ionizar el hidrogeno por completo, así que no era posible la formación de átomos pues los electrones y fotones interactúan mutuamente por medio de la dispersión de Thomson [6] y el camino libre medio de

cualquier fotón dado por

$$\frac{1}{n_e \sigma_e}$$

era muy corto, dando como resultado un plasma ionizado. Con el tiempo, mientras el universo se expandía y se enfriaba, la energía de los fotones disminuiría dando lugar a la formación de átomos a la vez que los fotones lograrían viajar por el resto del universo. A esta radiación primigenia se le llama **Cosmic Microwave Background (CMB)**, o radiación cósmica de fondo cuya distribución ha sido mapeada con gran precisión con los satélites Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) y PLANCK, como se muestra

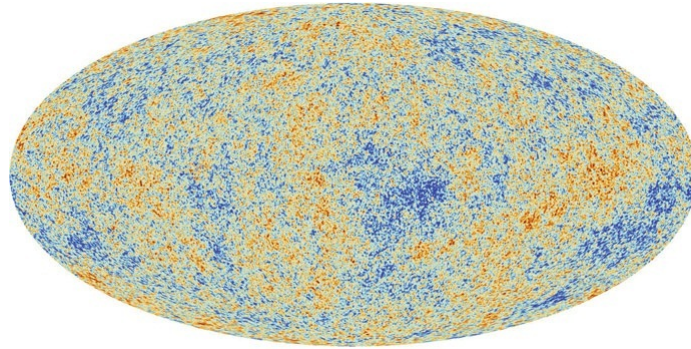


Figura 2.1: Mapeo de la radiación de fondo de microondas (CMB) (véase [11]) realizado por el satélite PLANCK en 2013.

Hoy, el CMB se ha enfriado a una temperatura media de $T_0 = (2.7255 \pm 0.0006)$ K.

2.1.5 Expansión y Redshift

Casi todo en el universo parece alejarse desde la Tierra, y aparentemente, mientras más lejos esté un objeto más rápido se aleja. Estas velocidades se miden gracias al corrimiento al rojo o *redshift*, que es el efecto Doppler

electromagnético y gravitacional aplicado a ondas electromagnéticas. Si una galaxia se acerca entonces la luz emitida por esta aumenta su frecuencia y se observa un corrimiento al azul o blueshift, mientras que, si la galaxia se aleja, entonces la longitud de onda de la luz que emite aumenta, desplazándose al rojo, disminuyendo así su frecuencia. Esto se conoce como *redshift* o corrimiento al rojo pues, en el espectro electromagnético, la longitud de onda de menor frecuencia de la luz visible tiende al rojo. Para caracterizar este efecto, se define el parámetro de corrimiento, que cuantifica el corrimiento relativo de la siguiente manera; siendo λ_{em} la longitud de onda en el punto de emisión de la galaxia y λ_{obs} la longitud de onda observada

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}.$$

Las observaciones muestran que la velocidad de recesión de una galaxia es proporcional a la distancia desde la cual se observa, es decir

$$\vec{v} = H_0 \vec{r}, \quad (2.3)$$

que se conoce como la ley de Hubble.

2.1.6 Ecuación de Friedmann y el factor de escala

Es la ecuación más importante en cosmología del universo bajo el principio cosmológico, ya que describe la expansión del universo, así que resulta útil resolver esta ecuación bajo diferentes suposiciones relacionadas con el contenido de materia del universo. Esta ecuación se puede obtener a partir de la gravitación newtoniana. Para esto, es necesario calcular la energía potencial gravitacional y la energía cinética de una partícula de prueba arbitraria, para después usar la conservación de energía.

Si un observador se encuentra en un medio de expansión uniforme de simetría esférica, con densidad de masa ρ , debido a que el universo se ve igual desde cualquier lugar, es plausible considerar cualquier punto como su centro. Considerando una partícula de masa m , a una distancia r del centro, esta solo siente una fuerza del material en radios más pequeños debido a la simetría esférica.

Como $\rho = M/V_{\text{vol}}$, donde M es la masa total del medio de expansión uniforme de simetría esférica, y V_{vol} es el volumen de tal esfera, o sea, $V_{\text{vol}} = 4\pi r^3/3$, entonces $M = \rho V_{\text{vol}} = 4\pi\rho r^3/3$, y la fuerza según la ley de gravitación universal es

$$F = \frac{GMm}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho r m,$$

que se obtiene a partir del potencial

$$V = -\frac{GMm}{r} = -\frac{4\pi G\rho r^2 m}{3}.$$

Excluyendo el momento angular, la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2.$$

Así, la energía $U = T + V$, que es constante debido a que se conserva, queda

$$U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4\pi}{3}Gr^2\rho m. \quad (2.4)$$

Debido a la homogeneidad del universo, es posible usar otro sistema de coordenadas que vaya con la expansión para cualesquiera dos partículas. Si se considera que la expansión es uniforme, entonces la relación entre la distancia \vec{r} entre estas dos partículas y su distancia en este nuevo sistema de coordenadas que se expande con el universo, llamada *distancia comóvil* \vec{x} , es de forma directamente proporcional, cuya tasa de proporcionalidad a es una función dependiente solo del tiempo

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}. \quad (2.5)$$

Esta función $a(t)$ es de gran importancia y es llamada tasa de expansión del universo o **factor de escala**, y describe cómo evolucionan las distancias \vec{r} con el tiempo, debido a que, por definición, las distancias comóviles \vec{x} permanecen fijas.

Sustituyendo $\vec{r} = a(t) \vec{x}$ en 2.4

$$U = \frac{1}{2}m\dot{a}^2x^2 - \frac{4\pi}{3}Ga^2x^2\rho m.$$

Luego, si se multiplica todo por $\frac{2}{ma^2x^2}$

$$\frac{2U}{ma^2x^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi G\rho}{3}.$$

Reordenando y considerando $Kc^2 = -2U/mx^2$, teniendo en cuenta que, en unidades naturales $c = 1$, y por definición la coordenada comóvil x^2 es fija (hasta ahora, en esta derivación clásica se puede interpretar que K es una medida de energía por partícula), definiendo el **parámetro de Hubble** como

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \tag{2.6}$$

se obtiene la **ecuación de Friedmann**

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{K}{a^2}. \tag{2.7}$$

De nuevo, la homogeneidad impone ciertas restricciones. La primera es que K debe ser independiente de x debido a que todos los demás términos de la ecuación lo son, la segunda, U , si bien es constante para una partícula dada, será diferente para valores distintos de x , pero debido a la homogeneidad U y x^2 son proporcionales. Y, por último, como la energía total U es constante entonces K también lo es, pues la distancia comóvil x es fija por definición. Así, para un universo en expansión se tiene un único valor para K , cuya interpretación adecuada en el contexto de la relatividad general es que dicho término está relacionado con la curvatura espacial del universo. Por este motivo a K se le llama *término de curvatura* [6].

2.1.7 Geometría del universo

Como se sabe de la teoría de la relatividad general, la gravedad es un efecto de la curvatura del espacio-tiempo debida a la distribución de materia-energía en el universo. El término de curvatura K de la ecuación 2.7 indica si el universo es cerrado, abierto, o plano, pues son las tres geometrías que permite el principio cosmológico, que se toma como postulado.

Reescribiendo la ecuación 2.7 en términos del parámetro observacional Ω llamado *parámetro de densidad* [6], definido como

$$\Omega(t) = \frac{\rho}{\rho_c},$$

siendo ρ la densidad total de energía y $\rho_c(t) = 3H^2/8\pi G$ la densidad crítica suficiente para frenar la expansión, se obtiene

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c\Omega - \frac{K}{a^2} = H^2\Omega - \frac{K}{a^2},$$

ó

$$\begin{aligned} H^2 - H^2\Omega &= -\frac{K}{a^2} \\ H^2(1 - \Omega) &= -\frac{K}{a^2} \\ (1 - \Omega) &= -\frac{K}{a^2H^2} \\ \Omega - 1 &= \frac{K}{a^2H^2}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dependiendo del valor que tome el parámetro Ω , 0, 1 ó -1, se tienen diferentes geometrías espaciales para el universo. Si $\Omega = 1$, es decir, la densidad total ρ coincide con la densidad crítica, entonces K es necesariamente cero. Este caso implica una geometría plana.

Geometría Euclidiana

Los axiomas de Euclides son la base de las leyes de la geometría que lleva su nombre y conducen a las siguientes conclusiones:

Los ángulos de cualquier triángulo suman 180° .

La circunferencia de un círculo de radio r es $2\pi r$.

Si en la ecuación 2.8 $\Omega = 1$, es decir, la densidad total ρ coincide con la densidad crítica, entonces K es necesariamente cero. Este caso describe la geometría plana, y si el universo tiene este tipo de geometría espacial entonces debe ser infinito en extensión, de otra manera, violaría la isotropía del principio cosmológico. Un universo con esta geometría se denomina *universo plano*.

Geometrías no Euclidianas

Las denominadas geometrías no euclidianas surgen en el siglo XIX y sirvieron para establecer los fundamentos matemáticos de la teoría de la relatividad general. El tipo más simple de estas geometrías es la geometría esférica. Se sabe que una esfera perfecta se ve igual desde cualquier punto de su superficie lo cual cumple la condición de isotropía. A diferencia de la geometría plana, la superficie esférica es finita en extensión, y su área está dada por $4\pi r^2$ donde r es el radio de la esfera, sin embargo, en esta geometría, no hay bordes así que es posible tener una superficie finita y además que no tenga límites, así, un universo “esférico” compartiría estas características.

La suma de los ángulos internos de un triángulo dibujado sobre una superficie de geometría esférica no suman 180° sino que su suma siempre excede este límite y no es el mismo ángulo para todos los triángulos lo cual contradice uno de los postulados de Euclides de la geometría plana. Además, la circunferencia en esta geometría resulta ser también diferente, siendo menor a la circunferencia euclidiana $2\pi r$.

Un punto importante es que, como la curvatura es una propiedad de la superficie bidimensional de la esfera, al hablar de la curvatura de esta, o de un universo con tal geometría, de antemano se supone restringirse a la curvatura de la superficie, pues la curvatura propia de la esfera o de un universo de estas características resulta ser muy difícil de imaginar.

Un universo con estas características corresponde a un valor positivo del término K de la ecuación 2.7 y se le suele llamar *universo cerrado* debido a

la finitud de su tamaño.

La geometría correspondiente para el caso en el que $K < 0$ se llama geometría hiperbólica. Esta tiene la peculiaridad de que las líneas paralelas, en lugar de ser rectas como en el caso de la geometría euclidiana, o líneas convergentes como en el caso de la geometría esférica, resultan ser líneas divergentes, es decir, que se alejan cada vez más unas de otras.

2.1.8 Hot Big Bang

En la relatividad general, que es una teoría de campos [12], se describe la dinámica del universo determinada por la materia que hay en él, al ser el universo aquel sistema físico que contiene, entre otras cosas, la totalidad de materia-energía. Sin embargo, en esta teoría, no siempre es deseable o posible especificar de manera explícita el tipo de materia contenida en el universo, así que es conveniente imponer condiciones alternativas, como alguna condición de energía, para que cualquier teoría razonable de la materia pueda satisfacer siempre, o al menos, preservar esta condición en caso de ser satisfecha por las condiciones iniciales (véase 11). Existen condiciones de energía que no corresponden necesariamente a la realidad física observada por mediciones, no obstante, tales condiciones no son restricciones físicas, sino condiciones límite que pretenden imponer matemáticamente que la energía debe ser positiva.

La distribución de masa, momento y energía debidos a la materia se describen mediante el tensor de energía-momento de la ecuación 2.2, que lleva la contribución de todas las formas de energía en el universo, excepto la gravedad. Sin embargo, en esta ecuación no es necesario especificar los tipos de estados de materia o campos no gravitacionales pues no restringe cuáles son admisibles y cuáles no en un modelo de espacio-tiempo, lo cual resulta ambiguo, ya que, al no tener algún criterio adicional para acotar las soluciones de esta ecuación, es posible admitir soluciones con propiedades no consideradas válidas, de ahí la utilidad de las condiciones de energía, pues describen de manera simple propiedades comunes a casi todos los estados de la materia y campos no gravitacionales ya bien descritos por la física. Estas condiciones suelen ser suficientes para acotar en gran manera el conjunto de soluciones de la ecuación de campo de Einstein mediante la restricción de los eigenvalores y eigenvectores del tensor de energía-momento.

De relatividad general se sabe que, si las componentes del tensor métrico en coordenadas cartesianas son $\eta_{\alpha\beta}$

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y X^μ representa las componentes de un cuadvivector [9], es decir, siendo γ el factor de Lorentz, estas X^μ se transforman de la siguiente manera

$$\begin{aligned} X^{0'} &= \gamma \left(X^0 - \frac{v}{c} X^1 \right) \\ X^{1'} &= \gamma \left(X^1 - \frac{v}{c} X^0 \right) \\ X^{2'} &= X^2 \\ X^{3'} &= X^3, \end{aligned}$$

entonces este se puede clasificar de acuerdo al valor del invariante $\eta_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta$. Si $\eta_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta < 0$ el cuadvivector es llamado *temporaloide*, *luxoide* si $\eta_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = 0$ y *espacialoide* si $\eta_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta > 0$. Así, de un campo vectorial unitario temporaloide \vec{X} cuya interpretación física es la definición de las líneas de mundo [11] de alguna familia de observadores ideales (cuyos marcos de referencia posiblemente no sean inerciales) la cantidad escalar construida por el cuadvivector de componentes X^μ y por el tensor de energía-momento $T_{\alpha\beta}$

$$\rho = T_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta$$

sería la densidad total de materia más energía de campos, a excepción del campo gravitacional, que mide un observador de esta familia en cada evento en su línea de mundo. El campo vectorial con componentes $-T^\alpha{}_\beta X^\beta$ representa la densidad de momento medido por estos observadores.

Si \vec{k} es un campo vectorial luxoide arbitrario, entonces la cantidad escalar

$$v = T_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta$$

se puede entender como un caso límite de la densidad de masa-energía.

Para cada campo vectorial temporalloide \vec{X} que apunte hacia el futuro, la condición de energía fuerte o Strong Energy Condition (SEC) [13] establece que la traza

$$\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right) X^\alpha X^\beta$$

es mayor o igual a cero.

Si se supone que el contenido material del universo se comporta como un fluido perfecto, es decir, que no existen fuerzas entre las partículas constituyentes, conducción de calor o viscosidad entre las partículas del fluido, cuya entropía se conserva y se encuentra en equilibrio termodinámico, entonces el tensor que describe a tal material es de la forma

$$T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta + p h^{\alpha\beta} \quad (2.9)$$

donde u^μ son las componentes de la quadri-velocidad [11] del fluido en cuestión y $h^{\alpha\beta} := g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta$ con $g^{\alpha\beta}$ la inversa de la métrica. En un sistema de referencia inercial comóvil con el fluido, la quadri-velocidad está dada por $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$. Si se considera un marco de referencia alineado con el movimiento de las partículas de materia, entonces las componentes del tensor de energía-momento toman la siguiente forma

$$T^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

donde p es la presión isótropa debida a radiación y T^{00} es la densidad total de energía ρ . Ahora la Strong Energy Condition se puede representar en términos de los eigenvalores del tensor de componentes $T^{\alpha\beta}$, es decir, $\rho + p \geq 0$, $\rho + 3p \geq 0$.

Recordando la ecuación 2.7 y derivándola con respecto al tiempo,

$$\frac{2\dot{a}}{a} \left(\frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2} \right) = \frac{8\pi G\dot{\rho}}{3} + 2\frac{K\dot{a}}{a^3}, \quad (2.10)$$

y usando la ecuación de fluido

$$\dot{\rho} + 3H \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0 \quad (2.11)$$

para obtener $\dot{\rho}$, sustituyendo en la ecuación 2.10, y cancelando el término $2\frac{\dot{a}}{a}$ se obtiene

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -4\pi G (\rho + p) + \frac{K}{a^2}.$$

Luego, usando la ecuación 2.7 se llega a la ecuación de aceleración del factor de escala $a(t)$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p), \quad (2.12)$$

recordando que en unidades naturales $c = 1$.

Si se supone la condición de energía fuerte como válida, entonces, de la ecuación de aceleración 2.12, se observa que el universo estaría en desaceleración, pues un factor del último término coincide con uno de los eigenvalores de la SEC.

Prescindiendo de esta conclusión, suponiendo que la aceleración del factor de escala es constante tomando en cuenta las observaciones recientes, se tiene que

$$\dot{a}(t) = C \Rightarrow a(t) = \int C dt = C(t - t_{\text{mín}}).$$

Para que $a(t) = 0$, o sea, que no haya expansión, $t_{\text{mín}}$ debe ser igual a t . Además, es evidente que $H_0^{-1} = t_0 - t_{\text{mín}}$, donde t_0 es el tiempo actual pues se está considerando la expansión (constante) observada en el presente, lo cual dice que, si no hay desaceleración, la edad del universo es igual al tiempo de Hubble, o sea, $H_0^{-1} = 9.77h^{-1} \times 10^9$ años [11].

