Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

El Teorema de Furry en la Extensión del Modelo Estándar

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Emmanuel Rosas Rosas

Asesorado por

Dr. J. Jesús Toscano Chávez

Puebla Pue.
Junio 2022

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

El Teorema de Furry en la Extensión del Modelo Estándar

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Física

por

Emmanuel Rosas Rosas

Asesorado por

Dr. J. Jesús Toscano Chávez

Puebla Pue.
Junio 2022

Título: El Teorema de Furry en la Extensión del Modelo Estándar
Estudiante: Emmanuel Rosas Rosas

COMITÉ

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
Presidente

Dr. Héctor Novales Sánchez
Secretario

Dr. Gilberto Tavares Velasco
Vocal

Dra. Ana Aurelia Avilez López
Vocal

Dr. J. Jesús Toscano Chávez
Asesor

Índice general

Resumen **1**

Introducción **3**

1. Electrodinámica Cuántica (QED) **5**
1.1. La Lagrangiana de la Electrodinámica Cuántica 5
1.1.1. Derivada covariante y simetría de norma 6
1.2. Reglas de Feynman y fijación de la norma 7
1.3. Conjugación de carga, paridad e inversión temporal 10
1.4. Teorema de Furry 13

2. La Extensión del Modelo Estándar (SME) **17**
2.1. Simetría Lorentz 17
2.2. Violación de Lorentz 18
2.3. La Extensión del Modelo Estándar 19
2.4. Violación de Lorentz en el sector de Yukawa 21

3. Cálculo del vértice $\gamma\gamma\gamma$ **25**
3.1. Diagramas de Feynman 25
3.2. Parametrización de Feynman 27
3.3. Amplitud 28

4. Conclusiones **31**

Bibliografía **33**

Resumen

En esta tesis, se presenta un estudio del Teorema de Furry en el contexto de la Extensión del Modelo Estándar (SME), la cual es una teoría que incorpora, de manera independiente de modelo, la violación de la simetría Lorentz y de CPT. En este modelo se demuestra que el sector de Yukawa extendido genera un acoplamiento de tres fotones a orden de un lazo a través de vértices que presentan violación de la simetría Lorentz, dicho acoplamiento es distinto de cero en el caso de tres fotones reales.

Introducción

Las simetrías han jugado un papel muy importante en el desarrollo de nuevas teorías fundamentales [1], en especial la simetría Lorentz ha sido esencial cuando el régimen de estas teorías se encuentra a energías altas y relativistas; en función de lo anterior la teoría relativista de campos clásicos surge como una necesidad para unificar la teoría cuántica con los principios de la relatividad especial, en esta formulación es el campo el que representa los grados de libertad del sistema y no las coordenadas espaciales, esto es, son parámetros que comparten las mismas propiedades matemáticas con el tiempo, como es requerido por la teoría de la relatividad especial. De esta manera se prepara el terreno para la unificación de las teorías cuántica y relativista, dando lugar a la formulación de la teoría cuántica de campos [2]. El campo relativista, el cual es parte de alguna representación del grupo de Lorentz y por tanto la simetría Lorentz es manifiesta, representa los grados de libertad del sistema y, como tal, es promovido a operador de acuerdo con los postulados de la mecánica cuántica. Por otra parte cuando una teoría relativista es, además, una teoría de norma, el resultado es un modelo para describir las interacciones entre partículas a un nivel fundamental. Una de las primeras teorías cuánticas de campos en tener un profundo éxito fue la Electrodinámica Cuántica [3] (QED por sus siglas en inglés), esta última describe la dinámica de partículas cargadas eléctricamente, cuya interacción está mediada por el fotón. En la actualidad tenemos la teoría que describe tres de las cuatro interacciones fundamentales que conocemos, interacción fuerte, débil y electromagnética, la cual es conocida como Modelo Estándar (SM por sus siglas en inglés), esta es una teoría relativista basada en el grupo de norma $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$. En esta teoría la interacción fuerte es descrita por $SU_C(3)$, mientras que $SU_L(2) \times U_Y(1)$ representa la interacción electrodébil, recibiendo por esta razón el nombre de grupo electrodébil, este último es roto espontáneamente a la escala de Fermi $v = 240$ GeV al grupo electromagnético $U_e(1)$. Como resultado del rompimiento espontáneo de simetría, tres de los cuatro bosones norma asociados con este grupo adquieren masa, en tanto que, el bosón que permanece sin masa es identificado con el fotón.

El contenido de partículas del Modelo Estándar, las cuales todas ya han sido descubiertas, se divide en el sector fermiónico, cuyas partículas tienen espín $\frac{1}{2}$ (en unidades de $\hbar$), y el sector bosónico, en el cual sus partículas tienen espín entero (0 o 1 en este caso). Así mismo, el sector fermiónico se divide en el sector leptónico y de quarks, el primero está conformado por leptones cargados ($l = e, \mu, \tau$) y sus neutrinos, mientras que el segundo está integrado de quarks; los leptones se distinguen de los quarks, ya que los leptones no interactúan fuertemente a diferencia de los quarks que interactúan bajo las tres interacciones mencionadas. Por otra parte, el sector bosónico está compuesto por los campos de norma (asociados a los grupos $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$) o mediadores de las 3 interacciones, los cuales tienen espín 1, y por el bosón de Higgs, el cual tiene espín 0. El bosón de Higgs está estrechamente relacionado con el sector de norma debido al mecanismo de Higgs [3]. Existen 8 gluones, g, mediadores de la interacción fuerte, los cuales corresponden a los 8 generadores del grupo $SU_C(3)$, por otra parte, 3 bosones de norma con masa, $W^{\pm}$ y Z, mediadores de la interacción débil, y el fotón, mediador de la interacción electromagnética, y estos están asociados a los cuatro generadores del grupo electrodébil $SU_L(2) \times U_Y(1)$.

Los acoplamientos entre partículas eléctricamente neutras son de interés teórico y fenomenológico, esto se debe a que la mayoría de ellos surgen como fluctuaciones cuánticas de un lazo, como ejemplo, el bosón de Higgs fue descubierto a través de dos acoplamientos de este tipo, ya que éste se produce vía fusión de gluones a través del acoplamiento de un lazo, ggH, y se detecta por su decaimiento a dos fotones igualmente a orden de un lazo, $\gamma\gamma H$. En ambos casos este acoplamiento surge a orden de un lazo ya que el bosón de Higss no tiene carga de color, que es la asociada a la interacción fuerte, ni eléctrica, así que no puede acoplarse directamente a los gluones o a fotones.

Decaimientos como $Z \to gg$ y $Z \to \gamma\gamma$ son de particular interés y aunque cinemáticamente permitidos, están estrictamente prohibidos en cualquier teoría de campos convencional, esto debido a invariancia bajo el grupo de las rotaciones o conservación del momento angular, esto establecido por el Teorema de Landau-Yang [4]. Sin embargo dichos acoplamientos son permitidos a orden de un lazo [5] en SME [6], esta es una teoría que incorpora de manera independiente la violación de la simetría Lorentz y CPT. Es importante destacar que estos acoplamientos son permitidos en SM siempre y cuando al menos una de las tres partículas sea virtual, la amplitud de este acoplamiento se hace cero cuando se consideran las tres partículas como reales [7]. También cabe señalar que los decaimientos de $Z \to ggg$ y $Z \to \gamma\gamma\gamma$ son permitidos en SM y cualquier extensión [8].

El acoplamiento de $\gamma\gamma\gamma$ no es permitido dentro del SM o cualquier extensión de modelo que respete la simetría Lorentz y CPT, aun cuando se considera uno o incluso los tres fotones virtuales. En el desarrollo de este proyecto se estudia el posible acoplamiento de $\gamma\gamma\gamma$ dentro del contexto del SME.

La forma en cómo se estructura esta tesis es la siguiente. En el capitulo 1 se presenta un breve resumen de QED, debido a que nuestro estudio se realiza sobre el acoplamiento de tres fotones a orden de un lazo que se realiza mediante partículas cargadas eléctricamente. En el capítulo 2 se discute la Extensión del Modelo Estándar con enfoque en el sector de Yukawa, con las respectivas reglas de Feynman para el cálculo del acoplamiento $\gamma\gamma\gamma$. En el capítulo 3 se realiza el cálculo a orden de un lazo del acoplamiento. Finalmente las conclusiones son presentadas en el capítulo 4.

Capítulo 1

Electrodinámica Cuántica (QED)

La llegada de la mecánica cuántica supuso un enorme cambio de paradigmas en la física. La teoría de Maxwell, una teoría clásica, tuvo que ser modificada de acuerdo a los nuevos principios de la mecánica cuántica. Dado lo anterior, se desarrolló una teoría cuántica de la interacción de la luz y la materia, esta teoría es lo que hoy conocemos como Electrodinámica Cuántica, que incorpora las simetrías de conjugación de carga (C), paridad (P) e inversión temporal (T). QED es una de las teorías más exitosas y con mayor precisión de la física, fue el modelo arquetípico para el desarrollo de las siguientes teorías cuánticas de campos.

Como primer paso para la descripción cuántica del electromagnetismo se tiene que dar lugar a la teoría relativista de campos clásicos. Ya desde la teoría de Maxwell se describen los fenómenos físicos con campos, los campos eléctrico y magnético. Las ecuaciones de Maxwell están escritas en términos de estos campos, los cuales pueden ser derivados de los campos potencial escalar y el potencial vector, respectivamente. Estas ecuaciones son manifiestamente covariantes ante el grupo de las rotaciones *SO(3)*, lo que se busca es expresarlas en forma covariante ante el grupo de Lorentz *SO(1,3)*. Bajo esta idea se construye el tensor de Maxwell

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \tag{1.1}$$

donde A^μ corresponde al potencial escalar y el potencial vector, por otra parte ∂^μ corresponde a las derivadas del tiempo y el espacio. Ambos objetos se transforman covariantemente ante el grupo de Lorentz.

Los campos eléctrico y magnético forman parte de las componentes de este tensor y las ecuaciones de Maxwell homogéneas están contenidas en el tensor a través de la identidad de Bianchi. Para una teoría libre, o sin cargas, las dos restantes ecuaciones surgen de las ecuaciones de Euler-Lagrange de la lagrangiana

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \tag{1.2}$$

Esta cumple con todos nuestros criterios acerca de lo que debe cumplir una lagrangiana de una teoría relativista.

1.1. La Lagrangiana de la Electrodinámica Cuántica

El campo que representa a las partículas con espín $\frac{1}{2}$ es el conocido espinor de Dirac o campo de Dirac ψ, el cual se transforma bajo la representación espinorial de *SO(1,3)*. Con él, se busca cómo multiplicar un par de espinores para formar una lagrangiana la cual sea invariante bajo este

grupo; la solución de este problema es la introducción del adjunto de Dirac $\overline{\psi}$.

La lagrangiana

$$\mathcal{L}_{Dirac} = i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\overline{\psi}\psi \tag{1.3}$$

es invariante bajo el grupo de Lorentz y nótese que ésta es, además, invariante bajo transformaciones globales de *U(1)*:

$$\psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x), \quad \overline{\psi}' = e^{-i\alpha}\overline{\psi}. \tag{1.4}$$

La ecuación de Euler-Lagrange para $\overline{\psi}$, nos lleva a la ecuación de Dirac

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi(x) = 0, \tag{1.5}$$

la cual fue formulada por Paul Dirac en 1928, desarrollada en una implementación de los principios de la relatividad especial en la formulación de la mecánica cuántica ondulatoria, el objetivo fue tener la ecuación de Schrödinger para una partícula libre dentro del régimen relativista, con ella se predice la existencia de las antipartículas. En la actualidad, la ecuación de Dirac es reconocida como una ecuación de Euler-Lagrange y no como una generalización de relativista de la ecuación de Schrödinger.

