



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias de la Electrónica

Regulación de Robots Manipuladores

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:
**LICENCIADO EN INGENIERÍA EN
MECATRÓNICA**

P R E S E N T A:
José Alfredo Díaz López

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. José Fernando Reyes Cortés



PUEBLA, PUE., ABRIL DE 2022

Índice general

Dedicatoria	v
Agradecimientos	vi
Resumen	vii
Objetivos	viii
1. Introducción	1
2. Modelo Dinámico	5
2.1. Cinemática directa	6
2.1.1. Convención Denavit-Hartenberg	7
2.1.2. Algoritmo Denavit-Hartenberg	8
2.2. Cinemática diferencial	8
2.2.1. Jacobiano	9
2.2.2. Velocidad	9
2.3. Energía cinética	10
2.4. Energía potencial	11
2.5. Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange	11
2.6. Modelo dinámico	13
2.7. Propiedades del modelo dinámico	13
2.7.1. Linealidad en los parámetros	14
2.7.2. Matriz de inercia	14
2.7.3. Matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis	15
2.7.4. Vector de par gravitacional	16
2.7.5. Fenómeno de fricción	16
2.8. Ejemplos de modelo dinámico	17
2.8.1. Sistema masa-resorte-amortiguador	18
2.8.2. Péndulo	22
2.8.3. Robot de 3gdl	27

3. Regulación	46
3.1. Teoría de estabilidad de Lyapunov	46
3.1.1. Definiciones básicas	47
3.1.2. Método Directo de Lyapunov	51
3.1.3. Principio de invariancia de LaSalle	52
3.2. Norma $\mathcal{L}$	52
3.2.1. Normas $\mathcal{L}_\infty^n$ y $\mathcal{L}_2^n$	53
3.2.2. Propiedades de la norma $\mathcal{L}$	54
3.2.3. Relación entre la norma $\mathcal{L}$ y Lyapunov	54
3.3. Teorema de Rayleigh-Ritz	55
3.4. Problema de regulación	56
3.5. Técnica de moldeo de energía	57
3.6. Propuesta de algoritmo de control	58
3.6.1. Análisis de la existencia y unicidad del punto de equilibrio	61
3.6.2. Análisis de estabilidad	62
3.6.3. Función estricta de Lyapunov	63
3.7. Control adaptable	72
3.8. Algoritmo de control versión adaptable	74
3.8.1. Análisis de la existencia y unicidad del punto de equilibrio	76
3.8.2. Análisis de estabilidad	77
4. Resultados	80
4.1. Experimentos con el nuevo control propuesto	81
4.1.1. Experimento I	82
4.1.2. Experimento II	84
4.1.3. Experimento III	87
4.2. Experimento con control PD+g	89
4.3. Experimento del control en versión adaptable	91
4.4. Comparación cualitativa de resultados	94
4.4.1. Recopilación de datos	94
4.4.2. Índice de desempeño	94
Conclusiones	96
Bibliografía	99

Índice de figuras

2.1. Sistema de coordenadas Σ_0 para el sistema masa-resorte-amortiguador. . . .	19
2.2. Descripción del péndulo y su sistema de coordenadas Σ_i	24
2.3. Sistemas de coordenadas Σ_i asignados por la metodología de Denavit-Hartenberg.	29
2.4. Posición de casa designado para el robot de 3 gdl.	30
2.5. Descripción del espesor β_i en un servomotor.	31
3.1. Esquema general de control de robots manipuladores.	56
3.2. Esquema de control de robots manipuladores mediante moldeo de energía.	59
3.3. Esquema de control propuesto.	60
3.4. Esquema de control adaptativo con base en el modelo de referencia	73
3.5. Esquema de control adaptativo por autosintonía	74
3.6. Control con compensación adaptable de par de gravedad.	76
4.1. Robot experimental “Rotradi” en posición de casa.	81
4.2. Errores de posición de experimento I.	82
4.3. Velocidades articulares de experimento I.	83
4.4. Par aplicado de experimento I.	83
4.5. Posicionamiento final de robot de 3 gdl en experimento I.	84
4.6. Errores de posición de experimento II.	85
4.7. Velocidades articulares de experimento II.	85
4.8. Par aplicado de experimento II.	86
4.9. Posicionamiento final de robot de 3 gdl en experimento II.	86
4.10. Errores de posición de experimento III.	87
4.11. Velocidades articulares de experimento III.	88
4.12. Par aplicado de experimento III.	88
4.13. Posicionamiento final de robot de 3 gdl en experimento III.	89
4.14. Errores de posición con control PD+g.	90
4.15. Velocidades articulares con control PD+g.	90
4.16. Par aplicado con control PD+g.	91
4.17. Errores de posición del control adaptable.	92
4.18. Velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}}$ del control adaptable.	92
4.19. Valor numérico de parámetros estimados $\hat{\boldsymbol{\theta}}$	93
4.20. Par aplicado con control adaptable.	93
4.21. Comparación cualitativa de índice de desempeño mediante la norma $\mathcal{L}_2$	95

Índice de tablas

2.1.	Parámetros del sistema masa-resorte-amortiguador.	18
2.2.	D-H del sistema masa-resorte-amortiguador.	19
2.3.	Parámetros del péndulo.	23
2.4.	D-H del péndulo.	23
2.5.	Parámetros del robot de 3 gdl.	28
2.6.	D-H del robot de 3 gdl.	29
4.1.	Características de los servomotores.	81
4.2.	Comparación de resultados numéricos y cualitativos de algoritmos de control.	94

Dedicatoria

A todas aquellas personas que me apoyaron directa e indirectamente.

A mi familia, en especial a mi adorada abuelita Macedonia q.e.p.d.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres por todo su apoyo y esfuerzo, por haberse esforzado para darme la oportunidad de estudiar una carrera profesional. A mi padre Alfredo Díaz por querer ofrecerme oportunidades que no pudo tener. Muchas gracias a la persona que me dio la vida, mi madre María Isabel, por siempre velar por mí, por su amor y guía en cada etapa de mi vida, por siempre querer lo mejor para mí y esforzarse para alcanzarlo.

A mi querida hermana Yessenia, por su amistad, compañía y apoyo incondicional. Por verme como una guía e inspirarme a ser mejor para alcanzar mis metas. Por verme como un modelo a seguir e inspirarme a mí mismo a no rendirme.

A todos los profesores que intervinieron en mi gusto por la ciencia y tecnología antes de ingresar a la universidad. Al profesor Julián por inculcarme la lectura y el gusto por las matemáticas. Al profesor Rigoberto por ser un gran mentor de vida en la adolescencia, por su apoyo y confianza. A la profesora Araceli García por ayudarme a desarrollar mi gusto académico, por su apoyo incondicional y desinteresado, por sus enseñanzas y por haberme apoyado a estudiar una licenciatura en la presente institución.

A mis profesores de universidad por su aporte de conocimientos y experiencia. Al Mtro. Enrique de la Fuente por sus consejos y por compartir su conocimiento. Muchas gracias a mi asesor, el Dr. José Fernando Reyes Cortés por dedicar parte de su tiempo a ser guía y mentor de este escrito, por su valioso conocimiento y enseñanzas, por haber aumentado mi interés por el área de robótica y ayudarme a quitar un poco la ingenuidad académica, por apoyarme y ayudarme a decidir lo que quiero para mi vida profesional. Al Dr. Pablo Sánchez, que de forma indirecta me ayudó a escoger el área del tema de tesis con solo cumplir mis expectativas como profesor y generarme el interés por el área de control.

A todas esas personas que me acompañaron en esta travesía. A todas esas personas que estuvieron echándome porras. A Mariano, Roberto, Abigail, Sagrario, Carolina, entre muchas otras personas apreciadas por creer en mí.

Resumen

El tema de tesis que se aborda en este documento se ubica en las ramas de robótica y control de la Licenciatura en Ingeniería en Mecatrónica. Se realiza un estudio del arte de la regulación de robots manipuladores donde se abordan conceptos y definiciones de modelado dinámico, regulación y teoría de estabilidad de Lyapunov. Se plantea resolver el problema de regulación de robots manipuladores diseñando un nuevo algoritmo de control con una estructura hiperbólica mediante la técnica de moldeo de energía. Así mismo, se realizará el análisis de estabilidad asintótica global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado siguiendo la teoría de estabilidad de Lyapunov proponiendo una función estricta; es decir, una función de energía definida positiva, tal que su derivada o potencia sea definida negativa. Además, como parte importante en el diseño del esquema del regulador, se obtendrá la versión adaptable ante dinámica no modelada, por ejemplo del par gravitacional. Se obtienen experimentales para comprobar la eficacia y desempeño del esquema diseñado, realizando una comparativa con el típico control PD+g. Al término de la obtención de los resultados, se pretende realizar una publicación de estos en congreso arbitrado y en revista indexada.

Objetivos

Objetivo general

Abordar el problema de control de posición a través del diseño de nuevos esquemas de control no lineales y su versión adaptable aplicados a robots manipuladores.

Objetivos particulares

- I. Estudio y revisión del estado del arte del control de robots manipuladores.
- II. Diseñar un algoritmo de control de posición (regulador).
- III. Demostrar estabilidad asintótica global en el sentido de Lyapunov sobre el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado formada por la dinámica del robot manipulador y el esquema de control.
- IV. Obtener resultados de simulación y experimentación con el algoritmo de control propuesto.
- V. Diseño de la versión adaptable, así como su demostración de estabilidad.
- VI. Obtener resultados de experimentación de la versión adaptable.

También se plantean las siguientes metas al culminar la tesis.

- Publicar los resultados de tesis en congreso arbitrado.
- Publicar los resultados de tesis en revista indexada/arbitrada.

Capítulo 1

Introducción

Hoy en día los robots manipuladores se han vuelto una herramienta importante en el desarrollo tecnológico de la sociedad actual, se encuentran presentes en la producción en cadena de la industria manufacturera. No es de menos preciar el desarrollo e innovación de éstos mismos, en particular el desarrollo de nuevos algoritmos de control para su regulación. El desarrollo de nuevos algoritmos de control se ha vuelto una actividad de desarrollo científico importante debido a la presencia tan basta que tienen los robots manipuladores y sus diversas aplicaciones en ámbitos para los cuales la mano de obra humana se encuentra incapacitada.

Los robots manipuladores [1], [18] son sistemas mecánicos complejos que requieren de ecuaciones diferenciales para su descripción analítica. Su naturaleza no lineal y multivariable en su comportamiento dinámico hace que se puedan formular un vasto espectro de problemas de control. En este caso en específico se aborda la problemática de regulación (control de posición) con el diseño de nuevos esquemas de control no lineal.

Para el diseño de un nuevo algoritmo de control primero es necesario obtener una descripción analítica del sistema físico. Para este caso, el modelo dinámico del robot manipulador expresado en ecuaciones diferenciales cubre dicha descripción analítica. Como se ha mencionado, la naturaleza del robot manipulador es no lineal, multivariable y además con una dinámica fuertemente acoplada, lo que lo hace un sistema complejo, adicionando los parámetros desconocidos o difícilmente medibles, ocasiona que el modelo matemático pueda llevar de forma implícita suposiciones, simplificaciones o limitaciones que ocasionen a su vez errores de modelado y dinámica desconocida no modelada [2]. Sin embargo, existen técnicas que permiten estimar la dinámica desconocida con la medición de ciertas variables de estado [3], [4].

Como se ha dicho, el diseño de esquemas de control se ha vuelto una actividad importante hoy en día. En [5] se aborda la problemática del desarrollo de nuevos esquemas de control no lineales para el seguimiento de trayectorias enfocándose de forma particular en el control por modos deslizantes terminal, teniendo como resultados una respuesta ante incertidumbres

externas y disturbios muy buena.

En [6] se presenta el diseño e implementación de reguladores saturados con ganancias variables para robots manipuladores, mostrando una familia extensa de reguladores de tipo saturado con una amplia gama de ganancias variables para robots manipuladores, resolviendo la problemática con un conjunto amplio de esquemas de control formados por funciones hiperbólicas y trigonométricas inversas evidentemente no lineales. En [7] se aborda el problema de control de posición global de los robots manipuladores con una combinación adecuada de funciones hiperbólicas culminando en una nueva familia de esquemas de control.

El problema de seguimiento de trayectorias es abordado en [8] aplicando una gran variedad de estructuras de control, desde las más simples, tales como variantes del control PD, hasta basadas en controles adaptativos y robustos.

Para aplicaciones más específicas se puede mencionar [9], en la cual se presenta una estrategia que combina técnicas de modos deslizantes y control robusto para el control de posición de un sistema mecánico subactuado con fricción y holgura elástica. Una aplicación de control para la estabilización inercial y regulación de una plataforma de dos grados de libertad es presentada en [10], cubriendo sus objetivos proponiendo una estrategia de control de conmutación con el fin de reducir los efectos de fricción. También se ha llevado a cabo un control no lineal de una máquina para fabricación de películas delgadas, que es descrito en [11], mostrando un esquema de control con el modelo no lineal de un motor de corriente directa sin escobillas.

En este trabajo se presenta el diseño de una nueva estructura de regulación para robots manipuladores utilizando una combinación adecuada de funciones hiperbólicas, tal que tengan una acción de control derivativa acotada. Esta tesis consta de 5 capítulos, en los cuales se aborda el estudio del arte de la regulación de robots manipuladores y la solución a la problemática planteada. Resultados experimentales son presentados.

En el capítulo 2, llamado “Modelo dinámico”, se aborda la importancia del modelado de sistemas dinámicos como herramienta de análisis y simulación del comportamiento de sistemas. Se abordan temas de importancia que permiten llegar a la obtención del modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad, tales como cinemática directa, convención Denavit-Hartenberg, cinemática diferencial, energía cinética, energía potencial y mecánica lagrangiana. Este capítulo se divide en 8 secciones. La sección de cinemática directa se enfoca en la convención de Denavit-Hartenberg, convención ampliamente conocida por la comunidad científica para la obtención de cinemática directa de robots manipuladores. La sección de cinemática diferencial se centra en el jacobiano del robot manipulador y en la obtención de las velocidades lineales y angulares de cada eslabón. Las dos secciones anteriores sirven como preámbulo para las secciones de “Energía cinética” y “Energía potencial”, que a su vez sirven como ante sala para el estudio de la dinámica analítica, metodología ampliamente conocida y utilizada para la obtención de modelos dinámicos de robots manipuladores.

Con lo anterior se llega a desarrollar el modelo generalizado de un robot manipulador de n grados de libertad. En el mismo capítulo 2 se describen propiedades importantes de dicho modelo con el fin de comprender mejor la matemática implicada en el diseño de algoritmos de control para robots manipuladores. También se explican algunos ejemplos de obtención de modelos dinámicos desde el punto de vista de la robótica, tales como ver al sistema masa-resorte-amortiguador o al péndulo simple como robots manipuladores de un solo grado de libertad, culminando el capítulo en la obtención del modelo dinámico de un robot de 3 grados de libertad. En este capítulo también se menciona la importancia de obtener un sistema dinámico expresado en una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

El capítulo 3, denominado “Regulación”, es el que cuenta con un mayor peso académico, pues en él se encuentran los fundamentos científicos de rigor que permiten diseñar el algoritmo de control. Este capítulo también se divide en 8 secciones. La primera sección es un estudio del arte de la teoría de estabilidad de Lyapunov, teoría con alto rigor científico que permite determinar la estabilidad del punto de equilibrio de sistemas dinámicos. Se inicia el capítulo con definiciones básicas para dar contexto a los teoremas que definen el método directo de Lyapunov. En la segunda sección se menciona el principio de invariancia de Lasalle como una alternativa menos fatigosa para la demostración de estabilidad asintótica una vez demostrada la estabilidad. Todos estos términos son descritos en la primera sección del capítulo 3.

Dentro del capítulo 3 se explica la definición de norma $\mathcal{L}$ y su relación con la estabilidad de Lyapunov, definiciones y propiedades importantes que ayudan a acotar funciones y su utilidad como herramienta de medición de desempeño de algoritmos de control. También se describe el teorema de Rayleigh-Ritz como herramienta de acotamiento. Se define el problema de regulación de manera formal y el objetivo principal del control de posición. Como última parte de la comprensión teórica, se describe la técnica de moldeo de energía desarrollada por Takegaki y Arimoto en 1981 para el diseño de nuevos algoritmos de control, una de las herramientas más utilizadas del control automático y que permite desarrollar una amplia familia de esquemas de control.

Una vez abarcada la comprensión teórica, se procede a utilizar cada una de las herramientas descritas previamente. Se presenta el nuevo algoritmo de control con estructura hiperbólica y una acción de control derivativa acotada. El diseño se realiza empleando la técnica de moldeo de energía. Por medio del método directo de Lyapunov se realiza el análisis de estabilidad, la estabilidad asintótica se logra proponiendo una función estricta de Lyapunov; es decir, una función de energía definida positiva, tal que su derivada o potencia sea definida negativa.

La complejidad del sistema que presenta un robot manipulador puede ocasionar que se desconozcan de forma parcial o total algunos fenómenos de la dinámica del robot, que puede causar inexactitud en el posicionamiento del robot con respecto a la referencia dada ocasionando errores que pueden ser inaceptables, e incluso provocar que el error de posición sea

no acotado, o peor aún, causar la inestabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado en el sentido de Lyapunov. Es aquí donde interviene el control adaptable o adaptativo. Como solución a dinámica no modelada e incertidumbre paramétrica, se realiza el diseño del algoritmo de control en su versión adaptable de compensación de par de gravedad. Al igual que en su versión no adaptable, se muestra el análisis de estabilidad bajo la teoría de estabilidad de Lyapunov.