Por otro lado, si se supone válida la condición de energía fuerte, entonces, por la ecuación 2.12 el universo desacelera, sin embargo, en t_0 tiene la misma pendiente que en el caso anterior, cuando el factor de escala era constante. En la figura 2.2 se muestra también la curva que describe la desaceleración del universo, que, como decae más rápido a medida que t se aproxima a cero entonces esta curva se intersecta con el eje del tiempo en $a = 0$, esto es, que si la condición de energía fuerte es válida, en algún tiempo t en un pasado más reciente que H_0^{-1} el factor de escala del universo homogéneo era nulo. En tal momento, la totalidad del espacio-tiempo y masa-energía estaban en un solo punto de densidad infinita llamado *la singularidad inicial* [13]. A este momento se le conoce como el Big Bang.

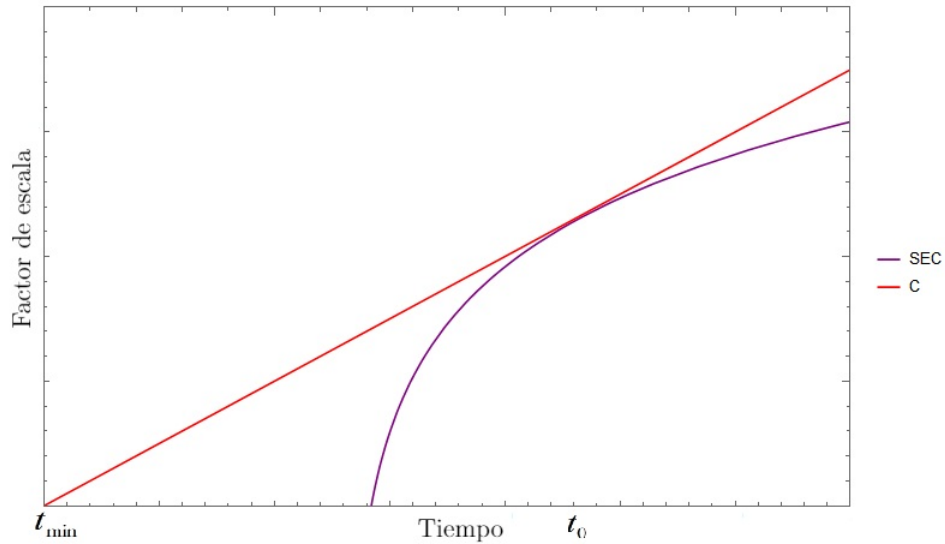


Figura 2.2: Factor de escala en función del tiempo [11]. La recta en color rojo es tangente a la curva púrpura en $t = t_0$.

2.1.9 Métrica FLRW

Al poder definir al espacio físico solo en términos de medidas de distancias entre objetos físicos, entonces se puede definir como el conjunto de todos los

posibles sistemas coordenados respecto a los cuales se describe el movimiento.

En la Relatividad Especial, los sistemas físicos se describen en términos de un espacio de Minkowski de cuatro dimensiones que representa un espacio-tiempo no curvado, mientras que, en la Relatividad General, que es una teoría de la gravedad, los efectos gravitacionales están en términos de la curvatura de un espacio de Riemann de cuatro dimensiones. Así, para describir la geometría del espacio-tiempo, es necesario un sistema de cuatro coordenadas x^μ para lograr especificar la distancia ds^2 entre dos puntos del espacio-tiempo llamados *eventos*, muy cercanos entre sí, en el universo separados por intervalos coordenados infinitesimales dx^μ . Con $g_{\mu\nu}$ un tensor simétrico, es decir, que $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, de rango dos, denominado *tensor métrico* o métrica, se puede escribir en notación tensorial con índices contravariantes [9]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.13)$$

Considerando un espacio euclidiano de dos dimensiones, el elemento de línea está dado como en la página 73, y, de manera análoga, el elemento de línea en cuatro dimensiones espaciales sería

$$dl^2 = \sum_{\alpha=1} (dx^\alpha)^2, \quad (2.14)$$

para un espacio plano.

De manera similar, se puede extender la representación algebraica de la esfera en tres dimensiones a una hiperesfera de cuatro dimensiones de radio a

$$\sum_{\alpha} x_{\alpha}^2 = a^2,$$

donde la coordenada x_4^2 queda restringida al resto de las coordenadas y a a , de manera que

$$x_4^2 = a^2 - \sum_{i=1}^3 x_i^2.$$

Recordando que el diferencial de x_4 es

$$dx_4 = (\partial_i x_4) dx^i, \quad (2.15)$$

donde $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Entonces

$$\partial_i x_4 = \frac{\partial x_4}{\partial x^i} = -\frac{x_i}{\left(a^2 - \sum_{j=1}^3 x_j^2\right)^{1/2}}.$$

Si esto se sustituye en 2.15 y luego se hace $(dx^4)^2$, entonces se puede sustituir en 2.14 para obtener la métrica o el elemento de distancia entre dos puntos muy cercanos de una hiperesfera

$$dl^2 = \sum_{\alpha} (dx^{\alpha})^2 = \sum_i (dx^i)^2 + (dx^4)^2 = \sum_i (dx^i)^2 + \frac{(x_i dx^i)^2}{\left(a^2 - \sum_j x_j^2\right)}. \quad (2.16)$$

Es posible introducir el sistema de coordenadas curvilíneas esféricas realizando las transformaciones

$$\begin{aligned} x_1 &= b \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ x_2 &= b \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ x_3 &= b \cos \theta \end{aligned} \quad (2.17)$$

cuyos rangos son $0 < b < \infty$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$. Tomando como $b^2 = \sum_j x_j^2$ de la ecuación 2.16, así $b = \left(\sum_j x_j^2\right)^{1/2}$, y se tiene que

$$db = \frac{x_i dx^i}{\left(\sum_j x_j^2\right)^{1/2}} \Rightarrow db^2 = \frac{(x_i dx^i)^2}{\sum_j x_j^2}.$$

De aquí

$$b^2 db^2 = (x_i dx^i)^2.$$

Sustituyendo estos resultados en 2.16

$$dl^2 = (dx^\alpha)^2 = \sum_i (dx^i)^2 + (dx^4)^2 = \sum_i (dx^i)^2 + \frac{b^2 db^2}{(a^2 - b^2)}. \quad (2.18)$$

Ahora, habría que obtener las dx^i en coordenadas esféricas a partir de las relaciones 2.17 como sigue

$$\begin{aligned} dx^1 &= b \cos \theta \cos \phi d\theta + \cos \phi \operatorname{sen} \theta db - b \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi d\phi \\ dx^2 &= b \cos \phi \operatorname{sen} \theta d\phi + b \cos \theta \operatorname{sen} \phi d\theta + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi db \\ dx^3 &= \cos \theta db - b \operatorname{sen} \theta d\theta. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados en 2.18 y simplificando se obtiene la expresión del elemento de distancia de la superficie de una hiperesfera

$$dl^2 = \frac{a^2 db^2}{(a^2 - b^2)} + b^2 d\theta^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2. \quad (2.19)$$

Factorizando a^2 del denominador y haciendo la sustitución $r = b/a$ y $dr = db/a$ se obtiene

$$dl^2 = a^2 \left[\frac{dr^2}{(1 - r^2)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2 \right],$$

que se puede generalizar para introducir la curvatura de la ecuación 2.7, y de esta manera se obtiene el elemento de distancia en coordenadas hipersféricas de una hipersuperficie cuya curvatura se determina de acuerdo a los posibles valores de K .

$$dl^2 = a^2 \left[\frac{dr^2}{(1 - Kr^2)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2 \right] = a^2 \left[\frac{dr^2}{(1 - Kr^2)} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (2.20)$$

Para el diferencial de ángulo sólido $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Recordando que, en coordenadas cartesianas, el tensor métrico de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ tiene las componentes de la página 20,

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx_i dx^i$$

con los índices griegos corriendo desde 0. Para representar un espacio curvo expandiéndose, habría que introducir la métrica 2.20 en la parte espacial de la métrica de Minkowski. Haciendo esto, el tensor $\eta_{\alpha\beta}$ se convierte en $g_{\mu\nu}$, que es la métrica del espacio-tiempo en coordenadas hiperesféricas cuya forma es

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.21)$$

Como habría que considerar la expansión del universo, entonces el radio de la hipersuperficie ahora es una función que solo depende del tiempo (debido al principio cosmológico), pues la expansión es uniforme

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.22)$$

donde

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{a^2(t)}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

con $i, j = 1, 2, 3$. Así, la métrica 2.22 toma la forma

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.24)$$

conocida como métrica **FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker)** [11], que, a diferencia de la métrica de Minkowski, describe un espacio-tiempo homogéneo, con curvatura K , con factor de escala $a(t)$.

2.1.10 Teoría Inflacionaria

La teoría del hot big bang, a pesar de explicar diversas características observadas en el universo, tales como la expansión descrita por la ley de Hubble y la presencia de una radiación cósmica de fondo, no logra explicar algunas otras cuando se intenta describir el universo temprano con este modelo, como la casi perfecta homogeneidad del CMB que indica que el universo estaba en equilibrio térmico instantes antes del desacople [6].

Por otro lado, se sabe que la temperatura se puede representar en función del redshift de manera proporcional [11]

$$T \propto (1 + z) \text{ K.}$$

Además, como el universo temprano estaba dominado por la radiación, la presión obedece la forma

$$p = \frac{\rho c^2}{3},$$

que al sustituir en la ecuación de fluido 2.11 y resolviendo para el factor de escala, se obtiene lo que se conoce como la segunda solución clásica cosmológica, donde $a \sim t^{1/2}$, lo cual concluye que el parámetro de Hubble es

$$H = \frac{m_{Pl} t_{Pl}}{2t},$$

y usando la ecuación de Friedmann con este parámetro, se puede calcular la temperatura dado un desplazamiento al rojo, y la edad del universo para una temperatura dada es inversamente proporcional al cuadrado de esta

$$t \propto \frac{1}{T^2}.$$

Todo esto indica que el universo primigenio era un plasma con una temperatura gigantesca y que estaba dominado por la radiación.

En $t = 0$, o sea, el momento del big bang, el universo se reduce a una singularidad (un punto de temperatura y densidad de energía infinitas), y la métrica se vuelve singular lo cual hace que la relatividad general se vuelva

incapaz de describirlo en ese momento, así el modelo estándar cosmológico se vuelve insuficiente. Es por esto que se introduce la *inflación*, cuya motivación histórica surgió sobre bases más filosóficas acerca de la cuestión de si las condiciones iniciales requeridas para el hot big bang parecen demasiado precisas para considerarse probables.

Algunos de los problemas del modelo cosmológico estándar se enuncian a continuación.

- *Problema del horizonte.* En la teoría convencional del Big Bang, la distancia comóvil en la cual se tienen interacciones causales antes del desacople era de $180\Omega_0^{1/2}h^{-1}\text{Mpc}$ y la distancia que la luz viaja luego del desacople en un universo plano es de $5820h^{-1}\text{Mpc}$ (véase [16]), considerablemente mayor a la anterior en el momento del desacople. En esta teoría no existe ningún motivo para pensar que dos puntos cualesquiera en el cielo, cuya separación angular es mayor dos grados, hayan estado en contacto causal en algún momento, no obstante, se observa que tienen una temperatura prácticamente idéntica, a una altísima precisión.
- *Problema de la planitud.* Actualmente se sabe, gracias a las observaciones disponibles, que el universo es prácticamente espacialmente plano. El parámetro de densidad total de energía material del universo es de $\Omega_{tot} = \Omega_0 + \Omega_\Lambda$, a partir de la ecuación 2.8 y añadiendo las barras de módulo a la misma, se obtiene

$$|\Omega_{tot}(t) - 1| = \frac{|K|}{a^2 H^2}, \quad (2.25)$$

cuyo valor cae dentro del intervalo $[0.5, 1.5]$. La interpretación geométrica de este resultado es que el universo está muy cerca de ser espacialmente euclidiano. Esto implica que, si $\Omega_{tot} = 1$, entonces será así por siempre, de otra forma Ω_{tot} evolucionaría con el tiempo. Sería interesante observar qué ocurriría de ser cierta la última premisa. Para esto, es necesario considerar los casos en los que el universo está dominado por la radiación, es decir

$$a^2 H^2 \propto t^{-1},$$

y en el que está dominado por la materia, o sea

$$a^2 H^2 \propto t^{-2/3},$$

lo cual implica que la ecuación 2.25 se convierta en

$$|\Omega_{tot} - 1| \propto t$$

y

$$|\Omega_{tot} - 1| \propto t^{2/3}$$

respectivamente. En cualquiera de estos casos, la diferencia entre Ω_{tot} y 1 es una función creciente del tiempo, lo cual dice que la geometría plana es una situación inestable en el universo, pues con cualquier desviación de este valor, por muy pequeña que sea, llevaría al universo a una curvatura muy rápidamente. Las mediciones dicen que el valor actual del parámetro de densidad hoy día es de aproximadamente 0.99, muy cercano a uno, lo cual implica que, de acuerdo a esta evolución de Ω_{tot} , en el pasado debió ser más cercano a uno de lo que ya es, por ejemplo, en el momento de la nucleosíntesis, para obtener el universo que se tiene hoy, el parámetro de densidad total debió diferir de uno como sigue

$$|\Omega_{NS}(t) - 1| \leq 10^{-18}.$$

Este valor para el parámetro de densidad material tan dramáticamente cercano a uno no puede ser predicho por el modelo cosmológico estándar del universo, sino supuesto como una condición inicial de muchas otras posibles, no obstante, casi todas las demás condiciones iniciales conducen a un universo de geometría positiva que colapsa casi de inmediato o a un universo hiperbólico que tiende a divergir y a enfriarse por debajo de los 3K durante su primer segundo de existencia. No parece haber alguna razón para preferir una condición inicial tan especialmente peculiar como esta [16].

- *Problema de la formación de estructuras.* Debido a la manera en la cual las estructuras a gran escala en el universo observable están distribuidas sugiere la presencia de inhomogeneidades en el universo primigenio que vendrían a ser las “semillas” de las estructuras de materia. No es posible proporcionar un mecanismo para la formación causal de estructuras en el modelo cosmológico estándar.

- *Problema de los defectos topológicos.* Estos son causados por transiciones de fase debidas a las altísimas energías durante épocas tempranas del universo, de ser esto cierto, se deberían observar ciertas anomalías en el universo, algo que no ha ocurrido hasta ahora.

Inflación

Como ya se mencionó, para que el modelo cosmológico estándar concuerde con las observaciones y además sea capaz de realizar predicciones acerca la dinámica del universo, es necesario imponer ciertas condiciones iniciales, como la de la del valor tan preciso del parámetro de densidad de energía en el inicio del universo para obtener la geometría espacial euclidiana que se observa. Los problemas con este modelo son que las condiciones iniciales necesarias parecen ser prácticamente imposibles, y además, no es capaz de describir la física durante el primer segundo después del big bang.

Los modelos inflacionarios inicialmente propuestos por Guth (1981), Albrecht y Schteinhardt (1982) y Linde (1982,1983) solucionan estos problemas además de corresponder a escalas de energía superiores a aquella dominante durante el universo primigenio de un segundo de edad. La teoría inflacionaria no es un reemplazo para el Hot Big Bang sino un añadido para solucionar los problemas de este en etapas tempranas del universo.

La *inflación* (véase [7], [11]) se define como una época muy temprana del universo en la cual el factor de escala experimentó un crecimiento de forma brutalmente exponencial, o sea,

$$\ddot{a}(t) > 0. \tag{2.26}$$

Esto ocurriendo en un intervalo de tiempo muy corto. La duración de este fenómeno debe ser la adecuada para solucionar los problemas anteriores, mientras que la época en la cual ocurrió depende de cada modelo inflacionario.

La condición anterior quiere decir que, a partir de la ecuación 2.12, se llega a

$$\rho c^2 + 3p < 0,$$

también llamada *condición inflacionaria*, y como se considera positiva la densidad de energía, entonces se requiere de una presión negativa. La física de partículas ya propone algunas ideas acerca de cómo pudo haber surgido tal presión

$$p < \frac{-\rho c^2}{3}. \quad (2.27)$$

Esta condición se puede obtener a partir de las ecuaciones 2.7 y 2.11.

Los problemas de horizonte y planitud de la cosmología estándar del Big Bang surgen porque, en este marco, el radio comóvil de Hubble aumenta de manera estricta debido a la ecuación 2.8, donde $\rho_c = 3M_{Pl}^2 H^2$. Esto sugiere que los problemas del big bang se pueden resolver con una idea muy simple, la cual consiste en invertir el comportamiento del radio comóvil de Hubble, en otras palabras, visto en coordenadas fijas a la expansión, el universo observable se encogería durante la inflación debido a que la escala característica ocupa una menor región de coordenadas a medida que el tiempo avanza. Si la inflación ocurre, entonces es posible afrontar los problemas mencionados para el modelo del Big Bang.

Se define el *horizonte comóvil* o *tiempo conforme* como la integral logarítmica del radio comóvil de Hubble

$$\tau = \int_0^a d \ln a' \frac{1}{a' H(a')}. \quad (2.28)$$

Si las distancias entre partículas son superiores a τ , entonces nunca se han podido comunicar unas con otras. Ahora, si tales distancias son mayores que $(aH)^{-1}$ entonces no se pueden comunicar ahora. Esta es la diferencia entre el horizonte comóvil τ y el radio comóvil de Hubble $(aH)^{-1}$, la cual es crucial para los modelos inflacionarios y resulta ser de gran importancia.

