



Benemérita Universidad Autónoma  
de Puebla



Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

# Determinación de la Ecuación de Movimiento del Estado de Polarización de Ondas Electromagnéticas en Medios Anisótropos

---

T E S I S

presentada al

Posgrado en Ciencias  
(Física Aplicada)

como requisito para obtener el grado de

*Maestra en Ciencias  
(Física Aplicada)*

presenta

Guadalupe Fernández Fermín  
luff014@gmail.com

Asesor:

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco  
marroyo@fcfm.buap.mx

Puebla, Puebla, México  
Julio, 2022



**Título:** Determinación de la ecuación de movimiento del estado de polarización de ondas electromagnéticas en medios anisótropos.

**Estudiante:** Guadalupe Fernández Fermín

## JURADO

---

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero  
Presidenta

---

Dra. María del Rosario Pastrana Sánchez  
Secretaria

---

Dr. Cruz Fabian Meneses  
Vocal

---

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez  
Suplente

---

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco  
Director de tesis

# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Resumen</b>   | <b>iv</b> |
| <b>Agradecimientos</b>   | <b>vi</b> |
| <b>1 Introducción</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2 Teoría Electromagnética</b>                                   | <b>4</b>  |
| 2.1 Ecuaciones de Maxwell . . . . .                                | 4         |
| 2.2 Ecuación de Onda . . . . .                                     | 5         |
| 2.3 Comportamiento vectorial de la luz . . . . .                   | 6         |
| 2.4 Polarización . . . . .   | 8         |
| 2.4.1 Polarización lineal . . . . .                                | 9         |
| 2.4.2 Polarización circular . . . . .                              | 11        |
| 2.4.3 Parámetros de la elipse de polarización . . . . .            | 11        |
| 2.5 Estado de polarización en el plano complejo . . . . .          | 14        |
| 2.6 Vectores de Jones . . . . .                                    | 14        |
| <b>3 Propagación de la Luz en Medios</b>                           | <b>18</b> |
| 3.1 Propagación de una Onda Plana en un Medio Anisótropo . . . . . | 20        |
| 3.1.1 Superficie Normal . . . . .                                  | 22        |
| 3.1.2 Elipsoide de Índices . . . . .                               | 25        |
| <b>4 Estado de Polarización</b>                                    | <b>31</b> |
| 4.1 Actividad óptica . . . . .                                     | 31        |
| 4.2 Modos acoplados en un medio anisótropo . . . . .               | 34        |
| 4.3 Ecuación de movimiento del estado de polarización . . . . .    | 41        |
| <b>5 Conclusiones</b>  | <b>44</b> |
| <b>Referencias</b>   | <b>46</b> |

# Índice de figuras

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Campo electromagnético propagándose en dirección z. La onda azul indica el comportamiento del campo eléctrico, la roja marca el del magnético.          | 8  |
| 2.2 | Elipse de polarización . . . . .  | 10 |
| 2.3 | Casos particulares de polarización lineal. . . . .  | 11 |
| 2.4 | Casos particulares de polarización circular. . . . .  | 11 |
| 2.5 | Elipse de polarización rotada a un ángulo $\Psi$ . . . . .  | 12 |
| 2.6 | Estados de polarización en el plano complejo . . . . .  | 15 |
| 3.1 | Carga ligada a resortes de distinta rigidez. . . . .  | 19 |
| 3.2 | Relación entre los vectores $\vec{E}$ , $\vec{H}$ , $\vec{D}$ , $\vec{B}$ , dirección de propagación $\vec{k}$ y vector de Poynting $\vec{S}$ . . . . . | 21 |
| 3.3 | Octante de superficie normal . . . . .  | 23 |
| 3.4 | Planos de intersección entre circunferencia y elipse para cristales uniaxiales  | 24 |
| 3.5 | Planos principales de la superficie normal para un cristal biaxial . . . .  | 26 |
| 3.6 | Elipsoide de índices . . . . .  | 27 |
| 3.7 | Elipsoides de índices para los diferentes tipos de cristales . . . . .  | 29 |
| 3.8 | Elipsoide de índices . . . . .  | 30 |
| 4.1 | Rotación del plano de polarización de un medio óptico activo . . . . .  | 32 |
| 4.2 | Elipses de polarización de los modos normales en presencia de birrefringencia y poder de rotación. . . . .  | 35 |

# Resumen

Para entender la propagación de una onda de luz en un material determinado es necesario tomar en cuenta el carácter vectorial del campo electromagnético, la constitución estructural del material y las características de la interacción entre ambos. En este trabajo de tesis a partir del conocimiento del estado de polarización inicial de una onda de luz y de su dirección de propagación dentro de un material anisótropo, cuyas propiedades estructurales y orientaciones espaciales han sido predeterminadas, se encuentra y describe el estado final de polarización de la luz después de propagarse una distancia determinada. Por medio del elipsoide de índices de refracción se podrán determinar la velocidad de fase y velocidad de la energía de la onda de luz y aplicando la teoría de modos acoplados en la propagación de ondas en medios anisótropos determinar la ecuación de movimiento del estado de polarización de una onda electromagnética.

*Palabras Clave: Polarización, Medios anisótropos, Modos acoplados.*

# Agradecimientos

A mi asesor el Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco por su paciencia, apoyo y guía en la realización de este trabajo de tesis.

A mi familia, por estar ahí para mí.

A Miguel y Cinthya por escuchar y comprender.

A CONACYT por los recursos proporcionados.



# Capítulo 1

## Introducción

La luz es uno de los fenómenos físicos que más ha llamado la atención del ser humano; la óptica es la rama de la física dedicada al estudio de la luz, sus características, comportamiento y propagación dentro de un medio material. Por lo tanto, no se puede hablar de luz sin hablar de óptica.

En uno de los primeros acercamientos al estudio de la luz, los filósofos de la antigua Grecia explicaron la propagación de la luz con el concepto de rayo [1]. Con el paso del tiempo, el hombre y su intención de comprender la interacción entre rayos de luz y materia propiciaron la creación de instrumentos ópticos, físicos y matemáticos, que le permitieran manipular y analizar su comportamiento. Como muestra de estos estudios se observó la división en dos de un haz al atravesar un cristal de calcita, realizado por Bartholinus. De aquí se concluyó que la luz tiene comportamientos diferentes de acuerdo al medio en el que se propaga[2].

Durante el siglo XVII se discutía sobre las dos principales ideas acerca de la propagación de la luz, pertenecientes a Huygens y Newton [3]. Fue hasta que Thomas Young asentó la teoría ondulatoria de la luz a través de su principio de interferencia que se estableció a la luz como una onda transversal. Teoría complementada por el trabajo de Fresnel y Arago sobre las ideas de Huygens [4].

Maxwell introdujo, a través de los resultados empíricos de Faraday, cuatro ecuaciones las cuales describen el comportamiento de los campos electromagnéticos y su propagación mediante ondas transversales; al determinar la velocidad de la onda encontró que solo depende de cantidades vectoriales, eléctricas y magnéticas, y además coincidía con la velocidad de la luz, previamente medida por Roemer [5]. De aquí se obtuvo que la luz es una onda electromagnética transversal y la dirección de vibración

del campo eléctrico de la onda de luz se le conoce como polarización la cual, de forma general, describe una elipse (conocida como elipse de polarización) conforme la onda se propaga. Más aún, como consecuencia del comportamiento vectorial, Jones realizó una normalización de los estados de polarización en lo que conocemos como vectores de Jones[6].

En óptica existen medios transparentes y opacos para la luz; los primeros permiten que la luz se transmita a través de ellos con la mínima absorción; los segundos, por el contrario no permiten que la luz se transmita [7, 8]. En particular, los cristales son medios transparentes formados por conjuntos de átomos ordenados de manera regular cuya estructura permite clasificarlos en isótropos y anisótropos[9]. De aquí que la dirección de propagación de la onda, la estructura del cristal y la interacción entre ambos causan cambios en la fase de las componentes de la onda, por lo tanto se tienen cambios en la polarización y velocidad de la onda a la salida del material [10, 11].

Los cristales anisótropos, son de particular interés para la óptica ya que diversos instrumentos ópticos están hechos de este tipo de medios, como por ejemplo polarizadores, placas retardadoras, compensadores, moduladores de fase entre otros [12]. Lo anterior a llevado a diferentes estudios en este tipo de materiales para entender lo que sucede a la elipse de polarización [13, 14], o describirlos mediante la teoría de Jones [15, 16]. Más aún, se tienen diferentes fenómenos como la actividad óptica con aplicaciones en la óptica no lineal en la generación de segundo y tercer armónico, láseres de pulsos, etc [17, 18].

En este trabajo de tesis se realiza un estudio de la ecuación de movimiento del estado de polarización de una onda electromagnética para determinar y comprender el estado final de polarización de una onda al propagarse en un material anisótropo. Con la finalidad de obtener dichos resultados este trabajo se presenta en tres capítulos que a continuación se resumen.

En el capítulo dos se realiza una revisión de la teoría electromagnética; mediante las ecuaciones de Maxwell se obtiene la ecuación de onda y su solución de onda plana, determinamos el comportamiento vectorial de los campos electromagnéticos que componen a la onda y se define el concepto de polarización.

En el capítulo tres se analiza la propagación de una onda plana en medios materiales, se obtiene la ecuación de Fresnel y se analizan los modelos de superficie normal y

elipsoide de índices.

En el capítulo cuatro se estudia la teoría de modos acoplados para el campo eléctrico como método para determinar el cambio en el estado de polarización de una onda, se estudia el ejemplo de una onda propagándose en un cristal óptico activo. Se analiza la ecuación de movimiento del estado de polarización para un medio anisótropo y se compara con lo obtenido anteriormente. Finalmente en el capítulo 5 se dan las conclusiones.

# Capítulo 2

## Teoría Electromagnética

La luz es una onda electromagnética descrita por las ecuaciones de Maxwell cuyo comportamiento está regido por una ecuación de onda en el espacio y en el tiempo. Más aún, de las soluciones a la ecuación de onda es posible demostrar que sus componentes, magnética y eléctrica, son cantidades vectoriales transversales a la dirección de propagación. Como consecuencia de este comportamiento vectorial se define a la polarización como la dirección de vibración del campo eléctrico con diferentes tipos de representaciones tales como la elipse de polarización y los vectores de Jones.

En este capítulo estudiamos la teoría de las ecuaciones de Maxwell, la descripción de una onda de luz a partir de dichas ecuaciones, demostrando su comportamiento vectorial y el plano transversal a la dirección de propagación. Veremos como se define al fenómeno de polarización y algunos de sus casos particulares, así como su representación en la elipse de polarización y en los vectores de Jones.

### 2.1 Ecuaciones de Maxwell

Los campos electromagnéticos están descritos por un conjunto de ecuaciones, obtenidas por Maxwell durante el siglo XIX, las cuales llevan su nombre. Para un medio se tiene [19]:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.1.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}, \quad (2.1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (2.1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.1.4)$$

donde

$$\vec{D} = (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}), \quad (2.1.5)$$

conocido como vector de desplazamiento eléctrico con  $\vec{P}$  el termino de polarización y

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}), \quad (2.1.6)$$

para la inducción magnética con  $\vec{M}$  la magnetización. Estas ecuaciones están completadas con relaciones que describen el comportamiento de la materia como respuesta a un campo aplicado

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (2.1.7)$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (2.1.8)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (2.1.9)$$

Aquí  $\sigma$  es la conductividad específica,  $\varepsilon$  es la constante dieléctrica (o permitividad) y  $\mu$  es la permeabilidad magnética.

- $\vec{J}$  indica la respuesta de los electrones de conducción al campo aplicado.
- $\vec{D}$  describe la respuesta agregada de las cargas ligadas al campo eléctrico.
- $\vec{B}$  la respuesta correspondiente al campo magnético.

## 2.2 Ecuación de Onda

Supongamos una onda propagándose en el espacio libre, donde se tiene  $\rho = 0$ ,  $\vec{J} = 0$ ,  $\vec{M} = 0$ , las ecuaciones de Maxwell se reducen a

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (2.2.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (2.2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0. \quad (2.2.4)$$

Para obtener la ecuación diferencial que debe satisfacer la onda aplicamos el rotacional,

$\nabla \times ()$ , a ambos lados de (2.2.1) y luego sustituimos (2.2.2) para  $\vec{H}$ , entonces

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.2.5)$$

Utilizando (2.2.3) y la identidad vectorial  $\nabla \times (\nabla \times) \equiv \nabla(\nabla \cdot) - \nabla^2()$  obtenemos

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.2.6)$$

Esta ecuación es conocida como ecuación de onda (análogamente se obtiene una expresión para  $\vec{H}$ ) y nos dice que cambios en el campo eléctrico se propagan a través del espacio libre con velocidad igual al valor

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 2,997930 \times 10^8 \text{ m/s}, \quad (2.2.7)$$

mientras que, en un medio la velocidad se ve reducida y a la razón entre la velocidad en el vacío y la velocidad en un medio se le conoce como índice de refracción denotada por  $n$

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{\mu_0 \varepsilon_0}}. \quad (2.2.8)$$

Una solución de la ecuación de onda (2.2.6) es la onda plana

$$U(\vec{r}, t) = U_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (2.2.9)$$

donde los puntos que satisfacen

$$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{constante}, \quad (2.2.10)$$

definen un plano de fase constante, perpendicular a la dirección de propagación.