En el Capítulo 4 se muestran los resultados experimentales con el algoritmo de control propuesto. Dentro de la infraestructura disponible se encuentran todos los recursos con los que dispone el laboratorio de robótica de la Facultad de Ciencias de la Electrónica (FCE). Este laboratorio cuenta con un número más que suficiente de robots manipuladores de transmisión directa de tres grados de libertad, que sirven para experimentación práctica de diversos algoritmos de control. En específico se usa la plataforma experimental “Rotradi”, conformada por un robot experimental de 3 gdl y tarjetas de instrumentación u software, que debido a sus características, estos sistemas dinámicos no lineales se prestan incluso para realizar publicaciones de calidad.

Se realizan un total de 5 experimentos. Primero se muestran los resultados de 3 experimentos realizados con el nuevo algoritmo de control propuesto, variando una constante interna propia del esquema de control y las posiciones deseadas. Se muestran los resultados de una experimentación con el conocido control PD+g usando las mismas ganancias y referencias que en el experimento III, esto con el fin de tener una comparación con el nuevo esquema de control y decidir si es una alternativa viable para aplicaciones de automatización. También se realiza un experimento con la versión adaptable del nuevo esquema de control propuesto, con las mismas condiciones que los experimentos III y PD+g. Por último, se realiza una comparación cualitativa de los resultados entre algoritmos de control. En específico se obtiene la norma $\mathcal{L}_2$ como criterio formal de comparación.

El capítulo 5 consta de conclusiones basadas en los resultados experimentales del capítulo previo, en la teoría y diseño del capítulo 3 y el aprendizaje del estudio del arte del capítulo 2; enfocándose en cubrir cada uno de los objetivos propuestos para el desarrollo de esta tesis.

Capítulo 2

Modelo Dinámico

El modelo dinámico es una estructura matemática conformada por ecuaciones diferenciales que utiliza variables de estado físicas tales como posición, velocidad y aceleración, y que en conjunto con el conocimiento de los valores numéricos de los parámetros físicos tales como masas, momentos de inercia, centros de masa, coeficientes de fricción, etc., se pueden reproducir de forma “*fiel*” los fenómenos físicos del sistema.

El modelo dinámico resulta imprescindible para obtener un análisis completo y simulación del comportamiento de un sistema, así como para el diseño de algoritmos de control. En el campo de la simulación el modelo dinámico es clave, pues a partir de él se pueden reproducir los fenómenos físicos sin necesidad de tener el sistema real, esto permite evaluar algoritmos de control, planeación de trayectorias y programación de aplicaciones sin comprometer al sistema físico a posibles errores, a evitar el engorro de las pruebas físicas si se sabe previamente que se requieren modificaciones o se ha propuesto un mal diseño, o por el contrario deducir aplicaciones. Así mismo, el análisis del modelo dinámico permite obtener información útil para el diseño de sistemas mecánicos o mecatrónicos para la elaboración de eslabones, transmisiones y selección de actuadores que satisfagan las condiciones de pares de torsión requeridos para producir el movimiento deseado.

En el caso de los robots manipuladores, el modelo dinámico es el vínculo que relaciona el movimiento del robot con las fuerzas implicadas. El modelo dinámico de un robot puede expresarse en una ecuación diferencial ordinaria vectorial en las posiciones (articulares o cartesianas).

En el desarrollo de este capítulo se presenta la deducción analítica del modelo dinámico de un robot manipulador de 3 grados de libertad.

2.1. Cinemática directa

La cinemática es la rama de la física que estudia el movimiento de sistemas mecánicos, sin tomar en consideración las fuerzas que lo originan. Sin embargo, el estudio de la cinemática es fundamental para la obtención del modelo dinámico.

La cinemática de un robot manipulador (cinemática directa) es el estudio de movimiento del robot con respecto a un sistema cartesiano de referencia fijo $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$. Este estudio se representa mediante una función vectorial que relaciona la dependencia entre las coordenadas articulares $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^n$ con las coordenadas cartesianas $[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$ y la orientación del extremo final del robot $[\theta, \phi, \psi]^T \in \mathbb{R}^3$. Esta dependencia se realiza mediante una función $\mathbf{f}_R$ continua y diferenciable en la variable articular $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

De forma general, la posición del extremo final del robot en el espacio tridimensional requiere de un total de 6 coordenadas (3 cartesianas y 3 angulares). Depende de la aplicación si se requiere una menor cantidad de coordenadas, pero no son necesarias más. Cuando un robot tiene un mayor número de grados de libertad con respecto al número de coordenadas se les denomina robots redundantes.

Para comprender mejor los conceptos y el procedimiento a seguir, se enlista la notación necesaria.

- $\Sigma_i(x_i, y_i, z_i)$ representa un sistema de referencia cartesiano con orientación y posición relativa al sistema anterior $\Sigma_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$.
- La matriz R_{i-1}^i representa la orientación del sistema $\Sigma_i(x_i, y_i, z_i)$ respecto al sistema $\Sigma_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$.
- La matriz R_i^{i-1} representa la transformación inversa del sistema $\Sigma_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ respecto al sistema $\Sigma_i(x_i, y_i, z_i)$.
- El vector $\mathbf{d}_{i-1}^i$ representa las coordenadas de traslación del sistema $\Sigma_i(x_i, y_i, z_i)$ respecto al sistema $\Sigma_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$.
- El vector $\mathbf{d}_i^{i-1}$ representa las coordenadas de traslación del sistema $\Sigma_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ respecto al sistema $\Sigma_i(x_i, y_i, z_i)$.

La cinemática directa es la relación que existe entre las coordenadas articulares del robot con las coordenadas cartesianas y las coordenadas angulares. Dicha relación se puede obtener mediante el uso de transformaciones homogéneas. Con las transformaciones homogéneas se puede representar orientación y traslación del extremo final del robot con respecto a un sistema de referencia fijo ($\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$).

La matriz homogénea del sistema $\Sigma_i(x_i, y_i, z_i)$ respecto al sistema $\Sigma_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ queda descrita como:

$$H_{i-1}^i = \begin{bmatrix} R_{i-1}^i & \mathbf{d}_{i-1}^i \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Donde $R_{i-1}^i \in SO(3)$ y $\mathbf{d}_{i-1}^i \in \mathbb{R}^3$. La matriz de transformación homogénea total del sistema $\Sigma_n = (x_n, y_n, z_n)$ respecto al sistema $\Sigma_0 = (x_0, y_0, z_0)$ queda descrita como:

$$H_0^n = H_0^1 H_1^2 \cdots H_{n-2}^{n-1} H_{n-1}^n \quad (2.2)$$

2.1.1. Convención Denavit-Hartenberg

La cinemática directa desarrollada se realiza bajo la convención de Denavit-Hartenberg, sumamente conocida y aplicada en la obtención de cinemática directa de robots manipuladores de cadena cinemática abierta. El método de Denavit-Hartenberg es una herramienta ampliamente conocida y utilizada en el área de la ingeniería, puesto que presenta un procedimiento sencillo para la obtención de la cinemática directa de robots manipuladores.

El método consiste en determinar la relación entre los sistemas de coordenadas Σ_{i-1} y Σ_i mediante el reconocimiento de cuatro parámetros; La longitud del eslabón i -ésimo (l_i), desplazamiento lineal provocado por las articulaciones lineales o prismáticas d_i (se representa también el espesor del servomotor β_i), el ángulo α_i entre los ejes z_{i-1} y z_i medido con respecto al eje x_i y el desplazamiento rotacional θ_i de x_{i-1} a x_i medido alrededor del eje z_{i-1} . Para la selección de sistemas de referencia se sigue el siguiente procedimiento:

- El eje z_{i-1} se asigna de forma rígida a la articulación i .
- Ubicar el origen o_i de Σ_i en la intersección del eje z_i con la normal común a los ejes z_{i-1} y z_i .
- Ubicar el eje x_{i-1} sobre la normal que une a los ejes z_{i-1} y z_i en la dirección de la articulación $i - 1$ hacia la articulación i .
- Definir el ángulo de torsión α_i entre los ejes z_i y z_{i-1} medido en sentido de las manecillas del reloj sobre el eje x_i .
- Seleccionar al eje y_i por regla de la mano derecha.

La convención de Denavit-Hartenberg permite obtener la cinemática directa de un manipulador como forma general de transformaciones homogéneas que concatena los sistemas de referencia asociados a los eslabones del robot, todos ellos relativos al sistema de referencia fijo Σ_0 . La representación de Denavit-Hartenberg se realiza por medio del producto de 4 transformaciones básicas:

$$H_{i-1}^i = H_{R_{z_{i-1}}}(\theta_i) H_{T_{z_{i-1}}}(d_i; \beta_i) H_{T_{x_{i-1}}}(l_i) H_{R_{x_{i-1}}}(\alpha_i) \quad (2.3)$$

Donde $H_{R_{z_{i-1}}}$ es la matriz de transformación homogénea de rotación con respecto al eje z_{i-1} , $H_{T_{z_{i-1}}}$ es la matriz de transformación homogénea de traslación con respecto al eje z_{i-1} , $H_{T_{x_{i-1}}}$ es la matriz de transformación homogénea de traslación con respecto al eje x_{i-1} y $H_{R_{x_{i-1}}}$ es la matriz de transformación homogénea de rotación con respecto al eje x_{i-1} . La matriz de transformación homogénea total puede obtenerse a partir de la ecuación (2.2).

2.1.2. Algoritmo Denavit-Hartenberg

1. Localizar la dirección de los ejes $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$.
2. Establecer el sistema de referencia fijo $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$, cuyo origen se encuentra en la base del robot. Los ejes x_0 y y_0 son determinados por la regla de la mano derecha. Definir el sistema de referencia $\Sigma_i(x_i, y_i, z_i)$ usando el sistema de referencia previo $\Sigma_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$. Se inicia con el sistema de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$. Se realizan los pasos 3-5 hasta llegar a la articulación $n - 1$.
3. Ubicar el origen o_i en la intersección normal común que une al eje z_i con el eje z_{i-1} . Si el eje z_i se intercepta con el eje z_{i-1} entonces se ubica a o_i en dicha intersección. Si el caso es que z_i y z_{i-1} son paralelos:
 - Si la articulación i -ésima es rotacional, poner el origen o_i sobre dicha articulación, tal que $d_i = 0$.
 - Si la articulación i -ésima es prismática, poner el origen o_i en un punto límite físico de dicha articulación.
4. Ubicar el eje x_i sobre la normal que une a los ejes z_{i-1} y z_i en la dirección de la articulación $i - 1$ hacia la articulación i .
5. Seleccionar al eje y_i por regla de la mano derecha.
6. Establecer el sistema de referencia $\Sigma_n(x_n, y_n, z_n)$ del extremo final.
 - Si la articulación i -ésima es rotacional, alinear al eje z_n con el eje z_{n-1} .
 - Si la articulación i -ésima es prismática, ubicar a z_n de forma arbitraria, tal que x_n cumpla el paso 4.
7. Definir la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg.
8. Obtener las matrices de transformación homogéneas.

2.2. Cinemática diferencial

La cinemática diferencial directa es la derivada con respecto al tiempo de la cinemática directa [18].

$$\frac{d}{dt} [x \ y \ z \ \theta \ \phi \ \psi]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}_R(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = J(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.4)$$

La cinemática diferencial permite relacionar tres espacios vectoriales: La velocidad articular $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ con la velocidad lineal $\mathbf{v} = \frac{d}{dt} [x \ y \ z]^T$ y la velocidad angular $\mathbf{w} = \frac{d}{dt} [\theta \ \phi \ \psi]^T$. Gracias a esto es posible realizar un mapeo de velocidades del espacio articular al espacio de trabajo del efector final [21]. El mapeo es llevado a cabo por la matriz $J(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}_R(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ llamada **Jacobiano del robot** o **Jacobiano analítico** que depende del vector de posición articular $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. Esta matriz puede ser expresada por la unión de dos matrices:

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} J_{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) \\ J_{\mathbf{w}}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Donde $J_{\mathbf{v}}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ se encarga de relacionar la velocidad articular con la velocidad lineal y $J_{\mathbf{w}}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times n}$ se encarga de relacionar la velocidad angular con la velocidad articular.

2.2.1. Jacobiano

El Jacobiano analítico en el campo de la robótica es una herramienta sumamente importante. Esta importancia radica en encontrar singularidades, analizar redundancias, obtener la cinemática diferencial inversa, la caracterización del robot y a su vez dar una descripción a la relación entre la fuerza aplicada y los torques resultantes en el extremo final entre otras aplicaciones. Las singularidades se presentan cuando el determinante de Jacobiano $J_{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$ es cero.

Por otro lado, si las articulaciones del robot son rotacionales y los ejes de giro se realizan sobre los ejes z_{i-1} , el cual es el caso a analizar más adelante, el Jacobiano $J_{\mathbf{w}}(\mathbf{q})$ puede obtenerse de manera rápida como:

$$J_{\mathbf{w}}(\mathbf{q}) = [z_0 \ z_1 \ \cdots \ z_{n-1}] \quad (2.6)$$

Donde $z_{i-1} \in \mathbb{R}^3$ es el producto de la matriz de rotación $R_0^{i-1} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ por el vector $\mathbf{k} = [0 \ 0 \ 1]^T$ [22].

2.2.2. Velocidad

Gracias a la cinemática diferencial es que se pueden obtener las velocidades lineales y angulares del manipulador, esto es apreciable en la ecuación (2.4). Se pueden separar las velocidades lineales y angulares para facilitar los cálculos. La importancia del calculo de las velocidades no solo radica en el análisis de singularidades, si no también en el análisis y construcción del modelo dinámico del robot. La velocidad lineal para cada eslabón i -ésimo viene dado por:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = J_{\mathbf{v}_i}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.7)$$

Donde $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^3$ es el vector de velocidad lineal del eslabón i -ésimo, $[x_i \ y_i \ z_i]^T$ es el vector de posición de coordenadas cartesianas del eslabón i -ésimo relativo al sistema fijo Σ_0 y $J\mathbf{v}_i$ es el Jacobiano que relaciona la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$ con la velocidad lineal del eslabón i -ésimo. De la velocidad lineal se puede calcular el cuadrado de la rapidez como la norma del vector de velocidad.

$$\|\mathbf{v}_i\|^2 = \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i \quad (2.8)$$

Del mismo modo, se puede encontrar la velocidad angular como:

$$\mathbf{w}_i = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \phi_i \\ \psi_i \end{bmatrix} = J\mathbf{w}_i(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (2.9)$$

Donde $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^3$ es el vector de velocidad angular del eslabón i -ésimo, $[\theta_i \ \phi_i \ \psi_i]^T$ es el vector de posición de coordenadas angulares del eslabón i -ésimo relativo al sistema fijo Σ_0 y $J\mathbf{w}_i$ es el Jacobiano que relaciona la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$ con la velocidad lineal del eslabón i -ésimo.

2.3. Energía cinética

La energía cinética de un cuerpo rígido está conformada por dos términos, la energía cinética traslacional obtenida tras concentrar toda la masa del objeto en el centro de masa y la energía cinética rotacional del cuerpo alrededor del centro de masa [22]. Además, para un robot manipulador de n eslabones, la energía cinética total es la suma de las energías cinéticas individuales de cada eslabón.

$$\mathcal{K} = \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{\frac{1}{2}m_i\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_i}_{\text{Energía traslacional}} + \underbrace{\frac{1}{2}\mathbf{w}_i^T I_i \mathbf{w}_i}_{\text{Energía rotacional}} \right) \quad (2.10)$$

$I_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es una matriz simétrica denominada **tensor de inercia** para el eslabón i -ésimo, el cual para un cuerpo rígido calculado desde el centro de un sistema de coordenadas se puede escribir como:

$$I_i = \begin{bmatrix} i_{xxi} & -i_{xyi} & -i_{xzi} \\ -i_{xyi} & i_{yyi} & -i_{yzi} \\ -i_{xzi} & -i_{yzi} & i_{zzi} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Utilizando las ecuaciones (2.7) y (2.9) en la ecuación (2.10) se obtiene la energía cinética del robot manipulador de n -gdl. Reescribiendo la ecuación (2.10), la energía cinética del robot manipulador de n -gdl está dada por la suma de las energías cinéticas de cada eslabón i .

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{K}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \cdots + \mathcal{K}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.12)$$

- **Propiedad 2.1** La energía cinética del robot manipulador tiene una estructura cuadrática bien definida en función del vector de velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}}$.

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.13)$$

En la ecuación (2.13) $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia del manipulador que será mayormente especificada más adelante.

2.4. Energía potencial

Al contrario de la energía cinética, la energía potencial no tiene una estructura específica, pues depende directamente de la geometría del robot. Sin embargo, al igual que la energía cinética, la energía potencial del manipulador puede expresarse como la suma de la energía potencial individual de cada eslabón. Para cuerpos rígidos, la única fuente de energía potencial es la gravedad, por lo que de forma general:

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n \mathcal{U}_i(\mathbf{q}) \quad (2.14)$$

La energía potencial del eslabón i -ésimo $\mathcal{U}_i(\mathbf{q})$ se obtiene de manera trivial puesto que la acción de la gravedad sólo es aplicada sobre el eje z_0 y la altura del eslabón i con respecto al origen del sistema de referencia del robot está dada por la componente z_i del vector de cinemática directa del centro de masa del eslabón i .

Se hace notar que, a diferencia de la energía cinética, la energía potencial tiene una dependencia única del vector de posición $\mathbf{q}$ ya que su existencia se debe a fuerzas conservativas, en este caso a la fuerza de gravedad.

Definición 2.1 El vector de pares o fuerzas gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es obtenido como el gradiente de la energía potencial.

