



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"Radiación de Partículas Producidas por
Sistemas Acelerados y Vacío Cuántico"**

TESIS

**MAESTRÍA EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

PRESENTA

Lic. Miguel Angel Estévez Juárez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Emerson Leao Sadurní Hernández

No. de CVU:

1078414

Fecha: Octubre 2022

**Universidad Autónoma de Puebla
Instituto de Física “Luis Rivera Terrazas”**

**Radiación de Partículas Producidas por Sistemas Acelerados y
Vacío Cuántico**

Tesis presentada por

Lic. Miguel Angel Estévez Juárez

para obtener el grado de

**Maestría
(Física)**

Dirigida por

Dr. Emerson Leao Sadurní Hernández

Puebla, México

Octubre 2022

©2022 - Lic. Miguel Angel Estévez Juárez

Derechos Reservados



BUAP

“HUP, 50 años de enseñanza y salud”

Oficio No. IF-SACAD276/2022

Asunto: Oficio de modalidad de titulación.

MTRO. RICARDO VALDERRAMA VALDEZ

Director de Administración Escolar
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Presente

El que suscribe, Director del Instituto de Física “Ing. Luis Rivera Terrazas”, le informo que **MIGUEL ÁNGEL ESTÉVEZ JUÁREZ**, matrícula: 220470445, presentará y defenderá su examen de grado de **MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)** en la **MODALIDAD DE PRESENTACION DE TESIS**, cuyo título es: **“RADIACIÓN DE PARTÍCULAS PRODUCIDAS POR SISTEMAS ACELERADOS Y VACÍO CUÁNTICO”**, que se llevará a cabo el día **martes 11 de octubre de 2022 a las 16:00 horas**. Se informa que dicho **EXAMEN DE GRADO SERÁ EN LÍNEA** debido a la emergencia sanitaria por el virus SARS CoV-2 a través de la plataforma de la VIEP. El Jurado Examinador estará integrado por:

Dr. Alberto Escalante Hernández.	Presidente
Dr. José Antonio Méndez Bermúdez.	Secretario
Dr. Luis Octavio Meza Espinoza.	Vocal
Dr. Emerson Leao Sadurní Hernández.	Vocal

Sin otro asunto que el particular, aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

ATENTAMENTE

“Pensar Bien, Para Vivir Mejor”

Puebla, Pue., a 26 de septiembre de 2022

DR. FELIPE PÉREZ RODRÍGUEZ
DIRECTOR



DR*FPR/DRA*MECR/LAE*mhr

Instituto de Física
“Luis Rivera Terrazas”

Av. San Claudio esq. 18 Sur, Edif. IF1,
Ciudad Universitaria, Col. San Manuel
Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 5610, 5611. 2008

Agradecimientos

A mi familia, pareja, amigos y a mi asesor de tesis, el Dr. Sadurní.

Radiación de Partículas Producidas por Sistemas Acelerados y Vacío Cuántico

Resumen

El efecto Unruh predice cómo los observadores uniformemente acelerados van a percibir un cambio en el estado de vacío. Aunque es un resultado nacido de la teoría cuántica de campos y la relatividad, su plausibilidad aun es cuestionada hoy en día. Debido a que su demostración experimental implica una gran complejidad y un alto costo monetario, en este trabajo de tesis buscamos estudiar un sistema cuántico de osciladores perturbados con amortiguamiento y con un número reducido de grados de libertad, que posea todas las características del efecto Unruh en segunda cuantización por un observador acelerado. La finalidad es demostrar que la idea del fenómeno de producción de cuantos (partículas o paquetes de energía) es cierta e inevitable.

Particle Radiation Produced by Accelerated Systems and Quantum Vacuum Abstract

The Unruh effect predicts how uniformly accelerated observers will perceive a change in the vacuum state. Due to the fact that its experimental demonstration implies a great complexity and a high monetary cost, in this thesis work we seek to study a quantum system of perturbed oscillators with damping and with a reduced number of degrees of freedom, which has all the characteristics of the Unruh effect in second quantization by an accelerated observer. The purpose is to demonstrate that the idea of the phenomenon of production of quanta (particles or energy packets) is true and inevitable.

Publicaciones

- E. Sadurní, M. A. Estévez, J. L. Díaz-Cruz, Does an accelerated mirror suffer hindrance from vacuum?, 2109.09295, (2022), <https://doi.org/10.48550/arXiv.2109.09295>.

Participación en eventos

- Radiación de partículas producidas por sistemas acelerados y vacío cuántico. Estévez Juárez Miguel Angel, Sadurní Hernández Emerson Leao, Simposio Estudiantil de Ciencia Física del IFUAP, Puebla, México (2022).

Índice general

1. Revisión del efecto Unruh	3
1.1. Coordenadas de Rindler	3
1.2. Ecuación Klein-Gordon en espacio curvo	6
1.3. Superposición de modos	9
1.4. Cuantización canónica	14
1.5. Ausencia de efecto autogravitante	17
2. Sistema simplificado	21
2.1. Superposición de modos	24
2.2. Producto interno y transformación de Bogoliubov a un modo	25
2.3. Nuevo vacío	29
2.4. Distribución térmica y número de ocupación	38
3. Discusión Física y Conclusiones	48
3.1. Contraparte clásica	48
3.2. Experimento pensado con radiación	50
3.3. Osciladores cuánticos con fuerza viscosa en la práctica	52
3.4. Conclusiones	53
Bibliografía	55

Introducción

Durante la década de los años 70's Stephen Hawking trabajó en la predicción teórica de agujeros negros y de su trabajo se desprendieron nuevas investigaciones, que hasta el día de hoy siguen en desarrollo. Unruh, al estudiar la evaporización de agujeros negros dio el paso inicial para la descripción de un nuevo fenómeno que hoy en día lleva su nombre: el efecto Unruh [1]. Este efecto predice cómo los observadores con una aceleración constante perciben un cambio en el estado de vacío. El efecto Unruh es un resultado que nace de la teoría cuántica de campos y la relatividad general. Debido a la escala de energías en la que se predice la aparición apreciable de este efecto, aún después de tantas décadas, no se ha podido verificar experimentalmente. Su comprobación, además de ser complicada desde el punto de vista técnico, requerirá de un costo monetario probablemente grande. Sin embargo, hoy en día existen propuestas muy interesantes para poder demostrarlo empíricamente en sistemas alternativos o análogos.

Aunque en la actualidad hay importantes avances experimentales [4–8], existe una polémica con el efecto Unruh, ya que hay una parte de la comunidad científica que niega su plausibilidad [9]. Algunos de sus detractores dicen que las predicciones son falsas porque no hay manera de preparar el estado de vacío de la manera requerida, o bien, que no hay manera de transformar adecuadamente los operadores que describen los detectores acelerados de partículas.

Aquí sostenemos que el efecto Unruh no depende de los detectores; lo importante es conseguir un experimento acelerado que parta del reposo con el fin de que dicho observador inercial pueda percibir el estado de vacío a un tiempo inicial: esto equivale a la ausencia de radiación en $t = 0$. El procedimiento así descrito constituye una preparación efectiva del estado cuántico del sistema. Posteriormente, como el estado cuántico ya ha sido seleccionado, la aceleración repentina del observador habrá conectado el sistema con un nuevo conjunto de observables transformadas en función del parámetro de aceleración del observador. Dicho observador acelerado percibirá operadores transformados, incluyendo los detectores que van a operar sobre el antiguo vacío inercial, en lugar del nuevo vacío acelerado. El valor esperado de la observable conocida como *número de partículas* será, por lo ya mencionado, distinto de

cero.

Dado lo anterior, hay una gran importancia en establecer analogías con sistemas cuánticos más sencillos. En este trabajo buscamos construir sistemas análogos a la teoría cuántica de campos, pero con menores grados de libertad, así como una realización más fácil y accesible. La finalidad es demostrar que la idea del fenómeno de producción de cuantos (partículas o paquetes de energía) es cierta e inevitable.

Ya han habido muchos sistemas simplificados generados por nuestro grupo de investigación que han emulado efectos difíciles de ver en otras áreas de la física. Como ejemplos de antecedentes exitosos se tiene el oscilador de Dirac que propuso Moshinsky [10] y el modelo de Peierls, donde hay una analogía entre la dispersión de proyectiles y los modos trasversales de una guía de onda cruzada [11]. Entender el problema que nos ocupa en cuanto a la producción de radiación, requiere la menor cantidad de grados de libertad posibles, lo cual ayudaría a describir la esencia del fenómeno. En la relatividad general, las ecuaciones de campo se describen con derivadas covariantes, lo cual equivale a modificar la derivada curvilínea con la adición de símbolos de Christoffel [12].

En este trabajo de tesis se demostrará que una simplificación de las ecuaciones de campo a un oscilador armónico complejo con fricción (Caldirola-Kanai) [13, 14] es capaz de modificar el estado de vacío en forma totalmente análoga al efecto Unruh. La contribución original que se busca obtener en este documento es el cálculo del coeficiente para la transformación del vacío con un solo oscilador. Este resultado no se encuentra publicado hasta el día de hoy.

En el capítulo 1 se presenta una revisión general de la teoría del efecto Unruh para el lector, donde se exhiben todos los puntos importantes. Entre estas partes cruciales de la teoría están las coordenadas de Rindler, la ecuación de Klein-Gordon en espacio curvo y plano, para entrar a la segunda cuantización y terminar con la transformación de Bogoliubov. Además, se ha agregado un sección posterior en la que se discute el efecto autogravitante.

Después, en el capítulo 2 presentaremos el sistema simplificado que nos compete, un oscilador armónico cuántico con una fuerza dependiente de la velocidad, como en el caso de fricción. Con este sistema trataremos de construir una analogía con la ecuación de Klein-Gordon en espacio curvo para similarmente deducir una transformación entre los estados de vacío.

Para finalizar, en el capítulo 3 se va a exponer la discusión física relacionada al fenómeno. Se examina la falta de conexión con la mecánica clásica. También un diseño experimental que plantea la detección de la radiación de Unruh con el uso de espejos en caída y libre. Después, mostraremos algunas de sus posibles aplicaciones en tecnología nanoscópica. Y por último daremos una conclusión que englobe todo lo estudiado.

Capítulo 1

Revisión del efecto Unruh

1.1. Coordenadas de Rindler

Las coordenadas de Rindler nos sirven para describir un marco de referencia que se mueve con aceleración uniforme en el espacio-tiempo de Minkowski, es decir, en el espacio-tiempo plano. Sabemos que en la relatividad especial la trayectoria que sigue una partícula con aceleración constante vista desde un marco inercial va a ser una hipérbola, entonces podemos tomar un marco de referencia que se mueva junto con esta partícula. Este es el marco de Rindler, en el cual la partícula va a estar en reposo [15].

Si tenemos un marco de referencia S' moviéndose con una velocidad v en el eje x respecto a un segundo marco S , sabemos que la transformación de Lorentz que conecta a estos dos sistemas de referencia S y S' se puede expresar de la siguiente manera:

$$x' = x \cosh(\phi) + ct \sinh(\phi),$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$ct' = x \sinh(\phi) + ct \cosh(\phi),$$

donde $\tanh(\phi) = v/c$ y para mayor simplicidad usaremos unidades donde $c = 1$.

Esto corresponde a una rotación hiperbólica a lo largo de un ángulo ϕ en el espacio-tiempo de Minkowski, ya que se puede representar como

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & \sinh(\phi) \\ \sinh(\phi) & \cosh(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Usando que $\cosh(\phi) = \gamma$ y $\sinh(\phi) = \gamma\beta$, en forma matricial

$$T = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Ahora, un observador de Rindler no lleva una velocidad constante, lo cual nos dice, que β va a depender del tiempo en nuestra transformación y por lo tanto $\phi = \phi(t)$ va a tener una dependencia temporal, este es el paso necesario para llegar a la carta coordenada de Rindler ¹. Por el principio de equivalencia, sabemos que de la misma forma que relacionamos un evento entre dos marcos de referencia con una transformación, la velocidad instantánea de nuestra partícula en el marco de referencia inercial va a estar conectada con la velocidad instantánea en el marco acelerado por medio de una transformación de Lorentz T de la siguiente manera

$$v = Tv', \quad (1.3)$$

donde v es la velocidad medida desde el laboratorio, o sea, el marco de referencia inercial, mientras que v' es la velocidad en el marco no inercial. Con

$$v' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vamos a tener

$$v = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma\beta \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Entonces:

$$v = \begin{pmatrix} v^0 \\ v^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} v'. \quad (1.5)$$

Si queremos conocer la aceleración de la partícula basta con que derivar (1.5) respecto al tiempo propio t' de la partícula:

$$a = \frac{dv}{dt'} = \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt'} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma\beta \end{pmatrix} = \frac{d}{dt'} \begin{pmatrix} \cosh(\phi) \\ \sinh(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sinh(\phi) \\ \dot{\phi} \cosh(\phi) \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

¹Recordemos que una carta coordenada consiste en un mapeo de un conjunto abierto del espacio a un conjunto abierto de R^N . Esencialmente es el sistema coordenado que se elige para describir puntos en la variedad. En el espacio de Rindler, la carta no cubre una singularidad aparente en el origen, pero dicho origen se incluye como límite.

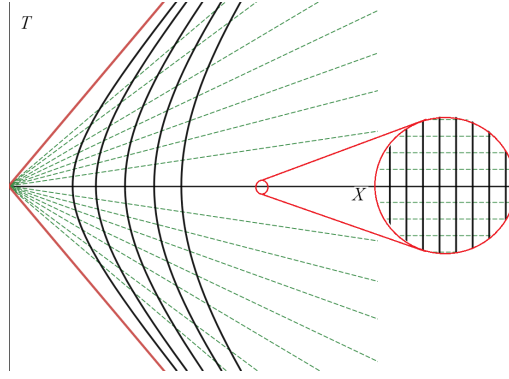


Figura 1.1: Coordenadas de Rindler

Para una aceleración uniforme, tenemos que imponer que la norma de a sea de tipo espacialoide y constante, es decir, $-(a^0)^2 + (a^1)^2 = -|a|^2$. Esta región limitada por el cono de luz se le conoce como la cuña de Rindler, ver Figura 1. Usando este hecho podemos deducir que $|a| = \dot{\phi}$. Usando esto último, vamos a integrar la velocidad para obtener $x(t')$:

$$x(t') = \begin{pmatrix} t \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \cosh(|a|t') dt' \\ \int \sinh(|a|t') dt' \end{pmatrix} = x(0) + \frac{1}{|a|} \begin{pmatrix} \sinh(|a|t') \\ \cosh(|a|t') \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Tomaremos en cuenta que en el caso $a \rightarrow 0$ los siguientes eventos deben coincidir

$$\begin{pmatrix} t \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' \\ (x^1)' \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Además, por convención vamos a elegir $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces, renombrado $t = T$, $x = X$, $(x^1)' = x$, $t' = t$ nos da

$$T = x \sinh(|a|t) \quad y \quad X = \cosh(|a|t). \quad (1.9)$$

Finalmente la métrica, que nos dice cómo calcular distancias entre dos eventos, va a estar dada por los coeficientes del siguiente elemento de línea $ds^2 = dT^2 - dX^2 = |a|^2 x^2 dt^2 - dx^2$ y en forma matricial, con $\alpha \equiv |a|$, se tiene la siguiente métrica de Rindler:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha^2 x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2 x^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Además, se pueden calcular los símbolos de Christoffel correspondientes a esta métrica, dando como resultado

$$\Gamma_{ij}^{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha x} \\ \frac{1}{\alpha x} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{ij}^x = \begin{pmatrix} \alpha x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

con $i, j = 0, 1$.

1.2. Ecuación Klein-Gordon en espacio curvo

La ecuación de Klein-Gordon se introdujo en mecánica cuántica para tener una ecuación de movimiento que describiera una partícula escalar relativista. Por lo tanto, se llega a esta ecuación tomando en cuenta la energía de una partícula relativista y su respectivo momento en mecánica cuántica. Se tiene que promover la relación $E = \pm\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$ a operadores. Utilizando unidades $c = 1 = \hbar$:

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2. \quad (1.13)$$

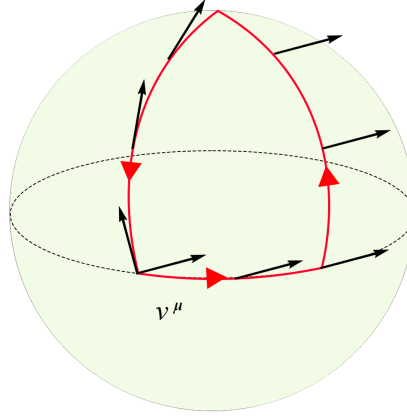
En forma similar a lo que hacemos con la ecuación de Schrödinger, vamos a identificar al momento como el generador de las traslaciones en el espacio y a la energía como el generador de las traslaciones en el tiempo, es decir:

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla, \quad E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}. \quad (1.14)$$

Esto nos lleva a $p_{\mu} = i(\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Sustituyendo lo visto en (1.14) en (1.13), obtenemos una ecuación diferencial que se aplica a un campo escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$. Entonces promoviendo a operadores, en el espacio-tiempo plano de Minkowski con la métrica $\eta = (1, -1, -1, -1)$ se tendrá la ecuación

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.15)$$

La ecuación de Klein-Gordon inicialmente fue propuesta por Schrödinger para describir una función de onda, pero fue desechada por tener un problema con su interpretación probabilista. En nuestra nueva ecuación aparecen densidades negativas, entonces ϕ no puede tener la misma interpretación que una función de onda no relativista, $\phi(\mathbf{x}, t)$ es un campo escalar cuántico. El hecho de que ahora tengamos energías negativas está relacionado con la

Figura 1.2: Transporte paralelo de un vector v^μ

existencia de antipartículas. La ecuación de Klein-Gordon, por lo tanto, nos sirve para describir partículas relativistas pero con un valor de espín cero, por ejemplo, los piones y el bosón de Higgs.

Utilizando la notación $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ podemos reducir la ecuación a la forma

$$(\square + m^2) \phi(x_\mu) = 0. \quad (1.16)$$

El siguiente paso es llevar esta ecuación en espacio plano al caso de la relatividad general, donde el espacio-tiempo puede ser curvo. Aún más, en casos donde no hay curvatura del espacio, pero sí hay una descripción no inercial del sistema físico (como el caso que nos ocupa) es indispensable modificar (1.16). Esto quiere decir que la métrica anteriormente utilizada η va a ser sustituida por una métrica general g que ahora puede depender de las coordenadas y no necesariamente va a ser diagonal. Para definir qué tan curvo es un espacio, utilizamos el concepto de transporte paralelo. Pensemos que cuando se desplaza paralelamente un vector sobre una trayectoria cerrada en coordenadas cartesianas (espacio plano), las componentes de este vector van a ser las mismas al inicio y al final del recorrido. Pero cuando nos encontremos en un espacio curvo esto puede no cumplirse y al transportar un vector paralelamente sobre una curva cerrada, al regresar, sus componentes podrían diferir de las originales, ver figura 2.2.