## 2.3 Comportamiento vectorial de la luz

Consideremos una onda plana armónica en el tiempo de la forma  $e^{i(\vec{r} \cdot \vec{k} - \omega t)}$ . Derivando con respecto del tiempo, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{i(\vec{r} \cdot \vec{k} - \omega t)} = -i\omega e^{i(\vec{r} \cdot \vec{k} - \omega t)}, \quad (2.3.1)$$

tomando la derivada con respecto a una de las componentes espaciales, digamos  $x$ , tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} &= \frac{\partial}{\partial x} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \\ &= i k_x e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)},\end{aligned}\tag{2.3.2}$$

para las componentes  $y, z$  se obtienen expresiones similares a (2.3.2) por lo que se deduce que

$$\nabla e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = i\vec{k} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)},\tag{2.3.3}$$

por lo tanto, de (2.3.1) y (2.3.2) se obtienen las relaciones

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega,\tag{2.3.4}$$

$$\nabla \rightarrow i\vec{k}.\tag{2.3.5}$$

Regresando a las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre (2.2.1) y sustituyendo (2.3.4), (2.3.5) se obtiene

$$\vec{k} \times \vec{E} = \mu\omega\vec{H},\tag{2.3.6}$$

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\varepsilon\omega\vec{E},\tag{2.3.7}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0,\tag{2.3.8}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{H} = 0.\tag{2.3.9}$$

Las ecuaciones (2.3.8) y (2.3.9) nos dicen que  $\vec{k}$  es perpendicular a los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ , de aquí se tiene que la onda sea transversal a la dirección de propagación. Más aún, junto con (2.3.6) y (2.3.7), se tiene que  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  forman una triada de vectores mutuamente ortogonal, como se muestra en la figura (2.1).

### Vector de Poynting

El vector de Poynting establece la dirección del flujo de energía electromagnética, denotado por  $\vec{S}$  y definido por el producto cruz de los campos eléctrico y magnético [20]:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}.\tag{2.3.10}$$

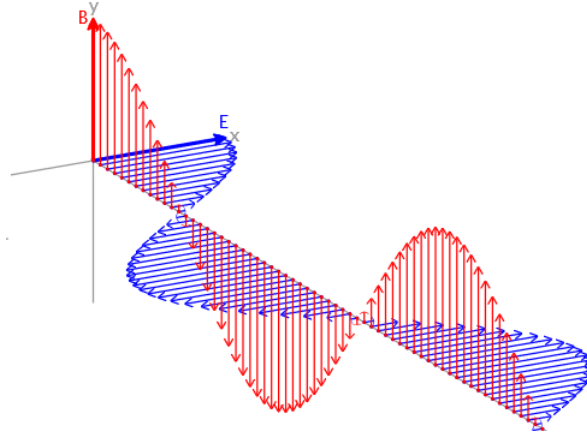


Figura 2.1: Campo electromagnético propagándose en dirección  $z$ . La onda azul indica el comportamiento del campo eléctrico, la roja marca el del magnético.

## 2.4 Polarización

La polarización es una propiedad de ondas vectoriales que describe el comportamiento en el tiempo de uno de los vectores de campo apropiado a esa onda [21]. Como se estableció en la sección anterior, la luz es una onda electromagnética vectorial, por lo cual el fenómeno de polarización se refiere al comportamiento del campo eléctrico al observarse en un punto fijo del espacio conforme avanza el tiempo.

Consideremos una onda plana armónica en el tiempo, es decir, en el que las componentes cartesianas de  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son de la forma:

$$a \cos(\tau + \delta) = \text{Re}\{ae^{-i(\tau+\delta)}\}, \quad (2.4.1)$$

donde  $\tau$  denota la parte variable del factor de fase

$$\tau = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}. \quad (2.4.2)$$

Supongamos la dirección de propagación sobre el eje  $z$ , de la sección anterior sabemos que el campo es transversal, con lo cual solo las componentes  $x$  y  $y$  de  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son diferentes de cero. Nos interesa saber la forma de la curva que describe el vector de campo eléctrico, con coordenadas  $(E_x, E_y)$  en un punto del espacio.

$$E_x = E_{0x} \cos(\tau + \delta_x), \quad (2.4.3)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(\tau + \delta_y). \quad (2.4.4)$$

Utilizando identidades trigonométricas podemos reescribir a las ecuaciones (2.4.3) y (2.4.4) como

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos \tau \cos \delta_x - \sin \tau \sin \delta_x, \quad (2.4.5)$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos \tau \cos \delta_y - \sin \tau \sin \delta_y. \quad (2.4.6)$$

Si multiplicamos (2.4.5) y (2.4.6) por  $\sin \delta_y$  y  $\sin \delta_x$ , respectivamente y luego restamos la segunda a la primera, obtenemos:

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \sin \delta_y - \frac{E_y}{E_{0y}} \sin \delta_x = \cos \tau \sin \delta, \quad (2.4.7)$$

donde  $\delta = \delta_y - \delta_x$ . De manera similar, usando la función  $\cos$

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \cos \delta_y - \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \delta_x = \sin \tau \sin \delta. \quad (2.4.8)$$

Elevando al cuadrado (2.4.7) y (2.4.8) y luego sumándolas

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}\cos \delta = \sin^2 \delta. \quad (2.4.9)$$

Notar que (2.4.9) es la ecuación que indica que a cualquier instante de tiempo el lugar geométrico de los puntos descritos por el campo eléctrico conforme se propaga es una elipse, ver figura (2.2); y se conoce como elipse de polarización [22].

Haciendo ciertas consideraciones sobre  $E_{0i}$ , para  $i = x, y$ , y  $\delta$  se llega a casos particulares de la elipse de polarización.

### 2.4.1 Polarización lineal

- Si  $E_{0y} = 0$  entonces

$$E_x = E_{0x} \cos(\tau + \delta_x), \quad E_y = 0, \quad (2.4.10)$$

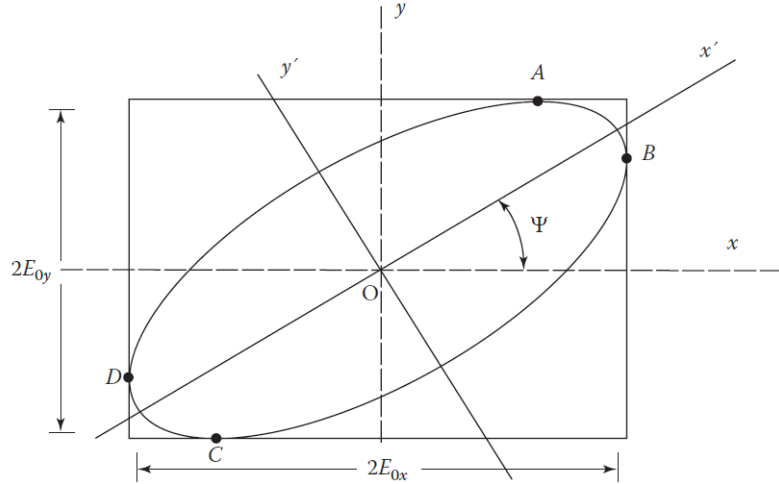


Figura 2.2: Elipse de polarización

es decir, la componente del campo eléctrico solo oscila en la dirección del eje  $x$ , por lo que se dice la luz está linealmente polarizada horizontalmente.

- De manera semejante, si ahora consideramos  $E_{0x} = 0$  y  $E_y \neq 0$  se obtiene luz linealmente polarizada verticalmente.
- Si  $\delta = 0$  o  $\delta = \pi$  la ecuación (2.4.9) se reduce a

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}} = 0, \quad (2.4.11)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_x}{E_{0x}} \pm \frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 0,$$

$$\Rightarrow E_y = \pm \frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x, \quad (2.4.12)$$

es decir, tenemos luz linealmente polarizada con pendiente  $\frac{E_{0y}}{E_{0x}}$ . Si  $\delta = 0$  la pendiente es negativa, para  $\delta = \pi$  la pendiente es positiva. En el caso de que  $E_{0y} = E_{0x}$  tenemos  $E_y = \pm E_x$  y se trata de luz linealmente polarizada a  $45^\circ$ .

En la figura (2.3) se muestran las representaciones en el plano para las polarizaciones lineales horizontal, vertical y  $+45^\circ$ .

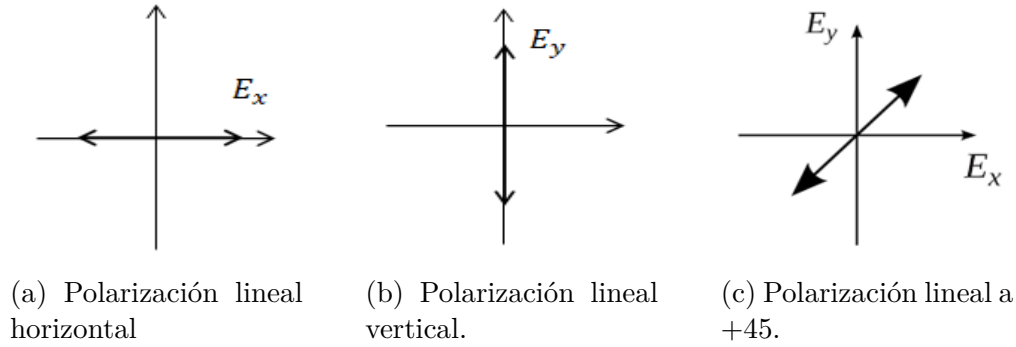


Figura 2.3: Casos particulares de polarización lineal.

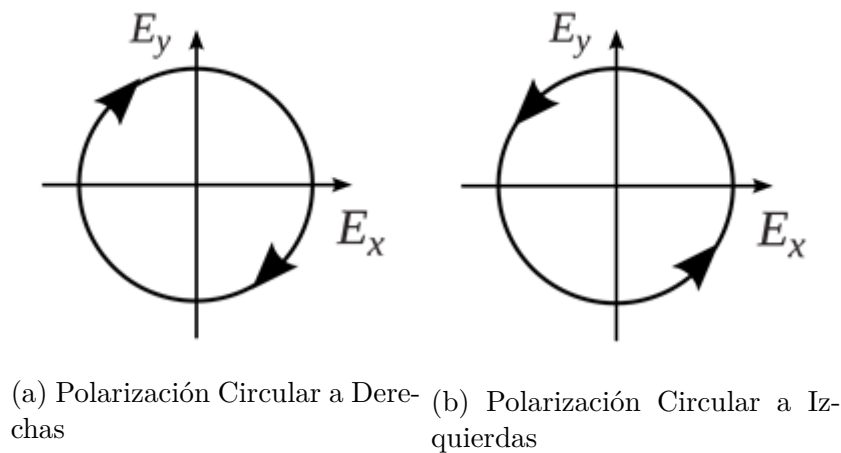


Figura 2.4: Casos particulares de polarización circular.

## 2.4.2 Polarización circular

Supongamos que  $E_{0x} = E_{0y} = E_0$  por lo que la ecuación (2.4.9) se reduce a

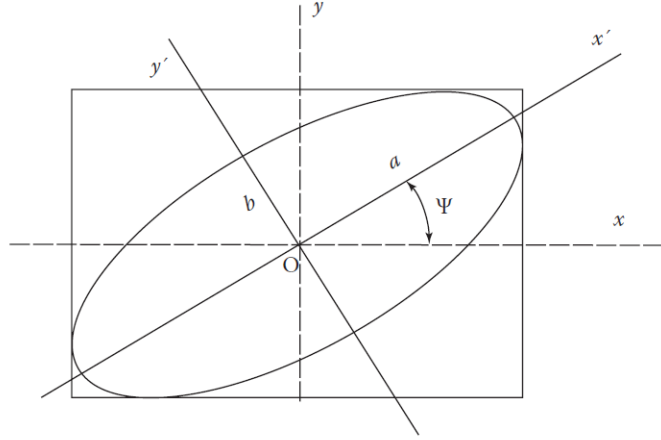
$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2. \quad (2.4.13)$$

- Si además  $\delta = \frac{\pi}{2}$  se tiene polarización circular a derechas.
- Si  $\delta = \frac{3\pi}{2}$  se tiene polarización circular a izquierdas.

En la figura 2.4 se muestran las polarizaciones circulares a derechas y a izquierdas.

## 2.4.3 Parámetros de la elipse de polarización

En general, los ejes de la elipse de polarización no coinciden con los ejes  $Ox$  y  $Oy$ , con lo cual, es importante mostrar la relación entre  $E_{0x}$ ,  $E_{0y}$ ,  $\delta$  y el ángulo de rotación  $\Psi$ .

