Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Diferencias entre la conexión Levi-Civita y Riemann-Cartan

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito para la obtención del grado de

Licenciada en Física

Por

Karla Pamela De Los Santos Zarate

Asesorada por

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada

Puebla, Pue.
Marzo 2022

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Licenciatura en Física

Diferencias entre la conexión Levi-Civita y Riemann-Cartan

Tesis que presenta la C. Karla Pamela De Los Santos Zarate, para obtener el grado de Licenciada en Física

Autora

Karla Pamela De Los Santos Zarate

Directora de tesis

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada

Puebla, Puebla
Marzo del 2022

Resumen

Se realizó una comparación en las estructuras que se definen sobre variedades diferenciables haciendo uso de dos tipos de conexiones: la conexión de Levi-Civita y la de Riemann-Cartan donde la torsión es nula y no nula, respectivamente. Le damos relevancia a la conexión de Riemann-Cartan donde se presenta con mayor detalle el desarrollo de las estructuras de interés y procedemos a comparar las expresiones obtenidas entre dichas conexiones.

Con el fin de realizar el estudio de la conexión de Levi-Civita y de Riemann-Cartan se exponen los conceptos necesarios de variedades diferenciables para la correcta comprensión de la comparación ya mencionada.

Palabras clave: Conexión de Riemann-Cartan, Conexión de Levi-Civita, torsión, variedades diferenciables.

Agradecimientos

A mi mamá Mina y a mi papá Alberto, muchas gracias por el apoyo incondicional y por creer en mí más que nadie, sepan que todo el tiempo pensé en ustedes.

A mis hermanas Caro y Nini por estar conmigo y ayudarme a su manera. Además, gracias a la familia Zarate que tanto quiero y que tanto me han dado la mano.

Gracias a mis amigos, la universidad fue una experiencia muy bonita con su compañía. En especial, gracias a mi mejor amigo Christian por su ayuda y por siempre estar a mi lado, sin importar la situación.

A los profesores de la facultad les agradezco infinitamente por la motivación, por sus enseñanzas y por su gran labor. En particular agradezco a la profesora Mercedes Velázquez por su paciencia, su tiempo y por compartir su conocimiento conmigo.

Por último, gracias a Víctor Addi porque sin ningún vínculo más que el amor, me has enseñado lo que un enamorado está dispuesto a hacer.

A todos los presentes
y a los que tuvieron que partir.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El estudio de superficies y curvas es de particular interés para los físicos pues nos ayuda a describir el comportamiento de un cuerpo bajo distintas condiciones. En particular, con el análisis de variedades diferenciables podemos estudiar superficies aparentemente complejas y analizarlas localmente, como si se tratara de un espacio euclidiano; por ello el manejo de variedades diferenciables ha contribuido al desarrollo de diversas ramas de la física. Por ejemplo, en relatividad general el espaciotiempo puede ser visto como una variedad diferenciable 4-dimensional. Sobre variedades diferenciables, podemos definir diferentes estructuras, una de estas estructuras es la torsión; sin embargo algunas estructuras cambian si la torsión está presente; por ello usualmente se trabaja con variedades diferenciables donde la torsión es cero. En este trabajo, mostraremos la diferencia entre las estructuras definidas sobre una variedad diferenciable si la torsión es igual a cero y si es no-nula.

En la relatividad general de Einstein se trabaja sobre una variedad sin torsión, de acuerdo con Trautman, en 1922 surge una modificación de la teoría de relatividad general conocida como teoría de gravedad de Einstein-Cartan, enunciada por Élie Cartan, donde se incluye la torsión y se relaciona al momento angular intrínseco de la materia [9]. La teoría de Einstein-Cartan, no cobró relevancia hasta 1950 cuando fue redescubierta de forma independiente por Sciamma y Kibble; con ello las investigaciones sobre la teoría de Einstein-Cartan fueron ampliadas y han sido de interés pues dicha teoría podría relacionar la relatividad general con teorías de interacciones entre partículas [6].

En cuanto a las aplicaciones relacionadas a partículas, se ha visto que se puede proponer un campo de torsión como posible candidato a un campo que representa la materia oscura (ver por ejemplo [2]).

Además de los estudios en la teoría de Einstein-Cartan y en partículas, existen otras aplicaciones de torsión en variedades diferenciables. En particular, en el estudio de anatomía computacional donde se desarrollan modelos de órganos y tejidos, se hace uso de conexiones de Cartan en donde la torsión es no nula, veáse [5].

Asimismo, en el estudio de la termodinámica de agujeros negros y de la entropía asociada al horizonte de un agujero negro se emplea la teoría de Einstein-Cartan, pues dichos estudios sobre agujeros negros deben cumplirse no sólo en Relatividad General. Según Day y colaboradores [3], estos estudios representan un avance en la construcción de una teoría de cuántica de la gravedad.

En la presente tesis se realizó una comparación entre las estructuras definidas sobre dos conexiones: la conexión de Levi-Civita y la de Riemann-Cartan con ausencia y presencia de torsión respectivamente. La organización de esta tesis es la siguiente: en el capítulo 2 se exponen los conceptos base y se definen estructuras necesarias para la comprensión de variedades diferenciables (funciones, curvas, campos vectoriales y covectoriales, etc.) y de las estructuras sobre las cuales haremos la comparación entre torsión nula y no nula. En el capítulo 3 se presenta el concepto de torsión T, sin embargo en este capítulo se hace uso de $T = \mathbf{0}$, con ello se define la conexión de Levi-Civita y sobre esta se trabajan las estructuras que se van a comparar, tales como las funciones que definen una conexión, curvas geódesicas, campos vectoriales de Killing, las componentes del tensor de curvatura y sus simetrías, las componentes del tensor de Ricci y el escalar de curvatura. En el capítulo 4 se presenta el equivalente a las estructuras expuestas en el capítulo 3 pero definidas sobre la conexión de Riemann-Cartan, donde $T \neq \mathbf{0}$. Finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones, en las cuales se muestra una tabla comparativa donde se aprecia la diferencia entre las estructuras definidas sobre las dos conexiones estudiadas.

Capítulo 2

Conceptos elementales

En este capítulo, se presenta una revisión de las definiciones y los conceptos elementales necesarios para la comprensión de las estructuras que se pueden construir sobre variedades diferenciables tales como la torsión, la curvatura y los campos vectoriales de Killing; estructuras sobre las que se centra esta tesis. Para una revisión más detallada, se recomienda consultar la referencia [8].

Definición 2.0.1. Sea M un conjunto, una *carta* sobre M es un par (U, ϕ) tal que $U \subseteq M$ y ϕ es un mapeo invertible de U a algún abierto en $\mathbb{R}^n$.

Así, una carta sobre M, se encarga de mapear un subconjunto U de M a algún subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Usualmente se requiere más de una carta para cubrir todo el conjunto M, lo cual implica que un punto sobre M, puede pertenecer al dominio de más de una carta; por ello, se define una función diferenciable que relacione las cartas sobre M.

Definición 2.0.2. Una función $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $F(q) = (f_1(q), f_2(q), ..., f_m(q))$ es *diferenciable de clase* C^k si las funciones $f_1, f_2, ..., f_m$ tienen k-ésima derivadas parciales continuas.

Definición 2.0.3. Sean (U, ϕ) y (V, χ) dos cartas sobre M, se dice que están C^k-*relacionadas* si:

$$U \cap V = \emptyset \tag{2.1}$$

o

$$\begin{aligned} \phi \circ \chi^{-1} &: \chi(U \cap V) \longrightarrow \phi(U \cap V), \\ \chi \circ \phi^{-1} &: \phi(U \cap V) \longrightarrow \chi(U \cap V), \end{aligned} \tag{2.2}$$

son funciones diferenciables de clase C^k.

Esta última condición asegura la diferenciabilidad de la variedad M, pues se requiere que la composición entre los mapeos de las cartas, sean de clase C^k. Además, la diferenciabilidad de las funciones que se pueden definir sobre la variedad, f :

$M \longrightarrow \mathbb{R}$ no dependerán de la carta elegida debido a que las cartas están C^k-relacionadas. Al conjunto de funciones diferenciables de M en $\mathbb{R}$ se denota por $C^\infty(M)$.

Se requiere que todo el conjunto M sea cubierto por cartas, y como se puede apreciar de la definición anterior, es posible que las cartas se empalmen. La colección de todas las cartas $\{U_i, \phi_i\}$ que están C^k-relacionadas tales que $M = U_1 \cup U_2 \cup ...$ se le conoce como C^k *atlas* sobre M. El conjunto M junto con su C^k atlas se conoce como C^k *variedad diferenciable* y si $k \geq 1$ se tiene una variedad diferenciable de dimensión n.

Una vez introducido el concepto de una variedad diferenciable, es posible comenzar a definir estructuras con las que ya estamos familiarizados tales como curvas, vectores, tensores, etc. pero ahora de forma más general, pues ya no estamos trabajando sobre $\mathbb{R}^n$. Es por ello la motivación de las siguientes definiciones.

Definición 2.0.4. Sea M una C^k variedad, $C : I \longrightarrow M$ es una *curva diferenciable* de clase C^r en M si I es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ y $\phi \circ C$ es un mapeo diferenciable de clase C^r para cada carta (U, ϕ) atlas de M.

Definición 2.0.5. Sea C una curva diferenciable en M, $C : I \longrightarrow M$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f \in C^\infty(M)$. Si t_0 pertenece al dominio de la curva; definimos al *vector tangente a la curva* C en el punto $C(t_0)$, denotado por C'_{t_0}, como:

$$C'_{t_0}[f] \equiv \frac{d}{dt}(f \circ C)\Big|_{t_0}. \tag{2.3}$$

Definición 2.0.6. Sea $p \in M$. Un *vector tangente* a M en el punto p, es un mapeo $v_p : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned} v_p[af + bg] &= av_p[f] + bv_p[g]\,, \\ v_p[fg] &= f(p)v_p[g] + g(p)v_p[f]\,, \end{aligned} \tag{2.4}$$

para $f, g \in C^\infty(M), a, b \in \mathbb{R}$.

Al conjunto de todos los vectores tangentes a M en el punto p se le denota por T_pM y forma un espacio vectorial que se conoce como *espacio tangente a M en p*. Cabe mencionar que los vectores tagentes de la definición 2.0.5 cumplen con las ecuaciones (2.4).

Además, se puede formar una base para T_pM que poseé la siguiente estructura:

Definición 2.0.7. Si (U, ϕ) es una carta sobre M con coordenadas $x^1, x^2, ..., x^n$ y $p \in U$, el conjunto $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p\right\}_{i=1}^n$ forman una base de T_pM. Donde $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ es un vector tangente a la variedad en el punto p y actúa sobre una función como sigue:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p [f] \equiv D_i(f \circ \phi^{-1})\big|_{\phi(p)}, \tag{2.5}$$

para $f \in C^\infty(M)$. En la ecuación (2.5), D_i actúa como la derivada parcial con respecto al i-ésimo argumento.

Dado que en un punto sobre una variedad diferencial tenemos una familia de vectores tangentes, es conveniente introducir la definición de campos vectoriales y algunas de sus propiedades.

Definición 2.0.8. Un *campo vectorial* $\mathbf{X} : M \longrightarrow TM$ es una función tal que a cada punto de M le asigna un vector tangente $\mathbf{X}(p) \in T_pM$. El vector tangente asociado al punto p también se denota por $\mathbf{X}_p$.

Un campo vectorial no actúa únicamente sobre puntos en la variedad, también puede actuar sobre funciones, es por ello que se presentan la siguientes definiciones:

Definición 2.0.9. Sea $\mathbf{X}$ un campo vectorial sobre M y $f \in C^\infty(M)$, definimos la función $\mathbf{X}f$ como $(\mathbf{X}f)(p) = \mathbf{X}_p\,[f]$. Si la función $\mathbf{X}(f)$ es diferenciable, el campo vectorial $\mathbf{X}$ es diferenciable. El conjunto de campos vectoriales diferenciables sobre M se denota por $\mathfrak{X}(M)$.

Debido a que $\mathbf{X}_p$ es un vector tangente a un punto, es posible escribir estos vectores como combinación lineal de la base para el espacio tangente a p y se puede demostrar que cualquier campo vectorial diferenciable se puede expresar como sigue: $\mathbf{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Definición 2.0.10. Sean $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$, se define el paretésis de Lie entre campos vectoriales diferenciables sobre M como:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\, f \equiv \mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f)) \quad \forall f \in C^\infty(M). \tag{2.6}$$

Algunas propiedades asociadas al parentésis de Lie entre campos vectoriales diferenciables que serán de utilidad, se presentan en el siguiente apartado.

- Sea (U, ϕ) una carta sobre M con coordenadas $x^1, x^2, ..., x^n$, se cumple que:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right] = \mathbf{0}. \tag{2.7}$$

- Sean $\mathbf{X}$,$\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in C^\infty(M)$

$$[f\mathbf{X}, g\mathbf{Y}] = fg\,[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] + f(\mathbf{X}g)\mathbf{Y} - g(\mathbf{Y}f)\mathbf{X}. \tag{2.8}$$

Una vez explicados los conceptos del espacio tangente a un punto sobre la variedad y sus elementos, se introduce la definición del espacio dual a T_pM y de igual forma, se describen sus elementos.

El *espacio cotangente* (o *espacio dual*) a T_pM se denota por T_p^*M y está conformado por todas las transformaciones lineales de T_pM a $\mathbb{R}$; donde estas transformaciones reciben el nombre de *covectores* o *vectores covariantes* y forman un espacio vectorial.

Definición 2.0.11. Sean $\alpha_p, \beta_p \in T_p^*M$, $v_p \in T_pM$ y $a \in \mathbb{R}$. Los elementos del espacio cotangente pueden operarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(\alpha_p + \beta_p)(v_p) &\equiv \alpha(v_p) + \beta(v_p),\\ (a\alpha)(v_p) &\equiv a(\alpha(v_p)).\end{aligned} \tag{2.9}$$

Al igual que en el espacio tangente; sobre el espacio cotangente se introduce la definición de campo covectorial sobre M y se enuncian algunas de sus propiedades.

Definición 2.0.12. Un *campo covectorial* α en M es un mapeo que asigna a cada $p \in M$ un elemento $\alpha(p) \in T_p^*M$. El covector $\alpha(p)$ también puede escribirse como α_p.

Definición 2.0.13. Sea α un campo covectorial en M y $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}$, se define la función $\alpha(\mathbf{X})$ como $\alpha(\mathbf{X})(p) \equiv \alpha_p\mathbf{X}_p$. Si la función $\alpha(\mathbf{X})$ es diferenciable, el campo covectorial α es diferenciable. El conjunto de campos covectoriales diferenciables en M se denota por $\Lambda^1(M)$ y a sus elementos también se le conocen como *1-formas*.

Definición 2.0.14. Se define el mapeo $d : C^\infty(M) \longrightarrow \Lambda^1(M)$ como la diferencial de una función y está dado por $df(p) \equiv df_p$. La diferencial de una función f es un campo covectorial o 1-forma que actúa como:

$$df_p(v_p) \equiv v_p[f], \tag{2.10}$$

para $f \in C^\infty(M)$ y $p \in M$.

De forma análoga que en el espacio tangente, se puede construir una base para el espacio cotangente y tiene la siguiente forma:

Definición 2.0.15. Sea (U, ϕ) una carta sobre M con coordenadas $x^1, x^2, ..., x^n$ y $p \in U$, el conjunto $\left\{dx_p^i\right\}_{i=1}^n$ forman una base de T_p^*M y es la base dual de T_pM, es decir, se cumple que:

$$dx_p^i\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right) = \delta_j^i. \tag{2.11}$$

De forma similar a los vectores tangentes a un punto, es posible definir tensores a un punto sobre la variedad a partir de las definiciónes de campos vectoriales y covectoriales.

