Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

El hiperespacio $C(p, X)$ para gráficas finitas

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA
Felipe de Jesús Aguilar Romero

DIRECTORES DE TESIS
Dr. David Herrera Carrasco
Dr. Fernando Macías Romero

PUEBLA, PUE. 7 de diciembre de 2021.

A mi Madre.
Gracias por tanto amor.

Agradecimientos

Agradezco infinitamente a mi madre Juanita que nunca perdió la confianza en mi y nunca se rindió. Ella es mi super heroína. Es por ella y para ella cada logro en mi vida.

Agradezco inmensamente a Any-eli que ha estado conmigo en las buenas y malas. Nunca terminaré de pagarle lo buena que ha sido conmigo, la qm.

Agradezco a mis asesores de tesis. Dr. Fernando Macías Romero y Dr. David Herrera Carrasco por permitirme trabajar bajo sus dirección. Estoy muy complacido de poder trabajar con ellos, gracias por los consejos y el apoyo.

Agradezco a mis sinodales Dra. Patricia Domíguez Soto, Dra. María de Jesús López Toriz, Dr. Alexander Bikov y Dr. Raúl Escobedo Conde por sus observaciones y comentarios para mejorar este trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico que me brindó, sin el cual, habría sido imposible llevar a cabo y concluir mis estudios de maestría.

Introducción

Dado un continuo X, el hiperespacio $C(X)$ de todos los subcontinuos de X, fue estudiado en [3] que resultó relevante porque algunas propiedades de X pueden ser determinadas en términos de propiedades de $C(X)$, y viceversa. Dado $p \in X$, podemos considerar el hiperespacio $C(p, X)$ de todos los subcontinuos de X que contienen a p, este espacio fue estudiado en [2], [6], [9] y [11]. La clase $K(X)$ de todos los hiperespacios $C(q, X)$ con $q \in X$, se estudia en [9] y [10]. También, estudiamos la relación entre el grado de homogeneidad de una gráfica finita X, y el número de elementos distintos en $K(X)$ llamado: tamaño de $K(X)$. El grado de homogeneidad de un continuo ha sido estudiado ampliamente, por ejemplo en [5], [8], [13] y [15]. Esta tesis se basa en estudiar los resultados del artículo de 2018, de F. Corona, R. A. Quiñones, J. Sánchez y H. Villanueva [1], desarrollando con detalle las pruebas hechas en este, y complementando los resultados necesarios para su comprensión.

En el primer capítulo, se presentan los resultados preliminares para una mejor comprensión de este trabajo, exponiendo resultados de hiperespacios y propiedades de gráficas finitas.

En el segundo capítulo, se presentan y se prueban los teoremas principales de este trabajo, relacionados al hiperespacio $C(p, X)$ cuando X es una gráfica finita.

En el tercer capítulo, se exponen algunas condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir un continuo X, para que $K(X)$ sea compacto, véase el Teorema 3.8. Además, se da un continuo X para el cual $K(X)$ no es compacto, véase el Ejemplo 3.9. A su vez, se da una condición necesaria para que $K(X)$ sea conexo, véase Corolario 3.11. También, se da un ejemplo de un continuo X, para el cual $K(X)$ no es conexo, véase el Ejemplo 3.14. Se culmina dando una relación entre el grado de homogeneidad de un continuo X y, el tamaño de $K(X)$, véase el Teorema 3.27.

En el cuarto capítulo, se proporciona la construcción de la clase de gráficas finitas $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, que cumplen que X_n es $\frac{1}{n}$-homogéneo y, cuyo tamaño de cada $K(X_n)$ es igual a n, véase el Teorema 4.1.

En el capítulo final, se presenta un teorema que permite construir gráficas finitas X con un grado de homogeneidad diferente al tamaño de $K(X)$.

Además, se construye una clase numerable de gráficas finitas que cumplen esto.

Índice general

El hiperespacio $C(p, X)$ para gráficas finitas

Felipe de Jesús Aguilar Romero

7 de diciembre de 2021

Capítulo 1

Preliminares

Definición 1.1. *Un **continuo** es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.*

Dado un continuo X, un hiperespacio de X, es una colección específica de subconjuntos de X. Los hiperespacios más conocidos son los siguientes:

$$2^X = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado}\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : \ A \text{ es conexo}\}.$$

La familia 2^X es llamada hiperespacio de los subconjuntos cerrados de X, y $C(X)$ es el hiperespacio de los subcontinuos de X. En este trabajo utilizaremos también los siguientes hiperespacios; sean $A \in C(X)$ y $p \in X$,

$$C(A, X) = \{B \in C(X) : A \subset B\},$$

$$C(p, X) = \{B \in C(X) : p \in B\},$$

$$K(X) = \{C(p, X) : p \in X\}.$$

Decimos que $X \approx Y$ cuando X es homeomorfo a Y. En este trabajo, $\mathbb{R}^n$ se considera con la topología euclidiana y, por ende, todos sus subespacios.

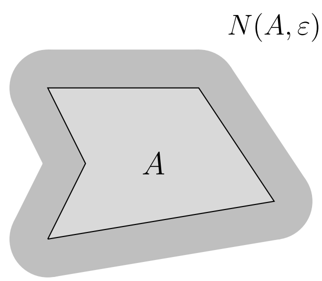
Definición 1.2. *Sean X, Y espacios métricos, decimos que la función $f : X \to Y$ es un **encaje** si f es un homeomorfismo entre X y $f(X)$.*

1.1. Una métrica para 2^X

Nuestra primer tarea será dotar a 2^X de una métrica y, como $C(X) \subset 2^X$, también será una métrica para $C(X)$. Antes de presentarla, es necesario enunciar el concepto de nube.

Definición 1.3. *Sea X un continuo con métrica d. Dados $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, definimos la **nube** de radio ε alrededor de A como:*

$$N(A, \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon) = \{x \in X : \textit{existe } a \in A,\ d(x, a) < \varepsilon\}.$$



Se define la función $H : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$ por:

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(B, \varepsilon) \ y \ B \subset N(A, \varepsilon)\}.$$

Esta cumple con ser una métrica en 2^X, la cual llamamos **métrica de Hausdorff**. Desde ahora, cuando se hable de la función H, se esta haciendo referencia a la función anterior. Antes de probar que H es una métrica para 2^X, damos algunas propiedades de las nubes que son útiles.

Teorema 1.4. *Sean X un espacio métrico compacto, $\varepsilon > 0$ y $A, B \in 2^X$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) $N(A, \delta) \subset N(A, \varepsilon)$ *para* $\delta > 0$ *tal que* $\delta < \varepsilon$.

(b) $N(A, \varepsilon) = \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N(A, \delta)$.

(c) Si $A \subset B$, *entonces* $N(A, \varepsilon) \subset N(B, \varepsilon)$.

(d) *Si $A \cap B = \emptyset$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $N(A, \delta) \cap N(B, \delta) = \emptyset$.*

(e) *Si U es un subconjunto abierto de X y $A \subset U$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $N(A, \delta) \subset U$.*

Demostración. Sea d la métrica de X.

(a) Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon$. Si $x \in N(\delta, A)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \delta < \varepsilon$, y por lo cual $x \in N(\varepsilon, A)$. Por lo tanto, $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$.

(b) Sea $x \in N(A, \varepsilon)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \varepsilon$. Sea $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta < \varepsilon$. Luego, $x \in N(A, \delta) \subset \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N(A, \delta)$, y en consecuencia $N(A, \varepsilon) \subset \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N(A, \delta)$. Por el inciso (a), se tiene la igualdad deseada.

(c) Sea $x \in N(A, \varepsilon)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \varepsilon$. Como $a \in B$, se tiene que $x \in N(B, \varepsilon)$. Por lo tanto, $N(A, \varepsilon) \subset N(B, \varepsilon)$.

(d) Sea $r = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Como A y B son compactos y ajenos, se puede probar que $r > 0$. Sea $\delta = \frac{r}{2} > 0$. Supongamos que existe $x \in N(A, \delta) \cap N(B, \delta)$, entonces existen $a \in A$ y $b \in B$, tales que $d(x, a) < \delta$ y $d(x, b) < \delta$. Luego, $d(a, b) \leq d(x, a) + d(b, x) < \delta + \delta = r$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $N(A, \delta) \cap N(B, \delta) = \emptyset$.

(e) Sea $D = X - U$. Notemos que $A \cap D = \emptyset$. Por el inciso (d), existe $\delta > 0$ tal que $N(\delta, A) \cap N(\delta, D) = \emptyset$. Luego, $N(\delta, A) \cap D = \emptyset$. Por lo tanto, $N(\delta, A) \subset U$. □

Teorema 1.5. *Sea X un continuo. La función H es una métrica para 2^X.*

Demostración. Supongamos que d es la métrica de X. Sean $A, B, C \in 2^X$. Note que por definición $H(A, B) \geq 0$. Veamos que $H(A, A) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, siempre se cumple que $A \subset N(A, \varepsilon)$, es decir, $0 \leq H(A, A) \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, de esta manera $H(A, A) = 0$. Ahora supongamos que $H(A, B) = 0$. Tomemos $a \in A$ y $\varepsilon > 0$. Notemos que $H(A, B) < \varepsilon$. Luego, existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que $A \subset N(B, \delta)$. Así, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta < \varepsilon$. De esta manera, hemos probado que $B(a, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ para cualquier $\varepsilon > 0$, por ende, a pertenece a la cerradura de B, como B es cerrado, $a \in B$. Se tiene que $A \subset B$. Para probar que $B \subset A$, se procede de manera simililar al caso anterior. Por lo tanto, $A = B$.

La propiedad de simetría claramente se cumple.

Veamos que H satisface la desigualdad del triángulo, primero veamos que dado $\varepsilon > 0$ se cumple

$$A \subset N(H(A, B) + \varepsilon, B).$$

Dado que $H(A,B) < H(A,B) + \varepsilon$, existe $\delta > 0$ tal que $H(A,B) < \delta < H(A,B) + \varepsilon$ y $A \subset N(\delta, B)$, $B \subset N(\delta, A)$. Luego, por el Teorema 1.4, inciso (a) se tiene que:

$$A \subset N(H(A,B) + \varepsilon, B) \ \text{ y } \ B \subset N(H(A,B) + \varepsilon, A).$$

Así, se tiene lo deseado. Sea $a \in A$ y $\varepsilon > 0$, por lo anterior, existe $b \in B$ tal que:

$$d(a,b) < H(A,B) + \varepsilon.$$

De la misma manera, dado $b \in B$, existe $c \in C$ tal que,

$$d(b,c) < H(B,C) + \varepsilon.$$

Se tiene lo siguente:

$$\begin{aligned} d(a,c) \leq & d(a,b) + d(b,c) \\ \leq & H(A,B) + H(B,C) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Puesto que a es arbitrario,

$$A \subset N(H(A,B) + H(B,C) + 2\varepsilon, C).$$

De manera análoga,

$$C \subset N(H(A,B) + H(B,C) + 2\varepsilon, A).$$

Así,

$$H(A,C) \leq H(A,B) + H(B,C) + 2\varepsilon.$$

Debido a que ε se tomó arbitrario, tenemos lo deseado. $\square$

Para un continuo X, se puede probar que $(2^X, H)$ y $(C(X), H)$ son continuos [3, Corolario 14.10], entonces podemos hablar de hiperespacios de 2^X. Será de nuestro interés la colección de subconjuntos cerrados no vacíos en 2^X, que denotaremos por 2^{2^X}; de manera que, para $(2^X, H)$, tenemos el hiperespacio $(2^{2^X}, H_2)$, donde H_2 es la métrica de Hausdorff en 2^{2^X} inducida por H. Dado $p \in X$, por el Teorema 2.1, $C(p, X)$ es un continuo, por lo que $K(X) \subset 2^{2^X}$.

En algunos textos se presenta una definición alternativa para la métrica de Hausdorff. Esta se presenta a continuación. Sean $A, B \in 2^X$. Fijemos un punto $a \in A$. Definiendo $g : B \to \mathbb{R}$ por $g(b) = d(a, b)$ para toda $b \in B$, donde d es la métrica de un continuo X, podemos ver que g es una función continua, y como B es compacto por el Teorema de Weierstrass [14, Teorema 4.16] podemos tomar:

$$d(a, B) = \text{mín}\{d(a, b) : b \in B\}.$$

Definamos $D(A, B)$ como:

$$D(A, B) = \text{máx}\{d(a, B) : a \in A\}.$$

Por un argumento similar al anterior, tenemos certeza de que este máximo está bien definido. Análogamente se puede demostrar que existe,

$$D(B, A) = \text{máx}\{(b, A) : b \in B\}.$$

A pesar de que $D(A, B)$ parece ser una métrica de 2^X, no lo es. Consideremos A y B elementos de 2^X tales que $A \subset B$ con $A \neq B$. Entonces, no es difícil convencerse de que $D(A, B) = 0$ y $A \neq B$, además de que no cumple la propiedad de simetría. Sin embargo, la función $\mathcal{D} : 2^X \times 2^X$ definida por:

$$\mathcal{D}(A, B) = \text{máx}\{D(A, B), D(B, A)\}$$

es una métrica para 2^X y, además, $H(A, B) = \mathcal{D}(A, B)$, es decir, $\mathcal{D}$ coincide con la métrica de Hausdorff.

Teorema 1.6. *Sea X un continuo. La función $\mathcal{D}$ es una métrica en 2^X.*

Demostración. Supongamos que d es la métrica en X. Sean $A, B \in 2^X$, tales que $\mathcal{D}(A, B) = 0$, entonces $D(A, B) = 0 = D(B, A)$. Sea $a \in A$, como $D(A, B) = 0$ tenemos que $d(a, B) = 0$, así existe $b_0 \in B$ tal que $d(a, b_0) = 0$, dado que d es una métrica, $a = b_0$ y, por tanto, $a \in B$. Dado $b \in B$, análogamente a lo anterior se tiene que $b \in A$, luego $A = B$.

Si $A = B$, entonces $d(a, B) = 0$ para cada $a \in A$ y $d(b, A) = 0$ para cada $b \in B$, de esta manera $D(A, B) = 0 = D(B, A)$ y, por ende, $\mathcal{D}(A, B) = 0$.

Es claro que H cumple la propiedad de simetría.

Sea $A, B, C \in 2^X$. Consideremos que $D(A, B) = d(a_0, B)$ para algún $a_0 \in A$, que $d(a_0, C) = d(a_0, c_0)$ para algún $c_0 \in C$ y, $d(c_0, B) = d(c_0, b_0)$ para algún $b_0 \in B$. Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} d(a_0, B) \leq d(a_0, b_0) &\leq d(a_0, c_0) + d(c_0, b_0) \\ &= d(a_0, C) + d(c_0, B) \\ &\leq D(A, C) + D(C, B). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la siguiente desigualdad

$$D(A,B) \leq D(A,C) + D(C,B).$$

Con un procedimiento análogo al anterior, es posible probar que:

$$D(B,A) \leq D(B,C) + D(C,A).$$

En consecuencia

$$D(A,B) \leq \mathcal{D}(A,C) + \mathcal{D}(C,B) \;\text{ y }\; D(B,A) \leq \mathcal{D}(A,C) + \mathcal{D}(C,B).$$

Por lo tanto

$$\mathcal{D}(A,B) \leq \mathcal{D}(A,C) + \mathcal{D}(C,B).$$

En conclusión, H es una métrica. □

Veamos algunas propiedades de la métrica de Hausdorff.

Teorema 1.7. *Sea X un continuo y H la métrica de Hausdorff en 2^X. Dados $A, B, C, D \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$ se cumple que:*

1. *Si $A \subset B \subset C$, entonces $H(B,C) \leq H(A,C)$.*
2. *Si $H(A,B) < \varepsilon$ y $H(C,D) < \varepsilon$, entonces $H(A \cup C, B \cup D) < \varepsilon$.*

Demostración. 1. Supongamos que $A \neq C$ y $H(B,C) > H(A,C)$, de esto, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $H(B,C) > \varepsilon_0 > H(A,C)$. Por lo que $A \subset N(C,\varepsilon_0)$ y $C \subset N(A,\varepsilon_0)$. Como $B \subset C$ se cumple que $B \subset N(C,\varepsilon_0)$, además $C \subset N(A,\varepsilon_0) \subset N(B,\varepsilon_0)$, por ende $H(B,C) \leq \varepsilon_0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $H(B,C) \leq H(A,C)$.

2. Se tiene que $A \subset N(B,\varepsilon)$ y $C \subset N(D,\varepsilon)$, por lo tanto $A \cup C \subset N(B,\varepsilon) \cup N(D,\varepsilon) = N(B \cup D,\varepsilon)$. Del mismo modo, $B \cup D \subset N(A,\varepsilon) \cup N(C,\varepsilon) = N(A \cup C,\varepsilon)$, por lo tanto $H(A \cup C, B \cup D) < \varepsilon$ □

1.2. Gráficas finitas

El concepto de arco es escencial para definir a lo que llamaremos gráfica finita, a medida que avanzamos en la exposición, daremos algunas propiedades importantes de éstos.

Definición 1.8. *Llamaremos **arco** a cualquier espacio que sea homeomorfo al intervalo cerrado* $[0, 1]$.

Dado A un arco, sea h el homeomorfismo de $[0, 1]$ sobre A, llamaremos a $E(A) = \{h(0), h(1)\}$, el conjunto de **puntos extremos del arco**. Dicho esto, ahora enunciaremos qué entenderemos por gráfica finita.

Definición 1.9. *Un continuo X es una **gráfica finita** si se puede expresar como la unión de un número finito de arcos tales que, cada par de ellos, son ajenos o se intersectan en uno o ambos puntos extremos.*

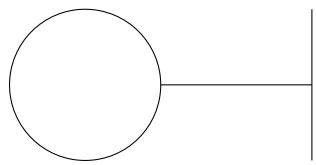


Figura 1.1: Gráfica finita.

Para toda gráfica finita X consideramos la métrica d, dada por, la longitud de arco, es decir, dados $x, y \in X$, la distancia de x a y, será la longitud del camino más corto que conecta x con y.

Definición 1.10. *El **n-odo simple**, con $n \in \mathbb{N}$, denotado por T_n, es un continuo que se construye uniendo n arcos que se intersectan dos a dos en un único punto llamado **vértice** del n-odo simple, dicho vértice tiene que ser un punto extremo de cada uno de los n arcos y, los otros puntos extremos de los arcos se llaman extremos del n-odo.*

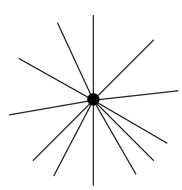


Figura 1.2: n-odo simple.

Es menester aclarar que un *n-odo simple* es una gráfica finita. Un 3-*odo*, T_3 recibe el nombre especial de **triodo simple**. Una n-**celda** es un espacio homeomorfo a la bola cerrada B^n en $\mathbb{R}^n$, donde $B^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}|| \leq 1\}$ y $||\mathbf{x}||$ denota la norma euclidiana.

Definición 1.11. *Dado X una gráfica finita, $p \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, decimos que p tiene* ***orden*** *n en X, denotado por $ord(p, X) = n$, si p tiene una vecindad cerrada que es homeomorfa a un n-odo simple, y tiene a p como vértice.*

Definición 1.12. *Sean X un continuo y $A \subset X$, decimos que el orden de A en X es menor o igual a $n \in \mathbb{N}$, denotado por $ord(A, X) \leq n$ si para cada abierto U de X, tal que $A \subset U$, existe V un abierto en X tal que $A \subset V \subset U$ y $|Fr(V)| \leq n$.*

Se dice que A tiene orden n, denotado por $ord(A, X) = n$, cuando $ord(A, X) \leq n$ y $ord(A, X) \nleq r$ para toda $r < n$.

La definición anterior es más general que la definición 1.11 y son equivalentes cuando $A = \{p\}$, se utilizará cualquiera de las dos indistintamente.

Sea X una gráfica finita. Los puntos de orden 1, son llamados **puntos extremos** de X y se denotan por $E(X)$. Los puntos de orden 2, son **puntos ordinarios** de X y, los de orden 3 o mayor, son **puntos de ramificación** de X, estos se identifican con $O(X)$ y $R(X)$, respectivamente. Los puntos vértice de X, denotados por $V(X)$ son la colección de todos los puntos extremos y de ramificación de X, es decir, $V(X) = E(X) \cup R(X)$.