Figura 2.5: Elipse de polarización rotada a un ángulo  $\Psi$ 

A partir de la figura (2.5) podemos definir

$$E'_x = E_x \cos \Psi + E_y \sin \Psi, \quad (2.4.14)$$

$$E'_y = E_x \sin \Psi + E_y \cos \Psi. \quad (2.4.15)$$

También se tiene que la ecuación de la elipse en términos de  $x'$  y  $y'$  es

$$E'_x = a \cos(\tau + \delta'), \quad (2.4.16)$$

$$E'_y = \pm b \sin(\tau + \delta'). \quad (2.4.17)$$

Por lo tanto, se llega a

$$a \cos(\tau + \delta') = E_{0x} \cos(\tau + \delta_x) \cos \Psi + E_{0y} \cos(\tau + \delta_y) \sin \Psi, \quad (2.4.18)$$

$$\pm b \sin(\tau + \delta') = -E_{0x} \cos(\tau + \delta_x) \sin \Psi + E_{0y} \cos(\tau + \delta_y) \cos \Psi, \quad (2.4.19)$$

donde se utilizaron (2.4.3) y (2.4.4). Si distribuimos los  $\cos(\tau + \delta')$  y  $\sin(\tau + \delta')$

$$a \left[ \cos \tau \cos \delta' - \sin \tau \sin \delta' \right] = E_{0x} \left[ \cos \tau \cos \delta_x - \sin \tau \sin \delta_x \right] \cos \Psi + E_{0y} \left[ \cos \tau \cos \delta_y - \sin \tau \sin \delta_y \right] \sin \Psi, \quad (2.4.20)$$

$$\pm b \left[ \sin \tau \cos \delta' + \cos \tau \sin \delta' \right] = -E_{0x} \left[ \cos \tau \cos \delta_x - \sin \tau \sin \delta_x \right] \sin \Psi + E_{0y} \left[ \cos \tau \cos \delta_y - \sin \tau \sin \delta_y \right] \cos \Psi, \quad (2.4.21)$$

igualando los coeficientes de  $\cos \tau$  y  $\sin \tau$  en ambos lados lleva a

$$a \cos \delta' = E_{0x} \cos \delta_x \cos \Psi + E_{0y} \cos \delta_y \sin \Psi, \quad (2.4.22)$$

$$a \sin \delta' = E_{0x} \sin \delta_x \cos \Psi + E_{0y} \sin \delta_y \sin \Psi, \quad (2.4.23)$$

$$\pm b \cos \delta' = E_{0x} \sin \delta_x \sin \Psi - E_{0y} \sin \delta_y \cos \Psi, \quad (2.4.24)$$

$$\pm b \sin \delta' = -E_{0x} \cos \delta_x \sin \Psi + E_{0y} \cos \delta_y \cos \Psi. \quad (2.4.25)$$

Elevando al cuadrado (2.4.22) y (2.4.23) y luego sumando tenemos

$$a^2 = E_{0x}^2 \cos^2 \Psi + E_{0y}^2 \sin^2 \Psi + 2E_{0x}E_{0y} \cos \Psi \sin \Psi \cos \delta, \quad (2.4.26)$$

con  $\delta = \delta_y - \delta_x$ . Procediendo de manera similar para (2.4.24) y (2.4.25)

$$\pm b^2 = E_{0x}^2 \sin^2 \Psi + E_{0y}^2 \cos^2 \Psi - 2E_{0x}E_{0y} \cos \Psi \sin \Psi \cos \delta. \quad (2.4.27)$$

Sumando (2.4.26) y (2.4.27)

$$a^2 + b^2 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2. \quad (2.4.28)$$

Ahora, multiplicando (2.4.22) por (2.4.24) y (2.4.23) por (2.4.25) y luego sumamos

$$\pm ab = E_{0x}E_{0y} \sin \delta. \quad (2.4.29)$$

Mas aún, dividiendo (2.4.25) entre (2.4.22) y (2.4.24) entre (2.4.23)

$$\left( E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \right) \sin 2\Psi = 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta \cos 2\Psi, \quad (2.4.30)$$

$$o \quad \tan 2\Psi = \frac{2E_{0x}E_{0y} \cos \delta}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}, \quad (2.4.31)$$

así el ángulo de rotación  $\Psi$  se relaciona con  $E_{0x}$ ,  $E_{0y}$  y  $\delta$ .

Es de utilidad introducir el ángulo auxiliar  $\alpha$  de tal forma que

$$\tan \alpha = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}. \quad (2.4.32)$$

Su relación con  $\psi$

$$\tan 2\Psi = (\tan 2\alpha) \cos \delta \quad 0 \leq \Psi \leq \pi, \quad (2.4.33)$$

si  $\delta = 0, \pi \Rightarrow \Psi = \pm\alpha$ , si  $\delta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \Psi = 0$ .

Se define la elipticidad como

$$\tan \epsilon = \frac{\pm b}{a} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \epsilon \leq \frac{\pi}{4}, \quad (2.4.34)$$

y describe los extremos de la elipticidad de la elipse de polarización.

La relación entre los parámetros  $E_{0x}$ ,  $E_{0y}$  y  $\delta$  con  $\epsilon$  esta dada por

$$\sin 2\epsilon = (\sin 2\alpha) \sin \delta. \quad (2.4.35)$$

## 2.5 Estado de polarización en el plano complejo

Podemos describir el estado de polarización de una onda a través de un número complejo  $\chi$ , en el cual esta contenida toda la información de la amplitud y fase

$$\chi = e^{i\delta} \tan \psi = \frac{E_{02}}{E_{01}} e^{i(\delta_y - \delta_x)}. \quad (2.5.1)$$

De acuerdo a (2.5.1) podemos especificar el estado de polarización de una onda plana. Para polarización circular a izquierdas  $E_{01} = E_{02}$  y  $\sin \delta = 1$ , entonces  $\chi = i$ . Similarmente, para polarización circular a derechas tenemos  $\chi = -i$ . El estado lineal horizontal corresponde a  $\chi = 0$ , mientras que el estado lineal vertical corresponde a  $\chi = \pm\infty$  [23]. Los demás puntos en el plano complejo representan estados de polarización elíptica como se muestra en la figura (2.6).

Notar que también podemos escribir al ángulo de rotación  $\psi$  y la elipticidad  $\epsilon$  en términos del numero complejo.

$$\tan(2\psi) = \frac{2\text{Re}(\chi)}{1 - |\chi|^2}, \quad (2.5.2)$$

$$\sin(2\epsilon) = \frac{2\text{Im}(\chi)}{1 + |\chi|^2}. \quad (2.5.3)$$

## 2.6 Vectores de Jones

Recordemos que las componentes del vector de campo eléctrico para una onda plana que viaja en la dirección del eje  $z$  tienen la forma

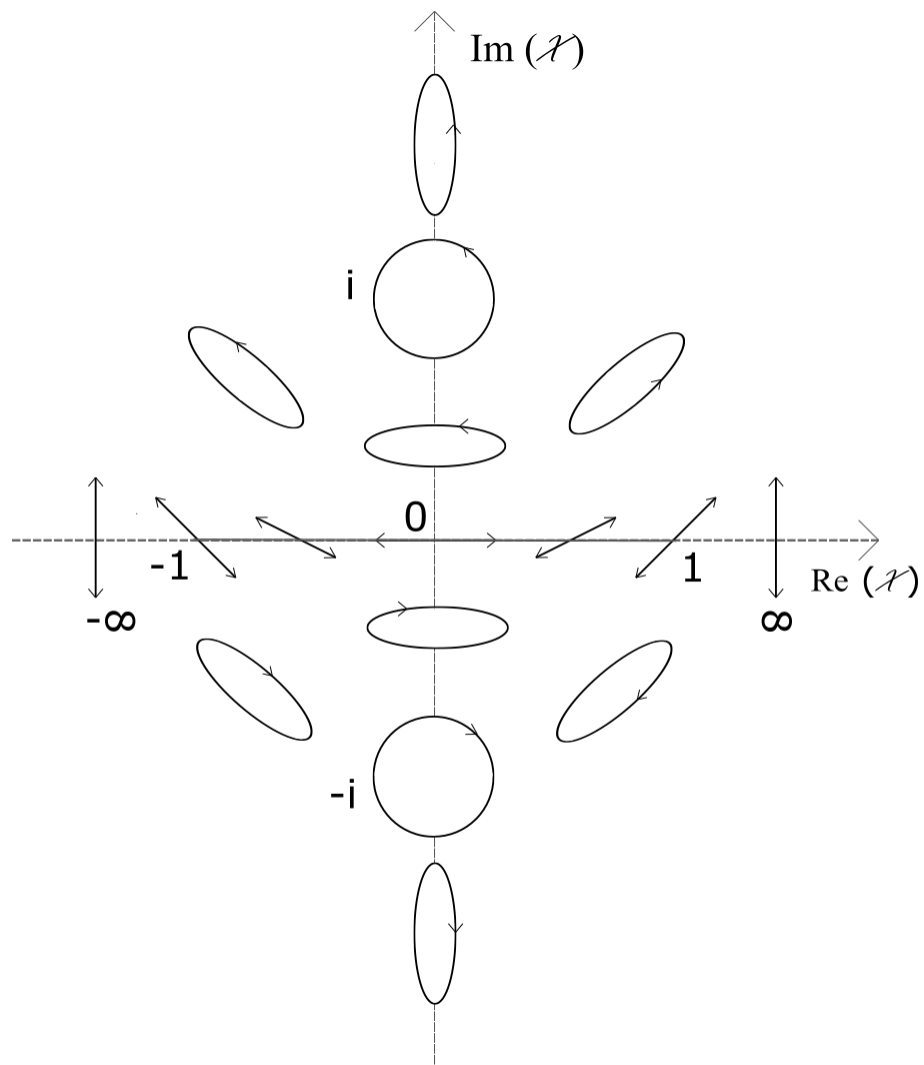


Figura 2.6: Estados de polarización en el plano complejo

$$E_x(z, t) = E_{0x}e^{i(\omega t + \delta_x)}, \quad (2.6.1)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y}e^{i(\omega t + \delta_y)}. \quad (2.6.2)$$

Por lo que ahora, al factorizar el termino  $e^{i\omega t}$  y escribiendo como un vector columna

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = e^{i\omega t} \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\delta_x} \\ E_{0y}e^{i\delta_y} \end{bmatrix}. \quad (2.6.3)$$

Dentro del vector columna del lado derecho en (2.6.3) está contenida la información acerca de la fase y amplitud de la onda, conocido como vector de Jones y denotado por  $\mathbf{J}$  [24]. Normalizando el vector de Jones obtenemos expresiones mucho mas sencillas para el estado de polarización, donde también se cumple la condición

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^* = 1. \quad (2.6.4)$$

Algunos ejemplos de vectores de Jones en su forma normalizada de estados de polarización son

- Polarización lineal horizontal y vertical, respectivamente

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.6.5)$$

- Polarización circular a derechas e izquierdas

$$\mathbf{J}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}. \quad (2.6.6)$$

Notar que los vectores de Jones para polarización lineal y circular son ortogonales entre si:

$$\mathbf{J}_x^* \cdot \mathbf{J}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \quad (2.6.7)$$

$$\mathbf{J}_R^* \cdot \mathbf{J}_L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = 0. \quad (2.6.8)$$

Entonces cualquier estado de polarización se puede escribir como la suma de los estados (2.6.7) o (2.6.8). Ejemplificando, tenemos las polarizaciones  $J_x$  y  $J_y$  en términos de  $J_R$  y  $J_L$ , y viceversa

$$J_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_x - iJ_y), \quad (2.6.9)$$

$$J_L = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_x + iJ_y), \quad (2.6.10)$$

$$J_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_R + J_L), \quad (2.6.11)$$

$$J_y = \frac{i}{\sqrt{2}}(J_R - J_L). \quad (2.6.12)$$

# Capítulo 3

## Propagación de la Luz en Medios

Una de las características de la óptica es el estudio de la propagación de la luz a través de medios ópticos transparentes; un medio isótropo se caracteriza por mantener una relación de semejanza entre el vector de campo eléctrico de una onda de luz que se propaga en este y el vector de desplazamiento eléctrico dentro del mismo; por otro lado, en un medio anisótropo, en particular los cristales, ya no se conserva la relación de semejanza entre los vectores de campo eléctrico y desplazamiento eléctrico, este último ahora depende de la dirección en la que se propaga la onda en el medio. De esto se tienen diversos fenómenos de estudio en la óptica, lineal y no lineal. En este capítulo estudiaremos el comportamiento de una onda plana al propagarse a través de un medio anisótropo, mostraremos algunos modelos que se obtienen de las respuestas debido a la polarización del material y una clasificación de cristales de acuerdo a sus propiedades.

Para obtener una primera idea de la propagación de la luz dentro de un medio anisótropo, lineal, homogéneo, no magnético, imaginemos una carga ligada por resortes de distinta rigidez (figura 3.1); el movimiento de la carga bajo la acción del campo eléctrico será diferente en el eje  $x$  comparado con el que se genera de un movimiento paralelo al eje  $y$ , por lo tanto depende tanto de la magnitud como de la dirección de este. Como consecuencia, la carga acelerada radiará un campo con una polarización descrita por

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}, \quad (3.0.1)$$

donde los elementos  $\chi_{ij}$  forman lo que se conoce como tensor de susceptibilidad  $\chi$ . Lo cual se puede abreviar como

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}. \quad (3.0.2)$$

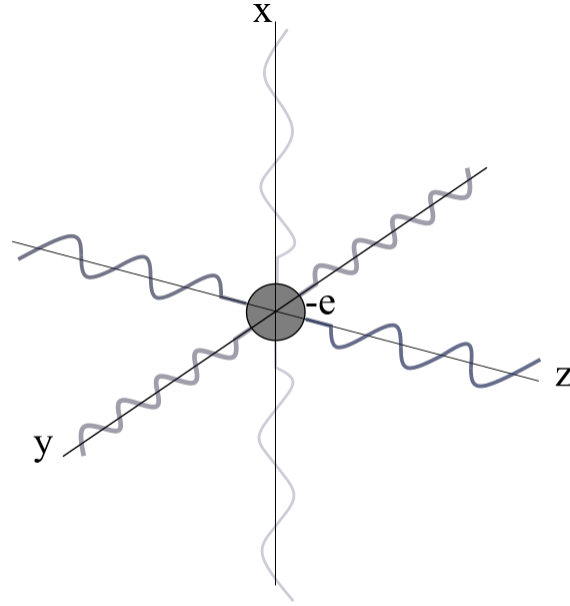


Figura 3.1: Carga ligada a resortes de distinta rigidez.

En el caso de un medio isótropo  $\chi$  es solo un escalar, por lo tanto la polarización  $\vec{P}$  y el vector de desplazamiento  $\vec{D}$  son paralelos al campo eléctrico  $\vec{E}$ .

Debido a la aportación de la polarización la relación constitutiva (2.1.5) se puede reescribir como

$$\vec{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} + \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}. \quad (3.0.3)$$

Abreviado como  $\vec{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \vec{E} = \varepsilon_0(1 + \boldsymbol{\chi}) \vec{E}$  con  $\boldsymbol{\varepsilon}$  el tensor de permitividad[5].