De esta manera surge el tensor de Riemann $R_{\mu\nu\sigma\rho}$, que se define para describir dichas diferencias bajo el transporte paralelo. Para describir el transporte paralelo a lo largo de geodésicas, surge el símbolo de Christoffel $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$, cuyos tres índices corresponden a la rotación de dos vectores de velocidad y un índice libre. En términos del tensor métrico es:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right). \quad (1.17)$$

Por lo tanto, la solución al problema de medir la curvatura del espacio tiempo en cualquier punto es usando la derivada covariante ∇_μ , la cual cumple que $\nabla_\mu g_{\nu\sigma} = 0$. La derivada covariante es una generalización de la derivada ordinaria ∂_μ y vamos a usar los símbolos de Christoffel para describirla. Para llevar la ecuación (1.16) a la relatividad general, el operador derivada ordinaria ∂_μ tendrá que sustituirse por el operador derivada covariante ∇_μ . Para un campo escalar, la derivada covariante es simplemente la derivada parcial. Sin embargo, si ahora vamos a considerar un campo vectorial arbitrario definido en una variedad, los operadores diferenciales estarán relacionados mediante el símbolo de Christoffel de la siguiente forma:

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu v^\lambda. \quad (1.18)$$

Una geodésica es la trayectoria que va a describir un cuerpo en caída libre, en un espacio curvo. La condición $v^\mu \nabla_\mu v^\nu = 0$ expresa que v es paralelamente transportado a lo largo de una geodésica, por lo tanto, la derivada covariante genera las geodésicas del espacio a través de la operación direccional sobre vectores de velocidad v_μ de la curva. Si desarrollamos la ecuación anterior llegamos a la ecuación de la geodésica

$$\frac{dv^\nu}{ds} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu v^\mu v^\lambda = 0. \quad (1.19)$$

Entonces, nuestra ecuación de Klein-Gordon ahora será $(\nabla_\mu \nabla^\mu + m^2) \phi = 0$ (Nótese que en coordenadas de Rindler el escalar de curvatura $R = 0$, por lo que no es necesario incluirlo en la nueva ecuación con curvatura). En nuestra ecuación (1.16) tenemos un campo escalar $\phi(x_\mu)$ pero $\nabla^\mu \phi$ es un vector, la aplicación sucesiva de la derivada covariante nos lleva a

$$\nabla_\mu (\nabla^\mu \phi) = \nabla_\mu (\partial^\mu \phi) = \partial_\mu \partial^\mu \phi + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu \partial^\lambda \phi. \quad (1.20)$$

Si ahora usamos la propiedad de la traza del símbolo de Christoffel: $\Gamma_{\mu\lambda}^\mu = g^{\mu\sigma} \partial_\lambda g_{\mu\sigma} / 2 = \partial_\lambda (\sqrt{|g|}) / \sqrt{|g|}$ vamos a tener las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu \nabla^\mu + m^2] \phi &= 0 \\ \left[\Gamma_{\mu\lambda}^\mu \partial^\lambda + \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \right] \phi &= 0. \end{aligned}$$

Desarrollando el primer término

$$\left[\partial_\lambda (\sqrt{|g|}) \partial^\lambda / \sqrt{|g|} + \partial_\mu \partial^\mu + m^2 \right] \phi = 0,$$

$$\left[\left(\partial_\lambda + \partial_\lambda \log \sqrt{|g|} \right) \partial^\lambda \phi + m^2 \right] \phi = 0,$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu \right) + m^2 \right] \phi = 0 \quad (1.21)$$

La ecuación (1.21) es Klein-Gordon en espacio curvo. El siguiente paso es manipular esta última ecuación para tener un problema de eigenvalores de Sturm-Liouville, donde aparezca un término de masa efectiva.

$$\left[|g|^{-1/4} \left(\partial_\lambda + \frac{1}{2} \partial_\lambda (\log \sqrt{|g|}) \right) \left(\partial^\lambda - \frac{1}{2} \partial^\lambda (\log \sqrt{|g|}) \right) |g|^{1/4} + m^2 \right] \phi = 0,$$

$$\left[\square - (\partial \log |g|^{1/4})^2 - \square \log |g|^{1/4} + m^2 \right] |g|^{1/4} \phi = 0,$$

$$[\square + M^2(x)] \psi = 0. \quad (1.22)$$

El nuevo campo está definido como $\psi = |g|^{1/4} \phi$. Nótese que esta interpretación de masa efectiva solo es válida para el caso $M^2(x) > 0$, de lo contrario será simplemente un potencial efectivo. Además en el caso de Rindler este término será independiente del tiempo. La solución para esta ecuación ya no estará dada solo por ondas planas como el caso de la métrica plana, aunque en espacio de Rindler sí es una ecuación separable.

Hay que remarcar que este jacobiano $\sqrt{|g|}$ que acompaña al campo debe aparecer en las próximas integrales de densidad al lado de nuestro elemento de volumen. Como podemos observar en la ecuación (1.11), en el caso de la métrica de Rindler esto se va a simplificar como

$$\sqrt{|g|} = \sqrt{g^{00}}. \quad (1.23)$$

1.3. Superposición de modos

En mecánica cuántica no relativista, es decir, en la teoría de Schrödinger, definimos un producto interno entre dos funciones como:

$$\langle \Phi, \phi \rangle = \int d^3x \Phi(t, \vec{x})^* \phi(t, \vec{x}). \quad (1.24)$$

Este producto es invariante bajo traslaciones temporales y se obtiene a partir de la ecuación de continuidad para la densidad de probabilidad, que viene de la propia ecuación de Schrödinger. Otra característica para remarcar es que el producto escalar de cualquier función con ella misma cumple $\langle \Phi, \Phi \rangle \geq 0$

En la teoría de Klein-Gordon, que es relativista, nos encontraremos con diferencias, como por ejemplo que es imposible obtener un producto escalar que cumpla esta última

característica. Para obtener una ecuación de continuidad en esta teoría, primero consideremos el operador Klein-Gordon aplicado a un campo escalar cualquiera f complejo. Sabemos que van a ser válidas las ecuaciones siguientes:

$$f^* (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) f = 0,$$

$$f (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) f^* = 0.$$

Restando estas expresiones y desarrollando llegaremos al resultado siguiente

$$\partial_\mu (f^* \partial^\mu f - f \partial^\mu f^*) = 0 \quad (1.25)$$

El término entre paréntesis es lo que identificamos como la cuadricorriente J^μ . Aquí, nos interesa la componente temporal $J^0 = i (f^* \partial^0 f - f \partial^0 f^*)$, para definir el producto interno al integrar sobre todo el volumen espacial.

Entonces, en espacio plano la ecuación de continuidad para la corriente $\partial_\mu J^\mu = 0$ se va a satisfacer si $j^\mu = i (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$, donde tenemos una carga conservada

$$Q = \langle \phi, \phi \rangle_{KG} = \int d^3x j^0. \quad (1.26)$$

El resultado (1.26), es válido para el espacio tiempo de Minkoski, sabemos que la ecuación de KG es una invariante de Lorentz, por lo tanto, (1.26) también lo será. Para un observador uniformemente acelerado este resultado ya no va a ser válido.

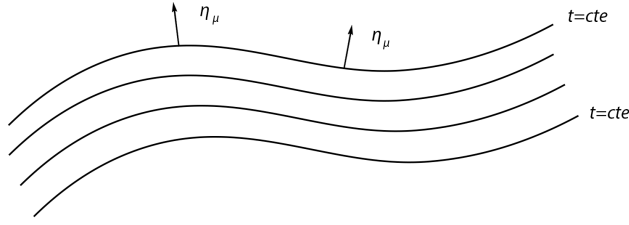
La conservación de la densidad sobre todo el volumen debe seguir respetándose en el caso de espacio curvo, como ya hemos visto, para el caso análogo, por el principio de covariancia, basta con sustituir la derivada ordinaria por la derivada covariante. Vamos a tener

$$\nabla_\mu J^\mu = 0, \quad (1.27)$$

si

$$J^\mu = i (\phi^* \nabla^\mu \phi - \phi \nabla^\mu \phi^*). \quad (1.28)$$

Luego, para encontrar una expresión para el producto escalar necesitamos integrar sobre el espacio, pero al encontrarnos en un espacio-tiempo curvo podríamos no tener una noción de coordenada temporal a lo largo de la cual se conserve nuestro producto interno. Para este efecto, definimos un cuadvivector n_μ de tipo temporal oide y unitario, que será normal a una hipersuperficie espacialoide, ver figura 2.3, de manera que definimos la componente temporal de J^μ como

Figura 1.3: Vector temporal de n_μ

$$J^0 = n_\mu J^\mu. \quad (1.29)$$

Además en nuestra integral, para que el resultado sea válido en todos los sistemas de coordenadas, el diferencial espacial debe ir acompañado de la métrica asociada al trozo del espacio que integramos. Entonces agregamos el factor $\sqrt{|G|}$, donde G_{ab} es la métrica inducida. Con esto, la expresión

$$\int d^3x \sqrt{|G|} n_\mu J^\mu \quad (1.30)$$

es independiente de t . Para el caso de una métrica de la forma $ds^2 = [N(x)]^2 dt^2 - G_{ab}(x) dx^a dx^b$, tenemos:

$$n_\mu \nabla^\mu = \frac{1}{N} \nabla_0,$$

dando como resultado el producto escalar:

$$(f, g) = i \int d^3\mathbf{x} \sqrt{|G|} N^{-1} (f^* \partial_t g - g \partial_t f^*). \quad (1.31)$$

En el caso de la métrica de Rindler, tenemos $ds^2 = \alpha^2 x^2 dt^2 - dx^2$, por lo tanto, en un sistema de referencia acelerado uniformemente, el producto interno de Klein-Gordon es:

$$(f, g) \equiv i \int \frac{d^3x}{\alpha x} (f^* \partial_t g - g \partial_t f^*), \quad (1.32)$$

y análogo a la ecuación (1.26), haciendo uso del teorema de Stokes en espacio curvo [12] (apéndice A), tendremos una carga conservada

$$Q_R = (\phi, \phi) = \int d^3x \sqrt{g_{00}} J^0.$$

Sabemos que en espacio plano, el campo escalar resultante de la ecuación K-G (1.16) se puede expandir en términos de las funciones propias del momento ϕ_k . Además el conjunto

$\{\phi_k(t, x), \phi_k^*(t, x)\}$ forma una base ortonormal de funciones garantizado por el producto interno (1.26). Por lo tanto, una solución general de la ecuación de Klein-Gordon (1.16) puede escribirse como una combinación lineal, de la manera:

$$\phi(x) = \int dk (C_k \phi_k + C_k^* \phi_k^*). \quad (1.33)$$

Ahora, para el caso curvo tomaremos este conjunto completo de soluciones de ondas planas con energía bien definida y con un momento bien definido. Nótese que ϕ_k no representa una partícula libre, mientras que ϕ_k^* no representa una partícula en sí, ya que tiene energía negativa. La energía está dada por $\hbar\omega$, donde la frecuencia es

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}, \quad (1.34)$$

y la base ortonormal de funciones con buen número de onda k está dada por

$$\phi_k = \mathcal{N} e^{-i\omega_k t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \equiv \mathcal{N} e^{-ikx}, \quad \text{con} \quad \mathcal{N} = \frac{|g|^{1/4}}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (1.35)$$

Utilizando el productora escalar de K-G en espacio curvo (1.32), podemos calcular la corriente mixta entre ϕ_k y $\phi_{k'}$

$$\begin{aligned} (\phi_k, \phi_{k'}) &= i \int d^3x \frac{1}{x} (\phi_k^* \partial_0 \phi_{k'} - \phi_{k'} \partial_0 \phi_k^*) \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x}{x} |g|^{1/4} |g|^{1/4} (i\omega_{k'} + i\omega_k) e^{i(k-k')x} \\ &= 2\omega_k \delta^3(k - k') \end{aligned} \quad (1.36)$$

Ahora, para el producto entre funciones con valores de energías opuestas, vamos a tener:

$$\begin{aligned} (\phi_k, \phi_{k'}^*) &= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x}{x} |g|^{1/4} |g|^{1/4} (i\omega_{k'} - i\omega_k) e^{-i(k-k')x} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Entonces, en general, las soluciones de energía positiva nunca “ven” a las de energía negativa. De aquí también podemos ver que $(\phi_k, \phi_{-k'}^*) = 0$. Por lo tanto $\{\phi_k(t, x), \phi_k^*(t, x)\}$ forma una base ortonormal de funciones. Y para cualquier solución del caso plano ϕ se obtendrá la siguiente componente de Fourier:

$$(\phi_k, \phi) = \int d^3k' [C_{k'} (\phi_k, \phi_{k'}) + C_{k'}^* (\phi_k, \phi_{k'}^*)] = 2\omega_k C_k. \quad (1.38)$$

Esto mismo se puede aplicar para diferentes conjuntos completos. En particular, también se cumple para el conjunto de soluciones de la ecuación Klein-Gordon en espacio de Rindler, las cuales llamaremos ψ_n . Estas soluciones son para un problema en donde la métrica

de Rindler está presente, entonces las soluciones estacionarias ya no serán ondas planas y debemos obtenerlas resolviendo la ecuación diferencial modificada por los símbolos de Christoffel. Dichas soluciones nuevas y estacionarias se escriben como $\psi_n(x) = e^{-i\omega_n t} \sqrt{|g|}^{1/2} \chi_n(\mathbf{x})$.

Se puede demostrar que χ_n se puede escribir en términos de funciones de Bessel, estas se puede encontrar reportadas en [21]. Además, por las relaciones de completitud, podemos hacer un cambio de base entre el caso plano y curvo. Escribimos

$$\phi(x) = \sum_n [D_n \psi_n(x) + D_n^* \psi_n^*(x)], \quad (1.39)$$

donde $\sum_n = \sum_{n \in \sigma(\hat{O})}$, con \hat{O} el operador de Klein-Gordon y $\sigma(\hat{O})$ el conjunto que indica su espectro. Esta suma involucra todo el espectro del problema y está constituida tanto por sumas discretas (estados ligados) como por integrales (estados de energía continua), siendo así una integral con medida de integración mixta de Riemann-Stieljes.

Con esto, tendremos la siguiente componente de Fourier

$$(\psi_k, \phi) = \sum_n D_n (\psi_k, \psi_n) = 2\omega_n D_n. \quad (1.40)$$

Luego, si calculamos los traslapes entre ambas bases ortonormales de soluciones estacionarias, es decir entre ψ_n y ϕ_n , vamos a obtener

$$\begin{aligned} (\phi_k, \psi_n) &= e^{i(\omega_k - \omega_n)t} [\omega_n + \omega_k] \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \chi_n(x) \\ &\equiv e^{i(\omega_k - \omega_n)t} [\omega_n + \omega_k] F_{n,k}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Como podemos ver, el traslape tiene una dependencia temporal y como en general $\omega_n + \omega_k \neq 0$, vamos a encontrar contribuciones para energías negativas y también positivas. Es decir, cuando $|\omega_n| - |\omega_k|$ no es cero. Esto ocurre, por ejemplo, cuando calculamos 1.41 con ϕ_k^* en lugar de ϕ_k . Luego, podemos despejar C en función de D y D^* usando las ecuaciones (1.38) y (1.39).

$$(\phi_k, \phi) = \left(\phi_k, \sum_n [D_n \psi_n(x) + D_n^* \psi_n^*(x)] \right) = 2\omega_k C_k, \quad (1.42)$$

$$C_k = \frac{1}{2\omega_k} \sum_n [D_n (\phi_k, \psi_n) + D_n^* (\phi_k, \psi_n^*)]. \quad (1.43)$$

Está última ecuación es importante porque es una transformación para cualquier ϕ_k y nos dice que el concepto de partícula va a venir del número de excitaciones en una base específica, ya sean con los coeficientes C_k que pertenecen a las ondas planas o los coeficientes D_n para ψ_n que son los modos acelerados. Entonces el concepto de partícula va a depender

de la base que estemos usando. Lo interesante del problema es que el cambio de base no es un cambio caprichoso, sino que es inevitable porque viene al imponer un observador acelerado.

Análogamente, podemos obtener la inversa de esta transformación

$$D_n = \frac{1}{2\omega_n} \int d^3k [C_k(\psi_n, \phi_k) + C_k^*(\psi_n, \phi_k^*)]. \quad (1.44)$$

El siguiente paso, es estudiarlo en el espacio de Fock y sus correspondientes estados de números de ocupación.

1.4. Cuantización canónica

Anteriormente en mecánica cuántica, tomábamos el número de partículas como un parámetro constante, cuando en la práctica sabemos que este número no tiene por qué ser una cantidad conservada; esto lo podemos observar en la aniquilación de pares. Entonces, la segunda cuantización va a llevar a la mecánica cuántica no relativista hasta los casos donde no tenemos un número de partículas constante.

En la primera cuantización cantidades físicas como el momento y la posición pasan a ser operadores. Sin embargo, en segunda cuantización los campos ya no son vistos como funciones de onda, sino que se consideran como los operadores de la teoría, mientras que el espacio y el tiempo pasan a ser parámetros. Este enfoque está basado en dos hipótesis:

1. La densidad de probabilidad en el espacio va a ser sustituida por el número de partículas por unidad de volumen.
2. El mencionado número de partículas es una observable que está sujeta al principio de incertidumbre.

La dualidad onda-partícula de la luz puede verse a través de este esquema. La naturaleza corpuscular de la radiación viene con el operador de número, mientras que la naturaleza ondulatoria va a venir con el plano de polarización de los campos. De esta manera, si sabemos el número de partículas entonces no conocemos la fase y viceversa. Aquí estamos cuantizando el campo de K-G, entonces $\hat{\phi}$ es escalar y no hay polarización.

Entonces, necesitamos establecer una observable que nos diga el número de partículas que vamos a encontrar por unidad de volumen. Esta observable será $\phi^\dagger\phi$ en sustitución de $|\phi|^2$, de modo que ϕ ya no es una función de onda, sino el operador de campo. Esta última observable nos obliga a buscar vectores de estado en un nuevo espacio de Hilbert, que ya no alberga a las funciones de onda de la antigua formulación. Estos estados de número de partículas, asociados a los campos, van a vivir en el espacio de Fock. Este espacio va a contener a los estados propios de un número infinito de osciladores armónicos.

Por lo tanto, si $\phi(x)$ es una coordenada del campo en el evento x , de las ecuaciones de movimiento vamos a tener que $\partial_t\phi(x)$ será su momento conjugado y el principio de incertidumbre nos arrojará un conmutador análogo a $[\hat{x}_i(t), \hat{p}_j(t)] = i\hbar\delta_{ij}$. Notemos que anteriormente $\hat{p}_j(t)$ y $\hat{x}_i(t)$ tenían índices discretos, mientras que ahora utilizamos índices continuos. Por esto vamos a remplazar la delta de Kronecker por una delta de Dirac. Además, tenemos que promover a $\phi \mapsto \hat{\phi}$ usando operadores hermitianos como observables de campo local.

Tomando $[\hat{x}_i(t), \hat{x}_j(t)] = [\hat{p}_i(t), \hat{p}_j(t)] = 0$ en analogía, para el esquema de cuantización canónica para un espacio curvo (caso Rindler), de la ecuaciones de movimiento, se tendrá un momento $\pi(x) = \sqrt{|g|}\partial_t\phi(x) = (g_{00})^{-1/2}\partial_t\phi(x)$, lo que nos lleva a (para tiempos iguales):

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{y})] = \left[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), (g_{00})^{-1/2} \partial_t \hat{\phi}(t, \mathbf{y}) \right] = i\hbar\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (1.45)$$

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\phi}(t, \mathbf{y})] = g^{00} \left[\partial_t \hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \partial_t \hat{\phi}(t, \mathbf{y}) \right] = 0. \quad (1.46)$$

Estas relaciones son el postulado principal de la llamada cuantización canónica, pero ahora en espacio curvo. Nótese que el conmutador se define a tiempos iguales, ya que a tiempos diferentes se tendría que aplicar el propagador correspondiente para obtener la evolución.