Solución al problema del horizonte

A partir de la ecuación 2.28, si el radio comóvil de Hubble en el universo temprano fuera mucho mayor de lo que es ahora, de modo que τ haya obtenido la mayor parte de su contribución desde los primeros momentos,

entonces es posible que τ sea mucho mayor que $(aH)^{-1}$ hoy en día, de tal manera que las partículas no pueden comunicarse hoy, pero estuvieron en contacto causal en el principio. Por tanto, es necesaria una fase de radio de Hubble decreciente. Dado que H se puede considerar constante mientras que a crece de manera exponencial durante la inflación, se concluye que el radio comóvil de Hubble disminuye durante esta época, tal como se mencionó. Un horizonte comóvil decreciente implica que las grandes escalas que ingresan al universo en el presente estaban dentro del horizonte antes de la inflación. De esta manera la homogeneidad espacial es un resultado de la física causal antes de que ocurriera la expansión inflacionaria.

Solución al problema de la planitud

Agregando el parámetro de curvatura a la ecuación 2.8, queda

$$1 - \Omega = \frac{-K}{(aH)^2}. \quad (2.29)$$

De las observaciones de hoy en día se sabe que $1 - \Omega_0 \leq 1 \times 10^{-2}$ (véase [14]). Así que, para explicar la planitud del universo observado actualmente, habría que explicar por qué se tienen valores tan extremos de $1 - \Omega$ durante sus primeros instantes. Por ejemplo, cuando el universo tenía aproximadamente la edad de $t \sim 10^{-35}$ s, en la época de la gran unificación, se estima un valor de $1 - \Omega_{\text{GUT}} \sim 10^{-55}$. De la ecuación 2.29, como durante la inflación el radio comóvil de Hubble decrece, entonces el universo se “aplana”.

Solución al problema de la formación de estructuras.

Como ya se mencionó, es necesario un mecanismo que explique y sea capaz de predecir la formación de estructuras de materia en el universo después del Big Bang.

El mecanismo inflacionario posiblemente se deba a la transición de fase del vacío cuántico, que tuvo cabida aproximadamente a los $\sim 10^{-35}$ segundos de vida del universo. En aquella fracción de segundo, desaparece el concepto de partículas de campos reales, y en su lugar hay partículas virtuales, que aparecen y desaparecen según el principio de incertidumbre de Heisenberg [15], que establece que, en un intervalo de tiempo, existe un cuanto de energía que

no puede ser cero, es decir

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2},$$

así que había una ebullición de cuantos virtuales de energía apareciendo y desapareciendo, lo cual provocó que el vacío cuántico terminara desintegrándose debido a esta gran inestabilidad y a su energía repulsiva, por ende, deja de ser un campo fundamental al sufrir una transición de fase que fue la responsable de que el universo se expandiera de manera desenfrenada, iniciando así el periodo inflacionario.

Las fluctuaciones del vacío cuántico quedaron impresas en la métrica del espacio-tiempo, y eventualmente, se convirtieron en fluctuaciones reales de densidad de energía. Este es el origen del CMB. La inflación extiende estas perturbaciones de densidad imprimiéndolas en el universo, dando cabida a la formación de estructuras que se pueden observar, tales como galaxias, cúmulos y súper cúmulos, logrando formarse como se conocen actualmente gracias a la inestabilidad gravitacional, pues, si la materia se junta para formar estructuras es necesaria una fuerza de largo alcance y la gravedad es la única que cumple esta característica.

Para el momento del desacople, cuando el universo tenía alrededor de 350,000 años de edad, había pequeñas irregularidades en la distribución de materia debidas a las fluctuaciones del vacío cuántico impresas por la inflación, por tanto, había regiones más densas que otras y así ejercían una mayor fuerza gravitacional alrededor de estas que otras zonas de menor densidad, así que tendían a atraer más material alrededor. Este material extra hacía aún más densas estas zonas, incrementando su atracción gravitacional. Así, una distribución irregular de materia es *inestable* bajo la influencia de la atracción gravitacional, aumentando su irregularidad con el tiempo.

2.1.11 Medición de la cantidad de Inflación e Inflación necesaria

El cociente del factor de escala $a(t)$ en el tiempo en el que termina la inflación, y su valor en el momento del inicio de esta, es decir, cuando \ddot{a} deja de ser positiva en ambos casos, normalmente resulta ser una cantidad muy grande. Con el propósito de medir la cantidad de inflación, se toma el logaritmo natural de este cociente,

$$N(t) := \ln \left[\frac{a(t_f)}{a(t_0)} \right]. \quad (2.30)$$

de esta manera, $N(t)$ es la cantidad de inflación medida en e-folds.

Como la estructura causal del espacio-tiempo está determinada por la luz, es necesario examinar la trayectoria de los fotones para saber cuáles regiones estarían conectadas causalmente. Para lograrlo con mayor sencillez se toma la definición del tiempo conforme 2.28 y, dado que $\frac{d}{da} \ln a = \frac{1}{a}$, se obtiene

$$\tau = \int_0^a d \ln a \frac{1}{aH(a)} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H} = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.31)$$

Si se realiza la transformación de coordenadas para este tiempo conforme, la métrica FLRW queda de la siguiente manera

$$ds^2 = a(\tau)^2 [-d\tau^2 + d\chi^2 + \Phi_K(\chi^2) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)].$$

Los fotones viajan a lo largo de líneas de mundo cuyo tiempo propio es igual a cero, llamadas geodésicas luxoides, pues cumplen la condición establecida en la página 20, $ds^2 = 0$ para la métrica FLRW en coordenadas conformes.

Debido al principio cosmológico, además de homogéneo, el universo es isótropo así que la propagación de los fotones es radial y no depende de las componentes acimutal ϕ y polar θ , por tanto

$$\begin{aligned} ds^2 &= a(\tau)^2 [-d\tau^2 + d\chi^2] = 0 \\ d\chi^2 &= d\tau^2 \\ \chi(\tau) &= \int \pm d\tau = \pm\tau + \text{cte}, \end{aligned}$$

que es una línea recta de pendiente uno, en el plano τ, χ .

El cono de luz correspondiente a un suceso en el espacio-tiempo se construye con todas las geodésicas luxoides que pasan por él.

Conexión causal

Las partículas con masa recorren trayectorias geodésicas temporaloides, que cumplen $ds^2 > 0$, y están dentro del cono de luz. Las regiones causalmente desconexas en el espacio-tiempo están separadas por intervalos espacialoides, es decir, que cumplen $ds^2 < 0$ y se encuentran afuera del cono de luz. Como cada punto en el espacio-tiempo tiene asociado un cono de luz que determina su pasado causal, si se fija una superficie $\tau = \text{cte}$, para que dos puntos dentro de esta hayan estado en contacto causal, y por tanto en equilibrio térmico, sus respectivos conos de luz en el pasado deben intersectarse en el momento del Big Bang $\tau = 0$. Sin embargo, hay alrededor de 10^5 regiones en la superficie de dispersión final del CMB causalmente desconexas [13] que no estarían en equilibrio térmico, de ahí el problema del horizonte.

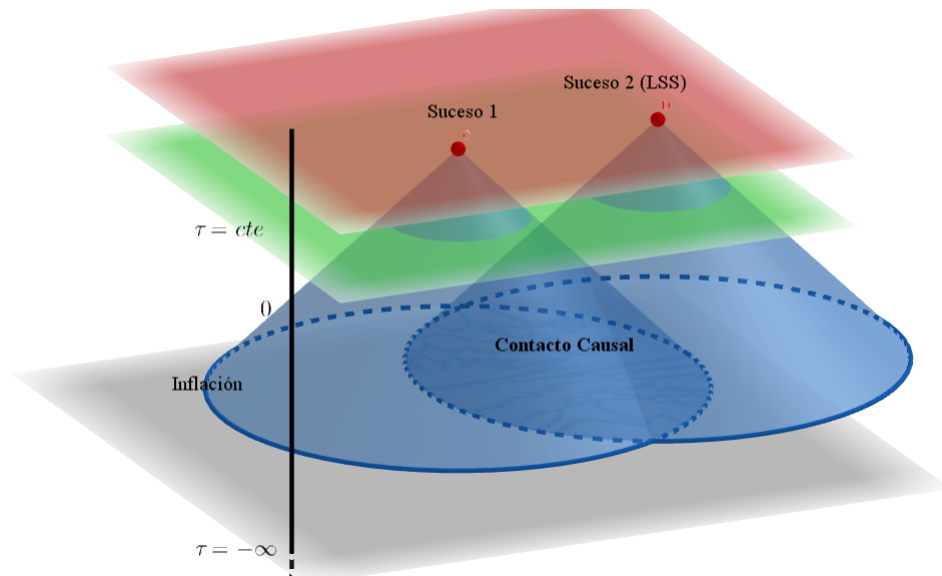


Figura 2.3: Conos de luz pasados pertenecientes a dos sucesos, 1 y 2; temporaloide (adentro) y luxoide (en el borde, Last Scattering Surface) respectivamente, dentro del plano $\tau = cte$. Ambos sucesos respecto al cono de luz pasado de un suceso en el plano del tiempo conforme actual τ_0 .

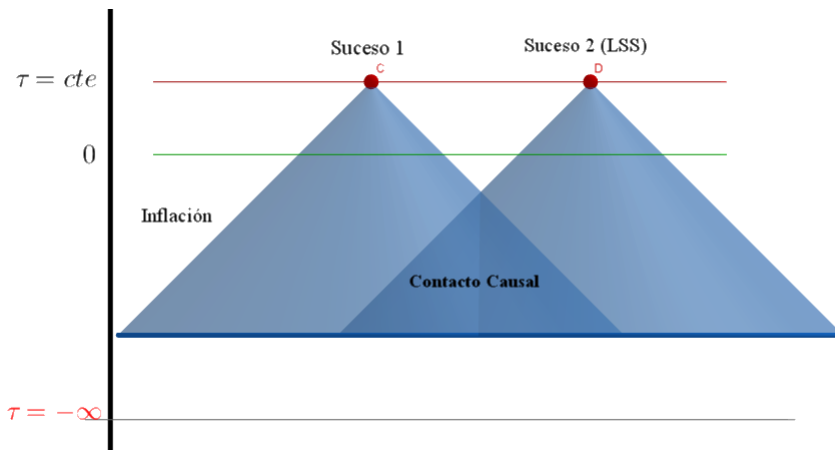


Figura 2.4: Visto de frente, en $\tau = 0$ los conos de luz pasados de los sucesos no se intersectan sino en algún tiempo anterior τ_0 .

Para la época de inflación, si se supone que el parámetro de Hubble es constante, el factor de escala en función del tiempo conforme es

$$a(\tau) = -\frac{1}{H\tau}.$$

Con esta aproximación, si $\tau = 0$ la inflación persiste de manera indefinida. Dado que la inflación debe terminar en algún momento, se establece que este instante no es el inicio del Big Bang sino el final de la etapa inflacionaria, así, la singularidad $a(\tau) = 0$ se alcanzaría en un tiempo infinito menor como se muestra en la figura 2.4. El tiempo conforme se extiende a valores negativos y en $\tau = 0$ el final de la inflación crea un aparente Big Bang. Esto implica que los conos de luz de puntos en la superficie de dispersión final del CMB se intersectan en un tiempo menor y, de ser así, entonces estarían en regiones causalmente conexas para lograr el equilibrio térmico que manifiestan, lo que explicaría la cuasi uniformidad del CMB. Esto es posible si $a(t_f)/a(t_0)$ es del orden de $\sim 10^{60}$, o sea, que la inflación dure al menos unos 60 e-folds [13]

$$\ln \left[\frac{a(t_f)}{a(t_0)} \right] = 60. \quad (2.32)$$

2.1.12 Campo Escalar

Debido a la condición 2.27, para que un periodo inflacionario tenga cabida en un modelo cosmológico se necesita algún tipo de materia con presión negativa. Un *campo escalar* ϕ (véase [11]), denominado también como *campo inflatón* o simplemente inflatón, puede cumplir con este requisito ya que posee la propiedad de tener una energía potencial con un redshift extremadamente lento a medida que el universo se expande [16], lo que corresponde a una ecuación de estado con una presión negativa. Los modelos más sencillos de inflación incluyen un solo campo escalar ϕ que se encarga de parametrizar la evolución temporal de la densidad de energía inflacionaria.

Los campos escalares están presentes en el Modelo Estándar de la física como partículas de espín cero, tales como el bosón de Higgs. Para encontrar la ecuación de movimiento de ϕ , es necesario definir una lagrangiana, de manera tal que la variación de la acción correspondiente resulte en un sistema de ecuaciones.

Un tensor energía-momento se puede obtener también a partir de un principio variacional, usando la acción:

$$S_m = \int L_m \sqrt{-g} d^4x,$$

donde g es el determinante de la métrica del espacio-tiempo y $\sqrt{-g}d^4x$ es el elemento invariante de cuadri-volumen en la variedad considerada [21]. Si se conoce la acción S_m y, por ende, la lagrangiana que describe la componente de materia, realizando la variación de esta respecto a la métrica se obtiene el tensor de energía-momento:

$$T_{\mu\nu} := \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}L_m, \quad (2.33)$$

cuyas componentes corresponden a:

- T_0^0 : densidad total de energía ρ
- T_j^0 : densidad de momento en la dirección j
- T_j^j : presión isótropa p en la dirección i , para $i = j$
- T_j^i : flujo de momento entre las direcciones i y j , para $i \neq j$,

corriendo i, j desde 1. Si la materia en el universo se comporta como un campo escalar con una densidad lagrangiana L_ϕ [11]

$$L_m = L_\phi = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi), \quad (2.34)$$

entonces la dinámica de un campo escalar mínimamente acoplado con la gravedad se describe a partir de la acción:

$$S = S_{\text{EH}} + S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \right], \quad (2.35)$$

que es la suma de la acción gravitacional de Einstein-Hilbert S_{EH} y la acción de un campo escalar cuyo término cinético canónico es S_ϕ . Aquí, $V(\phi)$

corresponde a la auto interacción del campo escalar, es decir, su energía potencial.

Haciendo la variación (véase el apéndice A.1)

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0,$$

se puede obtener la densidad de energía y la presión para un campo escalar considerando la definición 2.33 y la lagrangiana 2.34

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(\phi)} &\equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = -2 \frac{\partial L_\phi}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} L_\phi \\ T_{\mu\nu}^{(\phi)} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi + V(\phi) \right). \end{aligned}$$

Usando la métrica 2.24 para $g_{\mu\nu}$, el tensor de energía-momento del campo escalar toma la forma 2.9. Por tanto, se puede considerar que el campo ϕ es un caso especial de un fluido perfecto cuyas líneas de mundo son ortogonales a hipersuperficies constantes $\phi = \text{cte}$

$$u_\mu = -\frac{\partial_\mu \phi}{\dot{\phi}}.$$

Las densidades de energía y presión son

$$\begin{aligned} \rho_\phi &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \\ p_\phi &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi), \end{aligned} \tag{2.36}$$

donde el término $\frac{1}{2} \dot{\phi}^2$ representa la energía cinética del inflatón. Como se considera que ϕ es homogéneo e isótropo, los términos proporcionales a $(\nabla\phi)^2/a^2$ se omiten en estas densidades ya que el campo escalar es función únicamente del tiempo.

A partir de las ecuaciones 2.36 se formula la ecuación de estado

$$w_\phi := \frac{p_\phi}{\rho_\phi}.$$

Si la energía potencial domina sobre el término cinético, entonces el campo escalar puede proporcionar la presión negativa que requiere el proceso de inflación.

Suponiendo una geometría espacialmente plana (FLRW), la ecuación de movimiento para el campo escalar, conocida como la ecuación de Klein-Gordon [18], se obtiene tomando la variación de la acción 2.35 respecto al campo escalar ϕ

$$\frac{\delta S_\phi}{\delta \phi} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \phi) + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (2.37)$$

que también se puede escribir en su forma covariante

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi = \frac{\partial V}{\partial \phi}.$$

2.2. Métodos Numéricos

Dado que no existe un método general para resolver de forma explícita cualquier ecuación diferencial, resulta necesario en ocasiones echar mano de métodos sistemáticos para obtener aproximaciones numéricas de las soluciones mediante un análisis cuantitativo, pues muchas ecuaciones diferenciales que surgen de aplicaciones de problemas reales no pueden ser resueltas de manera exacta.

Es posible usar *métodos numéricos* [19] para obtener soluciones aproximadas lo suficientemente precisas para ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales. Tales métodos abordan el problema de elegir condiciones iniciales de la siguiente manera:

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (2.38)$$

Esta resulta en un conjunto de aproximaciones para $y(t)$, a un paso h

$$t_n = t_0 + nh, \quad n \in \mathbb{N}, \quad h \in \mathbb{R}^+,$$

con h normalmente constante para valores discretos de t , aunque no es necesario que lo sea.