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1 + \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & 1 + \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & 1 + \chi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.0.4)$$

Los valores de los coeficientes  $\varepsilon_{ij}$  dependen de la elección de  $x, y, z$  relativo a la estructura del cristal. Siempre es posible alinear los campos de la onda con los ejes del cristal de tal manera que  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sea un tensor diagonal [25],

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.0.5)$$

a estos ejes se les conoce como ejes principales y los elementos de la diagonal principal se conocen como constantes dieléctricas principales.

### 3.1 Propagación de una Onda Plana en un Medio Anisótropo

Estudiamos la propagación de una onda plana, de la forma  $e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ , en un medio anisótropo, no magnético, sin corrientes ni cargas libres. Bajo estas condiciones las ecuaciones de Maxwell (2.1.1) se reducen a

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.1.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3.1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad (3.1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (3.1.4)$$

Recordando (2.3.4) y (2.3.5) obtenemos de (3.1.1) y (3.1.2)

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu \vec{H}, \quad (3.1.5)$$

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D}. \quad (3.1.6)$$

Notamos que  $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$  es perpendicular a  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$ , de ahí que estos deben estar sobre un mismo plano. Al mismo tiempo,  $\vec{D}$  es perpendicular a  $\vec{k}$ , por lo tanto  $\vec{D}, \vec{H}$  y  $\vec{k}$  forman una triada de vectores ortogonales. En cuanto a  $\vec{E}$ , mantiene su relación de ortogonalidad con el vector de Poynting  $\vec{S}$  y  $\vec{H}$ . En cambio,  $\vec{E}$  ya no es perpendicular a la dirección de propagación  $\vec{k}$ , es decir  $\vec{E} \cdot \vec{k} \neq 0$ , ver figura(3.2).

Para interpretar  $\vec{E} \cdot \vec{k}$  primero eliminamos  $\vec{H}$  de las ecuaciones (3.1.5) y (3.1.6)

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \omega^2 \mu \varepsilon \vec{E} = 0. \quad (3.1.7)$$

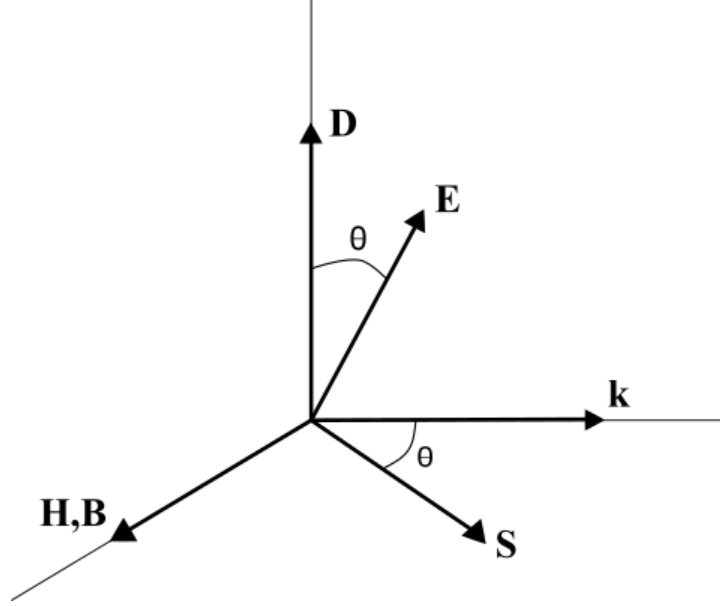


Figura 3.2: Relación entre los vectores  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ , dirección de propagación  $\vec{k}$  y vector de Poynting  $\vec{S}$ .

Con el vector de onda  $\vec{k} = \frac{\omega}{c}n\hat{s}$ , donde  $\hat{s}$  es un vector de onda unitario en la dirección del vector de propagación y  $n$  es el índice de refracción.

Ahora, usando la propiedad  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$  la ecuación anterior se reescribe como

$$\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\vec{k} \cdot \vec{k}) = -\omega^2\mu\epsilon\vec{E}. \quad (3.1.8)$$

Para interpretar la ecuación anterior, evaluemos sobre los ejes principales del medio

$$\frac{\omega^2}{c^2}n^2s_j(\vec{s} \cdot \vec{E}) - \frac{\omega^2}{c^2}n^2E_j = -\omega^2\mu\epsilon_jE_j, \quad (3.1.9)$$

$$\Rightarrow s_j(\vec{s} \cdot \vec{E}) = \left(1 - \frac{c^2\mu\epsilon_j}{n^2}\right)E_j, \quad (3.1.10)$$

con  $\epsilon_j$  y  $j = 1, 2, 3$  los ejes principales del tensor de permitividad.

Multiplicando ambos lados por el elemento  $s_j$ , tenemos

$$s_j^2(\vec{s} \cdot \vec{E}) = \left(1 - \frac{c^2\mu\epsilon_j}{n^2}\right)s_jE_j. \quad (3.1.11)$$

Despejando  $s_j E_j$  del lado izquierdo de la ecuación anterior tenemos

$$\frac{s_j^2(\vec{s} \cdot \vec{E})}{\left(1 - \frac{c^2 \mu \epsilon_j}{n^2}\right)} = s_j E_j. \quad (3.1.12)$$

Realizando la suma

$$\frac{s_x^2}{1 - \frac{\epsilon_x}{n^2 \epsilon_0}} + \frac{s_y^2}{1 - \frac{\epsilon_y}{n^2 \epsilon_0}} + \frac{s_z^2}{1 - \frac{\epsilon_z}{n^2 \epsilon_0}} = 1, \quad (3.1.13)$$

definiendo los índices de refracción principales como  $n_j^2 = \frac{\epsilon_j}{\epsilon_0}$  para  $j = x, y, z$

$$\frac{s_x^2}{n^2 - n_x^2} + \frac{s_y^2}{n^2 - n_y^2} + \frac{s_z^2}{n^2 - n_z^2} = \frac{1}{n^2}. \quad (3.1.14)$$

La ecuación (3.1.14), conocida como ecuación de Fresnel, es cuadrática de  $n^2$  con dos soluciones posibles  $n_1^2$  y  $n_2^2$ , es decir, para cada dirección de propagación existen dos posibles índices de refracción,  $n_1$  y  $n_2$ , y con ello dos posibles velocidades de fase.

Mas aún, de (3.1.10) podemos despejar

$$E_j = \frac{s_j(\vec{s} \cdot \vec{E})}{1 - \frac{c^2 \mu \epsilon_j}{n^2}}, \quad (3.1.15)$$

donde, ya obtenidos  $n_1, n_2$  se pueden sustituir, uno a la vez, para encontrar las componentes de los respectivos campos eléctricos  $E_1$  y  $E_2$  y con ello los vectores de desplazamiento eléctrico  $D_1$  y  $D_2$ .

### 3.1.1 Superficie Normal

A partir de las soluciones de la ecuación de Fresnel se puede obtener un modelo que represente, en el espacio de  $\vec{k}$ , las direcciones de polarización correspondientes a los índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$ . Este modelo es conocido como superficie normal[26]; para determinar su forma multiplicamos ambos lados de la ecuacion de Fresnel (3.1.14) por  $\frac{n^2}{k^2}$ , lo que resulta

$$n_1^2 s_x^2 (n^2 - n_2^2)(n^2 - n_3^2) + n_2^2 s_y^2 (n^2 - n_1^2)(n^2 - n_3^2) + n_3^2 s_z^2 (n^2 - n_1^2)(n^2 - n_2^2) = 0. \quad (3.1.16)$$

La forma general de la superficie normal se muestra en la figura (3.3). En particular, bajo ciertas suposiciones en los índices de refracción principales se obtienen casos especiales de este modelo, a través de los cuales es posible clasificar cristales en isótropos,

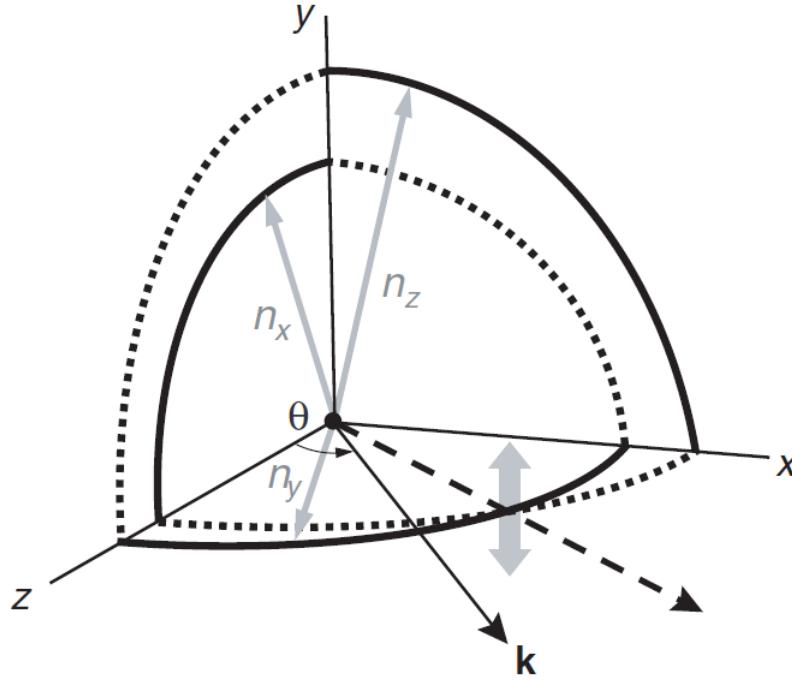


Figura 3.3: Octante de superficie normal

uniaxiales (positivos o negativos) y biaxiales.

### Cristales Isótropos

Suponiendo que  $n_1 = n_2 = n_3$  la superficie normal se degenera a una esfera. La polarización es paralela al campo eléctrico y tiene una velocidad de fase  $v = \frac{c}{n}$ .

### Cristales Uniaxiales

Si ahora consideramos que dos de los índices de refracción son iguales, digamos  $n_1 = n_2 = n_o$  y el tercero  $n_3 = n_e$ , decimos que se trata de un cristal uniaxial y la ecuación (3.1.16) se reescribe como

$$n_o^2 s_x^2 (n^2 - n_o^2)(n^2 - n_e^2) + n_o^2 s_y^2 (n^2 - n_o^2)(n^2 - n_e^2) + n_e^2 s_z^2 (n^2 - n_o^2)^2 = 0. \quad (3.1.17)$$

Bajo estas consideraciones se tiene que la propagación sobre el plano  $(x, y)$  es independiente de la dirección, pues sobre ese plano cualquier onda se propaga con un índice de refracción  $n_o$ , y solo se necesita determinar a la superficie normal en el plano  $(x, z)$ . Para una onda propagándose en el plano  $(x, z)$  a un ángulo  $\theta$  respecto del eje  $z$ , es

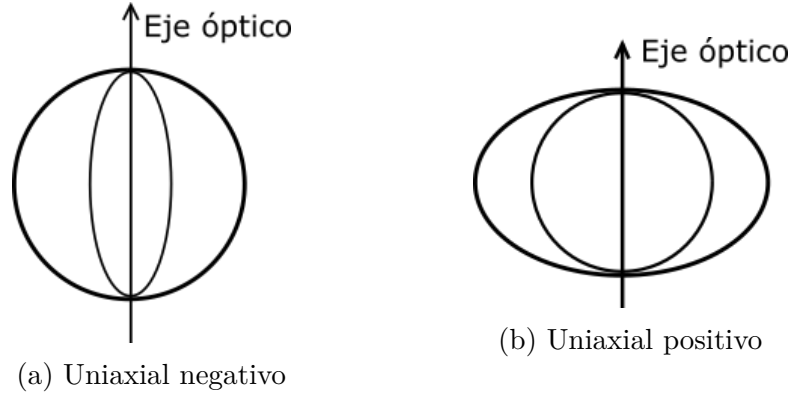


Figura 3.4: Planos de intersección entre circunferencia y elipse para cristales uniaxiales

decir

$$\vec{k} = (\sin \theta, 0, \cos \theta), \quad (3.1.18)$$

reescribimos (3.1.17) como

$$(n^2 - n_o^2)[n_o^2(n^2 - n_e^2) \sin^2 \theta + n_e^2(n^2 - n_o^2) \cos^2 \theta] = 0. \quad (3.1.19)$$

Ya que el producto de la ecuación anterior es igual a cero, alguno o ambos de los factores son iguales a cero, con esto encontramos las soluciones

$$n = n_o^2, \quad (3.1.20)$$

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2}. \quad (3.1.21)$$

Encontramos que las soluciones se tratan de una circunferencia (3.1.20) y una elipse (3.1.21) de esto se tienen las siguientes observaciones;

- (3.1.20) nos dice que para cualquier dirección de propagación sobre este plano la onda puede tener un índice de refracción  $n_o$  y una polarización perpendicular al plano.
- (3.1.21) el índice de refracción varia de punto a punto de acuerdo a una elipse cuya polarización se encuentra sobre el plano y es perpendicular a la dirección de propagación.
- La línea que pasa por los puntos donde son tangentes la circunferencia y la elipse se conoce como eje óptico. Cualquier onda que viaje sobre este eje, experimenta un solo índice de refracción y su polarización es independiente del campo  $\vec{E}$ .

- $n_o$  se conoce como índice ordinario y  $n_e$  como índice extraordinario.
- En caso de que  $n_o < n_e$  la elipse encierra a la circunferencia y se trata de un cristal uniaxial positivo. Para  $n_o > n_e$  la circunferencia encierra a la elipse y se trata de un cristal uniaxial negativo, como se muestra en la figura (3.4).