El siguiente paso a realizar es promover los coeficientes C_k, D_n a los operadores correspondientes \hat{C}_k, \hat{D}_n , mientras que las funciones ψ_n y ϕ_k se quedan igual para garantizar que sigan siendo soluciones de las ecuaciones correspondientes.

Ahora, tomando el desarrollo (1.33) y sustituyendo en el conmutador (1.45):

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{y})] &= \left[\int d^3k' \left(\hat{C}_{k'}\phi_{k'} + \hat{C}_{k'}^\dagger\phi_{k'}^* \right), \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_t \int d^3k \left(\hat{C}_k\phi_k + \hat{C}_k^\dagger\phi_k^* \right) \right] \\ &= \frac{i}{\sqrt{|g|}} \int d^3k d^3k' \omega_{k'} \left([\hat{C}_k, \hat{C}_{k'}] \phi_k(x)\phi_{k'}(y) - [\hat{C}_k, \hat{C}_{k'}^\dagger] \phi_k(x)\phi_{k'}^*(y) \right. \\ &\quad \left. + [\hat{C}_k^\dagger, \hat{C}_{k'}] \phi_k^*(x)\phi_{k'}(y) - [\hat{C}_k^\dagger, \hat{C}_{k'}^\dagger] \phi_k^*(x)\phi_{k'}^*(y) \right) \\ &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{i}{\sqrt{|g|}} \int d^3k \phi_k^*(x)\phi_k(y). \end{aligned} \quad (1.47)$$

La última igualdad se da desarrollando la delta de Dirac en Fourier, entonces (1.47) se va a cumplir siempre y cuando se satisfagan las siguientes relaciones:

$$\left[\hat{C}_k, \hat{C}_{k'}^\dagger \right] = -\frac{1}{2\omega_k} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad \left[\hat{C}_k, \hat{C}_{k'} \right] = 0 = \left[\hat{C}_k^\dagger, \hat{C}_{k'}^\dagger \right]. \quad (1.48)$$

Las igualdades en (1.48) nos dicen que tenemos un conjunto infinito de osciladores armónicos, ya que cada uno está etiquetado por k . Los operadores de creación \hat{A}_k^\dagger y aniquilación \hat{A}_k por modo tienen que ir normalizados como:

$$\hat{C}_k = \hat{A}_k^\dagger / \sqrt{2\omega_k}, \quad \hat{C}_k^\dagger = \hat{A}_k / \sqrt{2\omega_k}, \quad [\hat{A}_k, \hat{A}_{k'}^\dagger] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (1.49)$$

Podemos realizar un análisis análogo con los coeficientes D_n , que al promover a operadores podemos relacionarlos con unos nuevos operadores de creación \hat{B}_n^\dagger y de aniquilación \hat{B}_n . Ahora cada uno va a identificarse con un valor de modo n . Con estas consideraciones llegamos a las siguiente relaciones:

$$[\hat{D}_n, \hat{D}_{n'}^\dagger] = -\frac{1}{2\omega_n} \delta_{n,n'}, \quad [\hat{D}_n, \hat{D}_{n'}] = 0 = [\hat{D}_n^\dagger, \hat{D}_{n'}^\dagger]. \quad (1.50)$$

Además, usamos la normalización:

$$\hat{D}_n = \hat{B}_n^\dagger / \sqrt{2\omega_n}, \quad \hat{D}_n^\dagger = \hat{B}_n / \sqrt{2\omega_n}, \quad [\hat{B}_n, \hat{B}_{n'}^\dagger] = \delta_{n,n'}. \quad (1.51)$$

Para finalizar, en (1.43) y (1.44) encontramos la relación que existe entre los coeficientes C_k y D_n , nosotros podemos trasladar este resultado para el caso de los operadores \hat{C}_k y \hat{D}_n , obteniendo como resultado

$$\begin{aligned} \hat{C}_k &= \frac{1}{2\omega_k} \sum_n [\hat{D}_n \langle \phi_k, \psi_n \rangle + \hat{D}_n^\dagger \langle \phi_k, \psi_n^* \rangle], \\ \hat{D}_n &= \frac{1}{2\omega_n} \int d^3k [\hat{C}_k \langle \psi_n, \phi_k \rangle + \hat{C}_k^\dagger \langle \psi_n, \phi_k^* \rangle]. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Esta es la transformación de Bogoliubov. Utilizando (1.49) y (1.51) podemos conseguir de manera sencilla una transformación entre los operadores de creación y aniquilación de ambos casos. Expresamos la aniquilación de un modo de onda plana k como una superposición de aniquilación y creación en el modo curvo n . Obtenemos:

$$\hat{A}_k = \sum_n \left[\left(\frac{\langle \phi_k, \psi_n \rangle^*}{2\sqrt{\omega_k \omega_n}} \right) \hat{B}_n + \left(\frac{\langle \phi_k^*, \psi_n \rangle}{2\sqrt{\omega_k \omega_n}} \right) \hat{B}_n^\dagger \right]. \quad (1.53)$$

De manera inversa tenemos:

$$\hat{B}_n = \int d^3k \left[\left(\frac{\langle \psi_n, \phi_k \rangle^*}{2\sqrt{\omega_k \omega_n}} \right) \hat{A}_k + \left(\frac{\langle \psi_n^*, \phi_k \rangle}{2\sqrt{\omega_k \omega_n}} \right) \hat{A}_k^\dagger \right]. \quad (1.54)$$

Hemos llegado a que los operadores de aniquilación \hat{A}_k se expresan como una superposición de los operadores de creación y de aniquilación \hat{B}_n del sistema acelerado. La importancia de este resultado se desvela a la hora de aplicar estos operadores sobre los estados del espacio de Fock.

Como podemos observar, tenemos a los coeficientes \hat{B}_n (caso acelerado) como una superposición de \hat{A}_k y \hat{A}_k^\dagger (espacio plano). El estado de vacío para el sistema no acelerado $|0, 0, \dots\rangle \equiv |0\rangle_A$, es aniquilado por \hat{A}_k para cualquier k . Sorprendentemente el viejo vacío inercial $|0\rangle_A$ no es aniquilado por los nuevos operadores acelerados, es decir $\hat{B}_n |0\rangle_A \neq 0$,

ya que en general tendremos un coeficiente distinto de cero multiplicando a \hat{A}_k^\dagger en (1.54). Entonces llegamos a la conclusión de que el estado de vacío y el concepto de número van a depender de si nuestro marco está acelerado o no. Esto es lo que dice el efecto Unruh.

1.5. Ausencia de efecto autogravitante

Esta sección se dedicará a aclarar la magnitud del efecto autogravitante de un campo escalar y su efecto despreciable en la producción de radiación Unruh. Si existiera, esto implicaría que al producir una gran cantidad de partículas, estas provocarían una deformación apreciable en el espacio tiempo, generando un efecto de autointeracción importante.

Para asegurar que esto no ocurre vamos a realizar un cálculo aproximado utilizando las ecuaciones de Einstein y el respectivo tensor de energía momento en el marco de la teoría cuántica de campos. Iniciamos tomando las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (1.55)$$

Calculando la traza del lado izquierdo de la igualdad solo quedará el escalar de curvatura R multiplicado por una constante. De aquí se observa que al tener una cantidad pequeña en el lado derecho se tiene $R \rightarrow 0$, esto nos lleva a recuperar la métrica de Minkowski y un espacio plano.

Para nuestros cálculos tomaremos la siguiente Lagrangiana (Wald, ecuación (E.1.6), Pag.451):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) + \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (1.56)$$

Haciendo uso de la ecuación de Euler-Lagrange verificamos que ϕ satisface la ecuación de Klein-Gordon:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} = \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)},$$

$$m^2\phi = -\partial_\mu(\partial^\mu\phi),$$

$$(\square + m^2)\phi = 0.$$

Se empleará esta ecuación en espacio plano, como una primera aproximación a la fuente potencial de campo gravitatorio, concluyendo que esta no contribuirá de forma significativa.

El siguiente paso es calcular el tensor energía-momento para el campo escalar de Klein-Gordon; para esto vamos a usar el teorema de Noether, sin olvidar que estamos tratando con un campo complejo.

$$\begin{aligned} T^\mu{}_\alpha &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi)} \partial_\alpha \phi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^*)} \partial_\alpha \phi^* - \delta^\mu_\alpha \mathcal{L}, \\ T^{\mu\nu} &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^*)} \partial^\nu \phi^* - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Sustituyendo nuestra \mathcal{L} encontramos lo siguiente:

$$T^{\mu\nu} = -\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi^* - \partial^\mu \phi^* \partial^\nu \phi + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\partial^\rho \phi^* \partial^\rho \phi - m^2 \phi^2], \quad (1.58)$$

donde ϕ se puede expresar en términos de las soluciones libres como:

$$\phi = \sum_k \left\{ C_k e^{ik_\mu x^\mu} + C_k^* e^{-ik_\mu x^\mu} \right\}, \quad (1.59)$$

con C_k complejo. En segunda cuantización, los coeficientes deben sustituirse por operadores de la manera

$$C_k^* \rightarrow \hat{C}_k^\dagger, \quad C_k \rightarrow \hat{C}_k. \quad (1.60)$$

Esto implica que $T^{\mu\nu}$ tendrá un carácter de operador, pero los parámetros espacio temporales quedaran intactos. Queremos obtener un orden de magnitud aproximado para $T^{\mu\nu}$ y estamos considerando un número significativo de partículas escalares a detectar. Entonces, en este límite semiclásico, podemos sustituir el operador de campo $T^{\mu\nu}$ por su promedio en un estado de número suficientemente grande.

Por lo tanto, vamos a pensar que la densidad es lo suficientemente grande para que el promedio del campo se aproxime al campo mismo. De esta manera en el lado derecho de la ecuación de Einstein vamos a colocar un promedio en un estado cuántico, como se muestra a continuación.

$$T^{\mu\nu} \rightarrow \left\langle n_q \left| -\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi^* - \partial^\mu \phi^* \partial^\nu \phi + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\partial^\rho \phi^* \partial^\rho \phi - m^2 \phi^2] \right| n_q \right\rangle, \quad (1.61)$$

donde $|n_q\rangle$ es el estado de número de ocupación y n es la densidad de número, la cual es cero en todas partes, excepto en el momento igual a q . Procediendo con el cálculo, desarrollamos el término $\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi^*$, lo cual nos lleva a

$$\begin{aligned}
\langle n_q | \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi^* | n_q \rangle &= \langle n_q | \sum_{k, k'} (ik^\mu) (ik^{\nu'}) \left\{ \hat{C}_k \hat{C}_{k'} e^{i(k+k')x} - \hat{C}_k \hat{C}_{k'}^\dagger e^{i(k-k')x} \right. \\
&\quad \left. - \hat{C}_k^\dagger \hat{C}_{k'} e^{-i(k-k')x} + \hat{C}_k^\dagger \hat{C}_{k'}^\dagger e^{-i(k+k')x} \right\} | n_q \rangle \\
&= \sum_{k, k'} -k^\mu k^{\nu'} \left\{ \langle n_q | \hat{C}_k \hat{C}_{k'} | n_q \rangle e^{i(k+k')x} - \langle n_q | \hat{C}_k \hat{C}_{k'}^\dagger | n_q \rangle e^{i(k-k')x} \right. \\
&\quad \left. - \langle n_q | \hat{C}_k^\dagger \hat{C}_{k'} | n_q \rangle e^{-i(k-k')x} + \langle n_q | \hat{C}_k^\dagger \hat{C}_{k'}^\dagger | n_q \rangle e^{-i(k+k')x} \right\}.
\end{aligned} \tag{1.62}$$

Luego, usando que

$$\begin{aligned}
\langle n_q | \hat{C}_k \hat{C}_{k'} | n_q \rangle &= 0, \\
\langle n_q | \hat{C}_k^\dagger \hat{C}_{k'}^\dagger | n_q \rangle &= 0, \\
\langle n_q | \hat{C}_k^+ \hat{C}_{k'}' | n_q \rangle &= \delta(k - q) \delta(k' - q) \langle N_k \rangle = n_q, \\
\langle n_q | \hat{C}_k \hat{C}_{k'}^\dagger | n_q \rangle &= \langle n_q | [\hat{C}_k, \hat{C}_{k'}^\dagger] + \hat{C}_{k'}^\dagger (k | n_q) \\
&= 1 + \langle N_k \rangle = 1 + n_q,
\end{aligned} \tag{1.63}$$

donde n_q es el número de partículas con momento q . Además, sabemos que $k^\mu k_\mu = m^2$. Sustituyendo esto en (1.62), obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle T^\mu{}_\mu \rangle &= -\langle \partial^\rho \phi \partial_\rho \phi^* \rangle - \langle \partial^\rho \phi^* \partial_\rho \phi \rangle + \frac{1}{2} g^\mu{}_\mu [\langle \partial^\rho \phi \partial_\rho \phi^* \rangle - m^2 \langle \phi^2 \rangle] \\
&= -m^2 2 \left(n_q + \frac{1}{2} \right) - m^2 2 \left(n_q + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} (4) \left[m^2 2 \left(n_q + \frac{1}{2} \right) - m^2 2 \left(n_q + \frac{1}{2} \right) \right]. \\
&= -4m^2 \left(n_q + \frac{1}{2} \right).
\end{aligned} \tag{1.64}$$

Por lo tanto, en el lado derecho de la ecuación (1.55) se tendrá la cantidad $32\pi G m^2 (n_q + \frac{1}{2})/c^2$. Mientras tanto, en el lado izquierdo de la ecuación de Einstein, podemos usar que $g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R + g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \Lambda$. Entonces la traza será:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(G) &= R - \frac{1}{2} 4R + 4\Lambda, \\
&= -R + 4\Lambda.
\end{aligned} \tag{1.65}$$

Juntando ambos resultados, nos queda:

$$-R + 4\Lambda = -\frac{32\pi G m^2}{c^4} \left(n_q + \frac{1}{2} \right). \tag{1.66}$$

Buscamos que al tomar $n \rightarrow 0$ se recupere el espacio de Minkowski, es decir $R = 0$, para tener congruencia. Vamos a despreciar el efecto de la constante cosmológica Λ , tomándola

como cero.² Por otro lado, al tratarse de un evento hipotético de detección de partículas, podemos tomar un número $n_q \gg 1$ para que así $n_q + \frac{1}{2} \approx n_q$. Con estas consideraciones, el resultado se reduce a:

$$R = \frac{32\pi G m^2}{c^4} n_q. \quad (1.67)$$

Entonces, hemos encontrado que la posible curvatura del espacio proviene del número de partículas producidas en nuestro experimento. Sabemos que las unidades del tensor de energía-momento son energía por unidad de volumen, entonces vamos a fijar el número de partículas por unidad de volumen, en una posible detección. Como buscamos tener una densidad considerablemente grande, supondremos que el tamaño de los detectores es aproximadamente $1m^2$ y tomaremos un total de 1000 partículas producidas. Sustituyendo los datos en nuestra fórmula, nos queda:

$$\begin{aligned} R &= \frac{32\pi G}{c^4} (mc^2) \cdot \frac{N}{V}, \\ &= 32\pi \left(6 \times 10^{-41} \frac{m^3}{\text{kgs}^2} \right) \frac{1}{\left(3 \times 10^8 \frac{m}{s} \right)^2} (10^{-25} \text{ kg}) 1000 \frac{1}{m^3}, \\ &\simeq 10^{-48} \frac{1}{m^2}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Este resultado nos lleva a un radio aproximado de $10^{24}m$. Por lo tanto, hemos encontrado una curvatura que no detectaríamos ni en un centésimo del universo observable ($10^{26}m$). Los argumentos que se han expuesto aquí se pueden reproducir con órdenes de magnitud para el caso en el que el observador esté acelerado, ya que hemos tomado en cuenta que las partículas ya se han producido; por ello y por las razones de efecto pequeño, no se ha hecho el cálculo con la métrica de Rindler en el lado derecho de la ecuación de Einstein, pero el razonamiento es igualmente válido.

²Aun cuando Λ fuera distinto de cero, su cota superior reportada es $\Lambda \leq 10^{-46} \text{ km}^{-2}$. En un universo en expansión el efecto de Λ es demasiado lento comparado con la evolución de la materia que se pretende detectar debido al efecto Unruh.

Capítulo 2

Sistema simplificado: Oscilador armónico con una fuerza viscosa

Después de identificar los puntos claves en la teoría del efecto Unruh, vamos a estudiar un sistema simplificado que posea todas las características del efecto en segunda cuantización por un observador acelerado. En este trabajo de tesis vamos a fijarnos en un sistema cuántico de osciladores perturbados con amortiguamiento y con un número reducido de grados de libertad. Mostraremos cómo la transformación del vacío puede darse con tan solo un modo en la transformación de Bogoliubov anteriormente revisada (1.54).

Veremos cómo en nuestro sistema simplificado retiene la esencia del efecto al involucrar los operadores de aniquilación y creación de número de excitaciones, en el nuevo marco transformado. Para ello, obtendremos una nueva forma de la transformación de Bogoliubov para un modo. Se analizará la analogía que existe entre la ecuación de Klein-Gordon en espacio curvo y la de un oscilador armónico que contiene un término de fuerza dependiente de la velocidad. Veamos el siguiente simil:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right] x(t) = 0 &\longleftrightarrow [\square + m^2] \Psi = 0, \\ \left[\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + \omega^2 \right] X(t) = 0 &\longleftrightarrow \left[\square + \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \partial^\lambda + m^2 \right] \phi = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $X(t)$ y $x(t)$ son operadores hermitianos pero no necesariamente reales y representan la coordenada de un oscilador armónico descrita en la imagen de Heisenberg. El factor a es la intensidad de la fuerza dependiente del tiempo, es una constante que en general puede ser compleja (aunque para sistemas con disipación de toma real y positiva) y su significado físico está ligado con la vida media de la amplitud de las oscilaciones.

La justificación física de la ecuación (26) la podemos encontrar en el modelo de Caldirola-Kanai. La cuantificación de los sistemas disipativos ha sido de gran interés en la

literatura y el Hamiltoniano que presentamos en este trabajo corresponde al modelo de C-K [11, 12], nacido en los años 40's y estudiado en una gran cantidad artículos, el cual también tiene peculiaridades que han sido comentadas [14-17].

A pesar de que es un modelo para fuerzas disipativas, vemos que el modelo surge naturalmente de una simplificación de la segunda línea de (2.1), es decir, de la ecuación de Klein-Gordon en un sistema acelerado (la cual es inevitablemente el lado derecho de (2.1) incorporando el símbolo de Christoffel).

Por ejemplo, tomemos un cambio de coordenada $x \rightarrow t$ y una función ϕ que solo dependa de x (de modo que el operador de D'Lambert se reduzca a $-d^2/dx^2$ al operar sobre ϕ) y tomemos la magnitud del símbolo $\Gamma_{01}^0 = a$, así como la identificación $m^2 = \omega^2$, que recupera idénticamente la ecuación del oscilador con fricción. Nótese que en la región de Rindler $\alpha x \approx 1/a$, la descripción anterior es inevitable. Esto revela que la propagación acelerada es una lucha contra una fuerza viscosa.