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.15)$$

2.5. Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

La metodología utilizada en este escrito es la *Mecánica lagrangiana* o *Dinámica analítica*. Este enfoque es que el que proporciona una mayor ventaja en cuanto a propiedades matemáticas del modelo dinámico respecta [18], facilitando el análisis y diseño de algoritmos

de control.

Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange permiten deducir el modelo dinámico de un robot de n grados de libertad expresado en términos del lagrangiano (diferencia entre energía cinética y potencial).

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (2.16)$$

Donde $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^n$ representa al ya conocido vector de posiciones articulares o coordenadas generalizadas, $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el también conocido vector de velocidades articulares, $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares aplicados, donde el i -ésimo par τ_i se encuentra asociado a la i -ésima coordenada generalizada q_i y $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e)$ es el vector de fuerzas o pares de fricción que depende de la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$ y de la fricción estática $\mathbf{f}_e$ que se encuentra presente en las articulaciones del mismo (cuando $\|\boldsymbol{\tau}\| < \|\mathbf{f}_e\|$). $t \in \mathbb{R}_+$ es el tiempo, $n \in \mathbb{N}$ es el número de grados de libertad.

El lagrangiano queda definido como la diferencia entre la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$.

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2.17)$$

Sustituyendo la ecuación (2.13) en (2.17), el lagrangiano de un robot manipulador de n grados de libertad queda expresado como:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2.18)$$

Con esta nueva expresión para el lagrangiano, la ecuación de Euler-Lagrange (2.16) queda reescrita como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \right] \right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \right] = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (2.19)$$

De forma individual, resolviendo la derivada parcial del lagrangiano respecto de $\dot{\mathbf{q}}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.20)$$

Derivando con respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] = \frac{d}{dt} [M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}] = \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} \quad (2.21)$$

Resolviendo la derivada parcial del lagrangiano respecto de $\mathbf{q}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.22)$$

Con base en lo anterior, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para un robot de n grados de libertad toman la forma:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (2.23)$$

2.6. Modelo dinámico

La ecuación (2.23) ya representa la dinámica del robot de n grados de libertad, sin embargo, la ecuación que describe el comportamiento dinámico no lineal de un robot de n grados de libertad en cadena cinemática abierta con eslabones rígidos en su forma compacta y descrita como mayormente se conoce en el área de la robótica [18] [19], se ve de la forma:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (2.24)$$

Donde

- $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de posiciones articulares o coordenadas generalizadas.
- $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades articulares.
- $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de aceleraciones articulares.
- $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, la cual es simétrica y definida positiva.
- $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis.

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \quad (2.25)$$

- $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas o pares gravitacionales (ver definición 2.1).
- $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares de fricción que incluye a la fricción viscosa, de Coulomb y estática ($\mathbf{f}_e$) de cada articulación.
- $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares aplicados a las articulaciones del robot.

2.7. Propiedades del modelo dinámico

Con la ecuación (2.23) se puede apreciar que la naturaleza del robot manipulador es no lineal, multivariable y además con una dinámica fuertemente acoplada, lo que lo hace un sistema mecánico complejo. Sin embargo, existen múltiples propiedades que, al ser aprovechadas de la mejor manera, facilitan el análisis y diseño de estructuras de control. A continuación se mencionan dichas propiedades.

2.7.1. Linealidad en los parámetros

A pesar de que la ecuación que representa al modelo dinámico del robot manipulador es no lineal en el vector de estados $[\mathbf{q}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T$, presenta linealidad con respecto a los parámetros dinámicos del robot, tales como masas, momentos de inercia, etc..

La propiedad fundamental de linealidad de los parámetros dinámicos del robot manipulador [1], [18] es:

- **Propiedad 2.2** Considérese el modelo dinámico del robot manipulador de n grados de libertad (2.24), se puede verificar que:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) = Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\tau} \quad (2.26)$$

Donde $Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\theta}$ es una matriz $n \times p$ de funciones conocidas, $\boldsymbol{\theta}$ es un vector $p \times 1$ que contiene los parámetros del robot y $p = p_1 + p_2 + 2n$.

2.7.2. Matriz de inercia

Las propiedades del efecto inercial y la matriz de inercia son fundamentales en el desarrollo de estructuras de control, pues facilita el estudio de estabilidad.

El efecto inercial del robot manipulador de n grados de libertad tiene las siguientes propiedades [18]:

- **Propiedad 2.3** La matriz de inercia $M(\mathbf{q}) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica, $M(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})^T$, definida positiva $M(\mathbf{q}) > 0$. Por esto existe la matriz inversa $M(\mathbf{q})^{-1} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ que también es una matriz simétrica $M(\mathbf{q})^{-1} = (M(\mathbf{q})^{-1})^T$ y definida positiva $M(\mathbf{q})^T > 0$.
- **Propiedad 2.4** La matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ satisface

$$\lambda_{M(\mathbf{q})}^{min} I \leq M(\mathbf{q}) \leq \lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} I \quad (2.27)$$

Donde $I \in \mathcal{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad y $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{min}$, $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{max}$ representan los valores propios mínimo y máximo de la matriz de inercia respectivamente.

- **Propiedad 2.5** El efecto inercial de un robot manipulador satisface

$$\|M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}\| \leq \lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} \quad \forall \quad \mathbf{q} \in \mathcal{R}^n \quad (2.28)$$

- **Propiedad 2.6** Para el caso de robots manipuladores provistos únicamente con articulaciones rotacionales, existe una constante $\beta > 0$ tal que:

$$\|M(\mathbf{q})\| \leq \lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} \leq \beta \quad \forall \quad \mathbf{q} \in \mathcal{R}^n \quad (2.29)$$

- **Propiedad 2.7** Para el caso de robots manipuladores provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_M > 0$ que satisface:

$$\|M(\mathbf{x})\mathbf{z} - M(\mathbf{y})\mathbf{z}\| \leq k_M \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\| \quad \forall \quad \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \quad (2.30)$$

- **Propiedad 2.8** Para el caso de robots manipuladores provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k'_M > 0$ que satisface:

$$\|M(\mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq k'_M \|\mathbf{y}\| \quad \forall \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad (2.31)$$

2.7.3. Matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis

Al igual que la matriz de inercia, la importancia del estudio de la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ se encuentra presente en el estudio de estabilidad de sistemas de control para robots.

Las principales propiedades de la acción de las fuerzas centrípetas y de Coriolis [1], [18] son:

- **Propiedad 2.9** La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ puede ser **no** única, no obstante el vector $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ sí lo es.
- **Propiedad 2.10** Cuando el vector de velocidades articulares $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es cero, la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis satisface:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})|_{\dot{\mathbf{q}}=0} = C(\mathbf{q}, 0) = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \forall \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \quad (2.32)$$

- **Propiedad 2.11**

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} = C(\mathbf{q}, \mathbf{y})\mathbf{x} \quad (2.33)$$

y

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{z} + \alpha\mathbf{x})\mathbf{y} = C(\mathbf{q}, \mathbf{z})\mathbf{y} + \alpha C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} \quad (2.34)$$

$\forall \quad \mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

- **Propiedad 2.12** Para el caso de robots manipuladores provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_{C1} > 0$ que satisface:

$$\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq k_{C1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad \forall \quad \mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad (2.35)$$

- **Propiedad 2.13** Para el caso de robots manipuladores provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existen constantes $k_{C1} > 0$ y $k_{C2} > 0$ que satisfacen:

$$\|C(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{w} - C(\mathbf{y}, \mathbf{v})\mathbf{w}\| \leq k_{C1} \|\mathbf{z} - \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| + k_{C2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{w}\| \|\mathbf{z}\| \quad \forall \quad \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \quad (2.36)$$

- **Propiedad 2.14** La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ quedan relacionadas por:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} \equiv 0 \quad \forall \quad \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \quad (2.37)$$

- **Propiedad 2.15** La derivada temporal de la matriz de inercia y la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis cumplen que:

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \quad (2.38)$$

2.7.4. Vector de par gravitacional

El vector de pares gravitacionales es esencial para el diseño de la compensación gravitacional. Es un vector que solo depende de la posición articular y cuyas propiedades [1], [18] son:

- **Propiedad 2.16** Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_g > 0$ tal que:

$$k_g \geq \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \quad \forall \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \quad (2.39)$$

y

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq k_g \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \quad (2.40)$$

Es decir, el vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es *Lipschitz*.

- **Propiedad 2.17** Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales existe una constante k' que satisface.

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| \leq k' \quad \forall \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \quad (2.41)$$

- **Propiedad 2.18** El vector de pares gravitacionales y el vector de velocidades articulares se pueden relacionar mediante:

$$\int_0^t \mathbf{g}(\mathbf{q})^T \dot{\mathbf{q}} dt = \mathcal{U}(\mathbf{q}(t)) - \mathcal{U}(\mathbf{q}(0)) \quad (2.42)$$

2.7.5. Fenómeno de fricción

El fenómeno de fricción tiene como característica principal ser un fenómeno disipativo para velocidades diferentes a cero [18], dicha característica es la causante de convertir la energía mecánica en energía térmica.

El vector de pares de fricción $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \in \mathbb{R}^n$ se obtiene de la combinación de la fricción viscosa, de Coulomb y estática.

$$\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) = B\dot{\mathbf{q}} + F_c \text{signo}(\dot{\mathbf{q}}) + \begin{bmatrix} [1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [1 - |\text{signo}(\dot{q}_2)|] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [1 - |\text{signo}(\dot{q}_n)|] \end{bmatrix} \mathbf{f}_e \quad (2.43)$$

En la ecuación (2.43) $B, F_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales que contienen los coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb respectivamente. La fricción estática está representada por el vector de fricción estática $\mathbf{f}_e = [f_{e1} \ f_{e2} \ \cdots \ f_{en}]^T$ y la función signo de la velocidad por el vector $\text{signo}(\dot{\mathbf{q}}) = [\text{signo}(\dot{q}_1) \ \text{signo}(\dot{q}_2) \ \cdots \ \text{signo}(\dot{q}_n)]^T$.

■ **Propiedad 2.19** La fricción viscosa satisface:

$$\|B\dot{\mathbf{q}}\| \leq \|B\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \leq \lambda_B^{max} \|\dot{\mathbf{q}}\| \quad (2.44)$$

Donde λ_B^{max} es el valor propio máximo de la matriz de coeficientes de fricción viscosa $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

■ **Propiedad 2.20** La fricción de Coulomb satisface:

$$\|F_c \text{signo}(\dot{\mathbf{q}})\| \leq \|F_c\| \sqrt{n} \leq \lambda_{F_c}^{max} \sqrt{n} \quad (2.45)$$

Donde $\lambda_{F_c}^{max}$ es el valor propio máximo de la matriz de coeficientes de fricción de Coulomb $F_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y n evidentemente es el número de grados de libertad.

2.8. Ejemplos de modelo dinámico

Un gran número de sistemas mecánicos presentan ecuaciones diferenciales de orden mayor o igual a dos en su modelo dinámico y que por sí solo puede presentarse como un sistema no lineal. No obstante, es posible transformar el modelo dinámico de un sistema en un sistema dinámico autónomo de primer orden representado por una ecuación diferencial de primer orden (ODE) de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.46)$$

Donde el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, conocido como variable fase y proporciona información interna de la evolución de los estados del sistema. Que el sistema tenga una naturaleza autónoma quiere decir que el tiempo se encuentra de forma implícita en la estructura de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden, pues aunque no aparece de forma explícita, $\mathbf{x}$ es una función continua en el tiempo, es decir: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ y $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t)$. La

función $\mathbf{f}$ es un mapa vectorial $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que es continua Lipschitz, además la linealidad o no linealidad depende ahora de la variable de estado fase.

La importancia de este tipo de modelo dinámico radica en el análisis de estabilidad de sistemas en lazo cerrado y en la amplia documentación que se tiene hoy en día, haciendo de este un sistema de fácil simulación y que gracias a esto se ha desarrollado de forma considerable el campo de la robótica. La importancia del desarrollo de este tipo de modelo para el caso de estudio radica en que gracias a esta transformación se puede realizar un análisis de estabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado del modelo dinámico del robot manipulador y el esquema de control.

2.8.1. Sistema masa-resorte-amortiguador

El sistema masa-resorte-amortiguador es uno de los sistemas mecánicos más típicos en el estudio de las ingenierías, debido a que es un modelo base de estructura sencilla que sirve de simplificación para diversos sistemas mecánicos aparentemente más complejos. Además, sirve como analogía y comprensión del funcionamiento cualitativo de otros sistemas, dentro de los cuales se encuentran esquemas de control para robots manipuladores (algoritmos de control proporcional-derivativo PD). A continuación se presenta el modelo dinámico de este sistema y su representación en un sistema dinámico autónomo de primer orden en variables de estado fase.

Considere el sistema de masa-resorte-amortiguador en su configuración en serie de forma vertical tal como se muestra en la figura 2.1. El sistema masa-resorte-amortiguador puede verse como un sistema dinámico de un solo grado de libertad dado por una articulación lineal que produce un desplazamiento d_1 con respecto a su posición original y que tiene una longitud al centro de masa l_{c1} . También se debe tener en cuenta que al estar en una configuración vertical se debe considerar el efecto de la gravedad g sobre el centro de masa. Los parámetros dinámicos del sistema son descritos en la tabla 2.1 para los análisis siguientes.

Parámetro	Notación
Constante de elasticidad del resorte	k
Coeficiente de amortiguamiento	b
Masa	m
Centro de masa	l_{c1}
Desplazamiento/Posición	d_1
Gravedad	g
Fuerza aplicada	f

Tabla 2.1: Parámetros del sistema masa-resorte-amortiguador.

Cinemática directa

Convención Denavit-Hartenberg

El origen del sistema de referencia $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ queda ubicado convenientemente en la parte superior del resorte, parte fija apoyada en la barra que sirve como bastidor. Se ubica al eje z_0 sobre el eje de la articulación lineal supuesta, de esta forma la variable articular x se desplaza sobre el eje z_0 con la dirección en el sentido de la gravedad g . La fuerza f se ejerce hacia abajo, en dirección al eje z_0 y que por lo tanto en dicha dirección se produce el desplazamiento. Como se tiene una articulación lineal, únicamente se maneja un solo Σ_0 , sin embargo, en la figura 2.1 se representa Σ_1 para poder visualizar en la tabla 2.2 $\alpha = 0$ y $\theta = 0$. Se debe tener en claro que z_1 se mide con respecto al sistema de referencia Σ_0 , pues Σ_1 solo se incluye para propósitos ilustrativos, recordando que el sistema a tratar es de un solo grado de libertad. En la figura 2.1 se aprecia de mejor forma la descripción de los sistemas de referencia.

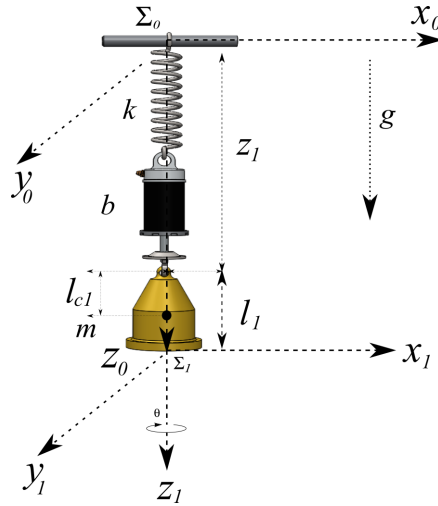


Figura 2.1: Sistema de coordenadas Σ_0 para el sistema masa-resorte-amortiguador.

La tabla de parámetros de **D-H** del sistema masa-resorte-amortiguador está dada por:

Eslabón	l_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	$l_{c1} + z_1$	0

Tabla 2.2: **D-H** del sistema masa-resorte-amortiguador.

Por notación se ha expresado $d_1 = z_1$, esta notación se mantendrá para los próximos cálculos. Con base en la tabla de parámetros de **D-H** se obtiene la matriz de transformación homogénea para el único eslabón dada por:

$$\begin{aligned}
H_0^1 &= H_{R_{z_0}}(0)H_{T_{z_0}}(l_{c1} + z_1)H_{T_{x_0}}(0)H_{R_{x_0}}(0) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_{c1} + z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Por lo tanto, el modelo de cinemática directa del sistema masa-resorte-amortiguador es:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_R(z_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{c1} + z_1 \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

Cinemática diferencial

Debido a que el sistema masa-resorte-amortiguador es un sistema escalar no cuenta con una matriz jacobiana. Sin embargo, es fácilmente deducible su modelo de cinemática diferencial mediante la derivada temporal de la función $\mathbf{f}_R(z_1)$ y de esta forma encontrar la velocidad articular lineal. Debido a que sólo se cuenta con una articulación lineal, se abstiene el cálculo de la velocidad angular. El modelo de cinemática diferencial está dado por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{f}_R(z_1)}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{c1} + z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} \tag{2.49}$$

El cuadrado de la rapidez se obtiene como:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \dot{z}_1^2 \tag{2.50}$$

Modelo de energía

En primer lugar se debe tomar en cuenta que la energía cinética del sistema es de carácter traslacional pura, pues no cuenta con articulaciones rotacionales. Otro aspecto a considerar es que la energía potencial para este caso está dada por la suma de la energía potencial gravitatoria y la energía potencial elástica debida al resorte. Por último, el modelo de energía con el que se trabaja es el lagrangiano (diferencia entre energía cinética y energía potencial).