### Cristales Biaxiales

En el caso de que todos los índices de refracción principales  $n_1, n_2, n_3$  son todos diferentes, digamos  $n_3 > n_2 > n_1$ , entonces se trata de un cristal biaxial. Por lo tanto, para visualizar la forma de las superficies formadas por (3.1.16) examinamos una de sus secciones transversales, por ejemplo en  $\vec{k} = (k_x, 0, k_z)$ , entonces

$$(n^2 - n_2^2)[n_1^2 s_x^2 (n^2 - n_3^2) + n_3^2 s_z^2 (n^2 - n_1^2)] = 0. \quad (3.1.22)$$

Ya que el producto es igual a cero, cualquiera o ambos de los factores deben ser iguales a cero.

$$n^2 = n_2^2, \quad (3.1.23)$$

$$\frac{1}{n^2} = \frac{s_x^2}{n_3^2} + \frac{s_z^2}{n_1^2}. \quad (3.1.24)$$

Nuevamente obtenemos la ecuación de una circunferencia (3.1.23) y la ecuación de una elipse (3.1.24) por lo que para cada dirección de propagación hay dos posibles índices de refracción,  $n_2$  con polarización perpendicular a este plano y otro con un índice que varía de punto a punto de acuerdo a la elipse y polarización sobre el plano y perpendicular a la dirección de propagación. A diferencia de los cristales uniaxiales los cristales biaxiales cuentan con dos ejes ópticos.

Resolviendo de forma similar (3.1.16) en los planos  $k_x k_y$  y  $k_y k_z$  encontramos que en ambos obtenemos una circunferencia y una elipse, como se muestra en la figura (3.5c). Sin embargo, solo en el plano  $k_x k_z$  se cruzan estas curvas en cuatro puntos y así dos ejes ópticos como se muestra en (3.5c).

### 3.1.2 Elipsoide de Índices

La determinación de un modelo en el espacio  $\vec{k}$  como la superficie normal se hizo posible a través de la ecuación de Fresnel, donde se toma al campo eléctrico y la dirección de propagación. Sin embargo estos vectores no siempre son mutuamente perpendiculares,

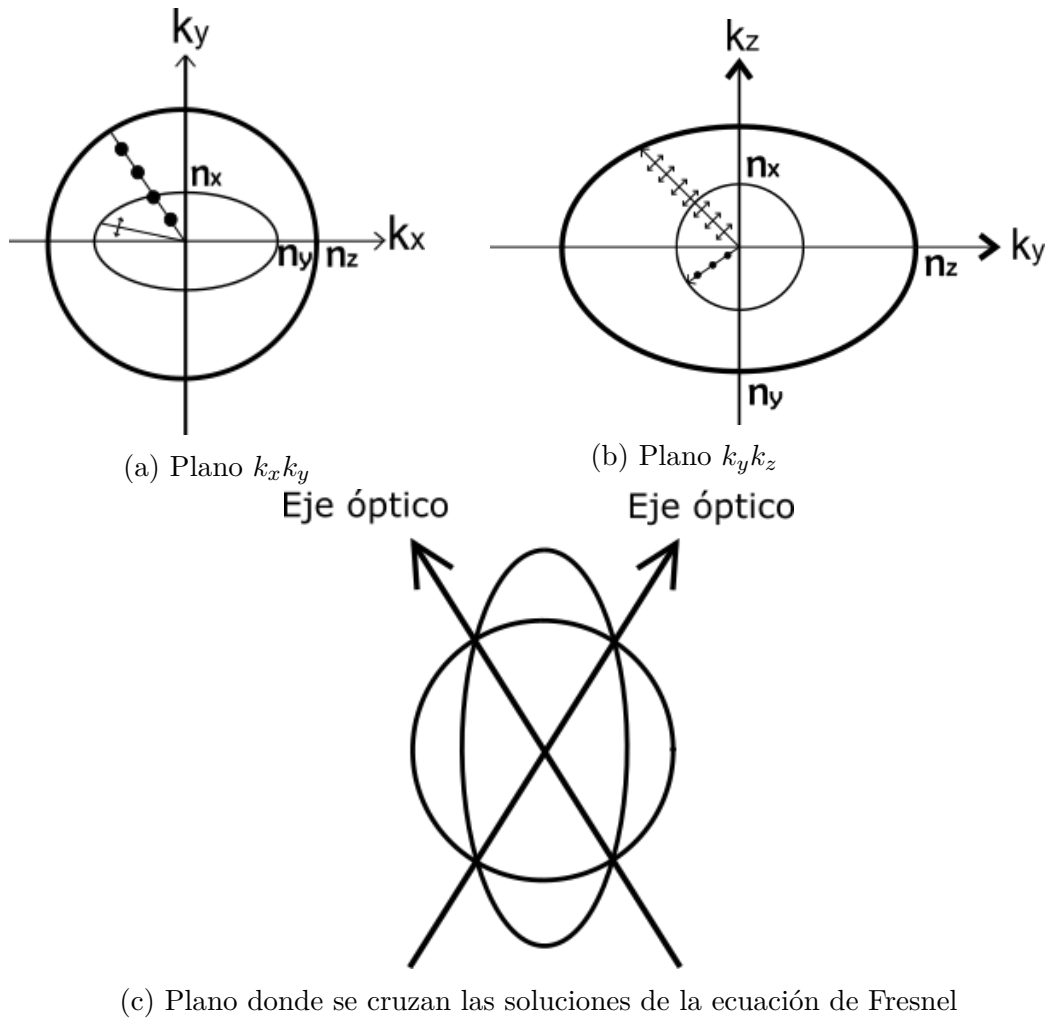


Figura 3.5: Planos principales de la superficie normal para un cristal biaxial

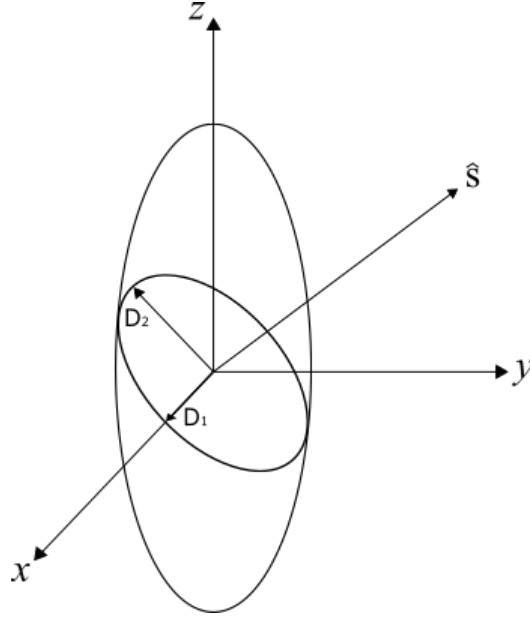


Figura 3.6: Elipsoide de índices

en cambio tenemos que el vector de desplazamiento eléctrico siempre es perpendicular a la dirección de propagación, es por ello que existe otro modelo en el espacio de  $\vec{D}$  conocido como elipsoide de índices.

Las superficies de densidad de energía constante se representan por

$$\frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} = 2U_e. \quad (3.1.25)$$

Si hacemos  $x = \frac{D_x}{\sqrt{2U_e}}$ ,  $y = \frac{D_y}{\sqrt{2U_e}}$ ,  $z = \frac{D_z}{\sqrt{2U_e}}$  podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1. \quad (3.1.26)$$

Esta es la ecuación general de un elipsoide con sus ejes paralelos a los ejes  $x, y$  y  $z$  con longitudes  $2n_x, 2n_y, 2n_z$ , respectivamente y se conoce como elipsoide de índices como se ve en la figura (3.6). El método para determinar las direcciones de los vectores  $\vec{D}_1$  y  $\vec{D}_2$  para la dirección de propagación  $\vec{k}$  consiste en tomar un plano perpendicular a  $\vec{k}$  y que pasa por el origen, de manera que este plano corta al elipsoide formando una elipse cuyos semiejes mayores definen a los vectores de desplazamiento, con magnitudes correspondientes  $\frac{1}{n_1^2}$  y  $\frac{1}{n_2^2}$ .

Para demostrar que los vectores  $\vec{D}_1$  y  $\vec{D}_2$  son los semiejes de la elipse formada por

la intersección del elipsoide y el plano perpendicular a  $k$  debemos definir el tensor de impermeabilidad

$$\eta_{ij} = \varepsilon_0(\varepsilon^{-1})_{ij}, \quad (3.1.27)$$

donde  $\varepsilon^{-1}$  es el tensor inverso del tensor dieléctrico  $\varepsilon$ . A partir de esto podemos escribir la relación entre el  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$  como

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \eta \vec{D}. \quad (3.1.28)$$

Y sustituyendo en la ecuación de onda (3.1.7)

$$\vec{s} \times [\vec{s} \times \eta \vec{D}] + \frac{1}{n^2} \vec{D} = 0, \quad (3.1.29)$$

recordando que  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} n \vec{s}$ . Ya que  $\vec{s} \cdot \vec{D} = 0$  podemos definir un nuevo sistema de coordenadas tal que uno de los ejes sea paralelo a  $\vec{s}$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

entonces (3.1.29)

$$\begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{D} = \frac{1}{n^2} \vec{D}. \quad (3.1.30)$$

Ya que la tercera componente de  $\vec{D}$  siempre es cero (pues  $\vec{D}$  se encuentra en el plano transversal a  $\vec{s}$ ) podemos ignorar las componentes  $\eta_{13}$  y  $\eta_{23}$  y definir el tensor de impermeabilidad transversal como

$$\eta_t = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.1.31)$$

con lo cual (3.1.30) se reescribe como

$$\left( \eta_t - \frac{1}{n^2} \right) \vec{D} = 0. \quad (3.1.32)$$

Esta ecuación nos dice que los eigenvectores del tensor  $\eta_t$  son los vectores  $\vec{D}_1$  y  $\vec{D}_2$  con eigenvalores los índices de refracción  $\frac{1}{n_1^2}$  y  $\frac{1}{n_2^2}$ , respectivamente. Como  $\eta_t$  es un tensor

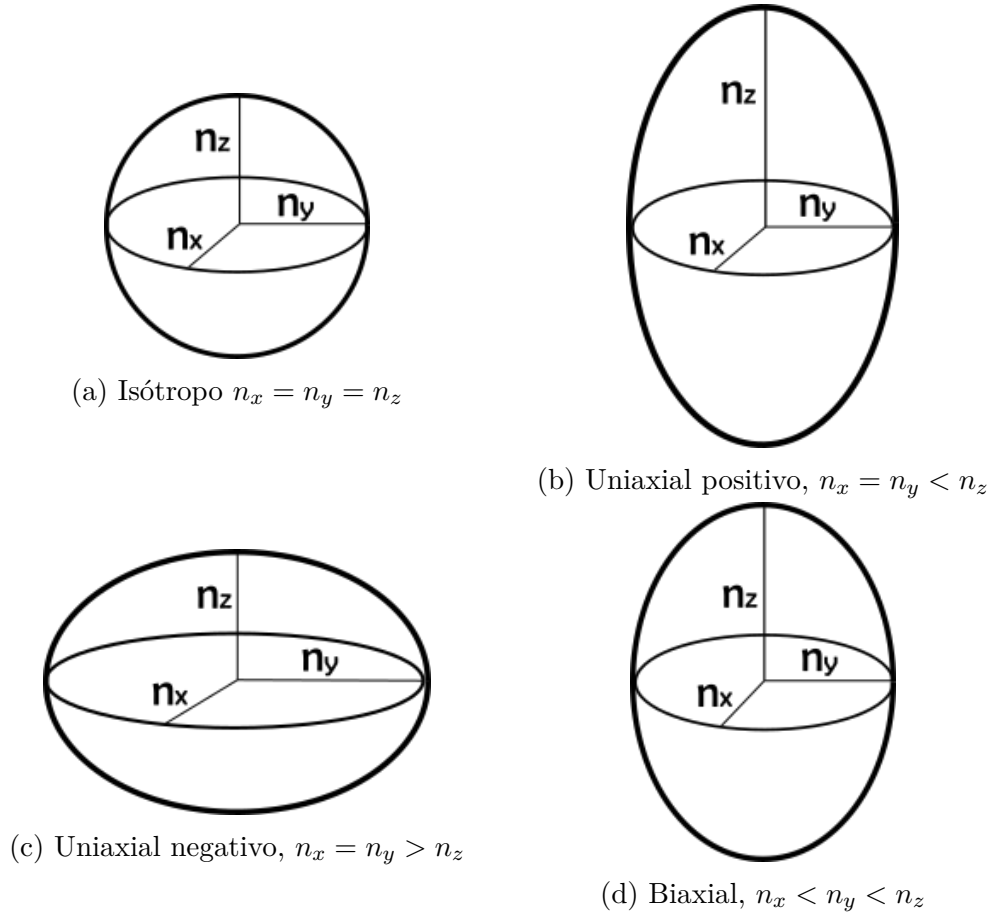


Figura 3.7: Elipsoides de índices para los diferentes tipos de cristales

simétrico entonces estos eigenvectores son perpendiculares entre si.