Regresando a (2.1), la ecuación para la observable $\hat{X}(t)$, se puede obtener usando el Hamiltoniano de Caldirola-Kanai.

$$\hat{H} = e^{-at} \frac{\hat{P}^2}{2} + e^{+at} \omega^2 \frac{\hat{X}^2}{2}, \quad (2.2)$$

donde $\hat{P}(t) = e^{at}(d\hat{X}(t)/dt)$. Esto se puede ver usando las ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i}[\hat{X}, \hat{H}] &= \dot{\hat{X}} = e^{-at} \hat{P}, \\ -\frac{1}{i}[\hat{P}, \hat{H}] &= -\dot{\hat{P}} = e^{at} \omega^2 \hat{X}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Por lo tanto, llegamos a

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\hat{X}} &= \dot{\hat{P}}e^{-at} - ae^{-at} \hat{P} \\ \ddot{\hat{P}} &= ae^{at} \omega^2 \hat{X} + \dot{\hat{X}}e^{at} \omega^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ddot{\hat{X}} + a\dot{\hat{X}} = -\omega^2 \hat{X}. \quad (2.4)$$

Dado que tanto la energía cinética como la potencial escalan con factores exponenciales, la energía de este sistema no se conserva. Ahora, proponemos la siguiente transformación canónica variables:

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= e^{+at/2} \hat{X}, \\ \hat{\Pi} &= e^{-at/2} \hat{P}, \end{aligned}$$

la cual corresponde a un reescalamiento en \hat{X} y un reescalamiento inverso en \hat{P} y empleando una función generatriz hermitiana de dicha transformación, dada por

$$\frac{a}{4} \{\hat{\Pi}, \hat{Y}\} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t}, \quad (2.5)$$

llegamos a un nuevo Hamiltoniano

$$\begin{aligned}
\hat{K} &= \hat{H} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} \\
&= \frac{e^{-at}}{2} \left(e^{at/2} \hat{\Pi} \right)^2 + \frac{e^{at} \omega^2}{2} \left(\hat{Y} e^{-at/2} \right)^2 + \frac{a}{4} \{ \hat{\Pi}, \hat{Y} \} \\
&= \frac{\hat{\Pi}^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} \hat{Y}^2 + \frac{a}{4} \{ \hat{\Pi}, \hat{Y} \}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Esto da lugar a una nuevas ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{i} [\hat{\Pi}, \hat{K}] &= -\dot{\hat{\Pi}} = \omega^2 \hat{Y} + \frac{a}{2} \hat{\Pi}, \\
\frac{1}{i} [\hat{Y}, \hat{K}] &= \dot{\hat{Y}} = \hat{\Pi} + \frac{a}{2} \hat{Y}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Hemos encontrado el nuevo momento conjugado:

$$\hat{\Pi} = \dot{\hat{Y}} - \frac{a}{2} \hat{Y}. \tag{2.8}$$

Luego, combinando las dos ecuaciones en (2.7) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \hat{Y}}{dt^2} &= \dot{\hat{\Pi}} + \frac{a}{2} \dot{\hat{Y}} \\
&= -\omega^2 \hat{Y} - \frac{a}{2} \left(\dot{\hat{Y}} - \frac{a}{2} \hat{Y} \right) + \frac{a}{2} \dot{\hat{Y}} \\
&= -\omega^2 \hat{Y} + \frac{a^2}{4} \hat{Y}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Esto significa que podemos expresar nuestro problema como un oscilador armónico con una nueva frecuencia $\Omega^2 \equiv \omega^2 - (a/2)^2$, esto es:

$$\frac{d^2 \hat{Y}}{dt^2} = -[\omega^2 - (a/2)^2] \hat{Y} = -\Omega^2 \hat{Y}. \tag{2.10}$$

Aquí vamos a considerar solamente el caso $\Omega^2 > 0$, ya que no buscamos tener un oscilador repulsivo. La solución para esta ecuación (2.10) en términos de los modos y sus respectivos coeficientes será:

$$\hat{Y}(t) = e^{-i\Omega t} D(0)^\dagger + e^{+i\Omega t} D(0), \tag{2.11}$$

donde los coeficientes D^\dagger y D son ahora operadores independientes del tiempo. Entonces, el nuevo momento conjugado será

$$\begin{aligned}
\hat{\Pi} &= \dot{\hat{Y}} - \frac{a}{2} \hat{Y} \\
&= \left(i\Omega - \frac{a}{2} \right) e^{+i\Omega t} D(0) - \left(i\Omega + \frac{a}{2} \right) e^{-i\Omega t} D(0)^\dagger.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Siguiendo con nuestra discusión, sabemos que para \hat{X} y \hat{P} se cumplen la siguientes relaciones de conmutación:

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i. \quad (2.13)$$

Al tener una transformación canónica de variables, es fácil ver que se esto se preserva

$$\begin{aligned} [\hat{Y}, \hat{\Pi}] &= [\hat{X}e^{at/2}, e^{-at/2}\hat{P}] \\ &= [\hat{X}, \hat{P}] \\ &= i. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Luego, desarrollando (2.14) en términos de D y D^\dagger obtenemos:

$$\begin{aligned} [\hat{Y}, \hat{\Pi}] &= \left[e^{-i\Omega t} D^\dagger + e^{i\Omega t} D, \left(i\Omega - \frac{a}{2} \right) e^{+i\Omega t} D - \left(i\Omega + \frac{a}{2} \right) e^{-i\Omega t} D^\dagger \right] \\ &= D^\dagger D \left(i\Omega - \frac{a}{2} \right) - DD^\dagger \left(i\Omega + \frac{a}{2} \right) - DD^\dagger \left(i\Omega - \frac{a}{2} \right) + D^\dagger D \left(i\Omega + \frac{a}{2} \right) \\ &= D^\dagger D(2i\Omega) - DD^\dagger(2i\Omega) \\ &\Rightarrow [D, D^\dagger] = -\frac{1}{2\Omega}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Finalmente, relacionando con los operadores de creación y aniquilación B^\dagger y B , tenemos la siguiente normalización:

$$D = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} B^\dagger, \quad D^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} B, \quad [B, B^\dagger] = 1. \quad (2.16)$$

2.1. Superposición de modos

Para el caso de la ecuación sin perturbación

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right] x(t) = 0, \quad (2.17)$$

es decir, cuando $a = 0$, sabemos que la solución en términos de los modos estará dada por:

$$\hat{x} = e^{-i\omega t} C^\dagger + e^{+i\omega t} C. \quad (2.18)$$

Mientras que el momento conjugado p esta dado por:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \hat{p} = i\omega \left[e^{+i\omega t} C - e^{-i\omega t} C^\dagger \right], \quad (2.19)$$

con sus respectivas relaciones de conmutación

$$C = \frac{A^\dagger}{\sqrt{2\omega}}, \quad C^\dagger = \frac{A}{\sqrt{2\omega}}, \quad [A, A^\dagger] = 1. \quad (2.20)$$

Para ser congruentes se debe cumplir que si $a \rightarrow 0$ entonces $\hat{Y} \rightarrow \hat{x}$. Debido a que el conjunto de modos normales negativos y positivos para el caso no perturbado $\{e^{-i\omega t}, e^{+i\omega t}\}$ forman una base ortonormal, nosotros podemos desarrollar la nueva solución \hat{Y} en términos de esta base junto con sus respectivos coeficientes.

$$\hat{Y}(t) = e^{-i\omega t} C^\dagger(t) + e^{+i\omega t} C(t), \quad (2.21)$$

Es importante notar que ahora los coeficientes son dependientes del tiempo. Además, también se obtiene su correspondiente momento conjugado

$$\hat{\Pi}(t) = \frac{d\hat{Y}}{dt} - \frac{a\hat{Y}}{2} = (i\omega - a/2)e^{i\omega t} C - (i\omega + a/2)e^{i\omega t} C^\dagger. \quad (2.22)$$

2.2. Producto interno y transformación de Bogoliubov a un modo

El propósito de esta sección es encontrar productos internos para el problema de un oscilador unidimensional de coordenada compleja, o bidimensional real, tanto perturbado como no perturbado por la fuerza viscosa.

Sabemos que de la ecuación de movimiento (2.17) podemos obtener un producto interno. Este puede ser encontrado mediante los siguientes pasos: Partimos de un par de soluciones $f(t)$ y $g(t)$. Multiplicamos por f^* y aplicamos conjugación compleja en la ecuación de movimiento para la función g que resuelve el problema de movimiento. Por otra parte, multiplicamos por g^* en la ecuación de f , resultando las dos relaciones:

$$g^* \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) f = 0, \quad f \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) g^* = 0. \quad (2.23)$$

Restando llegamos a:

$$\frac{d}{dt} \left(g^* \frac{df}{dt} - f \frac{dg^*}{dt} \right) = 0. \quad (2.24)$$

La cantidad dentro del paréntesis es una invariante temporal y para que sea una cantidad real vamos a multiplicar por i , dando como resultado el siguiente producto interno para x y y coordenadas de un oscilador unidimensional, o bien bidimensional en el plano complejo:

$$\langle x, y \rangle = i \left(y^* \frac{d}{dt} x - x \frac{dy^*}{dt} \right). \quad (2.25)$$

Aunque esta expresión es invariante en el tiempo, esta va a cambiar si modificamos nuestra ecuación diferencial. Si ahora nos encontramos con la ecuación de movimiento para un oscilador armónico con fuerza viscosa:

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + \omega^2 \right] F(t) = 0,$$

multiplicamos por F^* y sacamos el complejo conjugado.

$$F^* \left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + \omega^2 \right) = 0, \quad F \left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + \omega^2 \right) F^* = 0. \quad (2.26)$$

Aplicando el mismo procedimiento llegamos a:

$$\frac{d}{dt} \left(F^* \frac{d}{dt} F - F \frac{d}{dt} F^* \right) + a F^* \frac{d}{dt} F - a F \frac{d}{dt} F^* = 0. \quad (2.27)$$

Como se puede observar, comparando con (2.24) ahora aparecen dos términos extras en el lado izquierdo. Estos se pueden despejar al lado derecho de (2.27), como si tuviéramos una fuente; esto nos dice que puede haber disipación de la otra cantidad conservada. Podemos modificar la ecuación anterior utilizando que

$$a \frac{d}{dt} |F|^2 = a F \frac{dF^*}{dt} + a F^* \frac{dF}{dt}. \quad (2.28)$$

Vamos a expresar (2.27) como:

$$\frac{d}{dt} \left(F^* \frac{dF}{dt} - F \frac{dF^*}{dt} \right) + a \frac{d}{dt} |F|^2 - 2a F \frac{dF^*}{dt} = 0. \quad (2.29)$$

Ahora ya podemos factorizar la derivada temporal del termino del medio, pero aún nos queda el último término (una fuente) ¿En qué caso este producto interno nos llevará a una ley de conservación? Esto se consigue haciendo que $a \rightarrow ia$ con a real, de esta manera la conjugación hace cambiar el signo nuevamente. Entonces ya no tendremos una fuerza viscosa, ahora es un término de norma y nos dará el resultado

$$\frac{d}{dt} \left(F^* \frac{dF}{dt} - F \frac{dF^*}{dt} + 2ia |F|^2 \right) = 0. \quad (2.30)$$

Entonces tendremos como nuevo producto interno conservado

$$\langle F, F \rangle = F^* \left(\frac{d}{dt} + ia \right) F - F \left(\frac{d}{dt} - ia \right) F^* \quad (2.31)$$

Pero esto solo se cumple cuando el factor que acompaña al término dependiente de la velocidad es una cantidad imaginaria, cuando a es real nos quedará un término fuente como se indicó arriba. Para lidiar con este problema veremos qué ocurre en el caso perturbado usando la frecuencia corregida Ω del apartado anterior. Vamos a desarrollar el problema con la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 \hat{Y}}{dt^2} = -\Omega^2 \hat{Y}.$$

Aplicando el procedimiento anteriormente usado, vamos a llegar a

$$\frac{d}{dt} \left(iY^* \frac{d}{dt} Y - iY \frac{d}{dt} Y^* \right) = 0. \quad (2.32)$$

Si ahora usamos que $Y = e^{at/2} X$ y sustituimos

$$i \frac{d}{dt} \left(e^{at/2} X^* \frac{d}{dt} \left(e^{at/2} X \right) - e^{a/2t} X \frac{d}{dt} e^{a/2t} X^* \right) = 0. \quad (2.33)$$

Podemos factorizar usando la siguiente igualdad: $\frac{d}{dt} e^\alpha = e^\alpha \left(\frac{d}{dt} + \dot{\alpha} \right)$.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left[e^{at} \left(X^* \left(\frac{d}{dt} + \frac{a}{2} \right) X - X \left(\frac{d}{dt} + \frac{a}{2} \right) X^* \right) \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[e^{at} \left(X^* \frac{d}{dt} X - X \frac{d}{dt} X^* \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Nos quedó el viejo producto pero reescalado. De aquí se ve que el producto con término fuente es idéntico a este último producto cuando derivamos el factor exponencial usando la regla del producto. De este modo, el re-escalamiento con factor real e^{at} también recupera un producto interno invariante, explicando el efecto de la fricción como un amortiguamiento que se corrige con una exponencial creciente. Notemos, sin embargo, que el tránsito entre soluciones del problema no perturbado al perturbado requiere el cálculo del producto no re-escalado. Este puede dar lugar a coeficientes con dependencia temporal cuando se trata de obtener soluciones del nuevo problema (frecuencia Ω) como superposiciones del viejo problema (frecuencia ω). Veamos: Utilizando el producto interno $\langle f, g \rangle \equiv i [f(t)^* g'(t) - g(t) f'(t)^*]$, ahora podemos calcular lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle e^{+i\omega t}, e^{-i\omega t} \rangle &= 0, \\ \langle e^{\pm i\omega t}, e^{\pm i\omega t} \rangle &= \mp 2\omega, \\ \langle e^{+i\omega t}, \hat{X}_0 \rangle &= -2\omega C, \\ \langle e^{-i\omega t}, \hat{X}_0 \rangle &= 2\omega C^\dagger. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ahora, calculamos el producto interno entre la nueva solución la solución \hat{Y} y los modos propios del problema no perturbado. Para esto hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\langle e^{-i\omega t}, \hat{Y} \rangle &= \langle e^{-i\omega t}, e^{-i\Omega t} \hat{D}^\dagger + e^{i\Omega t} \hat{D} \rangle \\
&= i \left[(e^{-i\omega t})^* \frac{d}{dt} (e^{-i\Omega t} \hat{D}^\dagger + e^{i\Omega t} \hat{D}) + (e^{-i\Omega t} \hat{D}^\dagger + e^{i\Omega t} \hat{D}) \frac{d}{dt} (e^{-i\omega t})^t \right] \\
&= (\omega + \Omega) e^{i(\omega - \Omega)t} D^\dagger + (\omega - \Omega) e^{i(\omega + \Omega)t} D \\
\langle e^{-i\omega t} \hat{Y} \rangle &= \langle e^{-i\omega t}, e^{-i\omega t} \hat{C}^\dagger(t) + e^{i\omega t} \hat{C}(t) \rangle \\
&= \langle e^{-i\omega t}, e^{-i\omega t} \hat{C}^\dagger(t) \rangle + \langle e^{-i\omega t}, e^{i\omega t} \hat{C}(t) \rangle \\
&= \hat{C}^\dagger(t) 2\omega
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Hacemos un desarrollo análogo para el modo positivo $e^{-i\omega t}$, dando lugar a los siguientes dos resultados:

$$\begin{aligned}
\langle e^{-i\omega t}, \hat{Y} \rangle &= (\omega + \Omega) e^{i(\omega - \Omega)t} D^\dagger + (\omega - \Omega) e^{i(\omega + \Omega)t} D = 2\omega C^\dagger, \\
\langle e^{+i\omega t}, \hat{Y} \rangle &= (\Omega - \omega) e^{-i(\omega + \Omega)t} D^\dagger - (\omega + \Omega) e^{i(\Omega - \omega)t} D = -2\omega C.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Por lo tanto, podemos expresar nuestra solución de la manera

$$\begin{aligned}
\hat{Y}(t) &= e^{-i\omega t} C^\dagger(t) + e^{+i\omega t} C(t) \\
&= \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\omega}} \left\langle \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\omega}}, \hat{Y} \right\rangle + \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{-2\omega}} \left\langle \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{-2\omega}}, \hat{Y} \right\rangle.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Utilizando las relaciones encontradas en (2.37), podemos obtener la transformación de Bogoliubov

$$C = \frac{\omega - \Omega}{2\omega} e^{-i(\omega + \Omega)t} D^\dagger + \frac{\omega + \Omega}{2\omega} e^{-i(\omega - \Omega)t} D, \tag{2.39}$$

la cual tiene la inversa

$$D = \frac{\Omega - \omega}{2\Omega} e^{-i(\omega + \Omega)t} C^\dagger + \frac{\omega + \Omega}{2\Omega} e^{i(\omega - \Omega)t} C. \tag{2.40}$$

Si ahora empleamos los operadores de creación y aniquilación en ambos esquemas (A para no perturbado y B para el modificado), recurrimos a las igualdades (2.20) y (2.16). La sustitución en (2.39) y (2.40) nos lleva a:

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= \sqrt{\frac{\omega}{\Omega}} \left(\frac{\omega - \Omega}{2\omega} \right) e^{i(\omega + \Omega)t} \hat{B}^\dagger + \sqrt{\frac{\omega}{\Omega}} \left(\frac{\omega + \Omega}{2\omega} \right) e^{i(\omega - \Omega)t} \hat{B}, \\
\hat{B} &= \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \left(\frac{\Omega - \omega}{2\Omega} \right) e^{i(\omega + \Omega)t} \hat{A}^\dagger + \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \left(\frac{\omega + \Omega}{2\Omega} \right) e^{i(\Omega - \omega)t} \hat{A}.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\omega}{\Omega}} - \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \right) e^{i(\omega+\Omega)t} \hat{B}^\dagger + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\omega}{\Omega}} + \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \right) e^{i(\omega-\Omega)t} \hat{B}, \\ \hat{B} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} - \sqrt{\frac{\omega}{\Omega}} \right) e^{i(\omega+\Omega)t} \hat{A}^\dagger + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\omega}{\Omega}} + \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \right) e^{i(\Omega-\omega)t} \hat{A}.\end{aligned}\tag{2.42}$$

Por conveniencia, vamos a utilizar la notación $\zeta = \sqrt{\Omega/\omega}$, Con estas consideraciones podemos obtener finalmente la transformación de Bogoliubov:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \frac{\zeta - \zeta^{-1}}{2} e^{i(\omega+\Omega)t} \hat{B}^\dagger + \frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2} e^{i(\omega-\Omega)t} \hat{B} \\ \hat{B} &= \frac{\zeta^{-1} - \zeta}{2} e^{i(\omega+\Omega)t} \hat{A}^\dagger + \frac{\zeta^{-1} + \zeta}{2} e^{i(\Omega-\omega)t} \hat{A}\end{aligned}\tag{2.43}$$

Aquí estamos mostrando una relación entre los operadores en lugar de los coeficientes; hemos hecho un desarrollo que cumple las relaciones canónicas:

$$[A, A^\dagger] = 1 \text{ y } [B, B^\dagger] = 1.\tag{2.44}$$

2.3. Nuevo vacío

La transformación resultante en (2.43) es dependiente del tiempo y queremos mostrar que va a producir una rotación en los estados del sistema, particularmente nos interesa en el estado de vacío. Ya que si ponemos (2.43) en forma matricial, podremos ver que corresponde a una rotación, seguida de un rescalamiento y otra rotación. Para llegar a esto, primero vamos a usar la notación $e^\theta = \zeta$, en la transformación de Bogoliubov. Concentrándonos por ahora solo en la expresión para \hat{A} en términos de \hat{B}^\dagger y \hat{B} , nos queda:

$$\hat{A} = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} e^{i(\omega+\Omega)t} \hat{B}^\dagger + \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} e^{i(\omega-\Omega)t} \hat{B}.\tag{2.45}$$