Definición 2.0.16. Un *tensor mixto de tipo* $\binom{k}{l}$ en el punto p es un mapeo multilineal $t_p : \underbrace{T_p^*M \times T_p^*M \times ... \times T_p^*M}_{k\,veces} \times \underbrace{T_pM \times T_pM \times ... \times T_pM}_{l\,veces} \longrightarrow \mathbb{R}$.

El conjunto de tensores de tipo $\binom{k}{l}$ sobre p forma un espacio vectorial con las siguientes operaciones:

$$(at_p + bs_p)(\alpha_1, ..., \alpha_k, v_1, ..., v_l) \equiv at_p(\alpha_1, ..., \alpha_k, v_1, ..., v_l) + bs_p(\alpha_1, ..., \alpha_k, v_1, ..., v_l), \tag{2.12}$$

para $\alpha_1, ...\alpha_k \in T_p^*M$, $v_1, ...v_l \in T_pM$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

Además, existe una operación entre tensores llamada producto tensorial y se define a continuación:

Definición 2.0.17. Sea t_p y s_p tensores mixtos de tipo $\binom{k}{l}$ y $\binom{m}{n}$ respectivamente, sobre p, el producto tensorial $t_p \otimes s_p$ está dado por:

$$\begin{aligned}(t_p \otimes s_p)&(\alpha_1, ..., \alpha_k, v_1, ..., v_l, \alpha_{k+1}, ..., \alpha_{k+m}, v_{l+1}, ..., v_{l+n}) \\ &\equiv t_p(\alpha_1, ..., \alpha_k, v_1, ..., v_l)s_p(\alpha_{k+1}, ...\alpha_{k+m}, v_{l+1}, ..., v_{l+n}),\end{aligned} \tag{2.13}$$

para $\alpha_1, ..., \alpha_{k+m} \in T_p^*M$ y $v_1, ..., v_{l+n} \in T_pM$. El tensor $t_p \otimes s_p$ es de tipo $\binom{k+m}{l+n}$ en p.

En similitud con los campos vectoriales y covectoriales, existen los campos tensoriales y se definen a continuación.

Definición 2.0.18. Un *campo tensorial t de tipo* $\binom{k}{l}$ en M es un mapeo que a cada punto $p \in M$ le asocia un tensor de tipo $\binom{k}{l}$ en p. Un campo tensorial t de tipo $\binom{k}{l}$ es diferenciable si para $\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_l \in \mathfrak{X}(M)$ y $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \Lambda^1(M)$, la función $t(\alpha_1, ...\alpha_k, \mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_l) : M \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$\left[t(\alpha_1, ...\alpha_k, \mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_l)\right](p) \equiv t_p(\alpha_1(p), ...\alpha_k(p), \mathbf{X}_1(p), ..., \mathbf{X}_l(p)) \tag{2.14}$$

es diferenciable.

Cabe aclarar que se pueden formar campos tensoriales de tipo $\binom{0}{k}$ y $\binom{k}{0}$, lo cual implicaría campos tensoriales evaluados únicamente en campos vectoriales o campos covectoriales respectivamente. En particular, si tenemos un campo tensorial de tipo $\binom{0}{2}$ al evaluarse en un par de campos vectoriales se obtiene una función $t(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Dado que conocemos la base del espacio tangente y del espacio cotangente, es posible expresar a cualquier campo tensorial t mixto de tipo $\binom{n}{m}$ en función del producto tensorial de las bases de T_pM y T_p^*M de la siguiente forma:

$$t = t^{k\,l...n}{}_{i\,j...m} dx^i \otimes ... \otimes dx^m \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) \otimes ... \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right), \tag{2.15}$$

donde la expresión $t^{k\,l...n}_{i\,j...m}$ son funciones que acompañan a la base del producto tensorial entre campos vectoriales y covectoriales.

Es importante señalar que la ecuación (2.15) puede estar escrita únicamente en terminos del producto tensorial de covectores o de campos vectoriales y esto depende del rango del campo tensorial. Al conjunto de campos tensoriales diferenciables de tipo $\binom{k}{l}$ en M se denota por $T_l^k(M)$.

Una de las herramientas que utilizaremos posteriormente es la derivada de Lie y para ello, es necesario definir los grupos de uniparámetricos de transformaciones.

Definición 2.0.19. Sea M una variedad diferenciable. Un *grupo uniparamétrico de transformaciones*, φ sobre M es un mapeo diferenciable de $M \times \mathbb{R}$ a M que satisface:

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= x, \\ \varphi(\varphi(x,t), s) &= \varphi(x, t+s), \end{aligned} \tag{2.16}$$

para $x \in M$ y $t, s \in \mathbb{R}$.

Los grupos uniparamétricos de transformaciones forman un conjunto de curvas sobre M, estos grupos tienen generadores infinitesimales que son campos vectoriales tangentes a la familia de curvas.

Ahora, con el fin de reunir los elementos necesarios para presentar la derivada de Lie, se requiere explicar el pullback de un campo tensorial.

Definición 2.0.20. Sea $\psi : M \longrightarrow N$ un mapeo diferenciable. Si t es un campo tensorial de tipo $\binom{0}{k}$ en una variedad diferenciable N, *el pullback de t bajo ψ* denotado por ψ^*t es un campo tensorial en M tal que:

$$(\psi^* t)_p(u_p, ..., w_p) \equiv t_{\psi(p)}(\psi_{*p} u_p, ..., \psi_{*p} w_p), \tag{2.17}$$

para $u_p, ..., w_p \in T_pM$ y $p \in M$.

Es preciso explicar que $\psi_{*p} u_p$ se conoce como el *Jacobiano de ψ en p* y se define como $\psi_{*p}(v_p)\,[f] \equiv v_p\,[f \circ \psi]$ donde $v_p \in M$ y $\psi_{*p}(v_p) \in T_{\psi(p)}N$. Entonces, tenemos un vector tangente en un punto p sobre M y mediante el jacobiano de ψ en p obtemos un vector tangente en un punto pero ahora sobre N.

En conjunto, se tiene un campo tensorial t en N, este campo tensorial está siendo evaluado en vectores tangentes a un punto sobre N, entonces, bajo el pullback, se obtiene un campo tensorial sobre M evaluado ahora sobre vectores tangentes a un punto de M.

En seguida, con las definiciones presentadas, se expone la derivada de Lie.

Definición 2.0.21. Sea φ un grupo uniparamétrico de transformaciones en M con un generador infinitesimal $\mathbf{X}$ y sea t un campo tensorial de tipo $\binom{0}{k}$ en M. Se define la *derivada de Lie de t con respecto de* $\mathbf{X}$ como:

$$\pounds_{\mathbf{X}} t = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi_h^* t - t}{h}, \tag{2.18}$$

si el límite existe.

De la definición anterior, se deben hacer las siguientes aclaraciones. En este caso, φ_h es un mapeo sobre la misma variedad; es decir, $\varphi_h : M \longrightarrow M$ y se define φ_h como $\varphi_h(x) \equiv \varphi(x, h)$. De modo que la derivada de Lie de un campo tensorial es un nuevo campo tensorial.

Ahora, escribiremos una expresión de gran utilidad para obtener la derivada de Lie de campos tensoriales de tipo $\binom{0}{k}$:

$$(\pounds_{\mathbf{X}} t)(\mathbf{Y}_1, ..., \mathbf{Y}_k) = \mathbf{X}(t\,(\mathbf{Y}_1, ..., \mathbf{Y}_k)) - \sum_{i=1}^{k} t\,(\mathbf{Y}_1, ..., [\mathbf{X}, \mathbf{Y}_i]\,, ..., \mathbf{Y}_k)\,. \tag{2.19}$$

Es posible escribir la ecuación (2.18) en función de sus componentes, ya que recordemos que los campos tensoriales se pueden escribir como (2.15). Así, sea t un campo tensorial de tipo $\binom{0}{k}$, donde t puede escribirse como $t = t_{i...j}\, dx^i \otimes ... \otimes dx^j$, las componentes de la derivada de Lie de t se pueden escribir como:

$$\pounds_{\mathbf{X}} t = \left(X^l \frac{\partial\, t_{i...j}}{\partial x^l} + t_{l...j} \frac{\partial X^l}{\partial x^i} + ... + t_{i...l} \frac{\partial X^l}{\partial x^j} \right) dx^i \otimes ... \otimes dx^j. \tag{2.20}$$

Las primeras y segundas ecuaciones estructurales de Cartan, son formas diferenciales, es por ello que se realiza una pequeña revisión de formas diferenciales, derivada exterior y algunas propiedades que serán de utilidad en los próximos capítulos.

Definición 2.0.22. Sea M una variedad diferenciable. Una *forma diferencial de grado k* o *k-forma*, ω, es un campo tensorial de tipo $\binom{0}{k}$ tal que:

$$\omega(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_i, ..., \mathbf{X}_j, ..., \mathbf{X}_k) \equiv -\omega(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_j, ..., \mathbf{X}_i, ..., \mathbf{X}_k), \tag{2.21}$$

para $1 \leq i \leq j \leq k$ y $\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_i, ..., \mathbf{X}_j, ..., \mathbf{X}_k \in \mathfrak{X}(M)$.

Es decir, las formas diferenciales son campos tensoriales totalmente antisimétricos. El conjunto de $k-$formas en M se denota por $\Lambda^k(M)$.

Cualquier campo tensorial t de tipo $\binom{0}{k}$ puede definir una $k-$forma, al considerar todas las permutaciones posibles sobre sus argumentos. El conjunto de todas las permutaciones de los números $(1, 2, ..., k)$ se denota por S_k y $sgn\,\sigma$ denota el signo de la permutación $\sigma \in S_k$. Con ello, definimos al operador llamado *antisimetrización*, denotado por $\mathscr{A}$ que actúa sobre campos tensoriales y produce una k-forma:[1]

$$\mathscr{A}t(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_k) \equiv \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (sgn\,\sigma)\, t(\mathbf{X}_{\sigma(1)}, ..., \mathbf{X}_{\sigma(k)}), \tag{2.22}$$

para $\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_k \in \mathfrak{X}(M)$.

Al definir las k-formas diferenciales, se puede construir el producto entre estas.

Definición 2.0.23. Sea ω una k-forma y η una l-forma sobre M, el *producto exterior* o *producto wedge de ω con η* se define como:

$$\omega \wedge \eta \equiv \mathscr{A}(\omega \otimes \eta). \tag{2.23}$$

La forma diferencial obtenida del producto wedge es de grado $\binom{0}{k+l}$. Cabe aclarar que se hace uso de $\mathscr{A}$, dado que el producto tensorial de dos k-formas, no necesariamente es antisimétrico y así, al definir el producto wedge de esta manera, se asegura que el resultado también será una forma diferencial.

Las siguientes propiedades asociadas al producto wedge de k-formas nos serán de utilidad en los capítulos siguientes.

Propiedad 2.0.1. Sea $f \in \Lambda^0(M)$ una función, $\omega \in \Lambda^k(M)$ y $\eta \in \Lambda^l(M)$, se tiene lo siguiente:

$$\omega \wedge (f\eta) = f\omega \wedge \eta. \tag{2.24}$$

Propiedad 2.0.2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $\omega_1, \omega_1 \in \Lambda^k(M)$ y $\eta \in \Lambda^l(M)$, se tiene la linealidad del producto wedge:

$$(a\omega_1 + b\omega_2) \wedge \eta = a\,\omega_1 \wedge \eta + b\,\omega_1 \wedge \eta. \tag{2.25}$$

Propiedad 2.0.3. Sean α, $\beta \in \Lambda^1(M)$, se satisface:

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha). \tag{2.26}$$

[1]Para mayor información del operador $\mathscr{A}$ se recomienda revisar el capítulo 3 de la referencia [8].

Finalmente, la derivada exterior es el último concepto que se abarca en este capítulo; su revisión es de importancia pues es necesaria para la comprensión de las ecuaciones estructurales de Cartan.

Definición 2.0.24. Sea ω una k-forma sobre M, su *derivada exterior*, $d\omega$ está dada por:

$$\begin{aligned}(k+1)d\omega(\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_{k+1}) \equiv & \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}\mathbf{X}_i(\omega(\mathbf{X}_1,...,\hat{\mathbf{X}}_i,...,\mathbf{X}_{k+1})) \\ & + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_j],\mathbf{X}_1,...,\hat{\mathbf{X}}_i,...\hat{\mathbf{X}}_j,...,\mathbf{X}_{k+1}),\end{aligned} \tag{2.27}$$

para $\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_k+1 \in \mathfrak{X}(M)$ donde el símbolo $\hat{}$ indica la ausencia del campo $\mathbf{X}_i$.

Es relevante hacer notar que la derivada exterior de una k-forma devuelve una $(k+1)$-forma; es decir, aumenta el grado de la forma diferencial.

Las propiedades de la derivada exterior que son de nuestro interés se enumeran a continuación:

Propiedad 2.0.4. Sea $f \in \Lambda^0(M)$ y $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$; la derivada exterior de f está dada por:

$$df(\mathbf{X}) = \mathbf{X}f. \tag{2.28}$$

Propiedad 2.0.5. Sea $\omega \in \Lambda^k(M)$ una k-forma, entonces:

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0. \tag{2.29}$$

Propiedad 2.0.6. Sea $\alpha \in \Lambda^1(M)$ y $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$, la derivada exterior de α es la siguiente:

$$2d\alpha(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{X}(\alpha(\mathbf{Y})) - \mathbf{Y}(\alpha(\mathbf{X})) - \alpha([\mathbf{X},\mathbf{Y}]). \tag{2.30}$$

Propiedad 2.0.7. Sea $\omega \in \Lambda^k(M)$ y $\eta \in \Lambda^l(M)$, se define la derivada exterior del producto wedge entre k-formas como:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \tag{2.31}$$

Como puede apreciarse, sobre variedades diferenciables es posible definir numerosas entidades que ya eran conocidas del cálculo vectorial; con esta recopilación de los conceptos elementales se pretende lograr una mayor comprensión del siguiente capítulo. También se espera que se tenga una idea clara de los objetos con los que se trabajará posteriormente y se comprenda cómo es que estos actúan sobre los elementos aquí definidos.

Capítulo 3

Estructuras definidas sin torsión

La torsión es el concepto principal que se desea enunciar, pues se pretende realizar una comparativa entre elementos construidos sobre una variedad diferencial con torsión igual a cero y cuando está presente.

En este capítulo, una vez definido el concepto de torsión, se expodrá una conexión especial llamada conexión Levi-Civita, el transporte paralelo de un campo vectorial, las curvas geodésicas sobre una variedad, campos vectoriales de Killing y el tensor de curvatura, exhibiendo las propiedades que se cumplen únicamente cuando la torsión es cero.

3.1. Conexión sobre una variedad diferenciable

Para lograr exponer el concepto de torsión, es necesario introducir una nueva estructura conocida como conexión sobre una variedad, pues la torsión depende de la conexión establecida. Es por ello que se enuncia la siguiente definición.

Definición 3.1.1. Una *conexión*[1], $\overline{\nabla}$ en M asigna a cada $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ un operador $\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}$ que actúa sobre un campo vectorial $\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$; el resultado de esta operación es un campo vectorial denotado por $\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ y se conoce como la *derivada covariante de* $\mathbf{Y}$ *con respecto de* $\mathbf{X}$.