La energía cinética está dada por:

$$\mathcal{K}(z, \dot{z}_1) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \frac{1}{2} m \dot{z}_1^2 \tag{2.51}$$

La energía potencial está dada por:

$$\mathcal{U}(z) = mg(l_{c1} + z_1) + \frac{1}{2} k z_1^2 \tag{2.52}$$

El lagrangiano queda expresado como:

$$\mathcal{L}(z_1, \dot{z}_1) = \mathcal{K}(z, \dot{z}_1) - \mathcal{U}(z) = \frac{1}{2}m\dot{z}_1^2 - \frac{1}{2}kz_1^2 - mg(l_{c1} + z_1) \quad (2.53)$$

Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

Se debe tener presente que, para este caso, la única componente de fricción a considerar es la fricción viscosa y que únicamente se aplica una fuerza lineal, no habiendo componentes de par o torque debido a la ausencia de rotación. Retomando la ecuación (2.53) y tomando en cuenta las consideraciones antes dichas, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange quedan escritas como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(z_1, \dot{z}_1)}{\partial \dot{z}_1} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(z_1, \dot{z}_1)}{\partial z_1} = f - b\dot{z}_1 \quad (2.54)$$

Resolviendo la derivada parcial del lagrangiano respecto de $\dot{z}_1$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(z_1, \dot{z}_1)}{\partial \dot{z}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{z}_1} \left[\frac{1}{2}m\dot{z}_1^2 - \frac{1}{2}kz_1^2 - mg(l_{c1} + z_1) \right] = m\dot{z}_1 \quad (2.55)$$

Derivando con respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(z_1, \dot{z}_1)}{\partial \dot{z}_1} \right] = \frac{d}{dt} [m\dot{z}_1] = m\ddot{z}_1 \quad (2.56)$$

Resolviendo la derivada parcial del lagrangiano respecto de x

$$\frac{\partial \mathcal{L}(z_1, \dot{z}_1)}{\partial z_1} = \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\frac{1}{2}m\dot{z}_1^2 - \frac{1}{2}kz_1^2 - mg(l_{c1} + z_1) \right] = -(kz_1 + mg) \quad (2.57)$$

Sustituyendo en (2.54)

$$m\ddot{z}_1 - (kz_1 + mg) = f - b\dot{z}_1 \quad (2.58)$$

Con base en lo anterior, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para el sistema masa-resorte-amortiguador toman la forma de la ecuación (2.59). Se hace notar que el signo positivo en el término de la fuerza gravitacional se debe a que se consideró a la fuerza f paralela y en el mismo sentido a z_0 y z_1 . Si por el contrario se hubiera considerado a f en dirección contraria a z_0 , entonces el signo cambiaría pero sólo para este término, pues la energía potencial gravitacional es la única con una estructura lineal y no cuadrática en el modelo de energía. También se debe tener a consideración la interpretación de g , pues también se ha considerado en el mismo sentido que el sistema de referencia inicial.

$$f = m\ddot{z}_1 + kz_1 + mg + b\dot{z}_1 \quad (2.59)$$

Modelo dinámico

Retomando la ecuación (2.59), el modelo dinámico del sistema masa-resorte-amortiguador con una configuración en serie vertical e identificando cada uno de sus términos está dada por:

$$f = \underbrace{m\ddot{z}_1}_{\text{Fuerza inercial}} + \underbrace{b\dot{z}_1}_{\text{Fricción viscosa}} + \underbrace{kz_1}_{\text{Ley de Hooke}} + \underbrace{mg}_{\text{Fuerza por gravedad}} \quad (2.60)$$

Un aspecto a considerar es que la acción de la gravedad ya produce un desplazamiento inicial constante, que en el estado de equilibrio inicial se ve compensado por la fuerza del resorte a dicho desplazamiento. De la ecuación (2.60) se obtiene su representación en una ecuación diferencial ordinaria en variables fase $\mathbf{z} = [z_1, \dot{z}_1]^T$. En este sentido f representa la acción de control o fuerza aplicada en Newtons, notando que el sistema es cartesiano, es decir, que la variable z_1 es cartesiana y no articular.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ m^{-1}[f - b\dot{z}_1 - kz_1 - mg] \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

La ecuación (2.61) ya representa una estructura matemática bien definida para el análisis del sistema masa-resorte-amortiguador en forma de una ecuación ordinaria de primer orden, la cual lleva consigo importantes propiedades que facilitan el calculo y la simulación. La transformación se realiza a partir de las variables de estado fase que dan información sobre la dinámica interna del sistema.

2.8.2. Péndulo

El péndulo rígido es uno de los sistemas mecánicos de mayor uso académico; debido a su simplicidad es un buen ejemplo para la introducción al análisis de modelos dinámicos más complejos. El péndulo es un sistema clave en la investigación científica debido a sus amplias aplicaciones y pieza clave en el estudio de sistemas no lineales. En el área de control es común encontrar ejemplos que involucren al péndulo, tal es el caso del péndulo invertido. La importancia del estudio del péndulo es que representa una idea importante en el desarrollo de robots antropomórficos, pues sus eslabones pueden verse como péndulos conectados en serie, visto de esta forma, el robot antropomórfico de 2 gdl no es más que un péndulo doble.

Considere el sistema de péndulo que se muestra en la figura 2.2. El péndulo rígido no es más que un sistema dinámico de un solo grado de libertad dado por una articulación rotacional que produce un desplazamiento angular q_1 con respecto a su posición original y que está formado por un servomotor con espesor β_1 y una barra de longitud l con una longitud al centro de masa l_{c1} . Se debe tomar en cuenta la acción de la gravedad sobre el centro de masa

en dirección del eje y_0 . Para los próximos análisis, los parámetros del péndulo se encuentran en la tabla 2.3.

Parámetro	Notación
Espesor del motor	β_1
Coefficiente de fricción viscosa	b
Masa	m
Momento de inercia del rotor	I
Centro de masa	l_{c1}
Posición angular	q_1
Gravedad	g
Torque aplicado	τ

Tabla 2.3: Parámetros del péndulo.

Cinemática directa

Convención Denavit-Hartenberg

El sistema de referencia $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ se coloca en el respaldo del estator del servomotor, el eje z_0 se alinea con el eje de giro del servomotor, el cual es perpendicular al plano $x_0 - y_0$. Como posición de casa natural del péndulo se posiciona el origen $q_1 = 0$ sobre el eje y_0 negativo. El sistema de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ se coloca a una distancia l_c sobre el plano $x_0 - y_0$ y a una distancia β_1 sobre el eje z_0 del origen de Σ_0 en el centro de masa de la barra y se mueve conjuntamente con el péndulo, el eje z_1 queda paralelo y en la misma dirección al eje z_0 (por lo que $\alpha = 0$) y el eje x_1 se coloca sobre la barra tal como se muestra en la figura 2.2.

La tabla de parámetros **D-H** del péndulo está dada por:

Eslabón	l_i	α_i	d_i	θ_i
1	l_{c1}	0	β_1	$q_1 - \frac{\pi}{2}$

Tabla 2.4: **D-H** del péndulo.

La matriz de transformación homogénea para el único eslabón está dada por:

$$\begin{aligned}
 H_0^1 &= H_{R_{z_0}}(q_1 - \frac{\pi}{2}) H_{T_{z_0}}(\beta_1) H_{T_{x_0}}(l_c) H_{R_{x_0}}(0) \\
 &= \begin{bmatrix} \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_{c1} \sin(q_1) \\ -\cos(q_1) & \sin(q_1) & 0 & -l_{c1} \cos(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.62)
 \end{aligned}$$

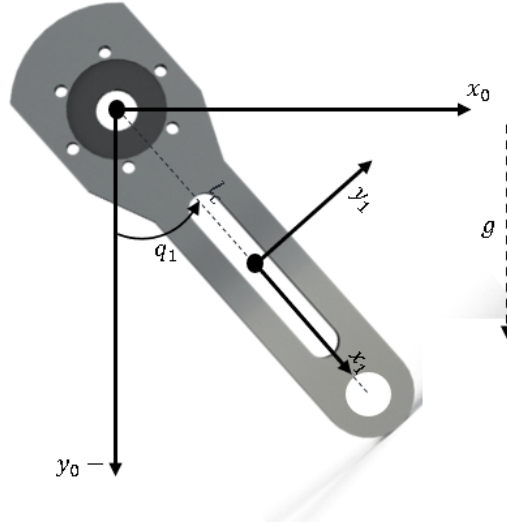


Figura 2.2: Descripción del péndulo y su sistema de coordenadas Σ_i .

Por lo tanto, el modelo de cinemática directa del péndulo es:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) = \mathbf{f}_R(q_1) = \begin{bmatrix} l_{c1} \sin(q_1) \\ -l_{c1} \cos(q_1) \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Cinemática diferencial

Debido a que el péndulo es un sistema escalar, no cuenta con una matriz jacobiana propiamente. Sin embargo, es fácilmente deducible su modelo de cinemática diferencial mediante la derivada temporal de la función $\mathbf{f}_R(q_1)$ y a partir de aquí obtener de la velocidad articular.

Velocidad lineal $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \frac{d\mathbf{f}_R(q_1)}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} l_{c1} \sin(q_1) \\ -l_{c1} \cos(q_1) \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

El cuadrado de la rapidez se obtiene como:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v} = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 \cos^2(q_1) + l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 \sin^2(q_1) = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 \quad (2.65)$$

Velocidad angular $\mathbf{w}$

Es evidente que la velocidad angular sólo está dada por $\dot{q}_1$ alrededor del eje z_0 , esto es:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Modelo de energía

Para este caso, la energía cinética presenta tanto componente rotacional como componente traslacional, a diferencia del ejemplo de masa-resorte-amortiguador, aunque sólo cuente con una sola articulación rotacional. Otro aspecto para tener en cuenta es que, a diferencia del sistema masa-resorte-amortiguador, ahora sólo se presenta la energía potencial debido a la acción de la gravedad. Por último, el modelo de energía con el que se trabaja es el lagrangiano.

Energía cinética:

$$\mathcal{K}(q_1, \dot{q}_1) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^T \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{w}^T i \mathbf{w} = \frac{1}{2} m l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} i \dot{q}_1^2 = \frac{1}{2} (m l_{c1}^2 + i) \dot{q}_1^2 \quad (2.67)$$

Aquí la componente inercial se encuentra dada por $m l_c^2 + I$, el equivalente a la matriz de inercia M de un robot antropomórfico de n grados de libertad. Al tratarse de un sistema escalar, la componente inercial también es escalar. Resulta importante realizar la analogía, pues con esto se comprueba que el péndulo puede ser visto como un robot de un solo grado de libertad.

Energía potencial:

$$\mathcal{U}(q_1) = m g l_{c1} (1 - \cos(q_1)) \quad (2.68)$$

Aquí la componente de par gravitacional está dada por $\frac{\partial \mathcal{U}(q_1)}{\partial q_1} = m g l_c \sin(q_1)$, el equivalente al vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}$ de un robot antropomórfico de n grados de libertad. Nuevamente, al tratarse de un sistema escalar, la componente de par gravitacional también es escalar.

El lagrangiano para el caso del péndulo está dado por:

$$\mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1) = \mathcal{K}(q_1, \dot{q}_1) - \mathcal{U}(q_1) = \frac{1}{2} (m l_{c1}^2 + i) \dot{q}_1^2 - m g l_{c1} (1 - \cos(q_1)) \quad (2.69)$$

Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

Para este caso sí se contempla la totalidad de las componentes de fricción (viscosa, de Coulomb y estática) contenidas en la función $f_f(f_e, \dot{q}_1) = b \dot{q}_1 + f_c \text{signo}(\dot{q}_1) + f_e [1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|]$. Se hace notar que el sistema es puramente rotacional, por lo que sólo se aplica torque, a diferencia del sistema masa-resorte-amortiguador, en el cual se aplica fuerza. Retomando la

ecuación (2.69) y tomando las consideraciones descritas, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange quedan escritas como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial q_1} = \tau - f_f(f_e, \dot{q}_1) \quad (2.70)$$

Resolviendo la derivada parcial del lagrangiano respecto de $\dot{q}_1$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left[\frac{1}{2}(ml_{c1}^2 + i)\dot{q}_1^2 - mgl_{c1}(1 - \cos(q_1)) \right] = (ml_{c1}^2 + i)\dot{q}_1 \quad (2.71)$$

Derivando con respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_1} \right] = \frac{d}{dt} [(ml_{c1}^2 + i)\dot{q}_1] = (ml_{c1}^2 + i)\ddot{q}_1 \quad (2.72)$$

Resolviendo la derivada parcial del lagrangiano respecto de q_1

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{1}{2}(ml_{c1}^2 + i)\dot{q}_1^2 - mgl_{c1}(1 - \cos(q_1)) \right] = -mgl_{c1} \sin(q_1) \quad (2.73)$$

Sustituyendo en (2.70)

$$(ml_{c1}^2 + i)\ddot{q}_1 + mgl_{c1} \sin(q_1) = \tau - f_f(f_e, \dot{q}_1) \quad (2.74)$$

Modelo dinámico

Reescribiendo la ecuación (2.74), las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para el péndulo toman la forma de la ecuación (2.75), donde esta representa el modelo dinámico del sistema identificando cada uno de sus términos. Se hace notar que si se hace la analogía con el modelo dinámico del robot antropomórfico de n grados de libertad, para este caso no existe una contribución por parte de las fuerzas centrípetas y de Coriolis, por lo que $C(q_1, \dot{q}_1) = 0$.

$$\tau = \underbrace{(ml_{c1}^2 + i)\ddot{q}_1}_{\text{Par inercial}} + \underbrace{mgl_{c1} \sin(q_1)}_{\text{Par gravitacional}} + \underbrace{b\dot{q}_1 + f_c \text{signo}(\dot{q}_1) + f_e[1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|]}_{\text{Fricción (Viscosa, de Coulomb y estática)}} \quad (2.75)$$

De la ecuación (2.75) se obtiene su representación en una ecuación diferencial ordinaria en variables fase $\mathbf{q} = [q_1, \dot{q}_1]^T$. En este sentido τ representa la acción de control o par aplicado en Newton-metro. Cabe resaltar que esta representación de modelo dinámico dado por (2.76), expresa al sistema en lazo abierto, sin tomar en cuenta una acción de control con realimentación. La ecuación (2.76) ya representa una estructura matemática bien definida para el análisis del péndulo en forma de una ecuación ordinaria de primer orden, la cual lleva consigo importantes propiedades que facilitan el cálculo y la simulación. La transformación

se realiza a partir de las variables de estado fase que dan información sobre la dinámica interna del sistema, facilitando la simulación del sistema.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ (ml_{c1}^2 + i)^{-1} [\tau - f_f(f_e, \dot{q}_1) - mgl_{c1} \sin(q_1)] \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

2.8.3. Robot de 3gdl

El robot de 3 gdl es uno de los sistemas que mejor ejemplifican la analogía con el cuerpo humano en los robots antropomórficos; se puede relacionar el giro del torso con la primer articulación del robot relacionada al primer eslabón, el hombro con la segunda y el codo con la tercera articulación. El análisis en investigación de la regulación de robots antropomórficos de 3gdl resulta imprescindible para el desarrollo científico, tecnológico e industrial. Los robots manipuladores industriales por lo regular presentan una estructura antropomórfica, por su parecido al brazo humano; presentando así gran versatilidad de movimiento en el espacio de trabajo tridimensional. Se puede decir que el robot antropomórfico de 3 gdl es el modelo más básico en que se basan, debido a la analogía descrita. Para los próximos análisis, los parámetros del robot antropomórfico se encuentran en la tabla 2.5.

Considere el robot antropomórfico de 3gdl que se muestra en la figura 2.3. Ahora se aborda un problema de mayor complejidad, pues no se trata de un sistema escalar, si no de un sistema vectorial dado por tres articulaciones rotacionales que produce un desplazamiento angular $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$ con respecto a su posición original y que está formado por tres servomotores de espesor $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ y eslabones rígidos de longitud l_1, l_2, l_3 y centros de masa l_{c1}, l_{c2} y l_{c3} , respectivamente. Se debe tomar en cuenta la acción de la gravedad sobre el centro de masa en dirección del eje z_{0-} .

Cinemática Directa

Convención Denavit-Hartenberg

Para desarrollar el modelo de cinemática del robot de 3 gdl se utiliza, se utiliza la convención Denavit-Hartenberg. Considere la figura 2.3, el eje z_0 es alineado al eje de rotación de la base, los ejes z_1 y z_2 son alineados a los ejes de rotación del hombro y codo, respectivamente. Observe que z_1 y z_2 son paralelos entre sí y ambos ejes perpendiculares a z_0 .

Como posición de casa (figura 2.4) se opta por una posición horizontal de los eslabones 2 y 3, paralelos y en el mismo sentido a z_{0+} . Se establecen los sistemas de referencia siguiendo el algoritmo de Denavit-Hartenberg tal como se muestra en la figura 2.3.

Procedimiento:

- El origen del sistema de referencia $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ se encuentra en la base del robot (a

Eslabón	Parámetro	Notación
1 (Base)	Masa del eslabón 1	m_1
	Longitud del eslabón 1	l_1
	Inercia del eslabón 1	i_1
	Centro de masa del eslabón 1	l_{c1}
	Posición articular del eslabón 1	q_1
	Espesor del motor 1	β_1
	Coefficiente de fricción viscosa del eslabón 1	b_1
2 (Hombro)	Masa del eslabón 2	m_2
	Longitud del eslabón 2	l_2
	Inercia del eslabón 2	i_2
	Centro de masa del eslabón 2	l_{c2}
	Posición articular del eslabón 2	q_2
	Espesor del motor 2	β_2
	Coefficiente de fricción viscosa del eslabón 2	b_1
3 (Codo)	Masa del eslabón 3	m_3
	Longitud del eslabón 3	l_3
	Inercia del eslabón 3	i_3
	Centro de masa del eslabón 3	l_{c3}
	Posición articular del eslabón 3	q_3
	Espesor del motor 3	β_3
	Coefficiente de fricción viscosa del eslabón 3	b_3
Aceleración de la gravedad		g

Tabla 2.5: Parámetros del robot de 3 gdl.

nivel de piso), el eje z_0 se alinea con el eje de giro del primer servomotor, el cual es perpendicular al plano $x_0 - y_0$.