Nótese que tenemos dos descripciones, una descripción para una teoría libre del campo electromagnético (sin cargas) y la segunda una descripción de una teoría libre para las cargas (sin campos electromagnéticos). Lo que se busca es tener una teoría donde exista la interacción de las partículas con el campo electromagnético, se observa que esta interacción surge como consecuencia de la invariancia de norma, en este caso, una simetría bajo el grupo de norma $U(1)_e$.

1.1.1. Derivada covariante y simetría de norma

Sabemos que $\mathcal{L}_{Dirac}$ es invariante bajo transformaciones globales del grupo *U(1)*, sin embargo, cuando decidimos que las trasformaciones sean locales, esto quiere decir, una transformación para cada punto del espacio

$$\psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad \overline{\psi}' = e^{-i\alpha(x)}\overline{\psi}, \tag{1.6}$$

la simetría se rompe en la lagrangiana de Dirac. Note que esto se debe a la presencia de derivadas, por lo que al realizar la transformación ésta ya no queda invariante. Esto corresponde a que la cantidad $\partial_{\mu}\psi$ no es un objeto covariante, el cual no tiene sentido geométrico. El problema surge de la propia definición de la derivada, por lo que se busca una derivada que contenga una ley de transformación covariante. Con esta idea en mente se construye la derivada covariante

$$\mathcal{D}_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu}, \tag{1.7}$$

la cual tiene la ley de transformación:

$$[\mathcal{D}_{\mu}\psi(x)]'(x) = e^{i\alpha(x)}\mathcal{D}_{\mu}.\psi(x), \tag{1.8}$$

donde A_{μ} es un campo de norma o conexión. En física de partículas se le llama campo de norma pero geométricamente corresponde a una conexión, y ésta se transforma bajo el grupo como:

$$A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) + \frac{1}{e}\partial_{\mu}\alpha(x). \tag{1.9}$$

Se pueden formar invariantes mediante el conmutador de la derivada covariante y el resultado es:

$$[\mathcal{D}_{\mu}, \mathcal{D}_{\nu}]\psi(x) = -ie(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu})\psi(x) \tag{1.10}$$

Esta cantidad se identifica con el tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$, y dada la ley de transformación (1.10) es fácil ver que ésta es invariante bajo transformaciones de norma.

Por lo que la lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{QED} = i\overline{\psi}\not{\mathcal{D}}\psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{1.11}$$

con $\not{\mathcal{D}} = \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu$, es invariante de norma. Esta última es la lagrangiana de la electrodinámica cuántica y las ecuaciones de Euler-Lagrange de ésta son:

$$(i\not{\mathcal{D}} - m)\psi(x) = 0, \qquad \partial_\mu F^{\mu\nu} = -e\overline{\psi}\gamma^\nu\psi = J^\nu. \tag{1.12}$$

La primera corresponde a la ecuación de Dirac acoplada al campo electromagnético, mientras que la segunda son las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas, donde se identifica a la densidad de corriente con $J^\nu = -e\overline{\psi}\gamma^\nu\psi$

1.2. Reglas de Feynman y fijación de la norma

El siguiente paso es la cuantización de nuestras descripciones pero esto se convierte en una tarea bastante formidable para la teoría con interacciones, por lo que una manera bastante útil es reconocer que nuestra lagrangiana está compuesta por

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}, \tag{1.13}$$

donde $\mathcal{L}_0$ es la lagrangiana libre, o sin interacciones, mientras que $\mathcal{L}_{int}$ contiene los términos que involucran interacción. Así, el enfoque que se tomará es el tratamiento del término L_{int} como una perturbación, con esto, el cálculo de sus efectos se realiza tanto como sea viable en la teoría de perturbaciones y esperando que las constantes de acoplamiento sean lo suficientemente pequeñas para que obtengamos una aproximación razonable a la respuesta exacta. Feynman inventó un método diagramático que facilita considerablemente el cálculo de la amplitud de un proceso determinado, los cuales se conocen como diagramas de Feynman. Uno de estos diagramas representa una contribución perturbativa en el proceso.

Para poder conocer estos diagramas y cómo se construyen, hablemos primero de los propagadores de Feynman, los cuales representan la amplitud de probabilidad de la propagación de una partícula de un punto a otro.

El propagador en la teoría libre de Dirac es

$$i\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}, \tag{1.14}$$

sin embargo, el propagador del fotón no existe, esto es consecuencia de la invariancia de norma.

Si se considera el lagrangiano

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \tag{1.15}$$

con ξ real y positivo, se obtiene el siguiente propagador para el fotón:

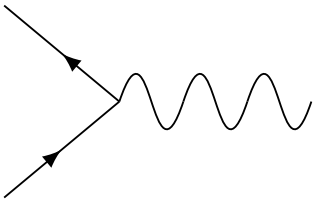
$$-\frac{i}{q^2}\left[g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right]. \tag{1.16}$$

Para $\xi = 1$, se tiene la norma de Feynman-t'Hooft, en la cual el propagador del fotón toma la forma:

$$-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}. \tag{1.17}$$

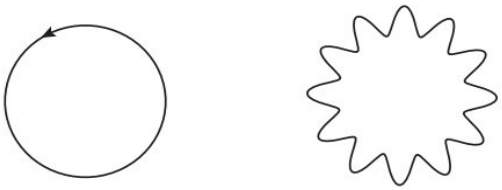
En un diagrama de Feynman las partículas se representan por líneas y las interacciones entre partículas, dictadas por la teoría, se representan por vértices. Algunas de estas representaciones son:

Fermión

Interacción 

Fotón

También tenemos lazos (loops):



Existen algunos otros elementos, tales como las líneas que representan a los gluones, pero para nuestros propósitos éstas satisfacen nuestras necesidades.

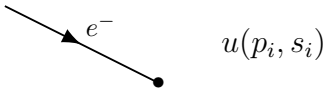
Diremos que una línea externa es aquella que une causalmente a un punto externo con un punto interno, mientras que una línea interna es aquella que une dos puntos internos. En la serie perturbativa, los puntos internos se asocian a los puntos donde se evalúa H_{int}. Son los puntos donde se definen las interacciones.

Reglas de Feynman para QED

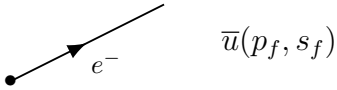
Las reglas de Feynman nos dicen cómo construir las amplitudes de probabilidad dado el diagrama correspondiente. Para QED las reglas son las siguientes:

- Para cada vértice escribir $ie\gamma^\mu$
- Para cada línea interna escribir el propagador correspondiente:

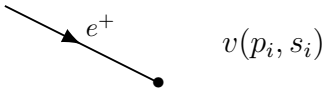
- Para cada línea externa del electrón incidiendo sobre un vértice, escribir el espinor



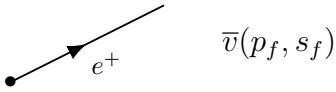
- Para cada línea externa del electrón abandonando el vértice, escribir:



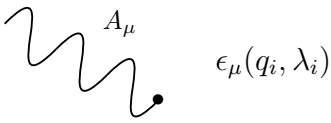
- Para cada línea externa del positrón incidiendo sobre un vértice, escribir:



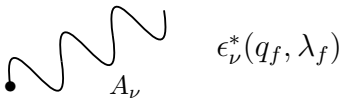
- Para cada línea externa del positrón abandonando el vértice, escribir:



- Para cada línea externa del fotón incidiendo sobre un vértice, escribir:



- Para cada línea externa del fotón abandonando el vértice, escribir:



- Por cada loop de partículas virtuales escribir el factor:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

- Si el loop es de fermiones, multiplicarlo por: -1

El momento se conserva en el proceso completo, así como en cada vértice. Las partículas externas satisfacen $p^2 = m^2$ y por ello se les llama reales, mientras que las partículas internas no satisfacen dicha condición, por lo que se les llama virtuales.

1.3. Conjugación de carga, paridad e inversión temporal

Además de las transformaciones continuas de Lorentz *SO(1,3)* existen otras dos transformaciones del espacio-tiempo, paridad e inversión temporal, pertenecientes al grupo de Lorentz completo, ya que ambas preservan el intervalo de Minkowski, pero a diferencia de las anteriores estas no forman un grupo por no contener al operador identidad y no se pueden realizar a través de una variación continua de un parámetro. Las transformaciones continuas de Lorentz *SO(1,3)* se les clasifica como transformaciones propias, mientras que las transformaciones de paridad e inversión temporal se les clasifica como impropias. La operación Paridad (P) envía el punto $(t, \vec{x})$ al punto $(t, -\vec{x})$, siendo una reflexión sobre los ejes espaciales; por otra parte, la inversión temporal envía el punto $(t, \vec{x})$ al punto $(-t, \vec{x})$, siendo una reflexión sobre eje del tiempo. Es importante señalar aquí que se están usando las unidades naturales. Estas transformaciones se supondrían como simetrías de la naturaleza, uno esperaría que si se realizan dos descripciones de la física, con la única diferencia de que una se hace desde la perspectiva de un espejo, las leyes que se descifren del fenómeno que se observa sean las mismas, o por otro lado, aunque la experiencia sí haga distinguir entre fenómenos que tienen una dirección en el tiempo, como lo podría ser ver un vídeo reproduciéndose en sentido opuesto de una taza rompiéndose, no es lo que se espera a un nivel fundamental. Por otra parte se tiene una tercera simetría, conjugación de carga (C), esta cambia partículas por antipartículas.

Nuestro conocimiento actual acerca de estas simetrías nos dice que tres de las interacciones fundamentales (fuerza gravitacional, electromagnética y fuerte), tienen simetría bajo C, P y T. La fuerza débil viola la simetría C y P, separadamente, pero preserva CP y T. Sin embargo existen ciertos procesos lo cuales también muestran violar CP y T. Las observaciones actuales indican que la simetría conjunta CPT es una simetría perfecta de la naturaleza.

Paridad

Ya que se está estudiando QED, se limita a estudiar la operación de paridad al campo de Dirac $\psi(x)$ y al campo vectorial $A^\mu(x)$, lo mismo para las demás operaciones.

Recordemos que estamos en el espacio cuántico por lo que $\psi(x)$ es un operador, y lo que se busca es ver cómo este se transforma bajo paridad, la cual será implementada por un operador unitario.

$$U(P) = P, \qquad P^\dagger = P^{-1} \tag{1.18}$$

El operador $\psi(x)$ se puede escribir en términos de operadores de creación y aniquilación como:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \sum_s [a^s_{\vec{k}} u^s(k) e^{-ik\cdot x} + b^{s\dagger}_{\vec{k}} v^s(k) e^{ik\cdot x}] \tag{1.19}$$

$$\overline{\psi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \sum_s [b^s_{\vec{k}} v^s(k) e^{-ik\cdot x} + a^{s\dagger}_{\vec{k}} u^s(k) e^{ik\cdot x}] \tag{1.20}$$

y el estado de una partícula está dado por:

$$|k, s, e\rangle = \sqrt{2E_k} a^{s\dagger}_{\vec{k}} |0\rangle . \tag{1.21}$$

El operador de paridad debería invertir el momento de una partícula sin invertir el espín, por lo que al aplicar el operador P a (1.21), nos conduce a las relaciones:

$$P a^{s\dagger}_{\vec{k}} P^{-1} = \eta_a a^{s\dagger}_{-\vec{k}}, \qquad P a^s_{\vec{k}} P^{-1} = \eta_a a^s_{-\vec{k}}, \qquad \eta_a^2 = 1 \tag{1.22}$$

De esa misma forma se encuentra la relación para $b^{s\dagger}_{\vec{k}}$ y $b^s_{\vec{k}}$.