Si elegimos una carta sobre M, la derivada covariante de $\mathbf{Y}$ con respecto de $\mathbf{X}$ toma una forma específica de acuerdo a la base elegida, entonces sea $(x^1, x^2, ..., x^n)$ el sistema de coordenadas asociado a una carta sobre M en alguna vecindad $U \subset M$, se tiene que:

$$\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = X^i\Big(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \overline{\Gamma}^k_{ji}Y^j\Big)\frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{3.1}$$

donde $\overline{\Gamma}^k_{ji}$ son n^3 funciones diferenciables que describen la conexión.

[1]En esta tesis se denotará a una conexión arbitraria como $\overline{\nabla}$ a diferencia de la referencia [8] donde se denota por ∇, esta diferencia entre notaciones es para evitar ambigüedad pues hablaremos de dos conexiones más.

Por ser de utilidad más adelante, incluiremos la siguiente notación:

$$\overline{\nabla}_i Y^k \equiv \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \overline{\Gamma}^k_{ji} Y^j. \tag{3.2}$$

La derivada covariante se puede definir también para campos tensoriales de tipo $\binom{0}{k}$, como sigue:

Definición 3.1.2. Sea t un campo tensorial de rango $\binom{0}{k}$ y $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$, se define $\overline{\nabla}_{\mathbf{X}} t$ como la *derivada covariante de* t *con respecto de* $\mathbf{X}$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{X}(t(\mathbf{Y}_1, ..., \mathbf{Y}_k)) = (\overline{\nabla}_{\mathbf{X}} t)(\mathbf{Y}_1, ..., \mathbf{Y}_k) + \sum_{i=1}^{k} t(\mathbf{Y}_1, ..., \mathbf{Y}_{i-1}, \overline{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_{i+1}, ..., \mathbf{Y}_k), \tag{3.3}$$

para $\mathbf{Y}_1, ...\mathbf{Y}_k \in \mathfrak{X}(M)$.

La derivada covariante de t con respecto de $\mathbf{X}$ es un campo tensorial de tipo $\binom{0}{k}$.

Recordemos que en el caso de la derivada de Lie para campos tensoriales, al ser $\mathcal{L}_{\mathbf{X}} t$ un campo tensorial, pudimos expresar (2.18) en función de sus componentes (2.20); entonces de manera similar, es posible expresar la derivada covariante de un campo tensorial en función de sus componentes, pues $\overline{\nabla}_{\mathbf{X}} t$ es un campo tensorial.

Definición 3.1.3. Sea $(x^1, ...x^n)$ un sistema de coordenadas locales, $\mathbf{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ cualquier campo vectorial y t un campo tensorial de tipo $\binom{0}{k}$. Si expresamos a t como (2.15), la derivada covariante de t con respecto de $\mathbf{X}$ en función de sus componentes se define como

$$\overline{\nabla}_{\mathbf{X}} t = X^k \left(\frac{\partial t_{i...j}}{\partial x^k} - \overline{\Gamma}^m_{ik} t_{m...j} - ... - \overline{\Gamma}^m_{jk} t_{i...m} \right) dx^i \otimes ... \otimes dx^j. \tag{3.4}$$

Usualmente a las componentes de la expresión anterior se les denota por $\overline{\nabla}_k t_{i...j} = \frac{\partial t_{i...j}}{\partial x^k} - \overline{\Gamma}^m_{ik} t_{m...j} - ... - \overline{\Gamma}^m_{jk} t_{i...m}$. Esta expresión es de importancia, pues como se verá más adelante, el uso de las componentes de un campo tensorial es de utilidad.

A continuación, se presentan las propiedades que cumple la derivada covariante para campos vectoriales.

Propiedad 3.1.1. Sea M una variedad diferenciable, $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ y $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}(a\mathbf{Y} + b\mathbf{Z}) = a\overline{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} + b\overline{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}, \tag{3.5}$$

$$\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}(f\mathbf{Y}) = f\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}) + (\mathbf{X}f)\mathbf{Y}, \tag{3.6}$$

$$\overline{\nabla}_{a\mathbf{X}+b\mathbf{Y}} \mathbf{Z} = a\overline{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{Z} + b\overline{\nabla}_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}, \tag{3.7}$$

$$\overline{\nabla}_{f\mathbf{X}} \mathbf{Y} = f\overline{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}. \tag{3.8}$$

Las propiedades de la derivada covariante para campos tensoriales son análogas a las anteriores.

3.2. Definición de Torsión

Una vez establecido el concepto de la derivada covariante o conexión, es posible presentar la definición de torsión de una conexión.

Definición 3.2.1. La torsión de una conexión es un mapeo $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ y está dado por la expresión:

$$T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \overline{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] , \tag{3.9}$$

donde $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$.

La torsión al ser evaluada en un par de campos vectoriales da como resultado un campo vectorial y sabemos que los campos tensoriales al ser evaluados en campos vectoriales dan lugar a funciones (ver ecuación (2.14)), de modo que T en (3.9) no es campo tensorial. Sin embargo, T es equivalente a un campo tensorial $\tilde{T}$ de tipo $\binom{1}{2}$ dado por $\tilde{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \alpha) \equiv \alpha(T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$. Teniendo esto en consideración, surge de forma natural la definición de la 2-forma de torsión.

Sean $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ [2] una base de campos vectoriales diferenciables y $\{\theta^1, \theta^2, ..., \theta^n\}$ la base dual asociada a los campos vectoriales; es posible definir las 2-*formas de torsión* $T^{\,i}$ con respecto a una base de campos vectoriales diferenciables

$$T^{\,i}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \equiv \frac{1}{2}\,\theta^i\left(T(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\right) , \tag{3.10}$$

con $i = 1, ..., n$.

De la expresión anterior, se obtienen las primeras ecuaciones estructurales de Cartan, sin embargo para obtenerlas es necesario definir las formas de conexión.

Definición 3.2.2. Sea $\overline{\nabla}$ una conexión definida sobre M y sean $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ una base de campos vectoriales diferenciables, se definen las *formas de conexión* con respecto a una base

$$\Gamma^i{}_j(\mathbf{X}) \equiv \theta^i(\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{e}_j), \tag{3.11}$$

o de forma equivalente:

$$\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{e}_i = \Gamma^j{}_i(\mathbf{X})\mathbf{e}_j, \tag{3.12}$$

[2] La base de campos vectoriales utilizada hasta el momento era $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \right\}_{i=1}^n$, esta base de campos es holonómica, lo cual significa que está asociada a un sistema de coordenadas; en la base referida actualmente, se da la posibilidad de que la base sea no-holonómica. Para un análisis más profundo de bases holonómicas y no holonómicas se recomienda consultar el capítulo 5, sección 3 de la referencia [8].

para $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$.

Es importante hacer notar que las formas de conexión definen a las funciones $\overline{\Gamma}^i{}_{jk}$, mediante la relación $\overline{\Gamma}^i{}_{jk} \equiv \Gamma^i{}_j(e_k)$ o con la expresión $\Gamma^i{}_j \equiv \overline{\Gamma}^i{}_{jk}\theta^k$, donde ambas expresiones son equivalentes.

Ahora, sustituyendo la ecuación (3.9) en la ecuación (3.10):

$$
\begin{aligned}
T^i(\mathbf{X},\mathbf{Y}) &= \frac{1}{2}\,\theta^i\left(T(\mathbf{X},\mathbf{Y})\right),\\
&= \frac{1}{2}\,\theta^i\left(\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \overline{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X},\mathbf{Y}]\right),\\
&= \frac{1}{2}\left(\theta^i(\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}) - \theta^i(\overline{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}) - \theta^i\left([\mathbf{X},\mathbf{Y}]\right)\right),
\end{aligned}
$$

utilizando la ecuación (3.3) podemos escribir: $\theta^i(\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}) = \mathbf{X}(\theta^i(\mathbf{Y})) - \overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\theta^i(\mathbf{Y})$, al igual que el segundo términos y sustituirlos en la ecuación anterior:

$$
T^i(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{X}(\theta^i(\mathbf{Y})) - \overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\theta^i(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y}(\theta^i(\mathbf{X})) + \overline{\nabla}_{\mathbf{Y}}\theta^i(\mathbf{X}) - \theta^i\left([\mathbf{X},\mathbf{Y}]\right)\right),
$$

y haciendo uso de $\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\theta^i = -\Gamma^i{}_j(\mathbf{X})\theta^j$[3] junto con las propiedades (2.30) y (2.26):

$$
\begin{aligned}
T^i(\mathbf{X},\mathbf{Y}) =& \frac{1}{2}\left[\mathbf{X}(\theta^i(\mathbf{Y})) - \overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\theta^i(\mathbf{Y}) - \mathbf{Y}(\theta^i(\mathbf{X})) + \overline{\nabla}_{\mathbf{Y}}\theta^i(\mathbf{X}) - \theta^i\left([\mathbf{X},\mathbf{Y}]\right)\right]\\
=& \frac{1}{2}\left[2d\theta^i(\mathbf{X},\mathbf{Y}) + \Gamma^i{}_j(\mathbf{X})\theta^j(\mathbf{Y}) - \Gamma^i{}_j(\mathbf{Y})\theta^i(\mathbf{X})\right],
\end{aligned}
$$

se obtienen las *primeras ecuaciones estructurales de Cartan*[4]

$$
T^i = d\theta^i + \Gamma^i{}_j \wedge \theta^j. \tag{3.13}
$$

La ecuación (3.13) muestra de una forma más evidente que las primeras ecuaciones estructurales de Cartan relacionan dos 2-formas pues como se dijo en el capítulo anterior, la derivada exterior de una 1-forma (en nuestro caso, las componentes de la base dual θ^i son 1-formas) da como resultado una 2-forma, además el producto wedge del lado derecho de la ecuación (3.13) es operado entre 1-formas, lo cuál también da como resultado una 2-forma.

Ahora, dado que la torsión es equivalente a un campo tensorial es posible hablar de las componentes de la torsión en términos de una base.

Propiedad 3.2.1. Sean $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ dos campos vectoriales diferenciables tales que $\mathbf{X} = X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ y $\mathbf{Y} = Y^j\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)$, entonces, se define $T(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = X^i\,Y^j\,T^k{}_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)$,

[3] Véase la referencia [8], capítulo 5.

[4] El desarrollo de las primeras ecuaciones estructurales de Cartan se presenta en la referencia [8].

donde

$$T^k{}_{ij} = \overline{\Gamma}^k_{ji} - \overline{\Gamma}^k_{ij}, \tag{3.14}$$

son las componentes de la torsión [5].

Las componentes de la torsión se obtienen al sustituir $\mathbf{X} = X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ y $\mathbf{Y} = Y^j\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)$ en la ecuación (3.9):

$$T(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \overline{\nabla}_{X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)} Y^j\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) - \overline{\nabla}_{Y^j\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)} X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) - \left[X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), Y^j\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)\right],$$

de tal forma que usando las propiedades del parentésis de Lie (2.8) y (2.7) además de las propiedades (3.8), (3.6) y que $\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \overline{\Gamma}^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k}$, se obtiene la expresión (3.14).

Existe otra forma de escribir las 2-formas de torsión (3.10) tomando en cuenta que toda 2-forma puede escribirse como $\omega = \omega_{ij}\,\theta^i \wedge \theta^j$ (ver referencia [8] capítulo 3) y que $T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = T^k{}_{ij}\mathbf{e}_k$; entonces podemos escribir T^i como:

$$T^i = \frac{1}{2}\, T^i{}_{jk}\, \theta^j \wedge \theta^k. \tag{3.15}$$

Finalmente, una propiedad de gran relevancia es la antisimetría entre los índices i, j de las componentes de la torsión, es decir:

$$T^k{}_{ij} = -T^k{}_{ji}, \tag{3.16}$$

dicha propiedad se puede directamente de la ecuación (3.14).

[5] En nuestra referencia principal [8], las componentes de la torsión se representan como T^k_{ij}, sin embargo en los demás artículos ([4], [6], [1] y [7]) las componentes de T se denotan por $T^k{}_{ij}$, es decir se denotan como las componentes de un campo tensorial. Para usar la notación $T^k{}_{ij}$, hemos de demostrar que las componentes de la torsión dadas por la expresión (3.14) se transforman como las componentes de un tensor. Según [8] en el capítulo 5 pág 111, las funciones $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ se transforman de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\overline{\Gamma}'^k_{ji} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^j}\frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^k}{\partial x^h}\overline{\Gamma}^h_{lm} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^i \partial x'^j}\frac{\partial x'^k}{\partial x^l}.$$

Así, evaluando la ecuación $T'^k{}_{ij} = \overline{\Gamma}'^k_{ji} - \overline{\Gamma}'^k_{ij}$, obtendremos lo siguiente:

$$T'^k{}_{ij} = \overline{\Gamma}'^k_{ji} - \overline{\Gamma}'^k_{ij} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^j}\frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^k}{\partial x^h}\overline{\Gamma}^h_{lm} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial x'^i \partial x'^j}\frac{\partial x'^k}{\partial x^l} - \underbrace{\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^k}{\partial x^h}\overline{\Gamma}^h_{lm}}_{m\longrightarrow l,\ l\longrightarrow m} - \underbrace{\frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^j \partial x'^i}\frac{\partial x'^k}{\partial x^m}}_{m\longrightarrow l}$$

$$\Rightarrow T'^k{}_{ij} = \left(\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}\frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^k}{\partial x^h}\right)\left(\overline{\Gamma}^h_{lm} - \overline{\Gamma}^h_{ml}\right) = \left(\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}\frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^k}{\partial x^h}\right) T^h{}_{ml},$$

donde el término que acompaña a las componentes $T^h{}_{ml}$ es la forma en la que se transforman los campos covectoriales y vectoriales respectivamente; para mayor información consultar capítulo 1 sección 3 y 4 de la referencia [8].

Por lo tanto, las componentes de T se transforman tensorialmente y podemos hacer el cambio de notación T^k_{ij} por $T^k{}_{ij}$.

Es necesario definir la torsión pues si es no-nula sobre una variedad diferencial, algunas estructuras definidas sobre esta cambian con respecto a variedades diferenciables que tienen $T = \mathbf{0}$. Que la torsión sea igual a cero quiere decir que dados cualesquiera dos campos vectoriales diferenciables valuados en T, el campo resultante es $\mathbf{0}$ o en términos de la ecuación (3.14) si las componentes de la torsión son iguales a cero, la torsión será nula y esta condición implicaría que los índices i, j en las funciones $\overline{\Gamma}_{ij}^{k}$ sean simétricos.

En lo anterior hemos presentado formas equivalentes de definir la torsión, donde hemos visto que las ecuaciones (3.10), (3.13) y (3.14) relacionadas a la torsión surgen de manera natural y están basadas en la definición (3.9); dichas ecuaciones están relacionadas, pues conociendo la 2-forma de torsión o las primeras ecuaciones estructurales de Cartan es posible conocer la torsión de una conexión sobre una variedad.

3.3. Conexión Levi-Civita

En la sección (3.1) se ha presentado una definición general de conexión sobre una variedad diferenciable, sin embargo en esta sección presentaremos la conexión de Levi-Civita, esta conexión es especial pues se tiene únicamente cuando $T = \mathbf{0}$ y además las funciones $\overline{\Gamma}_{ij}^{k}$ tienen una forma particular que surgen de la misma condición que se impone a esta conexión.

Antes de describir la conexión de Levi-Civita es necesario introducir la definición de una nueva estructura conocida como tensor métrico, pues hasta el momento hemos descrito el estudio de variedades diferenciables sin hacer uso del mismo, sin embargo nos será de utilidad, pues es necesario para establecer una relación entre el espacio tangente y el espacio cotangente, el estudio de los campos vectoriales de Killing y otras estructuras de importancia.