Definición 1.13. *Sea X una gráfica finita. Una* ***arista*** *J en X, es un arco cuyos puntos extremos p, q son vértices y no contiene otro vértice distinto de estos. Se denota $J = pq$ y $(pq) = J - \{p, q\}$. También supondremos que la longitud de las aristas es 1.*

Definición 1.14. *Sean X una gráfica finita y J una arista en X. Dados $x, y \in J$ decimos que $z \in X$ es el* ***punto medio*** *del segmento xy cuando $d(x, z) = d(z, y)$.*

Teorema 1.15. *Si X y Y son gráficas finitas tales que su intersección es no vacía y finita, entonces $X \cup Y$ es una gráfica finita.*

Demostración. Como $X \cap Y \neq \emptyset$, entonces $X \cup Y$ es un continuo. Pongamos $X \cap Y = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$ y tomemos todos los arcos que contengan algún p_i, en estos arcos cada punto p_i genera a lo mas 4 arcos nuevos. Tomando estos nuevos arcos y los que no contienen puntos p_i, se tiene que, tomando dos cualesquiera, se cumple que son ajenos o se intersectan en uno o ambos de sus puntos extremos. Por lo tanto, $X \cup Y$ es una gráfica finita. $\square$

Definición 1.16. *Sea X un espacio métrico, y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X. Se define el **límite inferior** y **límite superior** de $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} lím\ inf\ A_i =& \{x \in X : \text{Para cada abierto } U \text{ que contenga a } x,\ U \cap A_i \neq \emptyset \\ & \text{para toda } i \in \mathbb{N} \text{ excepto para un número finito}\}; \\ lím\ sup\ A_i =& \{x \in X : \text{Para cada abierto } U \text{ que contenga a } x,\ U \cap A_i \neq \emptyset \\ & \text{para un número infinito de } i's\}. \end{aligned}$$

Dado $A \subset X$ decimos que $A = lím\ A_i$, si $lím\ inf\ A_i = A = lím\ sup\ A_i$.

De la Definición 1.16, es fácil notar que $\text{lím}\inf A_i \subset \text{lím}\sup A_i$.

Abordaremos algunas caracterizaciones de las gráficas finitas en términos del orden. A continuación, el concepto de continuo de convergencia, el cual es necesario para la primera caracterización.

Definición 1.17. *Sea X un espacio métrico. Un subcontinuo A de X, con más de un punto, será un **continuo de convergencia** de X, siempre que exista una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset C(X)$ tal que:*

1. *$A = \text{lím} A_i$,*

2. *Para cada $i \in \mathbb{N} : A \cap A_i = \emptyset$.*

Teorema 1.18. *[7, Teorema 4.11] Sean X un espacio métrico compacto y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos compactos no vacíos de X. Entonces, $\text{lím} A_i = A$ si y solo si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a A en 2^X con respecto a la métrica de Hausdorff.*

Teorema 1.19. *Sean X un espacio métrico y B un subcontinuo de convergencia de X. Si X es compacto, entonces existe una sucesión $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subset C(X)$, tal que:*

1. *$B = \text{lím} B_i$,*

2. *Para cada $i \in \mathbb{N}$: $B \cap B_i = \emptyset$,*

3. *Para $i \neq j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$.*

Demostración. Por ser B un continuo de convergencia de X existe una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset C(X)$ tal que: (1) $B = \lim A_i$ y (2) para cada $i \in \mathbb{N}$: $B \cap A_i = \emptyset$.

Sea $i \in \mathbb{N}$, veamos que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ solo para un número finito de $j^{'}s$. Supongamos lo contrario, es decir, que existe J infinito tal que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ para cada $j \in J$, de esto que exista una sucesión $\{x_j\}_{j\in J}$ tal que $x_j \in A_i \cap A_j$. Como A_i es compacto, podemos suponer que $\{x_j\}_{j\in J}$ converge a $x \in A_i$. Esto también implica que $x \in \limsup A_i$, por lo que $x \in B$, de esto que $B \cap A_i \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción.

Tomemos $B_1 = A_1$, llamemos $J_2 = \{i \in \mathbb{N} : A_1 \cap A_i \neq \emptyset\}$ y sea $m_2 = \max J_2 + 1$ podemos poner $B_2 = A_{m_2}$ y estar seguros de que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. En general, para $n \geq 2$ se define $J_n = \{i \in \mathbb{N} : B_{n-1} \cap A_i \neq \emptyset\}$ y $m_n = \max J_n + 1$ para tomar $B_n = A_{m_n}$. Por como se ha construido la sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, se cumple que es ajena dos a dos y para toda $n \in \mathbb{N}$, $B \cap B_n = \emptyset$. Note que $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión en 2^X, como $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, por el Teorema 1.18 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a B. □

Definición 1.20. *Sean X un espacio métrico y $p \in X$. Un subconjunto V de X es una vecindad de p si existe un conjunto abierto U en X tal que $p \in U \subset V$.*

Definición 1.21. *Sea X un espacio métrico, decimos que X es* ***conexo en pequeño*** *en $x \in X$, si para cada vecindad U de x existe una vecindad conexa V de x, tal que $x \in int(V) \subset V \subset U$. Si X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos, se dice que X es conexo en pequeño.*

Definición 1.22. *Sea X un espacio métrico. Diremos que X es* ***localmente conexo****, si para toda vecindad U de p, existe V abierto y conexo tal que $p \in V \subset U$. Diremos que X es localmente conexo, si es localmente conexo en todos sus puntos.*

De las definiciones anteriores, se puede ver que, si X es localmente conexo en p, entonces será conexo en pequeño en p, pero la forma inversa es falsa. Sin embargo, el siguiente teorema se cumple.

Teorema 1.23. *Un espacio métrico X es un espacio localmente conexo si y solo si, para cada abierto U en X y cada componente C de U, se tiene que C es abierto en X.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio localmente conexo. Sean U un abierto y C una componente de U. Sea $x \in C$. Veamos que C es abierto en X. Como $x \in U$, existe un abierto V en X que es conexo y $x \in V \subset U$. Luego, $x \in V \subset C$, es decir, C es abierto en X.

Recíprocamente, supongamos que cada componente de un conjunto abierto en X, es un abierto en X. Sean $x \in X$ y N una vecindad de x. Como N es una vecindad, existe un abierto U en X tal que $x \in U$. Sea V la componente de U que contiene a x. Por hipótesis, V es abierto en X, además, V es conexo y $x \in V \subset U \subset N$, por lo tanto X es localmente conexo en x. Como x es arbitrario, X es un espacio localmente conexo. $\square$

Teorema 1.24. *Un espacio métrico X es localmente conexo si y solo si X es conexo en pequeño.*

Demostración. Sea X un espacio métrico que es un espacio localmente conexo. De las definiciones se sigue que X es conexo en pequeño en cada punto $x \in X$. Recíprocamente, supongamos que X es conexo en pequeño. Basta demostrar que cada componente de cualquier abierto en X, es un abierto en X. Sean U un abierto en X y C una componente de U. Sea $x \in C$, veamos que C es abierto en X. Como $x \in U$, existe una vecindad conexa V tal que $x \in int(V) \subset V \subset U$, luego $x \in int(V) \subset C$, es decir, C es abierto en X. $\square$

El siguiente teorema nos servirá para probar un resultado de interés.

Teorema 1.25. *[7, Teorema 5.12] Sean X un continuo y $N = \{x \in X : X$ no es conexo en pequeño en $x\}$. Si $p \in N$, entonces existe un continuo de convergencia K de X tal que $p \in K$ y $K \subset N$.*

Teorema 1.26. *Sea X un continuo tal que para toda x en X, ord(x,X)$< \aleph_0$. Si $S \in C(X)$, entonces S es localmente conexo.*

Demostración. Sea X un continuo tal que *ord(x,X)*$< \aleph_0$, para toda x en X. Veamos que X no contiene un continuo de convergencia. Para esto, supongamos que existe $A \subset X$ continuo de convergencia de X, por lo que existe una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset C(X)$ que satisface el Teorema 1.19. Sea $x_0 \in A$, como A tiene más de un punto, podemos tomar $y \in A$ tal que $x \neq y$. Luego, tomando $r_0 = \frac{d(x_0,y)}{4}$ y $0 < r < r_0$, debe ocurrir que existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B(y,r) \cap A_i \neq \emptyset$ y $B(x_0,r) \cap A_i \neq \emptyset$ para toda $i \geq i_0$. Esto implica que $(X - B(x_0,r)) \cap A_i \neq \emptyset$ para toda $i \geq i_0$, esto nos permite asegurar que $Fr(B(x_0,r)) \cap A_i \neq \emptyset$ para toda $i \geq i_0$ y por ser $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión ajena dos a dos, se cumple que $Fr(B(x_0, r))$ es infinito, esto para cada $r \in (0, r_0)$, contradiciendo que $ord(x_0, X) < \aleph_0$. Por lo tanto, ningún subcontinuo de X contiene un continuo de convergencia. Así, dado $S \in C(X)$, por el Teorema 1.25, S es conexo en pequeño en todos sus puntos y, por el Teorema 1.24 S, debe ser localmente conexo. □

Corolario 1.27. *Todo subcontinuo de una gráfica finita es localmente conexo.*

Demostración. Sea X una gráfica finita. Dado $x \in X$, x pertenece a alguno de los n arcos cuya unión es X, por lo cual $ord(x, X) \leq n$, es decir, $ord(x,X) < \aleph_0$. Luego, por el Teorema 1.26 se cumple que todo subcontinuo de X es localmente conexo. □

Teorema 1.28. *[7, Proposición 9.5] Sea X un continuo con más de un punto. Entonces, X es un arco o una curva cerrada simple si y solo si $ord(x, X) \leq 2$ para cada $x \in X$.*

Teorema 1.29. *[7, Lema 9.9] Sea X un continuo con exactamente un punto p tal que, $ord(p,X) \geq 3$. Si $ord(p,X) = n < \aleph_0$, entonces p es vértice de un n-odo simple, el cual es vecindad de p en X.*

El Teorema 1.29 nos ayudará a probar el siguiente teorema, el cual es una caracterización para gráficas finitas.

Teorema 1.30. *Un continuo X es una gráfica finita si y solo si se cumple:*

1. *$ord(x,X) < \aleph_0$ para toda x en X;*

2. *$ord(x,X) \leq 2$ para toda x, excepto para un número finito de $x \in X$.*

Demostración. Sean X una gráfica finita y $x \in X$, supongamos que X les la unión de n arcos que satisfacen la Definición 1.9, si x pertenece a un solo arco se cumple que $ord(x, X) \leq 2$. Es claro que en una gráfica finita el número de puntos extremos por cada arco es, $2n$. Si x es punto extremo de un solo arco, se cumple que $ord(x, X) = 1$, si x pertenece a más de un arco se cumple que $ord(x, X) = l$, donde l es la cantidad de arcos a la que pertenece x, por lo que $2 \leq l \leq n$, así se cumplen (1) y (2).

Sea Y un continuo que saisface (1) y (2). Si Y es un continuo que no tiene puntos de orden mayor o igual que tres, por el Teorema 1.28, Y es un arco o una curva cerrada simple y, por ende, Y es una gráfica finita. Si Y contiene puntos de orden tres o mayor, sea $k_Y = |\{p \in Y : ord(p, X) \geq 3\}|$. Por (2) se cumple que $k_Y \in \mathbb{N}$. Probaremos por inducción sobre k_Y que Y es una gráfica finita.

Si $k_Y = 1$, por el Teorema 1.29, Y contiene un único $n - odo$ y, por el Teorema 1.28, cada punto extremo de este $n - odo$ conecta con una gráfica finita. Luego, por el Teorema 1.15, Y es una gráfica finita. Supongamos que, si Y es un continuo que satisface (1), (2) y dado $n \in \mathbb{N}$, si $k_Y \leq n$, entonces Y es una gráfica finita. Veamos que si Y es un continuo que cumple (1), (2) y $k_Y = n + 1$, entonces Y es una gráfica finita. Sean $p_1, p_2, ..., p_{n+1}$ los puntos cuyo orden en Y es mayor o igual que tres. Como Y satisface (1), por el Teorema 1.26, se cumple que Y es localmente conexo. Luego, para p_1 tomamos un subconjunto abierto y conexo U de Y, tal que $p_1 \in U$ y $p_i \notin cl(U)$ para cada $i \neq 1$. Es claro que $cl(U)$ es un continuo y además, p_1 es el único punto de $cl(U)$ que tiene orden mayor o igual que tres en $cl(U)$. Por (1), podemos suponer que $m = ord(p_1, cl(U))$, para algún $m \in \mathbb{N}$. Así, por el Teorema 1.29, p_1 es vértice de un *n-odo simple*, el cual es vecindad de p_1 en $cl(U)$, y por ende, también lo es en Y. De esto, tenemos que existe un subconjunto abierto y conexo V de Y tal que $p_1 \in V$, donde $cl(V)$ un *m-odo* con $m = ord(p_1, Y)$, por lo que $|Fr(V)| = m$. Sabemos que $Fr(Y - V) = Fr(V)$, con esto podemos asegurar que $Y - V$ tiene a lo más m componentes, digamos $K_1, K_2, ..., K_j$ con $j \leq m$. Como $p_1 \notin K_i$ para toda $i \in \{1, 2, ..., j\}$, se cumple que $k_{K_i} \leq n$, luego, por la suposición inductiva, cada K_i es una gráfica finita.

No es complicado probar que $K_i \cap cl(V) \neq \emptyset$ y $K_i \cap cl(V) \subset Fr(V)$, por lo que cada $K_i \cap cl(V)$ es finito. Resaltamos que $cl(V)$ es una gráfica finita y por el Teorema 1.15, $K_1 \cup cl(V)$ es una gráfica finita.

Notar que $(cl(V) \cup K_1) \cap K_2 = cl(V) \cap K_2$, y nuevamente aplicando el Teorema 1.15, tenemos que $(cl(V) \cup K_1) \cup K_2$ es gráfica finita. Continuando con este procedimiento, tenemos que $Y = cl(V) \cup \bigcup_{i=1}^{j} K_i$ es una gráfica finita. Por lo tanto, por el principio inducción, tenemos que cualquier continuo que satisfaga 1 y 2, será una gráfica finita. $\square$

Corolario 1.31. *Cualquier subcontinuo de una gráfica finita es una gráfica finita.*

El siguiente teorema lo usaremos para demostrar las siguientes dos caracterizaciones.

Teorema 1.32. *[7, Teorema 9.11] Sea X un continuo. Si existe una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ tal que $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$ y $ord(x_i, X) \geq 3$ para toda i, entonces existe un subcontinuo K de X, tal que $ord(K, X) \geq \aleph_0$.*

Si X es localmente conexo, existe un subcontinuo L de X tal que

$$|\{l \in L : \; l \;\; es \;\; punto \;\; extremo \;\; de \;\; L\}| \geq \aleph_0.$$

Teorema 1.33. *Un continuo X es una gráfica finita si y solo si $ord(A, X) < \aleph_0$, para todo subcontinuo A de X.*

Demostración. Supongamos que X es una gráfica finita y sea A un subcontinuo de X. Para calcular $ord(A, X)$ basta contar todos los puntos extremos que tiene A en X, y después, restamos los que a su vez también son puntos extremos de X, el resultado es un número finito que es el orden de A en X, es decir, $ord(A, X) < \aleph_0$. Supongamos ahora que, X es un continuo tal que $ord(A, X) < \aleph_0$ para todo subcontinuo A de X. Entonces X satisface (1) del Teorema 1.30, y por el Teorema 1.32, X satisface (2) del Teorema 1.30. Por lo tanto, X es una gráfica finita. □

Teorema 1.34. *Sea X un continuo localmente conexo. Entonces, X es una gráfica finita si y solo si todo subcontinuo de X tiene una cantidad finita de puntos extremos.*

Demostración. Sea X un continuo localmente conexo. Si suponemos que X es una gráfica finita, por el Corolario 1.31, todo subcontinuo de X es una gráfica finita, luego, por la definición de gráfica finita, toda gráfica finita tiene un número finito de puntos extremos, por ende, todo subcontinuo de X tiene un número finito de puntos extremos.

Ahora, supongamos que X cumple que, dado $A \in C(X)$, A tiene un número finito de puntos extremos. Por el contrarrecíproco de la segunda parte del Teorema 1.32, X debe satisfacer (2) del Teorema 1.30. Supongamos que X no satisface la condición 1 del Teorema 1.30, es decir, existe $p \in X$ tal que $ord(p, X) \geq \aleph_0$. Dado que se cumple (2) del Teorema 1.30, podemos dar un subconjunto abierto y conexo U de X, tal que $p \in U$ y $ord(x, X) \leq 2$ para toda $x \in U - \{p\}$, con $diam(U) < 1$. Por ser X localmente conexo, se tiene que U es arco-conexo, dado $p_1 \in U - \{p\}$ existe A_1 un arco en U con puntos extremos p y p_1. Asumamos de forma inductiva que podemos definir n arcos A_i, $1 \leq i \leq n$, con puntos extremos p y p_i, de tal manera que $diam(A_i) < \frac{1}{i}$ y $A_i \cap A_j = \{p\}$ siempre que $i \neq j$.

Nuevamente, por ser X localmente conexo podemos tomar V un subconjunto abierto, conexo de U tal que $p \in V$, $p_i \notin V$ para cualquier i, con $diam(V) < \frac{1}{n+1}$ y además que, $|Fr(V)| > n$. Dado que $V \subset U$ se tiene que $ord(x, X) \leq 2$ para toda $x \in V - \{p\}$.

Como $|Fr(V)| > n$ ocurre que $V - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$, por lo que existe $p_{n+1} \in V - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Nuevamente, por ser V arco-conexo existe un arco A_{n+1} en V con puntos extremos p y p_{n+1}. Veamos que $A_{n+1} \cap A_i = \{p\}$ para cada $i = 1, 2, ..., n$. Supongamos que existe $q \in A_{n+1} \cap A_j$, para algún j, con $q \neq p$. Como $p_i \notin A_{n+1}$ para toda i, q no es un punto extremo de A_{n+1} ni de A_j, esto implica que q es punto interior de A_{n+1} y A_j, esto asegura la existencia de algún punto en V de orden mayor que 2, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $A_{n+1} \cap A_i = \{p\}$ para cada $i = 1, 2, ..., n$.

Así, por el principio de inducción podemos construir una familia de arcos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ tales que $A_i \cap A_j = \{p\}$ para toda $i \neq j$ y $diam(A_i) < \frac{1}{i}$. Es claro que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es un subcontinuo de X con un número infinito de puntos extremos, lo cual es una contradicción, por ende, X satisface (1) del Teorema 1.30 y como X también satisface (2), tenemos que X es una gráfica finita. $\square$

Teorema 1.35. *Sean X una gráfica finita y $p \in X$. Si C es una componente de $X - \{p\}$, entonces $C \cup \{p\}$ es una gráfica finita.*

Demostración. Sea C una componente de $X - \{p\}$. Veamos que $C \cup \{p\}$ es cerrado en X. Se sabe que C es cerrado en $X - \{p\}$, es decir, existe un conjunto cerrado B de X tal que $(X - \{p\}) \cap B = C$, de esto que $C \cup \{p\} = B \cup \{p\}$ y por lo tanto $C \cup \{p\}$ es cerrado en X, esto implica que $C \cup \{p\}$ es compacto.