Al igual que se pueden hallar las relaciones

$$u(k_0,-\vec{k})=\gamma^0 u(k_0,\vec{k}),\qquad v(k_0,-\vec{k})=-\gamma^0 v(k_0,\vec{k}), \tag{1.23}$$

a partir de la ecuación de Dirac. Por lo que reuniendo estos resultados se tiene que:

$$P\psi(t,\vec{x})P^{-1}=\eta_a\gamma^0\psi(t,-\vec{x}),\qquad P\overline{\psi}(t,\vec{x})P^{-1}=\eta_a\overline{\psi}(t,-\vec{x})\gamma^0 \tag{1.24}$$

Es importante conocer cómo se transforman algunos objetos bilineales. Hay cinco términos independientes que se pueden construir con $\psi(x)$ y $\overline{\psi}(x)$:

$$\overline{\psi}\psi,\qquad \overline{\psi}\gamma^\mu\psi,\qquad \overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi,\qquad \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi,\qquad i\overline{\psi}\gamma^5\psi. \tag{1.25}$$

Sus respectivas transformaciones bajo paridad son:

$$P\overline{\psi}\psi P^{-1}=+\overline{\psi}\psi(t,-\vec{x}) \tag{1.26}$$

Para esta transformación decimos que es par y además de ello, este termino recibe el nombre de escalar.

Mientras que para el término que se le asigna el nombre de vector, su transformación es:

$$P\overline{\psi}\gamma^\mu\psi P^{-1}=\begin{cases}+\overline{\psi}\gamma^\mu\psi(t,-\vec{x}) & \text{para } \mu=0\\ -\overline{\psi}\gamma^\mu\psi(t,-\vec{x}) & \text{para } \mu=1,2,3.\end{cases} \tag{1.27}$$

Para los términos que se les denomina pseudo-escalar y pseudo-vector, se transforman como:

$$Pi\overline{\psi}\gamma^5\psi P^{-1}=-i\overline{\psi}\gamma^5\psi(t,-\vec{x}), \tag{1.28}$$

$$P\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi P^{-1}=\begin{cases}-\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi(t,-\vec{x}) & \text{para } \mu=0,\\ +\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi(t,-\vec{x}) & \text{para } \mu=1,2,3\end{cases}, \tag{1.29}$$

respectivamente.

A nivel clásico, el campo $A^\mu(x)$ al ser un campo relativista se transforma ante una representación finita del grupo Lorentz de la forma:

$$A'^\mu(x)=\Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x). \tag{1.30}$$

Ante la transformación impropia llamada paridad, perteneciente al grupo completo de Lorentz, el campo vectorial se transforma como:

$$A'^\mu(x)=P^\mu{}_\nu A^\nu(t,-\vec{x}). \tag{1.31}$$

En el espacio cuántico, la transformación de Lorentz Λ es implementada por un operador unitario $U(\Lambda)$, donde la representación del operador unitario es dada por el espacio de Fock generado por los operadores de creación asociados con el operador de campo relativista, que denotamos genéricamente por $\varphi_a(x)$, y dado que todo estado de partículas se construye del vacío actuando con operadores de creación, debemos ser capaces de escribir al operador $\varphi_a(x)$ como función de operadores de creación y aniquilación, como se ha observado para el operador ψ.

Para el campo vectorial se espera que:

$$PA^\nu P^{-1}=\zeta P^\mu{}_\nu A^\nu(t,-\vec{x}) \tag{1.32}$$

con ζ la paridad intrínseca al campo.

Pero la relación (1.32) debe ser deducida directamente de la representación, sin embargo, la representación del espacio de Fock, no es directa, lo cual se debe fundamentalmente a que los únicos campos de espín 1 que pueden existir en la naturaleza son campos de norma. Debido a esto, la construcción del espacio cuántico está llena de sutilezas.

Inversión temporal

Bajo la inversión temporal, a diferencia de paridad, el momento angular $\vec{J}$ y el momento lineal $\vec{P}$ son impares:

$$T\vec{J}T^{-1} = -\vec{J}, \quad T\vec{P}T^{-1} = -\vec{P}. \tag{1.33}$$

Por lo que el operador T, debería invertir el momento y el espín de una partícula, bajo estas condiciones se encuentra que:

$$Ta^{s\dagger}_{\vec{k}}T^{-1} = \eta_a a^{-s\dagger}_{-\vec{k}}, \qquad Ta^{s}_{\vec{k}}T^{-1} = \eta_a a^{-s}_{-\vec{k}} \tag{1.34}$$

De esa misma forma también se encuentran las relaciones para $b^{s\dagger}_{\vec{k}}$ y $b^{s}_{\vec{k}}$. Mientras que para $u^s(k)$ y $v^s(k)$ se hallan las relaciones:

$$[u^{-s}(-Tk)]^* = -\gamma^1\gamma^3 u^s(k), \qquad [v^{-s}(-Tk)]^* = -\gamma^1\gamma^3 v^s(k) \tag{1.35}$$

Con estos resultados encontramos:

$$T\psi(t,\vec{x})T^{-1} = -\eta_a\gamma^1\gamma^3\psi(-t,\vec{x}), \qquad T\overline{\psi}(t,\vec{x})T^{-1} = \eta_a\overline{\psi}(-t,\vec{x})\gamma^1\gamma^3. \tag{1.36}$$

Ahora las transformaciones bajo T de los objetos bilineales son:

$$T\overline{\psi}\psi T^{-1} = +\overline{\psi}\psi(-t,\vec{x}), \qquad Ti\overline{\psi}\gamma^5\psi T^{-1} = -i\overline{\psi}\gamma^5\psi(-t,\vec{x}) \tag{1.37}$$

$$T\overline{\psi}\gamma^\mu\psi T^{-1} = \begin{cases} +\overline{\psi}\gamma^\mu\psi(-t,\vec{x}) & \text{para } \mu = 0, \\ -\overline{\psi}\gamma^\mu\psi(-t,\vec{x}) & \text{para } \mu = 1,2,3 \end{cases} \tag{1.38}$$

Se verifica que para el pseudo-vector la transformación es la misma que la del vector, y por último

$$T\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi T^{-1} = \begin{cases} +\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi(-t,\vec{x}) & \text{para } \mu = 0, \nu = 1,2,3 \\ -\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi(-t,\vec{x}) & \text{para } \mu = 1,2,3, \nu = 1,2,3. \end{cases} \tag{1.39}$$

La forma en que se transforman $A^\mu(x)$ y $F^{\mu\nu}$, se puede investigar a nivel de ecuaciones de Maxwell y de ellas inferir que bajo $t \to -t$:

$$\begin{aligned} \vec{E}' = \vec{E}, \quad \vec{B}' = -\vec{B}, \\ \rho' = \rho, \quad \vec{J}' = -\vec{J}. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Con esto sabemos que

$$A'^0 = A^0, \quad \vec{A}' = -\vec{A} \tag{1.41}$$

Y por lo tanto:

$$TA^\mu(x)T^{-1} = \eta_t A_\mu(-t,\vec{x}) \tag{1.42}$$

$$F'^{\mu\nu} = \begin{cases} F^{0i} \\ -F^{ij} \end{cases} \tag{1.43}$$

Conjugación de carga

La conjugación de carga es el intercambio de partículas por antipartículas y viceversa. Recordemos que $a^{s\dagger}_{\vec{k}}$ crea partículas, mientras que $b^{s\dagger}_{\vec{k}}$ crea antipartículas, por lo que ante la conjugación de carga tenemos las relaciones:

$$Ca^{s\dagger}_{\vec{k}}C^{-1} = b^{s\dagger}_{\vec{k}}, \qquad Ca^{s}_{\vec{k}}C^{-1} = b^{s}_{\vec{k}}, \qquad Cb^{s\dagger}_{\vec{k}}C^{-1} = a^{s\dagger}_{\vec{k}}, \qquad b^{s}_{\vec{k}}C^{-1} = a^{s}_{\vec{k}}. \tag{1.44}$$

Y las relaciones entre los espinores correspondientes para partículas y antipartículas son:

$$u^s(k) = -i\gamma^2[v^s(k)]^*, \quad v^s(k) = -i\gamma^2[u^s(k)]^* \tag{1.45}$$

Con estas resultados llegamos a:

$$C\psi(x)C^{-1} = -i(\psi(x)\gamma^0\gamma^2)^T \qquad C\overline{\psi}(x)C^{-1} = -i(\gamma^0\gamma^2\overline{\psi}(x))^T \tag{1.46}$$

Por último veamos cómo se transforman los términos bilineales bajo C.

$$C\overline{\psi}\psi C^{-1} = +\overline{\psi}\psi, \qquad Ci\overline{\psi}\gamma^5\psi C^{-1} = +i\overline{\psi}\gamma^5\psi, \tag{1.47}$$

$$C\overline{\psi}\gamma^\mu\psi C^{-1} = -\overline{\psi}\gamma^\mu\psi, \qquad C\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi C^{-1} = +\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \qquad C\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi C^{-1} = -\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi. \tag{1.48}$$

A nivel clásico, los campos de norma son reales, así a nivel cuántico son operadores autoconjugados, por lo que dado que $(A^\mu)^\dagger = A^\mu$, la antipartícula debe coincidir con la partícula, esto quiere decir que los estados son eigenestados de C:

$$C\,|A\rangle = \eta_c\,|A\rangle \tag{1.49}$$

Y dado que $C^2 = \mathbb{I}$, entonces C es hermitiano, lo cual nos dice que η_c es un número real , pero:

$$C^2\,|A\rangle = \eta_c^2\,|A\rangle = |A\rangle \tag{1.50}$$

Lo cual implica que $\eta_c = \pm 1$, por lo que el campo norma debe ser impar o par bajo conjugación de carga.

Experimentalmente se sabe que la fuerza electromagnética respeta C, pero hemos visto que bajo conjugación de carga la corriente, $J^\mu \equiv e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$, es impar:

$$CJ^\mu C^{-1} = -J^\mu \tag{1.51}$$

Por lo que la preservación de esta simetría requiere que:

$$CA^\mu C^{-1} = -A^\mu, \quad CF^{\mu\nu}C^{-1} = -F^{\mu\nu}. \tag{1.52}$$

Un resumen de las diferentes transformaciones de los objetos bilineales se muestra en la tabla.

	$\overline{\psi}\psi$	$i\overline{\psi}\gamma^5\psi$	$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$	$\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	$\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$
C	+1	+1	-1	+1	-1
P	+1	-1	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu$	$(-1)^\mu(-1)^\nu$
T	+1	-1	$(-1)^\mu$	$(-1)^\mu$	$-(-1)^\mu(-1)^\nu$
CPT	+1	+1	-1	-1	+1

donde se usa la notación $(-1)^\mu \equiv 1$, para $\mu = 0$ y $(-1)^\mu \equiv -1$, para $\mu = 1, 2, 3$.