Definición 3.3.1. Sea M una variedad diferenciable; definimos el *tensor métrico* g como un campo tensorial simétrico de tipo $\binom{0}{2}$, es decir:

$$g_p(v_p, w_p) = g_p(w_p, v_p), \tag{3.17}$$

para $v_p, w_p \in T_pM$.

Si además g es definido positivo; esto es:

$$g_p(v_p, v_p) \geq 0, \;\; si \;\; v_p \neq 0, \tag{3.18}$$

para $v_p \in T_pM$, se dice que M es una *variedad propiamente Riemanniana*. Por otro lado, si el tensor métrico es no definido positivo, entonces, M es una variedad *pseudo-Riemanniana.*

Dado que g es un campo tensorial, puede escribirse como

$$g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j, \tag{3.19}$$

donde se ha elegido un sistema de coordenadas locales $(x^1, x^2, ..., x^n)$ en M. En la ecuación anterior g_{ij} representa las funciones que acompañan a la base de campos tensoriales y están dadas por la expresión $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$. Dichas funciones representan una matriz cuadrada de $n \times n$ componentes.

Dado que el determinante de la matriz (g_{ij}) es diferente de cero, pues g es no singular, la matriz (g_{ij}) tiene inversa (la matriz inversa también es simétrica en sus entradas). Si expresamos las componentes de la matriz inversa por g^{jk} se tiene la relación

$$g_{ij}\, g^{jk} = \delta^i_k. \tag{3.20}$$

La existencia de la matriz inversa g^{ij} nos permite establecer una relación lineal entre campos vectoriales diferenciables y campos covectoriales o 1-formas; dicha relación puede verse como un isomorfismo entre el espacio tangente y el espacio cotangente. Este isomorfismo se conoce como *subida de índices* y *bajada de índices* y en términos de las componentes de los campos vectoriales y covectoriales estas operaciones se expresan como

$$X^j = X_i g^{ij}, \tag{3.21}$$

$$X_i = X^j g_{ij}, \tag{3.22}$$

donde ahora la distinción entre campos vectoriales y campos covectoriales se hace mediante el acomodo de los índices. En este caso, las componentes con índice superior X^i denotan las componentes de campos vectoriales y las componentes con índice inferior X_i denotan las componentes de campos covectoriales. Esta operación de subida y bajada de índices nos será de utilidad para definir el tensor de Ricci y el escalar de curvatura sin torsión y con torsión.

Una vez establecida la definición del tensor métrico presentamos la conexión Levi-Civita sobre la cual definiremos las estructuras posteriores.

Definición 3.3.2. Sea M una variedad Riemanniana, existe una conexión ∇ llamada *Conexión de Levi-Civita*, donde $T = \mathbf{0}$ y además $\nabla_{\mathbf{X}}\, g = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$.

El tensor métrico se utiliza para definir la longitud de vectores tangentes, es por ello que es importante señalar que la condición $\nabla_{\mathbf{X}}\, g = \mathbf{0}$, implica que la norma de un vector tangente sea preservada bajo el transporte paralelo a lo largo de cualquier curva. Además, dichas condiciones conllevan a las siguientes propiedades:

- De la condición $\nabla_{\mathbf{X}}\, g = \mathbf{0}$, y usando la ecuación (3.3):

$$\mathbf{X}(g(\mathbf{Y},\mathbf{Z})) = g(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y},\mathbf{Z}) + g(\mathbf{Y},\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}), \tag{3.23}$$

  para $\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(M)$.

  A la expresión $\nabla_{\mathbf{X}} g = \mathbf{0}$ y la ecuación anterior se les conoce como *condición métrica* y haremos uso de ella en el próximo capítulo.

- De la condición $T = \mathbf{0}$, usando la primera definición de torsión, ecuación (3.9):

$$[\mathbf{X},\mathbf{Y}] = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}, \tag{3.24}$$

  para $\mathbf{X},\mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$.

Ahora, utilizando las ecuaciones (3.23) y (3.24) se puede probar que la conexión Levi-Civita es única construyendo la conexión basada en la elección de los campos vectoriales y el tensor métrico. Con ello, obtemos la expresión

$$\begin{aligned} 2g\left(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y},\mathbf{Z}\right) =& \mathbf{X}(g(\mathbf{Y},\mathbf{Z})) + \mathbf{Y}(g(\mathbf{Z},\mathbf{X})) - \mathbf{Z}(g(\mathbf{X},\mathbf{Y})) \\ & - g\left(\mathbf{Z},[\mathbf{Y},\mathbf{X}]\right) - g\left(\mathbf{Y},[\mathbf{X},\mathbf{Z}]\right) - g\left(\mathbf{X},[\mathbf{Y},\mathbf{Z}]\right), \end{aligned} \tag{3.25}$$

para $\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(M)$.

La ecuación anterior define la conexión, pues el lado derecho de la ecuación no tiene dependencia de ∇, es decir, estamos definiendo $\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$ a partir de $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ y $\mathbf{Z}$.

Recordemos que la definición de derivada covariante o conexión (3.1) depende de las funciones Γ^k_{ij}; en este caso, la conexión Levi-Civita, se define a partir de los símbolos de Christoffel con respecto a una base holonómica. Para obtenerlos, hacemos uso de la ecuación (3.25); dado que estamos haciendo uso de una base holonómica, $\mathbf{X} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$, $\mathbf{Y} = \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$, $\mathbf{Z} = \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)$, haciendo uso también de $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ y (2.7), se obtiene

$$\Gamma^{\,l}_{\,ji} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right). \tag{3.26}$$

De la ecuación anterior, se puede ver que los símbolos de Christoffel son simétricos en los índices i, j, lo cuál concuerda con lo que se obtiene de la expresión (3.14) en el caso $T = \mathbf{0}$.

3.4. Transporte Paralelo y Geodésicas

El transporte paralelo sobre una variedad diferenciable se construye a partir de la derivada covariante; es un isomorfismo entre espacios tangentes a diferentes puntos unidos mediante una curva.

Definición 3.4.1. Sea C una curva diferenciable sobre M y $\mathbf{Y}$ un campo vectorial, se dice que $\mathbf{Y}$ es paralelo a sí mismo a lo largo de una curva C si se cumple que $\overline{\nabla}_{C'}\mathbf{Y} = \mathbf{0}$.

De esta definición y haciendo uso de las ecuaciones (3.1) y (2.3), se puede obtener el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d(Y^k \circ C)}{dt} + \frac{d(x^i \circ C)}{dt}(\overline{\Gamma}^k_{ji} \circ C)(Y^j \circ C) = 0, \tag{3.27}$$

que se cumple si y sólo si, un campo vectorial $\mathbf{Y}$ es paralelo a sí mismo a lo largo de la curva C.

La solución de las ecuaciones (3.27) dan como resultado las componentes del campo vectorial que ha sido transportado a lo largo de una curva C de un punto $C(t_0)$ a $C(t)$. Las componentes del campo iniciales y finales pueden representarse como vectores columna y el isomorfismo puede ser escrito como una matriz, donde sus entradas están conformadas por las componentes del campo vectorial que ha sido transportado, formando así una ecuación matricial.

Ahora, una vez definido el transporte paralelo, es posible definir el transporte paralelo de los vectores tangentes a una curva sobre la misma. Estas curvas se conocen como geodésicas.

Definición 3.4.2. Sea C una curva diferenciable sobre M, se dice que C es una *geodésica* si $\overline{\nabla}_{C'}C' = \mathbf{0}$.

Comparando con la definición 3.4.1 notamos cierta similitud; en este caso el campo vectorial transportado es el conjunto de vectores tangentes a C. Sabemos que los vectores tangentes a una curva se expresan como (2.3), entonces al igual que en el caso del transporte paralelo, se puede obtener un sistema de ecuaciones diferenciales, siendo este de segundo orden:

$$\frac{d^2(x^k \circ C)}{dt^2} + (\overline{\Gamma}^k_{ji} \circ C)\frac{d(x^j \circ C)}{dt}\frac{d(x^i \circ C)}{dt} = 0, \tag{3.28}$$

de la presente ecuación vemos que el sistema de ecuaciones diferenciales es para las funciones $x^i \circ C$; entonces, si es posible resolver este sistema, la solución correspondería a las componentes de una curva geodésica.

Cabe resaltar que tanto el sistema de ecuaciones diferenciales (3.27) que corresponden al transporte paralelo, como el correspondiente al de las curvas geodésicas (3.28), tienen dependencia de las funciones $\overline{\Gamma}^k_{ji}$, esto es de importancia, pues estas funciones están ampliamente relacionadas con la torsión como ya se mencionó y en el caso de la conexión Levi-Civita, estas funciones están dadas por la expresión correspondiente a los símbolos de Christoffel (3.26).

Por último, es importante hacer notar que en la ecuación (3.28) sólo contribuye la parte simétrica de las $\overline{\Gamma}^k_{ij}$, lo cuál se puede ver si descomponemos a $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ en su parte simétrica y antisimétrica; posteriormente tal descomposición la sustituimos en la ecuación (3.28), donde después de un desarrollo algebraico se obtiene que la parte antisimetríca se cancela y entonces en dicha ecuación únicamente se toma en cuenta la parte simétrica de las $\overline{\Gamma}^k_{ij}$.

3.5. Campos vectoriales de Killing

Los campos vectoriales de Killing son de importancia en la física ya que son los generadores infinitesimales de isometrías las cuales son transformaciones entre variedades o sobre la misma variedad que preservan cantidades dadas por el tensor métrico.

Definición 3.5.1. Sea M_1 y M_2 variedades Riemannianas con g_1 y g_2 sus tensores métricos asociados respectivamente. Un difeomorfismo $\psi : M_1 \longrightarrow M_2$ es una *isometría* si

$$\psi^* g_2 = g_1. \tag{3.29}$$

Teniendo en cuenta la definición anterior y la derivada de Lie (2.18) presentada en el capítulo anterior, definimos los campos vectoriales de Killing.

Definición 3.5.2. Sea φ un grupo uniparamétrico de transformaciones sobre una variedad Riemanniana M, tal que cada transformación $\varphi_t : M \longrightarrow M$ es una isometría. Si $\mathbf{X}$ es el generador infinitesimal de φ, se tiene:

$$\pounds_{\mathbf{X}} g = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t^* g - g}{t} = 0. \tag{3.30}$$

A los campos vectoriales que satisfacen la ecuación anterior se le conocen como *campos vectoriales de Killing* y el conjunto de estos campos vectoriales está denotado por $\mathfrak{K}(M)$.

Recordemos que el pullback de un campo tensorial sobre una variedad nos da el campo tensorial sobre otra variedad, en este caso, dado que la isometría es un mapeo sobre la misma variedad, la expresión (3.30) representa que el cambio de dos vectores tangentes sobre M bajo la acción del tensor métrico debe permanecer constante.

Dado que estamos interesados en el caso en que $T = \mathbf{0}$, podemos tomar el caso particular de definir los campos vectoriales de Killing para la conexión Levi-Civita mencionada anteriormente haciendo uso de la condición métrica (3.23) y (3.24), entonces se dice que $\mathbf{X}$ es un campo vectorial de Killing si y sólo si

$$g(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}, \mathbf{Z}) + g(\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}) = 0, \tag{3.31}$$

para $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(M)$.

Sin embargo, de forma más general (es decir, para cualquier conexión) y similar al transporte paralelo y a las curvas geodésicas, la ecuación (3.30) se puede escribir como un sistema de ecuaciones diferenciales que deben cumplir los campos vectoriales de Killing. Auxiliándonos de la ecuación (2.20):

$$X^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{kj}\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + g_{ik}\frac{\partial X^k}{\partial x^j} = 0, \tag{3.32}$$

donde X^k son las componentes del generador infinitesimal de φ y $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$. Es importante recordar que al ser g un campo tensorial, este puede ser escrito como lo indica la ecuación (3.19). Así, al solucionar (3.32) obtenemos las componentes de los campos vectoriales de Killing. Donde nuevamente de forma particular, haciendo uso de la conexión Levi-Civita, hallamos una condición que debe cumplir $\mathbf{X}$ para ser un campo vectorial de Killing[6]:

$$\nabla_i X_j + \nabla_j X_i = 0. \tag{3.33}$$

Las ecuaciones (3.31) y (3.33) representan las expresiones que deben cumplir los campos vectoriales de Killing haciendo uso de la conexión Levi-Civita. Es importante tener en cuenta estas expresiones pues en el próximo capítulo obtendrémos versiones análogas a estas expresiones pero que dependerán de las componentes de T.

3.6. Tensor de Curvatura

El tensor de curvatura tiene formas alternas de representarse. La primera forma del tensor de curvatura que se presenta está dada (al igual que el tensor de torsión) en términos de la derivada covariante.

Definición 3.6.1. El *tensor de curvatura* denotado como R asociado a una conexión $\overline{\nabla}$ es un mapeo que a cada par de campos vectoriales $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ asocia un operador tal que $R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$, donde R está dado por la siguiente expresión:

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\overline{\nabla}_{\mathbf{Y}} - \overline{\nabla}_{\mathbf{Y}}\overline{\nabla}_{\mathbf{Z}} - \overline{\nabla}_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}. \tag{3.34}$$

[6]El desarrollo de la ecuación (3.33) es similar al de los campos vectoriales de T-Killing que se dará en el próximo capítulo, mismo donde se explica el cambio de superíndices a índices.

Se ha dicho que R es un campo tensorial; sin embargo, al igual que en la definición de torsión, sabemos que los campos tensoriales al ser evaluados en campos vectoriales dan lugar a una función, mientras que la definición anterior nos dice que el "tensor" de curvatura al ser evaluado da lugar a un operador. No obstante, R es equivalente a un campo tensorial $\tilde{R}$ de tipo $\binom{1}{3}$ dado por $\tilde{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \alpha) \equiv \alpha(R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z})$.

La ecuación (3.34) se ha definido para ser aplicada a un campo vectorial diferenciable; sin embargo existe también un operador de cuvatura que se aplica a un campo tensorial t de tipo $\binom{0}{k}$ donde la definición de R es análoga a la dada por la ecuación (3.34).