Supongamos que $C \cup \{p\}$ no es conexo, por lo que existen U, V abiertos no vacíos de X tales que $C \cup \{p\} \subset U \cup V$, $U \cap V \neq \emptyset$ y $(C \cup \{p\}) \cap U \neq \emptyset$, $(C \cup \{p\}) \cap V \neq \emptyset$. Supongamos, sin perder generalidad, que $C \subset U$, esto implica que $\{p\} \subset V$. Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \cap U = \emptyset$. Note que es posible tomar $c \in C$ de tal manera que exista $q \in B(p, \varepsilon)$ que cumpla que $p \notin cq$, así $C \cup cq$ es un conexo en $X - \{p\}$ que contiene propiamente a C, lo cual es una contradicción, por lo tanto $C \cup \{p\}$ es conexo en X. Así, por el Corolario 1.31 $C \cup \{p\}$ es una gráfica finita. $\square$

Teorema 1.36. *Sean X una gráfica finita y $p \in X$. Si $p \in O(X)$, entonces $X - \{p\}$ tiene a lo mas dos componentes.*

Demostración. Sea J la arista que contiene a p y supongamos que $X - \{p\}$ tiene $n \geq 3$ componentes, tomemos tres de estas componentes C_1, C_2, C_3. Se cumple que $C_i \cap C_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$. Sea $i \in \{1, 2, 3\}$ y tomemos $x_i \in C_i$, por ser X arco-conexo existe $f_i : [0, 1] \to X$ homeomorfismo tal que $f_i(0) = x_i$ y $f_i(1) = p$. Note que existe $\delta > 0$ tal que $f_i([\delta, p)) \subset J \cap C_i$, donde $f_i([\delta, p])$ es un arco que emana de p, esto implica que: $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ ó $C_i \cap C_k \neq \emptyset$ ó $C_j \cap C_k \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $n \leq 2$. $\square$

Definición 1.37. *Dados $A, B \in C(X)$, decimos que una función continua $\alpha : [0, 1] \to C(X)$ es un* ***arco ordenado*** *de A a B en $C(X)$, si $\alpha(0) = A, \alpha(1) = B$ y $\alpha(r) \subsetneq \alpha(s)$ siempre que $r < s$ y $r, s \in [0, 1]$.*

Teorema 1.38. *[3, Teorema 14.6] Sean X un espacio métrico compacto y $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$, entonces existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$.*

Capítulo 2

El espacio $C(p, X)$ para gráficas finitas

Dados un continuo X y $p \in X$ el hiperespacio $C(p, X)$ ha sido estudiado ampliamente. Inicialmente en [2] y después, Patricia Pellicer Covarrubias hace un estudio más profundo en [9]. En este capítulo damos algunas propiedades que necesitaremos del $C(p, X)$ para cuando X es un continuo y presentamos los teoremas pilares para desarrollar este trabajo.

Teorema 2.1. *Sea X un continuo. Si $Y \in C(X)$, entonces $C(Y, X)$ es un continuo.*

Demostración. Sean $A, B \in C(Y, X)$. Por el Teorema 1.38, existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$. Es claro que $\alpha([0,1]) \subset C(Y, X)$, por ende $C(Y, X)$ es arco-conexo y por lo tanto $C(Y, X)$ es conexo.

Para ver que $C(Y, X)$ es compacto, tomemos $A \in \mathrm{cl}(C(Y, X))$ y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(Y, X)$ que converge a A. Note que $A \in C(X)$. Veamos que $Y \subset A$

Supongamos que existe $y \in Y$ tal que $y \notin A$. Por ser A compacto existe $r > 0$ tal que $B(y, r) \cap A = \emptyset$. Observe que $y \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geq n_0$ se cumple que $H(A, A_n) < r$, de esto que $A_{n_0} \subset N(A, r)$, entonces debe existir $a \in A$ tal que $y \in B(a, r)$, pero esto implica que $a \in B(y, r)$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $y \in A$. De esta manera $Y \subset A$ por lo que $A \in C(Y, X)$. Así, que $C(Y, X)$ es cerrado y por ser $C(X)$ compacto, se cumple que $C(Y, X)$ es compacto. Luego, $C(Y, X)$ es un continuo. $\square$

2.1. Las n-celdas en $C(p, X)$

Teorema 2.2. *Sea X un arco con puntos extremos a, b. Si $p \in \{a, b\}$, entonces $C(p, X)$ es un arco; en otro caso, $C(p, X)$ es una 2-celda.*

Demostración. Sea $I = [0, 1]$, bastará probarlo para $X = I$. Sea $p \in I$, tenemos dos casos:

Caso 1. Supongamos que $p \in \{0, 1\}$ y $p = 0$. Considerando la función $g : I \to C(0, I)$ definida por $g(t) = [0, t]$, note que g es un homeomorfismo y, por ende, $C(0, I)$ es un arco. De forma similar, se prueba que $C(1, I)$ es un arco.

Caso 2. Sea $p \in I-\{0, 1\}$ y consideremos la función $g : [0, p]\times[0, 1-p] \to C(p, I)$ dada por $g(r, s) = [p - r, p + s]$, nuevamente g es un homeomorfismo. Como $[0, p]\times[0, 1-p]$ es homeomorfo a una 2-celda se tene que $C(p, X)$ es una 2-celda.

$\square$

Teorema 2.3. *[9, Teorema 3.18] Si X es una curva cerrada simple y $p \in X$, entonces $C(p, X)$ es homeomorfo a una 2-celda.*

Teorema 2.4. *Sean X una gráfica finita, $p \in X$ y $A \in C(p, X)$.*

1. *Si $p \in E(X)$, entonces existe $L \subset C(p, X)$ un arco tal que $A \in L$.*
2. *Si $p \in O(X)$, entonces existe $\mathcal{A} \subset C(p, X)$ una 2-celda tal que $A \in \mathcal{A}$.*

Demostración.

1. Sea $p \in E(X)$, por el Teorema 1.38, existe α un arco ordenado de $\{p\}$ a X a través de A sobre $C(X)$. Sea $L = \alpha([0, 1])$. Como α es arco ordenado, se cumple que $\{p\} = \alpha(0) \subset \alpha(r)$ para $r \in [0, 1]$, por lo que $L \subset C(p, X)$, además debe existir $r_0 \in [0, 1]$ tal que $\alpha(r_0) = A$, es decir, $A \in L$.

2. Sea $p \in O(X)$ y $A \in C(p, X)$. Si X es una curva cerrada simple, por el Teorema 2.3 se cumple la sentencia. Supongamos ahora que, X no es una curva cerrada simple, de esto tenemos dos casos:

(i) $A-\{p\}$ es conexo. Sea $J=vw$ la arista de X que contiene a p, donde v,w son vértices. Si $A=\{p\}$, consideremos $\alpha,\beta:[0,1]\to C(p,X)$ arcos ordenados de $\{p\}$ a pw, y de $\{p\}$ a vp respectivamente y definamos $h:[0,1]\times[0,1]\to C(p,X)$ como $h(s,t)=\alpha(s)\cup\beta(t)$, nuevamente $h([0,1]\times[0,1])\subset C(p,X)$ es homeomorfo a una 2-celda y $h(0,0)=A$. Si $A\neq\{p\}$ consideremos los dos casos siguientes.

Si p es un punto extremo de A, sin perder generalidad, tomemos un arco L tal que $L\subset vp$ tal que $L\cap A=\{p\}$. Sean $\alpha,\beta:[0,1]\to C(p,X)$ arcos ordenados de $\{p\}$ a A, y de $\{p\}$ a L respectivamente. Definamos $h:[0,1]\times[0,1]\to C(p,X)$ como $h(s,t)=\alpha(s)\cup\beta(t)$, nuevamente $h([0,1]\times[0,1])\subset C(p,X)$ es homeomorfo a una 2-celda y $h(1,0)=A$.

Si $p\in O(A)$, sean m el punto medio de pw y a,b los puntos medios de los segmentos pm y mw respectivamente.

Como $A-\{p\}$ es conexo, $A-ab$ también es conexo y además, $p\in A-ab$. Sea C la clausura de $A-ab$ sobre X. Tomemos ahora $\alpha:[0,1]\to C(p,X)$ el arco ordenado de C a $C\cup am$ y $\beta:[0,1]\to C(p,X)$ un arco ordenado de C a $C\cup mb$. Definiendo $h:[0,1]\times[0,1]\to C(p,X)$ como $h(s,t)=\alpha(s)\cup\beta(t)$ obtenemos que $h([0,1]\times[0,1])$ es una 2-celda contenida en $C(p,X)$ y $h(1,1)=C\cup am\cup mb=A$.

(ii) $A-\{p\}$ no es conexo. Sean C_1 y C_2 las componentes de $A-\{p\}$. Consideremos $\alpha_i:[0,1]\to C(p,X)$ un arco ordenado de $\{p\}$ a $C_i\cup\{p\}$, esto para $i\in\{1,2\}$. Definimos $h:[0,1]\times[0,1]\to C(p,X)$ como $h(s,t)=\alpha_1(s)\cup\alpha_2(t)$, no es difícil ver que h es un homeomorfismo sobre su propia imagen, tomando $\mathcal{A}=h([0,1]\times[0,1])\subset C(p,X)$ se cumple que $\mathcal{A}$ es homeomorfo a una 2-celda y $A=h(1,1)$.

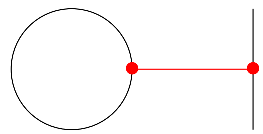
$\square$

Definición 2.5. *Sea $k\in\mathbb{N}$. Un continuo X es un k-odo si existe $M\in C(X)$ tal que $X-M$ tiene al menos k componentes. Al conjunto M le llamamos* ***corazón*** *del k-odo.*

Si X es una gráfica finita y $p\in X$, hay una diferencia entre que $ord(p,X)=k$ y que p pertenezca al corazón de un k-odo en X. En el caso en el que X

es una curva cerrada simple, todo punto en X tiene orden 2, sin embargo, la curva cerrada simple no es un 2-odo.

Consideremos la siguiente gráfica finita, tomando a M como el subcontinuo en color rojo, es claro que M es el corazón de un 3-odo, ya que $X - M$ tiene 3 componentes.



Teorema 2.6. *[12, Corolario 3.12] Sea X un continuo y $p \in X$. Entonces, $C(p, X)$ contiene una k-celda si y solo si p está contenido en el corazón de un k-odo.*

Para la clase de las gráficas finitas se tiene un resultado similar al anterior, que puede ser considerado una generalización en algunos casos particulares.

Teorema 2.7. *Sea X una gráfica finita y $p \in X$. Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\mathcal{A} \subset C(p, X)$ tal que $\mathcal{A}$ contiene una n-celda, donde $n = ord(p, X)$ y $H_2(\mathcal{A}, \{\{p\}\}) < \varepsilon$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $J = vw$ una arista que contiene a p, tenemos 3 casos:

1. $p \in E(X)$. Podemos suponer que $v = p$. Existe $\alpha : [0, 1] \to C(X)$ un arco ordenado de $\{p\}$ a J. Como α es continua en cero y $\alpha(0) = \{p\}$, existe $\delta > 0$ tal que $\alpha([0, \alpha]) \subset B_H(\{p\}, \varepsilon)$, por lo cual, tomando $\mathcal{A} = \alpha([0, \alpha])$ se cumple lo deseado.

2. $p \in O(X)$. Consideremos ahora $\alpha, \beta : [0, 1] \to C(X)$ dos arcos ordenados de $\{p\}$ a pv y de $\{p\}$ a pw respectivamente. De la continuidad en cero de α, β existe $\delta > 0$ tal que $\delta([0, \delta]), \beta([0, \delta]) \subset B_H(\{p\}, \varepsilon)$. Definiendo $f : [0, \delta] \times [0, \delta] \to C(X)$ por $f(s, r) = \delta(s) \cup \beta(r)$ y tomando $\mathcal{A} = f([0, \delta] \times [0, \delta])$ se cumple lo deseado.

3. $p \in R(X)$. Supongamos que $ord(p, X) = n \in \mathbb{N}$ y $q_1, q_2, ..., q_n \in R(X)$ tales que $J_i = p, q_i$ son las aristas que emanan de p. Note que existen $f_i : [0, 1] \to C(p, J_i)$ homeomorfismos tales que $f_i(0) = \{p\}$ y $f_i(1) = J_i$, además, podemos afirmar que la longitud de $f_i(l)$ es precisamente l. De

la continuidad en cero, existe $\delta > 0$ tal que $f_i([0,\delta]) \subset B_H(\{p\},\varepsilon)$. Al definir $f : [0,1]^n \to C(p,X)$ por $f(s_1, s_2, ..., s_n) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(s_i)$, se cumple que f es un homeomorfismo, por lo que basta tomar $\mathcal{A} = f([0,\delta]^n)$. Además, note que $\{p\}$ es un punto interior de $\mathcal{A}$.

Cabe resaltar que en los tres casos la colección $\mathcal{A}$ no solo contiene una n-celda, sino que $\mathcal{A}$ es una n-celda.

□

Teorema 2.8. *Sea X una gráfica finita y $p \in X$. Para cada $A \in C(p,X) - \{\{p\}\}$ y $\varepsilon > 0$, existe $\mathcal{A} \subset C(p,X)$ tal que $\mathcal{A}$ contiene una n-celda, donde $n = ord(p,X)$ y $H_2(\mathcal{A}, \{A\}) < \varepsilon$.*

Demostración. Sean $p \in X$, $A \in C(p,X)$ y $\varepsilon > 0$. Tenemos 3 casos:

Caso 1. $p \in E(X)$. Por el Teorema 1.38 existe $\alpha : [0,1] \to C(X)$ arco ordenado tal que $\alpha(0) = \{p\}$ y $\alpha(1) = A$.

Podemos tomar una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset [0,1]$ tal que $x_i \to 1$, de este modo, tenemos una sucesión $\{\alpha(x_i)\} \subset C(p,X)$ tal que $\alpha(x_i) \to A$. Como $\varepsilon > 0$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $H(\alpha(x_{i_0}), A) < \varepsilon$. Sea $A_0 = \alpha(x_{i_0})$, por el Teorema 1.38 existe $\beta : [0,1] \to C(X)$ arco ordenado tal que $\beta(0) = A_0$ y $\beta(1) = A$, tomando $\beta([0,1]) = \mathcal{A} \subset C(p,X)$ se cumple que $\mathcal{A}$ es un arco y además, $A \in \mathcal{A}$. Por ser $\mathcal{A}$ un arco, se cumple que $\mathcal{A}$ contiene un 1-celda, donde $1 = ord(p,X)$.

Como $\{A\} \subset \mathcal{A}$, se cumple que $\{A\} \subset N_2(\mathcal{A},\varepsilon)$, veamos ahora que

$$\mathcal{A} \subset N_2(\{A\},\varepsilon) = B_H(A,\varepsilon) = \{B \in 2^X : H(A,B) < \varepsilon\}.$$

Sea $B \in \mathcal{A}$, por el Teorema 1.7 inciso 1 se cumple que $H(B,A) \leq H(A_0,A) < \varepsilon$, por lo que $\mathcal{A} \subset N_2(\{A\},\varepsilon)$. De este modo, $H_2(\mathcal{A},\{A\}) < \varepsilon$.

Caso 2. $p \in O(X)$. Si X es una curva cerrada simple, por el Corolario 2.3 se cumple la sentencia. Supongamos ahora que, X no es una curva cerrada simple, de esto tenemos dos casos:

(i) $A - \{p\}$ es conexo. Sea $J = vw$ la arista de X que contiene a p, donde v, w son vértices. Si p es un punto extremo de A, sin perder generalidad, podemos tomar un arco L tal que $L \subset vp$ tal que $L \cap A = \{p\}$. Sean $\alpha, \beta : [0,1] \to C(p,X)$ arcos ordenados de $\{p\}$ a A, y de $\{p\}$ a L respectivamente. Por ser α continua en 1, existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada $s \in [1-\delta_1, 1]$ se cumple que $H(\alpha(s), A) < \varepsilon$. A su vez, por ser β continua en 0, existe $\delta_2 > 0$ tal que para cada $t \in [0, \delta_2]$ se cumple que $H(\beta(t), \{p\}) < \varepsilon$. Definamos $h : [1-\delta_1, 1] \times [0, \delta_2] \to C(p,X)$ como $h(s,t) = \alpha(s) \cup \beta(t)$, tomando $\mathcal{A} = Im(h)$ es claro que $\mathcal{A}$ contiene una 2-celda y por el Teorema 1.7, inciso 2, se cumple que $H_2(\mathcal{A}, \{A\}) < \varepsilon$.

Si $p \in O(A)$, sean m el punto medio de pw y a, b los puntos medios de los segmento pm y mw, respectivamente. Como $A - \{p\}$ es conexo, $A - ab$ también es conexo y además $p \in A - ab$. Sea E la clausura de $A - ab$ sobre X. Tomemos ahora $\alpha : [0,1] \to C(p,X)$ el arco ordenado de E a $E \cup am$ y $\beta : [0,1] \to C(p,X)$ un arco ordenado de E a $E \cup mb$. Por ser α continua en 1, existe $\delta_1 > 0$ tal que, para cada $s \in [1-\delta_1, 1]$ se cumple que $H(\alpha(s), E \cup am) < \varepsilon$. A su vez, por ser β continua en 1, existe $\delta_2 > 0$ tal que, para cada $t \in [1-\delta_2, 1]$ se cumple que $H(\beta(t), E \cup mb) < \varepsilon$. Definiendo $h : [1-\delta_1, 1] \times [1-\delta_2, 1] \to C(p,X)$ como $h(s,t) = \alpha(s) \cup \beta(t)$ y tomando $\mathcal{A} = Im(h)$ se cumple que $\mathcal{A}$ contiene una 2-celda y, por el inciso 2 del Teorema 1.7, $H(\mathcal{A}, \{A\}) < \varepsilon$.

(ii) $A - \{p\}$ no es conexo. Sean E_1 y E_2 las componentes de $A - \{p\}$. Consideremos para $i \in \{1,2\}$, $\alpha_i : [0,1] \to C(p,X)$ un arco ordenado de $\{p\}$ a $E_i \cup \{p\}$. Por ser estas funciones continuas en 1, existe $\delta_i > 0$ tal que, para cada $t_i \in [1-\delta_i, 1]$ ocurre que $H(\delta_i(t_i), E_i \cup \{p\}) < \varepsilon$. Si se define $h : [1-\delta_1, 1] \times [1-\delta_2, 1] \to C(p,X)$ por $h(t_1, t_2) = \alpha_1(t_1) \cup \alpha_2(t_2)$ y se toma $\mathcal{A} = Im(h)$, se cumple lo deseado.

Caso 3. $p \in R(X)$. Supongamos, sin perder generalidad, que $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ y consideremos $L_1, L_2, ..., L_n$, las n aristas que emanan de p. Para cada componente Q de $A - \{p\}$, se cumple que $Q \cup \{p\}$ es una subgráfica de X. Dependiendo de la naturaleza de A, tenemos dos casos: $p \in O(Q \cup \{p\}) \cup R(Q \cup \{p\})$ o $p \in E(Q \cup \{p\})$.

(a) Para el primer caso, sea $\mathcal{C} = \{Q \subset X : Q$ es componente de $A - \{p\}$ y $p \in O(Q \cup \{p\}) \cup R(Q \cup \{p\})\}$, podemos tomar $l = |\mathcal{C}|$, por lo que $\mathcal{C} = \{Q_1, Q_2, ..., Q_l\}$.

Sea $Q_i \in \mathcal{C}$, se tiene que $m(Q_i) = ord(p, Q_i \cup \{p\}) \geq 2$. Supongamos, sin perder generalidad, que $L_1, L_2, ..., L_{m(Q_i)}$ son las aristas de X, contenidas en $Q_i \cup \{p\}$, (estas existen ya que $m(Q_i) \geq 2$, si $m(Q_i) < 2$ no existirían). Sea m_j el punto medio de cada L_j. Luego, para cada $j \in \{1, 2, ..., m(Q_i) - 1\}$, podemos tomar $a_j, b_j \in L_j$, tales que, $m_j \in a_j b_j$, $d(a_j, m_j) = d(b_j, m_j) = \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(p, b_j) < d(p, a_j)$. Definamos el siguiente conjunto

$$G_{Q_i} = Q_i \cup \{p\} - \bigcup_{j=1}^{m(Q_i)-1} (a_j b_j).$$

Dado que $L_{m(Q_i)} \subset G_{Q_i}$, se puede probar que G_{Q_i} es arco-conexo. A su vez, por ser $\bigcup_{j=1}^{m(Q_i)-1}(a_j b_j)$ un abierto, se cumple que G_Q es cerrado y, por ende, compacto. Luego, G_{Q_i} es un subcontinuo de X. Para cada $q \in (a_j b_j)$ se cumple que $q \in B(a_j, \frac{3\varepsilon}{4})$ o $q \in B(b_j, \frac{3\varepsilon}{4})$. Por ende, dado $D \in C(G_{Q_i}, Q_i \cup \{p\})$ se cumple que $H(D, Q_i \cup \{p\}) < \varepsilon$.