Usando que $\cosh x = (e^{-x} + e^x)/2$ y $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, vamos a escribir nuestra expresión de la siguiente manera:

$$\hat{A} = \sinh \theta e^{i(\omega+\Omega)t} \hat{B}^\dagger + \cosh \theta e^{i(\omega-\Omega)t} \hat{B}\tag{2.46}$$

y el complejo conjugado, será

$$\hat{A}^\dagger = \sinh \theta e^{-i(\omega+\Omega)t} \hat{B} + \cosh \theta e^{i(\Omega-\omega)t} \hat{B}^\dagger.\tag{2.47}$$

Juntando ambos resultados, vamos a tener la siguiente forma matricial:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{A}^\dagger \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cosh \theta e^{i(\omega-\Omega)t} & \sinh \theta e^{i(\Omega+\omega)t} \\ \sinh \theta e^{-i(\omega+\Omega)t} & \cosh \theta e^{i(\Omega-\omega)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{B} \\ \hat{B}^\dagger \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\Omega t} & 0 \\ 0 & e^{i\Omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{B} \\ \hat{B}^\dagger \end{pmatrix} \\
&= T \begin{pmatrix} \hat{B} \\ \hat{B}^\dagger \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

De mecánica cuántica sabemos que, en general, los operadores de creación y aniquilación \hat{a}^\dagger y \hat{a} están relacionados con las observables \hat{x} y \hat{p} , por medio de las relaciones

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right), \\
a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right).
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Conociendo esto, utilizaremos variables de posición y momento auxiliares adimensionales para escribir de manera mas transparente la transformación lineal que conecta a A y B . Hay que recalcar que x y p van a ser canónicas conjugadas. Haciendo uso de (2.49) podemos llevar nuestra transformación de operadores al espacio fase. Haciendo una sustitución vamos a tener

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{A} + \hat{A}^\dagger), \quad \hat{p} = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{A} - \hat{A}^\dagger), \\
\hat{X} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{B} + \hat{B}^\dagger), \quad \hat{P} = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{B} - \hat{B}^\dagger).
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Además de que en este trabajo se utiliza $\hbar = 1$, nótese que en estas variables adimensionalizadas el Hamiltoniano del oscilador se escribe como $H = \hbar\omega(\frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2})$, es directamente la norma al cuadrado del espacio fase. Al trabajar con estas nuevas variables (2.50) la rotación de espacio fase ya no va a ser sobre una elipse, ahora va a ser sobre un círculo, por la forma del Hamiltoniano. Entonces (2.50) nos lleva a:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{P} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{A}^\dagger \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{P} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{B} \\ \hat{B}^\dagger \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Luego, de (2.48) tenemos:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{p} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} \hat{B} \\ \hat{B}^\dagger \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} T \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{P} \end{pmatrix} \\
&= UTU^\dagger \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{P} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.52}$$

donde

$$\begin{aligned}
UTU^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \times \\
&\begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\Omega t} & 0 \\ 0 & e^{i\Omega t} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Por lo tanto, la transformación lineal va a tomar la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{p} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \omega & -\operatorname{sen} \omega \\ \operatorname{sen} \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^\theta & 0 \\ 0 & e^{-\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega & \operatorname{sen} \Omega \\ -\operatorname{sen} \Omega & \cos \Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{P} \end{pmatrix} \\
&= R_\omega^T S_\theta R_\Omega \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{P} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Tenemos una transformación canónica que parte de \hat{x} y \hat{p} , para llevarnos a las nuevas coordenadas \hat{X} y \hat{P} preservando las relaciones de conmutación. Como podemos ver en (2.54), la transformación en el espacio fase puede dividirse en la aplicación sucesiva de una rotación, un reescalamiento y una rotación inversa. Para entender como esta transformación opera sobre los estados del sistema vamos a necesitar su representación en el espacio de Hilbert.

Sabemos que al fijar los nuevos operadores A y A^\dagger , los viejos operadores B y B^\dagger estarán rotando en el tiempo y viceversa. La evolución del oscilador armónico es una transformación canónica lineal, con el operador $U = e^{-iHt}$, siendo $H = w(N + 1/2)$. Entonces, las rotaciones en el espacio fase van a ser generadas por el operador de número \hat{N} , esto nos dice que en el espacio de Hilbert vamos a tener las representaciones:

$$\begin{aligned} R_\omega &\rightarrow e^{iB^\dagger B\omega t}, \\ R_\Omega &\rightarrow e^{-iB^\dagger B\Omega t}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Por otra parte, en S_θ vamos necesitar un re-escalamiento de variable $x \rightarrow \lambda x$ y de cualquier función de esta $f(x) \rightarrow f(\lambda x)$. Veamos cómo el siguiente operador diferencial es el que traslada:

$$\hat{O} = \exp\left(ia\left(-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right). \quad (2.56)$$

donde $a > 0$. Esta transformación es unitaria al actuar sobre una función de y , dando como resultado:

$$e^{\{ia(-i\frac{\partial}{\partial y})\}} f(y) = f(y+a). \quad (2.57)$$

Ahora, si utilizamos el cambio de variable $y = \log x$, tenemos $\frac{\partial}{\partial y} = x\frac{\partial}{\partial x}$. De manera que si trasladamos $y \rightarrow y+a$ vamos a tener

$$\log x \rightarrow \log x + a = \log(e^a x) \Rightarrow \lambda = e^a. \quad (2.58)$$

Entonces, con este cambio de variable, en lugar de trasladar, se re-escala x y podemos escribir el operador como:

$$\hat{O} = \exp\left(ax\frac{\partial}{\partial x}\right). \quad (2.59)$$

Queda ahora claro que el operador $x\frac{\partial}{\partial x}$ va a generar el re-escalamiento, pero hay un problema, este operador no es hermitiano. Esto se puede arreglar, primero utilizando la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} -i\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{2}\left\{x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right\} + \frac{1}{2}\left[x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right] \\ &= \frac{i}{2} + \frac{1}{2}\left\{x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right\} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Sustituyendo y aplicando a nuestra función f , obtenemos:

$$\begin{aligned} \exp\left(ia\left(\frac{i}{2} + \frac{1}{2}\left\{x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right\}\right)\right) f(\log x) &= f(\log x + a) \\ &= f(\log(xe^a)) \\ &= f(\log(x\lambda)) \\ &= e^{-a/2} e^{ia\left(\frac{1}{2}\left\{x, -i\frac{\partial}{\partial x}\right\}\right)} f(\log x) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Definiendo

$$g = f \circ \log x, \quad (2.62)$$

$$\hat{G} = \frac{1}{2} \left\{ x, -i \frac{\partial}{\partial x} \right\},$$

podemos escribirlo como:

$$e^{-a/2} e^{ia\hat{G}} g(x) = g(\lambda x) \Rightarrow e^{ia\hat{G}} g(x) = \sqrt{\lambda} g(\lambda x) \quad (2.63)$$

Entonces \hat{G} es el generador de la transformación y como $\hat{G}^\dagger = \hat{G}$, entonces $e^{ia\hat{G}}$ es unitario y re-escala la variable, pero esto solo puede ser si la misma función se re-escala con $\sqrt{\lambda}$. Por último, usando que $p = -i\partial_x$, el operador se escribe como:

$$\hat{O} = e^{-a/2} \exp \left\{ \frac{a}{2} \{x, \partial_x\} \right\} = \lambda^{-1/2} \exp \left(\frac{i \log \lambda}{2} \{x, p\} \right). \quad (2.64)$$

Nótese que el cambio de variable y el re-escalamiento involucran un jacobiano distinto de uno, que está dado por $\sqrt{\lambda}$. Con estas consideraciones, podemos concluir que en (2.64) la parte unitaria es la exponencial que contiene el anticonmutador, mientras que $\sqrt{\lambda}$ es el factor jacobiano.

Ahora, si queremos conocer el efecto de este operador de compresión $e^{\frac{i}{2}\theta\{X,P\}}$ sobre la función de onda $\psi(x)$, vamos a aplicarlo sobre un estado $|\psi\rangle$.

$$|\tilde{\psi}\rangle = e^{\frac{i\theta}{2}\{x,p\}} |\psi\rangle \quad (2.65)$$

Deducimos que:

$$\begin{aligned} \langle x | \tilde{\psi} \rangle &= \tilde{\psi}(x) = \left\langle x \left| e^{\frac{i\theta}{2}\{x,p\}} \right| \psi \right\rangle \\ &= e^{\frac{i\theta}{2}\{x,p\}} \psi(x) = e^{\frac{i\theta}{2}\{x, -i\partial_x\}} \psi(x) \\ &= e^{\frac{i\theta}{2}(-i)(x\partial_x + \partial_x x)} \psi(x) = e^{\frac{i\theta}{2}(-i)(2x\partial_x + 1)} \psi(x) \\ &= e^{\frac{\theta}{2}} e^{\frac{\partial}{\partial \log x}} \psi \left(e^{\log x} \right) = e^{\frac{\theta}{2}} \psi \left(e^{\log(x+\theta)} \right) \\ &= e^{\frac{\theta}{2}} \psi \left(e^\theta x \right) = \sqrt{\lambda} \psi(\lambda x). \end{aligned} \quad (2.66)$$

De esta forma el factor $\sqrt{\lambda}$ preserva la normalización:

$$\int dx |\psi(x)|^2 = 1 = \int dx |\tilde{\psi}(x)|^2. \quad (2.67)$$

Por lo tanto, regresando a nuestras variables transformadas y recordando que el factor de escala es $\lambda = e^\theta$, el operador que estábamos buscando es:

$$S_\theta \longrightarrow e^{\frac{i}{2}\theta\{X,P\}}. \quad (2.68)$$

Lo siguiente es escribir nuestro resultado en términos de los nuevos operadores de creación B^\dagger y aniquilación B . Desarrollando:

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{2}\theta\{X,P\}} &= e^{\frac{i}{2}\theta\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(B+B^\dagger), \frac{1}{\sqrt{2}i}(B-B^\dagger)\right\}} \\ &= e^{\frac{\theta}{4}\{2B^2-2B^\dagger+B^\dagger B-BB^\dagger+BB^\dagger-B^\dagger B\}} \\ &= e^{\frac{\theta}{2}\{B^2-B^{\dagger 2}\}}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Ya que tenemos todas las piezas necesarias, vamos a yuxtaponer la acción de estos operadores, aplicándolos sucesivamente sobre un estado cualquiera $|\psi\rangle$, dando como resultado:

$$|\tilde{\psi}\rangle = U|\psi\rangle = e^{iB^\dagger B\omega t} e^{\frac{\theta}{2}\{B^2-B^{\dagger 2}\}} e^{-iB^\dagger B\Omega t} |\psi\rangle. \quad (2.70)$$

Esta es la forma en la que se transforman los estados: Tenemos la aplicación inicial de una rotación, seguida de un re-escalamiento y finalmente una rotación inversa. Como podemos notar, los tres operadores tienen una dependencia bilineal en B y B^\dagger . Particularmente, estamos interesados en el estado base del oscilador y de (2.70) podemos expresar el nuevo estado de vacío como:

$$|\tilde{0}\rangle = e^{iB^\dagger B\omega t} e^{\frac{\theta}{2}\{B^2-B^{\dagger 2}\}} e^{-iB^\dagger B\Omega t} |0\rangle. \quad (2.71)$$

Fácilmente ya podemos ver que el nuevo vacío $|\tilde{0}\rangle$ no será idéntico al viejo estado $|0\rangle$. Ahora buscamos expresar $|0\rangle$ en términos de los modos $|\tilde{n}\rangle$ correspondientes al nuevo vacío $|\tilde{0}\rangle$. Para esto vamos a invertir la transformación y agregamos un conjunto completo de funciones $\sum_n |\tilde{n}\rangle\langle\tilde{n}|$:

$$|0\rangle = U^\dagger|\tilde{0}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \tilde{n} \left| e^{iB^\dagger B\Omega t} e^{\frac{\theta}{2}\{B^{\dagger 2}-B^2\}} e^{-iB^\dagger B\omega t} \right| \tilde{0} \right\rangle |\tilde{n}\rangle. \quad (2.72)$$

Vamos a utilizar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} B^\dagger|\tilde{n}\rangle &= \sqrt{n+1}|\widetilde{n+1}\rangle, \\ B|\tilde{n}\rangle &= \sqrt{n}|\widetilde{n-1}\rangle, \\ |\tilde{n}\rangle &= \frac{(B^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|\tilde{0}\rangle. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Con ellas, vemos que:

$$\begin{aligned} \exp(-i\hat{B}^\dagger\hat{B}\omega t)|\tilde{0}\rangle &= |\tilde{0}\rangle, \\ \langle\tilde{n}|\exp(i\hat{B}^\dagger\hat{B}\Omega t) &= \exp(i\Omega tn)\langle\tilde{n}|. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Por lo tanto, nos queda:

$$|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\Omega t} \langle \tilde{n} | e^{\theta(\hat{B}^{\dagger 2} - \hat{B}^2)/2} | \tilde{0} \rangle | \tilde{n} \rangle \quad (2.75)$$

Tenemos los elementos de matriz del operador $e^{\theta(\hat{B}^{\dagger 2} - \hat{B}^2)/2}$ y para encontrar el coeficiente C_n existen varios métodos. Uno de estos es introduciendo un conjunto completo en una integral de funciones $\psi_n(\eta)$ del oscilador armónico. De esta manera, nos queda todo en términos de una integral de traslape

$$\langle \tilde{n} | e^{-\theta(\hat{B}^{\dagger 2} - \hat{B}^2)/2} | \tilde{0} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \psi_n(e^{-\theta/2}\eta) \psi_n(e^{+\theta/2}\eta). \quad (2.76)$$

Otro camino es usar la inversa y determinar nuestro coeficiente C_n con una relación de recursión. Esto se hace imponiendo

$$\begin{aligned} \hat{A}|0\rangle = 0 &= (\alpha\hat{B} + \beta\hat{B}^{\dagger})|0\rangle = \sum_{\tilde{n}} C_n (\alpha\hat{B} + \hat{B}^{\dagger}\beta) |\tilde{n}\rangle \\ &= \sum_{\tilde{n}} C_n (\alpha\sqrt{\tilde{n}}|\tilde{n}-1\rangle + \beta\sqrt{\tilde{n}+1}|\tilde{n}+1\rangle) \\ &= \sum_{\tilde{n}} (\alpha\sqrt{\tilde{n}+1}C_{n+1} + \beta\sqrt{\tilde{n}}C_{n-1}) |\tilde{n}\rangle \end{aligned} \quad (2.77)$$

De esta manera encontramos una relación de recurrencia para C_n , de orden 2 en el índice n . Esto quiere decir que C_n queda en términos de C_0 y por paridad todos los $C_{2n+1} = 0$.

En este trabajo vamos a utilizar un tercer camino, usando una fórmula tipo Zassenhaus para operadores cuadráticos no lineales. La virtud que se encuentra en este método es la obtención directa la normalización del estado. Con la fórmula de Zassenhaus podemos separar términos del tipo $\hat{B}^{\dagger} - \hat{B}$, pero en nuestro problema el argumento es de la forma $\hat{B}^{\dagger 2} - \hat{B}^2$. Por lo tanto, vamos a recurrir a la fórmula Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) para los operadores bilineales del oscilador armónico encontrada en [20]:

$$\begin{aligned} S(z) &= \exp \left[\frac{1}{2} (zB^{\dagger}B^{\dagger} - \bar{z}BB) \right] \\ &= \exp \left[\frac{1}{2} (e^{i\phi} \tanh r) B^{\dagger}B^{\dagger} \right] \exp \left[-2(\ln \cosh r) \left(\frac{1}{2}B^{\dagger}B + \frac{1}{4} \right) \right] \exp \left[-\frac{1}{2} (e^{i\phi} \tanh r) BB \right], \end{aligned}$$

donde $S(z)$ es el operador de *squeeze* con argumento complejo $z = re^{i\phi}$. Para nuestro caso $z = \bar{z} = -\theta = |1|e^{i\phi} \Rightarrow e^{i\phi} = -1, r = \theta$. Aplicando la fórmula a (2.75), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{n} | \exp \left[-\theta \left(\hat{B}^{\dagger 2} - \hat{B}^2 \right) / 2 \right] | \tilde{0} \rangle &= \langle \tilde{n} | \exp \left[\frac{1}{2} \left(-\tanh \theta \hat{B}^{\dagger} \hat{B}^{\dagger} \right) \right] \exp \left[-2(\ln \cosh \theta) \left(\frac{1}{2} \hat{B}^{\dagger} \hat{B} + \frac{1}{4} \right) \right] \\
&\quad \times \exp \left[\left(\frac{1}{2} \tanh \theta \right) B B \right] | \tilde{0} \rangle \\
&= \langle \tilde{n} | \exp \left[-\frac{\tanh \theta}{2} \hat{B}^{\dagger} \hat{B}^{\dagger} \right] \exp \left[-2 \ln \cosh \theta \left(\frac{1}{4} \right) \right] (1) | \tilde{0} \rangle \\
&= \exp \left[-\frac{1}{2} \ln \cosh \theta \right] \langle \tilde{n} | \exp \left(-\frac{\tanh \theta}{2} \hat{B}^{\dagger} \hat{B}^{\dagger} \right) | \tilde{0} \rangle
\end{aligned}$$

En este desarrollo hemos usado que $e^{c\hat{B}}|\tilde{0}\rangle = |\tilde{0}\rangle$. El siguiente paso es desarrollar en serie la exponencial que se encuentra en el bracket:

$$\begin{aligned}
&\exp \left[-\frac{1}{2} \ln \cosh \theta \right] \langle \tilde{n} | \exp \left(-\frac{\tanh \theta}{2} \hat{B}^{\dagger} \hat{B}^{\dagger} \right) | \tilde{0} \rangle \\
&= \exp \left[-\frac{1}{2} \ln \cosh \theta \right] \langle \tilde{n} | 1 - \frac{\tanh \theta \hat{B}^{\dagger} \hat{B}^{\dagger}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\tanh \theta \hat{B}^{\dagger} \hat{B}^{\dagger}}{2} \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{\tanh \theta \hat{B}^{\dagger} \hat{B}^{\dagger}}{2} \right)^3 + \dots | \tilde{0} \rangle \\
&= \exp \left[-\frac{1}{2} \ln \cosh \theta \right] \langle \tilde{n} | \left\{ |\hat{0}\rangle - \frac{\tanh \theta}{2} \sqrt{2!} |\tilde{2}\rangle + \frac{(\tanh \theta)^2}{8} \sqrt{4!} |\tilde{4}\rangle - \frac{(\tanh \theta)^3}{48} \sqrt{6!} |\tilde{6}\rangle + \dots \right\} \\
&= \exp \left[-\frac{1}{2} \ln \cosh \theta \right] \langle \tilde{n} | \sum_{m=0}^{\infty} (-\tanh \theta / 2)^m \frac{\sqrt{(2m)!}}{m!} |\tilde{2m}\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\cosh \theta}} \left(-\frac{\tanh \theta}{2} \right)^{n/2} \frac{n!}{(n/2)!}
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Esto es válido cuando n es par y cuando n es impar obtenemos un cero. Agregando esto último a (2.75), finalmente podemos concluir que el viejo vacío $|0\rangle$ se puede escribir como:

$$|0\rangle = \sum_n C_n |\tilde{n}\rangle, \tag{2.79}$$

$$C_n = \frac{e^{in\Omega t}}{\sqrt{\cosh \theta}} \begin{cases} \left(-\frac{\tanh \theta}{2} \right)^{n/2} \frac{\sqrt{n!}}{(n/2)!}, & \text{si } n \text{ par} \\ 0, & \text{si } n \text{ impar.} \end{cases} \tag{2.80}$$

... Este resultado final es muy importante, porque $|C_n|^2$ es la probabilidad de transición entre el viejo estado base y los nuevos números de ocupación de cuantos. Tenemos una probabilidad estática, debido a que el término $e^{in\Omega t}$ no va a parecer al tomar la norma cuadrada, dando un resultado que no depende del tiempo.