Ahora, al igual que en el caso de la torsión, se define la 2-forma de curvatura como sigue. Sean $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ una base de campos vectoriales diferenciables, donde $\{\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n\}$ es la base dual de los campos vectoriales; es posible definir la 2-*forma de curvatura* $\mathscr{R}^i{}_j$ con respecto a una base de campos vectoriales diferenciables

$$\mathscr{R}^i{}_j(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \equiv \frac{1}{2}\, \theta^i \left(R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{e}_j\right). \tag{3.35}$$

Entonces, sustituyendo (3.34) en la ecuación (3.35):

$$\mathscr{R}^i{}_j(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{2}\, \theta^i \left(\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\overline{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{e}_j - \overline{\nabla}_{\mathbf{Y}}\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{e}_j - \overline{\nabla}_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}\mathbf{e}_j\right), \tag{3.36}$$

sustituyendo la ecuación (3.12):

$$\mathscr{R}^i{}_j(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{2}\, \theta^i \left[\overline{\nabla}_{\mathbf{X}} \left(\Gamma^k{}_j(\mathbf{Y})\mathbf{e}_k\right) - \overline{\nabla}_{\mathbf{Y}} \left(\Gamma^k{}_j(\mathbf{X})\mathbf{e}_k\right) - \Gamma^k{}_j([\mathbf{X}, \mathbf{Y}])\mathbf{e}_k\right], \tag{3.37}$$

usando las ecuaciones (3.6), (3.12), (3.11), (2.30) y (2.26)

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}^i{}_j =& \frac{1}{2}\, \theta^i \left[\mathbf{X}\left(\Gamma^k{}_j(\mathbf{Y})\right)\mathbf{e}_k + \Gamma^k{}_j(\mathbf{Y})\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{e}_k \right.\\
&\qquad \left. -\mathbf{Y}\left(\Gamma^k{}_j(\mathbf{X})\right)\mathbf{e}_k - \Gamma^k{}_j(\mathbf{X})\overline{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{e}_k - \Gamma^k{}_j\left([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\right)\mathbf{e}_k\right] && (3.38)\\
=& \frac{1}{2}\, \theta^i \left[\mathbf{X}\left(\Gamma^k{}_j(\mathbf{Y})\right)\mathbf{e}_k + \Gamma^\ell{}_j(\mathbf{Y})\Gamma^k{}_\ell(\mathbf{X})\mathbf{e}_k \right.\\
&\qquad \left. -\mathbf{Y}\left(\Gamma^k{}_j(\mathbf{X})\right)\mathbf{e}_k - \Gamma^\ell{}_j(\mathbf{X})\Gamma^k{}_\ell(\mathbf{Y})\mathbf{e}_k - \Gamma^k{}_j\left([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\right)\mathbf{e}_k\right] && (3.39)\\
=& \frac{1}{2}\, \left[\mathbf{X}\left(\Gamma^k{}_j(\mathbf{Y})\right) + \Gamma^\ell{}_j(\mathbf{Y})\Gamma^k{}_\ell(\mathbf{X}) \right.\\
&\qquad \left. -\mathbf{Y}\left(\Gamma^k{}_j(\mathbf{X})\right) - \Gamma^\ell{}_j(\mathbf{X})\Gamma^k{}_\ell(\mathbf{Y}) - \Gamma^k{}_j\left([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\right)\right]\delta^i_k && (3.40)\\
=& \frac{1}{2}\, \left[\mathbf{X}\left(\Gamma^i{}_j(\mathbf{Y})\right) + \Gamma^i{}_\ell(\mathbf{X})\Gamma^\ell{}_j(\mathbf{Y}) \right.\\
&\qquad \left. -\mathbf{Y}\left(\Gamma^i{}_j(\mathbf{X})\right) - \Gamma^i{}_\ell(\mathbf{Y})\Gamma^\ell{}_j(\mathbf{X}) - \Gamma^i{}_j\left([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\right)\right] && (3.41)\\
=& \frac{1}{2}\left[2d\Gamma^i{}_j(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + 2\Gamma^i{}_\ell \wedge \Gamma^\ell{}_j(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\right] && (3.42)\\
=& d\Gamma^i{}_j(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \Gamma^i{}_\ell \wedge \Gamma^\ell{}_j(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), && (3.43)
\end{aligned}$$

con lo cual, obtenemos las *segundas ecuaciones estructurales de Cartan*[7]

$$\mathscr{R}^i{}_j = d\Gamma^i{}_j + \Gamma^i{}_k \wedge \Gamma^k{}_j. \tag{3.44}$$

Y haciendo un análisis completamente similar al dado en la ecuación (3.13), se puede apreciar claramente que las segundas ecuaciones estructurales de Cartan son una igualdad entre 2-formas.

La siguiente propiedad muestra cómo se representan las componentes de la curvatura en términos de una base.

Propiedad 3.6.1. Sean $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(M)$ donde $\mathbf{X} = X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$, $\mathbf{Y} = Y^j \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)$ y $\mathbf{Z} = Z^k \left(\frac{\partial}{\partial z^k}\right)$, entonces $R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = X^i Y^j Z^k R^m{}_{kij} \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)$, donde $R^m{}_{kij}$ son las componentes de la curvatura:

$$R^m{}_{kij} = \frac{\partial \overline{\Gamma}^m_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \overline{\Gamma}^m_{ki}}{\partial x^j} + \overline{\Gamma}^m_{li}\,\overline{\Gamma}^l_{kj} - \overline{\Gamma}^m_{lj}\,\overline{\Gamma}^l_{ki}. \tag{3.45}$$

Bajo el mismo argumento que en la ecuación (3.15) para las 2-formas de torsión, la 2-forma de curvatura se puede escribir como:

$$\mathscr{R}^i{}_j = \frac{1}{2} R^i{}_{jkl}\, \theta^k \wedge \theta^l. \tag{3.46}$$

Las componentes de la curvatura definidas anteriormente junto con el tensor métrico van a ser de utilidad para definir el tensor de Ricci y el escalar de curvatura. Además, vemos que las componentes de la curvatura dadas por la expresión (3.45) dependen únicamente de las funciones $\overline{\Gamma}^k_{ij}$, entonces en el caso de la conexión Levi-Civita, estas funciones se obtienen a partir de la ecuación (3.26).

Ahora, vamos a utilizar el tensor de curvatura definido en términos de sus componentes con respecto a una base y la conexión Levi-Civita, para definir algunas propiedades del tensor de curvatura, para ello, primero vamos a definir la bajada de índices como:

$$R_{ijkl} \equiv g_{im} R^m{}_{jkl}. \tag{3.47}$$

Ahora, de la ecuación (3.34), se puede apreciar que $R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -R(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$; esto implica que de (3.45) se puede obtener que $R^i{}_{jkl} = -R^i{}_{jlk}$ y usando la expresión (3.47), se tiene que

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk}. \tag{3.48}$$

Haciendo uso de las segundas ecuaciones estructurales de Cartan (3.44), definiremos la bajada de índices para presentar otra propiedad de antisimetría en los

[7] Este desarrollo puede verse en la referencia [8].

índices de las componentes de la curvatura.

$$\mathscr{R}_{ij} \equiv g_{ik}\mathscr{R}^{k}{}_{j}. \tag{3.49}$$

Con la ecuación anterior, definiendo la bajada de índices de las formas de conexión $\Gamma_{ij} \equiv g_{ik}\Gamma^{k}{}_{j}$ y haciendo uso de $\Gamma_{ij} = -\Gamma_{ji}$ [8], mediante desarrollo algebraico en (3.44), se obtiene que $\mathscr{R}_{ij} = -\mathscr{R}_{ji}$, lo cual de la ecuación (3.46), se puede ver que

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}. \tag{3.50}$$

Además, si $T = \mathbf{0}$ se cumple la siguiente propiedad para las componentes de la curvatura:

$$R^{i}{}_{jkl} + R^{i}{}_{klj} + R^{i}{}_{ljk} = 0, \tag{3.51}$$

la expresión anterior se expresa usualmente como $R^{l}{}_{[ijk]} = 0$ y también se puede expresar en términos de sus componentes covariantes.

Utilizando la ecuación anterior, se obtiene la simetría entre pares de índices de las componentes de la curvatura:

$$R_{ijkl} = R_{klij}. \tag{3.52}$$

Ecuaciones análogas a (3.51) y (3.52) se obtendrán de forma más general (en caso de torsión no nula) en el siguiente capítulo; ese mismo desarrollo restringido a $T = \mathbf{0}$ se utiliza para llegar a (3.51) y (3.52); sin embargo es importante mencionar que dichas ecuaciones no se cumplen para $T \neq \mathbf{0}$.

3.6.1. Tensor de Ricci y Escalar de Curvatura

Hasta ahora, se ha podido apreciar que el manejo de tensores haciendo uso de sus componentes nos ha permitido obtener expresiones y propiedades importantes; así que continuando con el uso de las componentes de la curvatura podemos construir otro tensor conocido como tensor de Ricci

Definición 3.6.2. Se define el *Tensor de Ricci* como un campo tensorial de tipo $\binom{0}{2}$ cuyas componentes se denotan por R_{ij} y están dadas como:

$$R_{ij} \equiv R^{k}{}_{ikj} = g^{kl}R_{likj}; \tag{3.53}$$

[8] Esta propiedad se obtiene al hacer uso de bases rígidas, sin embargo, dado que $\mathscr{R}^{i}{}_{j}$ es un campo tensorial, esta antisimetría se cumple para cualquier base. Para mayor información de bases rígidas y la obtención de esta propiedad, consúltese el capítulo 6, sección 2 de la referencia [8].

además, como consecuencia de (3.52) se cumple que el tensor de Ricci es simétrico:

$$R_{ij} = R_{ji}. \tag{3.54}$$

A partir de las componentes del tensor de Ricci se define el escalar de curvatura como sigue:

Definición 3.6.3. El *escalar de curvatura* denotado por R es una función definida por

$$R \equiv g^{ij} R_{ij}. \tag{3.55}$$

Se ha visto que el escalar de curvatura se define a partir del tensor de Ricci y este a su vez del tensor de curvatura entonces, dado que el tensor de curvatura se define de forma distinta si $T \neq \mathbf{0}$, las definiciones del escalar de curvatura y el tensor de Ricci también cambiarán. Estos cambios en las definiciones se abordarán en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Estructuras definidas con torsión

En el capítulo anterior se introdujo la definición de una conexión, lo cual dio paso a la presentación de diversas estructuras sobre una variedad diferenciable; una de las cuáles fue la torsión; sin embargo, se pudo observar que si $T = \mathbf{0}$, se pueden obtener las expresiones (3.26), (3.31), (3.33), (3.45), entre otras.

En el presente capítulo, no nos restringiremos al caso en el que la torsión es nula y construiremos nuevamente los casos análogos a geodésicas, campos vectoriales de Killing y tensor de curvatura pero ahora haremos uso de la torsión.

4.1. Conexión de Riemann-Cartan

Hemos estudiado en la definición (3.3.2) una conexión especial libre de torsión llamada conexión Levi-Civita; recordemos que dicha conexión cumple con la condición métrica $\nabla_{\mathbf{X}} g = \mathbf{0}$ y que la conexión Levi-Civita está definida por los símbolos de Christoffel (3.26). En el caso en el que $T \neq \mathbf{0}$ existe también una conexión especial conocida como *Conexión de Cartan* que denotaremos por $\widetilde{\nabla}$, esta conexión está definida por funciones análogas a los símbolos de Christoffel pero que dependen de la torsión; además la conexión de Cartan también cumple la condición métrica $\widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}} g = \mathbf{0}$ con la cuál garantizamos que la longitud de un vector transportado paralelamente sea invariante.

Para definir las funciones análogas a los símbolos de Christoffel es necesario introducir las componentes de un nuevo tensor que se define a partir de las componentes de la torsión y con ayuda de este nuevo tensor vamos a poder redefinir los conceptos que ya hemos enumerado anteriormente.

Entonces, usando (3.4) para expresar el término $\widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}} g$ en función de las componentes de la derivada covariante, obtenemos una nueva expresión para la condición métrica $\widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}} g = \mathbf{0}$:

$$\widetilde{\nabla}_k \, g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \widetilde{\Gamma}^l{}_{ik} \, g_{lj} - \widetilde{\Gamma}^l{}_{jk} \, g_{il} = 0. \tag{4.1}$$

A continuación, usando la expresión anterior, si hacemos una permutación ciclíca de los índices ijk, obtendremos tres ecuaciones, que sumadas dan como resultado una nueva expresión para las funciones $\widetilde{\Gamma}^{i}{}_{jk}$ (que definen la conexión de Riemann-Cartan)

$$\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right) - \widetilde{\Gamma}^{l}{}_{ji}\, g_{lk} - \widetilde{\Gamma}^{l}{}_{ki}\, g_{jl} + \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\right) - \widetilde{\Gamma}^{l}{}_{kj}\, g_{li} - \widetilde{\Gamma}^{l}{}_{ij}\, g_{kl}$$
$$- \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) + \widetilde{\Gamma}^{l}{}_{ik}\, g_{lj} + \widetilde{\Gamma}^{l}{}_{jk}\, g_{il} = 0,$$

reacomodando términos y multiplicando por $\frac{1}{2} g^{kh}$:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\, g^{kh} \left(\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right) + \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\right) - \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\right)}_{\Gamma^h_{ij}} - \frac{1}{2}\, \widetilde{\Gamma}^{l}{}_{ji}\, \underbrace{g^{kh}\, g_{lk}}_{\delta^h_l} - \frac{1}{2}\, \widetilde{\Gamma}^{l}{}_{ki}\, g^{kh}\, g_{jl}$$
$$- \frac{1}{2}\, \widetilde{\Gamma}^{l}{}_{kj}\, g^{kh}\, g_{li} - \frac{1}{2}\, \widetilde{\Gamma}^{l}{}_{ij}\, \underbrace{g^{kh}\, g_{kl}}_{\delta^h_l}$$
$$+ \frac{1}{2}\, \widetilde{\Gamma}^{l}{}_{ik}\, g^{kh}\, g_{lj} + \frac{1}{2} \widetilde{\Gamma}^{l}{}_{jk}\, g^{kh}\, g_{il} = 0,$$

donde se ha hecho uso de la ecuación (3.26) y (3.20). Ahora, reacomodando y factorizando $\frac{1}{2}\, g^{kh}\, g_{li}$ y $\frac{1}{2}\, g^{kh}\, g_{lj}$:

$$\Gamma^h_{ij} - \frac{1}{2}\, \widetilde{\Gamma}^{h}{}_{ji} - \frac{1}{2}\, \widetilde{\Gamma}^{h}{}_{ij} + \frac{1}{2} g^{kh}\, g_{li}\, \underbrace{\left(\widetilde{\Gamma}^{l}{}_{jk} - \widetilde{\Gamma}^{l}{}_{kj}\right)}_{T^{l}{}_{kj}} + \frac{1}{2} g^{kh}\, g_{lj}\, \underbrace{\left(\widetilde{\Gamma}^{l}{}_{ik} - \widetilde{\Gamma}^{l}{}_{ki}\right)}_{T^{l}{}_{ki}} = 0,$$

en esta última, se ha hecho uso de la ecuación (3.14). Sumando y restando $\frac{1}{2}\, \widetilde{\Gamma}^{h}{}_{ij}$:

$$\Gamma^h_{ij} - \widetilde{\Gamma}^{h}{}_{ij} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\widetilde{\Gamma}^{h}{}_{ij} - \widetilde{\Gamma}^{h}{}_{ji}\right)}_{T^{h}{}_{ji}} + \frac{1}{2} g^{kh}\, g_{li}\, T^{l}{}_{kj} + \frac{1}{2} g^{kh}\, g_{lj}\, T^{l}{}_{ki} = 0.$$

Finalmente, despejando $\widetilde{\Gamma}^{h}{}_{ij}$ y renombrando índices (veáse el apéndice A):

$$\widetilde{\Gamma}^{k}{}_{ij} = \Gamma^k_{ij} - K^{k}{}_{ij}. \tag{4.2}$$

Esta expresión se conoce como *Conexión de Riemann-Cartan* y podemos ver que depende de los símbolos de Christoffel y de las componentes de un nuevo tensor $K^{k}{}_{ij}$ llamado *tensor de contorsión* que definimos a partir de la torsión como:

$$-K^{k}{}_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(T^{k}{}_{ji} + g^{hk}\, g_{li}\, T^{l}{}_{hj} + g^{hk}\, g_{lj}\, T^{l}{}_{hi}\right). \tag{4.3}$$

Definiendo la subida y bajada de índices para las componentes de la torsión:

$$T_{ijk} \equiv g_{il} T^{l}{}_{jk}, \tag{4.4}$$

y utilizando la antisimetría de los dos últimos índices de $T^{i}{}_{jk}$[1], podemos expresar la ecuación (4.3) de la siguiente manera:

$$K^{k}{}_{ij} \equiv \frac{1}{2}\,(T^{k}{}_{ij} + T_{ij}{}^{k} + T_{ji}{}^{k}). \tag{4.5}$$

De igual manera que con las componentes de la torsión (4.4), podemos definir $K_{kij} \equiv g_{kl} K^{l}{}_{ij}$ para expresar las componentes de la contorsión en términos de sus índices covariantes (pues ya hemos visto que esta forma de representación es usual).

$$K_{kij} = \frac{1}{2}\,(T_{kij} + T_{ijk} + T_{jik}). \tag{4.6}$$

Una vez definido el tensor de contorsión es importante hacer notar que las funciones $\widetilde{\Gamma}^{i}{}_{jk}$ que definen la conexión de Riemann-Cartan (4.2), al estar expresadas en función de las componentes del tensor de contorsión dependen naturalmente de la torsión; así, si $T = \mathbf{0}$, entonces la contorsión también será nula y la conexión de Riemann-Cartan se reduce a la conexión de Levi-Civita.