Para cada $j \in \{1, 2, ..., m(Q_i) - 1\}$, tomamos $a_j^{'}, b_j^{'}$ los puntos medios de $a_j m_j$ y $m_j b_j$ respectivamente. Dado $t \in [0, \frac{\varepsilon}{4}]$, denotemos por $J_j^a(t)$ al arco en $a_j a_j^{'}$ que contiene a a_j y, cuya longitud es igual a t. También, para $t \in [0, \frac{\varepsilon}{4}]$, denotemos por $J_j^b(t)$ al arco en $b_j^{'} b_j$ que contiene a b_j, cuya longitud es igual a t. Para cada j definamos la función $\gamma_j : [0, \frac{\varepsilon}{4}]^2 \to C(G_{Q_i}, Q_i \cup \{p\})$ por $\gamma_j(s,t) = G_{Q_i} \cup J_j^a \cup J_j^b$. No es difćil convencerse de que γ_j es continua e inyectiva. Por lo que γ_j es un encaje. Como esto se pudo hacer para cada $j \in \{1, ..., m(Q_i) - 1\}$, podemos definir la siguiente función para toda la componente Q_i.

Sea $\gamma_{Q_i} : [0, \frac{\varepsilon}{4}]^{(m(Q_i)-1)} \times [0, \frac{\varepsilon}{4}]^{(m(Q_i)-1)} \to C(G_{Q_i}, Q_i \cup \{p\})$ la función definida por,

$$\gamma_{Q_i}(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}) = \bigcup_{j=1}^{m(Q_i)-1} \gamma_j(s_j, t_j),$$

donde $\overrightarrow{s} = (s_1, s_2, ..., s_{m(Q_i)-1})$, $\overrightarrow{t} = (t_1, t_2, ..., t_{m(Q_i)-1})$. Es inmediato que γ_{Q_i} es inyectiva y continua. Por lo que γ_{Q_i} es un encaje.

Denotemos por $m = \sum_{i=1}^{l} m(Q_i)$. Se define la función $\gamma : [0, \frac{\varepsilon}{4}]^{2(m-l)} \to \bigcup_{i=1}^{l} C(G_{Q_i}, Q_i \cup \{p\})$, dada por

$$\gamma(\overrightarrow{s_1}, ..., \overrightarrow{s_l}, \overrightarrow{t_1}, ..., \overrightarrow{t_l}) = \bigcup_{i=1}^{l} \gamma_{Q_i}(\overrightarrow{s_i}, \overrightarrow{t_i}).$$

Como cada γ_{Q_i} es un encaje, es fácil ver que γ también es un encaje.

(b) $p \in E(Q \cup \{p\})$. Sea $\mathcal{D} = \{Q \subset X : Q$ es componente de $A - \{p\}$ y $p \in E(Q \cup \{p\})\}$ y consideremos que $k = |\mathcal{D}|$. De esto, podemos decir que $\mathcal{D} = \{Q_1, ..., Q_k\}$. Para cada $Q_j \in \mathcal{D}$ podemos tomar un arco ordenado α_{Q_j} en $C(Q_j \cup \{p\})$, que va de $\{p\}$ a $Q_j \cup \{p\}$. Por ser α_{Q_j} continua en 1, existe $\delta_{Q_j} > 0$ tal que, para cada $t \in [1 - \delta_{Q_j}, 1]$ se cumple que $H(\alpha_{Q_j}(t), Q_j \cup \{p\}) < \varepsilon$.

Se define la función $\alpha : \prod_{j=1}^{k} [1 - \delta_{Q_j}, 1] \to \bigcup_{j=1}^{k} C(Q_j \cup \{p\})$ por la regla $\alpha(\overrightarrow{x}) = \bigcup_{j=1}^{k} \alpha_{Q_j}(x_j)$, para $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_k) \in \prod_{j=1}^{k} [1 - \delta_{Q_j}, 1]$. Por la continuidad e inyectividad de las funciones α_{Q_j}, se cumple que α es un encaje.

Es claro que $n \geq m + k$ (ya que A no necesariamente toca a todas las aristas que tocan a p) sea $r = n - (m + k)$. Si $r > 0$, podemos tomar $L_{n_1}, L_{n_2}, ..., L_{n_r}$ las aristas restantes. Se tiene que existe, $Z_i \subset L_{n_i}$ un arco tal que $Z_i \cap A = \{p\}$. Para cada $i \in \{1, ..., r\}$, sea β_i un arco ordenado en $C(Z_i)$ que va de $\{p\}$ a Z_i. Por la continuidad de β_i en cero, existe $\delta_i > 0$ tal que, para toda $t \in [0, \delta_i]$ se cumple que $H(\{p\}, \beta_i(t)) < \varepsilon$ y además, $\beta_i(t) \cap A = \{p\}$. Consideremos ahora la función $\beta : \prod_{i=1}^{r} [0, \delta_i] \to \bigcup_{i=1}^{r} C(L_{n_i})$, definida por

$$\beta(\overrightarrow{x}) = \bigcup_{i=1}^{r} \beta_i(x_i)$$

, donde $\overrightarrow{x} = (x_1, ..., x_r) \in \prod_{i=1}^{r}[0, \delta_i]$.

Por la continuidad e inyectividad de las funciones β_i, se cumple que β es un encaje.

Podemos tomar las siguientes funciones, de tal manera que sean homeomorfismos.

a) $h_{2(m-l)} : [0, 1]^{2(m-l)} \to [0, \frac{\varepsilon}{4}]^{2(m-l)}$.

b) $h_k : [0, 1]^k \to \prod_{j=1}^{k}[1 - \delta_{Q_j}, 1]$.

c) $h_r : [0, 1]^r \to \prod_{i=1}^{r}[0, \delta_i]$.

Finalmente definamos $h : [0, 1]^{2(m-l)} \times [0, 1]^k \times [0, 1]^r \to C(p, X)$, por

$$h(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) = \gamma \circ h_{2(m-l)}(\overrightarrow{x}) \cup \alpha \circ h_k(\overrightarrow{y}) \cup \beta \circ h_r(\overrightarrow{z})$$

donde $\overrightarrow{x} \in [0, 1]^{2(m-l)}$, $\overrightarrow{y} \in [0, 1]^k$ y $\overrightarrow{z} \in [0, 1]^r$. Por como se han definido las funciones en que involucra h se cumple que h es un encaje.

Tomemos $\mathcal{A} = Im(h)$, es claro que $\mathcal{A}$ es una $(2(m - l) + k + r) - celda$ que esta contenida en $C(p, X)$. Como $m = \sum_{i=1}^{l} m(Q_i)$ y $m(Q_i) \geq 2$, se cumple que $m \geq 2l$. Por lo que $m - 2l \geq 0$, de esto que $2(m - l) + k + r \geq n$. Entonces, $\mathcal{A}$ contiene una $n - celda$.

Para ver que $H_2(\mathcal{A}, \{A\}) < \varepsilon$, basta probar que, para todo $B \in \mathcal{A}$ se cumple que $H(A, B) < \varepsilon$; por como se ha construido $\mathcal{A}$, es claro que esto ocurre, por ende $H(\mathcal{A}, \{A\}) < \varepsilon$.

□

Veamos un ejemplo del proceso que se realiza en el Teorema 2.8. Consideremos a X como en la figura 2.1, al punto p, como el punto en color negro y $A \in C(p, X)$, como la unión de los segmentos en color rojo y azul. Se tiene que $ord(p, X) = 5$. Note que $A - \{p\}$ tiene 2 componentes, una de color rojo, digamos Q, y la otra en color azul, digamos B. Se cumple que $ord(p, Q \cup \{p\}) = 3$, al hacer el proceso de el caso (a), se tiene que $l = 1$ y por ende γ sería una función sobre $[0,\frac{\varepsilon}{4}]^4$. A su vez, B es la única componente de $A-\{p\}$ que cumple que $p\in E(B\cup\{p\})$, por lo cual la función α está definida sobre $[1-\delta_B,1]$. Finalmente, como el segmento en color verde no está contenido en A, se cumple que $r=1$ y por lo tanto β está definida sobre $[0,\delta_1]$. De esto que, la función h define una $6-celda$ en $C(p,X)$ como en el Teorema 2.8.

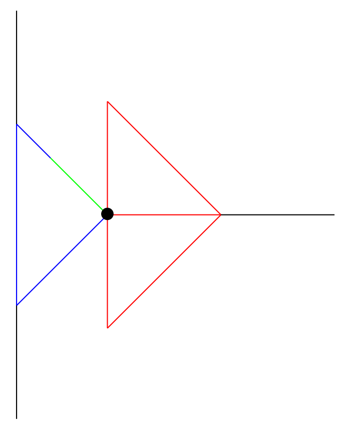


Figura 2.1: Gráfica de X.

2.2. El orden y $C(p,X)$

Teorema 2.9. *Sean X,Y gráficas finitas y $p\in X$, $q\in Y$ tales que $C(p,X)\approx C(q,Y)$, entonces $ord(p,X)=ord(q,Y)$.*

Demostración. Sean $n=ord(p,X)$, $ord(q,Y)=m$ y supongamos que $n<m$. Como $C(p,X)\approx C(q,Y)$ existe $h:C(p,X)\to C(q,Y)$ un homeomorfismo. Sea $\varepsilon=\frac{\text{mín}\{d(p,r):\ r\in V(X)\}}{2}$, por el Teorema 2.8 y la observación 2.7, existe $\mathcal{A}\subset C(p,X)$ una $n-celda$, tal que $H_2(\mathcal{A},\{\{p\}\})<\varepsilon$ y además, $\{p\}$ es un punto interior de $\mathcal{A}$. Entonces, existe $\varepsilon_0<\varepsilon$ tal que $B_H(\{p\},\varepsilon_0)\subset\mathcal{A}$. Ahora, por ser h^{-1} continua, existe $\delta>0$ tal que para cada $D\in B_H(h(\{p\}),\delta)$ ocurre que $H(h^{-1}(D),\{p\})<\frac{\varepsilon_0}{2}$.

Por el Teorema 2.8 existe $\mathcal{A}'\subset C(q,Y)$, que contiene una $m-celda$, tal que $H_2(\mathcal{A}',\{h(\{p\})\})<\delta$. Esto implica que $h^{-1}(\mathcal{A}')\subset B_H(\{p\},\frac{\varepsilon_0}{2})$, entonces $h^{-1}(\mathcal{A}')\subset\mathcal{A}$. Es claro que, $h^{-1}(\mathcal{A}')$ contiene una $m-celda$, lo cual es una contradicción, ya que $\mathcal{A}$ es una $n-celda$, así $n\geq m$. Análogamente se puede demostrar que $m\geq n$. Por lo tanto, $m=n$. □

El Teorema 2.9 asegura que en una gráfica finita X, dados $p, q \in X$ tales que $C(p,X) \approx C(q,X)$, se cumple lo siguiente:

1. Si $p \in E(X)$, entonces $q \in E(X)$.
2. Si $p \in O(X)$, entonces $q \in O(X)$.
3. Si $p \in R(X)$, entonces $q \in R(X)$.

Definición 2.10. *Sea X una gráfica finita, que no es un arco. Si $q \in E(X)$, denotamos por $v(q)$ al único punto en $R(X)$ tal que la componente Q de $X - \{v(q)\}$, que contiene a q, satisface que $Q \cup \{v(q)\}$ es un arco.*

Un punto $v(q)$ es el primer punto de ramificación que nos encontramos, si caminamos sobre la gráfica finita saliendo desde p.

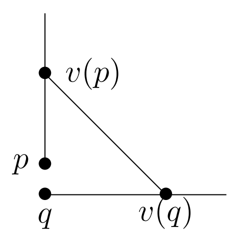


Figura 2.2: Puntos $v(q)$ y $v(p)$.

Teorema 2.11. *Sea X una gráfica finita distinta de un arco. Si $e_1, e_2 \in E(X)$ y $C(e_1, X) \approx C(e_2, X)$, entonces $ord(v(e_1), X) = ord(v(e_2), X)$.*

Demostración. Sea $h : C(e_1, X) \to C(e_2, X)$ un homeomorfismo. Consideremos las aristas de X, $l_1 = e_1v(e_1)$ y $l_2 = e_2v(e_2)$, donde $n = ord(v(e_1), X) \geq 3$ y $m = ord(v(e_2), X) \geq 3$. Sea $A \in C(e_1, l_1) - \{l_1\}$, podemos suponer que $A = e_1r$, para algún $r \in l_1 - \{v(e_1)\}$. Tomemos $\varepsilon = d(r, v(e_1))$ y supongamos que $h(A) \notin C(e_2, l_2)$. Como la función inversa de h es continua, h^{-1} es continua en $h(A)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que, para todo $D \in B_H(h(A), \delta)$ se cumple que $H(h^{-1}(D), A) < \varepsilon$. Por como se ha elegido ε se cumple que, $h^{-1}(D) \in C(e_1, l_1)$ para cada $D \in B_H(h(A), \delta)$. Es claro que $h(A) \in C(e_2, X)$ y como $h(A) \notin C(e_2, l_2)$ se cumple que $v(e_2) \in h(A)$.

Así, por el Teorema 2.8, existe $\mathcal{A} \subset C(v(e_2), X)$, que contiene una $m-celda$, tal que $H_2(\mathcal{A}, \{h(A)\}) < \delta$. Esto implica que $\mathcal{A} \subset B_H(h(A), \delta)$ y por ende $h^{-1}(\mathcal{A}) \subset C(e_1, l_1)$. Es claro que $h^{-1}(\mathcal{A})$ contiene una m-celda. Pero por el Teorema 2.2, $C(e_1, l_1)$ es un arco, que es una contradicción. Por lo tanto, $h(A) \in C(e_2, l_2)$.

Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(e_1, l_1) - \{l_1\}$ una sucesión que converge a l_1, por la continuidad de h, se cumple que la sucesión $\{h(A_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset C(e_2, l_2)$ converge a $h(l_1)$ y por ser $C(e_2, l_2)$ cerrado, se tiene que $h(l_1) \in C(e_2, l_2)$.

Veamos que $h(l_1) = l_2$. Supongamos que $h(l_1) \neq l_2$, entonces $h(l_1) = e_2 r$, para algún $r \in l_2 - \{v(e_2)\}$. Sea $\varepsilon = d(r, v(e_2))$, por la continuidad de h, existe $\delta > 0$ tal que, para cada $D \in B_H(l_1, \delta)$ se cumple que $H(h(D), h(l_1)) < \varepsilon$. Por como se eligió ε tenemos que, $h(D) \in C(e_2, l_2)$ para cada $D \in B_H(l_1, \delta)$. Como $v(e_1) \in l_1$, por el Teorema 2.8, existe $\mathcal{A} \subset C(v(e_1), X)$, el cual contiene una $n - celda$ y además $H_2(\mathcal{A}, \{l_1\}) < \delta$. De esto último, se tiene que $\mathcal{A} \subset B_H(l_1, \delta)$ y por lo tanto $h(\mathcal{A}) \subset C(e_2, l_2)$, lo cual es una contradicción, porque por [9, Teorema 3.17] $C(e_2, l_2)$ es un arco y $h(\mathcal{A})$ contiene una n-celda. Por lo tanto, $h(l_1) = l_2$.

Con argumentos análogos, se prueba que $h^{-1}(C(e_2, l_2)) \subset C(e_1, l_1)$, entonces $h(C(e_1, l_1)) = C(e_2, l_2)$. Definamos los siguientes conjuntos: $Y_1 = (C(e_1, X) - C(e_1, l_1)) \cup \{l_1\}$, $Y_2 = (C(e_2, X) - C(e_2, l_2)) \cup \{l_2\}$, $Z_1 = cl(X - l_1)$ y $Z_2 = cl(X - l_2)$. Ahora definamos las funciones, $f_1 : Y_1 \to C(v(e_1), Z_1)$ por $f_1(A) = (A - l_1) \cup \{v(e_1)\}$ y $f_2 : Y_2 \to C(v(e_2), Z_2)$ por $f_2(B) = (B - l_2) \cup \{v(e_2)\}$. Observe que las funciones f_1 y f_2 son homeomorfismos, así $Y_1 \approx C(v(e_1), Z_1)$ y $Y_2 \approx C(v(e_2), Z_2)$. La función h da un homeomorfismo entre Y_1 y Y_2, entonces $C(v(e_1), Z_1) \approx C(v(e_2), Z_2)$, luego por el Teorema 2.9, se cumple que $ord(v(e_1), Z_1) = ord(v(e_2), Z_2)$. Es claro que, $ord(v(e_1), X) = ord(v(e_1), Z_1) + 1$ y $ord(v(e_2), X) = ord(v(e_2), Z_2) + 1$, por lo tanto, $ord(v(e_1), X) = ord(v(e_2), X)$. □

Definición 2.12. *Sean X una gráfica finita, $p \in O(X)$ y vw la arista que contiene a p, con $v, w \in V(X)$. Se define*

$$\Sigma(p, X) = \begin{cases} ord(v, X) + ord(w, X), & si\ v \neq w, \\ ord(v, X), & si\ v = w. \end{cases}$$

Teorema 2.13. *Sean X un continuo y $L \in C(X)$. Entonces, L esta contenido en el corazón de un $k-odo$ de X si y solo si $C(L,X)$ contiene una $k-celda$.*

La demostración se puede consultar en [12] Corolario 3.15.

Teorema 2.14. *Sea X una gráfica finita. Si A es una arista de X y $p \in O(X) \cap A$, entonces $C(p,X)$ contiene una $\Sigma(p,X)-celda$.*

Demostración. Sea $A = vw$, con $v, w \in V(x)$. Tenemos los siguientes dos casos:

1. $v = w$. Sea $k = ord(v,X) = \Sigma(p,X)$. Se tiene que A es una curva cerrada simple, consideremos $A_1 = pv$ y $A_2 = pw$ de tal manera que $A = A_1 \cup A_2$. Tomemos $p_1, p_2 \in X$, con $p_1 \neq p_2$, tal que $A_1 = pp_1 \cup p_1p_2 \cup p_2v$. Podemos tomar $q_1, q_2, ..., q_{k-2} \in X$, puntos distintos dos a dos, tales que $vq_i \cap vq_j = \{v\}$, $j \neq i$. Sea $V = \bigcup_{i=1}^{k-2} vq_i$, observar que $Y = V \cup vp_1 \cup p_2w$ es un continuo. Si $M = pw$, se cumple que $Y - M$ tiene exactamente k componentes en Y, es decir, Y es un $k - odo$ y $p \in M$, donde M es el corazón. Luego, por el Teorema 2.13, $C(p,X)$ contiene una $\Sigma(p,X) - celda$.

2. $v \neq w$. Sean $k_1 = ord(v,X)$ y $k_2 = ord(w,X)$. Podemos tomar $r_1, ..., r_{k_1} \in X$, puntos distintos dos a dos, tal que $vr_i \cap vr_j = \{v\}$, $i \neq j$. También es posible seleccionar $s_1, ..., s_{k_2} \in X$, puntos distintos dos a dos, tales que $ws_i \cap ws_j = \{w\}$ cuando $i \neq j$. Sean $V = \bigcup_{i=1}^{k_1} vr_i$ y $W = \bigcup_{i=1}^{k_2} ws_i$, no es difícil probar que $Y = V \cup A \cup W$ es un continuo y que $Y - A$ tiene $k_1 + k_2 = \Sigma(p,X)$ componentes en Y, es decir, Y es un $\Sigma(p,X) - odo$ y A, es el corazón. Como $p \in A$ por el Teorema 2.13, se cumple que $C(p,X)$ contiene una $\Sigma(p,X) - celda$.