Existen varios métodos numéricos. Estos se pueden clasificar en métodos de un solo paso, como los métodos de Euler, Newton-Raphson y Runge-Kutta, que para el cálculo de cada punto se utiliza la información del anterior. Por otro lado, están los métodos de multipaso, como los métodos de Adams-Bashford y Adams-Moulton [20], entre otros, que utilizan la información de más de un valor previo para construir un polinomio interpolante [ver 19] que sea capaz de aproximar la función $f(t, y)$. Por esta razón, estos últimos resultan ser más eficientes.

Cada método es determinado por los coeficientes a_0, \dots, a_{s-1} y b_0, \dots, b_s de una combinación lineal de los vectores y_n y $y'_n = f(t_n, y_n)$

$$\begin{aligned} & y_{n+s} + a_{s-1}y_{n+s-1} + a_{s-2}y_{n+s-2} + \dots + a_0y_n \\ & = h [b_s f(t_{n+s}, y_{n+s}) + b_{s-1} f(t_{n+s-1}, y_{n+s-1}) + \dots + b_0(t_n, y_n)], \end{aligned} \quad (2.39)$$

usada para calcular el valor de la función incógnita con un paso definido.

Para calcular de manera directa la función y_{n+s} , es necesario que $b_s = 0$ en la fórmula anterior. Cuando esto ocurre, a este tipo de métodos multipaso se les conoce como *métodos explícitos*.

En caso contrario, $b_s \neq 0$, entonces la función y_{n+s} dependerá del valor de $f(t_{n+s}, y_{n+s})$, y es por esto que se llaman *métodos implícitos*. La ecuación se debe resolver para y_{n+s} .

Es común que, para predecir el valor de y_{n+s} , se eche mano de algún método explícito multipaso, para después usarlo en una fórmula implícita y así corregir el resultado obtenido. A este tipo de algoritmos se les llama *métodos predictores-correctores* [20].

2.2.1 Método de Euler

Partiendo de un punto inicial (t_0, y_0) , sea $M(t)$ la única solución de 2.38 en un intervalo centrado en t_0 , y puntos equidistantes

$$t_n = t_0 + nh. \quad (2.40)$$

La pendiente de la recta tangente a la curva solución 2.38, en el punto (t_0, y_0) es

$$\frac{dy}{dt} = f(t_0, y_0).$$

Así, la tangente es

$$y = f(t_0, y_0)(t - t_0) + y_0.$$

Con este resultado, se hace una aproximación de $M(t)$, que, evaluada en $t_1 = t_0 + h$

$$M(t_1) \approx y_1 = y_0 + h f(t_0, y_0).$$

Luego, se construye la recta cuya pendiente viene dada por el campo de direcciones en (t_1, y_1) , partiendo del mismo punto, o sea, de pendiente $f(t_1, y_1)$, de manera iterativa. O dicho con la fórmula recursiva

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n + h \\ y_{n+1} &= y_n + h f(t_n, y_n). \end{aligned} \quad (2.41)$$

2.2.2 Método de Euler Mejorado

De 2.38, se tiene que

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{dy}{dt} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y) dt$$

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y) dt. \quad (2.42)$$

Usando el método del trapecio, es decir, aproximando la función f a un polinomio de grado uno mediante el uso del polinomio de interpolación de Newton-Lagrange [19]

$$f(t) = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} (t - t_0) + f(t_0) \quad (2.43)$$

para resolver la integral del lado derecho de la ecuación 2.42. Ahora, integrando 2.43 en dt

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} (t - t_0) + f(t_0) \right] dt \\ &= \frac{f(t_1) - f(t_0)}{2(t_1 - t_0)} t^2 \Big|_{t_0}^{t_1} - \left[\frac{f(t_1) - f(t_0)}{(t_1 - t_0)} t_0 t \right] \Big|_{t_0}^{t_1} + f(t_0) t \Big|_{t_0}^{t_1} \\ &= \frac{f(t_1) - f(t_0)}{2(t_1 - t_0)} (t_1^2 - t_0^2) - \left[\frac{f(t_1) - f(t_0)}{(t_1 - t_0)} (t_0 t_1 - t_0^2) \right] + f(t_0) (t_1 - t_0) \\ &= \frac{f(t_1) - f(t_0)}{2} (t_1 + t_0) - \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} t_0 (t_1 - t_0) + f(t_0) (t_1 - t_0) \\ &= \frac{1}{2} [f(t_1) t_1 + f(t_1) t_0 - f(t_0) t_1 - f(t_0) t_0 - 2f(t_1) t_0 + 2f(t_0) t_1] \\ &= \frac{1}{2} \{t_1 [f(t_1) + f(t_0)] - t_0 [f(t_1) + f(t_0)]\} \end{aligned}$$

$$= \frac{t_1 - t_0}{2} [f(t_1) + f(t_0)]. \quad (2.44)$$

Volviendo a 2.42, y usando el método del trapecio se tiene

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y) dt = \frac{h}{2} [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})]. \quad (2.45)$$

Es posible predecir el valor de y_{n+1} modificando el esquema anterior usando el método de Euler 2.41. Entonces la forma recursiva del Método de Euler mejorado queda así:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2} \{f(t_n, y_n) + f[t_n + h, y_n + h f(t_n, y_n)]\}.$$

2.2.3 Método de Adams-Bashforth

Considerando las condiciones 2.38, y del método de Euler mejorado 2.42 echando mano ahora de una manera alternativa a la regla del trapecio para aproximar la integral del lado derecho de la ecuación de tal método, se considera lo siguiente:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y) dt \approx h [Af_n + Bf_{n-1} + Cf_{n-2} + Df_{n-3} + Ef_{n-4}] \quad (2.46)$$

Si se impone que la integral sea exacta, es decir, que los valores de la función con la que se está haciendo la aproximación coincidan con algunos puntos de la función original siempre que el integrando de 2.46 sea un polinomio de grado mayor o igual a cuatro, entonces se podrá determinar los coeficientes A, B, C, D y E de 2.46. Tomando como base los polinomios:

$$\begin{aligned} p_0(t) &= 1 \\ p_1(t) &= t \\ p_2(t) &= t(t+1) \\ p_3(t) &= t(t+1) \\ p_4(t) &= t(t+1)(t+2) \\ p_5(t) &= t(t+1)(t+2)(t+3), \end{aligned}$$

suponiendo que $t_n = 0$ y que $h = 1$, al sustituir en 2.46, se tiene:

$$\int_0^1 p_n(t) dt = 1 [Ap_n(0) + Bp_n(-1) + Cp_n(-2) + Dp_n(-3) + Ep_n(-4)]$$

$$\int_0^1 p_0(t) dt = A + B + C + D + E = \int_0^1 1 dt = 1$$

$$\int_0^1 p_1(t) dt = -B - 2C - 3D - 4E = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 p_2(t) dt = 2C + 6D + 12E = \int_0^1 p_3(t) dt = \int_0^1 t(t+1) dt = \frac{5}{6}$$

$$\int_0^1 p_4(t) dt = -6D - 24E = \int_0^1 t(t+1)(t+2) dt = \frac{9}{4}$$

$$\int_0^1 p_5(t) dt = 24E = \int_0^1 t(t+1)(t+2)(t+3) dt = \frac{251}{30}.$$

De aquí resulta el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A + B + C + D + E &= 1 \\ -B - 2C - 3D - 4E &= \frac{1}{2} \\ 2C + 6D + 12E &= \frac{5}{6} \\ -6D - 24E &= \frac{9}{4} \\ 24E &= \frac{251}{30}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Y resolviendo, se obtiene la fórmula de Adams-Bashforth (de orden 5)

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720} [1901f(t_n, y_n) - 2774f(t_{n-1}, y_{n-1}) + 2616f(t_{n-2}, y_{n-2})] \\ + \frac{h}{720} [-1274f(t_{n-3}, y_{n-3}) + 251f(t_{n-4}, y_{n-4})], \end{aligned} \tag{2.48}$$

donde los valores de $f(t_0, y_0)$ se calculan a partir de las condiciones iniciales $f(t_1, y_1)$, $f(t_2, y_2)$, $f(t_3, y_3)$ y $f(t_4, y_4)$, que a su vez se pueden obtener con algún método de un paso, como el método de Euler mejorado.

2.2.4 Método de Adams-Moulton

Normalmente, las fórmulas de Adams-Bashforth se usan junto con otros métodos para aumentar su precisión. Uno de ellos es el *método de Adams-Moulton*, cuya ecuación de recurrencia viene dada como sigue:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720} [251f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 646f(t_n, y_n) - 246f(t_{n-1}, y_{n-1})] + \frac{h}{720} [106f(t_{n-2}, y_{n-2}) - 19f(t_{n-3}, y_{n-3})]. \quad (2.49)$$

Dado que del lado derecho de esta ecuación aparece el término $f(t_{n+1}, y_{n+1})$, entonces se utiliza un algoritmo *predictor-corrector*, que emplea la ecuación 2.48 para predecir una aproximación de y_{n+1} denotada por y^*_{n+1} . Después, se usa la fórmula 2.49 para obtener un valor corregido de y_{n+1} . Así, en la fórmula de Adams-Moulton el valor de $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ se calcula como $f(t_{n+1}, y^*_{n+1})$, de tal manera que el modelo predictor es

$$y^*_{n+1} = y_n + \frac{h}{720} [1901f(t_n, y_n) - 2774f(t_{n-1}, y_{n-1}) + 2616f(t_{n-2}, y_{n-2})] + \frac{h}{720} [-1274f(t_{n-3}, y_{n-3}) + 251f(t_{n-4}, y_{n-4})], \quad (2.50)$$

que se sustituye en el primer término de la ecuación 2.49 para obtener la fórmula del modelo corrector:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720} [251f(t_{n+1}, y^*_{n+1}) + 646f(t_n, y_n) - 246f(t_{n-1}, y_{n-1})] + \frac{h}{720} [106f(t_{n-2}, y_{n-2}) - 19f(t_{n-3}, y_{n-3})]. \quad (2.51)$$

Esta combinación de métodos, también recibe el nombre de *método predictor-corrector de Adams-Bashford-Moulton*.

Capítulo 3

Desarrollo

3.1. Motivación

El enfoque principal de este modelo es combinar una teoría estándar de inflación, es decir, gravitación de Einstein con un campo escalar

$$S_E = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ R + \frac{\kappa^2}{2} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi)] \right\},$$

con una teoría $f(R)$, una función general del invariante de Ricci, que es un tipo de teoría de gravedad modificada, la cual puede incluir invariantes de curvatura de orden superior [21].

$$S_f = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R). \quad (3.1)$$

En este modelo, los primeros dos términos de la función $f(R)$ son $f(R) = R + \alpha R^2$.

Por otro lado, 3.1 también se puede escribir como

$$S_f = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [\varphi R - W(\varphi)].$$

Cuya variación con respecto de φ resulta en la ecuación de movimiento

$$R = W'(\varphi) = Z(\varphi),$$

siendo el término $\varphi R - W(\varphi)$ la transformada de Legendre (véase [22]) de $W(\phi)$.

Se requiere que $Z(\phi)$ sea invertible, de manera que

$$\varphi = Z^{-1}(R) = \varphi(R),$$

y entonces

$$\begin{aligned} S_\varphi &= \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \{ \varphi(R) R - W[\varphi(R)] \} = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) \\ &\Rightarrow f(R) = \varphi(R) R - W[\varphi(R)]. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} f'(R) &= \frac{d\varphi(R)}{dR} R + \varphi(R) - \frac{dW}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi(R)} \frac{d\varphi(R)}{dR} \\ \frac{d\varphi(R)}{dR} &= \frac{dz^{-1}(R)}{dR} = \frac{1}{\frac{dZ(\varphi)}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi(R)}} = \frac{1}{W''(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi(R)}}. \end{aligned}$$

Luego

$$R = Z(\varphi) \Rightarrow Z[\varphi(R)] \equiv R$$

$$f'(R) = \frac{1}{W''(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi(R)}} \left[Z(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi(R)} + \varphi(R) - W'(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi(R)} \frac{1}{W''(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi(R)}} \right] = \varphi(R).$$

Por tanto

$$f(R) = [\varphi W'(\varphi) - W(\varphi)] \Big|_{\varphi=\varphi(R)}$$

es la transformada de Legendre de $W(\varphi)$ y esta es la transformada de Legendre de $f(R)$:

$$W(\varphi) = [Rf'(R) - f(R)]_{R=R(\varphi)},$$

donde $R(\varphi)$ es la solución de $\varphi = f'(R)$

$$f(R) \Big|_{R=R(\varphi)} = \varphi W'(\varphi) - W(\varphi).$$

Además

$$\begin{aligned} W(\varphi) &= \varphi W'(\varphi) - f(R) \Big|_{R=R(\varphi)} = \varphi(R) R \Big|_{R=R(\varphi)} - f(R) \Big|_{R=R(\varphi)} \\ &= [f'(R) R - f(R)]_{R=R(\varphi)}. \end{aligned}$$

3.2. Análisis

A continuación se desarrolla el trabajo principal de esta tesis, que es proponer un modelo cosmológico inflacionario mediante la acción

$$S = \frac{1}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (1 + \alpha\phi) R + \frac{\kappa^2}{2} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi)] \right\} \quad (3.2)$$

y analizar las implicaciones de proponer esta forma específica.

La acción S depende del campo escalar ϕ , y de las componentes del tensor métrico con sus derivadas de primer y segundo orden que están codificadas en el escalar de Ricci R , o sea, la traza del tensor $R_\mu{}^\nu$. Si de $g_{\mu\nu}$ ahora se hace que $g_{00} = c^2 N^2 dt^2$, entonces usando la métrica FLRW, cuyas componentes ahora involucran a las funciones N y a , además del parámetro de curvatura K , a partir de 2.21, se obtiene

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 N^2 dt^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

así

$$ds^2 = -c^2 N^2 dt^2 + a^2(t) g_{ij} dx^i dx^j.$$

El campo escalar ϕ , acoplado en la acción, es independiente del tensor métrico.

Calculando las componentes contravariantes del tensor métrico, los símbolos de Christoffel de segunda clase [9], las componentes del tensor de Ricci, y el escalar de Ricci haciendo $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, se obtiene

$$S = \int dt \frac{1}{\kappa^2} \left[6(1 + \alpha\phi) \left(NaK - N^{-1}a \frac{\dot{a}^2}{c^2} \right) - 6\alpha N^{-1}a^2 \frac{\dot{\phi}}{c^2} \right] + \int dt \left[\frac{1}{2}N^{-1}a^3 \frac{\dot{\phi}^2}{c^2} - Na^3V(\phi) \right], \quad (3.3)$$

que, por definición, tiene unidades de energía por tiempo.

La lagrangiana de esta acción, denotada con \mathcal{L} estilizada, es

$$\mathcal{L} \left(N, a, \dot{a}, \phi, \dot{\phi} \right) = \left\{ \frac{1}{\kappa^2} \left[6(1 + \alpha\phi) \left(NaK - N^{-1}a \frac{\dot{a}^2}{c^2} \right) - 6\alpha N^{-1}a^2 \frac{\dot{\phi}}{c^2} \right] + \frac{1}{2}N^{-1}a^3 \frac{\dot{\phi}^2}{c^2} - Na^3V(\phi) \right\}. \quad (3.4)$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento de cada uno de los tres grados de libertad de S ; N , a y ϕ , se utiliza el principio variacional A.2 en esta acción, para cada una de sus coordenadas generalizadas.