Además, si tomamos (4.5) y definimos: [2]

$$T_{(ij)}{}^{k} \equiv \frac{1}{2}\,(T_{ij}{}^{k} + T_{ji}{}^{k}), \tag{4.7}$$

podemos utilizar la ecuación anterior en la expresión para las componentes $K^{k}{}_{ij}$, para obtener la parte simétrica de la contorsión:

$$K^{k}{}_{(ij)} = T_{(ij)}{}^{k}. \tag{4.8}$$

Con lo anterior hallamos la parte simétrica de las funciones $\widetilde{\Gamma}^{k}{}_{ij}$:

$$\widetilde{\Gamma}^{k}{}_{(ij)} = \Gamma^{k}_{ij} - T_{(ij)}{}^{k}. \tag{4.9}$$

Lo cual implica que la parte simétrica de las funciones que definen la conexión de Riemann-Cartan no es igual a los símbolos de Christoffel, que son los que definen a la conexión Levi-Civita (que es libre de torsión).

Una vez establecida la forma de la conexión de Riemann-Cartan, podemos esta-

[1] La antisimetría de los índices de las componentes de la torsión se puede ver de la ecuación (3.9) y de la ecuación (3.14).

[2] La parte simétrica de las componentes de un campo tensorial está dada por la expresión $t_{(ij)} = \frac{1}{2}\,(t_{ij} + t_{ji})$.

blecer el siguiente apartado donde abordaremos las curvas autoparalelas.

4.2. Curvas Autoparalelas

Las curvas autoparalelas son el caso análogo a las curvas geodésicas definidas en la sección anterior. Si hacemos uso de la conexión de Levi-Civita, las funciones Γ^k_{ij} de la ecuación (3.28) serán los símbolos de Christoffel, que recordemos están definidos a partir de las componentes del tensor métrico; entonces sobre una variedad Riemanniana, las geodésicas son las curvas de miníma longitud que unen un par de puntos. En cambio, las curvas autoparalelas, haciendo uso de la conexión de Riemann-Cartan se definen como las curvas más rectas (veáse referencia [4], sección 5).

Recordando la definición de curvas geodésicas (3.4.2), la obtención de las curvas autoparalelas es de forma similar al caso sin torsión y el sistema de ecuaciones diferenciales es semejante al obtenido en el capítulo anterior dado por la ecuación (3.28)

$$\frac{d^2(x^k \circ C)}{dt^2} + (\widetilde{\Gamma}^k{}_{ji} \circ C)\frac{d(x^j \circ C)}{dt}\frac{d(x^i \circ C)}{dt} = 0. \tag{4.10}$$

Notése que ahora utilizamos las funciones $\widetilde{\Gamma}$ que dependen de la contorsión. Además al igual que en el caso sin torsión, en la ecuación anterior únicamente contribuye la parte simétrica de las funciones $\widetilde{\Gamma}$. Sin embargo recordemos que la parte simétrica de estas funciones está dada por la expresión (4.9), donde podemos ver que la torsión contribuye.

Ahora, reescribimos (4.10) sustituyendo (4.9):

$$\frac{d^2(x^k \circ C)}{dt^2} + (\Gamma^k_{ji} \circ C)\frac{d(x^j \circ C)}{dt}\frac{d(x^i \circ C)}{dt} - (T_{ji}{}^k \circ C)\frac{d(x^j \circ C)}{dt}\frac{d(x^i \circ C)}{dt} = 0, \tag{4.11}$$

donde se puede ver claramente que si la torsión es cero, entonces el sistema de ecuaciones para curvas geodésicas (3.28) y para las autoparalelas coincide; además, si la parte simétrica de las componentes de la torsión es cero ($T_{(ij)}{}^k = 0$), las geodésicas y las autoparalelas coincidirán aún si la torsión es distinta de cero.

4.3. Campos Vectoriales de T-Killing

El caso análogo a los campos vectoriales de Killing ahora con torsión son los campos vectoriales de T-Killing; los campos vectoriales de T-Killing, se definirán a partir de la definición general que se ha dado en la sección anterior, donde un campo $\mathbf{X}$ es un campo vectorial de Killing si satisface que $\pounds_{\mathbf{X}} g = 0$. Así escribiendo $\pounds_{\mathbf{X}} g$

usando la ecuación (2.19), tenemos:

$$(\pounds_{\mathbf{X}} g)(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \mathbf{X}(g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) - g([\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}) - g(\mathbf{Y}, [\mathbf{X}, \mathbf{Z}]). \tag{4.12}$$

Ahora de la definición de la torsión (3.9) pero haciendo uso de la conexión de Riemann-Cartan $\widetilde{\nabla}$, podemos escribir el parentésis de Lie como $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \widetilde{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - T(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ y sustituirlo en (4.12):

$$\begin{aligned}(\pounds_{\mathbf{X}} g)(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) =& \mathbf{X}(g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) \\ & - g(\widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \widetilde{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathbf{Z}) - g(\mathbf{Y}, \widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \widetilde{\nabla}_{\mathbf{Z}}\mathbf{X} - T(\mathbf{X}, \mathbf{Z})),\end{aligned}$$

imponiendo la condición métrica en la ecuación (3.3) podemos sustituir $\mathbf{X}(g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) = g(\widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + g(\mathbf{Y}, \widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z})$, de modo que tenemos:

$$\begin{aligned}(\pounds_{\mathbf{X}} g)(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) =& g(\widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + g(\mathbf{Y}, \widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}) \\ & - g(\widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \widetilde{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathbf{Z}) - g(\mathbf{Y}, \widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} - \widetilde{\nabla}_{\mathbf{Z}}\mathbf{X} - T(\mathbf{X}, \mathbf{Z})) \\ =& \cancel{g(\widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z})} + \cancel{g(\mathbf{Y}, \widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z})} - \cancel{g(\widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z})} + g(\widetilde{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}, \mathbf{Z}) \\ & + g(T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathbf{Z}) - \cancel{g(\mathbf{Y}, \widetilde{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Z})} + g(\mathbf{Y}, \widetilde{\nabla}_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}) + g(\mathbf{Y}, T(\mathbf{X}, \mathbf{Z})).\end{aligned}$$

Con lo que finalmente se obtiene que $\mathbf{X}$ debe satisfacer la siguiente ecuación para ser un campo vectorial de T-Killing:

$$\begin{aligned} & g(\widetilde{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}, \mathbf{Z}) + g(\mathbf{Y}, \widetilde{\nabla}_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}) \\ & \qquad + g(T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathbf{Z}) + g(\mathbf{Y}, T(\mathbf{X}, \mathbf{Z})) = 0, \end{aligned} \tag{4.13}$$

para $\mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(M)$.

La ecuación resultante para los campos vectoriales de T-Killing contiene la forma de la expresión (3.31) además de dos términos que dependen de la torsión; si $T = \mathbf{0}$, estos dos términos desaparecen y tendríamos la conexión Levi-Civita, con lo cuál se recupera la ecuación para los campos vectoriales de Killing dados por la ecuación (3.31).

Como hemos dicho en la sección de campos vectoriales de Killing del capítulo anterior, desarrollaremos una expresión análoga a (3.33) donde ahora haremos uso de la conexión de Riemann-Cartan. Para ello haremos uso del sistema de ecuaciones diferenciales parciales (3.32) que deben cumplir los campos vectoriales de Killing:

$$X^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{kj} \frac{\partial X^k}{\partial x^i} + g_{ik} \frac{\partial X^k}{\partial x^j} = 0,$$

ahora, vamos a escribir las derivadas parciales de (3.32) en términos de la derivada covariante; usando (3.2) con la conexión de Riemann-Cartan:

$$\widetilde{\nabla}_i X^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^i} + \widetilde{\Gamma}^k{}_{li} X^l, \tag{4.14}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial X^k}{\partial x^i} = \widetilde{\nabla}_i X^k - \widetilde{\Gamma}^k{}_{li} X^l. \tag{4.15}$$

Luego, usando la expresión para las componentes de la derivada covariante para un campo tensorial (3.4) pero haciendo uso de la conexión Riemann-Cartan:

$$\widetilde{\nabla}_k\, g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \widetilde{\Gamma}^l{}_{ik}\, g_{lj} - \widetilde{\Gamma}^l{}_{jk}\, g_{il}, \tag{4.16}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \widetilde{\nabla}_k\, g_{ij} + \widetilde{\Gamma}^l{}_{ik}\, g_{lj} + \widetilde{\Gamma}^l{}_{jk}\, g_{il}. \tag{4.17}$$

Sustituyendo (4.15) y (4.17) en (3.32) e imponiendo la condición métrica:

$$\begin{aligned} X^k(\underbrace{\widetilde{\nabla}_k\, g_{ij}}_{=0} + \widetilde{\Gamma}^l{}_{ik}\, g_{lj} + \widetilde{\Gamma}^l{}_{jk}\, g_{il}) \\ + g_{kj}(\widetilde{\nabla}_i X^k - \widetilde{\Gamma}^k{}_{li} X^l) + g_{ik}(\widetilde{\nabla}_j X^k - \widetilde{\Gamma}^k{}_{lj} X^l) = 0, \end{aligned} \tag{4.18}$$

definiendo $g_{kj}\widetilde{\nabla}_i X^k \equiv \widetilde{\nabla}_i X_j$ reacomodando términos y renombrando índices:

$$\widetilde{\nabla}_i X_j + \widetilde{\nabla}_j X_i + X^k g_{lj}\widetilde{\Gamma}^l{}_{ik} + X^k g_{il}\widetilde{\Gamma}^l{}_{jk} - \underbrace{X^l g_{kj}\widetilde{\Gamma}^k{}_{li}}_{l\longrightarrow k} - \underbrace{X^l g_{ik}\widetilde{\Gamma}^k{}_{lj}}_{l\longrightarrow k} = 0,$$

$$\Rightarrow \widetilde{\nabla}_i X_j + \widetilde{\nabla}_j X_i - X^k\big(g_{lj}\underbrace{(\widetilde{\Gamma}^l{}_{ki} - \widetilde{\Gamma}^l{}_{ik})}_{T^l{}_{ik}} + g_{il}\underbrace{(\widetilde{\Gamma}^l{}_{kj} - \widetilde{\Gamma}^l{}_{jk})}_{T^l{}_{jk}}\big) = 0,$$

$$\Rightarrow \widetilde{\nabla}_i X_j + \widetilde{\nabla}_j X_i - X^k(g_{lj}T^l{}_{ik} + g_{il}T^l{}_{jk}) = 0.$$

Finalmente, la expresión que se obtiene para los campos vectoriales de T-Killing es la siguiente:

$$\widetilde{\nabla}_i X_j + \widetilde{\nabla}_j X_i - X^k(T_{jik} + T_{ijk}) = 0. \tag{4.19}$$

Al igual que en las expresiones anteriores (4.11) y (4.13), se puede apreciar que la ecuación (4.19) coincide con la ecuación de los campos vectoriales dada por (3.33) pues si $T = \mathbf{0}$, trabajamos sobre la conexión Levi-Civita y por lo tanto no tendríamos las componentes de la torsión.

4.4. Tensor de Curvatura de Riemann-Cartan

El tensor de curvatura de Riemann-Cartan es la expresión afín al tensor de curvatura definido en el capítulo 3. Las componentes de la curvatura de forma general, para cualquier conexión, están dadas por la expresión:

$$R^m{}_{kij} = \frac{\partial \overline{\Gamma}^m{}_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \overline{\Gamma}^m{}_{ki}}{\partial x^j} + \overline{\Gamma}^m{}_{li}\,\overline{\Gamma}^l{}_{kj} - \overline{\Gamma}^m{}_{lj}\,\overline{\Gamma}^l{}_{ki}, \tag{4.20}$$

dado que estamos trabajando con la conexión de Riemann-Cartan denotaremos el tensor de curvatura de Riemann-Cartan como $\widetilde{R}$ y sustituiremos la expresión que tenemos para las funciones $\widetilde{\Gamma}^k{}_{ij}$ dada por (4.2) en la ecuación anterior, con lo que obtendremos:

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}^m{}_{kij} =& \frac{\partial \widetilde{\Gamma}^m{}_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \widetilde{\Gamma}^m{}_{ki}}{\partial x^j} + \widetilde{\Gamma}^m{}_{li}\,\widetilde{\Gamma}^l{}_{kj} - \widetilde{\Gamma}^m{}_{lj}\,\widetilde{\Gamma}^l{}_{ki} \\
=& \frac{\partial \Gamma^m_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial K^m{}_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^m_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial K^m{}_{ki}}{\partial x^j} \\
& + \Gamma^m_{li}\Gamma^l_{kj} - \Gamma^m_{li}K^l{}_{kj} - \Gamma^l_{kj}K^m{}_{li} + K^m{}_{li}K^l{}_{kj} \\
& - \Gamma^m_{lj}\Gamma^l_{ki} + \Gamma^m_{lj}K^l{}_{ki} + \Gamma^l_{ki}K^m{}_{lj} - K^m{}_{lj}K^l{}_{ki}.
\end{aligned}$$

Reacomodando términos obtenemos las componentes del tensor de Riemman-Cartan:

$$\widetilde{R}^m{}_{kij} = R^m{}_{kij} + Q^m{}_{kij} + \Gamma^m_{lj}K^l{}_{ki} + \Gamma^l_{ki}K^m{}_{lj} - \Gamma^m_{li}K^l{}_{kj} - \Gamma^l_{kj}K^m{}_{li}, \tag{4.21}$$

donde $R^m{}_{kij}$ son las componentes del tensor de curvatura definido para la conexión Levi-Civita y se ha definido $Q^m{}_{kij}$ como sigue:

$$Q^m{}_{kij} = \frac{\partial K^m{}_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial K^m{}_{kj}}{\partial x^i} + K^m{}_{li}K^l{}_{kj} - K^m{}_{lj}K^l{}_{ki}. \tag{4.22}$$

Dada la similitud entre $Q^m{}_{kij}$ y $R^m{}_{kij}$, a las componentes $Q^m{}_{kij}$ se le conocen como *la contraparte puramente torsional del tensor de curvatura.*

Notése que las componentes del tensor de curvatura de Riemann-Cartan dado por (4.21) están compuestas por las componentes del tensor de curvatura que están relacionadas a la conexión de Levi-Civita, una parte puramente torsional y un conjunto de términos que mezclan los términos relacionados a la conexón de Levi-Civita y a la conexión de Riemann-Cartan. Además como es usual, se puede ver que si $T = \mathbf{0}$ las componentes del tensor de curvatura de Riemann-Cartan se reducen a las componentes de la curvatura para la conexión de Levi-Civita.