No debemos olvidar que e^θ esconde en su definición el parámetro de fuerza a , ya que $e^\theta = \sqrt{\omega/\sqrt{\omega^2 - a^2/4}}$. De esta manera, hemos obtenido una relación entre el número de excitaciones producidas en el oscilador y el factor de la fuerza viscosa a . Esto significa que podemos sintonizar el ángulo θ y regresar al antiguo vacío, porque $e^\theta = 1 \Rightarrow \Omega = \omega$. Esto nos dice que θ va a ser una forma indirecta de controlar la aceleración.

En (2.80) se muestra que solo están permitidas las transiciones entre estados con número n par. La explicación para este efecto es la transformación de escala; tenemos un potencial originado por la introducción de una fuerza dependiente de la velocidad. Como se observa en la figura 3.1, inicialmente se tiene una parábola descrita por $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$ y debido a la introducción de una fuerza viscosa la parábola va a abrirse en la coordenada y , manteniendo fijo su punto de origen.

Tenemos un nuevo potencial de oscilador armónico con frecuencia renormalizada $V(x) = \frac{1}{2}\Omega^2 y^2$, donde $\Omega^2 \equiv \omega^2 - (a/2)^2$. La parábola no va a sufrir cambios en su paridad y esto implica que solo van a estar conectados los estados de excitación con número par. Los nuevos estados $|\tilde{n}\rangle$ estarán rescalados debido a que la frecuencia se ha renormalizado y si el origen permanece en cero esperamos que la nueva combinación lineal preserve la paridad del estado inicial. Por lo tanto, si queremos transformar el estado de vacío que es par, más vale que la suma de combinaciones lineales sea par.

En la siguiente sección vamos a ver cómo el resultado (2.80) nos lleva a determinar

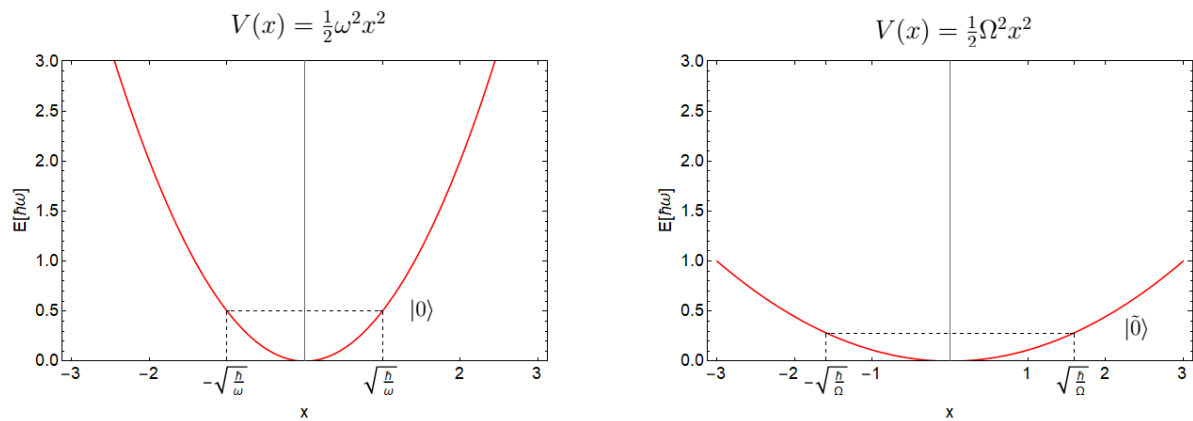


Figura 2.1: Efecto en el potencial oscilador armónico debido a la fuerza viscosa.

un temperatura efectiva en una interpretación térmica del fenómeno.

2.4. Distribución térmica y número de ocupación en funciones de la temperatura efectiva

A continuación vamos a desarrollar la distribución de probabilidad para exponer las curvas de producción de partículas en función de la energía y para varios valores del parámetro aceleración.

Retomando el resultado (2.80), nos encontramos con una función de distribución en términos de una variable discreta, es decir, en términos del número de ocupación n . Para n par tenemos:

$$C_n = \frac{e^{in\Omega t}}{\sqrt{\cosh \theta}} \left(\frac{-\tanh \theta}{2} \right)^{n/2} \frac{\sqrt{n!}}{(n/2)!}, \quad (2.81)$$

$$|C_n|^2 = \frac{1}{\cosh \theta} \left(\frac{-\tanh \theta}{2} \right)^n \frac{n!}{((n/2)!)^2}. \quad (2.82)$$

Este resultado expone una distribución de probabilidad discreta dependiente de $n = 0, 2, 4, 6, \dots$, la cual cumple con:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 = 1. \quad (2.83)$$

Si queremos remplazar el número de cuantos n por la variable de energía E hay que tener presente un punto importante. n es una variable discreta y si utilizamos la relación lineal $n = E/\Omega - 1/2$, vamos a necesitar que la diferencia entre niveles energéticos sea muy pequeña. De este manera el espaciamiento entre niveles va a tender a cero y la energía se vuelve casi un continuo. En este límite semiclásico $\hbar \rightarrow 0$ y es equivalente a tomar valores pequeños de la frecuencia. Con esto en mente, vamos a reexpresar (2.82) con las siguientes igualdades:

$$\frac{n!}{((n/2)!)^2} = \frac{\Gamma(n+1)}{[\Gamma(\frac{n}{2}+1)]^2} = \frac{\Gamma(E/\Omega + \frac{1}{2})}{[\Gamma(E/2\Omega + \frac{3}{4})]^2}. \quad (2.84)$$

Notemos que estamos usando la nueva frecuencia Ω del oscilador rescalado. Por conveniencia vamos a retomar la antigua variable $e^\theta = \sqrt{\Omega/\omega}$.

$$\frac{1}{\cosh \theta} = \frac{2}{e^{-\theta} + e^\theta} = \frac{2}{\sqrt{\frac{\omega}{\Omega}} + \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}}} = \frac{2\sqrt{\Omega\omega}}{\omega + \Omega} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{2} \tanh \theta\right)^n &= \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\Omega - \omega}{\Omega + \omega}\right)\right)^n \\
&= \exp \left[n \ln \left(\frac{1}{2} \frac{\omega - \Omega}{\omega + \Omega} \right) \right] \\
&= \exp \left[\left(\frac{E}{\Omega} - \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{1}{2} \frac{\omega - \Omega}{\omega + \Omega} \right) \right] \\
&= \exp \left[- \left(\frac{E}{\Omega} - \frac{1}{2} \right) \ln \left(2 \frac{\omega + \Omega}{\omega - \Omega} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Es importante verificar que el argumento en el logaritmo sea cantidad positiva, en nuestro caso todo funciona correctamente, porque a es real y $\omega \geq \Omega$. Sustituyendo las expresiones encontradas en (2.82), la probabilidad de tener n partículas con energía E en función de la magnitud de la fuerza a es:

$$\begin{aligned}
P_a(E) &= \frac{2\sqrt{\Omega\omega}}{\omega + \Omega} \frac{\Gamma(E/\Omega + \frac{1}{2})}{[\Gamma(E/2\Omega + \frac{3}{4})]^2} \exp \left[- \left(\frac{E}{\Omega} - \frac{1}{2} \right) \ln \left(2 \frac{\omega + \Omega}{\omega - \Omega} \right) \right] \\
&= \frac{2\sqrt{\omega} (\omega^2 - (a/2)^2)^{1/4}}{\omega + (\omega^2 - (a/2)^2)^{1/2}} \frac{\Gamma \left(\frac{E}{\sqrt{\omega^2 - (a/2)^2}} + \frac{1}{2} \right)}{\left[\Gamma \left(\frac{E}{2\sqrt{\omega^2 - (a/2)^2}} + \frac{3}{4} \right) \right]^2} \times \\
&\quad \exp \left[- \left(\frac{E}{\sqrt{\omega^2 - (a/2)^2}} - \frac{1}{2} \right) \ln \left(2 \frac{\omega + (\omega^2 - a^2/4)^{1/2}}{\omega - (\omega^2 - a^2/4)^{1/2}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.87}$$

En la figura 2.2 se presenta la gráfica correspondiente a esta distribución de probabilidad para diferentes valores de a . Recordemos que elegimos unidades donde $c = \hbar = 1$, de manera que la energía en el eje de las abscisas tiene unidades de $\hbar\omega$. Por otra parte, en el eje de las ordenadas, la probabilidad es adimensional y tiene unidades arbitrarias ($a.u.$).

$$[\hbar] = J \cdot s, \quad [\omega] = 1/s. \tag{2.88}$$

En la gráfica se observa que mientras más grande es el valor de a , las curvas tienden a moverse más hacia la izquierda. Esto tiene sentido, porque se espera que si $a \rightarrow 0$ no habrá producción de partículas.

La ecuación (2.87) puede tratarse usando una aproximación de Stirling, llevándonos a una ley de tipo Boltzmann. Para valores grandes de n ($n \geq 10$) podemos utilizar la aproximación $\ln n! \simeq n \ln n - n$ en el término (2.85), llevándonos a:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{[\Gamma(\frac{n}{2}+1)]^2} = \frac{n!}{(\frac{n}{2}!)^2} \simeq \frac{n^n e^{-n}}{\left[(\frac{n}{2})^{n/2} e^{-\frac{n}{2}} \right]^2} = 2^n = \exp \left[\left(\frac{E}{\Omega} - \frac{1}{2} \right) \ln(2) \right] \tag{2.89}$$

Introduciendo este resultado en $P_a(E)$, este se expresa como:

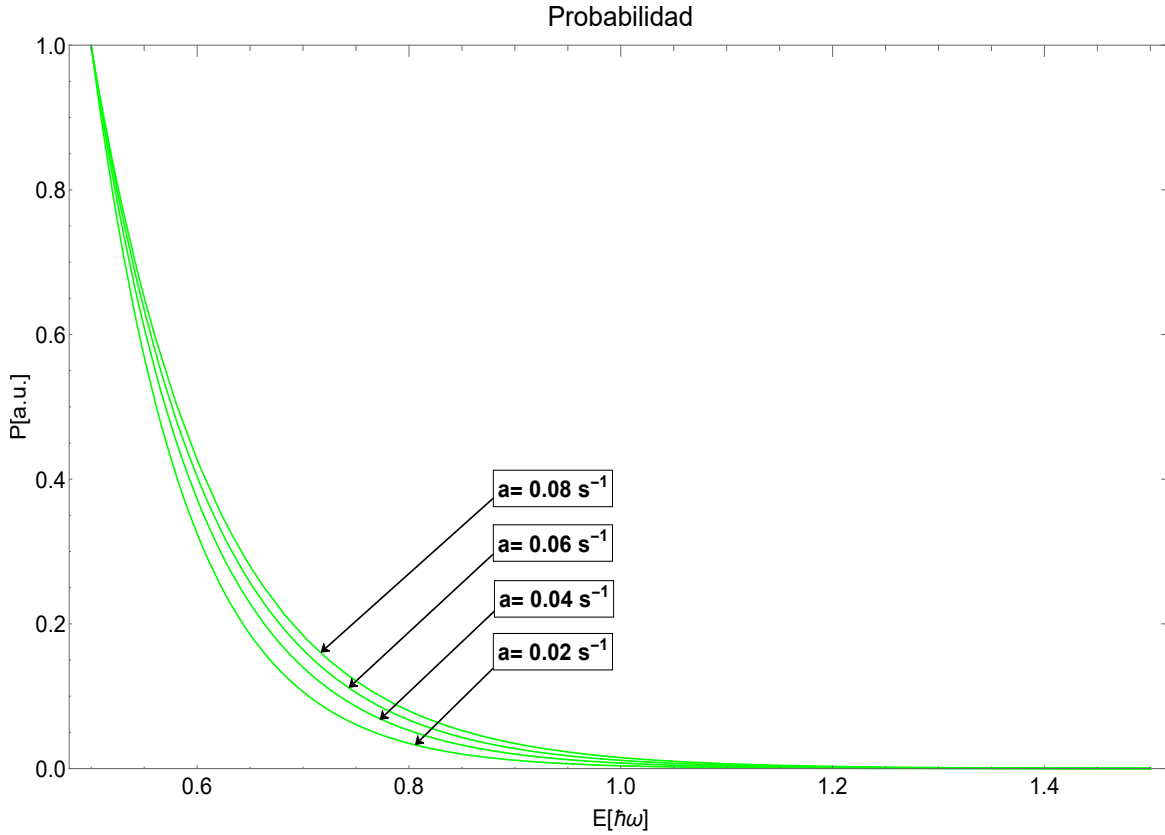


Figura 2.2: Curvas de producción de partículas en función de la energía

$$\begin{aligned}
 P_a(E) &= \frac{2\sqrt{\Omega\omega}}{\omega + \Omega} \exp \left[\left(\frac{E}{\Omega} - \frac{1}{2} \right) \ln(2) - \left(\frac{E}{\Omega} - \frac{1}{2} \right) \ln \left(2 \frac{\omega + \Omega}{\omega - \Omega} \right) \right] \\
 &= \frac{2\sqrt{\Omega\omega}}{\omega + \Omega} \exp \left[-\frac{E}{\Omega} \ln \left(\frac{\omega + \Omega}{\omega - \Omega} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\omega + \Omega}{\omega - \Omega} \right) \right] \\
 &= 2\sqrt{\frac{\Omega\omega}{\omega^2 - \Omega^2}} \exp \left[-E \frac{1}{\Omega} \ln \left(\frac{\omega + \Omega}{\omega - \Omega} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.90}$$

A continuación, en la figura 2.4 se muestran las curvas correspondientes a nuestra nueva densidad de probabilidad después de aplicar la aproximación de Stirling. Mientras que en la figura 2.4 se muestra la comparación entre las dos familias de distribuciones $P_a(E)$ para los mismos cuatro valores de a .

Tenemos cuatro curvas rojas que representan la producción de partículas en función de la energía usando el método de la aproximación de Stirling, junto con la familia de curvas verdes que corresponden a la no aproximación. Nótese que la aproximación de Stirling funciona mejor cuando los valores de n son grandes, la desviación aumenta para valores cada vez más pequeños. De esta manera podemos saber que tan fiable es nuestra aproximación de Stirling para valores grande de n . Como agregado, en el cuadro interior se usa una escala logarítmica en la gráfica para apreciar que la diferencia es insignificante para nuestros propósitos.

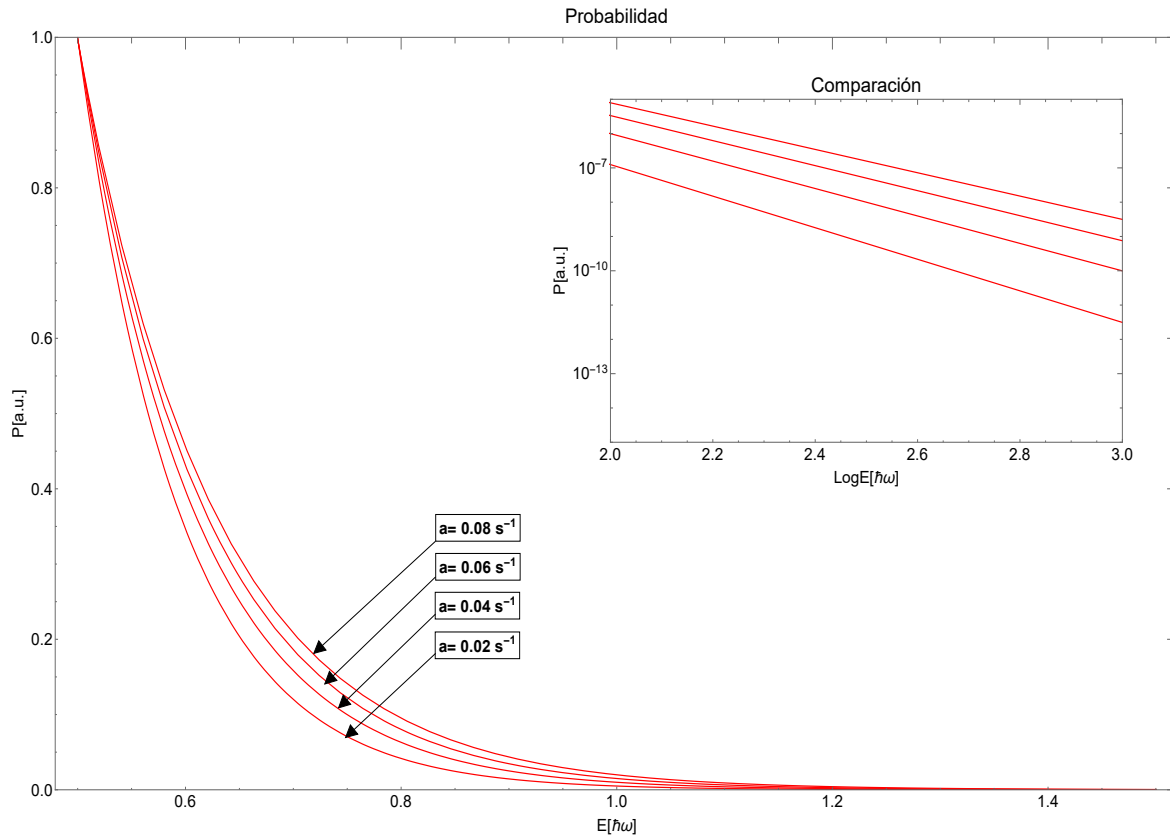


Figura 2.3: Curvas de producción de partículas en función de la energía, utilizando la aproximación de Stirling

Para terminar de confirmar que la aproximación funciona correctamente agregamos una gráfica más donde se muestra la diferencia entre ambas familias de curvas, figura (2.5). Observamos que las discrepancias más fuertes ocurren para valores menores a $\hbar\omega/2$, pero esto es un problema de definición de variables, porque la energía no puede empezar en cero. En esta realización $\hbar\omega = 1$ y las aproximaciones son buenas para todo el intervalo a la derecha de $\hbar\omega/2$. Por lo tanto, en este análisis del error se ratifica que para número de ocupación pequeños las diferencias son más notorias, pero el resto del rango la aproximación tiene un buen comportamiento.