Para $q_{i=1} = N$, la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} \right) = \frac{1}{\kappa^2} \left[6(1 + \alpha\phi) \left(aK + N^{-2}a \frac{\dot{a}^2}{c^2} \right) + 6\alpha N^{-2}a^2 \frac{\dot{\phi}}{c^2} \right] - \frac{1}{2}N^{-2}a^3 \frac{\dot{\phi}^2}{c^2} - a^3V(\phi) = 0.$$

Para $N = 1$, la ecuación de movimiento queda

$$\frac{1}{\kappa^2} \left[6(1 + \alpha\phi) \left(-aK - \frac{a\dot{a}^2}{c^2} \right) - 6\alpha a^2 \frac{\dot{\phi}}{c^2} \right] + \frac{1}{2}a^3 \frac{\dot{\phi}^2}{c^2} + a^3V(\phi) = 0. \quad (3.5)$$

Para $q_{i=2} = a(t)$, la ecuación de Euler-Lagrange $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} \right) = 0$, es

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\kappa^2} \left[6(1 + \alpha\phi) \left(NK - N^{-1} \frac{\dot{a}^2}{c^2} \right) - 12N^{-1} \alpha a \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{c^2} \right] + \frac{3}{2} N^{-1} a^2 \frac{\dot{\phi}^2}{c^2} - 3Na^2 V(\phi) \\ & - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\kappa^2} \left[6(1 + \alpha\phi) \left(-2N^{-1} \frac{a\dot{a}}{c^2} \right) - 6\alpha N^{-1} \frac{a^2 \dot{\phi}}{c^2} \right] \right\} = 0, \end{aligned}$$

que, para $N = 1$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\kappa^2} \left[6(1 + \alpha\phi) \left(K - \frac{\dot{a}^2}{c^2} \right) - 12\alpha a \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{c^2} \right] + \left(\frac{3}{2} a^2 \frac{\dot{\phi}^2}{c^2} \right) - 3a^2 V(\phi) \\ & - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\kappa^2} \left[6(1 + \alpha\phi) \left(-2 \frac{a\dot{a}}{c^2} \right) - 6\alpha \frac{a^2 \dot{\phi}}{c^2} \right] \right\} \\ & = \frac{1}{\kappa^2} \left\{ 6(1 + \alpha\phi) \left[\frac{2}{c^2} (\dot{a}^2 + a\ddot{a}) + K - \frac{\dot{a}^2}{c^2} \right] + \frac{6\alpha}{c^2} (2a\dot{a}\dot{\phi} + a^2\ddot{\phi}) \right\} \\ & \quad + \frac{3}{2} a^2 \frac{\dot{\phi}^2}{c^2} - 3a^2 V(\phi) \\ & = \frac{1}{\kappa^2} \left[6(1 + \alpha\phi) \left(K + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + 2 \frac{a\ddot{a}}{c^2} \right) + \frac{6\alpha}{c^2} (2a\dot{a}\dot{\phi} + a^2\ddot{\phi}) \right] + \frac{3}{2} a^2 \frac{\dot{\phi}^2}{c^2} - 3a^2 V(\phi) = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Para $q_{i=3} = \phi(t)$, la ecuación de movimiento $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0$ es

$$\frac{1}{\kappa^2} \left[6\alpha \left(NaK - N^{-1} \frac{a\dot{a}^2}{c^2} \right) \right] - Na^3 \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\kappa^2} \left(-6\alpha N^{-1} \frac{a^2 \dot{a}}{c^2} \right) + N^{-1} a^3 \frac{\dot{\phi}}{c^2} \right] = 0.$$

Para $N = 1$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\kappa^2} \left[6\alpha \left(aK - \frac{a\dot{a}^2}{c^2} \right) \right] - a^3 \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} - \left\{ \frac{1}{\kappa^2} \left[(-6\alpha) \frac{1}{c^2} (2a\dot{a}^2 + a^2\ddot{a}) \right] + \frac{1}{c^2} (3a^2\dot{a}\dot{\phi} + a^3\ddot{\phi}) \right\} \\ &= \frac{6\alpha}{\kappa^2} \left[\frac{1}{c^2} (2a\dot{a}^2 + a^2\ddot{a}) + aK - \frac{a\dot{a}^2}{c^2} \right] - \frac{1}{c^2} (3a^2\dot{a}\dot{\phi} + a^3\ddot{\phi}) - a^3 \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

Reacomodando se tiene

$$\frac{6\alpha}{\kappa^2} \left(aK + \frac{a\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a^2\ddot{a}}{c^2} \right) - \left(3a^2 \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{c^2} + a^3 \frac{\ddot{\phi}}{c^2} \right) - a^3 \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (3.7)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden formado por 3.5, 3.6 y 3.7, para $a(t)$ y $\phi(t)$ en los valores de K donde se cumple el principio cosmológico, es necesario prescindir de alguna de estas, pues de lo contrario este sistema estaría sobre determinado.

Gracias a que la lagrangiana 3.4 no depende explícitamente del tiempo, se puede concluir que su Hamiltoniana respectiva es una constante en el tiempo, o sea, que se conserva según la ecuación C.7. Así,

$$\mathcal{H} = \dot{a} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} + \dot{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} + \dot{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} - \mathcal{L}(N, a, \dot{a}, \phi, \dot{\phi}) = \text{constante}, \quad (3.8)$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{a} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} &= \frac{1}{\kappa^2} \left[6(1 + \alpha\phi) \left(-2N^{-1} \frac{a\dot{a}^2}{c^2} \right) - 6\alpha N^{-1} a^2 \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{c^2} \right] \\ \dot{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= \dot{\phi} \left[\frac{1}{\kappa^2} \left(-6\alpha N^{-1} \frac{a^2\dot{a}}{c^2} \right) + N^{-1} \frac{a^3\dot{\phi}}{c^2} \right] = \frac{1}{\kappa^2} \left(-6\alpha N^{-1} \frac{a^2\dot{a}\dot{\phi}}{c^2} \right) + \frac{a^3\dot{\phi}^2}{c^2} N^{-1} \\ \dot{N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} &= 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo la lagrangiana 3.4 y las ecuaciones anteriores en 3.8, la hamiltoniana queda

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \frac{1}{\kappa^2} \left[6(1 + \alpha\phi) \left(-2N^{-1} \frac{a\dot{a}^2}{c^2} \right) - 6\alpha N^{-1} a^2 \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{c^2} \right] + \frac{1}{\kappa^2} \left[-6\alpha N^{-1} a^2 \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{c^2} \right] + \\
 &\quad N^{-1} \frac{a^3 \dot{\phi}^2}{c^2} - \frac{1}{\kappa^2} \left[6(1 + \alpha\phi) \left(NaK - N^{-1} \frac{a\dot{a}^2}{c^2} \right) - 6\alpha N^{-1} a^2 \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{c^2} \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} N^{-1} \frac{a^3 \dot{\phi}^2}{c^2} + Na^3 V(\phi) \\
 &= \frac{1}{\kappa^2} \left[6(1 + \alpha\phi) \left(-2N^{-1} \frac{a\dot{a}^2}{c^2} \right) - 6\alpha N^{-1} a^2 \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{c^2} + 6\alpha N^{-1} a^2 \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{c^2} - 6\alpha N^{-1} a^2 \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{c^2} \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{\kappa^2} \left[-6(1 + \alpha\phi) \left(NaK - N^{-1} \frac{a\dot{a}^2}{c^2} \right) \right] \\
 &\quad + N^{-1} \frac{a^3 \dot{\phi}^2}{c^2} - \frac{1}{2} N^{-1} \frac{a^3 \dot{\phi}^2}{c^2} + Na^3 V(\phi) \\
 &= \frac{1}{\kappa^2} \left[6(1 + \alpha\phi) \left(-2N^{-1} \frac{a\dot{a}^2}{c^2} - NaK + N^{-1} \frac{a\dot{a}^2}{c^2} \right) - 6\alpha N^{-1} a^2 \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{c^2} \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{2} N^{-1} \frac{a^3 \dot{\phi}^2}{c^2} + Na^3 V(\phi).
 \end{aligned}$$

Para $N = 1$, la Hamiltoniana es exactamente la ecuación 3.5

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\kappa^2} \left[6(1 + \alpha\phi) \left(-aK - \frac{a\dot{a}^2}{c^2} \right) - 6\alpha a^2 \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{c^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{a^3 \dot{\phi}^2}{c^2} + a^3 V(\phi).$$

Esta condición es un resultado de las ecuaciones de movimiento propias del sistema, lo que implica que la ecuación 3.5 está relacionada con la conservación de la energía (al ser idéntica a la función Hamiltoniana que es una constante de movimiento debido al resultado C.7), por tanto, puede ser deducida a partir las ecuaciones 3.6 y 3.7, que forman el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden:

$$\begin{cases} \frac{1}{\kappa^2} \left[6(1 + \alpha\phi) \left(K + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + 2\frac{a\ddot{a}}{c^2} \right) + \frac{12\alpha}{c^2} a\dot{a}\dot{\phi} + \frac{6\alpha}{c^2} a^2\ddot{\phi} \right] + \frac{3a^2\dot{\phi}^2}{2c^2} - 3a^2V(\phi) = 0 \\ \frac{6\alpha}{\kappa^2} \left(aK + \frac{a\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a^2\ddot{a}}{c^2} \right) - \left(3a^2\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{c^2} + a^3\frac{\ddot{\phi}}{c^2} \right) - a^3\frac{\partial}{\partial\phi}V(\phi) = 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

siendo estas suficientes para describir el sistema físico. Para solucionarlo, se propone el potencial

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + \lambda\phi^4 \\ \frac{\partial V}{\partial\phi} &= m_\phi^2\phi + 4\lambda\phi^3, \end{aligned} \quad (3.10)$$

el cual es una variante de los llamados “modelos de inflación caótica” [13], donde el mínimo del potencial se alcanza en $\phi = 0$.

Una vez solucionando el sistema 3.9, la ecuación 3.5 se resolverá como una consecuencia de la conservación de la energía.

Por otro lado, las unidades de la acción 3.3 ($[S] = kg\,m^2s^{-1}$) implican la siguiente configuración de unidades.

Para la constante de acoplamiento con la materia κ , el parámetro de curvatura K , el factor de escala a , y el campo escalar ϕ ,

$$\begin{aligned} [\kappa^{-2}] &= kg\,m\,s^{-2} \\ [K] &= \text{sin dimensiones} \\ [a] &= m \\ [\dot{a}] &= m\,s^{-1} \\ [\phi] &= kg^{1/2}m^{1/2}s^{-1} \\ [\dot{\phi}] &= kg^{1/2}m^{1/2}s^{-2}. \end{aligned}$$

Para los parámetros de la acción S , α y N ,

$$\begin{aligned} [\alpha] &= \text{kg}^{-1/2} \text{m}^{-1/2} \text{s} \\ [N] &= \text{sin dimensiones.} \end{aligned}$$

Y para los parámetros del potencial $V(\phi)$, m_ϕ y λ

$$\begin{aligned} [m_\phi] &= \text{m}^{-2} \\ [\lambda] &= \text{kg}^{-1} \text{s}^2. \end{aligned}$$

3.2.1 Soluciones para geometrías no euclidianas

Soluciones para una geometría hiperbólica, $K = -1$

El sistema 3.9 e convierte en

$$\begin{cases} \frac{1}{\kappa^2} \left[6(1 + \alpha\phi) \left(-1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + 2\frac{a\ddot{a}}{c^2} \right) + \frac{12\alpha}{c^2} a\dot{a}\dot{\phi} + \frac{6\alpha}{c^2} a^2\ddot{\phi} \right] + \frac{3a^2\dot{\phi}^2}{2c^2} - 3a^2V(\phi) = 0 \\ \frac{6\alpha}{\kappa^2} \left(-a + \frac{a\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a^2\ddot{a}}{c^2} \right) - \left(3a^2\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{c^2} + a^3\frac{\ddot{\phi}}{c^2} \right) - a^3\frac{\partial}{\partial\phi}V(\phi) = 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

cuyas soluciones para $a(t)$ y $\phi(t)$ se obtuvieron mediante el uso de métodos computacionales con el software Wolfram Mathematica (versión 12.0.0) con el método de Adams-Moulton [20] (un método numérico multipaso ya discutido en el Capítulo 2), y luego con extrapolación numérica [19]. Se tiene que, para esta geometría, el factor de escala evoluciona de la siguiente manera

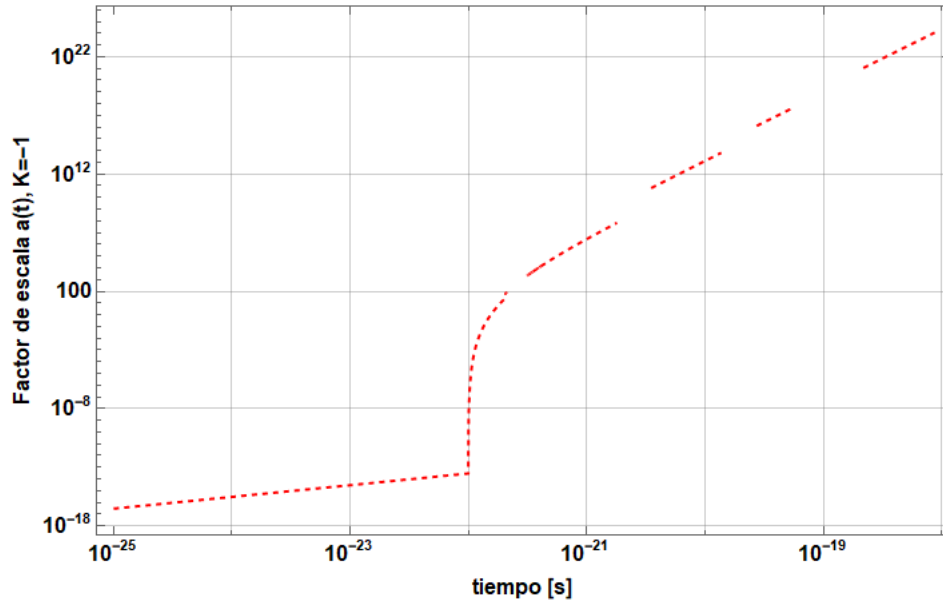


Figura 3.1: Factor de escala para el sistema 3.11 y los parámetros $\alpha = 3.3 \times 10^{-5}$, $m_\phi = 2.3 \times 10^5$, $\lambda = 8 \times 10^5$. Especificando 1,500,000 pasos de cálculo en el software con 30 dígitos de precisión numérica.

Este millón y medio de pasos alcanza su máximo en $t = 9.925491994 \times 10^{-23}$ s, después de este valor, se utiliza el método de *extrapolación* [19]. Este consiste en utilizar dos aproximaciones de la derivada para obtener una tercera con menor índice de error de manera estadística y así predecir cómo se comportaría la gráfica con más pasos de cálculo.

Para esta geometría, el factor de escala seguiría creciendo, entrando a un régimen divergente dominado por la curvatura. No habría una manera de finalizar la etapa inflacionaria.

Soluciones para una geometría esférica, $K = 1$

El sistema 3.9 ahora es

$$\begin{cases} \frac{1}{\kappa^2} \left[6(1 + \alpha\phi) \left(1 + \frac{\dot{a}^2}{c^2} + 2\frac{a\ddot{a}}{c^2} \right) + \frac{12\alpha}{c^2} a\dot{a}\dot{\phi} + \frac{6\alpha}{c^2} a^2\ddot{\phi} \right] + \frac{3a^2\dot{\phi}^2}{2c^2} - 3a^2V(\phi) = 0 \\ \frac{6\alpha}{\kappa^2} \left(a + \frac{a\dot{a}^2}{c^2} + \frac{a^2\ddot{a}}{c^2} \right) - \left(3a^2\frac{\dot{\phi}}{c^2} + a^3\frac{\ddot{\phi}}{c^2} \right) - a^3\frac{\partial}{\partial\phi}V(\phi) = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

De manera similar a la geometría hiperbólica, se usó el método de Adams hasta un máximo de 2,500,000 pasos de cálculo para obtener la evolución temporal del factor de escala como sigue.

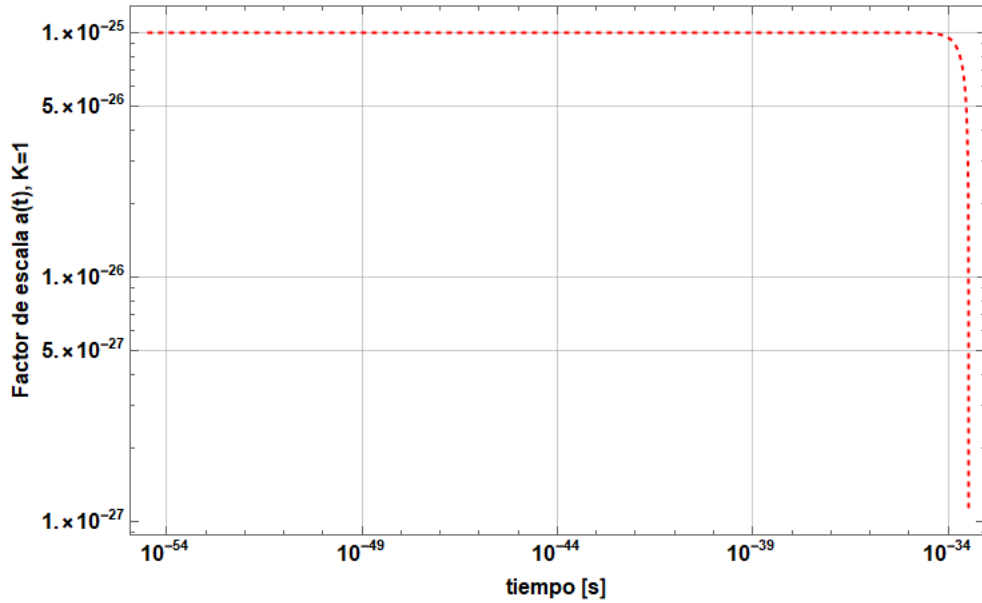


Figura 3.2: Factor de escala para el sistema 3.12 y los parámetros $\alpha = 3.3 \times 10^{-6}$, $m_\phi = 2.3 \times 10^{-5}$, $\lambda = 8 \times 10^0$.