- Los sistemas de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ y $\Sigma_2(x_2, y_2, z_2)$ se colocan de tal forma que el eje z_1 se alinee con el eje de giro del hombro y z_2 se alinee con el eje de giro del codo. El eje z_1 es ortogonal al eje z_0 y paralelo al eje z_2 .
- El sistema de referencia Σ_1 se mueve de manera conjunta con el hombro y el sistema de referencia Σ_2 con el codo.

La tabla de parámetros de **D-H** queda dada por:

β_1 representa el espesor del motor (en este caso rotor) 1, es la distancia de la base del estator a la superficie del rotor. Del mismo modo, β_2 es el espesor del motor 2 y β_3 es el espesor del motor 3. l_1 es la distancia comprendida entre el origen de $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ al estator del motor de la base y se mide sobre el eje z_0 , l_2 es la distancia del origen de $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ al eje z_2 medido sobre el eje x_1 , y l_3 es la distancia del origen de $\Sigma_2(x_2, y_2, z_2)$ al extremo

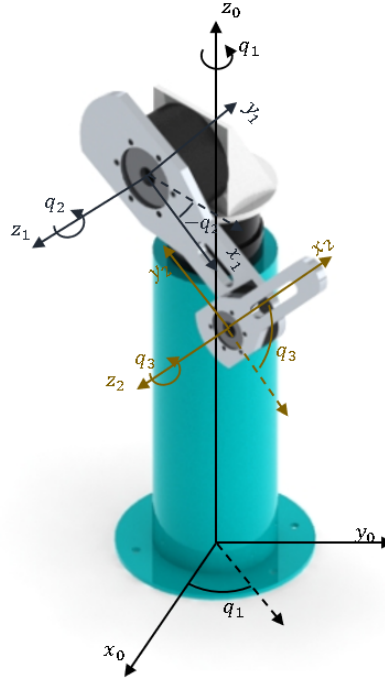


Figura 2.3: Sistemas de coordenadas Σ_i asignados por la metodología de Denavit-Hartenberg.

Eslabón	l_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$\frac{\pi}{2}$	$\beta_1 + l_1$	q_1
2	l_2	0	β_2	q_2
3	l_3	0	β_3	q_3

Tabla 2.6: **D-H** del robot de 3 gdl.

final del robot medido sobre el eje x_2 . De forma general, se define a l_i como la longitud del eslabón i y β_i como el espesor del motor i , esto último se ejemplifica mejor en la figura 2.5.

En este caso particular, para simplificar los cálculos, se consideró a cada β_i como la suma del espesor del rotor i más las distancias constantes no contempladas sobre los ejes z_i que intervienen en cada eslabón; tales como los espesores de los eslabones y la estructura de acoplamiento entre los motores 1 y 2. Esto se comprende mejor en la figura 2.4.

Con base en la tabla de parámetros **D-H** se obtienen las matrices de transformación homogéneas para cada eslabón.

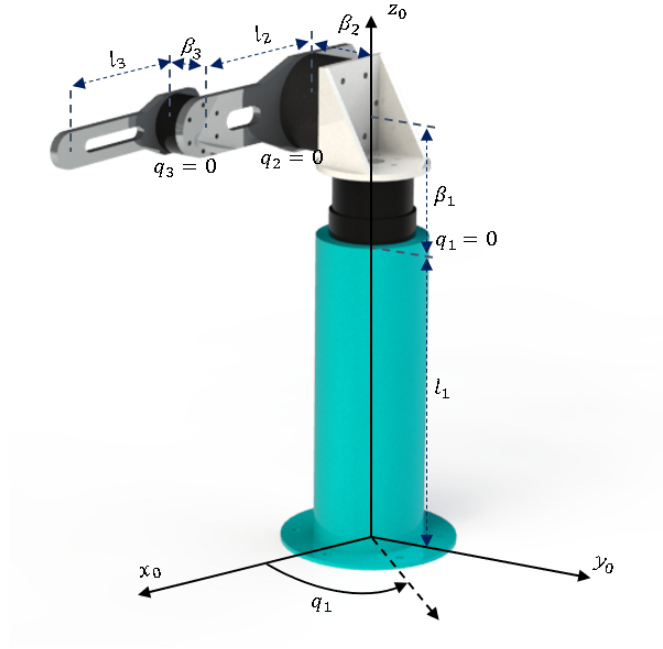


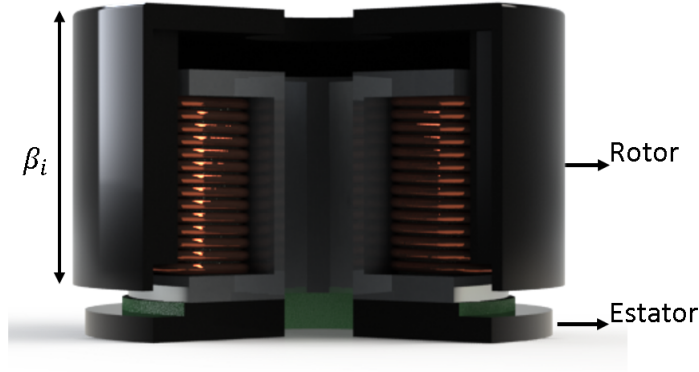
Figura 2.4: Posición de casa designado para el robot de 3 gdl.

$$\begin{aligned}
 H_0^1 &= H_{R_{z_0}}(q_1)H_{T_{z_0}}(l_1 + \beta_1)H_{T_{x_0}}(0)H_{R_{x_0}}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(q_1) & 0 & \sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 + \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.77)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_1^2 &= H_{R_{z_1}}(q_2)H_{T_{z_1}}(\beta_2 + \delta)H_{T_{x_1}}(l_2)H_{R_{x_1}}(0) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & l_2 \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2 \sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.78)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_2^3 &= H_{R_{z_2}}(q_3)H_{T_{z_2}}(\beta_3)H_{T_{x_2}}(l_3)H_{R_{x_2}}(0) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 & l_3 \cos(q_3) \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) & 0 & l_3 \sin(q_3) \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.79)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, empleando identidades trigonométricas y agrupando términos, la matriz homogénea del robot de 3 gdl moviéndose en su espacio tridimensional es:

Figura 2.5: Descripción del espesor β_i en un servomotor.

$$\begin{aligned}
 H_0^3 &= H_0^1 H_1^2 H_2^3 \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(q_1) \cos(q_2 + q_3) & -\cos(q_1) \sin(q_2 + q_3) & \sin(q_1) & [\beta_2 + \beta_3] \sin(q_1) + \cos(q_1)[l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)] \\ \sin(q_1) \cos(q_2 + q_3) & -\sin(q_1) \sin(q_2 + q_3) & -\cos(q_1) & -[\beta_2 + \beta_3] \cos(q_1) + \sin(q_1)[l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)] \\ \sin(q_2 + q_3) & \cos(q_2 + q_3) & 0 & \beta_1 + l_1 + l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.80)
 \end{aligned}$$

De aquí que el modelo de cinemática directa para el robot antropomórfico de 3 gdl sea:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} [\beta_2 + \beta_3] \sin(q_1) + \cos(q_1)[l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)] \\ -[\beta_2 + \beta_3] \cos(q_1) + \sin(q_1)[l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)] \\ \beta_1 + l_1 + l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

Cinemática diferencial

Para obtener la cinemática diferencial se deriva con respecto al tiempo la ecuación (2.81) de la cinemática directa, es decir $\frac{d}{dt} [x_0 \ y_0 \ z_0]^T = \frac{d}{dt} \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$. La matriz Jacobiana de este sistema es una matriz cuadrada $J_v(\mathbf{q}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{f}_R(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, dada por:

$$\begin{aligned}
 J_v(\mathbf{q}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \begin{bmatrix} [\beta_2 + \beta_3] \sin(q_1) + \cos(q_1)[l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)] \\ -[\beta_2 + \beta_3] \cos(q_1) + \sin(q_1)[l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)] \\ \beta_1 + l_1 + l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} [\beta_2 + \beta_3] \cos(q_1) - \sin(q_1)[l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)] & -\cos(q_1)[l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3)] & -l_3 \cos q_1 \sin(q_2 + q_3) \\ [\beta_2 + \beta_3] \sin(q_1) + \cos(q_1)[l_2 \cos(q_2) + l_3 \cos(q_2 + q_3)] & -\sin(q_1)[l_2 \sin(q_2) + l_3 \sin(q_2 + q_3)] & -l_3 \sin q_1 \sin(q_2 + q_3) \\ 0 & l_2 \cos q_2 + l_3 \cos(q_2 + q_3) & l_3 \cos(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \quad (2.82)
 \end{aligned}$$

El determinante del Jacobiano de la ecuación (2.82) es:

$$\det[J_{\mathbf{v}}(\mathbf{q})] = -l_2^2 l_3 \cos(q_2) \sin(q_3) - l_2 l_3^2 \sin(q_2) \cos^2(q_3) - l_2 l_3^2 \cos(q_2) \sin(q_3) \cos(q_3) + l_2 l_3^2 \sin q_2 \quad (2.83)$$

Las singularidades se presentan cuando el determinante del Jacobiano $J_{\mathbf{v}}(\mathbf{q})$ es cero, para este caso existe un número infinito de configuraciones singulares para $q_2 = 0 \pm n\pi$ y $q_3 = 0 \pm n\pi$. Se hace notar que el ángulo q_1 no interviene en las singularidades.

Ahora, se procede a obtener las velocidades de cada articulación.

Velocidad lineal $\mathbf{v}$

Para el eslabón 1, se emplea el vector de traslación contenido en la matriz de transformación homogénea H_0^1 (2.77).

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

Para el eslabón 2, se utiliza el vector de traslación contenido en el producto de las matrices de transformación homogéneas H_0^1 (2.77) y H_1^2 (2.78).

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \beta_2 \sin(q_1) + l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_2) \\ -\beta_2 \cos(q_1) + l_{c2} \sin(q_1) \cos(q_2) \\ l_1 + \beta_1 + l_{c2} \sin(q_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \beta_2 \cos(q_1) - l_{c2} \cos(q_2) \sin(q_1) & -l_{c2} \cos(q_1) \sin(q_2) & 0 \\ \beta_2 \sin(q_1) + l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_2) & -l_{c2} \sin(q_1) \sin(q_2) & 0 \\ 0 & l_{c2} \cos(q_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\beta_2 \cos(q_1) - l_{c2} \cos(q_2) \sin(q_1)]\dot{q}_1 - l_{c2} \cos(q_1) \sin(q_2)\dot{q}_2 \\ [\beta_2 \sin(q_1) + l_{c2} \cos(q_1) \cos(q_2)]\dot{q}_1 - l_{c2} \sin(q_1) \sin(q_2)\dot{q}_2 \\ l_{c2} \cos(q_2)\dot{q}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.85)$$

Para el eslabón 3, este coincide con la cinemática del robot, por lo que se emplea directamente a $\mathbf{f}_R(\mathbf{q})$ (2.81).

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3 &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} [\beta_2 + \beta_3] \sin(q_1) + \cos(q_1)[l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] \\ -[\beta_2 + \beta_3] \cos(q_1) + \sin(q_1)[l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] \\ \beta_1 + l_1 + l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [\beta_2 + \beta_3] \cos(q_1) - \sin(q_1)[l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] & -\cos(q_1)[l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] & -l_{c3} \cos q_1 \sin(q_2 + q_3) \\ [\beta_2 + \beta_3] \sin(q_1) + \cos(q_1)[l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)] & -\sin(q_1)[l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)] & -l_{c3} \sin q_1 \sin(q_2 + q_3) \\ 0 & l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3) & l_{c3} \cos(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} [(\beta_2 + \beta_3) \cos(q_1) - \sin(q_1)[l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)]]\dot{q}_1 - \cos(q_1)[l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)]\dot{q}_2 - l_{c3} \cos q_1 \sin(q_2 + q_3)\dot{q}_3 \\ [(\beta_2 + \beta_3) \sin(q_1) + \cos(q_1)[l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)]]\dot{q}_1 - \sin(q_1)[l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)]\dot{q}_2 - l_{c3} \sin q_1 \sin(q_2 + q_3)\dot{q}_3 \\ [l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)]\dot{q}_2 + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)\dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (2.86)
\end{aligned}$$

El cuadrado de la rapidez de cada eslabón se obtiene como:

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 = \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 = 0 \quad (2.87)$$

$$\|\mathbf{v}_2\|^2 = \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 = [\beta_2^2 + l_{c2}^2 \cos(q_2)]\dot{q}_1^2 - 2l_{c2}\beta_2 \sin(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + l_{c2}^2\dot{q}_2^2 \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}_3\|^2 &= [(\beta_2 + \beta_3)^2 + [l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)]^2]\dot{q}_1^2 + [l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2 l_{c3} \cos(q_3)]\dot{q}_2^2 + l_{c3}^2\dot{q}_3^2 \\
&\quad + 2l_{c3}[l_2 \cos(q_3) + l_{c3}]\dot{q}_2\dot{q}_3 - 2(\beta_2 + \beta_3)[l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)]\dot{q}_1\dot{q}_2 \\
&\quad - 2l_{c3}(\beta_2 + \beta_3) \sin(q_2 + q_3)\dot{q}_1\dot{q}_3 \quad (2.89)
\end{aligned}$$

Velocidad angular $\mathbf{w}$

La velocidad angular puede obtenerse multiplicando la matriz Jacobiana J_w por el vector de velocidad articular $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^3$. Para encontrar el valor de la matriz Jacobiana J_w se hace referencia a la ecuación (2.6).

Para el eslabón 1, primero se calcula el Jacobiano J_{w_1} con base a la ecuación (2.6):

$$J_{w_1}(\mathbf{q}) = [\mathbf{z}_0 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{w}_1 = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \phi_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} = J_{\mathbf{w}_1}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Del mismo modo, para el eslabón 2 se calcula el Jacobiano $J_{\mathbf{w}_2}$ para poder calcular la velocidad angular $\mathbf{w}_2$.

$$J_{\mathbf{w}_2}(\mathbf{q}) = [\mathbf{z}_0 \quad \mathbf{z}_1 \quad \mathbf{0}] = \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\mathbf{q}_1) & 0 \\ 0 & -\cos(\mathbf{q}_1) & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \phi_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = J_{\mathbf{w}_2}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & \sin(q_1) & 0 \\ 0 & -\cos(q_1) & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \sin(q_1) \\ -\dot{q}_2 \cos(q_1) \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Por último, para el eslabón 3 se sigue el mismo procedimiento:

$$J_{\mathbf{w}_3}(\mathbf{q}) = [\mathbf{z}_0 \quad \mathbf{z}_1 \quad \mathbf{z}_2] = \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\mathbf{q}_1) & \sin(\mathbf{q}_1) \\ 0 & -\cos(\mathbf{q}_1) & -\cos(\mathbf{q}_1) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{w}_3 = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_3 \\ \phi_3 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = J_{\mathbf{w}_3}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & \sin(q_1) & \sin(q_1) \\ 0 & -\cos(q_1) & -\cos(q_1) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \sin(q_1) + \dot{q}_3 \sin(q_1) \\ -\dot{q}_2 \cos(q_1) - \dot{q}_3 \cos(q_1) \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

Modelo de energía

Para este caso, al igual que en el ejemplo del péndulo, el sistema presenta energía cinética rotacional debido a la acción de movimiento de las articulaciones y energía cinética traslacional debido al movimiento de los eslabones en el espacio tridimensional. De la misma forma que en el caso del péndulo, sólo se presenta energía potencial debida a la acción de la gravedad. Por último, el modelo de energía con el que se trabaja es el lagrangiano.

Energía cinética $\mathcal{K}$:

Para el eslabón 1

$$\mathcal{K}_1 = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{w}_1^T i_1 \mathbf{w}_1 = \frac{1}{2} i_{zz1} \dot{q}_1^2 \quad (2.96)$$

Para el eslabón 2

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_2 &= \frac{1}{2}m_2 \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{w}_2^T i_2 \mathbf{w}_2 \\
&= \frac{1}{2}m_2 [(\beta_2^2 + l_{c2}^2 \cos(q_2))\dot{q}_1^2 - 2l_{c2}\beta_2 \sin(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + l_{c2}^2\dot{q}_2^2] + \frac{1}{2}[i_{zz2}\dot{q}_1^2 + [i_{yy2}\cos^2(q_1) \\
&\quad + i_{xx2}\sin^2(q_1) + 2i_{xy2}\cos(q_1)\sin(q_1)]\dot{q}_2^2 + 2[i_{yz2}\cos(q_1) - i_{xz2}\sin(q_1)]\dot{q}_1\dot{q}_2]
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Para el eslabón 3

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_3 &= \frac{1}{2}m_3 \mathbf{v}_3^T \mathbf{v}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{w}_3^T i_3 \mathbf{w}_3 \\
&= \frac{1}{2}m_3 [(\beta_2 + \beta_3)^2 + [l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)]^2]\dot{q}_1^2 + [l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2 l_{c3} \cos(q_3)]\dot{q}_2^2 \\
&\quad + l_{c3}^2\dot{q}_3^2 + 2l_{c3}[l_2 \cos(q_3) + l_{c3}]\dot{q}_2\dot{q}_3 - 2(\beta_2 + \beta_3)[l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)]\dot{q}_1\dot{q}_2 \\
&\quad - 2l_{c3}(\beta_2 + \beta_3) \sin(q_2 + q_3)\dot{q}_1\dot{q}_3 + \frac{1}{2}[i_{zz3}\dot{q}_1^2 + 2(i_{yz3}\cos(q_1) - i_{xz3}\sin(q_1))\dot{q}_1\dot{q}_2 \\
&\quad + 2(i_{yz3}\cos(q_1) - i_{xz3}\sin(q_1))\dot{q}_1\dot{q}_3 + 2[\cos(q_1)(i_{yy3}\cos(q_1) + i_{xy3}\sin(q_1)) + \\
&\quad \sin(q_1)(i_{xy3}\cos(q_1) + i_{xx3}\sin(q_1))]\dot{q}_2\dot{q}_3 + [\cos(q_1)(i_{yy3}\cos(q_1) + i_{xy3}\sin(q_1)) \\
&\quad + \sin(q_1)(i_{xy3}\cos(q_1) + i_{xx3}\sin(q_1))]\dot{q}_2^2 [\cos(q_1)(i_{yy3}\cos(q_1) + i_{xy3}\sin(q_1)) \\
&\quad + \sin(q_1)(i_{xy3}\cos(q_1) + i_{xx3}\sin(q_1))]\dot{q}_3^2]
\end{aligned} \tag{2.98}$$

La energía cinética del robot manipulador de 3gdl está dada por la suma de los resultados de las ecuaciones (2.96) a (2.98).