□

Lema 2.15. *Sean X una gráfica finita distinta de un arco o una curva cerrada simple, $p \in O(X)$ y $l = ab$ la arista que contiene a p. Entonces, para cada $A \in C(p,l)$ tal que $A \cap \{a,b\} \neq \emptyset$ y para $1 > \varepsilon > H(A,l)$ existen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos k-celdas, tales que $\mathcal{A} \subset (B_H(A,\varepsilon) - C(p,l)) \cup \{l\} \subset \mathcal{B}$, donde $k = \Sigma(p,X) - 2$.*

Demostración. Sean $k_1 = ord(a, X)$ y $k_2 = ord(b, X)$. Tenemos dos casos.

Caso 1 $A = l$. Para este caso, tenemos dos subcasos:

Subcaso 1 (a) $a = b$. En este caso, l es una curva cerrada simple y $\Sigma(p, X) = k_1$. Podemos tomar $r_1, r_2, ..., r_{k_1} \in O(X)$ tal que: ar_i es un arco que emana de a tal que $ar_i \cap ar_j = \{a\}$ y $d(a, r_i) < \varepsilon$. Supongamos, sin perder generalidad, que $ar_{k_1}, ar_{k_1-1} \subset l$. Consideremos ahora $A_i = l \cup ar_i$. Por el Teorema 1.38, existe $f_i : [0, 1] \to C(l, A_i)$ un arco ordenado de l a A_i, cabe resaltar que f_i lo elegimos como un homeomorfismo. Tomemos ahora $f : [0, 1]^{k_1-2} \to C(p, X)$ tal que $f(x_1, x_2, ..., x_{k_1-2}) = \bigcup_{i=1}^{k_1-2} f(x_i)$. Sea $\mathcal{A} = f([0, 1]^{k_1-2})$, note que $H(l, A_i) < \varepsilon$ y además, $\mathcal{A} \cap C(p, l) = \{l\}$ lo cual implica que $\mathcal{A} \subset (B_H(l, \varepsilon) - C(p, l)) \cup \{l\}$.

Ahora tomemos $q_1, q_2, ..., q_{k_1} \in O(X)$ tal que: aq_i es un arco que emana de a tal que $aq_i \cap aq_j = \{a\}$ y $\varepsilon < d(a, q_i) < 1$. Supongamos, sin perder generalidad, que $aq_{k_1}, aq_{k_1-1} \subset l$. Consideremos ahora $B_i = l \cup aq_i$. Por el Teorema 1.38 existe $f_i : [0, 1] \to C(l, B_i)$ un arco ordenado de l a B_i, cabe resaltar que f_i lo elegimos como un homeomorfismo. Tomemos ahora $f : [0, 1]^{k_1-2} \to C(p, X)$ tal que $f(x_1, x_2, ..., x_{k_1-2}) = \bigcup_{i=1}^{k_1-2} f(x_i)$. Sea $\mathcal{B} = f([0, 1]^{k_1-2})$, por la construcción de f se cumple que $(B_H(l, \varepsilon) - C(p, l)) \cup \{l\} \subset \mathcal{B}$.

Subcaso 1 (b) $a \neq b$. Se tiene que $\Sigma(p, X) = k_1 + k_2$. Podemos tomar $r_1, ..., r_{k_1} \in O(X)$ tal que: ar_i es un arco que emana de a tal que $ar_i \cap ar_j = \{a\}$ y $d(a, r_i) < \varepsilon$. Supongamos, sin perder generalidad, que $ar_{k_1} \subset l$. Consideremos ahora $A_i = l \cup ar_i$ para $1 \leq i \leq k_1 - 1$. Por el Teorema 1.38, existe $f_i : [0, 1] \to C(l, A_i)$ un arco ordenado de l a A_i, cabe resaltar que f_i lo elegimos como un homeomorfismo. A su vez, podemos tomar k_2 puntos $q_{k_1}, q_{k_1+1}, ..., q_{k_1+k_2-1} \in O(X)$ tal que: bq_i es un arco que emana de b tal que $bq_i \cap bq_i = \{b\}$ y $d(b, q_i) < \varepsilon$. Supongamos, sin perder generalidad, que $bq_{k_1+k_2-1} \subset l$. Para $k_1 \leq i \leq k_1 + k_2 - 2$ consideremos $B_i = l \cup bq_i$. Por el Teorema 1.38, existe $f_i : [0, 1] \to C(l, B_i)$ un arco ordenado de l a B_i, cabe resaltar que f_i lo elegimos como un homeomorfismo. Tomemos ahora $f : [0, 1]^{k_1+k_2-2} \to C(p, X)$ tal que $f(x_1, x_2, ..., x_{k_1+k_2-2}) =$

$\bigcup_{i=1}^{k_1+k_2-2} f(x_i)$. Sea $\mathcal{A} = f([0,1]^{k_1+k_2-2})$, por la construcción de f se cumple que $\mathcal{A} \subset (B_H(l, \varepsilon) - C(p, l)) \cup \{l\}$. Para construir el conjunto $\mathcal{B}$, basta tomar a los puntos r_1, r_2, r_{k_1-1} tales que $\varepsilon < d(a, r_i) < 1$ y $q_{k_1}, q_{k_1+1}, ..., q_{k_1+k_2-1}$ que cumplan que $\varepsilon < d(b, q_i) < 1$, con esta diferencia, siguiendo los pasos para construir $\mathcal{A}$, se cumplirá que $(B_H(l, \varepsilon) - C(p, l)) \cup \{l\} \subset \mathcal{B}$.

Caso 2 $A \neq l$. Nuevamente tenemos dos subcasos:

Subcaso 2 (a) $a = b$. Este caso es análogo al caso $1(a)$.

Subcaso 2 (b) $a \neq b$. Supongamos, sin perder generalidad, que $A = ac$, donde $c \in (ab)$. Dependiendo del orden de a y b se cumple alguno de los casos siguientes:

1) $k_1 = 1$, esto implica que $k_2 \geq 3$ y $\Sigma(p, X) = k_2 + 1$. Podemos tomar $r_1, r_2, ..., r_{k_2-1} \in O(X)$ tal que: cr_i es un arco que cumple con $cr_i \cap cr_j = cb$, $r_i \neq r_j$ para $i \neq j$ y $H(A, l) < d(c, r_i) < \varepsilon$. A su vez, también podemos tomar $q_1, q_2, ..., q_{k_2-1} \in O(X)$ tal que: cq_i es un arco que cumple con $cq_i \cap cq_j = cb$ y $\varepsilon < d(c, q_i) < 1$. Tomando $A_i = A \cup cr_i$, y procediendo como en el inciso $1(a)$, se construye el conjunto $\mathcal{A}$, a su vez tomando $B_i = A \cup cq_i$, y procediendo como en el inciso $1(a)$, se construye $\mathcal{B}$.
2) $k_1 \geq 3$. El orden de b tiene dos posibles valores, $k_2 = 1$ o $k_2 \geq 3$. Si $k_2 = 1$ se cumple que $\Sigma(p, X) = k_1 + 1$, podemos tomar $r_1, r_2, ..., r_{k_1-1} \in O(X)$ tales que: ar_i es un arco que emana de a con $ar_i \cap ar_j = \{a\}$, $ar_i \cap l = \{a\}$ y $d(a, r_i) < \varepsilon$. Eligiendo $A_i = A \cup ar_i$ y siguiendo los pasos del inciso $1(a)$ se cumple lo deseado. Por otro lado, si $k_2 \leq 3$ nuevamente tomemos $r_1, r_2, ..., r_{k_1-1} \in O(X)$ tales que: ar_i es un arco que emana de a con $ar_i \cap ar_j = \{a\}$, $ar_i \cap l = \{a\}$ y $d(a, r_i) < \varepsilon$, además $q_{k_1}, q_{k_1+1}, ..., q_{k_1+k_2-2} \in O(X)$ tal que: cq_i es un arco que cumple con $cq_i \cap cq_j = cb$ y $H(A, l) < d(c, q_i) < \varepsilon$. Tomando estos puntos, la construcción del conjunto $\mathcal{A}$, es como en el inciso $1(b)$. A su vez, al modificar $d(a, r_i) < \varepsilon$ por $\varepsilon < d(a, r_i) < 1$ y $H(A, l) < d(c, q_i) < \varepsilon$ por $\varepsilon < d(c, q_i) < 1$, se construye el conjunto $\mathcal{B}$ como en el inciso $1(b)$.

$\square$

Teorema 2.16. *Sea X una gráfica finita. Si $p,q \in O(X)$ y $C(p,X) \approx C(q,X)$, entonces $\Sigma(p,X) = \Sigma(q,X)$.*

Demostración. Sea $h : C(p,X) \to C(q,X)$ un homeomorfismo. Sea $l_1 = ab$, con $a,b \in V(X)$, la arista de X que contiene a p y $l_2 = cd$, con $c,d \in V(X)$, la arista de X que contiene a q. Podemos suponer que $ord(b,X) = n, ord(c,X) = m \geq 3$. Sea $A \in C(p,l_1)$ tal que $A \cap \{a,b\} = \emptyset$. Podemos tomar $\varepsilon = \text{mín}\{d(a,A), d(b,A)\} > 0$ y supongamos que $h(A) \notin C(q,l_2)$. Como la función inversa de h es continua, h^{-1} es continua en $h(A)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $D \in B_H(h(A),\delta)$ se cumple que $H(h^{-1}(D), A) < \varepsilon$. Por como se ha elegido ε se cumple que, $h^{-1}(D) \in C(p,l_1)$ para cada $D \in B_H(h(A),\delta)$. Es claro que $h(A) \in C(q,X)$ y como $h(A) \notin C(q,l_2)$ podemos suponer, sin perder generalidad, que $c \in h(A)$. Así, por el Teorema 2.8, existe $\mathcal{A} \subset C(c,X)$, que contiene una m-celda, tal que $H_2(\mathcal{A}, \{h(A)\}) < \delta$. Esto implica que $\mathcal{A} \subset B_H(h(A),\delta)$ y por ende $h^{-1}(\mathcal{A}) \subset C(p,l_1)$. Es claro que $h^{-1}(\mathcal{A})$ contiene una m-celda. Pero por el Teorema 2.2, $C(p,l_1)$ es una 2-celda, lo cual es una es una contradicción. Por lo tanto, $h(A) \in C(q,l_2)$.

Si $A \cap \{a,b\} \neq \emptyset$ podemos tomar una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(p,l_1)$, con $A_n \cap \{a,b\} = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tal que converge a A, de lo anterior $\{h(A_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset C(q,l_2)$ y, por la continuidad de h, se cumple que la sucesión $\{h(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $h(A)$ y por ser $C(q,l_2)$ cerrado, se tiene que $h(A) \in C(q,l_2)$.

Por lo tanto, $h(l_1) \subset l_2$. Se puede probar que $h(l_1) \cap \{c,d\} \neq \emptyset$. Así, se cumple que $h(C(p,l_1)) \subset C(p,l_2)$ y de forma análoga, tenemos que $h^{-1}(C(q,l_2)) \subset C(p,l_1)$, por lo tanto $h(C(p,l_1)) = C(q,l_2)$.

Supongamos que $\Sigma(q,X) < \Sigma(p,X)$. Veamos que esta suposición implica que $h(l_1) \notin C(q,l_2)$, lo cual es una contradicción. Para ello, consideremos dos casos:

1. $h(l_1) = l_2$. De la continuidad de h existe $1 > \delta > 0$ tal que $h(B_H(l_1,\delta)) \subset B_H(l_2, \frac{1}{4})$. Luego, por el Lema 2.15 existen $\mathcal{A}$ una $(\Sigma(p,X) - 2)$-celda tal que $\mathcal{A} \subset (B_H(A,\delta) - C(p,l_1))$ y $\mathcal{B}$ una $(\Sigma(q,X) - 2)$-celda tal que $(B_H(l_2,\varepsilon) - C(q,l_2)) \cup \{l_2\} \subset \mathcal{B}$, por como es h, se cumple que $h(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$, lo cual es una contradiccón.

2. $h(l_1) \neq l_2$.Podemos suponer, sin perder generalidad, que $h(l_1) = cr$, con $r \in (cd)$. Para $1 > \varepsilon > H(cr, l_2)$, de la continuidad de h existe $1 > \delta > 0$ tal que $h(B_H(l_1, \delta)) \subset B_H(cr, \varepsilon)$. Luego, por el Lema 2.15, existen $\mathcal{A}$ una $(\Sigma(p,X) - 2)$-celda tal que $\mathcal{A} \subset (B_H(l_1, \delta) - C(p, l_1))$, y $\mathcal{B}$ una $(\Sigma(q,X) - 2)$-celda tal que $(B_H(cr, \varepsilon) - C(q, l_2)) \cup \{l_2\} \subset \mathcal{B}$, por como es h, se cumple que $h(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$, lo cual es una contradiccón.

Por lo tanto, $\Sigma(q,X) \geq \Sigma(p,X)$. De manera análoga, se ve que la desigualdad $\Sigma(q,X) > \Sigma(p,X)$ no es posible. Por lo tanto, $\Sigma(q,X) = \Sigma(p,X)$. $\square$

Culminamos este capítulo con un corolario que será de utilidad en los capítulos 4 y 5.

Corolario 2.17. *Sean X una gráfica finita y $p, q \in X$. Si se cumple alguna de las siguientes condiciones*

1. $ord(p,X) \neq ord(q,Y)$,
2. $ord(v(p),X) \neq ord(v(q),Y)$,
3. $\Sigma(p,X) \neq \Sigma(q,X)$,

entonces $C(p,X) \not\approx C(q,Y)$.

Capítulo 3

El espacio $K(X)$

En este capítulo se exponen algunas condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir un continuo X, para que $K(X)$ sea compacto, véase el Teorema 3.8. Además, se da un continuo X para el cual $K(X)$ no es compacto, véase el Ejemplo 3.9. A su vez, se da una condición necesaria para que $K(X)$ sea conexo, véase Corolario 3.11. También se da un ejemplo de un continuo X, para el cual $K(X)$ no es conexo, véase el Ejemplo 3.14. Se culmina el capítulo mostrando una relación entre el grado de homogeneidad de un continuo X y el tamaño de $K(X)$.

3.1. Compacidad y conexidad

Definición 3.1. *Sean X un continuo y A un subconjunto de X. Se define el hiperespacio $K(A, X) = \{C(p, X) : p \in A\}$ y se denota $K(X, X)$ por $K(X)$.*

Definición 3.2. *Para un continuo X y A un subconjunto de X, se define la función $\tau_A : A \to K(A, X)$, por $\tau_A(p) = C(p, X)$. Si $A = X$ denotamos τ_X simplemente por τ.*

Teorema 3.3. *Si X es un continuo y $A \subset X$, entonces la función τ_A es biyectiva.*

Demostración. Sean X un continuo y $A \subset X$. Veamos que τ_A es inyectiva, para ello, tomemos $p, q \in A$ tales que $p \neq q$. Observe que $\{p\} \in C(p, X)$, pero $\{p\} \notin C(q, X)$, por lo que $C(p, X) \neq C(q, X)$, es decir, $\tau_A(p) \neq \tau_A(q)$ y, por ende, τ_A es inyectiva. Claramente τ_A es suprayectiva. $\square$

Teorema 3.4. *Si A es un subconjunto de un continuo X, entonces la función $\tau_A^{-1} : K(A, X) \to A$ es continua.*

Demostración. Sean $A \subset X$ y $p \in A$. Tomemos $\{C(p_n, X)\}_{n=1}^{\infty} \subset K(A, X)$ una sucesión que converge a $C(p, X)$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geq n_0$ se cumple que:

$$H_2(C(p_n, X), C(p, X)) < \varepsilon.$$

Así, para cada $n \geq n_0$ se cumple:

$$C(p, X) \subset N_H(C(p_n, X), \varepsilon).$$

Esto asegura que existe $E \in C(p_n, X)$ tal que $\{p\} \in B_H(E, \varepsilon)$, así $E \subset N(\{p\}, \varepsilon)$ y como $p_n \in E$, se cumple que $d(p_n, p) < \varepsilon$. Entonces, $d(p_n, p) < \varepsilon$ para cada $n \geq n_0$, por ende, la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a p, es decir, $\{\tau_A^{-1}(C(p_n, X))\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\tau_A^{-1}(C(p, X))$. Por lo tanto, τ_A^{-1} es continua. $\square$

A continuación, se exponen algunas condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir un continuo X, para que $K(X)$ sea compacto. Además, se da un continuo X, para el cual $K(X)$ no es compacto. Para ello, es necesario definir el concepto de propiedad de Kelley.

Definición 3.5. *Sean X un continuo y $x \in X$. Decimos que X tiene la* ***propiedad de Kelley*** *en x, si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ que converge a x y, para cada $A \in C(x, X)$, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(X)$ que converge a A, donde $A_n \in C(x_n, X)$.*
Un continuo X tiene la propiedad de Kelley, si X tiene la propiedad de Kelley en todos sus puntos.

El siguiente ejemplo aclara la Definición 3.5. Consideremos en el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ los siguientes puntos: $a = (-1, 0)$, $a_0 = (0, 0)$ y $a_n = (0, \frac{1}{n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dados dos puntos c, d en el plano, se entiende por cd al segmento de recta que une c con d. Se define $A_s = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}^{\infty} aa_n$ como el **abanico armónico**, véase Figura 3.1. Es claro que, A_s es arco-conexo y compacto. Por lo tanto, A_s es un continuo. Veamos que A_s tiene la propiedad de Kelley.

Sean $x \in A_s$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que converge a x y $A \in C(x, A_s)$. Si $A = \{x\}$ es inmediato. Supongamos que $A \neq \{x\}$, se tienen dos casos: (1) $x \notin aa_0$ y (2) $x \in aa_0$.

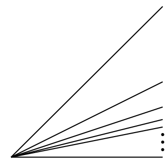


Figura 3.1: Abanico armónico.

(1) En este caso, existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que, $x \in aa_{n_x}$. Observe que, debe existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $x_n \in aa_{n_x}$ para toda $n \geq n_0$, por ende, $xx_n \subset aa_{n_x}$. Construimos la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de la siguiente manera: para $i \leq n_x$, sea $A_i = A_s$ y, para $i \geq n_x$, tomamos $A_i = A \cup xx_i$.

Es claro que, $A_i \in C(x_i, X)$ para toda i. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, para toda $n \geq n_1$. Consideremos $N = \text{máx}\{n_0, n_1\}$, así, para toda $n \geq N$ se cumple que, $x_n \in aa_{n_x}$ y $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dado $y \in xx_n$ se tiene que $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Si $i \geq N$, es inmediato que $A \subset N(A_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Para $y \in A_i$ se tienen dos casos: (1) si $y \in A$ es claro que, $y \in N(A, \frac{\varepsilon}{2})$. (2) si $y \in xx_i$ se cumple que $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ y, por ende, $y \in N(A, \frac{\varepsilon}{2})$. Concluimos que, $H(A_i, A) < \varepsilon$ para toda $i \geq N$. Por lo tanto, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a A.

(2) Para este caso definamos los conjuntos, $N^{'} = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in aa_0\}$ y $N^{''} = \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin aa_0\}$. Si $N^{''}$ es finito, se sigue como el caso (1). Supongamos que $N^{''}$, es infinito. Para $n \in N^{''}$, sea $m_n \in \mathbb{N}$ tal que, $x_n \in aa_{m_n}$. Dependiendo de la naturaleza de A, se tienen dos subcasos: (a) $A \subset aa_0$ y (b) $A \not\subseteq aa_0$.

(a) En este caso tenemos la certeza de que A es un arco, digamos que p, q son sus puntos extremos, es decir, $A = pq$. Sean y_p, y_q las rectas perpendiculares a aa_0 que pasan por p y q respectivamente. Para $i \in N^{''}$ consideremos $q_i = y_q \cap aa_{m_i}$ y $p_i = y_p \cap aa_{m_i}$. Construimos la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de la siguiente manera, para $i \in N^{'}$ tomamos $A_i = A \cup xx_i$, para $i \in N^{''}$, consideraremos $A_i = p_i q_i \cup x_i p_i$. De este modo $A_i \in C(x_i, X)$, para toda i. Por la construcción se tiene que, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a A.