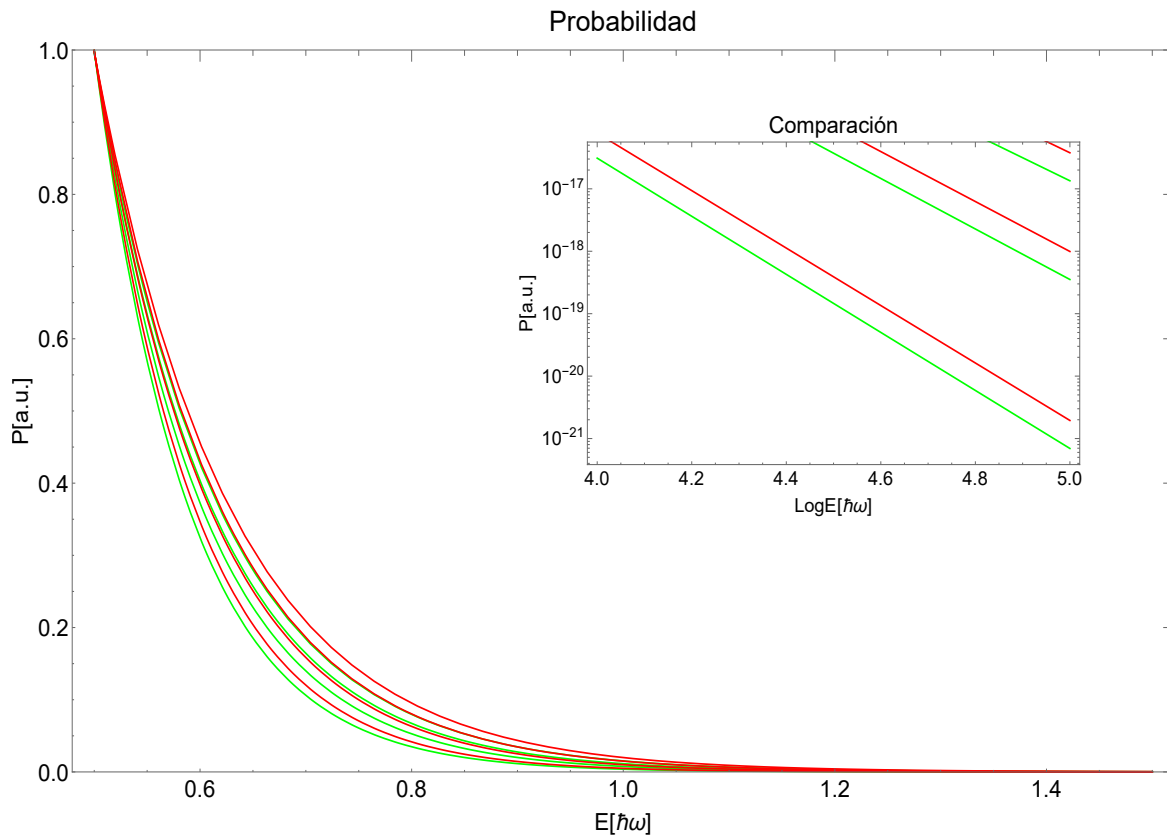


Figura 2.4: Comparación de la familia de curvas de producción de partículas en función de la energía. P es una probabilidad y a.u pueden representar conteos de partículas detectadas en un experimento

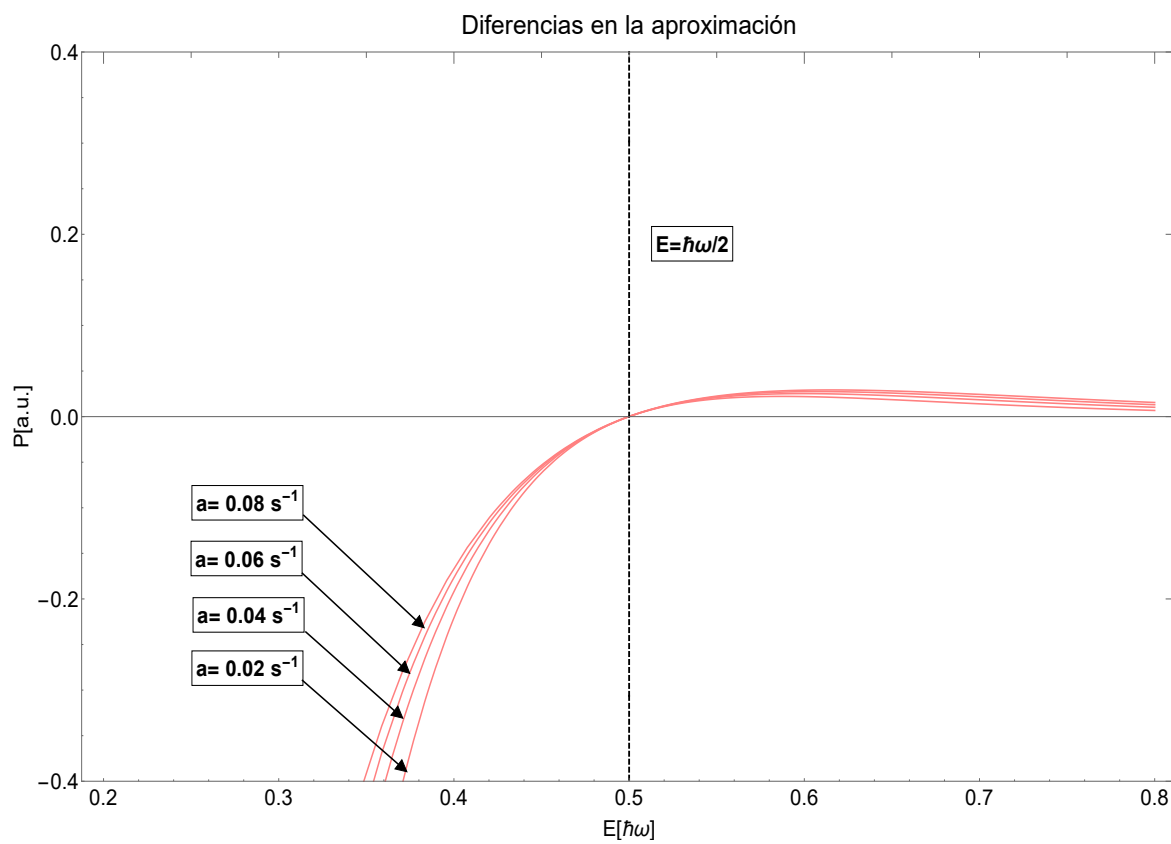


Figura 2.5: Diferencia entre las curvas de producción con aproximación y sin aproximación de Stirling. La región $E < \hbar\omega/2$ está prohibida (primer y tercer cuadrante).

De (2.90) podemos deducir que nuestra densidad de probabilidad en función de la energía E tiene la forma de un factor de Boltzmann:

$$P_a(E) = \beta e^{-\beta E} \quad (2.91)$$

$$\text{Con } \beta \equiv \frac{1}{\Omega} \ln \left(\frac{\omega + \Omega}{\omega - \Omega} \right) \quad (2.92)$$

Pero hay que dejar claro que esta forma para $P_a(E)$ es cierta solo con la aproximación de Stirling, sin su utilización tendríamos una corrección a β dependiente de la energía. Pero como hemos exhibido en las gráficas anteriores, estas correcciones solo afectarían a los niveles más bajos de energía. Con este argumento, es sencillo definir una expresión temperatura que va a depender de la frecuencia de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\Omega}{k_B \ln \left(\frac{\omega + \Omega}{\omega - \Omega} \right)} \\ &= \frac{\sqrt{(\omega^2 - (a/2)^2)}}{k_B \ln \left(\frac{\omega + (\omega^2 - a^2/4)^{1/2}}{\omega - (\omega^2 - a^2/4)^{1/2}} \right)} \end{aligned} \quad (2.93)$$

En la figura 2.6 se presentan las gráficas de esta temperatura efectiva en contra de la intensidad de la fuerza aplicada a , para algunos valores fijos de la frecuencia ω . Además, hemos elegido las unidades de tal manera que $k_B = 1$.

Este factor a es una medida del tiempo de vida media del estado y tiene unidades de 1/tiempo. Recordemos que a es la intensidad de la fuerza viscosa y si multiplicamos por la constante de velocidad c vamos a obtener la aceleración del observador.

Se puede notar que cada curva termina en el valor $a = 2\omega$, esto es debido a que desde el inicio hemos definido $0 < \Omega^2$. Está justificado porque nuestro interés solo está en una ecuación de tipo oscilador armónico. Mientras mayor sea a , la trampa de potencial se abrirá más, hasta llegar al punto crítico $\Omega = 0$, que significa un potencial abierto totalmente, una partícula libre.

Por otro lado, cuando rebasamos la aceleración crítica y $\Omega^2 < 0$, obtenemos un oscilador invertido, es una fuerza repulsiva. Pero este esquema de cuantización ya no proporciona estados ligados, ahora tenemos estados dispersivos. En consecuencia, la energía no estará cuantizada y no se tendrán cuantos que representen un número de partículas ya que tenemos variables continuas.

Este régimen posterior a la aceleración crítica, ya no presenta relación alguna con la ecuación de Klein-Gordon en espacio curvo. Recordemos que originalmente, la frecuencia ω presenta una analogía con la masa que aparece en la ecuación K-G, esto significa que en el

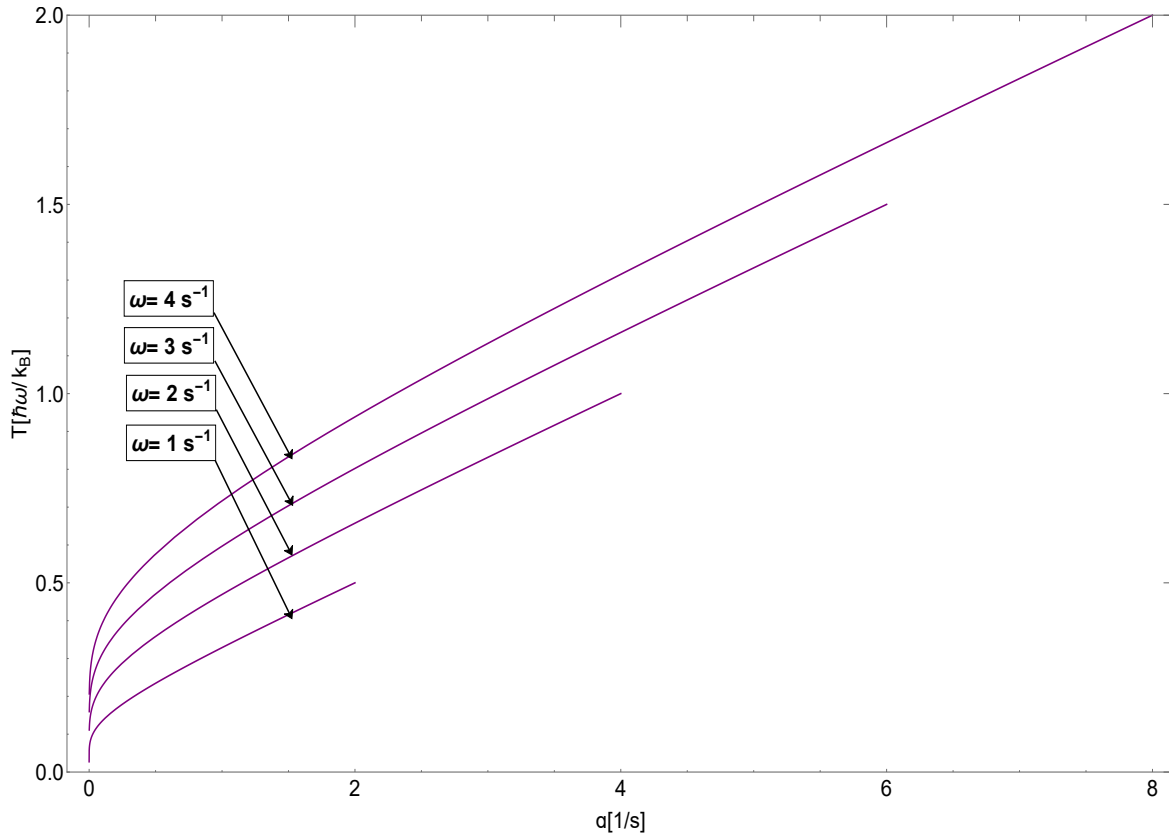


Figura 2.6: Curvas de temperatura en función del parámetro de aceleración a .

caso de Rindler también tenemos una aceleración crítica, igual a la energía en reposo. Después de este límite estaríamos trabajando con una masa negativa.

Entonces, la gráfica T contra a se corta en un valor crítico, aun existe una física correspondiente al caso $2\omega < a$, pero debido a su naturaleza y su desconexión con el tema a tratar, ya no es de nuestro interés.

En el caso límite $\omega \gg \Omega$, utilizando el desarrollo en serie de Taylor, el denominador será

$$\ln\left(\frac{\omega + \Omega}{\omega - \Omega}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Omega}{\omega}\right) - \ln\left(1 - \frac{\Omega}{\omega}\right) \rightarrow \left(\frac{\Omega}{\omega}\right) - \left(-\frac{\Omega}{\omega}\right). \quad (2.94)$$

Dando como resultado una dependencia del tipo:

$$T = C\omega \approx Ca/2, \quad (2.95)$$

$$\text{Con } C = \frac{1}{2k_B}.$$

La temperatura asociada ahora es proporcional a la frecuencia original ω , es decir, la temperatura va a depender de forma importante en el punto de partida y no en la frecuencia Ω en la que aterrizamos. Esto se entiende mejor con el parámetro $a/2$, que contrarresta casi

por completo la frecuencia original, haciendo $\Omega \rightarrow 0$. Entonces, en este límite, se tiene $\omega \approx a/2$ y la temperatura efectiva estará controlada completamente por la intensidad de la perturbación $a/2$.

Es interesante el hecho de que en la región asintótica de la gráfica la temperatura muestra una dependencia lineal en a para todos los valores. Sabemos que si multiplicamos nuestra temperatura por la constante de Boltzmann k_B obtenemos la energía térmica del sistema, por lo tanto podemos decir que para altas energías, la aceleración controla linealmente la energía térmica del baño de partículas.

Por otra parte, en el caso límite $\omega \rightarrow \Omega$, que significa ausencia de una fuerza de fricción $a \rightarrow 0$, nos encontramos con:

$$\ln \left(\frac{\omega + \Omega}{\omega - \Omega} \right) \rightarrow \infty \quad (2.96)$$

$$T \rightarrow 0.$$

Esto tiene sentido porque a nivel de la distribución de probabilidad es equivalente a $P_a(E) \rightarrow 0$. Lo que quiere decir que no hay probabilidad de transición entre estados, excepto en el caso $E = 0$, es decir, tenemos una singularidad en $E = 0$ y en el resto obtenemos un cero.

Hay que aclarar que en la región de temperatura cero, no estamos alcanzando una temperatura de cero absoluto en nuestro campo de radiación, en realidad una temperatura cero en este estudio significa que no hay fluctuaciones de campo en los alrededores, es decir una ausencia del mismo campo.

Es de interés encontrar las primeras correcciones en la temperatura cuando $a \rightarrow 0$. Para esto vamos a desarrollar β utilizando una expansión en series de Taylor.

$$\beta = \frac{1}{\Omega} \log \left(\frac{\omega + \Omega}{\omega - \Omega} \right),$$

$$\omega - \Omega = \omega - \sqrt{\omega^2 - (a/2)^2} \simeq \omega - \left(\omega - \frac{1}{2} \frac{(a/2)^2}{\omega} - \frac{1}{8} \frac{(a/2)^4}{\omega^3} + \dots \right).$$

Con este desarrollo podemos aproximar los siguiente términos:

$$\omega - \Omega \simeq \frac{a^2}{8w}, \quad \omega + \Omega \simeq 2w - \frac{a^2}{8w}. \quad (2.97)$$

Sustituyendo en β y posteriormente tomando $a \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
\beta &\simeq \frac{1}{w - \frac{a^2}{8w}} \ln \left[\frac{2w - a^2/8w}{a^2/8w} \right] \\
&= \frac{8\omega}{8\omega^2 - a^2} (\ln(2\omega - a^2/8w) - \ln(a^2/8w)) \\
&= \frac{8\omega}{8\omega^2 - a^2} \left(\ln(2\omega) + \ln\left(1 - \frac{a^2}{16\omega^2}\right) - \ln\left(\frac{a^2}{8\omega}\right) \right) \\
&= \frac{1}{\omega} \left(\ln(2\omega) - \ln\left(\frac{a^2}{8\omega}\right) \right) \\
&= \frac{1}{\omega} \ln\left(\frac{16\omega^2}{a^2}\right).
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Por lo tanto, la temperatura se puede expresar como:

$$T = \frac{\omega}{\ln\left(\frac{16\omega^2}{a^2}\right)} \tag{2.99}$$

En relación con la mecánica estadística, el número de ocupación va a tener una conexión importante con un factor de Boltzmann. β está relacionado con un multiplicador de Lagrange, que es igual a $1/k_B T$. Entonces, podemos decir que el factor β está conectado con una temperatura efectiva en el sistema. Con este razonamiento se plantea que un observador acelerado va percibir una distribución de partículas como si se encontrara en un baño térmico, donde la temperatura será dependiente del parámetro de aceleración. Pero hay que tener cautela a la hora de conectar el problema con la mecánica estadística, porque hasta ahora no hemos involucrado un ensamble estadístico de partículas.

Capítulo 3

Discusión Física y Conclusiones

3.1. Contraparte clásica

Una aseveración importante que se debe destacar es la ausencia de una contraparte clásica para el efecto Unruh. Vamos a ver que los osciladores clásicos no podrán presentar el fenómeno de producción de cuantos bajo una perturbación amortiguante.

Durante este trabajo hemos expuesto la inherente analogía que existe entre la teoría de Klein-Gordon en espacio curvo y un oscilador cuántico con fuerza dependiente de la velocidad, por lo que se podría llegar a pensar que hay una posibilidad de encontrar una conexión clásica entre estos dos sistemas. Pero esto es una equivocación, la radiación de Unruh no tiene lugar en un sistema clásico y explicaremos las razones.

En el caso clásico tenemos inexistencia de operadores de creación \hat{a}^\dagger y aniquilación \hat{a} para el oscilador armónico. Por consiguiente, el número de partículas será una observable inherentemente cuántica, ya que este número es discreto. En el límite clásico, el número multiplicado por la constante de Planck arroja la acción del sistema, que es una variable necesariamente continua. A pesar de que un sistema no conservativo pueda ganar o perder acción a través de la variación de su energía, es importante cumplir con el principio de incertidumbre en el caso cuántico, mientras que en el clásico esto nunca es un problema. Veamos esto con más detalle.

Tenemos la inevitable relación de incertidumbre de Heisenberg, un principio que no tiene lugar en la física clásica. De este se establece que existe un límite en la precisión con la que podemos realizar la medición de dos observables conjugadas y este es el factor \hbar . Esto implica que al medir con exactitud la posición, el momento va a quedar totalmente indeterminado:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2. \tag{3.1}$$

Clásicamente, en un oscilador amortiguado, el sistema va a frenarse debido a la fuerza de fricción. Esto significa que la posición x y el momento p van a disminuir hasta eventualmente alcanzar el cero. Pero esto es imposible en la física cuántica, ya que el área del espacio fase no puede ser menor que $\hbar/2$, como se ve en la figura 3.1. Por una parte, en mecánica clásica el vacío es simplemente un punto en el espacio fase, implica que no hay evolución de ningún vector de estado. Mientras que en física cuántica el vacío tendrá fluctuaciones si el estado no es eigenestado del Hamiltoniano total.