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 + \mathcal{K}_3 \\
&= \frac{1}{2}m_2[[\beta_2^2 + l_{c2}^2 \cos(q_2)]\dot{q}_1^2 - 2l_{c2}\beta_2 \sin(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + l_{c2}^2\dot{q}_2^2] + \frac{1}{2}[i_{zz2}\dot{q}_1^2 + [i_{yy2} \cos^2(q_1) \\
&\quad + i_{xx2} \sin^2(q_1) + 2i_{xy2} \cos(q_1) \sin(q_1)]\dot{q}_2^2 + 2[i_{yz2} \cos(q_1) - i_{xz2} \sin(q_1)]\dot{q}_1\dot{q}_2] \\
&\quad \frac{1}{2}m_3[[(\beta_2 + \beta_3)^2 + [l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)]^2]\dot{q}_1^2 + [l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2l_{c3} \cos(q_3)]\dot{q}_2^2 \\
&\quad + l_{c3}^2\dot{q}_3^2 + 2l_{c3}[l_2 \cos(q_3) + l_{c3}]\dot{q}_2\dot{q}_3 - 2(\beta_2 + \beta_3)[l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)]\dot{q}_1\dot{q}_2 \\
&\quad - 2l_{c3}(\beta_2 + \beta_3) \sin(q_2 + q_3)\dot{q}_1\dot{q}_3] + \frac{1}{2}[i_{zz3}\dot{q}_1^2 + 2(i_{yz3} \cos(q_1) - i_{xz3} \sin(q_1))\dot{q}_1\dot{q}_2 \\
&\quad + 2(i_{yz3} \cos(q_1) - i_{xz3} \sin(q_1))\dot{q}_1\dot{q}_3 + 2[\cos(q_1)(i_{yy3} \cos(q_1) + i_{xy3} \sin(q_1)) + \\
&\quad \sin(q_1)(i_{xy3} \cos(q_1) + i_{xx3} \sin(q_1))]\dot{q}_2\dot{q}_3 + [\cos(q_1)(i_{yy3} \cos(q_1) + i_{xy3} \sin(q_1)) \\
&\quad + \sin(q_1)(i_{xy3} \cos(q_1) + i_{xx3} \sin(q_1))]\dot{q}_2^2[\cos(q_1)(i_{yy3} \cos(q_1) + i_{xy3} \sin(q_1)) \\
&\quad + \sin(q_1)(i_{xy3} \cos(q_1) + i_{xx3} \sin(q_1))]\dot{q}_3^2] + \frac{1}{2}i_{zz1}\dot{q}_1
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Agrupando adecuadamente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{zz1} + i_{zz2} + i_{zz3} + \beta_2^2 m_2 + \beta_2^2 m_3 + \beta_3^2 m_3 + \\ (l_{c2}^2 m_3)/2 + (l_{c3}^2 m_3)/2 + 2\beta_2 \beta_3 m_3 & i_{yz2} \cos(q_1) + i_{yz3} \cos(q_1) - i_{xz2} \sin(q_1) - \\ (l_{c2}^2 m_3)/2 + (l_{c3}^2 m_3)/2 + 2\beta_2 \beta_3 m_3 & i_{xz3} \sin(q_1) - \beta_2 l_{c3} m_3 \sin(q_2 + q_3) - \\ (l_{c2}^2 m_3 \cos(2q_2))/2 + (l_{c3}^2 m_2 \cos(2q_2))/2 + & \beta_3 l_{c3} m_3 \sin(q_2 + q_3) - \beta_2 l_2 m_3 \sin(q_2) \\ (l_{c3}^2 m_3 \cos(2q_2 + 2q_3))/2 + l_2 l_{c3} m_3 \cos(q_3) + & - \beta_3 l_2 m_3 \sin(q_2) - \beta_2 l_{c2} m_2 \sin(q_2) \\ l_2 l_{c3} m_3 \cos(2q_2 + q_3) & \\ i_{yz2} \cos(q_1) + i_{yz3} \cos(q_1) - i_{xz2} \sin(q_1) - & i_{xx2} + i_{xx3} + l_2^2 m_3 + l_{c2}^2 m_2 + l_{c3}^2 m_3 - \\ i_{xz3} \sin(q_1) - \beta_2 l_{c3} m_3 \sin(q_2 + q_3) - & i_{xx2} \cos^2(q_1) - i_{xx3} \cos^2(q_1) + i_{yy2} \cos^2(q_1) \\ \beta_3 l_{c3} m_3 \sin(q_2 + q_3) - \beta_2 l_2 m_3 \sin(q_2) & + i_{yy3} \cos^2(q_1) + i_{xy2} \sin(2q_1) + i_{xy3} \sin(2q_1) \\ - \beta_3 l_2 m_3 \sin(q_2) - \beta_2 l_{c2} m_2 \sin(q_2) & + 2l_2 l_{c3} m_3 \cos(q_3) \\ i_{yz3} \cos(q_1) - i_{xz3} \sin(q_1) - \beta_2 l_{c3} m_3 \sin(q_2 + q_3) & i_{xx3} + l_{c3}^2 m_3 - i_{xx3} \cos^2(q_1) + i_{yy3} \cos^2(q_1) \\ - \beta_3 l_{c3} m_3 \sin(q_2 + q_3) & + i_{xy3} \sin(2q_1) + l_2 l_{c3} m_3 \cos(q_3) \\ & + 2i_{xy3} \cos(q_1) \sin(q_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \tag{2.100}
\end{aligned}$$

Se puede apreciar que aquí la componente inercial se encuentra bien definida por la matriz de inercia $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ del robot antropomórfico de 3 grados de libertad. Al tratarse de un sistema vectorial la componente inercial ya se puede expresar en términos de una matriz,

a diferencia de los ejemplos previos, donde las componentes inerciales eran escalares. Esta matriz de inercia será útil para la identificación de términos en el modelo dinámico del robot de 3 gdl que se presentará más adelante.

Energía potencial $\mathcal{U}$:

La energía potencial del eslabón i -ésimo $\mathcal{U}_i$ se obtiene de manera trivial, puesto que la acción de la gravedad sólo es aplicada sobre el eje z_0 y la altura del eslabón i con respecto al origen del sistema de referencia del robot está dada por la componente z_i del vector de cinemática directa del centro de masa del eslabón i . De esta forma:

$$\mathcal{U}_1 = m_1 g (l_1 + \beta_1) \quad (2.101)$$

$$\mathcal{U}_2 = m_2 g l_{c2} (1 - \cos(q_2)) \quad (2.102)$$

$$\mathcal{U}_3 = m_3 g [(l_2 + l_{c3}) - (l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3))] \quad (2.103)$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3 \\ &= m_1 g (l_1 + \beta_1) + m_2 g l_{c2} (1 - \cos(q_2)) + m_3 g [(l_2 + l_{c3}) - (l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3))] \end{aligned} \quad (2.104)$$

Aquí la componente de par gravitacional sí se puede encontrar en forma de un vector, del vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbb{R}^3$, puesto que ahora se trata de un sistema vectorial y toma la forma de un caso particular del robot antropomórfico de n grados de libertad. Más adelante se identificará esta componente como uno de los términos del modelo dinámico del robot antropomórfico de 3 gdl que se obtendrá posteriormente.

El lagrangiano del robot está dado por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \\
&= \frac{1}{2}m_2[[\beta_2^2 + l_{c2}^2 \cos(q_2)]\dot{q}_1^2 - 2l_{c2}\beta_2 \sin(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + l_{c2}^2\dot{q}_2^2] + \frac{1}{2}[i_{zz2}\dot{q}_1^2 + [i_{yy2} \cos^2(q_1) \\
&\quad + i_{xx2} \sin^2(q_1) + 2i_{xy2} \cos(q_1) \sin(q_1)]\dot{q}_2^2 + 2[i_{yz2} \cos(q_1) - i_{xz2} \sin(q_1)]\dot{q}_1\dot{q}_2] \\
&\quad \frac{1}{2}m_3[(\beta_2 + \beta_3)^2 + [l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)]^2]\dot{q}_1^2 + [l_2^2 + l_{c3}^2 + 2l_2l_{c3} \cos(q_3)]\dot{q}_2^2 \\
&\quad + l_{c3}^2\dot{q}_3^2 + 2l_{c3}[l_2 \cos(q_3) + l_{c3}]\dot{q}_2\dot{q}_3 - 2(\beta_2 + \beta_3)[l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3)]\dot{q}_1\dot{q}_2 \\
&\quad - 2l_{c3}(\beta_2 + \beta_3) \sin(q_2 + q_3)\dot{q}_1\dot{q}_3 + \frac{1}{2}[i_{zz3}\dot{q}_1^2 + 2(i_{yz3} \cos(q_1) - i_{xz3} \sin(q_1))\dot{q}_1\dot{q}_2 \\
&\quad + 2(i_{yz3} \cos(q_1) - i_{xz3} \sin(q_1))\dot{q}_1\dot{q}_3 + 2[\cos(q_1)(i_{yy3} \cos(q_1) + i_{xy3} \sin(q_1)) + \\
&\quad \sin(q_1)(i_{xy3} \cos(q_1) + i_{xx3} \sin(q_1))]\dot{q}_2\dot{q}_3 + [\cos(q_1)(i_{yy3} \cos(q_1) + i_{xy3} \sin(q_1)) \\
&\quad + \sin(q_1)(i_{xy3} \cos(q_1) + i_{xx3} \sin(q_1))]\dot{q}_2^2[\cos(q_1)(i_{yy3} \cos(q_1) + i_{xy3} \sin(q_1)) \\
&\quad + \sin(q_1)(i_{xy3} \cos(q_1) + i_{xx3} \sin(q_1))]\dot{q}_3^2] + \frac{1}{2}i_{zz1}\dot{q}_1 - [m_1g(l_1 + \beta_1) + m_2gl_{c2} \\
&\quad (1 - \cos(q_2)) + m_3g[(l_2 + l_{c3}) - (l_2 \cos(q_2) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3))]]
\end{aligned} \tag{2.105}$$

Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

En este caso también se contempla la totalidad de las componentes de fricción (viscosa, de Coulomb y estática) contenidas en la función $\mathbf{f}_f(\mathbf{f}_e, \dot{\mathbf{q}}) = b\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}_c \text{signo}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{f}_e[1 - |\text{signo}(\dot{\mathbf{q}})|] \in \mathbb{R}^3$. Se hace notar que el sistema está formado por articulaciones rotacionales, por lo que sólo se aplica torque $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^3$, a diferencia de sistemas con articulaciones lineales como el sistema masa-resorte-amortiguador, en el cual se aplica fuerza. Retomando la ecuación (2.105) y tomando las consideraciones descritas, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange quedan escritas como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{f}_f(\mathbf{f}_e, \dot{\mathbf{q}}) \tag{2.106}$$

O de forma individual como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} = \tau_i - f_{fi}(f_{ei}, \dot{q}_i) \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.107}$$

Para el eslabón 1

Resolviendo la derivada parcial del lagrangiano respecto de $\dot{q}_1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} = & i_{zz1}\dot{q}_1 + i_{zz2}\dot{q}_1 + i_{zz3}\dot{q}_1 - (m_3(\dot{q}_2(l_{c3} \sin(q_2 + q_3) + l_2 \sin(q_2))(2\beta_2 + 2\beta_3) \\ & - 2\dot{q}_1(l_{c3}^2 \cos(q_2 + q_3)^2 + l_2^2 \cos(q_2)^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + 2\beta_2\beta_3 \\ & + 2l_2l_{c3} \cos(q_2 + q_3) \cos(q_2)) + 2l_{c3}\dot{q}_3 \sin(q_2 + q_3)(\beta_2 + \beta_3)))/2 \\ & + (m_2(2\dot{q}_1(\beta_2^2 - l_{c2}^2 \sin(q_2)^2 + l_{c2}^2) - 2\beta_2l_{c2}\dot{q}_2 \sin(q_2)))/2 \\ & + i_{yz3} \cos(q_1)(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - i_{xz3} \sin(q_1)(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + i_{yz2}\dot{q}_2 \cos(q_1) \\ & - i_{xz2}\dot{q}_2 \sin(q_1)) \end{aligned} \quad (2.108)$$

Derivando con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} \right] = & \ddot{q}_1(i_{zz1} + i_{zz2} + i_{zz3} + \beta_2^2 m_2 + \beta_2^2 m_3 + \beta_3^2 m_3 + l_{c2}^2 m_2 + 2\beta_2\beta_3 m_3 \\ & + l_{c3}^2 m_3 \cos^2(q_2 + q_3) + l_2^2 m_3 \cos^2(q_2) - l_{c2}^2 m_2 \sin^2(q_2) \\ & + 2l_2l_{c3}m_3 \cos(q_2 + q_3) \cos(q_2)) - \ddot{q}_3(i_{xz3} \sin(q_1) - i_{yz3} \cos(q_1) \\ & + \beta_2l_{c3}m_3 \sin(q_2 + q_3) + \beta_3l_{c3}m_3 \sin(q_2 + q_3)) - \dot{q}_2((m_3(2\dot{q}_1(\sin(2q_2)l_2^2 \\ & + 2 \sin(2q_2 + q_3)l_2l_{c3} + \sin(2q_2 + 2q_3)l_{c3}^2) + \dot{q}_2(l_{c3} \cos(q_2 + q_3) \\ & + l_2 \cos(q_2))(2\beta_2 + 2\beta_3) + 2l_{c3}\dot{q}_3 \cos(q_2 + q_3)(\beta_2 + \beta_3)))/2 \\ & + l_{c2}m_2(l_{c2}\dot{q}_1 \sin(2q_2) + \beta_2\dot{q}_2 \cos(q_2))) - \ddot{q}_2(i_{xz2} \sin(q_1) - i_{yz3} \cos(q_1) \\ & - i_{yz2} \cos(q_1) + i_{xz3} \sin(q_1) + (m_3(l_{c3} \sin(q_2 + q_3) + l_2 \sin(q_2)) \\ & (2\beta_2 + 2\beta_3))/2 + \beta_2l_{c2}m_2 \sin(q_2)) - \dot{q}_1(i_{xz3} \cos(q_1)(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ & + i_{yz3} \sin(q_1)(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + i_{xz2}\dot{q}_2 \cos(q_1) + i_{yz2}\dot{q}_2 \sin(q_1)) \\ & - (m_3\dot{q}_3(4l_{c3}\dot{q}_1 \sin(q_2 + q_3)(l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2)) \\ & + l_{c3}\dot{q}_2 \cos(q_2 + q_3)(2\beta_2 + 2\beta_3) + 2l_{c3}\dot{q}_3 \cos(q_2 + q_3)(\beta_2 + \beta_3)))/2 \end{aligned} \quad (2.109)$$

Resolviendo la derivada parcial del lagrangiano respecto de q_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_1} = & i_{xy2}\dot{q}_2^2 \cos(2q_1) + i_{xy3}\dot{q}_2^2 \cos(2q_1) + i_{xy3}\dot{q}_3^2 \cos(2q_1) + (i_{xx2}\dot{q}_2^2 \sin(2q_1))/2 \\ & + (i_{xx3}\dot{q}_2^2 \sin(2q_1))/2 + (i_{xx3}\dot{q}_3^2 \sin(2q_1))/2 - (i_{yy2}\dot{q}_2^2 \sin(2q_1))/2 \\ & - (i_{yy3}\dot{q}_2^2 \sin(2q_1))/2 - (i_{yy3}\dot{q}_3^2 \sin(2q_1))/2 - i_{xz2}\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(q_1) \\ & - i_{xz3}\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(q_1) - i_{xz3}\dot{q}_1\dot{q}_3 \cos(q_1) - i_{yz2}\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(q_1) - i_{yz3}\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(q_1) \\ & - i_{yz3}\dot{q}_1\dot{q}_3 \sin(q_1) + 2i_{xy3}\dot{q}_2\dot{q}_3 \cos(2q_1) + i_{xx3}\dot{q}_2\dot{q}_3 \sin(2q_1) \\ & - i_{yy3}\dot{q}_2\dot{q}_3 \sin(2q_1) \end{aligned} \quad (2.110)$$