El modelo de elipsoide de índices para cristal isótropo, uniaxial positivo, uniaxial negativo y biaxial se muestra en la figura (3.7). Para entender un poco más como funciona el elipsoide de índices la figura (3.8) muestra un cristal uniaxial negativo, con eje óptico sobre el eje  $z$ . Sin pérdida de generalidad podemos elegir la proyección del vector de propagación  $\vec{k}$  sobre el eje  $y$ , entonces uno de los semiejes de la elipse coincide con el eje  $x$  correspondiente al rayo ordinario  $\vec{D}_0$  y magnitud  $\frac{1}{n_o}$ . Por otro lado, la dirección de  $\vec{D}_e$  depende del ángulo  $\theta$  formado desde el eje óptico a  $\vec{s}$ . Y el índice de refracción varia de  $n_e(\theta) = n_o$  para  $\theta = 0^\circ$  hasta  $n_e(\theta) = n_e$  para  $\theta = 90^\circ$ ,

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}. \tag{3.1.33}$$

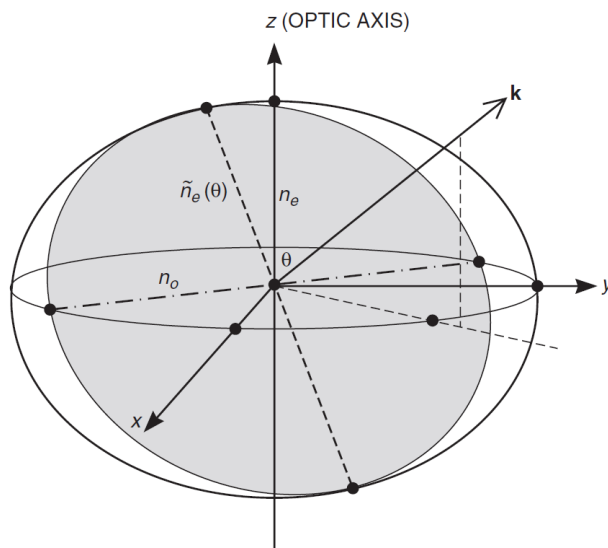


Figura 3.8: Elipsoide de índices

# Capítulo 4

## Estado de Polarización

Hasta ahora hemos visto cómo una onda de luz se puede ver afectada debido a dos posibles índices de refracción, lo que lleva a cambios en el estado de polarización de la onda a la salida del material. La teoría de modos normales explica dichos cambios. Sin embargo, existen medios capaces de girar el estado de polarización de una onda linealmente polarizada que viaja a través de estos, siempre que esto sucede se dice que se trata de un medio óptico activo. A consecuencia de esto, la teoría de modos normales ya no es suficiente para explicarlo, se debe emplear la teoría de modos acoplados para describir el cambio en campo eléctrico.

En este capítulo se explica el fenómeno de actividad óptica desde la interacción entre las cargas del material y los campos de la onda incidente, luego se explicará mediante la teoría de modos acoplados y con ello plantearemos la ecuación de movimiento del estado de polarización.

### 4.1 Actividad óptica

A principios del siglo *XIX* Arago realizó diversas investigaciones relacionadas a la actividad óptica, principalmente en cuarzo donde, observando a la fuente de luz, determinó que el giro del plano de polarización puede realizarse a derechas (dextrógiro) o a izquierdas (levógiro) y que este depende de la distancia recorrida por la luz en el medio. Más aún, Biot demostró que también se presenta actividad óptica en líquidos y gases [2].

Complementando el trabajo de Arago y Biot, Fresnel en 1825 propuso que el fenómeno de actividad óptica se debe a la diferencia de velocidades entre ondas circularmente polarizadas que componen a la onda incidente [11]. Es decir, una onda linealmente polarizada sobre el eje  $x$  de amplitud  $D_0$  y que se propaga sobre el eje  $z$ , como en la

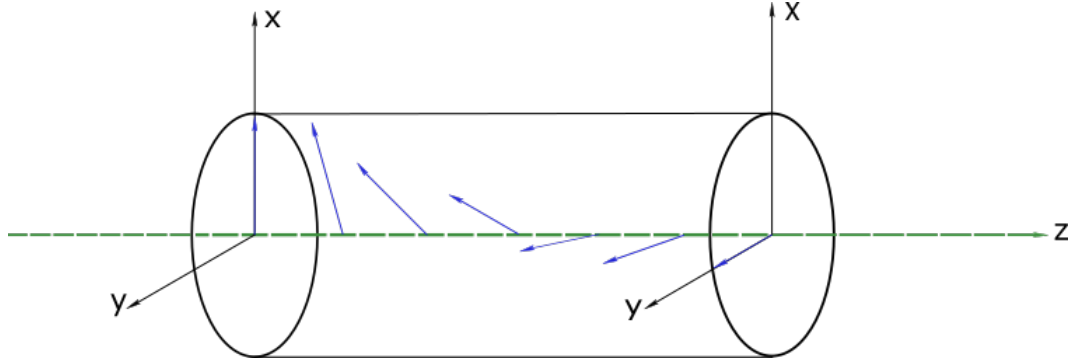


Figura 4.1: Rotación del plano de polarización de un medio óptico activo

figura (4.1), se puede escribir como una combinación de dos ondas con polarizaciones circulares a derechas y a izquierdas,  $\hat{R}$  y  $\hat{L}$ , respectivamente

$$\frac{D_0}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} \left\{ \hat{R} e^{-i\omega z n_r/c} + \hat{L} e^{-i\omega z n_l/c} \right\}, \quad (4.1.1)$$

con índices de refracción  $n_r$  y  $n_l$ . Recordando que  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$  representan los estados de polarización lineal horizontal y vertical, respectivamente, podemos reescribir (4.1.1) como

$$D_0 \hat{p} \exp \left\{ i\omega \left( t - \frac{z(n_r + n_l)}{2c} \right) \right\}, \quad (4.1.2)$$

con

$$\hat{p} = \hat{x} \cos \left[ \frac{\omega(n_l - n_r)}{2c} z \right] + \hat{y} \sin \left[ \frac{\omega(n_l - n_r)}{2c} z \right]. \quad (4.1.3)$$

La ecuación (4.1.3) es la polarización de la onda, indica que la inicialmente polarización lineal sobre el eje  $x$  ahora ha girado de acuerdo al ángulo  $\omega \frac{z(n_l - n_r)}{2c}$  en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Cabe destacar que (4.1.2) ya no se puede escribir en términos de  $\vec{E}$  como en (3.0.3).

Algunos autores mostraron que la actividad óptica es consecuencia de la interacción de las moléculas del material con la onda incidente. El momento dipolar inducido está dado por

$$p = \alpha \vec{E} + \beta \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (4.1.4)$$

donde  $\alpha \vec{E}$  es la respuesta de la molécula al campo eléctrico de la onda, mientras que  $\beta$  es una constante intrínseca a una estructura helicoidal del material. Para  $\beta = 0$ , se trata de una molécula lineal y solo se tiene la contribución del campo eléctrico. Para  $\beta \neq 0$  el campo magnético oscilante producirá una corriente con dirección perpendicular

al campo incidente, cabe señalar que estas ondas están en fase por lo que se pueden sumar vectorialmente produciendo un giro en el estado de polarización. Como resultado el vector de desplazamiento eléctrico resulta

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + i\varepsilon_0 \vec{G} \times \vec{E}, \quad (4.1.5)$$

donde  $\varepsilon$  es el tensor dieléctrico considerando  $\beta = 0$  y  $\vec{G}$  es un vector, conocido como vector de giro, paralelo a la dirección de propagación. El producto  $\vec{G} \times \vec{E}$  se puede representar por el producto entre  $\vec{E}$  y un tensor antisimétrico  $[G]$  [27] con componentes dadas por:

$$\begin{aligned} [G]_{23} &= -[G]_{32} = -G_x, \\ [G]_{31} &= -[G]_{13} = -G_y, \\ [G]_{12} &= -[G]_{21} = -G_z. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

De (4.1.5) se reescribe como

$$\vec{D} = (\varepsilon + i\varepsilon_0[G])\vec{E} = \varepsilon'\vec{E}. \quad (4.1.7)$$

Para estudiar los cambios en el estado de polarización consideraremos al vector de desplazamiento  $\vec{D}$  ya que siempre es perpendicular a la dirección de propagación. Por lo que la relación constitutiva para  $\vec{D}$  ahora se escribe como

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon'} \vec{D}. \quad (4.1.8)$$

Sustituyendo en la ecuación de onda con el tensor dieléctrico  $\varepsilon'$

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \omega^2 \mu \varepsilon' \vec{E} = 0, \quad (4.1.9)$$

$$\Rightarrow \frac{\omega n}{c} \hat{s} \times \left( \frac{\omega n}{c} \hat{s} \times \frac{1}{\varepsilon'} \vec{D} \right) + \omega^2 \mu \frac{\varepsilon'}{\varepsilon'} \vec{D} = 0 \quad (4.1.10)$$

tenemos

$$n^2 \hat{s} \times \left( \hat{s} \times \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'} \right) \vec{D} + \vec{D} = 0, \quad (4.1.11)$$

reescribiendo la última ecuación en términos del tensor de impermeabilidad, llegamos a

$$[s][s]\{\eta - i\eta[G]\eta\}\vec{D} = -\frac{1}{n^2}\vec{D}, \quad (4.1.12)$$

donde consideramos a  $[s]$  como un tensor antisimétrico en representación de  $\hat{s} \times$ , similar

a como se definió  $[G]$ , reescribimos (4.1.12) como [28]

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{n_1^2} & \frac{iG}{n_1^2 n_2^2} \\ -\frac{iG}{n_1^2 n_2^2} & \frac{1}{n_2^2} \end{bmatrix} \vec{D} = \frac{1}{n^2} \vec{D}. \quad (4.1.13)$$

Solucionando el problema de eigenvalores en el sistema de coordenadas formado por  $(\vec{D}_1, \vec{D}_2, \vec{s})$  encontramos que los índices de refracción satisfacen la ecuación

$$\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{G}{n_1^2 n_2^2}\right)^2. \quad (4.1.14)$$

Con raíces

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)^2 + \left(\frac{G}{n_1^2 n_2^2}\right)^2}. \quad (4.1.15)$$

Los estados de polarización correspondientes se pueden representar con los vectores de Jones

$$J_{\pm} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)^2 + \left(\frac{G}{n_1^2 n_2^2}\right)^2} \\ -\frac{iG}{n_1^2 n_2^2} \end{bmatrix}. \quad (4.1.16)$$

Los vectores de Jones representan dos ondas elípticamente polarizadas ortogonales entre si. Ya que la primera componente es real y la segunda componente es puramente imaginaria, los ejes principales de las elipses de polarización son paralelas a las polarizaciones sin perturbar  $\vec{D}_1, \vec{D}_2$ , como se puede apreciar en la figura (4.2).

## 4.2 Modos acoplados en un medio anisótropo

Los modos normales de propagación para una onda en un medio anisótropo permiten definir los estados de polarización y las velocidad de fase, es decir, podemos escribir la propagación de la onda como una combinación lineal de los modos normales

$$\vec{E} = A_1 \hat{e}_1 e^{i(\omega t - k_1 \zeta)} + A_2 \hat{e}_2 e^{i(\omega t - k_2 \zeta)}. \quad (4.2.1)$$

donde  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  representan la dirección de polarización de los modos normales del vector de campo  $\vec{E}$ , y  $k_1, k_2$  los números de onda correspondientes.  $A_1$  y  $A_2$  son constantes y  $\zeta = \vec{s} \cdot \vec{r}$  es la distancia a lo largo de la dirección de propagación.

En presencia de un factor externo o interno (como un campo eléctrico, magnético, un esfuerzo, o actividad óptica)  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  ya no son los eigenvectores de propagación. El tensor de permitividad en presencia de la perturbación se reescribe como

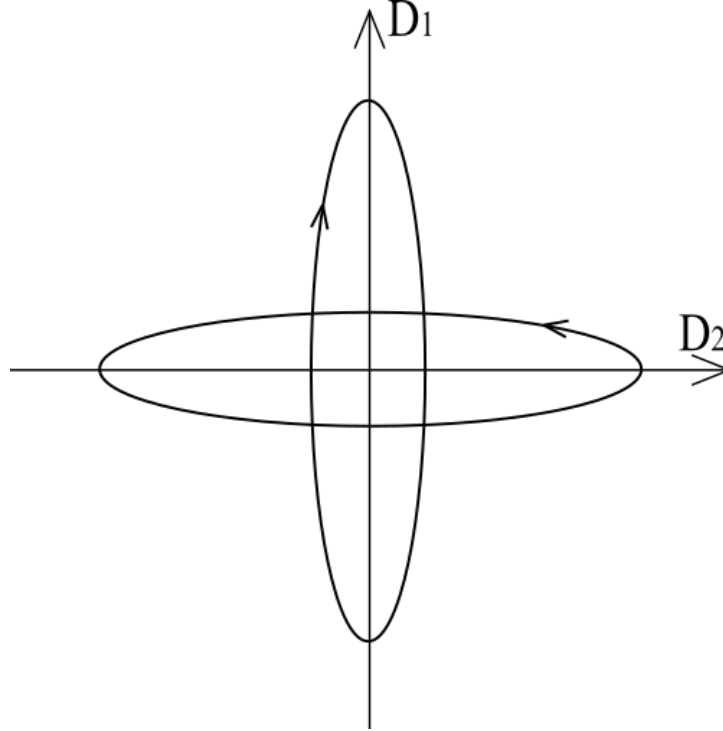


Figura 4.2: Elipses de polarización de los modos normales en presencia de birrefringencia y poder de rotación.

$$\varepsilon' = \varepsilon + \Delta\varepsilon. \quad (4.2.2)$$

Por lo tanto el campo total considerando la perturbación es

$$\vec{E}(\zeta, t) = A_1(\zeta)\hat{e}_1 e^{i(\omega t - k_1 \zeta)} + A_2(\zeta)\hat{e}_2 e^{i(\omega t - k_2 \zeta)}, \quad (4.2.3)$$

y ya que  $\hat{e}_1$ ,  $\hat{e}_2$ ,  $k_1$  y  $k_2$  están dados por la solución de modos normales, es decir sin perturbación, tenemos que el campo  $\vec{E}$  está especificado una vez dadas  $A_1(\zeta)$  y  $A_2(\zeta)$ .