1.4. Teorema de Furry

El desarrollo de la serie perturbartiva se obtiene de lo que es conocido como la Función de Green de n puntos:

$$G(x_1, x_2, ..., x_n) = \langle 0|\, T(\phi(x_1)\phi(x_2)...\phi(x_n))\,|0\rangle\,, \tag{1.53}$$

donde ϕ denota a los campos interactuantes. Esta función representa la probabilidad de que n partículas sean creadas o destruidas en los puntos $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

El acoplamiento de fotones se tiene que realizar a través de partículas cargadas eléctricamente y el teorema de Furry establece que el acoplamiento impar de fotones es idénticamente cero

$$\langle 0|\, T(J^{\mu_1}(x_1)...J^{\mu_{2n+1}}(x_{2n+1}))\,|0\rangle = 0, \tag{1.54}$$

donde $J^{\mu_1}(x_1)$ corresponde a las corrientes eléctricas. Este resultado es consecuencia de la invariancia del vacío bajo conjugación de carga, el cual es fácil probar introduciendo el operador identidad $C^{-1}C$ en (1.54):

$$\langle 0|\, T(C^{-1}CJ^{\mu_1}(x_1)C^{-1}C...C^{-1}CJ^{\mu_{2n+1}}(x_{2n+1})C^{-1}C)\,|0\rangle \tag{1.55}$$

Recordando que:

$$CJ^{\mu}C^{-1} = -J^{\mu}. \tag{1.56}$$

obtenemos:

$$\langle 0|\, T(J^{\mu_1}(x_1)...J^{\mu_{2n+1}}(x_{2n+1}))\,|0\rangle = (-1)^{2n+1}\,\langle 0|\, T(J^{\mu_1}(x_1)...J^{\mu_{2n+1}}(x_{2n+1}))\,|0\rangle \tag{1.57}$$

y por lo tanto:

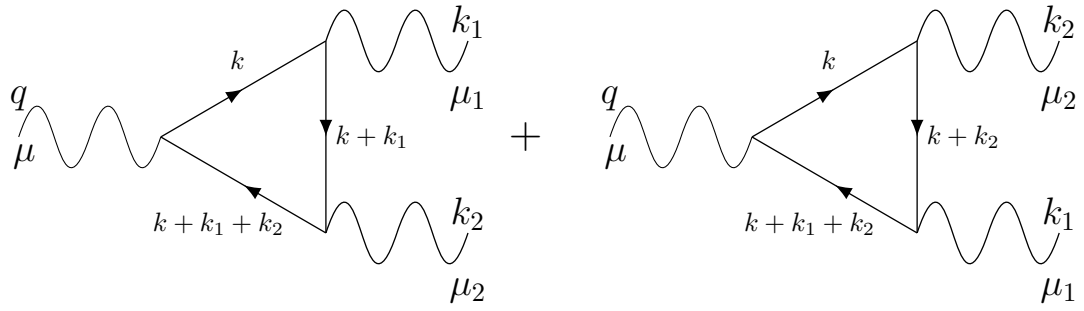
$$\langle 0|\, T(J^{\mu_1}(x_1)...J^{\mu_{2n+1}}(x_{2n+1}))\,|0\rangle = 0. \tag{1.58}$$

Función vértice de tres puntos

Históricamente el teorema de Furry se estableció para la función de Green de 3 puntos para el fotón

$$\langle 0|\, T(J^{\mu}(x)J^{\mu_1}(x_1)J^{\mu_2}(x_2))\,|0\rangle = 0. \tag{1.59}$$

El resultado debe cumplirse para cualquier orden de la serie perturbativa. A orden de un lazo se tienen dos diagramas



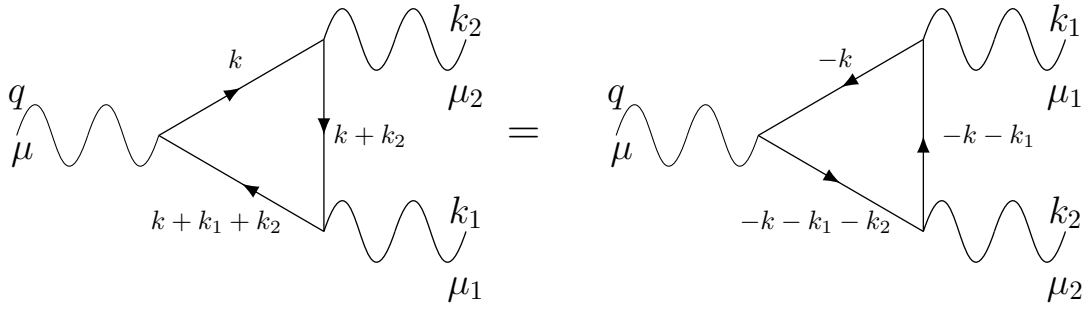
Nótese que la diferencia entre el diagrama uno y el diagrama dos es el intercambio del fotón uno por el fotón dos.

A partir de las reglas de Feynman podemos ver que los respectivos integrandos para los diagramas uno y dos, son:

$$I_{1\mu\mu_1\mu_2} = \frac{\mathrm{Tr}[(\not{k}+m)\gamma_{\mu}(\not{k}+\not{k}_1+\not{k}_2+m)\gamma_{\mu_2}(\not{k}+\not{k}_1+m)\gamma_{\mu_1}]}{[k^2-m^2][(k+k_1+k_2)^2-m^2][(k+k_1)^2-m^2]} \tag{1.60}$$

$$I_{2\mu\mu_1\mu_2} = \frac{\mathrm{Tr}[(\not{k}+m)\gamma_{\mu}(\not{k}+\not{k}_1+\not{k}_2+m)\gamma_{\mu_1}(\not{k}+\not{k}_2+m)\gamma_{\mu_2}]}{[k^2-m^2][(k+k_1+k_2)^2-m^2][(k+k_2)^2-m^2]} \tag{1.61}$$

No es difícil probar que el diagrama dos se puede sustituir realizando otra vez el intercambio del fotón dos por el uno, con la única diferencia que ahora se invierte el sentido en que los fermiones recorren el loop, esto es



Cuando se realiza este cambio, el denominador obtenido para el diagrama dos es idéntico al primero, como consecuencia lo único que basta probar es que la suma de los numeradores da como resultado cero.

Tomando en cuenta que la traza de un número impar de matrices de Dirac es cero [9], podemos expresar los numeradores de las ecuaciones (1.60) y (1.61) como:

$$N_{1\mu\mu_1\mu_2} = \mathrm{Tr}(\not{k}\gamma_\mu \not{p}_2\gamma_{\mu_2}\not{p}_1\gamma_{\mu_1}) + m^2\mathrm{Tr}(\not{k}\gamma_\mu\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_1}) + m^2\mathrm{Tr}(\gamma_\mu \not{p}_2\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_1}) + m^2\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_{\mu_2}\not{p}_1\gamma_{\mu_1}) \quad (1.62)$$

$$N_{2\mu\mu_1\mu_2} = -\mathrm{Tr}(\not{k}\gamma_{\mu_1}\not{p}_1\gamma_{\mu_2}\not{p}_2\gamma_\mu) - m^2\mathrm{Tr}(\not{k}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_\mu) - m^2\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\not{p}_1\gamma_{\mu_2}\gamma_\mu) - m^2\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\not{p}_2\gamma_\mu) \quad (1.63)$$

donde $p_1 = k + k_1$ y $p_2 = k + k_1 + k_2$.

Usando el teorema de la reversibilidad de la traza se prueba que:

$$N_{2\mu\mu_1\mu_2} = -N_{1\mu\mu_1\mu_2}. \quad (1.64)$$

Con esto se prueba el teorema de Furry.

Capítulo 2

La Extensión del Modelo Estándar (SME)

2.1. Simetría Lorentz

El resultado de un experimento no debería depender de su observador. En la mecánica newtoniana se dice que un marco de referencia inercial es aquel donde las leyes de Newton son válidas, las cuales se pensaban podían describir el comportamiento del universo entero. La diferencia que se tiene entre dos marcos de referencia inerciales son características relativas como la velocidad y posición relativa, así que las descripciones de sus observadores serían igualmente válidas, y para poder pasar de una descripción a otra, emplearíamos las transformaciones de Galileo, así, las leyes de la física tendrían que ser invariantes bajo estas transformaciones, pero en el avance de nuestro conocimiento se descubrió que las leyes de Maxwell no eran invariantes bajo estas transformaciones, al igual que la velocidad de la luz no parecía tener un carácter relativo, sino, ser absoluta, por lo que Albert Einstein formuló en 1905 la relatividad especial donde aparecerían transformaciones bajo nuestro nuevo conocimiento; a estas se les conoce como transformaciones de Lorentz. Los efectos de la relatividad especial solo serían apreciables a velocidades cercanas a la de la luz, mientras que las transformaciones de Galileo estarían contenidas en estas como aproximaciones en el límite de velocidades bajas. Las leyes de Maxwell serían invariantes bajo las transformaciones de Lorentz y la mecánica newtoniana estaría contenida bajo la relatividad especial.

Las transformaciones de Lorentz son relaciones matemáticas que conectan marcos de referencia inerciales con velocidades relativas y orientaciones diferentes, estas pueden ser llamadas a su vez boosts y rotaciones. Bajo este nuevo esquema los objetos matemáticos utilizados para describir la física, son los objetos que se transformen covariantemente bajo Lorentz, como ejemplo tenemos los cuadri-vectores x^μ. Y la transformación actúa como:

$$x'^\nu = \Lambda^\nu_\mu x^\mu. \tag{2.1}$$

En el capítulo anterior se discutieron las transformaciones pertenecientes al grupo de Lorentz completo, paridad e inversión temporal, más una simetría extra a nivel cuántico, conjugación de carga. La simetría CPT está altamente relacionada con la simetría de Lorentz. El teorema *CPT* [10] establece que en cualquier teoría cuántica local invariante de Lorentz con Hamiltoniano Hermitiano debe contener simetría CPT; por otra parte se muestra [11] que si se viola *CPT*, se viola la simetría de Lorentz, lo que esto indica es que no puede no haber simetría *CPT* si existe simetría de Lorentz, pero aún se tiene la posibilidad de que exista simetría *CPT* con violación de la simetría de Lorentz.

Hoy en día sabemos que dos de las grandes teorías, SM y Relatividad general, se establecen bajo la simetría Lorentz y CPT, por lo que hablar de una violación de alguna de ellas nos llevaría a grandes cambios sobre nuestras mejores teorías.

2.2. Violación de Lorentz

El SM y la Relatividad General, forman parte de nuestras mejores descripciones, sin embargo estas dos teorías se tratan de forma independiente, ya que el terreno de sus efectos en la actualidad ha sido puesto a prueba a escalas diferentes, debido a que es ahí donde son mayormente visibles, ambas con un gran éxito y precisión destacable, pero existen regiones donde los efectos de ambas teorías deben ser apreciables, escalas de energía de orden de $10^{19}GeV$. En la actualidad no contamos con tecnología necesaria para poder alcanzar dichas regiones, por lo que a través de teorías efectivas se busca trazar un camino para detectar indicios de efectos que conecten a nuestras teorías.