Sustituyendo en (2.107) y simplificando

$$\begin{aligned}
\tau_1 - f_{f1}(f_{e1}, \dot{q}_1) = & i_{zz1}\ddot{q}_1 + i_{zz2}\ddot{q}_1 + i_{zz3}\ddot{q}_1 + (l_2^2 m_3 \ddot{q}_1)/2 + (l_{c2}^2 m_2 \ddot{q}_1)/2 + (l_{c3}^2 m_3 \ddot{q}_1)/2 \\
& - i_{xy2}\dot{q}_2^2 \cos(2q_1) - i_{xy3}\dot{q}_2^2 \cos(2q_1) - i_{xy3}\dot{q}_3^2 \cos(2q_1) \\
& - (i_{xx2}\dot{q}_2^2 \sin(2q_1))/2 - (i_{xx3}\dot{q}_2^2 \sin(2q_1))/2 - (i_{xx3}\dot{q}_3^2 \sin(2q_1))/2 \\
& + (i_{yy2}\dot{q}_2^2 \sin(2q_1))/2 + (i_{yy3}\dot{q}_2^2 \sin(2q_1))/2 + (i_{yy3}\dot{q}_3^2 \sin(2q_1))/2 \\
& + \beta_2^2 m_2 \ddot{q}_1 + \beta_2^2 m_3 \ddot{q}_1 + \beta_3^2 m_3 \ddot{q}_1 + i_{yz2}\ddot{q}_2 \cos(q_1) + i_{yz3}\ddot{q}_2 \cos(q_1) \\
& + i_{yz3}\ddot{q}_3 \cos(q_1) - i_{xz2}\ddot{q}_2 \sin(q_1) - i_{xz3}\ddot{q}_2 \sin(q_1) - i_{xz3}\ddot{q}_3 \sin(q_1) \\
& + (l_2^2 m_3 \ddot{q}_1 \cos(2q_2))/2 + (l_c^2 m_2 \ddot{q}_1 \cos(2q_2))/2 \\
& + (l_{c3}^2 m_3 \ddot{q}_1 \cos(2q_2 + 2q_3))/2 - 2i_{xy3}\dot{q}_2 \dot{q}_3 \cos(2q_1) + 2\beta_2 \beta_3 m_3 \ddot{q}_1 \\
& - i_{xx3}\dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin(2q_1) + i_{yy3}\dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin(2q_1) + l_2 l_{c3} m_3 \ddot{q}_1 \cos(2q_2 + q_3) \\
& - \beta_2 l_2 m_3 \dot{q}_2^2 \cos(q_2) - \beta_3 l_2 m_3 \dot{q}_2^2 \cos(q_2) - \beta_2 l_{c2} m_2 \dot{q}_2^2 \cos(q_2) \\
& - \beta_2 l_{c3} m_3 \ddot{q}_2 \sin(q_2 + q_3) - \beta_2 l_{c3} m_3 \ddot{q}_3 \sin(q_2 + q_3) \\
& - \beta_3 l_{c3} m_3 \ddot{q}_2 \sin(q_2 + q_3) - \beta_3 l_{c3} m_3 \ddot{q}_3 \sin(q_2 + q_3) - l_2^2 m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(2q_2) \\
& - l_{c2}^2 m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(2q_2) - \beta_2 l_2 m_3 \ddot{q}_2 \sin(q_2) - \beta_3 l_2 m_3 \ddot{q}_2 \sin(q_2) \\
& - \beta_2 l_{c2} m_2 \ddot{q}_2 \sin(q_2) + l_2 l_{c3} m_3 \ddot{q}_1 \cos(q_3) - l_{c3}^2 m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(2q_2 + 2q_3) \\
& - l_{c3}^2 m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 \sin(2q_2 + 2q_3) - \beta_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_2^2 \cos(q_2 + q_3) \\
& - \beta_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_3^2 \cos(q_2 + q_3) - \beta_3 l_{c3} m_3 \dot{q}_2^2 \cos(q_2 + q_3) \\
& - \beta_3 l_{c3} m_3 \dot{q}_3^2 \cos(q_2 + q_3) - 2\beta_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \cos(q_2 + q_3) \\
& - 2\beta_3 l_{c3} m_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \cos(q_2 + q_3) - l_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 \sin(q_3) \\
& - 2l_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(2q_2 + q_3) - l_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 \sin(2q_2 + q_3)
\end{aligned} \tag{2.111}$$

Para el eslabón 2

Resolviendo la derivada parcial del lagrangiano respecto de $\dot{q}_2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} = & l_2^2 m_3 \dot{q}_2 + l_{c2}^2 m_2 \dot{q}_2 + l_{c3}^2 m_3 \dot{q}_2 + l_{c3}^2 m_3 \dot{q}_3 + i_{yy2}\dot{q}_2 \cos^2(q_1) + i_{yy3}\dot{q}_2 \cos^2(q_1) \\
& + i_{yy3}\dot{q}_3 \cos^2(q_1) + i_{xy2}\dot{q}_2 \sin(2q_1) + i_{xy3}\dot{q}_2 \sin(2q_1) + i_{xy3}\dot{q}_3 \sin(2q_1) \\
& + i_{xx2}\dot{q}_2 \sin^2(q_1) + i_{xx3}\dot{q}_2 \sin^2(q_1) + i_{xx3}\dot{q}_3 \sin^2(q_1) + i_{yz2}\dot{q}_1 \cos(q_1) \\
& + i_{yz3}\dot{q}_1 \cos(q_1) - i_{xz2}\dot{q}_1 \sin(q_1) - i_{xz3}\dot{q}_1 \sin(q_1) - \beta_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) \\
& - \beta_3 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) - \beta_2 l_2 m_3 \dot{q}_1 \sin(q_2) - \beta_3 l_2 m_3 \dot{q}_1 \sin(q_2) \\
& - \beta_2 l_{c2} m_2 \dot{q}_1 \sin(q_2) + 2l_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_2 \cos(q_3) + l_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_3 \cos(q_3)
\end{aligned} \tag{2.112}$$

Derivando con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} \right] = & (i_{xx2}\ddot{q}_2)/2 + (i_{xx3}\ddot{q}_2)/2 + (i_{xx3}\ddot{q}_3)/2 + (i_{yy2}\dot{q}_2)/2 + (i_{yy3}\ddot{q}_2)/2 \\
& + (i_{yy3}\ddot{q}_3)/2 + l_2^2 m_3 \ddot{q}_2 + l_{c2}^2 m_2 \ddot{q}_2 + l_{c3}^2 m_3 \ddot{q}_2 + l_{c3}^2 m_3 \ddot{q}_3 \\
& - (i_{xx2}\ddot{q}_2 \cos(2q_1))/2 - (i_{xx3}\ddot{q}_2 \cos(2q_1))/2 - (i_{xx3}\ddot{q}_3 \cos(2q_1))/2 \\
& + (i_{yy2}\ddot{q}_2 \cos(2q_1))/2 + (i_{yy3}\ddot{q}_2 \cos(2q_1))/2 + (i_{yy3}\ddot{q}_3 \cos(2q_1))/2 \\
& - i_{xz2}\dot{q}_1^2 \cos(q_1) - i_{xz3}\dot{q}_1^2 \cos(q_1) + i_{xy2}\dot{q}_2 \sin(2q_1) + i_{xy3}\dot{q}_2 \sin(2q_1) \\
& + i_{xy3}\dot{q}_3 \sin(2q_1) - i_{yz2}\dot{q}_1^2 \sin(q_1) - i_{yz3}\dot{q}_1^2 \sin(q_1) + i_{yz2}\dot{q}_1 \cos(q_1) \\
& + i_{yz3}\dot{q}_1 \cos(q_1) - i_{xz2}\dot{q}_1 \sin(q_1) - i_{xz3}\dot{q}_1 \sin(q_1) + 2i_{xy2}\dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(2q_1) \\
& + 2i_{xy3}\dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(2q_1) + 2i_{xy3}\dot{q}_1 \dot{q}_3 \cos(2q_1) + i_{xx2}\dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(2q_1) \\
& + i_{xx3}\dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(2q_1) + i_{xx3}\dot{q}_1 \dot{q}_3 \sin(2q_1) - i_{yy2}\dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(2q_1) \\
& - i_{yy3}\dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(2q_1) - i_{yy3}\dot{q}_1 \dot{q}_3 \sin(2q_1) - l_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_3^2 \sin(q_3) \\
& - \beta_2 l_{c3} m_3 \ddot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) - \beta_3 l_{c3} m_3 \ddot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) - \beta_2 l_2 m_3 \ddot{q}_1 \sin(q_2) \\
& - \beta_3 l_2 m_3 \ddot{q}_1 \sin(q_2) - \beta_2 l_{c2} m_2 \ddot{q}_1 \sin(q_2) + 2l_2 l_{c3} m_3 \ddot{q}_2 \cos(q_3) \\
& + l_2 l_{c3} m_3 \ddot{q}_3 \cos(q_3) - \beta_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2 + q_3) - \beta_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 \cos(q_2 + q_3) \\
& - \beta_3 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2 + q_3) - \beta_3 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 \cos(q_2 + q_3) \\
& - \beta_2 l_2 m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2) - \beta_3 l_2 m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2) - \beta_2 l_{c2} m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2) \\
& - 2l_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin(q_3)
\end{aligned} \tag{2.113}$$

Resolviendo la derivada parcial del lagrangiano respecto de q_2

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_2} = & -(m_3(\dot{q}_1^2(\sin(2q_2)l_2^2 + 2\sin(2q_2 + q_3)l_2 l_{c3} + \sin(2q_2 + 2q_3)l_{c3}^2) \\
& + \dot{q}_1 \dot{q}_2(l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2))(2\beta_2 + 2\beta_3) \\
& + 2l_{c3}\dot{q}_1 \dot{q}_3 \cos(q_2 + q_3)(\beta_2 + \beta_3)))/2 - gm_3(l_{c3} \sin(q_2 + q_3) + l_2 \sin(q_2)) \\
& - (l_{c2}m_2\dot{q}_1(l_{c2}\dot{q}_1 \sin(2q_2) + 2\beta_2\dot{q}_2 \cos(q_2)))/2 - gl_{c2}m_2 \sin(q_2)
\end{aligned} \tag{2.114}$$

Sustituyendo en (2.107) y simplificando

$$\begin{aligned}
\tau_2 - f_{f2}(f_{e2}, \dot{q}_2) = & (i_{xx2}\ddot{q}_2)/2 + (i_{xx3}\ddot{q}_2)/2 + (i_{xx3}\ddot{q}_3)/2 + (i_{yy2}\ddot{q}_2)/2 + (i_{yy3}\ddot{q}_2)/2 \\
& + (i_{yy3}\ddot{q}_3)/2 + l_2^2 m_3 \ddot{q}_2 + l_{c2}^2 m_2 \ddot{q}_2 + l_{c3}^2 m_3 \ddot{q}_2 + l_{c3}^2 m_3 \ddot{q}_3 \\
& - (i_{xx2}\ddot{q}_2 \cos(2q_1))/2 - (i_{xx3}\ddot{q}_2 \cos(2q_1))/2 - (i_{xx3}\ddot{q}_3 \cos(2q_1))/2 \\
& + (i_{yy2}\ddot{q}_2 \cos(2q_1))/2 + (i_{yy3}\ddot{q}_2 \cos(2q_1))/2 + (i_{yy3}\ddot{q}_3 \cos(2q_1))/2 \\
& - i_{xz2}\dot{q}_1^2 \cos(q_1) - i_{xz3}\dot{q}_1^2 \cos(q_1) + i_{xy2}\dot{q}_2 \sin(2q_1) + i_{xy3}\dot{q}_2 \sin(2q_1) \\
& + i_{xy3}\dot{q}_3 \sin(2q_1) - i_{yz2}\dot{q}_1^2 \sin(q_1) - i_{yz3}\dot{q}_1^2 \sin(q_1) + i_{yz2}\dot{q}_1 \cos(q_1) \\
& + i_{yz3}\dot{q}_1 \cos(q_1) - i_{xz2}\dot{q}_1 \sin(q_1) - i_{xz3}\dot{q}_1 \sin(q_1) + gl_{c3}m_3 \sin(q_2 + q_3) \\
& + gl_2m_3 \sin(q_2) + gl_{c2}m_2 \sin(q_2) + (l_2^2 m_3 \dot{q}_1^2 \sin(2q_2))/2 \\
& + (l_{c2}^2 m_2 \dot{q}_1^2 \sin(2q_2))/2 + 2i_{xy2}\dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(2q_1) + 2i_{xy3}\dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(2q_1) \\
& + 2i_{xy3}\dot{q}_1 \dot{q}_3 \cos(2q_1) + i_{xx2}\dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(2q_1) + i_{xx3}\dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(2q_1) \\
& + i_{xx3}\dot{q}_1 \dot{q}_3 \sin(2q_1) - i_{yy2}\dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(2q_1) - i_{yy3}\dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(2q_1) \\
& - i_{yy3}\dot{q}_1 \dot{q}_3 \sin(2q_1) + (l_{c3}^2 m_3 \dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + 2q_3))/2 - l_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_3^2 \sin(q_3) \\
& + l_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + q_3) - \beta_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) \\
& - \beta_3 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) - \beta_2 l_2 m_3 \dot{q}_1 \sin(q_2) - \beta_3 l_2 m_3 \dot{q}_1 \sin(q_2) \\
& - \beta_2 l_{c2} m_2 \dot{q}_1 \sin(q_2) + 2l_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_2 \cos(q_3) + l_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_3 \cos(q_3) \\
& - 2l_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin(q_3)
\end{aligned} \tag{2.115}$$

Para el eslabón 3

Resolviendo la derivada parcial del lagrangiano respecto de $\dot{q}_3$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_3} = & l_{c3}^2 m_3 \dot{q}_2 + l_{c3}^2 m_3 \dot{q}_3 + i_{yy3}\dot{q}_2 \cos^2(q_1) + i_{yy3}\dot{q}_3 \cos^2(q_1) + i_{xy3}\dot{q}_2 \sin(2q_1) \\
& + i_{xy3}\dot{q}_3 \sin(2q_1) + i_{xx3}\dot{q}_2 \sin^2(q_1) + i_{xx3}\dot{q}_3 \sin^2(q_1) + i_{yz3}\dot{q}_1 \cos(q_1) \\
& - i_{xz3}\dot{q}_1 \sin(q_1) - \beta_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) - \beta_3 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) \\
& + l_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_2 \cos(q_3)
\end{aligned} \tag{2.116}$$

Derivando con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_3} \right] = & (i_{xx3}\ddot{q}_2)/2 + (i_{xx3}\ddot{q}_3)/2 + (i_{yy3}\ddot{q}_2)/2 + (i_{yy3}\ddot{q}_3)/2 + l_{c3}^2 m_3 \ddot{q}_2 + l_{c3}^2 m_3 \ddot{q}_3 \\
& - (i_{xx3}\ddot{q}_2 \cos(2q_1))/2 - (i_{xx3}\ddot{q}_3 \cos(2q_1))/2 + (i_{yy3}\ddot{q}_2 \cos(2q_1))/2 \\
& + (i_{yy3}\ddot{q}_3 \cos(2q_1))/2 - i_{xz3}\dot{q}_1^2 \cos(q_1) + i_{xy3}\dot{q}_2 \sin(2q_1) + i_{xy3}\dot{q}_3 \sin(2q_1) \\
& - i_{yz3}\dot{q}_1^2 \sin(q_1) + i_{yz3}\dot{q}_1 \cos(q_1) - i_{xz3}\dot{q}_1 \sin(q_1) + 2i_{xy3}\dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(2q_1) \\
& + 2i_{xy3}\dot{q}_1 \dot{q}_3 \cos(2q_1) + i_{xx3}\dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(2q_1) + i_{xx3}\dot{q}_1 \dot{q}_3 \sin(2q_1) \\
& - i_{yy3}\dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(2q_1) - i_{yy3}\dot{q}_1 \dot{q}_3 \sin(2q_1) - \beta_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) \\
& - \beta_3 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) + l_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_2 \cos(q_3) - \beta_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2 + q_3) \\
& - \beta_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 \cos(q_2 + q_3) - \beta_3 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2 + q_3) \\
& - \beta_3 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 \cos(q_2 + q_3) - l_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin(q_3)
\end{aligned} \tag{2.117}$$

Resolviendo la derivada parcial del lagrangiano respecto de q_3

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_3} = & -(m_3(2l_{c3} \sin(q_2 + q_3)(l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + l_2 \cos(q_2))\dot{q}_1^2 \\
& + l_{c3} \cos(q_2 + q_3)(2\beta_2 + 2\beta_3)\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2l_{c3}\dot{q}_3 \cos(q_2 + q_3)(\beta_2 + \beta_3)\dot{q}_1 \\
& + 2l_2l_{c3} \sin(q_3)\dot{q}_2^2 + 2l_2l_{c3}\dot{q}_3 \sin(q_3)\dot{q}_2))/2 - gl_{c3}m_3 \sin(q_2 + q_3)
\end{aligned} \quad (2.118)$$