Para encontrar las ecuaciones diferenciales para las amplitudes de modos acoplados iniciamos con la ecuación de onda:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) - \omega^2 \mu (\varepsilon + \Delta\varepsilon) \vec{E} = 0, \quad (4.2.4)$$

donde se puede reemplazar  $\nabla$  por  $\vec{s} \frac{\partial}{\partial \zeta}$

$$\vec{s} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \vec{s} \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \vec{E} \right) - \vec{E} \left( \vec{s} \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \vec{s} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) - \omega^2 \mu (\varepsilon + \Delta\varepsilon) \vec{E} = 0, \quad (4.2.5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left[ \vec{E} - \vec{s}(\vec{s} \cdot \vec{E}) \right] + \omega^2 \mu (\varepsilon + \Delta \varepsilon) \vec{E} = 0, \quad (4.2.6)$$

ignoremos la componente longitudinal y asumimos  $\vec{s} \cdot \vec{E} = 0$  y  $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0$ . Sustituyendo (4.2.3) en la ecuación de onda tenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left[ A_1 \hat{e}_1 e^{i(\omega t - k_1 \zeta)} + A_2 \hat{e}_2 e^{i(\omega t - k_2 \zeta)} \right] + \omega^2 \mu \varepsilon \vec{E} + \omega^2 \mu \Delta \varepsilon \vec{E} = 0, \quad (4.2.7)$$

llegamos a

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d^2 A_1}{d\zeta^2} - 2ik_1 \frac{dA_1}{d\zeta} + \omega^2 \mu \Delta \varepsilon A_1 \right] \hat{e}_1 e^{i(\omega t - k_1 \zeta)} \\ + \left[ \frac{d^2 A_2}{d\zeta^2} - 2ik_2 \frac{dA_2}{d\zeta} + \omega^2 \mu \Delta \varepsilon A_2 \right] \hat{e}_2 e^{i(\omega t - k_2 \zeta)} = 0, \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

donde se utilizó  $-k_i^2 \hat{e}_i + \omega^2 \mu \varepsilon \hat{e}_i = 0$  para  $i = 1, 2$ . Si asumimos que  $A_1$  y  $A_2$  son funciones lentamente variables de  $\zeta$ , entonces  $\frac{d^2 A_\alpha}{d\zeta^2} \ll k_\alpha \frac{dA_\alpha}{d\zeta}$  y reescribiendo el tercer término en corchetes en (4.2.8) para  $A_1$

$$\omega^2 \mu A_1 e^{i(\omega t - k_1 \zeta)} \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{11} & \Delta \varepsilon_{12} & \Delta \varepsilon_{13} \\ \Delta \varepsilon_{21} & \Delta \varepsilon_{22} & \Delta \varepsilon_{23} \\ \Delta \varepsilon_{31} & \Delta \varepsilon_{32} & \Delta \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \omega^2 \mu A_1 e^{i(\omega t - k_1 \zeta)} \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{11} \\ \Delta \varepsilon_{21} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.2.9)$$

De manera similar para  $A_2$

$$\omega^2 \mu A_2 e^{i(\omega t - k_2 \zeta)} \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{11} & \Delta \varepsilon_{12} & \Delta \varepsilon_{13} \\ \Delta \varepsilon_{21} & \Delta \varepsilon_{22} & \Delta \varepsilon_{23} \\ \Delta \varepsilon_{31} & \Delta \varepsilon_{32} & \Delta \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \omega^2 \mu A_2 e^{i(\omega t - k_2 \zeta)} \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{12} \\ \Delta \varepsilon_{22} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.2.10)$$

Utilizando (4.2.9) y (4.2.10) en (4.2.8) y realizando el producto escalar por  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$ , uno a la vez obtenemos que

$$\begin{aligned} -2ik_1 \frac{dA_1}{d\zeta} \hat{e}_1 e^{i(\omega t - k_1 \zeta)} + \omega^2 \mu A_1 e^{i(\omega t - k_2 \zeta)} \Delta \varepsilon_{11} \hat{e}_1 + \omega^2 \mu A_2 e^{i(\omega t - k_2 \zeta)} \Delta \varepsilon_{12} \hat{e}_1 \\ -2ik_2 \frac{dA_2}{d\zeta} \hat{e}_2 e^{i(\omega t - k_2 \zeta)} + \omega^2 \mu A_1 e^{i(\omega t - k_1 \zeta)} \Delta \varepsilon_{21} \hat{e}_2 + \omega^2 \mu A_2 e^{i(\omega t - k_2 \zeta)} \Delta \varepsilon_{22} \hat{e}_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Agrupando términos

$$\frac{dA_1}{d\zeta} = -\frac{i\omega^2\mu}{2k_1} [A_1\Delta\varepsilon_{11} + A_2\Delta\varepsilon_{12}e^{-i(k_2-k_1)\zeta}], \quad (4.2.12)$$

$$\frac{dA_2}{d\zeta} = -\frac{i\omega^2\mu}{2k_2} [A_1\Delta\varepsilon_{21}e^{i(k_2-k_1)\zeta} + A_2\Delta\varepsilon_{22}]. \quad (4.2.13)$$

Estas ecuaciones de modos acoplados se pueden resolver de forma única dada una condición inicial en los elementos  $\Delta\varepsilon_{ij}$ .

Como ejemplo en el uso de las ecuaciones (4.2.12) y (4.2.13) consideremos la propagación de onda electromagnética en un medio birrefringente y ópticamente activo. Con este último una pequeña perturbación  $\Delta\varepsilon$  dada por

$$\Delta\varepsilon = i\varepsilon_0[G]. \quad (4.2.14)$$

Los elementos de la matriz de perturbación están dados por

$$\Delta\varepsilon_{11} = \Delta\varepsilon_{22} = 0, \quad (4.2.15)$$

$$\Delta\varepsilon_{12} = -i\varepsilon G, \quad (4.2.16)$$

$$\Delta\varepsilon_{21} = i\varepsilon_0 G. \quad (4.2.17)$$

Sustituyendo estos  $\Delta\varepsilon_{ij}$  en (4.2.13)

$$\frac{dA_2}{d\zeta} = -\frac{i\omega^2\mu}{2k_2} i\varepsilon GA_1(\zeta)e^{i(k_2-k_1)\zeta}, \quad (4.2.18)$$

$$= \frac{\omega^2\mu\varepsilon}{2k_2} GA_1(\zeta)e^{i\Delta k\zeta}, \quad (4.2.19)$$

$$= \frac{\omega}{c} \frac{G}{2n_2} A_1(\zeta)e^{i\Delta k\zeta}. \quad (4.2.20)$$

Despejando  $A_1(\zeta)$  de la ecuación anterior

$$A_1 = \frac{2n_2c}{\omega G} e^{-i\Delta k\zeta} \frac{dA_2}{d\zeta}, \quad (4.2.21)$$

derivando  $A_1$

$$\frac{dA_1}{d\zeta} = \frac{2n_2c}{\omega G} \left\{ -i\Delta k \frac{dA_2}{d\zeta} + \frac{d^2A_2}{d\zeta^2} \right\} e^{-i\Delta k\zeta}. \quad (4.2.22)$$

Igualando con la primera ecuación de (4.2.12)

$$-\frac{i\omega^2\mu}{2k_1}(-i\varepsilon_0G)A_2 = \frac{2n_2c}{\omega G} \left\{ -i\Delta k \frac{dA_2}{d\zeta} + \frac{d^2A_2}{d\zeta^2} \right\}, \quad (4.2.23)$$

$$\frac{d^2A_2}{d\zeta^2} - i\Delta k \frac{dA_2}{d\zeta} + \frac{\omega^2G^2}{4c^2n_1n_2}A_2 = 0. \quad (4.2.24)$$

Supongamos que  $A_2(\zeta) = e^{r\zeta}$ , entonces

$$\left( r^2 - i\Delta kr + \frac{\omega^2G^2}{4c^2n_1n_2} \right) e^{r\zeta} = 0, \quad (4.2.25)$$

con raíces  $r = \frac{i\Delta k}{2} \pm \left[ -\left(\frac{\Delta k}{2}\right)^2 - \frac{\omega^2G^2}{4c^2n_1n_2} \right]^{\frac{1}{2}}$ , por lo tanto

$$r = \frac{i\Delta k}{2} + is = i\left(\frac{\Delta k}{2} + s\right). \quad (4.2.26)$$

La solución general de  $A_2(\zeta)$

$$A_2(\zeta) = e^{i\frac{\Delta k}{2}\zeta} \left\{ C_1 \cos s\zeta + C_2 \sin s\zeta \right\}, \quad (4.2.27)$$

cuando  $\zeta = 0 \rightarrow A_2(0)$

$$A_2(0) = e^{i\frac{\Delta k}{2} \cdot 0} \left\{ C_1 \cos s \cdot 0 + C_2 \sin s \cdot 0 \right\}, \quad (4.2.28)$$

$$\Rightarrow A_2(0) = C_1, \quad (4.2.29)$$

$$A_2(\zeta) = e^{i\frac{\Delta k}{2}\zeta} \left\{ A_2(0) \cos s\zeta + C_2 \sin s\zeta \right\}. \quad (4.2.30)$$

Derivando esta expresión tenemos

$$A_2'(\zeta) = \frac{i\Delta k}{2} e^{i\frac{\Delta k}{2}\zeta} \left\{ A_2(0) \cos s\zeta + C_2 \sin s\zeta \right\} + e^{i\frac{\Delta k}{2}\zeta} \left\{ A_2(0) s \sin s\zeta + C_2 s \cos s\zeta \right\}. \quad (4.2.31)$$

Evaluando en  $A_2'(0)$

$$A_2'(0) = \frac{i\Delta k}{2} A_2(0) + C_2 s. \quad (4.2.32)$$

Retomando la ecuación (4.2.20) y evaluando en  $A_2'(0)$

$$A_2'(0) = \frac{\omega^2\mu\varepsilon_0}{2k_2} G A_1(0) + 0 \cdot A_2(0), \quad (4.2.33)$$

igualando (4.2.32) y (4.2.33)

$$\frac{i\Delta k}{2}A_2(0) + C_2S = \frac{\omega^2\mu\varepsilon_0}{2k_2}GA_1(0), \quad (4.2.34)$$

$$C_2 = \frac{1}{s} \left( \frac{\omega}{c} \frac{G}{2n_2} A_1(0) - \frac{i\Delta k}{2} A_2(0) \right). \quad (4.2.35)$$

Por lo tanto

$$A_2(\zeta) = e^{i\frac{\Delta k}{2}\zeta} \left\{ A_2(0) \left( \cos s\zeta - \frac{i\Delta k}{2s} \sin s\zeta \right) + \frac{\omega}{c} \frac{G}{2n_2s} A_1(0) \sin s\zeta \right\}. \quad (4.2.36)$$

De manera análoga encontramos que

$$A_1(\zeta) = e^{-i\frac{\Delta k}{2}\zeta} \left\{ A_1(0) \left( \cos s\zeta + \frac{i\Delta k}{2s} \sin s\zeta \right) - \frac{\omega}{c} \frac{G}{2n_1s} A_2(0) \sin s\zeta \right\}. \quad (4.2.37)$$

Las ecuaciones (4.2.36) y (4.2.37) nos indican que algún cambio en la amplitud está afectado por la otra amplitud  $A_i(0)$  multiplicado por  $\frac{\omega}{c} \frac{G}{2n_1s} \sin s\zeta$  para  $i = 1, 2$  donde

$$\Delta k = k_2 - k_1 = \frac{\omega}{c}(n_2 - n_1), \quad (4.2.38)$$

$$s^2 = \left( \frac{\Delta k}{2} \right)^2 + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \frac{G^2}{4n_1n_2}. \quad (4.2.39)$$

De acuerdo a lo visto en el capítulo 2 tenemos que el estado de polarización se puede representar por un número complejo  $\chi = \frac{A_2 e^{-i\delta_2}}{A_1 e^{-i\delta_1}}$  por lo que en este caso el estado de polarización es función de la posición

$$\chi(\zeta) = \frac{e^{i\frac{\Delta k}{2}\zeta} \left\{ A_2(0) \left( \cos s\zeta - \frac{i\Delta k}{2s} \sin s\zeta \right) + \frac{\omega}{c} \frac{G}{2n_2s} A_1(0) \sin s\zeta \right\}}{e^{-i\frac{\Delta k}{2}\zeta} \left\{ A_1(0) \left( \cos s\zeta + \frac{i\Delta k}{2s} \sin s\zeta \right) - \frac{\omega}{c} \frac{G}{2n_1s} A_2(0) \sin s\zeta \right\}}, \quad (4.2.40)$$

donde

$$\chi(0) = \frac{A_2(0)}{A_1(0)}, \quad (4.2.41)$$

es el estado de polarización en  $\zeta = 0$

$$\chi(\zeta) = \frac{\chi(0) \left( \cos s\zeta + i\frac{\Delta k}{2s} \sin s\zeta \right) + \frac{\omega}{c} \frac{G}{2sn_2} \sin s\zeta}{\cos s\zeta - i\frac{\Delta k}{2s} \sin s\zeta - \frac{\omega}{c} \frac{G}{2sn_1} \chi(0) \sin s\zeta}. \quad (4.2.42)$$

De la función anterior notamos que el estado de polarización es una función periódica

de  $\zeta$  con periodo  $\frac{\pi}{s}$ .