El rompimiento de la simetría de Lorentz tiene dos principales motivaciones [12]. Por una parte, en el lado teórico existen teorías de gravedad cuántica que incluyen la posibilidad de violación de Lorentz, tales como, teoría de cuerdas [13], gravedad cuántica de bucles [14], entre algunas otras. En el lado experimental y fenomenológico, teorías de campos efectivas a bajas energías han sido estudiadas. Como ejemplo de teoría efectiva el SME ha sido de interés para probar las simetrías CPT y Lorentz. En él, se introducen posibles términos que son coeficientes tensoriales constantes contraídos de forma covariante a los campos del SM. El valor de estos coeficientes es lo que se busca conectar con el experimento o resultados fenomenológicos.

Se hace una distinción entre dos tipos de transformaciones, transformación de Lorentz de observador y transformaciones de Lorentz de partícula. Como mencionamos anteriormente, el resultado predeterminado de un experimento no debe depender del observador, es decir, si dos de ellos usaran diferentes sistemas coordenados o diferentes orientaciones relativas entre ellos para describir el mismo fenómeno, las leyes de la naturaleza no deberían responder ante estas elecciones o diferencias, y por tanto la lagrangiana y las observables que puedan ser derivadas de ella deben ser invariantes bajo transformaciones de Lorentz de observador. A esto es lo que nos referimos con transformaciones de Lorentz de observador, simples cambios de coordenadas. Mientras, por otra parte, las transformaciones de partícula serán el cambio de orientación del experimento.

A las transformaciones de Lorentz de observador y de partícula también se les conoce como transformaciones de Lorentz pasiva y activa, respectivamente. Ambas están relacionadas inversamente en el vacío, es decir, la transformación de una es equivalente a la transformación inversa de la otra en el vacío, pero esto no sucederá si existe un campo de fondo. Un ejemplo sencillo para ilustrar esto puede ser imaginar una partícula cargada que pasa por un campo magnético, ya que la interacción que tiene esta con el campo está dada por la fuerza de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, por ende la dirección de la velocidad con el campo magnético es importante, ahora bien, si se realiza una rotación del marco de referencia (transformación de observador), desde la perspectiva del marco, la dirección del campo magnético como la dirección de la velocidad de la partícula se verán afectadas por la rotación pero de tal forma que la relación entre estos dos sea invariante, así la cantidad $\vec{F}$ permanece invariante, mientras que si se realiza una rotación de la partícula (transformación de partícula) la relación que hay entre el campo magnético y la dirección de la partícula ya no es es la misma; significa que la cantidad $\vec{F}$ ya no queda invariante.

Teniendo en cuenta esta distinción, la lagrangiana del SME incorpora el rompimiento de la simetría de Lorentz vía coeficientes tensoriales constantes contraídos de forma covariante a los campos del SM. Como ejemplo:

$$\mathcal{L} = ic_{\mu\nu}\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial^{\nu}\psi \tag{2.2}$$

Aquí $c_{\mu\nu}$ son los coeficientes que violan la simetría de Lorentz. Todos los coeficientes que incorpora SME pueden ser vistos como campos de fondo constante y cuando usamos las transformaciones de Lorentz del observador todas las cantidades se ven transformadas. En nuestro ejemplo la ecuación (2.2) se transforma de la forma:

$$(ic_{\mu\nu}\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial^{\nu}\psi)' = \Lambda_{\mu}{}^{\lambda}\Lambda_{\nu}{}^{\rho}\Lambda^{\mu}{}_{\sigma}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}ic_{\lambda\rho}\overline{\psi}\gamma^{\sigma}\partial^{\beta}\psi = ic_{\mu\nu}\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial^{\nu}\psi. \tag{2.3}$$

Como resultado de que todos los índices de Λ^{ν}_{μ} estén correctamente contraídos implica la invariancia bajo la transformación de Lorentz de observador. Mientras que para la transformación de Lorentz de partícula todas la cantidades se transforman a excepción del campo de fondo, esto es:

$$(ic_{\mu\nu}\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial^{\nu}\psi)' = \Lambda^{\mu}{}_{\sigma}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}ic_{\mu\nu}\overline{\psi}\gamma^{\sigma}\partial^{\beta}\psi. \tag{2.4}$$

Sabemos que esto corresponde a aplicar las transformación sobre el experimento con respecto al campo de fondo.

No hay una sola o única prueba para buscar evidencia de violación de la simetría de Lorentz, por lo que buscar evidencia se puede volver una tarea exhaustiva. Los actuales límites en los efectos de violación de la simetría de Lorentz son buscados en experimentos astrofísicos como aquí mismo en la Tierra.

Como parte de la búsqueda terrestre, los fotones son usados en los experimentos más famosos para buscar violación de la simetría de Lorentz. Por una parte se tiene el famoso experimento de Michelson-Morley [15] que busca una discrepancia en el patrón de interferencia debido a la rotación del experimento. Mientras que el experimento Kennedy-Thordike [16] busca una discrepancia en el patrón debido al movimiento de la tierra alrededor de sol. Tenemos una rotación por parte del experimento de Michaelson-Morley que busca alguna variación de la velocidad de la luz y por otra parte tenemos un Boost en el experimento de Kennedy. Existen más trabajos que buscan alguna prueba de esta violación [17–19].

Del lado astrofísico algunas alternativas son experimentos basados en luz emitida por fuentes de distancias astronómicas, estos tienen una mayor precisión que los anteriores mencionados, ya que la larga propagación puede magnificar cualquier mínima diferencia en las propiedades de la luz causada por la violación Lorentz [20–23].

2.3. La Extensión del Modelo Estándar

Como ya se mencionó, el SME es una teoría efectiva que incorpora efectos de violación Lorentz. En este esquema, la lagrangiana del SM es extendida como:

$$\mathcal{L}_{SME} = \mathcal{L}_{SM} + \Delta\mathcal{L} \tag{2.5}$$

donde $\mathcal{L}_{SM}$ representa a la teoría estándar y $\Delta\mathcal{L}$ contiene los términos que violan Lorentz pero mantienen invariancia bajo transformaciones de Lorentz del observador y en algunos casos invariancia bajo *CPT*. Los términos que violan la simetría de Lorentz están hechos de productos de la forma $T^{\mu_1,..,\mu_n}\mathcal{O}_{\mu_1,..,\mu_n}$, donde los $T^{\mu_1,..,\mu_n}$ son n-tensores de Lorentz constantes, los cuales, aunque no representan grados de libertad, introducen direcciones especiales en el espacio, cuya presencia puede afectar de manera significativa el comportamiento dinámico de las partículas conocidas. Por otra parte, las cantidades $\mathcal{O}_{\mu_1,..,\mu_n}$ están hechas de contracciones apropiadas de campos del SM, los cuales son n-tensores bajo *SO(1, 3)* e invariantes bajo el grupo de norma del SM, $SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$.

La Lagrangiana es construida de los campos del SM. La parte izquierda y derecha de los multipletes de leptones y quarks, están denotados por:

$$L_A = \begin{pmatrix} \nu_A \\ l_A \end{pmatrix}_L, \qquad l_{AR} \tag{2.6}$$

$$Q_A = \begin{pmatrix} U_A \\ D_A \end{pmatrix}_L, \qquad U_{AR}, \qquad D_{AR}, \tag{2.7}$$

donde A representa la etiqueta de sabor de los leptones, $l_A = e, \mu, \tau$ con sus respectivos neutrinos $\nu_A = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$, para quarks de tipo up $U_A = u, c, t$ y para quarks de tipo down $D_A = d, s, b$, por otra parte cualquiera de los índices griegos $(\mu, \nu...)$ son índices de Lorentz. Los estados de helicidad izquierda y derecha están definidos por

$$\psi_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi = P_L\psi, \qquad \psi_R \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi = P_R\psi, \tag{2.8}$$

mientras que L_A y Q_A son dobletes izquierdos del grupo débil $SU_L(2)$.

Así, la sección de leptones y quarks por parte del SM es:

$$\mathcal{L}^{SM}_{leptones} = i\overline{L}_A\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu L_A + i\bar{l}_{AR}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu l_{AR}, \tag{2.9}$$

$$\mathcal{L}^{SM}_{quarks} = i\overline{Q}_A\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu Q_A + i\overline{U}_{AR}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu U_{AR} + i\overline{D}_{AR}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu D_{AR}, \tag{2.10}$$

El sector de Higgs:

$$\mathcal{L}^{SM}_{Higgs} = (\mathcal{D}_\mu\phi)^\dagger\mathcal{D}^\mu\phi + \mu^2\phi^\dagger\phi - \frac{\lambda}{3!}(\phi^\dagger\phi)^2 \tag{2.11}$$

El sector de norma:

$$\mathcal{L}^{SM}_{norma} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \tag{2.12}$$

donde $G_{\mu\nu}, W_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$ son los campos de norma de los grupos $SU(3)$, $SU(2)$, $U(1)$, respectivamente. El sector de Yukawa será estudiado en la siguiente sección.

Los términos que violan Lorentz, para la parte de leptones y quarks, los cuales denotaremos por VL (Violación Lorentz), son:

$$\mathcal{L}^{VL}_{leptones} = \overline{L}_A[i(c_L)^{AB}_{\mu\nu}\gamma^\mu\mathcal{D}^\nu - (a_L)^{AB}_\mu\gamma^\mu]L_B + \bar{l}_{AR}[i(c_R)^{AB}_{\mu\nu}\gamma^\mu\mathcal{D}^\nu - (a_R)^{AB}_\mu\gamma^\mu]l_{AR} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{VL}_{quarks} = {} & \overline{Q}_A[i(c_Q)^{AB}_{\mu\nu}\gamma^\mu\mathcal{D}^\nu - (a_Q)^{AB}_\mu\gamma^\mu]Q_B + \overline{U}_{AR}[i(c_U)^{AB}_{\mu\nu}\gamma^\mu\mathcal{D}^\nu - (a_U)^{AB}_\mu\gamma^\mu]U_{BR} \\ & + \overline{D}_{AR}[i(c_D)^{AB}_{\mu\nu}\gamma^\mu\mathcal{D}^\nu - (a_D)^{AB}_\mu\gamma^\mu]D_{BR}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Los términos que contienen a c_L, c_R, c_Q, c_U y c_D son pares bajo CPT, mientras que los términos que contienen a a_L, a_R, a_Q, a_U y a_D son impares bajo CPT.

Para el sector de Higgs:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{VL}_{Higgs} = {} & \left(\tfrac{1}{2}(k_{\phi\phi})^{\mu\nu}(\mathcal{D}_\mu\phi)^\dagger\mathcal{D}_\nu\phi + h.c\right) - \tfrac{1}{2}(k_{\phi B})^{\mu\nu}\phi^\dagger\phi B_{\mu\nu} \\ & -\tfrac{1}{2}(k_{\phi W})^{\mu\nu}\phi^\dagger W_{\mu\nu}\phi + \left(i(k_\phi)^\mu\phi^\dagger\mathcal{D}_\mu\phi + h.c.\right)\end{aligned} \tag{2.15}$$

Aquí, el último término encerrado entre paréntesis es impar bajo CPT, mientras que los demás son pares bajo CPT.

Y por ultimo tenemos el sector de norma:

$$\mathcal{L}^{VL}_{norma} = -\frac{1}{2}(k_G)_{\alpha\beta\mu\nu}\mathrm{Tr}(G^{\alpha\beta}G^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}(k_W)_{\alpha\beta\mu\nu}\mathrm{Tr}(W^{\alpha\beta}W^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}(k_B)_{\alpha\beta\mu\nu}B^{\alpha\beta}B^{\mu\nu} \tag{2.16}$$

Para el sector de norma los términos considerados son pares bajo CPT.