Ahora desarrollaremos las antisimetrías análogas a las que satisface el tensor de curvatura para la conexión de Levi-Civita. De forma directa haciendo un intercambio entre los índices i, j de las componentes de la contraparte puramente torsional, se puede ver que

$$Q^m{}_{kij} = -Q^m{}_{kji}, \tag{4.23}$$

y con ello, haciendo un intercambio entre los índices i, j en la ecuación (4.21), se obtiene que

$$\widetilde{R}^m{}_{kij} = -\widetilde{R}^m{}_{kji}. \tag{4.24}$$

Ahora, para obtener la antisimetría entre los índices m, k de las componentes del tensor de Riemann-Cartan, haremos uso de bases rigídas; primero obtendremos una expresión para la bajada de índices de $Q^m{}_{kij}$:

$$Q_{hkij} \equiv g_{hm}Q^m{}_{kij} = g_{hm}\left(\frac{\partial K^m{}_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial K^m{}_{kj}}{\partial x^i} + K^m{}_{li}K^l{}_{kj} - K^m{}_{lj}K^l{}_{ki}\right),$$

entonces, dado que estamos usando bases rígidas:

$$Q_{hkij} = \frac{\partial K_{hki}}{\partial x^j} - \frac{\partial K_{hkj}}{\partial x^i} + g^{lm}K_{hli}K_{mkj} - g^{lm}K_{hlj}K_{mki}, \tag{4.25}$$

renombrando índices h por k en la expresión anterior y reacomodando:

$$Q_{khij} = \frac{\partial K_{khi}}{\partial x^j} - \frac{\partial K_{khj}}{\partial x^i} + g^{lm}K_{kli}K_{mhj} - g^{lm}K_{klj}K_{mhi}, \tag{4.26}$$

además, de la expresión (4.6) se obtiene que $K_{kij} = -K_{ikj}$, entonces usando la antisimetría de las componentes de la contorsión en ecuación (4.26) y renombrando índices en los dos últimos términos:

$$Q_{khij} = -\frac{\partial K_{hki}}{\partial x^j} + \frac{\partial K_{hkj}}{\partial x^i} + \underbrace{g^{lm}K_{lki}K_{hmj}}_{m\longrightarrow l} - \underbrace{g^{lm}K_{lkj}K_{hmi}}_{l\longrightarrow m}. \tag{4.27}$$

Entonces, sumando (4.25) y (4.26), se obtiene que:

$$Q_{hkij} = -Q_{khij}. \tag{4.28}$$

Ahora, definiendo la bajada de índices para $\widetilde{R}^m{}_{kij}$:

$$\widetilde{R}_{hkij} \equiv g_{hm}\widetilde{R}^m{}_{kij} = R_{hkij} + Q_{hkij} + g_{hm}\Gamma^m_{lj}K^l{}_{ki} + \Gamma^l_{ki}K_{hlj} - g_{hm}\Gamma^m_{li}K^l{}_{kj} - \Gamma^l_{kj}K_{hli},$$

así, haciendo uso de las ecuaciones (3.50) y (4.28), de acuerdo a la referencia [6], se puede obtener que:

$$\widetilde{R}_{hkij} = -\widetilde{R}_{khij}. \tag{4.29}$$

Para la obtención de las ecuaciones $R^l{}_{[ijk]} = 0$ se debe obtener la derivada exterior de las primeras ecuaciones estructurales de Cartan, utilizando las propiedades (2.29), (2.31) y sustituyendo las segundas ecuaciones estructurales de Cartan (3.44), se obtiene la siguiente expresión:

$$dT^i + \Gamma^i{}_j \wedge T^j = \mathscr{R}^i{}_j \wedge \theta^j, \tag{4.30}$$

sustituyendo $\mathscr{R}^i{}_j = \frac{1}{2}\widetilde{R}^i{}_{jkl}\theta^k \wedge \theta^l$ y $T^i = \frac{1}{2}T^i{}_{jk}\theta^j \wedge \theta^k$:

$$\frac{1}{2}\widetilde{R}^i{}_{jkl}\theta^j \wedge \theta^k \wedge \theta^l = \frac{1}{2}d(T^i{}_{jk}\theta^j \wedge \theta^k) + \frac{1}{2}\Gamma^i{}_j \wedge (T^j{}_{kl}\theta^k \wedge \theta^l),$$

luego, usando la propiedad (2.24) y (2.31):

$$\begin{aligned}\widetilde{R}^i{}_{jkl}\theta^j \wedge \theta^k \wedge \theta^l = T^i{}_{jk}d\theta^j \wedge \theta^k - T^i{}_{jk}\theta^j \wedge d\theta^k \\ + dT^i{}_{jk} \wedge \theta^j \wedge \theta^k + T^j{}_{kl}\Gamma^i{}_j \wedge \theta^k \wedge \theta^l.\end{aligned}$$

Además, $\Gamma^i{}_j = \widetilde{\Gamma}^i{}_{jk}\theta^k$ y de las primeras ecuaciones estructurales de Cartan, sustituimos $d\theta^i = T^i - \Gamma^i{}_j \wedge \theta^j$ y nuevamente $T^i = \frac{1}{2}T^i{}_{jk}\theta^j \wedge \theta^k$:

$$\begin{aligned}\widetilde{R}^i{}_{jkl}\theta^j \wedge \theta^k \wedge \theta^l =& \frac{1}{2}T^i{}_{jk}T^j{}_{ml}\theta^m \wedge \theta^l \wedge \theta^k - T^i{}_{jk}\widetilde{\Gamma}^j{}_{lm}\theta^m \wedge \theta^l \wedge \theta^k - \underbrace{\frac{1}{2}T^i{}_{jk}T^k{}_{ml}\theta^j \wedge \theta^m \wedge \theta^l}_{j\longrightarrow k,\ k\longrightarrow j} \\ & - \underbrace{T^i{}_{jk}\widetilde{\Gamma}^k{}_{lm}\theta^j \wedge \theta^l \wedge \theta^m}_{j\longrightarrow k,\ k\longrightarrow j} + dT^i{}_{jk} \wedge \theta^j \wedge \theta^k + T^j{}_{kl}\widetilde{\Gamma}^i{}_{jm}\theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m.\end{aligned}$$

Finalmente, usando la antisimetría del producto wedge, de $T^k{}_{ij}$ y agrupando:

$$\widetilde{R}^i{}_{jkl}\theta^j \wedge \theta^k \wedge \theta^l = \left(T^i{}_{jk}T^j{}_{ml} - 2T^i{}_{jk}\widetilde{\Gamma}^j{}_{lm} - T^j{}_{kl}\widetilde{\Gamma}^i{}_{jm}\right)\theta^m \wedge \theta^l \wedge \theta^k + dT^i{}_{jk} \wedge \theta^j \wedge \theta^k. \tag{4.31}$$

Ahora utilizando la ecuación (2.23), se deben evaluar ambos lados de la ecuación anterior en tres campos base; primero evaluaremos el lado izquierdo de la ecuación (4.31):

$$\begin{aligned}\widetilde{R}^i{}_{jkl}\theta^j \wedge \theta^k \wedge \theta^l(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q) =& \frac{1}{6}\widetilde{R}^i{}_{jkl}\big(\theta^j(\mathbf{e}_n)\theta^k(\mathbf{e}_p)\theta^l(\mathbf{e}_q) - \theta^j(\mathbf{e}_n)\theta^k(\mathbf{e}_q)\theta^l(\mathbf{e}_p) \\ & - \theta^j(\mathbf{e}_p)\theta^k(\mathbf{e}_n)\theta^l(\mathbf{e}_q) + \theta^j(\mathbf{e}_p)\theta^k(\mathbf{e}_q)\theta^l(\mathbf{e}_n) \\ & + \theta^j(\mathbf{e}_q)\theta^k(\mathbf{e}_n)\theta^l(\mathbf{e}_p) - \theta^j(\mathbf{e}_q)\theta^k(\mathbf{e}_p)\theta^l(\mathbf{e}_n)\big) \\ =& \frac{1}{6}\widetilde{R}^i{}_{jkl}\big(\delta^j_n\delta^k_p\delta^l_q - \delta^j_n\delta^k_q\delta^l_p - \delta^j_p\delta^k_n\delta^l_q + \delta^j_p\delta^k_q\delta^l_n + \delta^j_q\delta^k_n\delta^l_p - \delta^j_q\delta^k_p\delta^l_n\big) \\ =& \frac{1}{6}(\widetilde{R}^i{}_{npq} - \widetilde{R}^i{}_{nqp} - \widetilde{R}^i{}_{pnq} + \widetilde{R}^i{}_{pqn} + \widetilde{R}^i{}_{qnp} - \widetilde{R}^i{}_{qpn}).\end{aligned}$$

Usando la antisimetría de $\widetilde{R}^m{}_{kij}$ en los dos últimos índices:

$$\widetilde{R}^i{}_{jkl}\theta^j \wedge \theta^k \wedge \theta^l(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q) = \frac{1}{3}(\widetilde{R}^i{}_{npq} + \widetilde{R}^i{}_{pqn} + \widetilde{R}^i{}_{qnp}). \tag{4.32}$$

De manera similar evaluamos el lado derecho de la ecuación (4.31) y obtenemos:

$$\begin{aligned}\widetilde{R}^i{}_{npq} + \widetilde{R}^i{}_{pqn} + \widetilde{R}^i{}_{qnp} =& T^j{}_{np}\widetilde{\Gamma}^i{}_{jq} + T^j{}_{pq}\widetilde{\Gamma}^i{}_{jn} + T^j{}_{qn}\widetilde{\Gamma}^i{}_{jp} \\ &+ dT^i{}_{np}(\mathbf{e}_q) + dT^i{}_{pq}(\mathbf{e}_n) + dT^i{}_{qn}(\mathbf{e}_p),\end{aligned} \tag{4.33}$$

por lo tanto vemos que $\widetilde{R}^i{}_{[npq]} \neq 0$ y que esta permutación ciclíca que denotaremos por $\widetilde{R}^i{}_{[npq]} = T^j{}_{[np}\widetilde{\Gamma}^i{}_{|j|q]} + dT^i{}_{[np}(\mathbf{e}_{q]})$ es igual a cero únicamente si $T = \mathbf{0}$.

Finalmente, veremos que la simetría $R_{lkij} = R_{ijlk}$ no se cumple para las componentes del tensor de curvatura de Riemann-Cartan. Primero, bajaremos el índice i, y por simplicidad, denotáremos[3] $g_{mi}\widetilde{\Gamma}^m{}_{jn} \equiv \widetilde{\Gamma}_{ijn}$ y $g_{mi}dT^i{}_{pq} \equiv dT_{mpq}$, con lo que despejando $\widetilde{R}_{inpq}$ obtenemos:

$$\widetilde{R}_{inpq} = T^j{}_{[np}\widetilde{\Gamma}_{|ij|q]} + dT_{i[np}(\mathbf{e}_{q]}) - \widetilde{R}_{ipqn} - \widetilde{R}_{iqnp}. \tag{4.34}$$

Por otro lado, utilizando la ecuación (4.29), podemos escribir a $\widetilde{R}_{inpq}$ como:

$$\widetilde{R}_{inpq} = \frac{1}{2}(\widetilde{R}_{inpq} - \widetilde{R}_{nipq}), \tag{4.35}$$

luego, sustituiremos $\widetilde{R}_{inpq}$ y $\widetilde{R}_{nipq}$ de (4.35) en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_{inpq} = \frac{1}{2}\big(& T^j{}_{[np}\widetilde{\Gamma}_{|ij|q]} + dT_{i[np}(\mathbf{e}_{q]}) - \widetilde{R}_{ipqn} - \widetilde{R}_{iqnp} \\ &+ \widetilde{R}_{npqi} + \widetilde{R}_{nqip} - T^j{}_{[ip}\widetilde{\Gamma}_{|nj|q]} - dT_{n[ip}(\mathbf{e}_{q]})\big),\end{aligned}$$

ahora, haciendo un intercambio de índices, i por p y n por q:

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_{pqin} = \frac{1}{2}\big(& T^j{}_{[ni}\widetilde{\Gamma}_{|pj|n]} + dT_{p[qi}(\mathbf{e}_{n]}) - \widetilde{R}_{pinq} - \widetilde{R}_{pnqi} \\ &+ \widetilde{R}_{qinp} + \widetilde{R}_{qnpi} - T^j{}_{[pi}\widetilde{\Gamma}_{|qj|n]} - dT_{q[pi}(\mathbf{e}_{n]})\big),\end{aligned}$$

y usando las antisimetrías entre los dos primeros y los dos últimos índices de las componentes del tensor de curvatura de Riemann-Cartan:

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_{inpq} - \widetilde{R}_{pqin} = \frac{1}{2}\big(& T^j{}_{[np}\widetilde{\Gamma}_{|ij|q]} + dT_{i[np}(\mathbf{e}_{q]}) - T^j{}_{[ip}\widetilde{\Gamma}_{|nj|q]} - dT_{n[ip}(\mathbf{e}_{q]}) \\ & T^j{}_{[ni}\widetilde{\Gamma}_{|pj|n]} + dT_{p[qi}(\mathbf{e}_{n]}) - T^j{}_{[pi}\widetilde{\Gamma}_{|qj|n]} - dT_{q[pi}(\mathbf{e}_{n]})\big),\end{aligned} \tag{4.36}$$

los términos de lado derecho de la expresión anterior son irreducibles y por lo tanto

[3] Se define únicamente esta notación para simplificar los términos en los cálculos, pues $\widetilde{\Gamma}^m{}_{jn}$ no se comporta como un campo tensorial.

En el caso de $g_{mi}dT^i{}_{pq} \equiv dT_{mpq}$, es importante aclarar que g_{mi} sólo podría entrar en el operador de derivada exterior si es constante.

$\widetilde{R}_{inpq} \neq \widetilde{R}_{pqin}$ y esta igualdad sólo se cumple para la conexión de Levi-Civita.

4.4.1. Tensor de Ricci-Cartan y Escalar de Curvatura

En la sección anterior, de las componentes del tensor de curvatura se definieron las componentes del tensor de Ricci; entonces procediendo de manera análoga, utilizando la expresión obtenida de las componentes del tensor de curvatura Riemann-Cartan (4.21), obtendremos las componentes del tensor de Ricci-Cartan y a su vez las del escalar de curvatura definido sobre la conexión de Riemann-Cartan.

Es posible definir las componentes del tensor de Ricci-Cartan debido a las simetrías guardadas por las componentes del tensor de curvatura de Riemann-Cartan; entonces procederemos a obtener las componentes del tensor de Ricci-Cartan, que para la conexión de Riemann-Cartan denotaremos como $\widetilde{R}_{ij}$ y está dado por la expresión:

$$\widetilde{R}_{ij} = \widetilde{R}^k{}_{ikj} = g^{kl}\widetilde{R}_{likj},$$

entonces calculando $\widetilde{R}^k{}_{ikj}$ de la ecuación (4.21):

$$\widetilde{R}_{ij} = \widetilde{R}^k{}_{ikj} = R^k{}_{ikj} + Q^k{}_{ikj} + \Gamma^k_{lj}K^l{}_{ik} + \Gamma^l_{ik}K^k{}_{lj} - \Gamma^k_{lk}K^l{}_{ij} - \Gamma^l_{ij}K^k{}_{lk};$$

definimos $Q^k{}_{ikj} \equiv Q_{ij}$ como:

$$Q_{ij} \equiv Q^k{}_{ikj} = \frac{\partial K^k{}_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial K^k{}_{ij}}{\partial x^k} + K^k{}_{lk}K^l{}_{ij} - K^k{}_{lj}K^l{}_{ik}. \quad (4.37)$$

Sustituyendo $R^k{}_{ikj} = R_{ij}$, obtenemos las componentes del tensor de Ricci-Cartan:

$$\widetilde{R}_{ij} = R_{ij} + Q_{ij} + \Gamma^k_{lj}K^l{}_{ik} + \Gamma^l_{ik}K^k{}_{lj} - \Gamma^k_{lk}K^l{}_{ij} - \Gamma^l_{ij}K^k{}_{lk}. \quad (4.38)$$

Como consecuencia de la pérdida de la simetría en los pares de índices de las componentes del tensor de curvatura de Riemann-Cartan, el tensor de Ricci-Cartan no es simétrico en sus índices; es decir, $\widetilde{R}_{ij} \neq \widetilde{R}_{ji}$. Como último comentario, es importante mencionar que la parte simétrica de las componentes del tensor de Ricci-Cartan no coindicen con las del tensor de Ricci para la conexión de Levi-Civita.