(b) Sea $p \in aa_0$ talque, $ap = (A - \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}}^{\infty} aa_n) \cup \{a\}$, observar que ap es un arco contenido en aa_0, donde a y p son sus puntos extremos. Ahora, sea y_p la recta perpendicular a aa_0 que pasan por p. Para $i \in N''$ consideremos $p_i = y_p \cap aa_{m_i}$. Construimos la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de la siguiente manera: para $i \in N'$ tomamos $A_i = A \cup xx_i$ y, para $i \in N''$ consideramos $B_i = ax_i \cup x_i p_i$ y $A_i = A \cup B_i$. Es claro que $A_i \in C(x_i, X)$, para toda i. Por como se ha construido $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, se cumple que esta converge a A.

Por lo tanto, de (1) y (2) se tiene que A_s tiene la propiedad de Kelley.

Consideremos $b = (1, 0)$, el continuo $A_{sa} = A_s \cup a_0 b$ se conoce como **abanico armónico con pata alargada**, véase Figura 3.2.

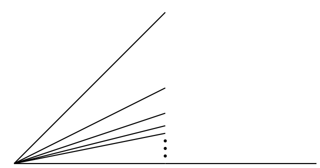


Figura 3.2: Abanico armónico con pata alargada.

Con este cambio, el continuo A_{sa} no tiene la propiedad de Kelley. Observe que, la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A_{sa}$ converge a a_0. Si $A = a_0 b$, $A \in C(a_0, A_{sa})$, sin embargo, no existe una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset C(A_{sa})$ que converga a A tal que, $A_i \in C(a_i, A_{sa})$ para toda i. Por lo tanto, A_{sa} no tiene la propiedad de Kelley.

Teorema 3.6. *Si X es un continuo, $x \in X$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge a x, entonces lím sup $C(x_n, X) \subset C(x, X)$.*

Demostración. Si $A \in \limsup C(x_n, X)$, entonces $A \in 2^X$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que,

$$B_H\left(A, \frac{1}{k}\right) \cap C(x_{n_k}, X) \neq \emptyset.$$

Podemos tomar $A_{n_k} \in C(x_{n_k}, X)$ tal que $H(A, A_{n_k}) < \frac{1}{k}$. La sucesión $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset C(X)$ converge a A, entonces $A \in C(X)$. Para probar que $x \in A$, supongamos que $x \notin A$ y consideremos $r = \min\{d(x, a) : a \in A\}$, por ser A un continuo se cumple que $r > 0$. Tomemos ahora $\varepsilon = \frac{r}{2}$ y note que, $d(x, a) > \varepsilon$ para toda $a \in A$. Para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$, tal que

$d(x_{n_m}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $H(A_{n_m}, A) < \frac{\varepsilon}{2}$. De esto $A_{n_m} \subset N_d(A, \frac{\varepsilon}{2})$ y como $x_{n_m} \in A_{n_m}$, debe existir $a_0 \in A$ tal que $d(x_{n_m}, a_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por la desigualdad del triángulo $d(x, a_0) \leq d(x, x_{n_m}) + d(x_{n_m}, a_0) < \varepsilon$, que es una contradicción. Por lo tanto, $x \in A$ y $A \in C(x, X)$. □

Teorema 3.7. *Sea X un continuo. Entonces, la función $\tau : X \to K(X)$ es continua si y solo si X tiene la propiedad de Kelley.*

Demostración. Supongamos que X tiene la propiedad de Kelley. Sean $x \in X$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ una sucesión que converge a x. Como X tiene la propiedad de Kelley en x, dado $D \in C(x, X)$ existe $\{D_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(X)$ una sucesión que converge a D, tal que $D_n \in C(x_n, X)$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para cada $n \geq n_0$, $H(D_n, D) < \varepsilon$, así, $B_H(D, \varepsilon) \cap C(x_n, X) \neq \emptyset$, cuando $n \geq n_0$. Dado $D \in C(x, X)$, para cualquier abierto U en 2^X que contenga a D, se cumple que, $U \cap C(x_n, X) \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$ excepto para un número finito, es decir, $C(x, X) \subset \liminf C(x_n, X)$. Por el Teorema 3.6, se tiene que $\limsup C(x_n) \subset C(x, X)$, esto implica que $\lim C(x_n) = C(x, X)$, es decir, la sucesión $\{\tau(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\tau(x)$. Por lo tanto, τ es continua.

Ahora, sean $x \in X$, $A \in C(x, X)$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ una sucesión que converge a x. De la continuidad de τ, se tiene que $\{C(x_n, X)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $C(x, X)$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n \in \mathbb{N}$, tal que, para toda $m \geq m_n$ se cumple que:

$$H_2(C(x_m, X), C(x, X)) < \frac{1}{n}.$$

Podemos tomar la sucesión de $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$, de tal forma que sea estrictamente creciente. Construimos la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ como se muestra a continuación. Para $i \in \{1, ..., m_1 - 1\}$ tomamos $A_i = X$. Dados $j \in \mathbb{N}$ y $i \in \{m_j, ..., m_{j+1} - 1\}$, como $i \geq m_j$ se cumple $C(x, X) \subset N_H(C(x_i, X), \frac{1}{j})$, entonces, para cada $i \in \{m_j, ..., m_{j+1} - 1\}$ podemos elegir $A_i \in C(x_i, X)$ tal que $H(A_i, A) < \frac{1}{j}$. Esto se hace para cada $j \in \mathbb{N}$ y se obtiene la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset C(X)$, tal que $A_i \in C(x_i, X)$. Como $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente, los elementos A_i están bien definidos para toda $i \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, para esta misma n existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $m \geq m_n$ se cumple que $H(A_m, A) < \frac{1}{n}$. Por lo tanto, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a A, así, X tienen la propiedad de Kelley en x. □

El siguiente teorema da condiciones necesarias y suficientes, que debe cumplir X, para que $K(X)$ sea compacto.

Teorema 3.8. *Sea X un continuo. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $K(X)$ es compacto;

(2) La función $\tau : X \to K(X)$ es continua;

(3) X tiene la propiedad de Kelley;

(4) $X \approx K(X)$.

Demostración. Veamos que (1) $\Leftrightarrow$ (2), es claro que, (2) $\Rightarrow$ (1). La función τ^{-1} es continua por el Teorema 3.4 y, biyectiva por el Teorema 3.3. Como $K(X)$ es compacto, τ es continua, es decir, (1) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Leftrightarrow$ (3) por el Teorema 3.7. Si suponemos (3), por el Teorema 3.7, se cumple (2) y, por lo tanto, se cumple (1), luego, por ser τ biyectiva, concluimos que $X \approx K(X)$, es decir, (3) $\Rightarrow$ (4). Si suponemos (4), se cumple (1), por lo que (4) $\Rightarrow$ (3), así (3) $\Leftrightarrow$ (4). $\square$

Ejemplo 3.9. *Existe un continuo X tal que, $K(X)$ no es compacto.*

Demostración. Consideramos el abanico armónico con pata alargada A_{sa}. Sabemos que, A_{sa} no tiene la propiedad de Kelley, luego, por el Teorema 3.8, $K(A_{sa})$ no es compacto. $\square$

En conclusión, si X es un continuo, esto no implica que $K(X)$ sea un continuo. Para poder dar más detalles de la compacidad de $K(X)$, es necesario agregar la hipótesis de que X sea localmente conexo, esto se trata a continuación.

Teorema 3.10. *Si X es un continuo y B un subespacio localmente conexo de X, entonces la función $\tau_B : B \to K(B, X)$ es continua.*

Demostración. Sea $p \in B$ y $\varepsilon > 0$. Por ser B localmente conexo, podemos tomar U abierto y conexo, tal que $p \in U \subset B$ y $diam(U) < \frac{\varepsilon}{2}$. Veamos que

$$\tau_B(U) \subset B_{H_2}(\tau_B(p), \varepsilon).$$

Sean $q \in U$, $K \in C(p, X)$ y consideremos $D = K \cup cl(U)$. Es claro que $D \in C(q, X)$, además $D \subset N(K, \varepsilon)$ y $K \subset N(D, \varepsilon)$, luego $H(D, K) < \varepsilon$, entonces $C(p, X) \subset N_H(C(q, X), \varepsilon)$. Dada $L \in C(q, X)$ y tomando $E = L \cup cl(U)$, se cumple que $E \subset N(L, \varepsilon)$ y $L \subset N(E, \varepsilon)$, por ende $H(E, L) < \varepsilon$. Como $E \in C(p, X)$, entonces $C(q, X) \subset N_H(C(p, X), \varepsilon)$. Finalmente, se tiene que $H_2(\tau_B(q), \tau_B(q)) = H_2(C(q, X), C(q, X)) < \varepsilon$. Así, τ_B es continua. $\square$

Ahora se da una condición necesaria para que $K(X)$ sea conexo.

Corolario 3.11. *Si X es un continuo y B un subespacio localmente conexo de X, entonces $B \approx K(B,X)$. En particular, $K(B,X)$ es localmente conexo.*

Demostración. τ_A es biyectiva por el Teorema 3.3, τ_A^{-1} es continua por el Teorema 3.4 y, finalmente, τ_B es continua por el Teorema 3.10. Por lo tanto, $B \approx K(B,X)$. □

Corolario 3.12. *Si X es un continuo localmente conexo, entonces $K(X)$ es conexo y localmente conexo.*

Demostración. En este caso $X \approx K(X)$. □

Teorema 3.13. *Sean X un continuo y B un subespacio de X. Entonces, B es arco-conexo si y solo si $K(B,X)$ es arco-conexo.*

Demostración. Supongamos que $K(B,X)$ es arco-conexo, por el Teorema 3.4, se cumple que $\tau_B^{-1} : K(B,X) \to B$ es continua, así $\tau_B^{-1}(K(B,X)) = B$ es arco-conexo.

Ahora supongamos que B es arco-conexo y sean $p, q \in B$, se tiene que $C(p,X), C(q,X) \in K(B,X)$. Por ser B arco-conexo, existe una función $f : [0,1] \to B$ tal que $f([0,1]) = A$ es un arco y $f(0) = p$, $f(1) = q$. Como f es un encaje y $[0,1]$ es localmente conexo, se cumple que A es un subespacio localmente conexo de X. Luego, por el Teorema 3.10, se cumple que τ_A es continua y, por lo tanto, $(\tau_A \circ f)([0,1])$ es un arco en $K(B,X)$, donde $(\tau_A \circ f)(0) = C(p,X)$ y $(\tau_A \circ f)(1) = C(q,X)$. De este modo, $K(B,X)$ es arco-conexo. □

Ejemplo 3.14. *Existe un continuo X tal que $K(X)$ no es conexo.*

Demostración. Sea $A = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-2,2]\}$ y $B = \{(x, sen(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,\pi]\}$. Tomando $X = A \cup B$, entonces X es un continuo, el cual no es localmente conexo.

Dado que A, B son localmente conexos, por el Corolario 3.11, se cumple que $A \approx K(A,X)$ y $B \approx K(B,X)$, por ende $K(A,X)$ es cerrado en $K(X)$.

Si suponemos que $K(B,X)$ no es cerrado en $K(X)$, debe existir $x \in A$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ una sucesión convergente a x, tal que, la sucesión $\{C(x_n,X)\}_{n=1}^{\infty} \subset K(B,X)$ converge a $C(x,X)$.

Sea $M = \{0\} \times [-1,1]$, podemos tomar un arco $K \in C(x,X)$ de tal manera que $K \cap (X - M) \neq \emptyset$ y $M \cap (X - K) \neq \emptyset$. Por como se ha elegido a K, podemos asegurar que alguno de sus puntos extremos, digamos p, no pertenece a M. Sea $r = \frac{d(p,M)}{2}$, se cumple que $1 > r > 0$. Dado $n \in \mathbb{N}$ y $D \in C(x_n, X)$, no es difícil probar que $d(p,q) > 1$, para todo $q \in D$, por lo tanto $d(p,D) > r$. Así, $H(\{p\}, D) > r$, como $\{p\} \in C(x,X)$, se cumple que $C(x,X) \nsubseteq N_H(C(x_n,X),r)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, esto es una contradicción. Por lo tanto, $K(B,X)$ es cerrado en $K(X)$. Por ser $K(A,X)$, $K(B,X)$ disjuntos y no vacíos, con $K(X) = K(A,X) \cup K(B,X)$, se tiene que $K(X)$ es disconexo. Sin embargo, $K(X)$ es localmente conexo por el Corolario 3.11. □

Entonces, si X es un continuo, la conexidad de X no necesariamente la hereda $K(X)$. Esto reafirma que, si X es un continuo, esto no implica que $K(X)$ sea un continuo. Los siguientes teoremas culminan el tema sobre la compacidad de $K(X)$, los cuales son consecuencia del Teorema 3.10.

Corolario 3.15. *Sean X un continuo y $A \in C(X)$. Si A es localmente conexo, entonces A tiene la propiedad de Kelley.*

Demostración. Por el Teorema 3.10, se cumple que τ_A es continua, luego por el Teorema 3.7, A tiene la propiedad de Kelley. □

El recíproco de este corolario es falso, para ver esto basta considerar el abanico armónico, ya que este tiene la propiedad de Kelley, pero no es localmente conexo.

Corolario 3.16. *Sean X un continuo y $A \in C(X)$. Si A es localmente conexo, entonces $K(A,X)$ es compacto.*

Teorema 3.17. *Sea X una gráfica finita, entonces $K(X)$ es un continuo.*

Demostración. Del Corolario 1.27 se tiene que una gráfica finita es localmente conexa, entonces por los Teoremas 3.16 y 3.11, $K(X)$ es un continuo. □

3.2. Grado de homogeneidad de X y tamaño

En esta sección se presentan los conceptos de homogeneidad de un continuo X y el tamaño de $K(X)$, y se brinda una relación entre estos dos conceptos. Para ello, note que dado un continuo X, si dos elementos de $K(X)$ son homeomorfos, esto define una relación de equivalencia $\approx$ en $K(X)$.

Definición 3.18. *Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, decimos que $K(X)$ tiene **tamaño** n, si el espacio cociente $K(X)/\approx$ tiene cardinalidad n.*

Lema 3.19. *Sean X, Y continuos, $p \in X$ y $f\colon X \to Y$ un homeomorfismo, entonces $C(p, X) \approx C(f(p), Y)$.*

Demostración. Dado $p \in X$ basta considerar la función $C(f)_p : C(p, X) \to C(f(p), Y)$ tal que $C(f)_p(A) = f(A)$, ya que este es un homeomorfismo. $\square$

Definición 3.20. *Si Y es un conjunto y $(G, \cdot)$ un grupo, decimos que Y es un **G-conjunto** si existe una función (acción) $\alpha_Y : G \times Y \to Y$ tal que:*

1. *$\alpha_Y(Id, x) = x$ para cada $y \in Y$,*

2. *$\alpha_Y(f, \alpha(g, x)) = \alpha_Y(f \cdot g, x)$ para toda $f, g \in G$ y $x \in Y$.*

Sea X un continuo y $\mathcal{H}(X) = \{f : X \to X : f \quad \text{es homeomorfismo}\}$. Se cumple que $(\mathcal{H}(X), \circ)$ es un grupo, donde $\circ$ es la composición. El continuo X es un $\mathcal{H}(X)$-conjunto con la acción $\alpha_X : \mathcal{H}(X) \times X \to X$, $\alpha_X(f, x) = f(x)$.

Definición 3.21. *Sea Y un G-conjunto. Dado $y \in Y$, la **órbita** de y bajo la acción α_Y es:*

$$\mathcal{O}(y) = \{\alpha(f, y) : f \in G\} \subset Y.$$

Dado $x \in X$, la órbita de x bajo la acción α_X es $\mathcal{O}(x) = \{f(x) : f \in \mathcal{H}(X)\}$.

Con ayuda de las órbitas se define la siguiente relación de equivalencia en X:

$$x \equiv y \iff x \in \mathcal{O}(y) \quad (A),$$

donde las clases de equivalencia son las órbitas, las cuales brindan una partición de X.

Definición 3.22. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, decimos que el espacio X es $\frac{1}{n}$-**homogéneo** o que X tiene **grado de homogeneidad** n, si X tiene exactamente n órbitas distintas. De otra manera, X es $\frac{1}{n}$-homogéneo si la cardinalidad del espacio cociente $X/\equiv$ es igual a n. Llamamos homogéneo a cualquier espacio 1-homogéneo.*

Podemos afirmar que si $y \in \mathcal{O}(x)$, entonces $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$. Damos a continuación algunos ejemplos de estos espacios.

Definición 3.23. *La **curva cerrada simple** es cualquier conjunto homeomorfo al subconjunto $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| = 1\}$, donde $||\cdot||$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^2$.*

Ejemplo 3.24. *La curva cerrada simple S^1 es homogéneo y además $K(S^1)$ tiene tamaño 1.*

Demostración. Haciendo uso del homeomorfismo de la rotación, se observa que todos los elemetos de S^1 pertenecen a una misma órbita, es decir, S^1 es homogéneo. Por lo tanto, dados dos puntos $p, q \in X$, existe un homeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ tal que $f(p) = q$ y, por el Lema 3.19 $C(f) : C(p, X) \to C(q, X)$ es un homeomorfismo, así $K(S^1)$ tiene tamaño 1. □

Ejemplo 3.25. *El intervalo $[0,1]$ es $\frac{1}{2}$-homogéneo y, además $K([0,1])$ tiene tamaño 2.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{H}([0,1])$, primero veamos que $f(0), f(1) \in \{0,1\}$. Supongamos que $f(0) \notin \{0,1\}$, así $f(0) \in (0,1)$. Como f es sobreyectiva, existen
$r, s \in (0,1]$ con $r \neq s$, tales que $f(r) = 0$ y $f(s) = 1$, supongamos, sin perder generalidad que $r < s$. Definiendo la función $h(x) = f(x) - f(0)$, tenemos que $h(r) < 0 < h(s)$, por lo que existe $c \in [r, s]$, tal que $f(c) = f(0)$ y así $c = 0$, pero esto es una contradicción, por lo tanto, $f(0) \in \{0,1\}$. De forma análoga se puede probar que $f(1) \in \{0,1\}$. Así, tenemos que $\mathcal{O}(0) = \{0,1\} = \mathcal{O}(1)$. Veamos ahora que $\mathcal{O}(\frac{1}{2}) = \mathcal{O}(y)$, para toda $y \in (1,0)$. Sea $y \in (0,1)$ y consideremos la función $f_y : [0,1] \to [0,1]$ definida por:

$$f_y(x) = \begin{cases} 2yx, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2(1-y)x + 2y - 1 & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Tenemos que $f_y \in \mathcal{H}([0,1])$ y, además $f_y(\frac{1}{2}) = y$, es decir, $y \in \mathcal{O}(\frac{1}{2})$. Por lo tanto, $\mathcal{O}(y) = \mathcal{O}(\frac{1}{2})$. Así, solo existen dos órbitas en $[0,1]$, que son $\mathcal{O}(0)$ y $\mathcal{O}(\frac{1}{2})$, por lo tanto $[0,1]$ es $\frac{1}{2}$-homogéneo.

Para ver que en $K([0,1])/\approx$ solo hay dos clases de equivalencia, cuyos representantes son $C(0,[0,1])$ y $C(\frac{1}{2},[0,1])$, se debe utilizar el Teorema 2.2, porque este asegura que no existe un homeomorfismo entre $C(0,[0,1])$ o $C(1,[0,1])$ y $C(x,[0,1])$ para toda $x \in (0,1)$. Por lo tanto, $K(S^1)$ tiene tamaño igual a 2. □

Ejemplo 3.26. *El triodo simple T_3 es $\frac{1}{3}$-homogéneo y $K(T_3)$ tiene tamaño 3.*

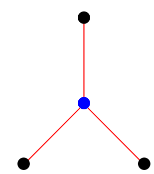


Figura 3.3: Triodo simple.

- Los puntos en color negro pertenecen a una misma órbita digamos $\mathcal{O}(x_1)$, porque bajo rotación envían un punto negro a otro punto negro.
- Los puntos sobre los segmentos en color rojo pertenecen a otra órbita, digamos $\mathcal{O}(x_2)$.
- El punto en color azul es el único punto que conecta con 3 segmentos y, por ende, este determina otra órbita, digamos $\mathcal{O}(x_3)$.