A continuación discutiremos con un poco detalle el sector de Yukawa, esto debido a que nuestro cálculo se realiza desde este sector.

2.4. Violación de Lorentz en el sector de Yukawa

Este proyecto estudia el acoplamiento de tres fotones en el contexto del SME. En el capítulo uno se presentó el resultado de la restricción del acoplamiento impar de fotones como consecuencia de conjugación de carga, por lo que este vértice no puede ser generado a ningún orden en la serie perturbativa en una teoría cuántica de campos convencional, pero si puede ser generado a orden de un lazo en el contexto de SME. El vértice puede ser inducido por sector de Yukawa extendido dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{SME}_{Y} = &-Y_L^{AB}\overline{L}_A\phi l_{RB} - \tfrac{1}{2}\,(H_L)^{AB}_{\mu\nu}\,\overline{L}_A\phi\sigma^{\mu\nu}l_{RB}\\ &-Y_U^{AB}\overline{Q}_A\widetilde{\phi}U_{RB} - \tfrac{1}{2}(H_U)^{AB}_{\mu\nu}\overline{Q}_A\widetilde{\phi}\sigma^{\mu\nu}U_{RB}\\ &-Y_D^{AB}\overline{Q}_A\phi D_{RB} - \tfrac{1}{2}(H_D)^{AB}_{\mu\nu}\overline{Q}_A\phi\sigma^{\mu\nu}D_{RB} + h.c.\end{aligned} \tag{2.17}$$

donde ϕ es el doblete de Higgs el cual es responsable de generar las masas de las partículas conocidas mediante el mecanismo de Higgs. $Y_L^{AB}, Y_U^{AB}, Y_D^{AB}$ son las matrices de Yukawa. Los términos que están a la izquierda pertenecen al sector de Yukawa del SM, mientras que los términos que se encuentran a la derecha corresponden a los términos que violan la simetría de Lorentz, los cuales son pares bajo CPT. Los coeficientes $(H_L)^{AB}_{\mu\nu}, (H_U)^{AB}_{\mu\nu}, (H_D)^{AB}_{\mu\nu}$ son 2-tensores de *SO(1,3)* y matrices 3×3 en el espacio de sabor, estos coeficientes son los que se identifican como campos de fondo, además de ello, estos tensores son antisimétricos con respecto a los índices de Lorentz pero simétricos con respecto a los índices de sabor.

En la norma unitaria

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Manejando la parte de SM, si realizamos los productos correspondientes y pasamos al espacio de sabor, tenemos:

$$\mathcal{L}^{SM}_{Y} = -\left(1+\frac{H}{v}\right)\overline{E}_L\widehat{M}_l E_R - \left(1+\frac{H}{v}\right)\overline{U}_L\widehat{M}_U U_R - \left(1+\frac{H}{v}\right)\overline{D}_L\widehat{M}_D D_R + h.c. \tag{2.19}$$

donde

$$\widehat{M}_f = \frac{v}{\sqrt{2}}Y_f \qquad E = \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Para diagonalizar a la matriz $\widehat{M}_f$ pasamos de los eigenestados de norma a los eigenestados de masa, para esto se tienen las siguientes transformaciones unitarias,

$$\begin{aligned} E_L = V_L^l E'_L, \qquad U_L = V_L^U U'_L, \qquad D_L = V_L^D D'_L,\\ E_R = V_R^l E'_R, \qquad U_R = V_R^U U'_R, \qquad D_R = V_R^D D'_R, \end{aligned} \tag{2.21}$$

al igual que las transformaciones inversas correspondientes,

$$\begin{aligned} E'_L &= (V_L^l)^\dagger E_L, \qquad U'_L = (V_L^U)^\dagger U_L, \qquad D'_L = (V_L^D)^\dagger D_L, \\ E'_R &= (V_R^l)^\dagger E_R, \qquad U'_R = (V_R^U)^\dagger U_R, \qquad D'_R = (V_R^D)^\dagger D_R. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Realizando dichas transformaciones junto a un renombramiento de variables primadas a no primadas y realizando los productos, nuestra ecuación (2.19) se escribe como

$$\mathcal{L}_{Yukawa}^{SM} = -\left(1+\frac{H}{v}\right)\left(\overline{E}_L M_l E_R + \overline{U}_L M_U U_R + \overline{D}_L M_D D_R\right) + h.c. \tag{2.23}$$

Ahora manipulando los proyectores izquierdos y derechos, nuestra ecuación se expresa de la forma:

$$\mathcal{L}_{Yukawa}^{SM} = -\sum_A \left(m_{f_A} + \frac{g m_{f_A}}{2m_W} H\right) \overline{f}_A f_A \tag{2.24}$$

Nótese que se ha sustituido v en favor de m_W y donde $f_A = e, \mu, \tau, u, c, t, d, s, b.$ y m_{f_A} sus masas correspondientes.

Ahora para los términos que violan la simetría de Lorentz, se realiza los productos y pasando al espacio de sabor se tiene:

$$-\frac{(v+H)}{2}\overline{E}_L (H_L)_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} E_R - \frac{(v+H)}{2}\overline{U}_L (H_L)_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} U_R - \frac{(v+H)}{2}\overline{D}_L (H_L)_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} D_R + h.c. \tag{2.25}$$

Concentrémonos en el primer término junto a su hermitico conjugado y realicemos la transformación que antes realizamos sobre los vectores de sabor

$$-\frac{(v+H)}{2}\left(\overline{E} Y_{\mu\nu}^L P_R \sigma^{\mu\nu} E + \overline{E}(Y_{\mu\nu}^L)^\dagger P_L \sigma^{\mu\nu} E\right) \tag{2.26}$$

Aquí $Y_{\mu\nu}^L = V_L^\dagger (H_L)_{\mu\nu} V_R$.

Realizando las operaciones con los proyectores de forma explícita, se llega a:

$$-\frac{(v+H)}{2}\bar{l}_A \left(V_{\mu\nu}^{LAB} + (A_{\mu\nu}^{LBA})^* \gamma^5\right) \sigma^{\mu\nu} l_B. \tag{2.27}$$

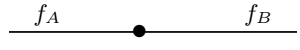
donde $V_{\mu\nu}^L = \frac{1}{2}(Y_{\mu\nu}^L + (Y_{\mu\nu}^L)^\dagger)$, $\quad A_{\mu\nu}^L = -\frac{1}{2}(Y_{\mu\nu}^L - (Y_{\mu\nu}^L)^\dagger)$. De esa misma forma se realiza para los demás términos con lo que se tiene:

$$\mathcal{L}_{Yukawa}^{VL} = -\frac{1}{2}\sum_{AB}(v+H)\overline{f}_A \left(V_{\mu\nu}^{AB} + (A_{\mu\nu}^{BA})^* \gamma^5\right) \sigma^{\mu\nu} f_B \tag{2.28}$$

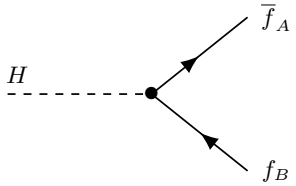
Al final la lagrangiana del sector de Yukawa para SME se lee como:

$$\mathcal{L}_Y^{SME} = -\sum_A \left(m_{f_A} + \frac{g m_{f_A}}{2m_W} H\right) \overline{f}_A f_A - \frac{1}{2}\sum_{AB}(v+H)\overline{f}_A \left(V_{\mu\nu}^{AB} + (A_{\mu\nu}^{BA})^* \gamma^5\right) \sigma^{\mu\nu} f_B. \tag{2.29}$$

Esta lagrangiana induce los siguientes vértices que presentan violación Lorentz:



$$= \; -\tfrac{iv}{2}\left(V_{\mu\nu}^{AB} + (A_{\mu\nu}^{BA})^* \gamma^5\right) \sigma^{\mu\nu} \tag{2.30}$$



$$= \quad -\tfrac{i}{2}\left(V_{\mu\nu}^{AB} + (A_{\mu\nu}^{BA})^{*}\gamma^{5}\right)\sigma^{\mu\nu} \tag{2.31}$$

En nuestro caso sólo haremos uso del primero, ya que el vértice $\gamma\gamma\gamma$ puede ser inducido a través de diagramas de triángulos de fermiones en cuyos propagadores se introducen inserciones del vértice cuadrático $\overline{f}_A f_A$. Lo anterior en virtud de la antisimetría de los tensores $V_{\alpha\beta}$ y $A_{\alpha\beta}$, los cuales pueden dar lugar a las siguientes interacciones no nulas con la curvatura electromagnética:

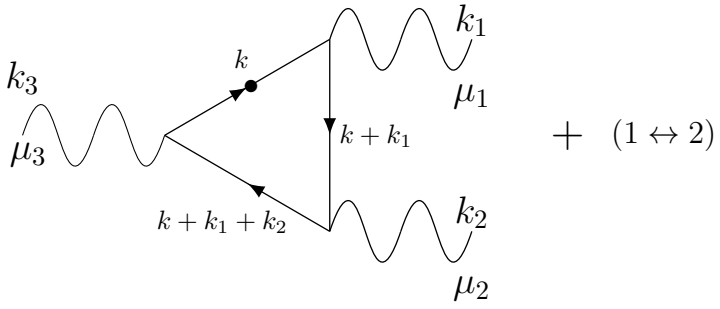
$$V^{\alpha\beta}F_{\alpha\lambda}F_{\beta\rho}F^{\lambda\rho}, \quad V^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}, \quad A^{\alpha\beta}\tilde{F}_{\alpha\lambda}F_{\beta\rho}F^{\lambda\rho}, \quad A^{\alpha\beta}\tilde{F}_{\alpha\beta}F_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho}. \tag{2.32}$$

Capítulo 3

Cálculo del vértice $\gamma\gamma\gamma$

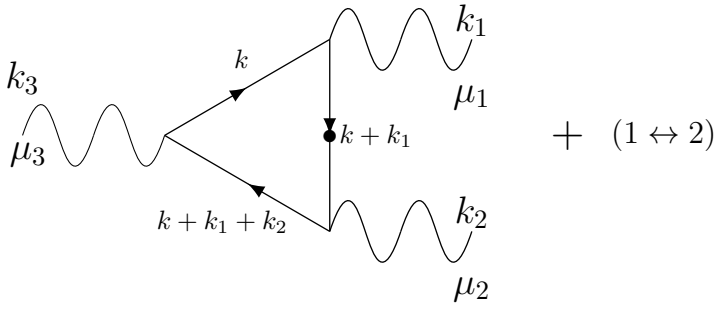
3.1. Diagramas de Feynman

Los diagramas correspondientes para nuestro cálculo son



(3.1)

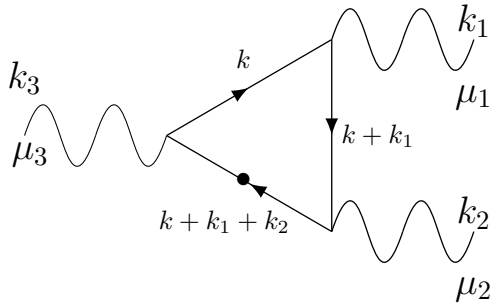
Teniendo estos dos diagramas se tiene que considerar para cada uno de ellos el intercambio de $(3 \leftrightarrow 1)$ y $(3 \leftrightarrow 2)$. También consideramos los siguientes diagramas



(3.2)

Note que la diferencia entre este diagrama y el anterior es el cambio de posición de la inserción del vértice que viola la simetría de Lorentz, y al igual que en los anteriores diagramas se tiene que considerar para cada uno de estos el intercambio de $(3 \leftrightarrow 1)$ y $(3 \leftrightarrow 2)$. Por último se consideran

los diagramas



$$+ \quad (1 \leftrightarrow 2) \tag{3.3}$$

De la misma forma, para cada uno de ellos considerar el intercambio de $(3 \leftrightarrow 1)$ y $(3 \leftrightarrow 2)$, esto debido a la simetría de Bose. Para nuestro cálculo bastará con que realicemos los correspondientes cálculos de los diagramas expuestos y después a los resultados obtenidos apliquemos el intercambio correspondiente.