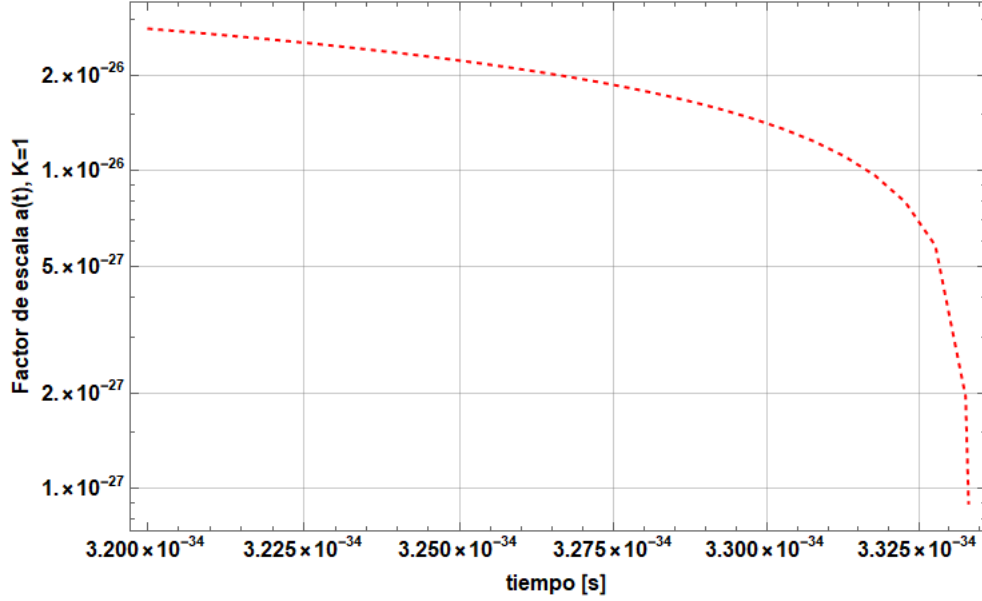


Figura 3.3: Mismo factor de escala para el sistema 3.12 graficado en un intervalo mucho más corto de t . Se puede apreciar mejor la desaceleración de $a(t)$.

Después de estos pasos de cálculo, en $t = 3.333444444629 \times 10^{-34}$ s, se aproximó por extrapolación el comportamiento de $a(t)$, que decrecería rápidamente, frenando la expansión para posiblemente colapsar en tiempos posteriores. Para $K = 1$, este modelo predice un universo cerrado sobre sí mismo, espacialmente esférico, con una tasa de expansión decreciente, dando cabida a un posible colapso del universo.

3.2.2 Soluciones para una geometría euclidiana

Haciendo $K = 0$, la ecuación 3.6 queda

$$\frac{1}{\kappa^2} \left[6(1 + \alpha\phi) \left(\frac{\dot{a}^2}{c^2} + \frac{2a\ddot{a}}{c^2} \right) + \frac{12\alpha}{c^2} a\dot{a}\dot{\phi} + \frac{6\alpha}{c^2} a^2\ddot{\phi} \right] + \left(\frac{3}{2} a^2 \frac{\dot{\phi}^2}{c^2} \right) - 3a^2 V(\phi) = 0.$$

Multiplicando por $\kappa^2/6$, dividiendo entre a^2 , y sabiendo que $\dot{H} + H^2 = \ddot{a}/a$,

$$\left[(1 + \alpha\phi) \frac{1}{c^2} (3H^2 + 2\dot{H}) + \frac{2\alpha}{c^2} H\dot{\phi} + \frac{\alpha}{c^2} \ddot{\phi} \right] + \frac{\kappa^2}{2} \left[\frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right] = 0.$$

Como el último término es casi idéntico a la presión de 2.36, pero con $\phi/2c^2$ llamémosle $p_{c^2\phi}$

$$\left[(1 + \alpha\phi) \frac{1}{c^2} (3H^2 + 2\dot{H}) + \frac{2\alpha}{c^2} H\dot{\phi} + \frac{\alpha}{c^2} \ddot{\phi} \right] + \frac{\kappa^2}{2} p_{c^2\phi} = 0. \quad (3.13)$$

Luego, multiplicando la ecuación 3.7 por κ^2/a^3 , para $K = 0$, y sabiendo que $\ddot{a}/a = \dot{H} + H^2$, se obtiene la ecuación

$$\frac{6\alpha}{c^2} (2H^2 + \dot{H}) - \kappa^2 \left[\frac{1}{c^2} (\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}) + \frac{\partial V}{\partial \phi} \right] = 0. \quad (3.14)$$

Por tanto, el sistema 3.9, es el formado por 3.13 y 3.14:

$$\begin{cases} \left[(1 + \alpha\phi) \frac{1}{c^2} (3H^2 + 2\dot{H}) + \frac{2\alpha}{c^2} H\dot{\phi} + \frac{\alpha}{c^2} \ddot{\phi} \right] + \frac{\kappa^2}{2} p_{c^2\phi} = 0 \\ \frac{6\alpha}{c^2} (2H^2 + \dot{H}) - \kappa^2 \left[\frac{1}{c^2} (\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}) + \frac{\partial V}{\partial \phi} \right] = 0, \end{cases} \quad (3.15)$$

que, sustituyendo el potencial elegido, se convierte en

$$\begin{cases} \left[(1 + \alpha\phi) \frac{1}{c^2} (3H^2 + 2\dot{H}) + \frac{2\alpha}{c^2} H\dot{\phi} + \frac{\alpha}{c^2} \ddot{\phi} \right] + \frac{\kappa^2}{2} \left[\frac{1}{2c^2} \dot{\phi}^2 - \left(\frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + \lambda \phi^4 \right) \right] = 0 \\ \frac{6\alpha}{c^2} (2H^2 + \dot{H}) - \kappa^2 \left[\frac{1}{c^2} (\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}) + m_\phi^2 \phi + 4\lambda \phi^3 \right] = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales no tiene soluciones analíticas, por lo que se recurrió a soluciones numéricas mediante recursos computacionales. Usando el método de Adams, sin extrapolación como en los casos anteriores, además del comando NDSolve, y las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} a(0) &= 0 \\ \dot{a}(0) &= 100 \\ b(0) &= 100 \\ \dot{b}(0) &= 10. \end{aligned}$$

Según la literatura, la inflación iniciaría en un instante, llámese t_1 , cuando el factor de escala es del orden de la longitud de Planck, es decir

$$a(t_1) \sim l_{Pl} = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 10^{-35} \text{ m.}$$

Con estas configuraciones, a continuación se muestra la solución del sistema 3.16 para el factor de escala

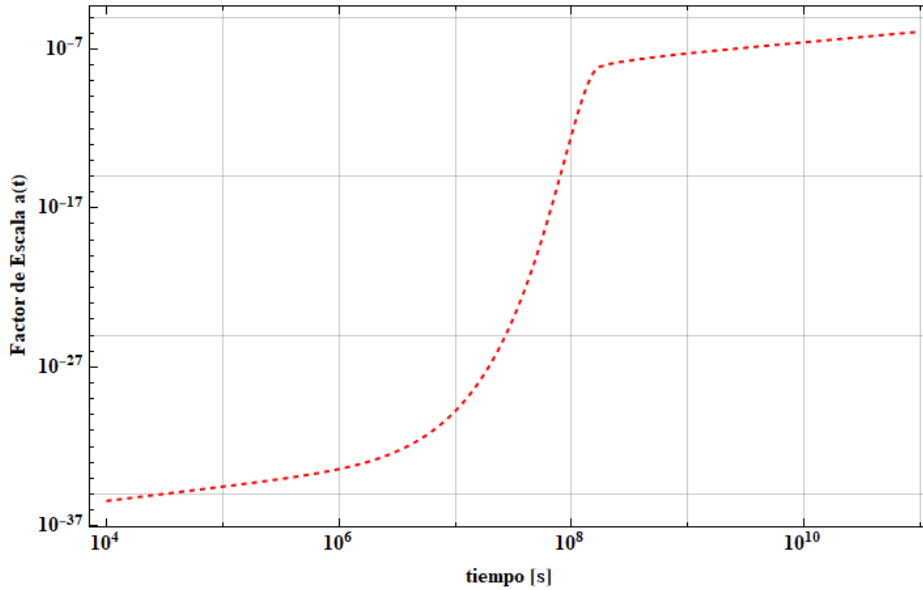


Figura 3.4: Solución para el sistema 3.16. Evolución temporal de $a(t)$ medido en metros, en un periodo inflacionario, cuyos parámetros son; $\alpha = 0.6$, $m_\phi = 1.104 \times 10^6$, $\lambda = 8 \times 10^5$. Es posible ubicar este periodo en el tiempo de Planck ($t \sim 10^{-35}$ s) para valores muy grandes del potencial, y por ende, del campo escalar ϕ y de los parámetros α , m_ϕ y λ .

De acuerdo con la definición de inflación de la página 31, esta debería darse en un periodo de tiempo donde el factor de escala crece de manera brutalmente exponencial, cumpliéndose la ecuación 2.26. Para hallar el intervalo de t para el cual se cumple esta condición, es necesario encontrar los puntos de inflexión de $a(t)$, esto es, los valores de t para los cuales se cumple que $\ddot{a}(t) = 0$, que son puntos donde existe algún cambio de concavidad de la solución. Realizando los cálculos adecuados, con estas condiciones se obtiene que

$$\begin{aligned} t_1 &= 1.260118271542324 \times 10^5 s \\ t_2 &= 1.596996179400665 \times 10^8 s \end{aligned}$$

son puntos de inflexión, donde,

$$\begin{aligned} a(t_1) &= a(1.260118271542324 \times 10^5) \approx 3.74316496996769 \times 10^{-35} \text{m} \\ a(t_2) &= a(1.596996179400665 \times 10^8) \approx 4.701211454993107 \times 10^{-9} \text{m}. \end{aligned}$$

Como para valores de t_a , tales que $t_a < t_1$, resulta $\ddot{a}(t_a) < 0$, y para $t_b \in (t_1, t_2)$, $\ddot{a}(t_b) > 0$, entonces, en el punto de inflexión t_1 , $a(t_1)$ tiene una *concavidad*, y $\ddot{a}(t)$ comienza a tomar valores positivos. Teniendo en consideración que $\ddot{a}(t_b) > 0$, para valores $t_c > t_2$, resulta $\ddot{a}(t_c) < 0$, y $t_b < t_2 < t_c$, entonces en el punto de inflexión t_2 , $a(t_2)$ tiene una *convexidad*. De esta manera \ddot{a} es positiva para valores de t en el intervalo (t_1, t_2) .

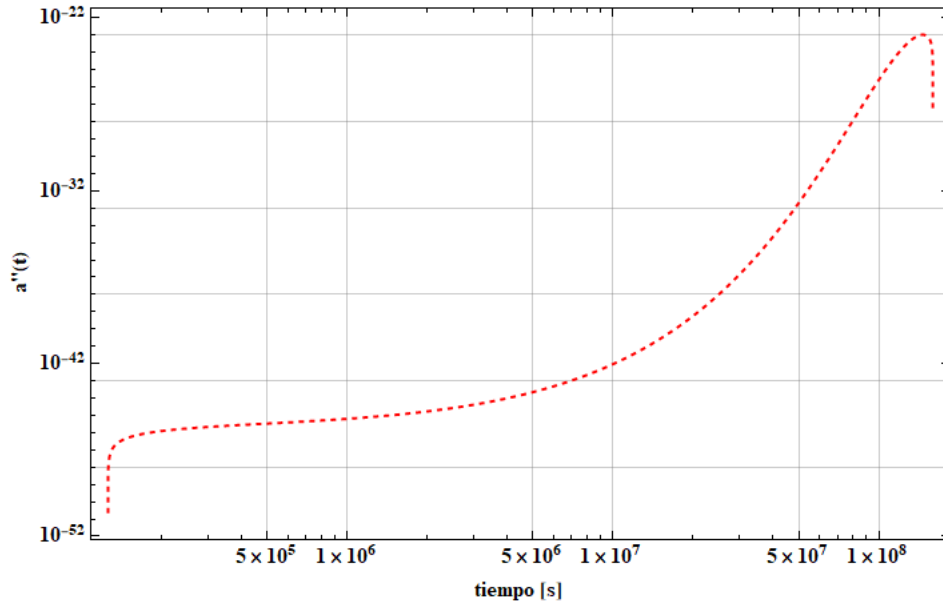


Figura 3.5: Gráfica para $\ddot{a}(t)$ en el intervalo de inflación de $a(t)$. El factor de escala experimenta un crecimiento brutalmente exponencial.

Como se mencionó en la sección final del capítulo 2, si el término cinético $\frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2$ es dominado por el potencial del campo escalar, o sea

$$\frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 < \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + \lambda\phi^4, \quad (3.17)$$

entonces ϕ es capaz de proporcionar presión negativa para llevar a cabo el proceso de inflación.

La solución para $\phi(t)$ del sistema 3.16 se muestra a continuación,

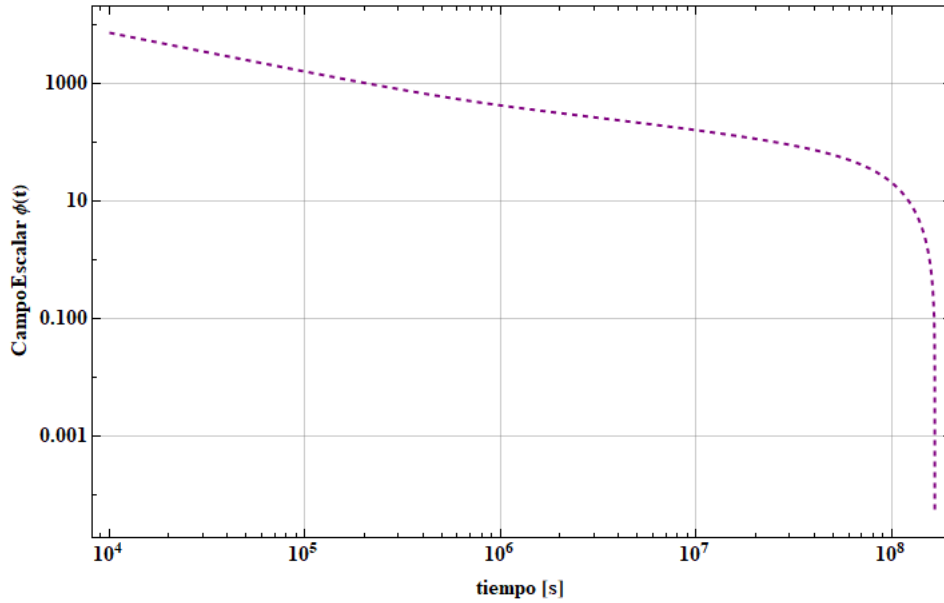


Figura 3.6: Evolución temporal del Campo escalar $\phi(t)$ durante el periodo inflacionario.

Tomando esta solución, se contruyen los términos de la condición 3.17, y con el fin de comparar el término cinético con el potencial $V(\phi)$, se grafican en el intervalo $t_1 < t < t_2$ como sigue,

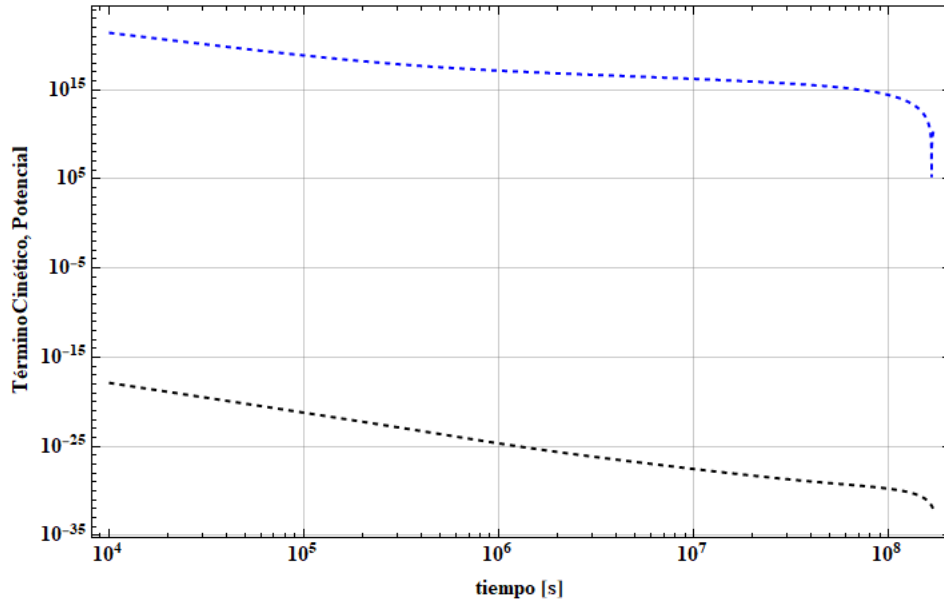


Figura 3.7: El término cinético $\frac{\dot{\phi}^2}{2c^2}$ (negro) y el potencial (azul) $V(\phi) = \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + \lambda\phi^4$. En el intervalo $\{t_1 = 3.83279 \times 10^6, t_2 = 4.84202 \times 10^9\}$ se cumple la condición de inflación 3.17.

También se grafica el radio comóvil de Hubble, que, como se había propuesto con la idea de inflación, es decreciente en el intervalo en el que esta ocurre.