  Estas órbitas son ajenas, entonces el triodo simple es $\frac{1}{3}$-homogéneo y por el Teorema 2.9, $K(T_3)$ tiene tamaño 3.

Teorema 3.27. *Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Si X es un continuo $\frac{1}{n}$-homogéneo y $K(X)$ tiene tamaño m, entonces $m \leq n$.*

Demostración. Supongamos que $m > n$ y que, $C(x_1, X), ..., C(x_m, X)$ son los m representantes de la clases de equivalencia. Supongamos que $\mathcal{O}(x_i) = \mathcal{O}(x_j)$ para $i, j \in \{1, ..., m\}$ con $i \neq j$, entonces existe $f_i \in \mathcal{H}(X)$ tal que $f_i(x_i) = x_j$. Luego, $C(f_i)|_{C(x_i,X)} : C(x_i, X) \to C(f(x_i), X)$ es un homeomorfismo por el Lema 3.19. Así, $C(x_i, X)$ es homeomorfo a $C(x_j, X)$, pero esto es una contradicción. Por lo tanto, $m \leq n$. $\square$

Sea X es una gráfica finita tal que $K(X)$ tiene tamaño 1, veamos que esta es una caracterización de la curva cerrada simple.

Teorema 3.28. *Para una gráfica finita X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$K(X)$ tiene tamaño 1,*
2. *X es una curva cerrada simple,*
3. *X es homogéneo.*

Demostración. Veamos que $1 \Rightarrow 2$. Dados $p, q \in X$ se cumple que $C(p, X) \approx C(q, X)$ y, por el Teorema 2.9, se cumple que $ord(p, X) = ord(q, X)$. Esto implica que $p \in O(X)$, para toda $p \in X$. Luego, por el Teorema 1.28, se cumple que X es una curva cerrada simple. Para probar que $2 \Rightarrow 3$, basta revisar el ejemplo 3.24. Finalmente, $3 \Rightarrow 1$ por el Teorema 3.27. $\square$

Capítulo 4

Gráficas finitas para las cuales $K(X)$ tiene tamaño n

En este capítulo construiremos para cada $n \in \mathbb{N}$, una gráfica finita X_n tal que $K(X_n)$ tiene tamaño n. Para ello, se definen los siguientes conjuntos en el plano euclidiano $\mathbb{R}^2$, donde $|| \cdot ||$ es la norma. Para $n \in \mathbb{N}$ se definen:

1. $I_n = [n-1, n] \times \{0\}$.

2. $J_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 . ||(x-n, y-\frac{1}{4})|| = \frac{1}{4}\}$.

3. $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 . ||(x-2, y-\frac{1}{8})|| = \frac{1}{8}\}$.

4. Para cada $i \in \mathbb{N}$, consideramos a $l_i^{(n)}$ como el segmento de recta que une a los puntos $(n, 0)$ y $(n-\frac{1}{i}, -1)$;

5. Si $n \geq 3$, $S_n = I_n \cup C_n \cup \displaystyle\bigcup_{i=1}^{2n} l_i^{(n)}$.

Las siguientes gráficas finitas serán la base para las gráficas que deseamos construir:

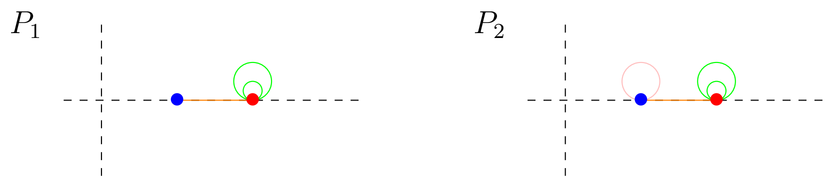


Figura 4.1: $P_1 = I_2 \cup J_2 \cup J$ y $P_2 = I_2 \cup J_1 \cup J_2 \cup J$.

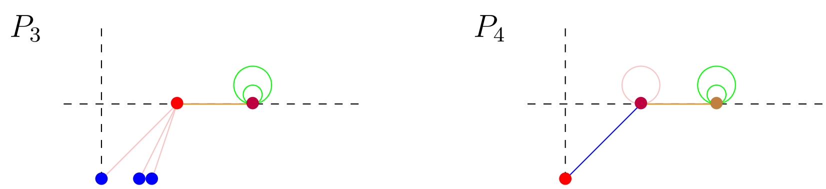


Figura 4.2: $P_3 = P_1 \cup \bigcup_{i=1}^{3} l_i^{(1)}$ y $P_4 = P_2 \cup l_1^{(1)}$.

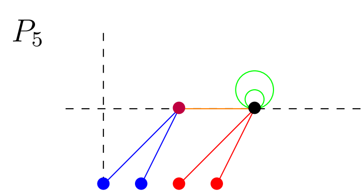


Figura 4.3: $P_5 = P_1 \cup l_1^{(1)} \cup l_2^{(1)} \cup l_1^{(2)} \cup l_2^{(2)}$.

El Corolario 2.17 será de ayuda en esta sección para calcular el tamaño de $K(P_i)$ y $K(S_i)$ y el grado de homogeneidad de P_i y S_i.

En P_1, por los Teoremas 2.17 y 3.16, los puntos en color azul y rojo definen dos órbitas y, dos clases distintas en $K(X)$, ya que son los únicos de orden 1 y 5.

Note que los puntos en color naranja pertenecen a una misma órbita, digamos $\mathcal{O}_3$. También, los puntos en color verde pertenecen a una misma órbita, digamos $\mathcal{O}_4$. Sea p un punto en color naranja y q un punto en color verde, si existiera f un homeomorfismo tal que $f(p) = q$, entonces $C(p, X) \approx$

$C(q, X)$, pero esto es imposible por el Teorema 2.16, por lo tanto $\mathcal{O}_3 \neq \mathcal{O}_4$. Por el mismo Teorema 2.16, no es posible que $C(p, X) \approx C(q, X)$ y, por ende, se definen dos clases distintas en $K(X)$.

De esta manera, P_1 es $\frac{1}{4}$-homogéneo y $K(P_1)$ tiene tamaño 4, ya que cada color define una órbita distinta y, por los Teoremas 2.9 y 2.16, se prueba que cada color define una clase de equivalencia distinta en $K(P_1)/\approx$.

De forma similar al caso P_1, haciendo uso de los Teoremas 2.9, 2.11 y 2.16, se prueba que P_i es $\frac{1}{i+3}$-homogéneo y que $K(P_i)$ tiene tamaño $i+3$, para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Las gráficas finitas S_n juegan un papel importante en la construcción que deseamos, por ello, se presentan las gráficas de S_3 y S_4 para ilustrar.

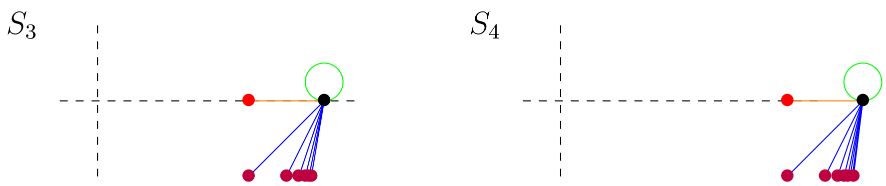


Figura 4.4: S_3 y S_4.

Nuevamente, utlizando los Teoremas 2.9, 2.11, y 2.16, se prueba que S_3 es $\frac{1}{6}$-homogéneo y que el tamaño de $K(S_3)$ es 6, también que S_4 es $\frac{1}{6}$-homogéneo y que el tamaño de $K(S_4)$ es 6.

Conformaremos una sucesión de gráficas finitas X_n como sigue:

1. Sea X_1 una curva cerrada simple, X_2 un arco y X_3 un triodo simple.

2. $X_{i+3} = P_i$, para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   Para cada $n \geq 9$ se define de forma recursiva a X_n, de la siguiente manera.

3. Primero expresamos a n en la forma siguiente: $n = 5(k+1) + r$, donde $r \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

4. Luego, se define para cada $n \geq 9$ $X_n = X_{5k+r} \cup S_{k+2}$.

Por el Teorema 3.28, X_1 es homogéneo y $K(X_1)$ tiene tamaño 1. En el Ejemplo 3.25 se muestra que X_2 es $\frac{1}{2}$-homogéneo y que $K(X_2)$ es de tamaño 2. También, en el Ejemplo 3.26 se ve que X_3 es un espacio $\frac{1}{3}$-homogéneo y $K(X_3)$ tiene tamaño 3.

Las siguientes gráficas muestran las primeras cinco iteraciones del proceso de construcción:

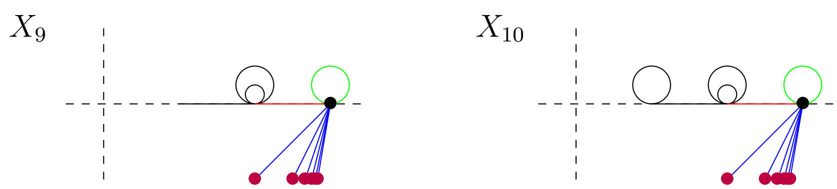


Figura 4.5: $X_9 = P_1 \cup S_3$ y $X_{10} = P_2 \cup S_3$.

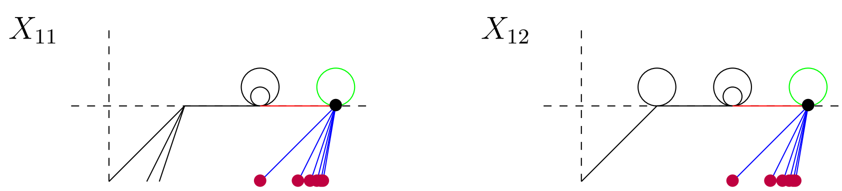


Figura 4.6: $X_{11} = P_3 \cup S_3$ y $X_{12} = P_4 \cup S_3$.

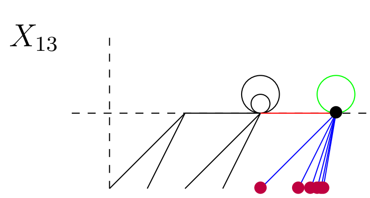


Figura 4.7: $X_{13} = P_5 \cup S_3$.

Observar que S_3 aumenta en 5 el tamaño de $K(X_i)$, cuando $i \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Las siguientes cinco iteraciones del proceso se muestran en las Figuras 3.8, 3.9 y 3.10.

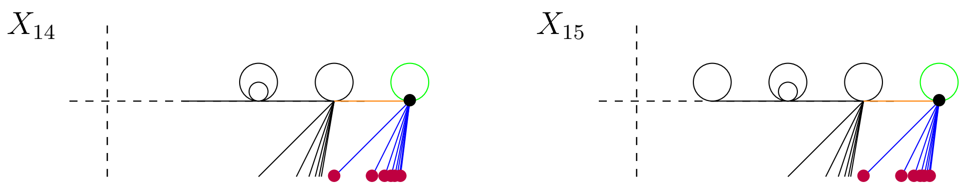


Figura 4.8: $X_{14} = X_9 \cup S_4$ y $X_{15} = X_{10} \cup S_4$.

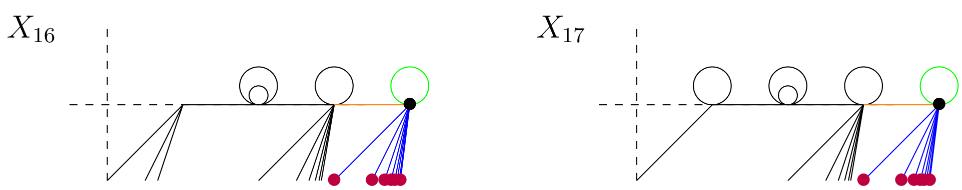


Figura 4.9: $X_{16} = X_{11} \cup S_4$ y $X_{17} = X_{12} \cup S_4$.

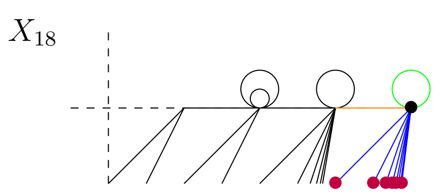


Figura 4.10: $X_{18} = X_{13} \cup S_4$.

Nuevamente, ahora gracias a S_4, el tamaño de $K(X_i)$ aumentó en cinco, para $i \in \{9, 10, 11, 12, 13\}$. Como se puede observar en las gráficas, el tamaño de $K(X_n)$ va aumentando en 5 unidades. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, es posible encontrar una gráfica finita X_n cuyo tamaño de $K(X_n)$ sea n y que además, X_n sea $\frac{1}{n}$-homogéneo. Esto nos permite enunciar el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una gráfica finita X_n tal que es $\frac{1}{n}$-homogénea y $K(X_n)$ tiene tamaño n.*

Por lo tanto, es posible hallar un continuo X tal que $K(X)$ tenga tamaño tan grande como queramos. Más aún, es posible construir un continuo L tal que, $K(L)$ tenga tamaño infinito numerable, esto queda plasmado en el teorema siguiente.

Teorema 4.2. *Existe un continuo L tal que, $K(L)$ tiene tamaño infinito numerable.*

Demostración. Definamos los siguientes subconjuntos del plano euclidiano $\mathbb{R}^2$, $A = [0,1] \times \{0\}$, para $n \in \mathbb{N}$ $A_n = (\{\frac{1}{n}\} \times [0, \frac{1}{n}])$, $r_n = \frac{2n+1}{2n(n+1)}$, $a_n = (\frac{1}{n}, 0)$ y para $i \in \mathbb{N}$ $b_{n,i} = (r_n, \frac{1}{n(i+1)})$. Tomemos a $B_n = (\bigcup_{i=1}^{n} a_n b_{n,i}) \cup A_n$, note que $B_n \cap B_m = \emptyset$ para toda $n \neq m$, pero al tomar:

$$L = (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \cup A$$

se obtiene un continuo.

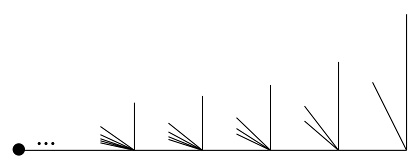


Figura 4.11: L.

Usando los teoremas anteriores e inducción, se prueba que $K(X)$ tiene tamaño infinito. $\square$

A raíz de esto surge la pregunta ¿existe un continuo X, tal que el tamaño de $K(X)$ sea igual a $\mathfrak{c}$, la cardinalidad del continuo?

Si tal continuo existiera por el Teorema 3,27, este debería tener una cantidad no numerable de órbitas. Se sabe de [4, Teorema 9] que si X es un pseudo-círculo, este tiene un número no numerable de órbitas, sin embargo, por ser hereditariamente indescomponible, cada elemento de $K(X)$ es un arco, esto por [9, Lema 3.19].

Capítulo 5

Continuos $\frac{1}{n}$-homogéneos con tamaño menor que n

Por el Teorema 3.27, se cumple que el grado de homogeneidad de un continuo es una cota superior para el tamaño de $K(X)$. En el capítulo 4, se dio una familia de continuos en la cual el grado de homogeneidad y el tamaño de $K(X)$ coinciden, en esta sección se presenta una familia de gráficas finitas Y_n, tales que, el grado de homogeneidad es estrictamente mayor al tamaño de $K(Y_n)$. Antes un concepto que será necesario.

Definición 5.1. *Sean X un continuo y $p, q \in X$. Decimos que X es **pseudo-simétrico con respecto a** p y q, si existe un homeomorfismo $\varphi : C(p, X) \to C(q, X)$ tal que $\varphi(\{p\}) = \{q\}$ y $\varphi(X) = X$.*

Teorema 5.2. *Sea X un continuo. Si X es homogéneo, entonces X es pseudo-simétrico con respecto a cada par de sus puntos.*

Demostración. Sean $p, q \in X$, por ser X homogéneo existe $f : X \to X$ un homoemorfismo tal que $f(p) = q$. Por el Lema 3.19, se cumple que $C(f)_p : C(p, X) \to C(q, X)$ es un homeomorfismo, donde $C(f)_p(A) = f(A)$. Es claro que $C(f)_p(\{p\}) = \{q\}$ y $C(f)_p(X) = X$.

□

Ejemplo 5.3. *El arco $[0, 1]$ es pseudo-simétrico con respecto a 0 y 1.*

Demostración. Basta considerar el homeomorfismo $f : [0, 1] \to [0, 1]$, definido por $f(x) = 1 - x$. Tomando $C(f)_0 : C(0, [0, 1]) \to C(1, [0, 1])$ por $C(f)_0(A) = f(A)$ se cumple lo deseado. □

Definición 5.4. *Un continuo X es* ***descomponible****, si X puede ser puesto como la unión de dos subcontinuos propios. Diremos que X es* ***indescomponible****, si X no es descomponible.*

Definición 5.5. *Un continuo X es* ***hereditariamente descomponible*** *(****indescomponible****), si cada uno de sus subcontinuos propios, no degenerados, es descomponible (indescomponible).*

Teorema 5.6. *[9, Lema 3.19] Sea X un continuo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es hereditariamente indescomponible.*

2. *$C(p, X)$ es un arco para cada $p \in X$.*

Teorema 5.7. *Sea X un continuo hereditariamente indescomponible, entonces X es pseudo-simético con respecto a cada par de sus puntos.*

Demostración. Sean $p, q \in X$, por el Teorema 5.6, podemos tomar los siguientes homeomorfismos $f_1 : C(p, X) \to [0, 1]$ y $f_2 : [0, 1] \to C(q, X)$. Tenemos que $f_1(\{p\}) = a$, $f_1(X) = b$ y $f_2(c) = \{q\}$, $f_2(d) = X$, donde $a, b, c, d \in [0, 1]$. Supongamos, sin perder generalidad, que $a < b$ y $c < d$. Se define la función $f : [0, 1] \to [0, 1]$ por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{a}x, & \text{si } x \in [0, a], \\ \frac{d-c}{b-a}x + (c - \frac{d-c}{b-a}a), & \text{si } x \in (a, b], \\ \frac{1-d}{1-b}x + (d - \frac{1-d}{1-b}b), & \text{si } x \in (b, 1]. \end{cases}$$

Note que la función f es un homeomorfismo. Definamos la función $\varphi : C(p, X) \to C(q, X)$ por $\varphi(A) = (f_2 \circ f \circ f_1)(A)$. Se cumple que φ es un homeomorfismo, además $\varphi(\{p\}) = (f_2 \circ f)(f_1(\{p\})) = (f_2 \circ f)(a) = f_2(f(a)) = f_2(c) = \{q\}$ y $\varphi(X) = (f_2 \circ f)(f_1(X)) = (f_2 \circ f)(b) = f_2(f(b)) = f_2(d) = X$. Por lo tanto, X es pseudo-simétrico con respecto de p y q. $\square$

Ejemplo 5.8. *El continuo X del Ejemplo 3.24, es pseudo-simétrico con respecto a los puntos extremos $(1, 1)$ y $(1, -1)$.*

El siguiente teorema es un punto central para la construcción de la clase de gráficas finitas que deseamos exponer.

Teorema 5.9. *Sean Y un continuo pseudo-simétrico con respecto a los puntos p y q, supongamos que la función φ cumple que, si $A \in C(p,X) \cap C(q,X)$, entonces $\varphi(A) \in C(p,X) \cap C(q,X)$. Sea X un continuo tal que $X = L \cup Y \cup K$, donde L y K son continuos tales que $L \cap Y = \{p\}$, $K \cap Y = \{q\}$ y $L \cap K = \emptyset$. Supongamos que existe un homeomorfismo $f : C(p,L) \to C(q,K)$ tal que $f(\{p\}) = \{q\}$ y $f(L) = K$. Entonces, $C(p,X)$ es homeomorfo a $C(q,X)$.*

Demostración. Definamos la función $g : C(Y,X) \to C(p,L) \times C(q,K)$ por $g(A) = (A \cap L, A \cap K)$. Veamos que g es inyectiva. Para esto, tomemos $A, B \in C(Y,X)$ tales que $A \neq B$ y, supongamos que $g(A) = g(B)$. De esto que $A \cap L = B \cap L$ y $A \cap K = B \cap K$. Como $A \neq B$ supongamos, sin perder generalidad, que existe $a \in A$ tal que $a \notin B$, esto implica que $a \in L$ o $a \in K$. Si $a \in L$, entonces $a \in B \cap L$ y si $a \in K$, entonces $a \in B \cap K$, en ambos casos se llega a una contradicción. Por lo tanto, $g(A) \neq g(B)$.