Usando las reglas de Feynman, nuestros denominadores para los diagramas que aparecen en (3.1) son:

$$D_1 = D_2 = [k^2 - m^2]^2 \ [(k+k_1)^2 - m^2][(k+k_1+k_2)^2 - m^2] = D_{12}, \tag{3.4}$$

y recordemos que nuestro diagrama $(1 \leftrightarrow 2)$ se puede calcular como el primer diagrama sólo invirtiendo el sentido en el que los fermiones recorren el lazo, por esta razón los denominadores para ambos diagramas son el mismo, mientras que los numeradores son:

$$T^1_{\mu_1\mu_2\mu_3} = \mathrm{Tr}[\gamma_{\mu_3}(\not{k}+\not{k}_1+\not{k}_2+m)\gamma_{\mu_2}(\not{k}+\not{k}_1+m)\gamma_{\mu_1}(\not{k}+m)(V^f_{\mu\nu}+(A^f_{\mu\nu})^*\gamma^5)\sigma^{\mu\nu}(\not{k}+m)] \tag{3.5}$$

$$T^2_{\mu_1\mu_2\mu_3} = \mathrm{Tr}[\gamma_{\mu_3}(-\not{k}+m)(V^f_{\mu\nu}+(A^f_{\mu\nu})^*\gamma^5)\sigma^{\mu\nu}(-\not{k}+m)\gamma_{\mu 1}(-\not{k}-\not{k}_1+m)\gamma_{\mu_2}(-\not{k}-\not{k}_1-\not{k}_2+m)] \tag{3.6}$$

Observe que hemos eliminado los índices de sabor y los hemos sustituido por la letra f, ya que sólo contribuyen los elementos diagonales, es decir, $V^{ee}, V^{\mu\mu}, V^{\tau\tau}$, etc. Así, nuestra primera contribución de los dos primeros diagramas es:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{N^{12}_{\mu_1\mu_2\mu_3}}{D_{12}} \tag{3.7}$$

donde $N^{12}_{\mu_1\mu_2\mu_3} = T^1_{\mu_1\mu_2\mu_3} + T^2_{\mu_1\mu_2\mu_3}$.

Los denominadores y numeradores para los diagramas que aparecen en (3.2) son:

$$D_3 = D_4 = [k^2 - m^2][(k+k_1)^2 - m^2]^2 \ [(k+k_1+k_2)^2 - m^2] = D_{34}, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} T^3_{\mu_1\mu_2\mu_3} = \mathrm{Tr}\Big[&\gamma_{\mu_3}(\not{k}+\not{k}_1+\not{k}_2+m)\gamma_{\mu_2}(\not{k}+\not{k}_1+m)(V^f_{\mu\nu}+(A^f_{\mu\nu})^*\gamma^5)\sigma^{\mu\nu}(\not{k}+\not{k}_1+m) \\ &\gamma_{\mu_1}(\not{k}+m)\Big], \\ T^4_{\mu_1\mu_2\mu_3} = \mathrm{Tr}\Big[&\gamma_{\mu_3}(-\not{k}+m)\gamma_{\mu_1}(-\not{k}-\not{k}_1+m)(V^f_{\mu\nu}+(A^f_{\mu\nu})^*\gamma^5)\sigma^{\mu\nu}(-\not{k}-\not{k}_1+m) \\ &\gamma_{\mu_2}(-\not{k}-\not{k}_1-\not{k}_2+m)\Big]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Por último los denominadores y numeradores para los diagramas que aparecen en (3.3) son:

$$D_5 = D_6 = [k^2 - m^2][(k + k_1)^2 - m^2][(k + k_1 + k_2)^2 - m^2]^2 = D_{56}, \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} T^5_{\mu_1\mu_2\mu_3} = \mathrm{Tr}\Big[&\gamma_{\mu_3}(\not{k} + \not{k}_1 + \not{k}_2 + m)(V^f_{\mu\nu} + (A^f_{\mu\nu})^*\gamma^5)\sigma^{\mu\nu}(\not{k} + \not{k}_1 + \not{k}_2 + m)\gamma_{\mu_2}(\not{k} + \not{k}_1 + m) \\ &\gamma_{\mu_1}(\not{k} + m)\Big], \\ T^6_{\mu_1\mu_2\mu_3} = \mathrm{Tr}\Big[&\gamma_{\mu_3}(-\not{k} + m)\gamma_{\mu_1}(-\not{k} - \not{k}_1 + m)\gamma_{\mu_2}(-\not{k} - \not{k}_1 - \not{k}_2 + m)(V^f_{\mu\nu} + (A^f_{\mu\nu})^*\gamma^5)\sigma^{\mu\nu} \\ &(-\not{k} - \not{k}_1 - \not{k}_2 + m)\Big] \end{aligned} \tag{3.11}$$

Sumando las respectivas contribuciones

$$\Gamma^{f1}_{\mu_1\mu_2\mu_3} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{N^{12}_{\mu_1\mu_2\mu_3}}{D_{12}} + \frac{N^{34}_{\mu_1\mu_2\mu_3}}{D_{34}} + \frac{N^{56}_{\mu_1\mu_2\mu_3}}{D_{56}}\right) \tag{3.12}$$

El superíndice 1 de $\Gamma^{f1}_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ representará al primer resultado, ya que a este primer resultado se le realizará el intercambio de $(3 \leftrightarrow 1)$ y $(3 \leftrightarrow 2)$, los cuales se representarán por $\Gamma^{f2}_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ y $\Gamma^{f3}_{\mu_1\mu_2\mu_3}$, respectivamente.

Observe que algunos elementos no aparecen aquí, tales como el factor ieQ_f por cada vértice o el término $\frac{-iv}{2}$ del vértice que viola la simetría de Lorentz; estos términos los añadiremos en nuestro resultado final, ya que todos son factores en común.

Las condiciones cinemáticas de nuestro proceso son las siguientes:

$$\begin{gathered} (k_1)^2 = 0, \quad (k_2)^2 = 0, \quad (k_3)^2 = 0, \\ k_1 \cdot k_2 = 0, \quad k_1 \cdot k_3 = 0, \quad k_2 \cdot k_3 = 0. \end{gathered} \tag{3.13}$$

y por condición de transversalidad $k_{1\mu_1} \to 0$, $k_{2\mu_2} \to 0$, $k_{3\mu_3} \to 0$

3.2. Parametrización de Feynman

Para resolver las integrales anteriores usamos la parametrización de Feynman, la cual es una técnica para evaluar las integrales que surgen de diagramas de lazo.

Definamos los siguientes elementos:

$$A_1 = (k + k_1 + k_2)^2 - m^2, \quad A_2 = (k + k_1)^2 - m^2, \quad A_3 = k^2 - m^2. \tag{3.14}$$

Observe que con estos elementos podemos formar los denominadores D_{12}, D_{34} y D_{56}. Nuestros denominadores se pueden escribir usando la parametrización de Feynman de la siguiente manera

$$D_{12} = \frac{1}{A_1A_2(A_3)^2} = \Gamma(4)\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1 - x - y}{[A_1x + A_2y + A_3(1 - x - y)]^4} \tag{3.15}$$

$$D_{34} = \frac{1}{A_1(A_2)^2A_3} = \Gamma(4)\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{y}{[A_1x + A_2y + A_3(1 - x - y)]^4} \tag{3.16}$$

$$D_{56} = \frac{1}{(A_1)^2A_2A_3} = \Gamma(4)\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{x}{[A_1x + A_2y + A_3(1 - x - y)]^4} \tag{3.17}$$

No es difícil probar que

$$[A_1x + A_2y + A_3(1-x-y)] = (k+l)^2 - m^2 \tag{3.18}$$

donde $l = x(k_1+k_2) + yk_1$.

En este caso no existe divergencia por lo que:

$$\Gamma^{f1}_{\mu_1\mu_2\mu_3} = \Gamma(4)\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{(1-x-y)N^{12}_{\mu_1\mu_2\mu_3} + yN^{34}_{\mu_1\mu_2\mu_3} + xN^{56}_{\mu_1\mu_2\mu_3}}{[(k+l)^2-m^2]^4}\right) \tag{3.19}$$

Ahora si se realiza el cambio de variable de $k \to k-l$

$$\Gamma^{f1}_{\mu_1\mu_2\mu_3} = \Gamma(4)\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{(1-x-y)N'^{12}_{\mu_1\mu_2\mu_3} + yN'^{34}_{\mu_1\mu_2\mu_3} + xN'^{56}_{\mu_1\mu_2\mu_3}}{[k^2-m^2]^4}\right) \tag{3.20}$$

La prima en los numeradores significa que debemos realizar el cambio correspondiente en ellos, ya que estos dependen de la variable k.

La amplitud tensorial debe satisfacer las siguientes identidades de Ward:

$$k_1^{\mu_1}\Gamma^{fi}_{\mu_1\mu_2\mu_3} = 0, \qquad k_2^{\mu_2}\Gamma^{fi}_{\mu_1\mu_2\mu_3} = 0, \qquad k_3^{\mu_3}\Gamma^{fi}_{\mu_1\mu_2\mu_3} = 0, \tag{3.21}$$

que son consecuencia de la invariancia de norma, esto es, invariancia bajo el grupo $U_Q(1)$. Esto significa que a nivel de lagrangiana, el acoplamiento de $\gamma\gamma\gamma$ debe ser algún factor multiplicando a las estructuras (2.28)

El siguiente paso es obtener las respectivas trazas de $N'^{12}_{\mu_1\mu_2\mu_3}, N'^{34}_{\mu_1\mu_2\mu_3}, N'^{56}_{\mu_1\mu_2\mu_3}$, para después integrar. Este cálculo se realiza por medio del software FeynCalc. Una vez realizado, se tienen tres tipos de integrales diferentes a cero, las cuales enunciamos con sus respectivos resultados.

Integral tipo 1

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{(k^2-m^2)^4} = \frac{i\,\Gamma(2)}{(4\pi)^2\,\Gamma(4)\,m^4} \tag{3.22}$$

Integral tipo 2

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k^2}{(k^2-m^2)^4} = -\frac{2i\,\Gamma(1)}{(4\pi)^2\,\Gamma(4)\,m^2} \tag{3.23}$$

Integral tipo 3

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-m^2)^4} = -\frac{i\,\Gamma(1)\,g_{\mu\nu}}{(4\pi)^2\,\Gamma(4)\,m^2} \tag{3.24}$$

Las integrales que son impar en k son idénticamente cero.

Se procede a resolver las integrales y factorizar con respecto a $V^f_{\mu\nu}$ y $A^f_{\mu\nu}$ para tener sus respectivas estructuras, una vez teniendo aquellos resultados se procede a hacer el intercambio de $(3 \leftrightarrow 1)$ y $(3 \leftrightarrow 2)$ para considerar los diagramas restantes.