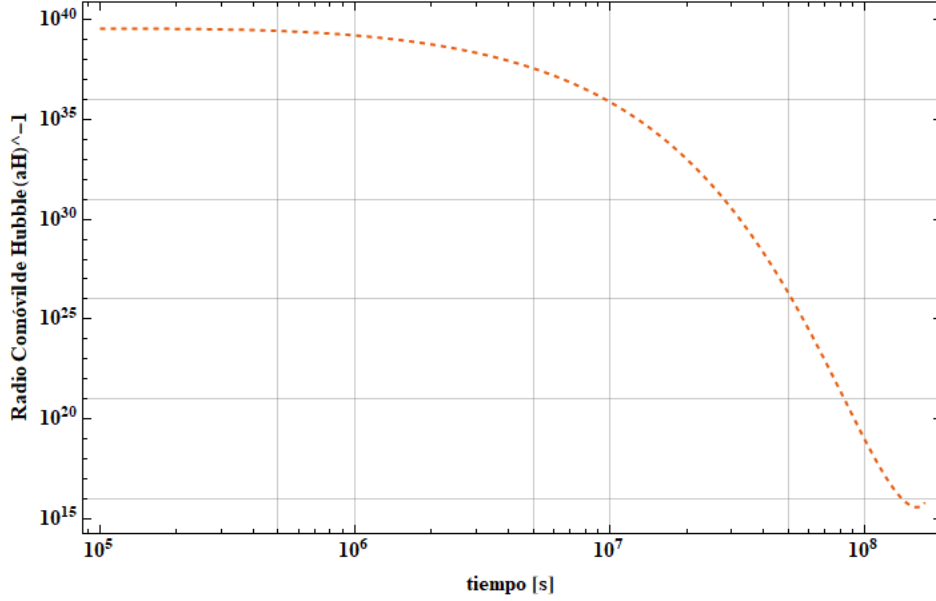


Figura 3.8: Radio comóvil de Hubble $(aH)^{-1}$ en el intervalo de la inflación $\{1.26 \times 10^5 \text{s}, 1.6 \times 10^8 \text{s}\}$. El universo observable se “encoge” durante la inflación debido a que la escala característica ocupa una menor región de coordenadas a medida que el tiempo avanza.

Retomando $a(t_1)$ y $a(t_2)$, se tiene que

$$\ln \left[\frac{a(t_2)}{a(t_1)} \right] = \ln \left(\frac{4.701211454993107 \times 10^{-9}}{3.74316496996769 \times 10^{-35}} \right) = 60.009517 \approx 60 \text{ e-folds},$$

cumpléndose la condición 2.32. Como la inflación dura lo suficiente, entonces, para $K = 0$, nuestro modelo predice la conexión causal de regiones del CMB aparentemente desconexas, haciendo posible la formación de estructura.

A continuación se muestran diferentes valores de los parámetros de la acción 3.3 y del potencial $V(\phi)$ para ciertos e-folds.

Parámetro	40 e-folds	60 e-folds	70 e-folds
α	3.18×10^{-1}	0.6	7.58×10^{-1}
m_ϕ	1.104×10^6	1.104×10^6	1.104×10^6
λ	8×10^5	8×10^5	8×10^5

Tabla 3.1: Cantidad de e-folds para diferentes valores del parámetro α , fijando el resto. La cantidad de inflación es proporcional a este parámetro.

Parámetro	40 e-folds	60 e-folds	70 e-folds
α	0.6	0.6	0.6
m_ϕ	6×10^5	1.104×10^6	1.396×10^6
λ	8×10^5	8×10^5	8×10^5

Tabla 3.2: La inflación también es proporcional, aunque no lineal, al parámetro m_ϕ

Parámetro	40 e-folds	60 e-folds	70 e-folds
α	0.6	0.6	0.6
m_ϕ	1.104×10^6	1.104×10^6	1.104×10^6
λ	2.7×10^6	8×10^5	5.08×10^5

Tabla 3.3: Para λ , la cantidad de e-folds responde de manera inversa, y no lineal.

Capítulo 4

Conclusión

En nuestro modelo propuesto, se encontró un periodo de inflación, con inicio y término bien definidos en una de sus soluciones consistentes con el principio cosmológico. Esta etapa inflacionaria iniciada cuando el universo tenía un “tamaño” del orden de la longitud de Planck resultó ser sensible a los parámetros incluidos en la acción y en el potencial propuestos, haciendo posible hallar configuraciones de estos para lograr la formación de estructuras. Si bien, los resultados mostrados en el capítulo 3 para una geometría plana son expuestos en tiempos del orden de 10^5 y 10^8 segundos, es posible hallar una configuración de los parámetros para ubicar la etapa de inflación en el tiempo de Planck ($t \sim 10^{-35}$ s), para valores de m_ϕ y λ alrededor del orden de 10^{50} , y por ende, un valor muy grande para el potencial. Por este motivo, se optó por usar la configuración expuesta aprovechando que la teoría es invariante bajo reparametrizaciones del tiempo [10], dando lugar a un pragmático modelo que predice datos ya conocidos, con algunas variantes, como el tiempo que tarda la inflación en ocurrir, un orden de magnitud más que en la literatura.

El potencial elegido, al ser una combinación de dos modelos caóticos, resultó ser indiferente a las condiciones iniciales, salvo para la condición inicial de $a(0)$, que configura la dimensión espacial del universo al inicio de la inflación. Así, nuestro modelo depende casi en su totalidad de los parámetros de la acción y del potencial, además de los valores posibles de la constante de curvatura.

Otro punto a resaltar es la sección de fundamentos teóricos revisada en el

capítulo 2, donde se hace un repaso de algunos conceptos de la cosmología moderna, además de ciertos desarrollos, como el de la métrica FLRW. En los apéndices se presentan los principios de la mecánica teórica necesarios para justificar algunos resultados, pues uno de los enfoques principales de esta tesis es el estribar nuestra propuesta en cimientos teóricos que, precisamente, son bien conocidos hasta hoy, dando lugar a un modelo funcional y plausible. Por ejemplo; la simple, pero poderosa, idea de añadir inflación a la teoría del Big Bang “encogiendo” el radio comóvil de Hubble, o de la obtención de las ecuaciones de movimiento mediante la variación de la acción, una brillante herramienta teórica que no podía pasar desapercibida, o del importante concepto de conexión causal, fundamental para comprender el problema del horizonte y, por tanto, entender su solución viable en el marco de la cosmología moderna.

Apéndice A

A 1. Cálculo de Variaciones

Esta disciplina es una de las ramas de las matemáticas y se encarga de resolver problemas de optimización, maximización, o minimización en el que la incógnita a conocer es una función. Por ejemplo, el problema de hallar la trayectoria más corta entre dos puntos, o el más importante del cálculo de variaciones: el problema de la braquistócrona, palabra de origen griego que significa “el intervalo de tiempo más corto”. Formulado por Galileo en 1638 resuelto por John Bernoulli en 1696 y casi inmediatamente después por Leibniz e Isaac Newton.

Se introduce el concepto de **variación** [23], también conocida como **derivada funcional**, el cual comparte la idea subyacente del concepto de derivada convencional que es el estudio del comportamiento de funciones, con el añadido de que la derivada funcional se encarga del análisis del cambio de funcionales.

Una **funcional** I , es un mapeo [23] que opera sobre un espacio \mathbb{F} de funciones $f(x)$ asociándoles escalares k de un campo \mathbb{k}

$$\begin{aligned} I : \mathbb{F} &\rightarrow \mathbb{k} \\ I[f(x)] &\mapsto k. \end{aligned}$$

Por ejemplo, si q es una función de t , una integral definida, por decir

$$\int_0^1 \{ [q(t)]^2 + [q'(t)]^2 \} dt,$$

es una funcional en la cual el integrando, llámese L , depende de q y de su derivada q' respecto al parámetro t .

En general, si se consideran este tipo de funcionales en las cuales el integrando es una función $L = L(q, q')$, tendrían la forma

$$I[q(t)] \equiv \int_a^b L(q, q') dt.$$

Sería interesante encontrar una manera de derivarlas.

Para derivar este tipo de funcionales, es necesario hacer un análisis de qué ocurre con I si se hace una variación uniforme de $q(t)$, con una función diferenciable $h(t)$ que debe ser suficientemente pequeña para poder despreciar los términos de segundo orden en una expansión en serie de potencias en el intervalo $[a, b]$. Además, se requiere que $h(a) = h(b) = 0$. Es evidente que el valor de la funcional $I[q + h]$ diferirá un poco de la original. El valor de I , ligeramente variada, queda

$$I[q + h] = \int_a^b L(q + h, q' + h') dt.$$

Ahora, la variación de la funcional I , que se denota por δI

$$\begin{aligned} \delta I &= I[q + h] - I[q] \\ &= \int_a^b [L(q + h, q' + h') - L(q, q')] dt. \end{aligned}$$

Debido a un resultado de funciones típicas de varias variables [24], si se quiere calcular la variación de una función $f = f(q_1, q_2, \dots, q_n)$, a primer orden,

$$\delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i, \tag{A.1}$$

que, aplicado a $L = L(q, q')$

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial q'} \delta q',$$

donde $q_1 = q$, $q_2 = q'$, $\delta q_1 = \delta q$, y $\delta q_2 = \delta q'$ para A.1.

La variación en I queda

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial q'} \delta q' \right] dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q} \delta q dt + \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q'} \delta q' dt,\end{aligned}$$

e integrando por partes el segundo término de la integral

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial q'} \delta q' dt = \left[\frac{\partial L}{\partial q'} \delta q \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q'} \right) \delta q dt.$$

El primer término del lado derecho de la ecuación se desvanece, pues $\delta q = h(t)$ es el incremento infinitesimal de q y además $h(a) = h(b) = 0$, por tanto

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q} \delta q dt - \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q'} \right) \delta q dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q'} \right) \right] \delta q dt,\end{aligned}$$

que es equivalente a

$$\frac{\delta I}{\delta q} = \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q'} \right) \right].$$

Esta última es la definición de la *derivada funcional* o *variación* de I con respecto de q .

Al igual que se puede usar la derivada usual para encontrar puntos extremos de funciones, se puede utilizar la derivada funcional para encontrar funciones extremas igualando esta a 0

$$\frac{\delta I}{\delta q} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q'} \right) = 0, \quad (\text{A.2})$$

que, para $q_{i=1,\dots,n}$ se tendría un sistema de ecuaciones de esta forma. Esto es de suma importancia ya que se ha reducido el problema de encontrar una función extrema a resolver una ecuación diferencial (o un sistema de ecuaciones diferenciales). Esta última se llama la ecuación de *Euler-Lagrange* [23].

A manera de ejemplo, se usará el proceso variacional para encontrar la función de longitud mínima que une a dos puntos en el plano.

Un elemento de longitud en el plano euclidiano, también llamado *métrica* es

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Se puede realizar el mismo proceso variacional en s de la misma manera que se hizo a I observando que la función L correspondiente es

$$L = \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Así, la funcional I queda

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

de esta manera, la función que hace estacionaria esta funcional debe satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \left(\sqrt{1 + (y')^2} \right)}{\partial y'} - \frac{\partial \left(\sqrt{1 + (y')^2} \right)}{\partial y} = 0.$$

Como L no depende explícitamente de y

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\partial \left(\sqrt{1 + (y')^2} \right)}{\partial y'} \right] = 0.$$

Lo cual quiere decir

$$\begin{aligned}\frac{\partial \left(\sqrt{1 + (y')^2} \right)}{\partial y'} &= C \\ \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} &= C.\end{aligned}$$

Despejando y'

$$y' = \sqrt{\frac{C^2}{1 - C^2}},$$

e integrando de ambos lados

$$y = x \sqrt{\frac{C^2}{1 - C^2}} + b,$$

donde se puede definir $m = \sqrt{\frac{C^2}{1 - C^2}}$ y tener a y en la forma $y = mx + b$ que es un resultado esperado pues la trayectoria más corta entre dos puntos del plano euclidiano es la línea recta que pasa por ellos.

Apéndice B

B 1. La ecuación de Euler-Lagrange y la segunda ley de Newton

Dada la definición de variación

$$\frac{\delta I}{\delta q} = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q'} \right) = 0,$$

y la segunda ley de Newton, para una masa constante

$$\frac{d}{dt} (mv) = F,$$

si ahora $q = q(t)$ es una función de la posición que depende del tiempo y su derivada se denota por

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q} = v ,$$

para cualquier función $q(t)$, dada una $L(q, \dot{q})$, se obtendrá un valor específico de la funcional I . Ahora, si se busca obtener las leyes de movimiento de Newton a partir de la variación de I , ¿Cómo debería ser la función L para que esto se cumpla?, en otras palabras, el objetivo es averiguar si aquella función $q(t)$ que minimiza la funcional I es aquella que coincide con la trayectoria predicha por las leyes de movimiento de Newton.

A partir de la ecuación A.2, la ecuación de Euler-Lagrange se puede escribir

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q}. \tag{B.1}$$

Por otro lado, la segunda ley de Newton es

$$\begin{aligned} ma &= F \\ m \frac{dq}{dt} &= F \\ \frac{d}{dt} (m\dot{q}) &= F. \end{aligned}$$

Se busca que las ecuaciones anteriores sean equivalentes, por tanto, se igualan de la siguiente manera

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = m\dot{q} \tag{B.2}$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial q} = F. \tag{B.3}$$

Luego, como $v = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$, la ecuación B.2 queda

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial v} = mv. \tag{B.4}$$

Integrando respecto a v se tiene

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + C_q.$$

Donde C_q es una constante de integración, que bien podría ser una función de q , pues si se efectúa la derivada parcial de L con respecto de v se recupera la ecuación B.4.

Recordando de la mecánica newtoniana, se sabe que, por definición, una *fuerza conservativa* se puede obtener a partir del negativo del gradiente de un potencial que no dependa del tiempo de manera explícita. Bajo esta suposición, la ecuación B.3 se vuelve

$$\frac{\partial L}{\partial q} = F = -\frac{\partial V}{\partial q}. \tag{B.5}$$

Integrando

$$L = -V(q) + C_v.$$

Donde C_v es una constante de integración, que bien podría ser una función de la velocidad, por ejemplo, $T = \frac{1}{2}mv^2$ y al derivar L con respecto de q se recupera la ecuación B.5. De esta manera la función L queda

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - V(q). \tag{B.6}$$

Para esta elección de L , la variación de la funcional I reproduce las leyes de movimiento Newton. Comúnmente a L se llama *función Lagrangiana* o simplemente *Lagrangiana*, con T siendo la energía cinética y V la energía potencial. A la funcional I se le llama *acción* si lo que hay en el integrando es una función Lagrangiana.

Con este resultado, para cada problema de dinámica que se tenga, dado un potencial V , la partícula se moverá siguiendo aquella trayectoria $q(t)$ para la cual la acción I tenga un valor estacionario, es decir

$$\frac{\delta I}{\delta q(t)} = 0.$$

B 2. El Principio de D'Alembert y las ecuaciones de Euler-Lagrange

Supóngase que se tiene un sistema de referencia de coordenadas x , y y z y un sistema de N partículas sometido a cada ecuación de su ligadura [22], tal que, el número de grados de libertad es

$$n = 3N - k,$$

donde k es el número de ecuaciones de ligadura.

Para conocer la configuración de las N partículas es necesario conocer el vector de posición de cada una de estas a un tiempo t . Como el sistema mecánico tiene n grados de libertad, para lograr especificar la posición de las N partículas que conforman este sistema, se necesitan n parámetros en cada instante de tiempo que se llaman *coordenadas generalizadas*. Estas coordenadas se denotarán por $\{q_i\}_{i=1}^n$. Para este tipo de sistemas, el vector de posición de cada una de las partículas se representa en términos de las coordenadas generalizadas y del tiempo $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_i, t)$, debido a esto, conocer la configuración o estado del sistema equivale a conocer las coordenadas generalizadas a un tiempo t . Por tanto, se pueden usar estas n etiquetas en cada instante de tiempo para denotar un punto en un espacio de dimensión n , abstracto por lo general, que está determinado por cualquier tipo de evolución de todos los estados accesibles a este sistema mecánico. El conjunto de todas las configuraciones posibles para el sistema forma el llamado *espacio de configuraciones*, tal que, al tiempo t , en este espacio se representa la configuración formada por N partículas con el valor de las coordenadas generalizadas que toman a un tiempo t . Al transcurrir el tiempo, el estado del sistema cambia y el punto se mueve en el espacio de configuraciones trazando una curva, descrita como *la trayectoria de movimiento del sistema*. El tiempo t se puede considerar como un parámetro de la trayectoria pues para cada punto de esta se tiene uno o más valores del tiempo. En este intervalo de tiempo la posición de cada partícula evolucionará de manera consistente con las ligaduras, interacciones con el resto de partículas y con las fuerzas externas al sistema. Esta evolución se representa por una trayectoria que, en general, no tiene similitud con la trayectoria en el espacio de una partícula real, cada punto en la trayectoria en el espacio de configuraciones representa el estado completo del sistema en un tiempo dado.

Considérese un desplazamiento virtual infinitesimal, es decir, un cambio en la configuración del sistema debido a una evolución infinitesimal de las coordenadas $\delta\vec{r}_i$ consistente con las fuerzas de ligadura impuestas en un instante dado, por ende, estas $\delta\vec{r}_i$ no forman un conjunto linealmente independiente debido a que están conectadas mediante las ligaduras del sistema.

Suponiendo que el sistema está en equilibrio, el trabajo neto virtual realizado por las fuerzas que actúan en el sistema es nulo

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (\text{B.7})$$

donde $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i$ contiene tanto las fuerzas aplicadas $\vec{F}_i^{(a)}$ como las fuerzas de ligadura \vec{f}_i . Como el desplazamiento virtual $\delta \vec{r}_i$ es consistente con las fuerzas de ligadura del sistema, entonces el trabajo efectuado por tales fuerzas es nulo

$$\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0,$$

de otra manera, alguna restricción se estaría violando.