En vista de que se puede encontrar el estado de polarización a través de la teoría de modos acoplados, no es raro obtener de esta forma el estado de polarización de los modos normales, para ello escribimos al campo eléctrico como un vector de Jones de la forma

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_1(\zeta) \\ E_2(\zeta) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_1(\zeta)e^{-ik_1\zeta} \\ A_2(\zeta)e^{-ik_2\zeta} \end{pmatrix}, \quad (4.2.43)$$

descrito de esta forma podemos deducir de (4.2.12) y (4.2.13) que se cumple

$$\frac{d\vec{E}}{d\zeta} = -iK_e\vec{E}, \quad (4.2.44)$$

con  $K_e$  la matriz de onda y está definida por

$$\begin{bmatrix} \frac{ck_1}{\omega} + \frac{\Delta\varepsilon_{11}}{2n_1\varepsilon_0} & \frac{\Delta\varepsilon_{12}}{2n_1\varepsilon_0} \\ \frac{\Delta\varepsilon_{21}}{2n_2\varepsilon_0} & \frac{ck_2}{\omega} + \frac{\Delta\varepsilon_{22}}{2n_2\varepsilon_0} \end{bmatrix}. \quad (4.2.45)$$

El campo eléctrico queda bien definido si tiene un estado de polarización así como una fase bien establecidas, es decir

$$\vec{E} = \vec{e}e^{-ik\zeta}, \quad (4.2.46)$$

derivando la ecuación anterior e igualando con (4.2.44) encontramos que se trata de una ecuación de eigenvalores

$$\Rightarrow k\vec{e} = K_e\vec{e}, \quad (4.2.47)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} n_1 - n & -\frac{iG}{2n_1} \\ \frac{iG}{2n_1} & n_2 - n \end{bmatrix} = 0, \quad (4.2.48)$$

solucionando tenemos que los índices de refracción de los modos normales son raíces de la ecuación anterior

$$n = \frac{n_1 + n_2}{2} \pm \left[ \frac{1}{4}(n_2 - n_1)^2 + \frac{G^2}{4n_1n_2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.2.49)$$

Sustituyendo los índices de refracción para los modos normales encontramos los eigenvectores de (4.2.47)

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} n_2 - n \\ -\frac{iG}{2n_2} \end{pmatrix}. \quad (4.2.50)$$

Este vector representa al estado de polarización y concuerda con 4.1.16 siempre y cuando  $n_2 \approx n_1$ .

### 4.3 Ecuación de movimiento del estado de polarización

En la sección anterior se utilizó la teoría de modos acoplados para encontrar una ecuación de movimiento para el campo eléctrico, esto al despreciar las componentes longitudinales y trabajando solo con las componentes del campo transversales a la dirección de propagación. Sin embargo, el vector de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  siempre es transversal a la dirección de propagación, por lo que es posible la formulación de una ecuación de movimiento para  $\vec{D}$ .

Primero escribimos la ecuación de onda de la forma

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (4.3.1)$$

ahora, si tomamos al campo en eléctrico en términos del vector de desplazamiento, ecuación (3.1.28), la ecuación anterior se reescribe como

$$\nabla \times (\nabla \times \eta \vec{D}) - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \vec{D} = 0, \quad (4.3.2)$$

considerando nuevamente que la dirección de propagación  $\vec{s}$  coincide con el eje  $z$ , lo anterior se reduce a

$$\eta_t \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial \zeta^2} = - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \vec{D}, \quad (4.3.3)$$

con  $\eta_t$  el tensor de impermeabilidad transversal.

Definamos una matriz  $N$ , conocida como la matriz de índice de refracción, de tal forma que

$$N^2 \eta_t = 1. \quad (4.3.4)$$

Al multiplicar ambos lados de (4.3.3) por  $N^2$  llegamos a

$$\frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial \zeta^2} = - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 N^2 \vec{D}. \quad (4.3.5)$$

Esta ecuación es equivalente a las siguientes dos ecuaciones diferenciales parciales

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \vec{D} = -i \frac{\omega}{c} N \vec{D}, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \vec{D} = i \frac{\omega}{c} N \vec{D}. \quad (4.3.6)$$

Las ecuaciones anteriores nos indican el movimiento del desplazamiento eléctrico dentro del material más aún, indican el estado de polarización a la salida del material una vez se tenga bien definida a la matriz  $N$ .

Tomando en cuenta una perturbación  $\Delta\eta$  tal como un campo eléctrico, campo magnético, esfuerzo o actividad óptica, el tensor de impermeabilidad resulta

$$\eta_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_2^2} \end{pmatrix} + \Delta\eta, \quad (4.3.7)$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  denotan los índices de refracción del medio cuando no hay perturbación.

$$N = \begin{pmatrix} n_1 - \frac{1}{2} n_1^3 \Delta\eta_{11} & -\frac{n_1^2 n_2^2}{n_1 + n_2} \Delta\eta_{12} \\ -\frac{n_1^2 n_2^2}{n_1 + n_2} \Delta\eta_{21} & n_2 - \frac{1}{2} n_2^3 \Delta\eta_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.3.8)$$

Como ejemplo de solución para los modos normales con la perturbación  $\Delta\eta$  como actividad óptica. Anteriormente definimos  $\Delta\eta$  como

$$\Delta\eta = -i\eta[G]\eta, \quad (4.3.9)$$

y entradas matriciales

$$\Delta\eta_{11} = \Delta\eta_{22} = 0, \quad (4.3.10)$$

$$\Delta\eta_{12} = \frac{iG}{n_1^2 n_2^2}, \quad (4.3.11)$$

$$\Delta\eta_{21} = -\frac{iG}{n_1^2 n_2^2}. \quad (4.3.12)$$

Sustituyendo estos valores en la matriz de índice de refracción

$$N = \begin{pmatrix} n_1 & \frac{-iG}{n_1 + n_2} \\ \frac{iG}{n_1 + n_2} & n_2 \end{pmatrix}. \quad (4.3.13)$$

Los modos normales de propagación están bien definidos con un estado de polarización

y número de onda bien definidos.

$$\vec{D} = \vec{d}e^{-ik\zeta}. \quad (4.3.14)$$

Sustituyendo en la primera ecuación de (4.3.6) llegamos a

$$N\vec{d} = n\vec{d}. \quad (4.3.15)$$

Nuevamente tratamos con un problema de eigenvalores para la matriz  $N$ , con ecuación característica

$$(n - n_1)(n - n_2) = \frac{G^2}{(n_1 + n_2)^2}, \quad (4.3.16)$$

así obtenemos que los eigenvalores están dados por

$$n = \frac{n_1 + n_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n_2 - n_1}{2}\right)^2 + \frac{G^2}{(n_1 + n_2)^2}}. \quad (4.3.17)$$

Sustituyendo (4.3.17) en (4.3.15) encontramos los eigenvectores,

$$J_{\pm} = \begin{pmatrix} \frac{n_2 - n_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n_2 - n_1}{2}\right)^2 + \frac{G^2}{(n_1 + n_2)^2}} \\ -\frac{iG}{n_1 + n_2} \end{pmatrix}. \quad (4.3.18)$$

Encontramos que este resultado coincide con el obtenido en (4.1.16). Es decir, encontramos el estado de polarización de los modos normales al resolver la ecuación de movimiento (4.3.6) una vez establecida  $N$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo de tesis se estudió el comportamiento vectorial de la luz, donde se atribuye el término polarización al comportamiento del vector de campo eléctrico  $\vec{E}$  en el espacio, el cual en general describe una elipse. Se estudiaron otras formas de representar el estado de polarización sobre todo la forma compleja y los vectores de Jones.

Se revisó la clasificación de materiales isotropos y anisotropos, para estos últimos se prestó mayor atención a los cristales. Se analizó la propagación de una onda de luz dentro de un medio anisótropo, tomando en cuenta la contribución del campo eléctrico generado por la interacción entre dicha onda y el medio, manifestado como el termino de polarización en la ecuación de onda.

La ecuación de Fresnel establece que para cada dirección de propagación  $\vec{k}$  hay, en general, dos valores del índice de refracción  $n_1$  y  $n_2$ . Una vez obtenidos los índices, es posible determinar el vector del estado de polarización para cada índice de refracción. De aquí se estudió la construcción de la superficie normal, un modelo utilizado para representar a los estados de polarización, en el espacio de  $\vec{k}$ , correspondientes a los índices de refracción que son soluciones a la ecuación de Fresnel. Existe otro modelo determinado a partir del desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  conocido como elipsoide de índices, donde es posible determinar las polarizaciones y sus respectivos índices de refracción para una dirección de propagación dada. Con base en el comportamiento de la onda en los modelos estudiados se puede realizar una clasificación de cristales en uniaxiales positivos, uniaxiales negativos, biaxiales, o isotropos.

Se estudió el fenómeno de actividad óptica desde dos perspectivas distintas, la primera como una superposición de dos ondas circularmente polarizadas y con diferente índi-

ce de refracción y la segunda como consecuencia de la interacción entre la onda y la estructura helicoidal del medio. Se encontraron los estados de polarización de los modos normales así como los índices de refracción correspondientes a estos modos, para representarlos en los vectores de Jones correspondientes.

Se revisó la forma general de describir al campo eléctrico mediante la teoría de modos acoplados y las consecuencias de aplicar una perturbación  $\Delta\eta$ . Encontramos que la amplitud es función de la posición y por tanto también lo es el estado de polarización. Se tomó como perturbación al fenómeno de actividad óptica para ejemplificar el método de modos acoplados. Utilizando la teoría de modos acoplados se obtuvo una ecuación de movimiento del campo eléctrico para obtener los modos normales.

Finalmente se planteó la ecuación de movimiento para el desplazamiento eléctrico mediante la teoría de modos acoplados, con lo cual se mostró que una vez establecida la matriz de índices queda bien definido el estado de polarización de la onda. De aquí se obtuvieron los estados de polarización de los modos normales en presencia de actividad óptica.

# Referencias

- [1] O. Darrigol. *A history of optics : from Greek antiquity to the nineteenth century*. Oxford University Press, Oxford, 2012. .
- [2] Christian Brosseau. Chapter 3- Polarization and Coherence Optics: Historical Perspective, Status, and Future Directions. *Progress in Optics*, 54:149–208, 2010.
- [3] F.L Pedrotti, L. M. Pedrotti, and Pedrotti L. S. *Introduction to Optics*. Addison-Wesley, 2007. .
- [4] H. Römer. *Theoretical Optics: An Introduction*. Wiley-VCH, Germany, 2005. .
- [5] M. Born and E. Wolf. *Principles of optics 7th edition*. Cambridge University Press, Cambridge, 2019. .
- [6] R. Clark Jones. A New Calculus for the Treatment of Optical Systems I. Description and Discussion of the Calculus. *J. Opt. Soc. Am.*, 31(7):488–493, 1941.
- [7] R. Potter. *An Elementary Treatise on Optics: Containing All the Requisite Propositions Carried to First Approximations : with the Construction of Optical Instruments : for the Use of Junior University Students*. Walton and Maberly, 1865. .
- [8] M. H. Freeman. *Optics*. Butterworths, 1990. .
- [9] D. Lovett. *Tensor Properties of Crystals*. CRC Press, 1989. .
- [10] R. W. Boyd. *Nonlinear optics 3rd edition*. Academic Press, United States of America, 2008. .
- [11] A. Yariv and P. Yeh. *Optical Waves in Crystals*. John Wiley and Sons, United States of America, 2003. .
- [12] E. Hetch. *Optica*. Addison Wesley Iberoamericana, Madrid, 2000. .

- [13] R. M. A. Azzam and N. M. Bashara. Simplified Approach to the Propagation of Polarized Light in Anisotropic Media- Application to Liquid Crystals. *J. Opt. Soc. Am.*, 62(11):1252–1257, 1972.
- [14] Xinyu Peng, Jia Li, and Liping Chang. Evolution properties of polarization states of far-zone electromagnetic field scattered from an anisotropic medium. *Opt. Express*, 26(6):6679–6691, 2018.
- [15] Noé Ortega-Quijano and José Luis Arce-Diego. Generalized Jones matrices for anisotropic media. *Opt. Express*, 21(6):6895–6900, 2013.
- [16] Noé Ortega-Quijano, Julien Fade, and Mehdi Alouini. Generalized Jones matrix method for homogeneous biaxial samples. *Opt. Express*, 23(16):20428–20438, 2015.
- [17] M. P. Silverman and R. B. Sohn. Effects of circular birefringence on light propagation and reflection. *Am. J. Phys.*, 54(1):69–76, 1986.
- [18] Pengqian Wang. Group Velocity of light in uniaxial crystals. *App. Opt.*, 60:1987–1994, 2021.
- [19] G. R. Fowles. *Introduction to Modern Optics*. Dover Publications, 1989. .
- [20] B.E.A Saleh and M. c. Teich. *Fundamentals of photonics*. Wiley-Interscience, 2007. .
- [21] R. M. A. Azzam and N. M. Bashara. *Ellipsometry and Polarized Light*. Elsevier North-Holland, New York., 1977. .
- [22] D. Goldstein. *Polarized Light, 3rd edition*. CRC Press, Boca Raton, 2011. .
- [23] C. Brosseau. *Fundamentals of Polarized Light a statistical optics approach*. John Wiley and Sons, USA, 1998. .
- [24] J. W. Kligler, S.D. Lewis and C. E. Randal. *Polarized Light in Optics an Spectroscopy*. Academic Press, USA, 1990. .
- [25] G. New. *Introduction to Nonlinear Optics*. Cambridge University Press, 2011. .
- [26] B.D. Guenther. *Modern Optics*. Oxford University Press, USA, 2015. .
- [27] Theresa A. Maldonado and Thomas K. Gaylord. Accurate method to determine the eigenstates of polarization in gyrotropic media. *Appl. Opt.*, 28(11):2075–2086, Jun 1989.

- [28] L. Landau and E. M. Lifshitz. *Electrodynamics of continuous media*. Pergamon Press, USA, 1960. .