3.3. Amplitud

La amplitud de nuestro proceso es:

$$\mathcal{M} = e^2 s_W m_W \sum_f Q_f^3 N_c \Gamma^f_{\mu 1\mu 2\mu 3}\epsilon^{\mu 1}(k_1,\lambda_1)\epsilon^{\mu 2}(k_2,\lambda_2)\epsilon^{\mu 3}(k_3,\lambda_3) \tag{3.25}$$

con N_c el índice de color cuyo valor es 3 para quarks y 1 para leptones cargados y donde

$$\Gamma^f_{\mu 1\mu 2\mu 3} = \Gamma^{f1}_{\mu_1\mu_2\mu_3} + \Gamma^{f2}_{\mu_1\mu_2\mu_3} + \Gamma^{f3}_{\mu_1\mu_2\mu_3} \tag{3.26}$$

Escribiendo de forma explicita los resultados

$$\Gamma^f_{\mu 1\mu 2\mu 3} = \frac{1}{2m_f^3\pi^2}\left(J^{123}_{\mu_1\mu_2\mu_3} + J^{321}_{\mu_1\mu_2\mu_3} + J^{312}_{\mu_1\mu_2\mu_3}\right) + \frac{i}{4m_f^3\pi^2}\left(Q^{123}_{\mu_1\mu_2\mu_3} + Q^{321}_{\mu_1\mu_2\mu_3} + Q^{312}_{\mu_1\mu_2\mu_3}\right), \tag{3.27}$$

donde

$$\begin{aligned}
J^{123}_{\mu_1\mu_2\mu_3} &= V_f^{\alpha\beta}\Big[k_{1\alpha}k_{2\beta}(k_{3\mu_1}g_{\mu_2\mu_3} - k_{3\mu_2}g_{\mu_1\mu_3}) + k_{2\beta}k_{1\mu_3}k_{3\mu_2}g_{\alpha\mu_1} - k_{1\alpha}k_{3\mu_1}k_{2\mu_3}g_{\beta\mu_2} \\
&\quad + 2k_{3\alpha}k_{2\mu_1}k_{1\mu_2}g_{\beta\mu_3}\Big] \\
J^{321}_{\mu_1\mu_2\mu_3} &= V_f^{\alpha\beta}\Big[k_{2\alpha}k_{3\beta}(k_{1\mu_2}g_{\mu_1\mu_3} - k_{1\mu 3}g_{\mu_1\mu_2}) + k_{3\beta}k_{1\mu_3}k_{2\mu_1}g_{\alpha\mu_2} - k_{2\alpha}k_{1\mu_2}k_{3\mu_1}g_{\beta\mu_3} \\
&\quad + 2k_{1\alpha}k_{2\mu_3}k_{3\mu_2}g_{\beta\mu_1}\Big] \\
J^{312}_{\mu_1\mu_2\mu_3} &= V_f^{\alpha\beta}\Big[k_{1\alpha}k_{3\beta}(k_{2\mu_1}g_{\mu_2\mu_3} - k_{2\mu_3}g_{\mu_1\mu_2}) + k_{3\beta}k_{2\mu_3}k_{1\mu_2}g_{\alpha\mu_1} - k_{1\alpha}k_{3\mu_2}k_{2\mu_1}g_{\beta\mu_3} \\
&\quad + 2k_{2\alpha}k_{1\mu_3}k_{3\mu_1}g_{\beta\mu_2}\Big]
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
Q^{123}_{\mu_1\mu_2\mu_3} &= (A^{\alpha\beta})^*_f\Big[k_{3\beta}(g_{\mu_2\mu_3}\epsilon_{\alpha\mu_1 k_1 k_2} - g_{\mu_1\mu_3}\epsilon_{\alpha\mu_2 k_1 k_2}) + g_{\beta\mu_3}(k_{3\mu_1}\epsilon_{\alpha\mu_2 k_1 k_2} - k_{3\mu_2}\epsilon_{\alpha\mu_1 k_1 k_2}) \\
&\quad + k_{3\beta}k_{1\mu_3}\epsilon_{\alpha\mu_1\mu_2 k_3}\Big] \\
Q^{321}_{\mu_1\mu_2\mu_3} &= (A^{\alpha\beta})^*_f\Big[k_{1\beta}(g_{\mu_1\mu_2}\epsilon_{\alpha\mu_3 k_3 k_2} - g_{\mu_1\mu_3}\epsilon_{\alpha\mu_2 k_3 k_2}) + g_{\beta\mu_1}(k_{1\mu_3}\epsilon_{\alpha\mu_2 k_3 k_2} - k_{1\mu_2}\epsilon_{\alpha\mu_3 k_3 k_2}) \\
&\quad + k_{1\beta}k_{3\mu_1}\epsilon_{\alpha\mu_3\mu_2 k_1}\Big] \\
Q^{312}_{\mu_1\mu_2\mu_3} &= (A^{\alpha\beta})^*_f\Big[k_{2\beta}(g_{\mu_2\mu_3}\epsilon_{\alpha\mu_1 k_1 k_3} - g_{\mu_1\mu_2}\epsilon_{\alpha\mu_3 k_1 k_3}) + g_{\beta\mu_2}(k_{2\mu_1}\epsilon_{\alpha\mu_3 k_1 k_3} - k_{2\mu_3}\epsilon_{\alpha\mu_1 k_1 k_3}) \\
&\quad + k_{2\beta}k_{1\mu_2}\epsilon_{\alpha\mu_1\mu_3 k_2}\Big]
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Aquí los momentos que aparecen como subíndices del tensor Levi-civita, representan contracción con el tensor, esto es:

$$\epsilon_{\alpha\beta k_1 k_2} = \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}k_1^\mu k_2^\nu \tag{3.30}$$

Todas estas estructuras cumplen con la identidad de Ward.

$$J^i_{\mu_1\mu_2\mu_3}k_1^{\mu_1} = 0, \quad J^i_{\mu_1\mu_2\mu_3}k_2^{\mu_2} = 0, \quad J^i_{\mu_1\mu_2\mu_3}k_3^{\mu_3} = 0, \tag{3.31}$$

$$Q^i_{\mu_1\mu_2\mu_3}k_1^{\mu_1} = 0, \quad Q^i_{\mu_1\mu_2\mu_3}k_2^{\mu_2} = 0, \quad Q^i_{\mu_1\mu_2\mu_3}k_3^{\mu_3} = 0. \tag{3.32}$$

Nótese también que dada una J de las ecuaciones (3.28) se obtienen las otras dos por permutaciones cíclicas de 123, esto debido a la simetría de Bose, de igual forma dada una Q de las expresiones en (3.29), se obtienen las otras dos por permutaciones cíclicas.

Capítulo 4

Conclusiones

Dentro de las teorías de campo convencionales, en las cuales la operación de carga es una simetría exacta, el acoplamiento de un número impar de fotones está prohibido a todo orden de la serie perturbativa. A este resultado se le conoce como el teorema de Furry, que históricamente fue establecido para el caso de tres fotones. En este trabajo se ha demostrado que el acoplamiento de tres fotones es distinto de cero en el contexto de la Extensión del Modelo Estándar, dicho acoplamiento es generado a orden de un lazo por el sector de Yukawa extendido. El trabajo se ha enfocado al caso especial en el que los tres fotones están en capa de masa.

En un trabajo posterior se tratará con el acoplamiento de dos fotones en capa de masa y uno fuera de capa de masa ($\gamma\gamma\gamma^*$), este no solo tiene interés teórico sino también fenomenológico, ya que a diferencia del acoplamiento tratado en este trabajo, en este último se pueden estudiar procesos de interés experimental, como podría ser una colisión electrón positrón produciendo un fotón virtual que después se transforma en dos fotones reales. Otro proceso de interés puede ser el caso de la dispersión de luz por luz, el cual es de amplio interés experimental en la actualidad.

Bibliografía

[1] C. D. Froggatt and H. B. Nielsen, *Origin of Symmetries* (World Scientific, Singapore, 1991)

[2] Ver, por ejemplo, M.E. Peskin and D. V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley (1996)

[3] F. Englert and R. Brout, *Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons*, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964); P. W. Higgs, *Broken symmetries, massless particles and gauge fields*, Phys. Lett. **12**, 132 (1964); P. W. Higgs, *Broken symmetries and the masses of gauge bosons*, Phys. Rev. Lett. **13**, 508 (1964); G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, *Global conservation laws and massless particles*, Phys. Rev. Lett. **13**, 585 (1964); P. W. Higgs, *Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons*, Phys. Rev. **145**, 1156 (1966); T. W. B. Kibble, *Symmetry breaking in nonabelian gauge theories*, Phys. Rev. **155**, 1554 (1967).

[4] L. D. Landau, Dokl Alkad. Nauk SSSR 60, 242 (1948); C. N. Yang, Phys. Rev. **77**, 242 (1950).

[5] J. Castro-Medina, H. Novales-Sánchez, J. J. Toscano, and E. S. Tututi, *Decays $Z \to \gamma\gamma$ and $Z \to gg$ in the Standard Model Extens*, Int. J. Mod. Phys. A **30**, No. 35, 1550216 (2015).

[6] D. Colladay and V. A. Kostelecky, *Lorentz-violating extension of the standard model*, Phys. Rev. D 58, 116002 (1998)

[7] A. Barroso, F. Boudjema, J. Cole, and N. Dombey, Z. Phys. C 28, 149 (1985); F. Larios, M. A. Pérez, G. Tavares-Velasco, and J. J. Toscano, *Trilinear neutral gauge boson couplings in effective theories*, Phys. Rev. D **63**, 113014 (2001).

[8] A. Flores-Tlalpa, J. Montaño, F. Ramírez-Zavaleta, and J. J. Toscano, *Decays $Z \to ggg$ and $Z' \to ggg$ in the minimal 331 model*, Phys. Rev. D **80**, 033006 (2009); **80**, 077301 (2009).

[9] M.E. Peskin and D. V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley (1996, p. 805)

[10] J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. **37**, 452 (1951).

[11] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **89**, 231602 (2002).

[12] R. Potting, Journal of Physics: Conference Series, **447**, 012009 (2013).

[13] V. A. Kostelecky and C. Samuel, Phys. Rev. D **39**, 683 (1989).

[14] R. Gambini and J. Pullin, Phys. Rev. D **59**, 124021 (1999)

[15] A. A. Michelson, E. W. Morley, American Journal of Science, issue 203, pp. 333-345 (1887)

[16] J. R Kennedy and E. M. Thorndike, Phys. Rev. **42**, 400 (1932)

[17] J. A. Lipa, J. A. Nissen, S. Wang, D. A. Stricker, and D. Avaloff, Phys. Rev. Lett. **90**, 060403 (2003).

[18] M. Nagel, S. Parker, E. Kovalchuk, Nat Commun. **6**, 8174 (2015).

[19] P. Wolf, M. E. Tobar, S. Bize, General Relativity and Gravitation **36**, 2351–2372 (2004)

[20] M. Sean, G. B. Field, and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990)

[21] V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001).

[22] D. Götz, P. Laurent, S. Antier, S. Covino, P. D'Avanzo, V. D'Elia, A. Melandri, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 444, Issue 3, (2014).

[23] L. Maccione, S. Liberati, A. Celotti, J. G. Kirk, and P. Ubertini, Phys. Rev. D **78**, 103003 (2008).