Con esta consideración, la ecuación B.7 queda

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r} = 0. \quad (\text{B.8})$$

Como $\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i$ se puede escribir como

$$\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0.$$

Además, el sistema se considera en equilibrio, por tanto, las ecuaciones diferenciales de movimiento

$$\sum_{i=1}^N \left(\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_i^{(a)} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \left(m_i \vec{a}_i - \vec{F}_i^{(a)} \right) \cdot \delta \vec{r} = 0, \quad (\text{B.9})$$

contienen la información de las fuerzas que actúan sobre el sistema, donde ya se ha eliminado las fuerzas de ligadura. Ahora se puede efectuar una transformación de coordenadas para dejar todo en términos de las coordenadas generalizadas

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t)$$

y viceversa

$$q_j = q_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t),$$

para el sistema de N partículas y k ecuaciones de ligaduras holónomas.

Se pueden considerar como ecuaciones de correspondencia para k de las coordenadas generalizadas; esto es

$$q_m = \phi_m$$

para $m > 3N - k$. Así quedan $3N - k$ coordenadas generalizadas no nulas.

De la ecuación A.1, se puede ver la relación entre los desplazamientos virtuales $\delta\vec{r}_i$ y los desplazamientos virtuales δq_m siguiendo la regla de la cadena

$$\delta\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (\text{B.10})$$

Sustituyendo en B.9

$$\sum_{i,j} m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{i,j} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (\text{B.11})$$

Si se define $Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$ como las *fuerzas generalizadas*, se obtiene

$$\sum_{i,j} m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j. \quad (\text{B.12})$$

Donde el factor $\sum_{i,j} m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$ del lado izquierdo de la ecuación se puede escribir como sigue,

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_i \frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \\ &= \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right]. \end{aligned}$$

Como $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j, t)$, las velocidades \vec{v}_i son

$$\vec{v}_i \equiv \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \quad (\text{B.13})$$

Calculando ahora $\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}$,

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_m \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} \dot{q}_m \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right).$$

Suponiendo que las \vec{r}_i son funciones de clase C^n , por el teorema de Schwarz se satisface la simetría de las derivadas parciales de segundo orden para estas funciones. Así la ecuación anterior es igual a

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_m \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} \dot{q}_m \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \right],$$

pero \vec{r}_i no depende de \dot{q}_j , entonces el último término de la ecuación anterior se hace 0, y se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_m \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} \dot{q}_m \right) \\ &= \sum_m \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} \right) \dot{q}_m + \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} \right) \delta_{m,j} \right] = \sum_m \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} \right) \delta_{m,j} \\ &= \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

Así, se tiene

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad (\text{B.14})$$

por tanto

$$\sum_i \left[\frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] = \sum_i \left[\frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right]. \quad (\text{B.15})$$

Por otro lado, calculando $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$, $\frac{\partial}{\partial q_j} (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$ y $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right)$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) &= 2\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \\
 \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} v_i^2 &= 2\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \\
 \Leftrightarrow \\
 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} v_i^2 &= \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j},
 \end{aligned}$$

que, multiplicando por m_i se tiene

$$m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{m_i}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} v_i^2. \quad (\text{B.16})$$

Lo mismo para $\frac{\partial}{\partial q_j} (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$

$$m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{m_i}{2} \frac{\partial}{\partial q_j} v_i^2. \quad (\text{B.17})$$

Por último $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right)$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right),
 \end{aligned}$$

que, por el teorema de Schwarz y por linealidad del operador de derivada, queda

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d\vec{r}_i}{dt}.
 \end{aligned}$$

Por tanto, dado que $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}. \quad (\text{B.18})$$

Recordando que

$$\sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right], \quad (\text{B.19})$$

y, considerando los resultados anteriores, B.19 queda

$$\begin{aligned}
 \sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] \\
 &= \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \\
 &= \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right) \right]. \quad (\text{B.20})
 \end{aligned}$$

Como, por B.16 $m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)$ y $m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)$

$$\begin{aligned}
 \sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right) \right] \\
 &= \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Como $T = \frac{1}{2}m_i v_i^2$ es la energía cinética total del sistema

$$\sum_i m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} (T) \right\}. \quad (\text{B.21})$$

Sustituyendo la ecuación B.21 en B.12

$$\sum_j \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T) \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0.$$

Como, por lo general $\delta q_j \neq 0$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0.$$

Debido a que Q_j son las fuerzas generalizadas, lo anterior equivale a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (\text{B.22})$$

Si las fuerzas \vec{F}_i son derivables de una función potencial escalar V , es decir, que $\vec{F}_i = -\nabla_i V$ entonces las fuerzas generalizadas Q_j se pueden escribir como sigue

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i -\nabla_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j},$$

por regla de la cadena

$$Q_j = - \sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad (\text{B.23})$$

sustituyendo en la ecuación B.22

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j} \\
 & = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \\
 & = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) \\
 & = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0.
 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones no están necesariamente restringidas a sistemas conservativos; solo si V no es una función explícita del tiempo, el sistema es conservativo. Como el potencial no depende de las velocidades generalizadas entonces puede ser incluido el término de la derivada parcial respecto a \dot{q}_j

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0.$$

Donde la función Lagrangiana $L = T - V$ vuelve a aparecer y se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange para n grados de libertad

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \tag{B.24}$$

Apéndice C

C 1. Leyes de Conservación

Una función que depende de coordenadas, velocidades y posiblemente del tiempo, cuyo valor sea el mismo en todo momento se llama *constante de movimiento*. Esta constante de movimiento $C = C(q_k, \dot{q}_k, t)$ cumple que

$$0 = \frac{dC}{dt} = \sum_k \frac{\partial C}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial C}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Usando las ecuaciones de Lagrange para obtener expresiones de las segundas derivadas, y si en efecto C es una constante, sustituyendo aquí, el primer término se debería desvanecer.

En el caso de ausencia de fuerzas no conservativas y de coordenadas generalizadas independientes, también se satisfacen las ecuaciones de Lagrange.

Como las combinaciones posibles de coordenadas generalizadas son muchísimas, la búsqueda de constantes de movimiento es una tarea difícil. A continuación, se muestran algunos casos matemáticamente más sencillos.

Coordenadas cíclicas

Se les llama coordenadas cíclicas aquellas que no aparecen en la lagrangiana, es decir,

$$L = L(q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t).$$

Por tanto

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0,$$

y las ecuaciones de Lagrange quedan

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \beta_1 = cte.$$

Se define el *momento generalizado* [22] o momento conjugado de la coordenada q_j a la derivada parcial

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (q_k, \dot{q}_k, t). \quad (C.1)$$

Así que, si q_1 es una coordenada cíclica su momento generalizado es una constante de movimiento determinada por las condiciones iniciales debido a las ecuaciones de Lagrange.

Estas constantes de movimiento están estrechamente relacionadas a las simetrías del sistema, es decir, a cantidades conservadas de este. Por ejemplo, si q_1 es una coordenada cartesiana, la cantidad de movimiento en esa dirección resulta ser su momento generalizado. De esta manera, si el sistema no cambia al trasladarse de manera rectilínea resulta que una componente de la cantidad de movimiento se conserva. Ahora, si q_1 representa una coordenada angular respecto a algún eje, su momento generalizado representa el momento angular, así que, si el sistema es simétrico respecto a este tipo de movimiento, entonces una componente de su momento se conserva.

Función de Routh

La velocidad generalizada \dot{q}_1 se puede obtener de manera sencilla despejándose de la ecuación de momento generalizado p_1 , una vez que se sabe que existe una coordenada cíclica q_1 . De esta manera, el sistema se puede reducir en una variable, ya que existe una coordenada que no aparece en la función lagrangiana, y, aunque exista su respectiva velocidad generalizada, ésta se puede representar en función de las demás coordenadas y constantes.

Para reducir el sistema hay que identificar la coordenada o coordenadas cíclicas en la función lagrangiana sin importar si aparecen sus respectivas velocidades generalizadas además de calcular sus respectivos momentos generalizados, que, al ser constantes de movimiento, quedarán en función de sus velocidades generalizadas y del resto de coordenadas. Hallando los valores de las β_i a partir de las condiciones iniciales, se pueden obtener las velocidades generalizadas \dot{q}_1 de la expresión p_1 ,

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_1(\beta_1, q_2, \dots, \dot{q}_2, \dots, t),$$

que se sustituyen en la función lagrangiana.

A partir de la denominada *función de Routh* [22], equivalente a la lagrangiana reducida,

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\beta_1, \dots, \beta_n, q_{n+1}, \dots, \dot{q}_{n+1}, \dots, t) = \mathcal{L} - \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \beta_k, \quad (\text{C.2})$$

se pueden obtener las nuevas ecuaciones de movimiento ya sin las coordenadas cíclicas

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_k} = 0 \quad k = n - s, \dots \quad (\text{C.3})$$

Las coordenadas cíclicas se pueden calcular, si así se desea, integrando respecto al tiempo la ecuación

$$\dot{q}_s = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \beta_s}.$$

Relación entre la función Hamiltoniana y la conservación de la energía

En la función lagrangiana, el tiempo es un parámetro y no una coordenada generalizada. Sin embargo, así como la ausencia de coordenadas generalizadas implica leyes de conservación de sus momentos generalizados, también se puede obtener una constante de movimiento a partir de la independencia

temporal de la lagrangiana.

En un sistema donde:

- Las fuerzas aplicadas son conservativas
- Todas las ligaduras son holónomas
- La función lagrangiana no depende del tiempo de manera explícita

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (\text{C.4})$$

existe una constante de movimiento muy peculiar. Esto no quiere decir que la lagrangiana sea la constante de movimiento, pues que se anule su derivada parcial con respecto del tiempo no implica que se anule su derivada total. Aquí, la cantidad que se conserva es la llamada *función hamiltoniana* [22]

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - L. \quad (\text{C.5})$$

En muchos casos, esta función coincide con la energía del sistema, lo cual implicaría una ley de conservación de energía.

Demostración

Recordando la ecuación

$$\sum_k \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} - Q_k \right] \delta q_k = 0,$$

si las fuerzas aplicadas son conservativas, si todas las ligaduras holónomas se satisfacen y el resto de desplazamientos virtuales son consistentes con el resto de ligaduras (no holónomas) del sistema, entonces la ecuación anterior queda

$$\sum_k \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right] dq_k = 0.$$

Dividiendo entre el diferencial del tiempo dt

$$\sum_k \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right] \dot{q}_k = 0, \quad (\text{C.6})$$

el último término se puede obtener a partir de la derivada total de la lagrangiana con respecto al tiempo

$$\frac{dL}{dt} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Despejándolo, sustituyendo en C.6 y recordando la derivación de un producto de funciones se obtiene

$$\sum_k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k - \frac{dL}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L \right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

Si además la lagrangiana no depende del tiempo de manera explícita, entonces

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H} = \sum_k p_k \dot{q}_k - L = cte \quad (\text{C.7})$$

que enuncia que la hamiltoniana es una *constante de movimiento*.

Por otro lado, se puede descomponer la lagrangiana en varios términos, a fin de obtener una forma para la función Hamiltoniana. Como las coordenadas x_i se pueden escribir como funciones de las coordenadas generalizadas y del tiempo

$$x_i = x_i(q_k, t) \quad i = 1, \dots, 3N \quad k = 1, \dots, 3N - r$$

las velocidades son

$$\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t}.$$

Por tanto, la energía cinética puede quedar representada así

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\sum_r \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_r + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \left(\sum_s \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\sum_{r,s} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_r \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \sum_r \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_r \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_s \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \frac{\partial x_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \sum_{r,s} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_r \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{1}{2} \sum_{i,r} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_r \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,s} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Haciendo que K_2 , K_1 y K_0 sean

$$\begin{aligned}
 K_2 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \sum_{r,s} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_r \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \\
 K_1 &= \sum_{i,r} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \dot{q}_r \frac{\partial x_i}{\partial t} \\
 K_0 &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2,
 \end{aligned}$$

que se llaman término cuadrático, término lineal y término independiente respectivamente. El primero es una combinación de productos de las velocidades generalizadas, el segundo es una combinación de las velocidades generalizadas, y el tercero no depende de velocidades generalizadas.

Realizando el desarrollo adecuado, se puede mostrar que la hamiltoniana se puede escribir así

$$\mathcal{H} = K_2 - K_0 + V. \tag{C.8}$$

Aquí se ve que la hamiltoniana ahora es una función del término cuadrático, del término independiente y de la energía potencial, además de que es muy similar a la energía del sistema. Se puede observar que si el término independiente K_0 es nulo, entonces la función hamiltoniana coincide con la energía mecánica del sistema.

Bibliografía

- [1] ARISTÓTELES. (1996). *Acerca del cielo*. Madrid. Editorial Gredos.
- [2] N. COPÉRNICO, T. DIGGES, G. GALILEI. (1996). *Opúsculos sobre el Movimiento de la Tierra*. (2ª ed.) Madrid. Alianza Editorial.
- [3] I. NEWTON. (2020). *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*. London. Flame Tree Publishing.
- [4] S. HAWKING (2006). *The Theory of Everything: The Origin and Fate of the Universe*. Cambridge, EN. Phoenix Books.
- [5] A. FRIEDMAN. (1922). *Über die Krümmung des Raumes*. *Zeitschrift für Physik*. **10**(1), 377-385.
- [6] A. LIDDLE. (2003) *An Introduction to Modern Cosmology*. (2ª ed.) West Sussex, England. Wiley.
- [7] A. GUTH. (1981). *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*. *Physical Review D*. **23**(2), 349–356.
- [8] L. HUGHSTON, K. TOD. (1994). *An Introduction to General Relativity*. Great Britain. Cambridge University Press.
- [9] W. RINDLER. (2006). *Relativity: Special, General, and Cosmological* (2ª ed.) Great Britain. Oxford University Press.
- [10] N.E. MARTÍNEZ-PÉREZ, C. RAMÍREZ, V. VÁZQUEZ-BÁEZ. (2021). *Inflationary Quantum Cosmology for FRLW Supersymmetric Models*, arXiv:2104.12914, <https://arxiv.org/abs/2104.12914>
- [11] G. CALCAGNI. (2017). *Classical and Quantum Cosmology*. Switzerland. Springer International Publishing.

-
- [12] L. LANDAU, E. LIFSHITZ. (1992). *Teoría Clásica de los Campos* (2ª ed.) Barcelona, España. Editorial Reverté.
- [13] D. BAUMANN. (2012). *TASI Lectures on Inflation*. <https://arxiv.org/abs/0907.5424v2>
- [14] D. BAUMANN. *The Physics of Inflation: A course for Graduate Students of Particle Physics and Cosmology*.
- [15] J. BINNEY, D. SKINNER. (2014). *The Physics of Quantum Mechanics*. Oxford, U.K. Oxford University Press.
- [16] A. LIDDLE, D. LYTH (2000). *Cosmological Inflation and Large Scale Structure*. United Kingdom. Cambridge University Press.
- [17] M. SPIVAK (1988). *Cálculo en Variedades*. Barcelona. Editorial Reverté.
- [18] L. KOFMAN. (1996). *The Origin of Matter in the Universe: Reheating after Inflation*. <https://arxiv.org/abs/astro-ph/9605155v1>
- [19] S. GÓMEZ, V. JORNET. (2007). *Introducción a los Métodos Numéricos*. México. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Dirección de Fomento Editorial.
- [20] J. SEGARRA-ESCANDÓN. (2020). *Runge-Kutta and Adams Bashforth-Moulton Numerical Methods with Mathematica. Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la información*. **7**(14), 13-32.
- [21] T. P. SOTIRIOU, V. FARAONI. (2010). *f(R) Theories of Gravity. Reviews of Modern Physics*. **82**(1), 451,497.
- [22] H. GOLDSTEIN, C. POOLE and J. SAFKO. (2002). *Classical Mechanics*. (3ª ed.) U.S.A. Addison-Wesley.
- [23] L. ELSGOLTZ. (1969). *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*. Moscú. Editorial MIR.
- [24] J. MARDSEN, A. TROMBA. (1991). *Cálculo Vectorial*. (3ª ed.) Wilmington, Delaware. Addison-Wesley Iberoamericana.
- [25] E.W. KOLB, M.S. TURNER (1990). *The Early Universe*. Redwood City, CA. Addison-Wesley.

-
- [26] A. LIDDLE, S. LEACH. (2003). *How Long before the end of Inflation were Observable Perturbations produced?* <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0305263>
- [27] S. DODELSON, L. HUI. (2003). *A Horizon Ratio Bound for Inflationary Fluctuations.* <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0305113v2>
- [28] L. KOFMAN, A. LINDE, A. STAROBINSKY. (1994). *Reheating after Inflation.* *Physical Review Letters.* **73**(24), 3195,3198.
- [29] R. D ´INVERNO (1998). *Introducing Einstein ´s Relativity.* Oxford, EN. Oxford University Press.
- [30] B. GREENE (2017). *El Tejido del Cosmos: Espacio, tiempo y la textura de la realidad.* Columbia, NY. Booket Ciencia, Crítica.
- [31] D. ZILL (2009). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado.* Los Angeles, U.S.A. Cengage Learning.