Finalmente, presentamos el escalar de cuvatura para la conexión de Riemann-Cartan que denotaremos como $\widetilde{R}$ y que se obtiene de forma similar a su contraparte para la conexión de Levi-Civita, entonces contrayendo la ecuación (4.38) con g^{ij}:

$$\widetilde{R} \equiv g^{ij}\widetilde{R}_{ij} = R + Q + g^{ij}\Gamma^k_{lj}K^l{}_{ik} + g^{ij}\Gamma^l_{ik}K^k{}_{lj} - g^{ij}\Gamma^k_{lk}K^l{}_{ij} - g^{ij}\Gamma^l_{ij}K^k{}_{lk}, \quad (4.39)$$

donde se ha definido $g^{ij}Q_{ij}$ como:

$$Q \equiv g^{ij}Q_{ij} = g^{ij}\frac{\partial K^k{}_{ik}}{\partial x^j} - g^{ij}\frac{\partial K^k{}_{ij}}{\partial x^k} + g^{ij}K^k{}_{lk}K^l{}_{ij} - g^{ij}K^k{}_{lj}K^l{}_{ik}. \tag{4.40}$$

Como se puede apreciar, las ecuaciones (4.38) y (4.40) están compuestas (al igual que las componentes del tensor de curvatura de Riemann-Cartan dadas por (4.21) por una parte puramente torsional, una parte puramente Riemanninana y una combinación entre ambas.

Capítulo 5

Conclusiones

En la presente tesis una vez expuestos los conceptos base, se expusieron estructuras definidas sobre variedades diferenciables construidas bajo un tipo de conexión especial llamada de Levi-Civita donde no existe la presencia de torsión; posteriormente se hizo uso de una conexión llamada de Riemann-Cartan donde la torsión es no nula y se definieron nuevamente las estructuras expuestas para la conexión de Levi-Civita pero remarcando los cambios en estas debido a la presencia de torsión. Las estructuras que se definieron sobre ambas conexiones se enlistan en la siguiente tabla:

Estructura	**Conexión Levi-Civita**	**Conexión Riemann-Cartan**
Funciones que definen la conexión	$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right).$	$\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + K^k{}_{ij}.$
Curvas geodésicas/autoparalelas	$\frac{d^2(x^k \circ C)}{dt^2} + (\Gamma^k_{ji} \circ C)\frac{d(x^j \circ C)}{dt}\frac{d(x^i \circ C)}{dt} = 0.$	$\frac{d^2(x^k \circ C)}{dt^2} + (\Gamma^k_{ji} \circ C)\frac{d(x^j \circ C)}{dt}\frac{d(x^i \circ C)}{dt} - ({T_{ji}}^k \circ C)\frac{d(x^j \circ C)}{dt}\frac{d(x^i \circ C)}{dt} = 0.$
Campos vectoriales de Killing/T-Killing	$g(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}, \mathbf{Z}) + g(\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}) = 0,$ $\nabla_i X_j + \nabla_j X_i = 0.$	$g(\widetilde{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}, \mathbf{Z}) + g(\mathbf{Y}, \widetilde{\nabla}_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}) + g(T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathbf{Z}) + g(\mathbf{Y}, T(\mathbf{X}, \mathbf{Z})) = 0,$ $\widetilde{\nabla}_i X_j + \widetilde{\nabla}_j X_i - X^k(T_{jik} + T_{ijk}) = 0.$
Componentes del tensor de Curvatura/Curvatura de Riemann-Cartan	$R^m{}_{kij} = \frac{\partial \Gamma^m_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^m_{ki}}{\partial x^j} + \Gamma^m_{li}\Gamma^l_{kj} - \Gamma^m_{lj}\Gamma^l_{ki}.$	$\widetilde{R}^m{}_{kij} = R^m{}_{kij} + Q^m{}_{kij} + \Gamma^m_{lj}K^l{}_{ki} + \Gamma^l_{ki}K^m{}_{lj} - \Gamma^m_{li}K^l{}_{kj} - \Gamma^l_{kj}K^m{}_{li}.$
Relación cíclica entre componentes	$R^i{}_{[npq]} = 0.$	$\widetilde{R}^i{}_{[npq]} = T^j{}_{[np}\widetilde{\Gamma}^i{}_{\lvert j \rvert q]} + dT^i{}_{[np}(\mathbf{e}_{q]}).$
Componentes del tensor de Ricci/Ricci-Cartan	$R_{ij} = g^{kl}R_{likj}.$	$\widetilde{R}_{ij} = R_{ij} + Q_{ij} + \Gamma^k_{lj}K^l{}_{ik} + \Gamma^l_{ik}K^k{}_{lj} - \Gamma^k_{lk}K^l{}_{ij} - \Gamma^l_{ij}K^k{}_{lk}.$
Escalar de curvatura	$R = g^{ij}R_{ij}.$	$\widetilde{R} = R + Q + g^{ij}\Gamma^k_{lj}K^l{}_{ik} + g^{ij}\Gamma^l_{ik}K^k{}_{lj} - g^{ij}\Gamma^k_{lk}K^l{}_{ij} - g^{ij}\Gamma^l_{ij}K^k{}_{lk}.$

Cuadro 5.1: Conclusiones

donde haciendo una comparación, se puede ver como las estructuras definidas sobre la conexión de Riemann-Cartan, dependen de las estructuras definidas para la conexión de Levi-Civita y un conjunto de términos asociados a la torsión; además vemos que en cada estructura definida para la conexión de Riemann-Cartan, si $T = \mathbf{0}$, se recupera la forma de las expresiones para la conexión Levi-Civita.

Apéndice A

Convenciones del Tensor de Torsión

La expresión de las componentes de la torsión como se han presentado en el capítulo (3) no son universales, existen diferentes convenciones. En este apéndice mostraremos dos formas en las se expresan las componentes de la torsión en la literatura y los cambios en los cálculos subsecuentes debido a la diferencia en la convención.

Como ya hemos dicho, en la presentación de los conceptos elementales de esta tesis (capítulo 2 y 3), se ha trabajado conforme al libro de la referencia [8]; sin embargo, la referencia [6] usada para trabajar la conexión de Riemann-Cartan utiliza una convención diferente, por ello para continuar con la convención original se realizó un cambio de signo en la definición de la contorsión dada por la ecuación (4.3) y en las ecuaciones subsecuentes relacionadas con la contorsión.

La diferencia entre las convenciones surge de la definición de las componentes de la torsión proporcionada por el artículo [6], donde se define $T^k{}_{ij}$ como

$$T^k{}_{ij} = \frac{1}{2}\,(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}). \tag{A.1}$$

Y recordemos que la definición que introducimos es

$$T^k{}_{ij} = \Gamma^k_{ji} - \Gamma^k_{ij}, \tag{A.2}$$

entonces, comparando (A.2) con (A.1), vemos que estas definiciones difieren en un factor de $(-\frac{1}{2})$. Las componentes del tensor de contorsión toman las formas:

$$K^k{}_{ij} \equiv T^k{}_{ij} + T_{ij}{}^k + T_{ji}{}^k, \qquad \text{según referencia [6]} \tag{A.3}$$

y

$$K^k{}_{ij} \equiv \frac{1}{2}(T^k{}_{ij} + T_{ij}{}^k + T_{ji}{}^k), \qquad \text{siguiendo referencia [8]} \tag{A.4}$$

y así los signos de los sumandos de las componentes de la contorsión coinciden.

Recordemos que las funciones $\widetilde{\Gamma}^k{}_{ij}$, dependen de las componentes de la contorsión, en el artículo [6] dicha relación está dada por la expresión

$$\widetilde{\Gamma}^k{}_{ij} \equiv \Gamma^k{}_{ij} + K^k{}_{ij}, \tag{A.5}$$

usando la definición (A.3); mientras que en esta tesis, al hacer uso de (A.4) la expresión de las funciones $\widetilde{\Gamma}^k{}_{ij}$ será la siguiente:

$$\widetilde{\Gamma}^k{}_{ij} \equiv \Gamma^k{}_{ij} - K^k{}_{ij}. \tag{A.6}$$

Cómo consecuencia del cambio de signo en la conexión de Riemann-Cartan, las componentes del tensor de la contraparte puramente torsional también se ven afectadas en un par de signos. Con la convención utilizada por el artículo [6], las componentes de la contraparte puramente torsional están dadas por:

$$Q^m{}_{kij} = \frac{\partial K^m{}_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial K^m{}_{ki}}{\partial x^j} + K^m{}_{li}K^l{}_{kj} - K^m{}_{lj}K^l{}_{ki}, \tag{A.7}$$

y según el desarollo en la sección (4.4) siguiendo la convención del libro [8]

$$Q^m{}_{kij} = \frac{\partial K^m{}_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial K^m{}_{kj}}{\partial x^i} + K^m{}_{li}K^l{}_{kj} - K^m{}_{lj}K^l{}_{ki}, \tag{A.8}$$

donde hay un cambio de signos en los primeros dos términos de $Q^m{}_{kij}$ pero que no afectan la antisimetría de los índices ij.

Debido al cambio en los signos en la ecuación (A.6) y en la contraparte puramente torsional, también existe un cambio entre las componentes del tensor de Riemann-Cartan, del tensor de Ricci-Cartan y el escalar de curvatura, pues estas estructuras dependen de las componentes de Q. Entonces, las componentes del tensor de Riemann-Cartan según el artículo [6] se expresan como:

$$\widetilde{R}^m{}_{kij} = R^m{}_{kij} + Q^m{}_{kij} + \Gamma^m_{li}K^l{}_{kj} + \Gamma^l_{kj}K^m{}_{li} - \Gamma^m_{lj}K^l{}_{ki} - \Gamma^l_{ki}K^m{}_{lj}, \tag{A.9}$$

en comparación con las dadas por la convención del libro [8]:

$$\widetilde{R}^m{}_{kij} = R^m{}_{kij} + Q^m{}_{kij} + \Gamma^m_{lj}K^l{}_{ki} + \Gamma^l_{ki}K^m{}_{lj} - \Gamma^m_{li}K^l{}_{kj} - \Gamma^l_{kj}K^m{}_{li}, \tag{A.10}$$

los cambios en los signos de $\widetilde{R}_{ij}$ y $\widetilde{R}$ se obtienen de las expresiones anteriores.

Además de estas, existen otras convenciones del tensor de contorsión; estas variaciones en cuanto a la expresión de la contorsión no sólo se deben a las diferentes formas de la torsión, también se deben a la forma en la que se expresa las componentes de la derivada covariante de un campo tensorial, que en este caso están dadas por la expresión (3.4). Dado que no utilizaremos esas formas del tensor de contorsión, únicamente las numeraremos por si se desea consultar para mayor información las referencias [1] y [4] donde se hace un mayor estudio de las curvas autoparalelas.

- Para el artículo [1] la convención usada es:

$$K_{ijk} = T_{jik} - T_{kij} + T_{jki}. \tag{A.11}$$

- Para la referencia [4] las componentes de la contorsión son dadas por

$$K_{ijk} = T_{ijk} - T_{jki} + T_{kij}. \tag{A.12}$$

Como comentario final, los artículos [1], [4] y [6] denotan a las componentes de la torsión como $S^i{}_{jk}$.

Notación

$\overline{\nabla}$	Conexión arbritraria
∇	Conexión de Levi-Civita
$\widetilde{\nabla}$	Conexión de Riemann-Cartan
$\overline{\Gamma}_{ij}^{k}$	Funciones que definen una conexión arbitraria
Γ_{ij}^{k}	Funciones que definen la conexión Levi-Civita (Símbolos de Christoffel)
$\widetilde{\Gamma}^{k}{}_{ij}$	Funciones que definen la conexión de Riemann-Cartan
$R^{l}{}_{ijk}$	Componentes del tensor de curvatura para la conexión de Levi-Civita
$\widetilde{R}^{l}{}_{ijk}$	Componentes del tensor de Riemann-Cartan
R_{ij}	Componentes del tensor de Ricci
$\widetilde{R}_{ij}$	Componentes del tensor de Ricci-Cartan
R	Escalar de curvatura
$\widetilde{R}$	Escalar de Curvatura para la conexión de Riemann-Cartan
$K^{k}{}_{ij}$	Componentes del tensor de contorsión
$Q^{k}{}_{ij}$	Contraparte puramente torsional

Referencias

[1] Luis Acedo. «Autoparallel vs. Geodesic Trajectories in a Model of Torsion Gravity». En: Universe 1 (nov. de 2015), pág. 422. DOI: 10.3390/universe1030422.

[2] Alexander S. Belyaev, Marc C. Thomas e Ilya L. Shapiro. «Torsion as a dark matter candidate from the Higgs portal». En: Physical Review D 95.9 (mayo de 2017). ISSN: 2470-0029. DOI: 10.1103/physrevd.95.095033. URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.95.095033.

[3] Ramit Dey, Stefano Liberati y Daniele Pranzetti. «Spacetime thermodynamics in the presence of torsion». En: Physical Review D 96.12 (dic. de 2017). ISSN: 2470-0029. DOI: 10.1103/physrevd.96.124032. URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.96.124032.

[4] Hagen Kleinert y Sergei V. Shabanov. «Spaces with torsion from embedding, and the special role of autoparallel trajectories». En: Physics Letters B 428.3-4 (jun. de 1998), págs. 315-321. ISSN: 0370-2693. DOI: 10.1016/s0370-2693(98)00421-3. URL: http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693(98)00421-3.

[5] Marco Lorenzi y Xavier Pennec. «Geodesics, Parallel Transport y One-Parameter Subgroups for Diffeomorphic Image Registration». En: International Journal of Computer Vision 105 (nov. de 2012). DOI: 10.1007/s11263-012-0598-4.

[6] Klaountia Pasmatsiou, Christos G. Tsagas y John D. Barrow. «Kinematics of Einstein-Cartan universes». En: Physical Review D 95.10 (mayo de 2017). ISSN: 2470-0029. DOI: 10.1103/physrevd.95.104007. URL: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.95.104007.

[7] Christian Peterson y Yuri Bonder. «Conserved quantities in the presence of torsion: A generalization of Killing theorem». En: Modern Physics Letters A 35.09 (dic. de 2019), pág. 2050052. ISSN: 1793-6632. DOI: 10.1142/s0217732320500522. URL: http://dx.doi.org/10.1142/S0217732320500522.

[8] Gerardo F. Torres del Castillo. En: Differentiable Manifolds: A Theoretical Physics Approach. Cham: Springer International Publishing, 2020. ISBN: 978-3-030-45193-6.

[9] Andrzej Trautman. «Einstein-Cartan Theory». En: Encyclopedia of Mathematical Physics (2006).