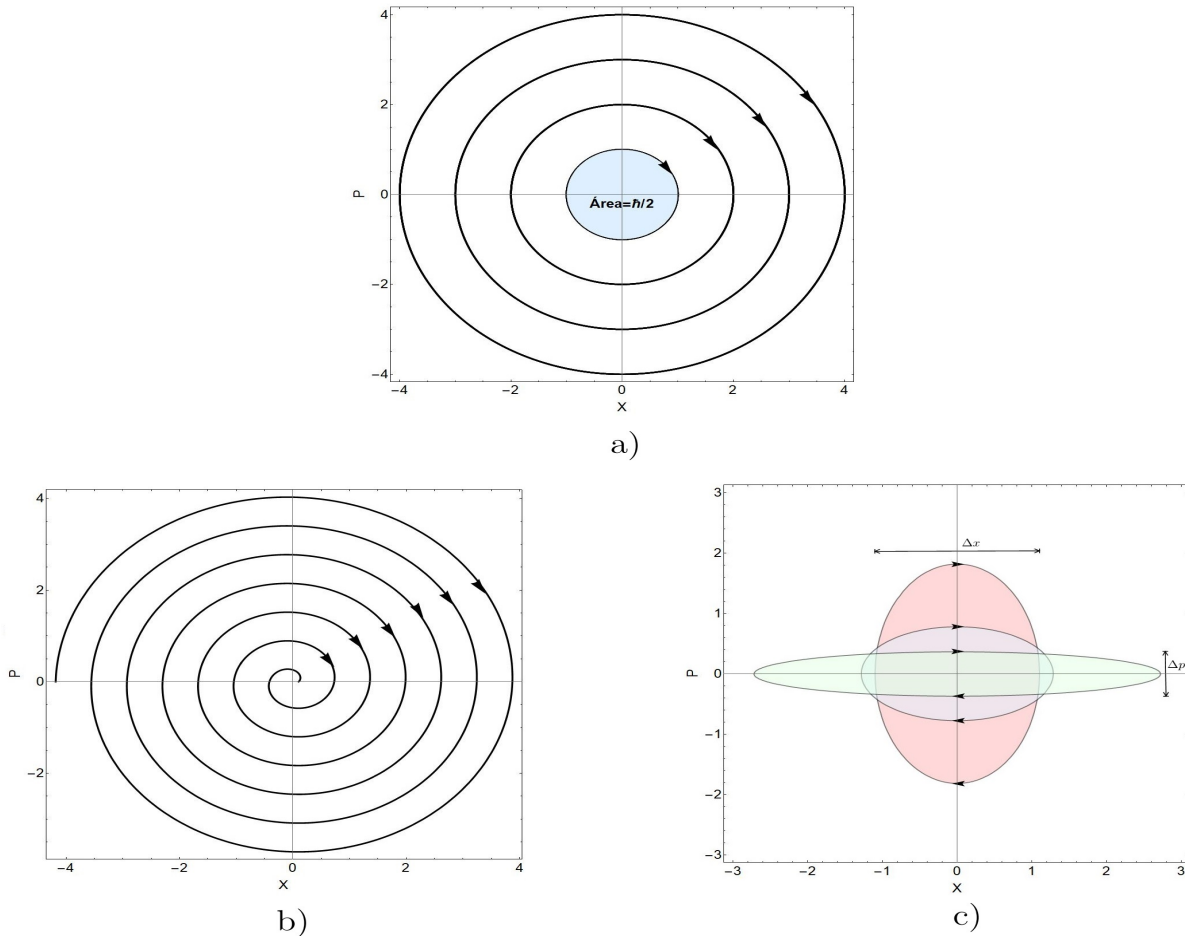


Figura 3.1: a) Espacio fase para un oscilador cuántico sin fricción b) Espacio fase para un oscilador clásico con fricción (subamortiguado) c) Espacio fase para un oscilador cuántico con fricción.

Una diferencia importante se puede ver reflejada en la evolución de la energía del sistema. Podemos estudiar la no conservación de la energía utilizando el Hamiltoniano cuántico de Caldirola-Kanai. Vamos a calcular el promedio en algún estado energético del oscilador sin fricción $|n\rangle$ utilizando por ejemplo, el desarrollo en el teorema del Virial cuántico (otra forma de hacer el cálculo es utilizando directamente los operadores de creación y aniquilación). Se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{H} \rangle &= \left\langle e^{-at} \frac{\hat{P}^2}{2} \right\rangle + \left\langle e^{+at} \omega^2 \frac{\hat{X}^2}{2} \right\rangle \\
&= e^{-at} \frac{E_n}{2} + e^{+at} \frac{E_n}{2} \\
&= \cosh(at) \frac{E_n}{2}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

De aquí, observamos que en general la energía aumenta a pesar de que el sistema sufre fricción. Se debe a las exponenciales dependientes de a que aparecen en la energía cinética y potencial. Aunque la energía cinética sea consumida hasta llegar a cero, la energía potencial se va a disparar a valores cada vez más altos, dando como resultado una energía total que crece con el paso del tiempo. Esto es así porque un paquete cuya energía cinética desaparezca será equivalente a una determinación completa de su momento, mientras que la posición se indetermina completamente dando lugar a un gran valor de V .

En la Figura 3.1 se puede apreciar la diferencia entre cada caso. Primero, en a) se muestra la evolución temporal para un oscilador armónico cuántico (con valores $m = \omega = 1$). Como sabemos, existe un área mínima igual a $\hbar/2$. Luego, en b) se expone el caso para un oscilador subamortiguado clásico. Este sistema traza una espiral, la cual evoluciona de manera que si $t \rightarrow \infty$, el área tiende a cero. Esto último hace contraste con la gráfica c), un oscilador armónico cuántico con fricción, donde el área encerrada no puede ser menor $\hbar/2$ durante toda la evolución temporal. Nos encontramos con un espacio fase donde se describe una parábola, en la cual se puede tener un incremento en el momento Δp que conlleva una disminución en Δx (parábola verde). También, de manera viceversa, es posible un incremento en Δx con Δp tendiendo a cero (parábola roja).

Así pues, mientras que en el oscilador armónico cuántico, aún con un solo modo, el número de cuantos es proporcional a una energía creciente, en su contraparte clásica, el oscilador amortiguado tendrá una energía decreciente en el tiempo y no se puede hablar de ningún tipo de producción de partículas. Esto es lo que está detrás de la ganancia de cuantos y por lo tanto, podemos concluir que el efecto Unruh es un fenómeno puramente cuántico.

3.2. Experimento pensado con radiación

En muchas investigaciones experimentales del efecto Unruh se ha ahondado en la importancia de los detectores de partículas, pero en este trabajo de tesis se ha buscado hacer hincapié en que la existencia del fenómeno es autónoma y no depende de la naturaleza de los detectores. En cambio, se insiste en que la realización del efecto depende de que el observador acelerado tenga acceso al estado de vacío inercial; de esta manera la nueva observable que se transforma junto con el marco acelerado, puede ser medida respecto al estado de viejo vacío.

En [21] encontramos una posible y notable realización experimental de la radiación Unruh, en la cual se muestra la importancia de esta afirmación.

En dicho artículo se estudia un arreglo experimental compuesto por un espejo polarizado en caída libre (movimiento acelerado), donde se observa el efecto Unruh correspondiente a un campo vectorial de fotones. Este se mueve a lo largo de una geodésica en un espacio que puede o no ser curvo.

En este experimento pensado se puede asegurar que el espejo tiene acceso al estado de vacío inercial porque estamos seguros de que el estado de reposo no se refleja ningún fotón y al acelerar bruscamente vamos a tener como resultado un campo de radiación efectivo. En consecuencia, este campo va a cambiar la trayectoria de movimiento del espejo debido a la presión de radiación en su contra.

Aunque en este trabajo se ha estudiado enteramente la radiación Unruh para campos escalares, se puede deducir que los procedimientos para la producción de cuantos también serán válidos para campos conformados por fermiones [26].

La preparación de este estado de vacío inercial radica en tener un experimento donde el espejo pueda iniciar su movimiento de manera abrupta, logrando así que los detectores (que se mueven junto con el espejo) sean obligados a operar en el estado de vacío inicial. Con esto evitamos que los detectores operen sobre el nuevo estado de vacío no inercial. Por lo tanto, si tomamos un promedio de la observable transformada N' respecto al estado de vacío sin transformar, tendremos una cantidad que no será cero, $\langle 0 | N' | 0 \rangle \neq 0$.

En el estudio de las ecuaciones de Maxwell en espacio curvo, nos vamos a encontrar con el potencial anómalo cuántico $-1/(\alpha x)^2$. Aunque en mecánica cuántica no podemos hablar realmente de una trayectoria, al estudiarlo nos topamos con un pozo de potencial con espectro continuo [22]. Un pozo cuya función cae tan rápido a $-\infty$ que los niveles están totalmente poblados, de modo que no hay un estado base y por lo tanto no es un problema estable. Sin embargo, estos estados solo los podemos percibir cuando podemos interactuar con ellos de alguna manera.

Cuando metemos una perturbación es cuando la situación cambia. Para detectar esta radiación lo que hacemos es meter el espejo polarizado. Con ello, se introduce una condición de frontera y la onda interactúa con el espejo. Este paso es el que va a ocasionar que el espectro de energía se vuelva discreto. Por lo que se concluye que una superficie reflejante puede generar la cuantización de las frecuencias.

Con este ejemplo se busca hacer constar que un promedio cuántico acepta la interpretación de un estado fijo previamente preparado y una observable transformada (perteneciente a un observador acelerado). En nuestra situación, el número de partículas es la observable transformada, ya que se transforma junto a los detectores, mientras que el estado previamen-

te preparado será el vacío inercial, que se consigue partiendo abruptamente del reposo en ausencia de radiación.

3.3. Osciladores cuánticos con fuerza viscosa en la práctica

Una vez revisada la parte teórica, nos proponemos encontrar ejemplos de osciladores cuánticos con fricción que se hallen en la naturaleza, con los cuales se pueda trabajar experimentalmente. Buscamos mostrar que los sistemas vistos en este trabajo tienen aplicaciones importantes, no solo de manera teórica.

Un ejemplo de estos sistemas son los osciladores micromecánicos. Son dispositivos dinámicos minúsculos conformados principalmente por una barra elástica tan fina como un cabello, que juega el papel de objeto resonante. Estos dispositivos han sido de gran interés en las últimas décadas, sobretodo en el sector industrial, debido a su capacidad para producir frecuencias de vibración estables, controlables y de larga duración.

Particularmente, estamos interesados en la disipación de energía provocada por la fricción que sufren estos artefactos. Cuando vibran es inevitable que pierdan energía. Están sujetos a una fuerza disipativa que se modela como una función de la velocidad y nos dice que los esfuerzos dentro del material hacen que se pierda energía en forma de vibraciones. Al describir la dinámica de la punta del oscilador, estamos trabajando con un oscilador unidimensional que tiene disipación.

Un caso particular de estos instrumentos son los resonadores de sistemas electro-mecánicos (por su siglas en inglés MEMS), los cuales son utilizados en el funcionamiento de sistemas electrónicos. El desarrollo e investigación de estas maquinas se remonta a inicios de la década de 1960 y su incursión comercial hasta inicios del siglo en curso.

Por mucho tiempo los componentes resonantes más comunes han sido los cristales de cuarzo, pero desde hace décadas se ha pronosticado su eventual remplazo por los MEMS. Esto se prevé debido a las muchas desventajas del cuarzo, como su dificultad para integrarse en circuitos debido a su gran tamaño, sus problemas de calidad y su rendimiento de fabricación. Además, estos problemas se agravan para su uso en dispositivos cada vez más modernos. Esto es lo que ha motivado la investigación de los MEMS durante años [23].

Uno de los primeros modelos de estos dispositivos consiste en una delgada membrana de óxido de silicio revestida de metal que está unida a un sustrato de silicio por un lado y por el otro está suspendida sobre un pozo rectangular, formando así un tipo de *cantilever*. Debido a su propio peso, esta minúscula viga va a sufrir una deflexión que se acentúa en su punta, de manera que al introducir un voltaje variable se obtiene un oscilador armónico. En uno de estos primeros artículos se reportan dispositivos con una longitud de $8,3\mu\text{m}$, que logran una frecuencia resonante de $1,25\text{MHz}$ [24].

La incursión de los MEMS en la industria ha experimentado muchos problemas, una de los obstáculos mas grandes es la fricción, ya que su funcionamiento es muy sensible a estas fuerzas. Además, este desgaste no se puede resolver con una lubricación similar a las máquinas macroscópicas. La tribología para nanodispositivos es en área aún en desarrollo.

Para darnos una idea de las magnitudes físicas con las que tratamos en estas escalas, podemos mencionar dos trabajos notables, ambos de Sandia National Laboratories. En primer lugar el trabajo de Michael Dugger y sus colegas, los cuales detectaron un fuerza de fricción de $5\mu N$ con su on-chip MEMS friction tester. Por otro lado, Maarten de Boer y su equipo construyeron un “nanotractor” MEMS con el objetivo de estudiar la ley de Amontons en escalas nanométricas. Como resultado se encontró que esta ley sigue siendo válida para fuerzas normales entre $50\mu N$ y $1\mu m$ [25].

Como podemos ver, existe un gran valor en el desarrollo experimental y teórico de la fricción en osciladores micro y nano mecánicos. El impacto económico es uno de los mayores factores que impulsan estas investigaciones. El consumo de energía por fricción en estos dispositivos representa una gran pérdida monetaria y también un incorrecto funcionamiento. Debido a esto, el desarrollo de la tribología en estos artefactos puede llevarnos a procesos más eficientes, lo cual implica un ahorro de dinero y un progreso tecnológico.

3.4. Conclusiones

Después de revisar las bases del efecto Unruh en segunda cuantización, hemos identificado los puntos claves del fenómeno y gracias a esto conseguimos conectarlo con un sistema análogo de la mecánica cuántica. Esto nos permite decir que hemos cumplido uno de los principales objetivos de la tesis.

La primera parte de este trabajo funciona como una buena introducción para aquel que busque un primer acercamiento a la radiación Unruh, partiendo desde conceptos básicos de relatividad general y revisando sucintamente la teoría cuántica de campos.

Hemos completado satisfactoriamente el estudio de un oscilador armónico cuántico con fuerza reológica. Se expuso el valor y el alcance que tiene el Hamiltoniano de Caldirola-Kanai y su inherente presencia en sistemas abiertos de la mecánica cuántica.

Como se esperaba, al estudiar la superposición de modos hemos obtenido una transformación de Bogoliubov que nos ha permitido conectar dos estados de vacío diferentes, el vacío inercial y el vacío para el caso acelerado. Todo esto confirma la existencia de la de producción de cuantos en un oscilador amónico cuántico con fuerza viscosa. Como se ha mencionado anteriormente, la presente tesis aporta el cálculo del coeficiente para la transformación con un solo oscilador ya que actualmente no se encuentra publicación alguna que contenga este resultado.

También, se ha logrado cumplir el objetivo de obtener la función de distribución de número de ocupación de partículas en función de una temperatura efectiva en términos de la aceleración. Además hemos ido mas allá, presentando las gráficas y estudiando el comportamiento de la función. Conectamos esta distribución de partículas con un baño térmico, aunque hay que tener cuidado al tomar esta analogía con la mecánica estadística.

Para concluir, se ha mostrado la importancia que existe en el estudio los sistemas cuánticos con disipación, ya que estos no solo tienen un gran valor en su carácter teórico. La parte experimental consiste en explotar sistemas análogos que se encuentran bien desarrollados en el área tecnológica. Es ahí en donde recae la necesidad y la motivación para seguir trabajando en su estudio.

Bibliografía

- [1] W.G. Unruh, Notes on black-hole evaporation, *Phys. Rev.D* 14, 870 (1976)
- [2] B.W. Shore, P.L. Knight, The Jaynes-Cummings Model, *Journal of Modern Optics*, 40, 7 (1993)
- [3] H. B. G. Casimir and D. Polder, The Influence of Retardation on the London-van der Waals Forces, *Phys. Rev.* 73, 360 (1948)
- [4] M.H. Lynch, E. Cohen, Y. Hadad, and I. Kaminer, Experimental Evidence for the Unruh Effect, *CLEO: QELS Fundamental Science 2020*, Washington, DC United States, 10–15 May 2020. Page FM2C.5 ISBN: 978-1-943580-76-7
- [5] C. A. Uliana Lima, F. Brito, J. A. Hoyos and D.A. Turolla Vanzella, Probing the Unruh effect with an accelerated extended system, *Nature Communications* 10, 3030 (2019)
- [6] J. Hu, L. Feng, Z.Zhang and C.Chin, Quantum simulation of Unruh radiation, *Nature Physics* (2019). DOI: 10.1038/s41567-019-0537-1
- [7] C. Gooding, S.Biermann, S. Erne, J. Louko et al. Interferometric Unruh Detectors for Bose-Einstein Condensates. *Phys. Rev. Lett* 125 (21): 213603 (2020); doi: 10.1103/PhysRevLett.125.213603
- [8] R. Carballo-Rubio, L.J. Garay, E. Martín-Martínez, and J. de Ramón, Unruh Effect without Thermalität, *Phys. Rev. Lett.* 123, 041601 (2019)
- [9] G.W. Ford, R.F. O’Connell, Is there Unruh radiation?, *Phys. Lett. A* 350, Issues 12 (2006) <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2005.09.068>.
- [10] J.A. Franco-Villafañe, E. Sadurní, S. Barkhofen, U. Kuhl et al. First experimental realization of the Dirac oscillator, *Phys. Rev. Lett.* 111 170405 (2013).
- [11] S. Bittner, B. Dietz, M. Miski-Oglu, A. Richter, C. Ripp, E. Sadurní, and W. P. Schleich, Bound states in sharply bent waveguides: Analytical and experimental approach, *Phys. Rev. E* 87 042912 (2013).

- [12] R.M. Wald, *General Relativity*, Chicago U., EFI, (1984).
- [13] E. Kanai, On the Quantization of the Dissipative Systems, *Prog. Theor. Phys.* 3, 440 (1948).
- [14] P. Caldirola, Forze non conservative nella mecanoia quantistioa, *Nuovo Cim.* 18, 393 (1941).
- [15] W.G. Unruh, Notes on black-hole evaporation, *Phys. Rev. D* 14, 870 (1976).
- [16] J. R. Sentizky, Dissipation in Quantum Mechanics. The Harmonic Oscillator, *Phys. Rev.* 119, 670 (1960).
- [17] G. W. Ford, M. Kac and P. Maznr, Statistical Mechanics of Assemblies of Coupled Oscillators, *J. Math. Phys.* 6, 504 (1965).
- [18] R. P. Feynman and F. L. Vernon, The theory of a general quantum system interacting with a linear dissipative system, *Ann. Phys.* 24, 118 (1963).
- [19] A. Caldeira and A. J. Leggett, Influence of Dissipation on Quantum Tunneling in Macroscopic Systems, *Phys. Rev. Lett.* 46,211 (1981).
- [20] D.R. Truax, Baker-Campbell-Hausdorff relations and unitarity of $SU(2)$ and $SU(1,1)$ squeeze operators, *Phys. Rev. D* 31, (1988)
- [21] E. Sadurní, M. A. Estévez, J. L. Díaz-Cruz, Does a mirror in free fall suffers hindrance?, 2109.09295, (2021), <https://doi.org/10.48550/arXiv.2109.09295>.
- [22] V. M. Vasyutaa and V. M. Tkachuk, Falling of a quantum particle in an inverse square attractive potential, *Eur. Phys. J. D*, 70: 267 (2016).
- [23] A. Partridge, J. McDonald, “MEMS to Replace Quartz Oscillators as Frequency Sources”. *NASA Tech Briefs.* v.30, n.6, (2006).
- [24] K.E. Petersen, Dynamic micromechanics on silicon: Techniques and devices, *IEEE Transactions on Electron Devices*, vol. 25, issue 10, pp. 1241-1250 (1978).
- [25] J. Krim, Friction at the nano-scale, *Physics World* ,(2005).
- [26] M. Horibe, Thermal Radiation of Fermions by an Accelerated Wall, *Progress of Theoretical Physics*, Volume 61 (2) (1979).