Para ver que g es sobreyectiva basta ver que, dado $(A,B) \in C(p,L) \times C(q,K)$ se cumple que, $g(Y \cup A \cup B) = (A,B)$.

Veamos que g es continua. Para ello, consideremos las funciones $g_1 : C(Y,X) \to C(p,L)$, $g_2 : C(Y,X) \to C(q,K)$ definidas por $g_1(A) = A \cap L$ y $g_2(A) = A \cap K$. Sean $A \in C(Y,X)$ y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(Y,X)$ que converge a A, es decir, $\lim A_n = A$. Veamos que $\lim(A_n \cap L) = A \cap L$, sea $x \in \limsup(A_n \cap L)$, luego, para cada U abierto que contenga a x se cumple que, $U \cap (A_n \cap L) \neq \emptyset$ para un número infinto de $n's$. Esto implica que $x \in \limsup A_n = \liminf A_n = A$ y $x \in cl(L) = L$, por ende $x \in A \cap L$. Si $x = p$, es claro que $x \in \liminf(A_n \cap L)$, cuando $x \neq p$ se puede tomar $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap Y = \emptyset$ y $B(x,r) \cap K = \emptyset$, es decir, $B(x,r) \subset L$.

Luego, dado U un abierto de x se cumple que, existe $r > r_0 > 0$ tal que $B(x,r_0) \subset U$ y, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n_0$ ocurre que $B(x,r_0) \cap A_n \neq \emptyset$. Como $B(x,r_0) \subset U \cap L$ se tiene que, $U \cap L \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq n_0$, esto implica que $x \in \liminf(A_n \cap L)$, por lo tanto $\lim(A_n \cap L)$ existe y, además, $\lim(A_n \cap L) \subset A \cap L$, la contención $A \cap L \subset \lim(A_n \cap L)$ se obtiene con pasos similares, por lo tanto $\lim(A_n \cap L) = A \cap L$.

Así, g_1 es continua, con argumentos análogos se prueba que g_2 es continua. Observe que $g(A) = (g_1(A)), g_2(A))$, por lo tanto g es continua. Por ser $C(Y,X)$ compacto se cumple que, g es un homeomorfismo.

Como Y pseudo-simétrico con respecto a p y q, existe $\varphi : C(p,Y) \to C(q,Y)$ tal que $\varphi(\{p\}) = \{q\}$, $\varphi(Y) = Y$ y, por hipótesis, para cada $A \in C(p,X) \cap C(q,X)$ se cumple que $\varphi(A) \in C(p,X) \cap C(q,X)$. También, por hipótesis, existe un homeomorfismo $f : C(p,L) \to C(q,K)$ tal que $f(\{p\}) =$

$\{q\}$ y $f(L)=K$. Se define la función $h : C(p,X) \to C(q,X)$ por:

$$h(A)=\begin{cases}\varphi(A\cap Y)\cup f(A\cap L)\cup f^{-1}(A\cap K), & \text{si } A\notin C(Y,X),\\ g^{-1}(f^{-1}(A\cap K), f(A\cap L)), & \text{si } A\in C(Y,X).\end{cases}$$

Por ser f,g,φ homeomorfismos se cumple que, h también es un homeomorfismo. Por lo tanto, $C(p,X)\approx C(q,X)$ $\square$

Con las hipótesis del teorema anterior, si añadimos que X es $\frac{1}{n}$-homogéneo y que, p,q pertenecen a diferentes órbitas en $X/\equiv$, se tiene que el tamaño de $K(X)$ es menor que n.

Ejemplo 5.10. *Consideremos en $\mathbb{R}^2$ a $X = S\cup L\cup J$, donde*

1. $S=\{(x,y) : (x+2)^2+y^2=1\}$,
2. $L=\{(x,0) : x\in[-1,1]\}$,
3. $J=\{(1,y) : y\in[-1,1]\}$.

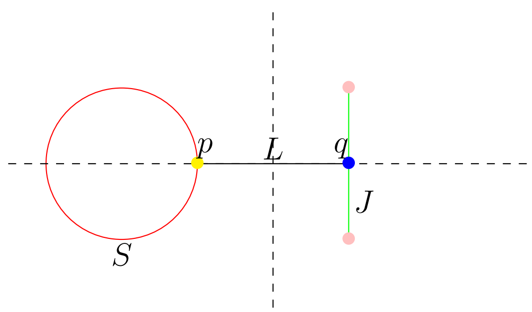


Figura 5.1: Gráfica de X.

En X tenemos las siguientes órbitas:

- Los puntos sobre la circunferencia en color rojo, forman la órbita $\mathcal{O}(x_1)$.
- Los puntos sobre el segmento color negro, forman la órbita $\mathcal{O}(x_2)$.
- Los puntos sobre el segmento color verde, forman la órbita $\mathcal{O}(x_3)$.

- Los puntos en color rosa forman la órbita $\mathcal{O}(x_4)$. Los puntos en color amarillo y azul forman las órbitas $\mathcal{O}(x_5)$ y $\mathcal{O}(x_6)$ respectivamente.

Esta gráfica finita es $\frac{1}{6}$- homogénea. Por el Ejemplo 5.3, L es pseudo-simétrico con respecto a los puntos $p = (-1, 0)$ y $q = (1, 0)$. Veamos que existe $f : C(p, S) \to C(q, J)$ tal que $f(\{p\}) = \{q\}$ y $f(S) = J$. De los Teoremas 2.2 y 2.3, se tiene, que existen dos homeomorfismos $f_1 : C(p, S) \to [0, 1]^2$, $f_2 : [0, 1]^2 \to C(q, J)$ tales que $f_1(S) = [0, 1]^2$ y $f_2([0, 1]^2) = J$. Además, $f_1(\{p\}) = (0, 0)$ y $f_2(0, 0) = \{q\}$. Considerando el homeomorfismo identidad $id : [0, 1]^2 \to [0, 1]^2$ y $f = f_2 \circ id \circ f_1$ se cumple lo deseado. Con esto, es claro que se cumplen todas la hipótesis del Teorema 5.9, por lo que $C(p, X)$ es homeomorfo a $C(q, X)$. Aplicando los Teoremas 2.9, 2.11 y 2.16, se verifica que $K(X)$ tiene tamaño 5.

Lo siguiente será construir una familia de gráficas finitas $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que, el tamaño de $K(Y_n)$ sea menor al grado de homogeneidad de Y_n. Consideremos las siguientes gráficas finitas.

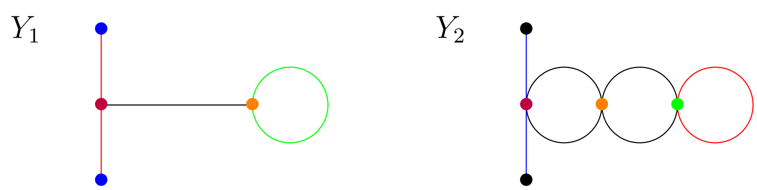


Figura 5.2: Y_1 y Y_2.

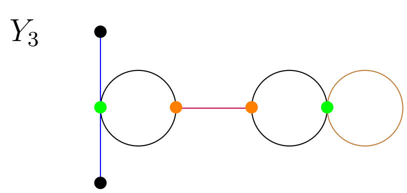


Figura 5.3: Y_3.

Note que Y_1 es la gráfica finita presentada en el Ejemplo 3.24, por lo que Y_1 es $\frac{1}{6}$-homogéneo y, $K(Y_1)$ tiene tamaño 5.

Con argumentos similares al anterior, se puede ver que Y_2 es $\frac{1}{7}$-homogéneo y, $K(Y_2)$ tiene tamaño 6, a su vez Y_3 será $\frac{1}{8}$-homogéneo y, $K(Y_3)$ tiene tamaño 7.

La idea para construir las gráficas para $n \geq 4$, es usar el Teorema 5.9, "pegando"dos continuos ajenos L y K, en un continuo Y, que sea pseudo-simétrico con respecto a los puntos p y q, que satisfaga las hipótesis del Teorema 5.9, tales que $C(p, L)$ y $C(q, K)$ son homeomorfos, pero de tal manera que no exista un homeomorfismo entre L y K que mande p en q, esto último para que el grado de homogeneidad de $X = L \cup Y \cup K$ sea extricamente mayor que el tamaño de $K(X)$.

Para ello, utilizaremos las gráficas finitas P_i previamente presentadas.

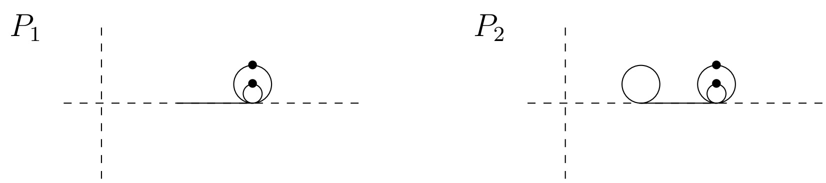


Figura 5.4: $P_1 = I_2 \cup J_2 \cup J$ y $P_2 = I_2 \cup J_1 \cup J_2 \cup J$.

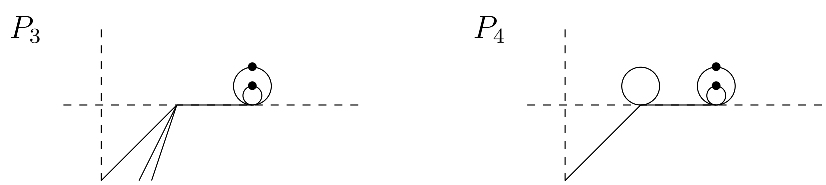


Figura 5.5: $P_3 = P_1 \cup \bigcup_{i=1}^{3} l_i^{(1)}$ y $P_4 = P_2 \cup l_1^{(1)}$.

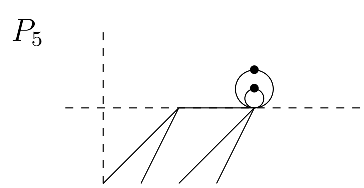


Figura 5.6: $P_5 = P_1 \cup l_1^{(1)} \cup l_2^{(1)} \cup l_1^{(2)} \cup l_2^{(2)}$.

Note que las gráficas finitas P_i son pseudo-simétricas respecto a $p = (2, \frac{1}{2})$ y $q = (2, \frac{1}{4})$, además, cumplen con las hipótesis del Teorema 5.9.

Luego, unimos a cada P_i los continuos L=[1.8,2.2]$\times\{\frac{1}{4}\}$ en azul y, K en rojo, como el círculo con centro en $(2, \frac{3}{4})$ y de radio $\frac{1}{4}$, obteniendo las gráficas finitas que se muestran a continuación.

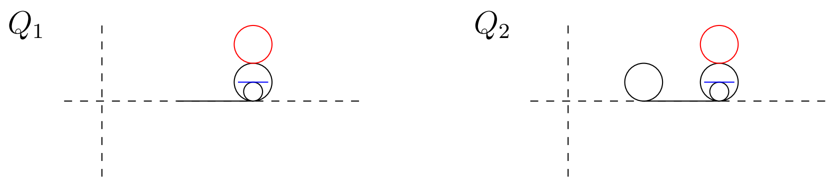


Figura 5.7: $Q_1 = P_1 \cup L \cup K$ y $Q_2 = P_2 \cup L \cup K$.

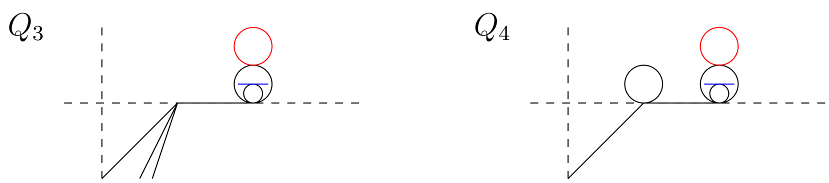


Figura 5.8: $Q_3 = P_3 \cup L \cup K$ y $Q_4 = P_4 \cup L \cup K$.

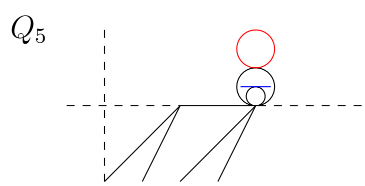


Figura 5.9: $Q_5 = P_5 \cup L \cup K$.

Por los Teoremas 2.2 y 2.3, existe $f : C(p, L) \to C(q, K)$ un homeomorfismo tal que, $f(\{p\}) = \{q\}$ y $f(L) = K$. Luego, por el Teorema 5.9, $C(p, X)$ es homeomorfo a $C(q, X)$.

Haciendo uso de los Teoremas 2.9, 2.11, 2.16 y 5.9, se ve que Q_i es $\frac{1}{i+8}$-homogéneo y, $K(Q_i)$ tiene tamaño $i + 7$.

De forma similar a la construcción de las gráficas finitas X_n en el capítulo 4, se define como sigue a Y_n para $n \geq 4$:

1. Para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y_{i+3} = Q_i$,
2. Para cada $n \geq 9$, expresamos primero a $n = 5(k+1) + r$, donde $r \in \{-1, , 0, 1, 2, 3\}$. Para después definir $Y_n = Y_{5k+r} \cup S_{k+2}$.

Las siguientes gráficas muestran las primeras cinco iteraciones del proceso de construcción:

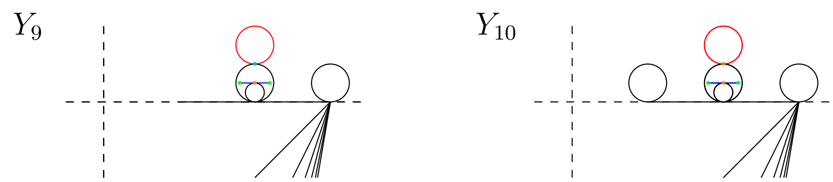


Figura 5.10: $Y_9 = Q_1 \cup S_3$ y $Y_{10} = Q_2 \cup S_3$.

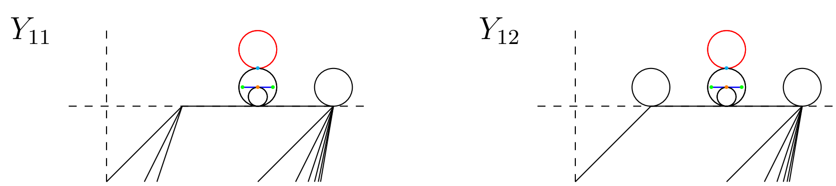


Figura 5.11: $Y_{11} = Q_3 \cup S_3$ y $Y_{12} = Q_4 \cup S_3$.

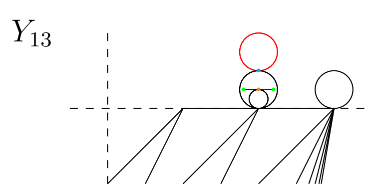


Figura 5.12: $Y_{13} = Q_5 \cup S_3$.

Nuevamente, las gráficas S_n aumentan en 5 el grado de homogeneidad y el tamaño. Por lo cual podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 5.11. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una gráfica finita Y_n que es $\frac{1}{n+5}$-homogénea y $K(Y_n)$ tiene tamaño $n+4$.*

Capítulo 6

Conclusiones

A continuacón se presentan las conclusiones a las que se ha llegado en este trabajo.

Como se observó en el Teorema 2.8, este es una generalización para gráficas finitas del resultado [12, Corolario 3.12] de P. Pellicer, el cual nos dice que podemos hallar $n - celdas$ en $C(p, X)$ de acuerdo al orden del punto p en X. Este teorema es necesario para poder probar los Teoremas 2.9, 2.11 y 2.16. De igual forma son una herramienta muy útlil para determinar el tamaño $K(X)$ y, al mismo tiempo, el grado de homogeneidad de X.

Con esto, se logra la construcción de la familia de gráficas finitas X_n, donde el grado de homogeneidad y el tamaño de $K(X_n)$ coinciden y es igual a n.

A su vez, el Teorema 5.9 da las condiciones necesarias que deben cumplir dos puntos $p, q \in X$, con X una gráfica finita, para garantizar que $C(p, X) \approx C(p, X)$. En contraste con lo anterior, este teorema nos permite construir otra familia de gráficas finitas Y_n, las cuales cumplen que el grado de homogeneidad de Y_n es diferente al tamaño de $K(Y_n)$, véase Teorema 5.11.

Por el Teorema 3.28, no puede existir una gráfica finita X, tal que X sea $\frac{1}{2}$-homogénea y $K(X)$ tenga tamaño 1. Por lo anterior, aún quedan sin respuesta las siguientes preguntas:

Pregunta 6.1. *[1, Pregunta 5.3] Para $n \in \{2, 3, 4\}$, ¿existe una gráfica finita X que sea $\frac{1}{n+1}$-homogénea, tal que $K(X)$ tiene tamaño n?*

Pregunta 6.2. *En el Teorema 5.9, se tiene la hipótesis sobre la función φ, que si $A \in C(p, X) \cap C(q, X)$, entonces $\varphi(A) \in C(p, X) \cap C(q, X)$, ¿es posible quitar esta hipótesis del teorema?*

Se concluye enunciando un problema abierto en torno a este trabajo.

Problema 6.3. *[1, Problema 5.4] Caracterizar la clase de gráficas finitas X tales que para cada $n \in \mathbb{N}$, X es $\frac{1}{n}$-homogéneo y $K(X)$ tiene tamaño n.*

Referencias

[1] Florencio Corona Vázquez, Russell Aarón Quiñones Estrella, Javier Sánchez Martínez, Hugo Villanueva Méndez, *Hyperspaces C(p,X) of finite graphs*, Topology and its Applications, 248 (2018), 44–49.

[2] Carl Eberhart, *Intervals of continua which are Hilbert cubes*, Proceedings of the American Mathematical. Society. 68 (2) (1978), 220–224.

[3] Alejandro Illanes Mejía y Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, New york, Basel, 1999.

[4] Judy Kennedy, James T. Rogers, Jr., *Orbits of the pseudocircle*, Transactions of the American Mathematical Society, 296 (1986), 327–340.

[5] María de Jesús López Toriz, Patricia Pellicer Covarrubias, Alicia Santiago Santos, $\frac{1}{2}$-*homogeneous suspensions*, Topology and its Applications 157 (2010), 482–493.

[6] Jorge Marcos Martínez Montejano, *Models for* $C_p(X)$ *for atriodic continua*, Topology and its Applications, 154 (2007), 115–123.

[7] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, New york, Basel, 1992.

[8] Víctor Neumann Lara, Patricia Pellicer Covarrubias, Isabel Puga Espinosa, *On* $\frac{1}{2}$- *homogeneous continua*, Topology and its Applications, 153 (2006), 2518–2527.

[9] Patricia Pellicer Covarrubias, *The hyperspaces C(p,X)*, Topology Proceedings, 27 (1) (2003), 259–285.

[10] Patricia Pellicer Covarrubias, *The hyperspaces K(X)*, Rocky Mountain Journal of Mathematics. 35 (2) (2005), 655–674.

[11] Patricia Pellicer Covarrubias, *The hyperspaces C(p,X) for atriodic continua*, Houston Journal of Mathematics, 31 (2) (2005), 403–426.

[12] Patricia Pellicer Covarrubias, *Cells in hyperspaces*, Topology and its Applications, 154 (2007), 1002–1007.

[13] Patricia Pellicer Covarrubias, $\frac{1}{n}$*-homogeneity in symmetric products*, Topology and its Applications, 155 (2008), 1650–1660.

[14] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, Mc Graw Hill, U.S.A, 1980.

[15] Alicia Santiago Santos, Noé Trinidad Tapia Bonilla, $\frac{1}{n}$*-homogeneity of 2-nd cones*, Topology and its Applications, 234 (2018), 130–154.

Índice alfabético