Sustituyendo en (2.107) y simplificando

$$\begin{aligned}
\tau_3 - f_{f3}(f_{e3}, \dot{q}_3) = & (i_{xx3}\ddot{q}_2)/2 + (i_{xx3}\ddot{q}_3)/2 + (i_{yy3}\ddot{q}_2)/2 + (i_{yy3}\ddot{q}_3)/2 + l_{c3}^2 m_3 \ddot{q}_2 \\
& + l_{c3}^2 m_3 \ddot{q}_3 - (i_{xx3}\ddot{q}_2 \cos(2q_1))/2 - (i_{xx3}\ddot{q}_3 \cos(2q_1))/2 \\
& + (i_{yy3}\ddot{q}_2 \cos(2q_1))/2 + (i_{yy3}\ddot{q}_3 \cos(2q_1))/2 - i_{xz3}\dot{q}_1^2 \cos(q_1) \\
& + i_{xy3}\ddot{q}_2 \sin(2q_1) + i_{xy3}\ddot{q}_3 \sin(2q_1) - i_{yz3}\dot{q}_1^2 \sin(q_1) + i_{yz3}\ddot{q}_1 \cos(q_1) \\
& - i_{xz3}\ddot{q}_1 \sin(q_1) + gl_{c3}m_3 \sin(q_2 + q_3) + 2i_{xy3}\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(2q_1) \\
& + 2i_{xy3}\dot{q}_1\dot{q}_3 \cos(2q_1) + i_{xx3}\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(2q_1) + i_{xx3}\dot{q}_1\dot{q}_3 \sin(2q_1) \\
& - i_{yy3}\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin(2q_1) - i_{yy3}\dot{q}_1\dot{q}_3 \sin(2q_1) + (l_{c3}^2 m_3 \dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + 2q_3))/2 \\
& + (l_2l_{c3}m_3\dot{q}_1^2 \sin(q_3))/2 + l_2l_{c3}m_3\dot{q}_2^2 \sin(q_3) \\
& + (l_2l_{c3}m_3\dot{q}_1^2 \sin(2q_2 + q_3))/2 - \beta_2l_{c3}m_3\ddot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) \\
& - \beta_3l_{c3}m_3\ddot{q}_1 \sin(q_2 + q_3) + l_2l_{c3}m_3\ddot{q}_2 \cos(q_3)
\end{aligned} \quad (2.119)$$

Modelo Dinámico

Las ecuaciones (2.111), (2.115) y (2.119) ya presentan una interpretación del modelo dinámico para cada articulación del robot antropomórfico de 3 gdl. Sin embargo, resulta más complicado analizar cada uno de sus términos, contribuciones y realizar despejes, es por ello que se hace importante el llevar a cabo la agrupación de términos en forma del modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad. Representando de forma vectorial los torques obtenidos para cada articulación, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para el caso del robot antropomórfico de 3gdl toman la forma de la ecuación (2.120). Esta expresión permite obtener una ventaja en cuanto a propiedades matemáticas respecta, además se identifican cada uno de sus términos. A diferencia de los ejemplos anteriores, existe

una matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, también se puede apreciar que el modelo dinámico es considerablemente más complejo que el de los ejemplos previos.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} i_{zz1} + i_{zz2} + i_{zz3} + \beta_2^2 m_2 + \beta_2^2 m_3 + \beta_3^2 m_3 + \\ (l_{c2}^2 m_3)/2 + (l_{c2}^2 m_2)/2 + (l_{c3}^2 m_3)/2 + 2\beta_2 \beta_3 m_3 \\ + (l_{c3}^2 m_3 \cos(2q_2))/2 + (l_{c2}^2 m_2 \cos(2q_2))/2 + \\ (l_{c3}^2 m_3 \cos(2q_2 + 2q_3))/2 + l_{2l_{c3} m_3 \cos(q_3)} + \\ l_{2l_{c3} m_3 \cos(2q_2 + q_3)} \\ i_{yz2} \cos(q_1) + i_{yz3} \cos(q_1) - i_{xz2} \sin(q_1) - \\ i_{xz3} \sin(q_1) - \beta_2 l_{c3} m_3 \sin(q_2 + q_3) - \\ \beta_3 l_{c3} m_3 \sin(q_2 + q_3) - \beta_2 l_{c2} m_2 \sin(q_2) \\ i_{yz3} \cos(q_1) - i_{xz3} \sin(q_1) - \beta_2 l_{c3} m_3 \sin(q_2 + q_3) \\ - \beta_3 l_{c3} m_3 \sin(q_2 + q_3) \\ i_{xx2} + i_{xx3} + l_{c2}^2 m_2 + l_{c3}^2 m_3 - \\ i_{xx2} \cos^2(q_1) - i_{xx3} \cos^2(q_1) + i_{yy2} \cos^2(q_1) \\ + i_{yy3} \cos^2(q_1) + i_{xy2} \sin(2q_1) + i_{xy3} \sin(2q_1) \\ + 2l_{2l_{c3} m_3 \cos(q_3)} \\ i_{xx3} + l_{c3}^2 m_3 - i_{xx3} \cos^2(q_1) + i_{yy3} \cos^2(q_1) \\ + i_{xy3} \sin(2q_1) + l_{2l_{c3} m_3 \cos(q_3)} \\ l_{c3}^2 m_3 + i_{yy3} \cos^2(q_1) + i_{xx3} \sin^2(q_1) \\ + 2i_{xy3} \cos(q_1) \sin(q_1) \end{bmatrix}}_{M(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} \\
 &+ \underbrace{\begin{bmatrix} i_{xz2} \dot{q}_2 \cos(q_1) + i_{xz3} \dot{q}_2 \cos(q_1) + i_{xz3} \dot{q}_3 \cos(q_1) \\ + i_{yz2} \dot{q}_2 \sin(q_1) + i_{yz3} \dot{q}_2 \sin(q_1) + i_{yz3} \dot{q}_3 \sin(q_1) \\ - l_{c2}^2 m_3 \dot{q}_2 \sin(2q_2) - l_{c2}^2 m_2 \dot{q}_2 \sin(2q_2) \\ - l_{c3}^2 m_3 \dot{q}_2 \sin(2q_2 + 2q_3) - l_{c3}^2 m_3 \dot{q}_3 \sin(2q_2 + 2q_3) \\ - 2l_{2l_{c3} m_3 \dot{q}_2 \sin(2q_2 + q_3)} - l_{2l_{c3} m_3 \dot{q}_3 \sin(2q_2 + q_3)} \\ - l_{2l_{c3} m_3 \dot{q}_3 \sin(q_3)} \\ (l_{c2}^2 m_3 \dot{q}_1 \sin(2q_2))/2 - i_{xz3} \dot{q}_1 \cos(q_1) \\ - i_{yz2} \dot{q}_1 \sin(q_1) - i_{yz3} \dot{q}_1 \sin(q_1) \\ - i_{xz2} \dot{q}_1 \cos(q_1) + (l_{c2}^2 m_2 \dot{q}_1 \sin(2q_2))/2 \\ + (l_{c3}^2 m_3 \dot{q}_1 \sin(2q_2 + 2q_3))/2 + l_{2l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \sin(2q_2 + q_3)} \\ - \beta_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_2 \cos(q_2 + q_3) - \beta_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_3 \cos(q_2 + q_3) \\ - \beta_3 l_{c3} m_3 \dot{q}_2 \cos(q_2 + q_3) - \beta_3 l_{c3} m_3 \dot{q}_3 \cos(q_2 + q_3) \\ - \beta_2 l_{2l_{c3} m_3 \dot{q}_2 \cos(q_2)} - \beta_3 l_{2l_{c3} m_3 \dot{q}_2 \cos(q_2)} \\ - \beta_2 l_{c2} m_2 \dot{q}_2 \cos(q_2) \\ (l_{c3}^2 m_3 \dot{q}_1 \sin(2q_2 + 2q_3))/2 - i_{yz3} \dot{q}_1 \sin(q_1) \\ - i_{xz3} \dot{q}_1 \cos(q_1) + (l_{2l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \sin(2q_2 + q_3))/2 \\ - \beta_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_2 \cos(q_2 + q_3) - \beta_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_3 \cos(q_2 + q_3) \\ - \beta_3 l_{c3} m_3 \dot{q}_2 \cos(q_2 + q_3) - \beta_3 l_{c3} m_3 \dot{q}_3 \cos(q_2 + q_3) \\ + (l_{2l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \sin(q_3))/2 \\ 2i_{xy2} \dot{q}_1 \cos(2q_1) + 2i_{xy3} \dot{q}_1 \cos(2q_1) \\ + i_{xx2} \dot{q}_1 \sin(2q_1) + i_{xx3} \dot{q}_1 \sin(2q_1) \\ - i_{yy2} \dot{q}_1 \sin(2q_1) - i_{yy3} \dot{q}_1 \sin(2q_1) \\ + \beta_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \cos(q_2 + q_3) + \beta_3 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \cos(q_2 + q_3) \\ + \beta_2 l_{2l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \cos(q_2)} + \beta_3 l_{2l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \cos(q_2)} \\ + \beta_2 l_{c2} m_2 \dot{q}_1 \cos(q_2) - 2l_{2l_{c3} m_3 \dot{q}_3 \sin(q_3)} \\ 2i_{xy3} \dot{q}_1 \cos(2q_1) + i_{xx3} \dot{q}_1 \sin(2q_1) \\ - i_{yy3} \dot{q}_1 \sin(2q_1) + \beta_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \cos(q_2 + q_3) \\ + \beta_3 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \cos(q_2 + q_3) \\ - l_{2l_{c3} m_3 \dot{q}_3 \sin(q_3)} \\ 2i_{xy3} \dot{q}_1 \cos(2q_1) + i_{xx3} \dot{q}_1 \sin(2q_1) \\ - i_{yy3} \dot{q}_1 \sin(2q_1) + \beta_2 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \cos(q_2 + q_3) \\ + \beta_3 l_{c3} m_3 \dot{q}_1 \cos(q_2 + q_3) \\ + l_{2l_{c3} m_3 \dot{q}_3 \sin(q_3)} \end{bmatrix}}_{C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \\
 &+ g \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ m_2 l_{c2} \sin(q_2) + m_3 l_2 \sin(q_2) + m_3 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \\ m_3 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{q})} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \dot{q}_1 + f_{c1} \text{signo}(\dot{q}_1) + f_{e1} [1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|] \\ b_2 \dot{q}_2 + f_{c2} \text{signo}(\dot{q}_2) + f_{e2} [1 - |\text{signo}(\dot{q}_2)|] \\ b_3 \dot{q}_3 + f_{c3} \text{signo}(\dot{q}_3) + f_{e3} [1 - |\text{signo}(\dot{q}_3)|] \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e)} \quad (2.120)
 \end{aligned}$$

De la ecuación (2.120) se puede obtener su representación en una ecuación diferencial ordinaria en variables fase $\mathbf{x} = [\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]^T \in \mathbb{R}^6$. Por simplicidad, la expresión se deja con la representación de sus términos. En este sentido $\boldsymbol{\tau}$ representa la acción de control o pares

aplicados en Newton-metros. Cabe resaltar que esta representación de modelo dinámico dado por (2.121), expresa al sistema en lazo abierto, sin tomar en cuenta una acción de control con realimentación. La ecuación (2.121) ya representa una estructura matemática bien definida para el análisis del robot antropomórfico de 3 gdl en forma de una ecuación ordinaria de primer orden, la cual lleva consigo importantes propiedades que facilitan el cálculo y la simulación.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(\mathbf{q})^{-1}[\boldsymbol{\tau} - \mathbf{f}_f(\mathbf{f}_e, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

En donde $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de Inercia, se puede observar claramente que se trata de una matriz simétrica. $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis. El vector $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3$ es el vector de pares gravitacionales debido a la acción de la gravedad y $\mathbf{f}_f(\mathbf{f}_e, \text{Dot}\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3$ es el vector de pares de fricción.

Capítulo 3

Regulación

3.1. Teoría de estabilidad de Lyapunov

En esta sección se presenta un resumen de las herramientas básicas de la teoría de estabilidad de Lyapunov. Es necesario abordar el tema, pues esta teoría es la empleada para el análisis de estabilidad del esquema de control que gobierna al robot. Cabe mencionar que esta teoría no es la única que permite hacer esto; existen diversas herramientas que permiten analizar la estabilidad del punto de equilibrio del sistema dinámico formado por el algoritmo de control y el modelado del robot manipulador, por ejemplo: estabilidad $\mathcal{L}$, pasividad, contracción de mapas, entre otras. Sin embargo, la teoría de estabilidad de Lyapunov juega un rol destacado debido a la claridad y riqueza descriptiva sobre sus definiciones y método de análisis para sistemas dinámicos lineales y no lineales.

La teoría de estabilidad de Lyapunov tiene como objetivo el análisis del punto de equilibrio de sistemas dinámicos del tipo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \geq 0 \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema (3.1), $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ es la condición inicial o estado inicial. La función $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua Lipschitz en $\mathbf{x}(t)$ y uniforme en t . La condición Lipschitz garantiza que cumple las condiciones estándar para la existencia y unicidad de soluciones, es decir:

- La ecuación (3.1) tiene una solución única en el intervalo $[0, \infty)$ que corresponde a cada estado inicial $\mathbf{x}(0)$.
- Si $\mathbf{x}(t)$ es la solución de (3.1) para el estado inicial $\mathbf{x}(0)$, entonces $\mathbf{x}(t)$ depende de forma continua del estado inicial $\mathbf{x}(0)$.

En un caso particular, si la función $\mathbf{f}$ no depende de forma explícita del tiempo, es decir, si $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ se dice que $\mathbf{f}$ es autónoma. Anteriormente ya se había mencionado

la importancia de la transformación de un modelo dinámico complejo a uno autónomo representado por una ecuación de primer orden, pues bien, retomando dicha ecuación, un caso particular del sistema (3.1) referido como *sistema autónomo* de primer orden es:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.2)$$

En ambos casos, para los sistemas autónomos (3.2) y no autónomos (3.1), su respectiva ecuación diferencial representa a sistemas lineales y no lineales, donde dicha linealidad o no linealidad del modelo dinámico es con respecto a la variable de estado $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$. Por ejemplo, para el sistema (3.1) si $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}(t)$, con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^n$ elementos que dependen únicamente del tiempo (o constantes), se dice que el sistema (3.1) es lineal.

Una vez comprendido el objeto de estudio de la teoría de estabilidad de Lyapunov, se presenta a continuación un compendio de resultados, teoremas y conceptos básicos para la comprensión del *Segundo método de Lyapunov* o *Método directo de Lyapunov*.

3.1.1. Definiciones básicas

Las definiciones que a continuación se muestran son ampliamente conocidas en el área de control, robótica y automatización; sin embargo, debido a que el método directo de Lyapunov no se deduce de manera trivial, es necesario abordarlas una por una para tener una mejor comprensión del tema. Primero se aborda el concepto de equilibrio, el cual dice:

Definición 3.1 (Punto de equilibrio) Un vector *constante* $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ es un *equilibrio* o estado de equilibrio (*punto de equilibrio*) del sistema dinámico $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ si:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad \forall \quad t \geq 0.$$

El origen del espacio de estados $\mathbb{R}^n$ es el equilibrio $\mathbf{x}^*$ al que se le pretende analizar su estabilidad, es decir: $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Convencionalmente se supone que el origen es un equilibrio de (3.1), de no ser así se puede realizar una simple traslación y llevar a cualquier equilibrio al origen del espacio de estados.

Definición 3.2 (Estabilidad) El origen $\mathbf{x}^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de equilibrio estable* (en el sentido de Lyapunov) del sistema dinámico (3.1) si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (no único), tal que:

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{0}\| < \delta \implies \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{0}\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Cabe destacar que en la definición anterior se habla de valores $\|\mathbf{x}(0)\| < \delta$ que estén dentro del atractor y no para toda condición inicial, ya que puede estar fuera de la región de atracción. Se debe precisar que la definición de estabilidad solicita una $\delta > 0$ para toda $\varepsilon > 0$ y no solo para alguna $\varepsilon > 0$. La constante δ no es única, en general $\delta = \delta(\varepsilon)$, pues si existe una $\delta \leq \varepsilon$ que haga cumplir la definición, entonces cualquier constante $a\delta$ con $a \leq 1$ también la cumple.

Definición 3.3 (Estabilidad asintótica) El origen $\mathbf{x}^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de equilibrio asintóticamente estable* del sistema dinámico (3.1) si:

- El origen es **estable**.
- El origen es localmente atractivo; i.e., existe un número $\delta' > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{0}\| < \delta' \implies \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}.$$

Se puede decir que esta definición es para una estabilidad asintótica local. En el área de robótica y control es muy deseable la estabilidad asintótica sobre la estabilidad, pues si se desea llegar a un punto determinado es preferible converger a ese punto y no simplemente permanecer cerca. De igual forma que en el concepto de estabilidad, tiene que destacarse que la definición de estabilidad asintótica solo engloba cierto número de valores para la condición inicial y no para cualquiera. La definición siguiente es más incluyente en ese aspecto.

Definición 3.4 (Estabilidad asintótica global) El origen $\mathbf{x}^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de equilibrio asintóticamente estable de forma global* del sistema dinámico (3.1) si:

- El origen es **estable**.
- El origen es globalmente atractivo, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad \forall \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n.$$

En la definición anterior la condición inicial se encuentra dentro del atractor, por lo que $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$ cuanto $t \rightarrow \infty$ y $\mathbf{x}(0)$ abarca toda $\mathbb{R}^n$ para el sistema (3.1). El carácter generalizado de la estabilidad asintótica global permite deducir que, si un punto de equilibrio es asintóticamente estable de forma global, también es asintóticamente estable, no obstante lo contrario no es verdad.

Definición 3.5 (Estabilidad exponencial global) El origen $\mathbf{x}^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de equilibrio exponencialmente estable de forma global* del sistema dinámico (3.1) si existen constantes $\alpha, \beta > 0$, tales que:

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\beta t} \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n.$$

La estabilidad exponencial es una propiedad muy importante en control automático, pues si se determina que un punto de equilibrio es exponencialmente estable de forma global, implica que también es asintóticamente estable de forma global. La importancia de demostrar que un punto de equilibrio es exponencialmente estable de forma global radica en afirmar que dicho equilibrio es resistente a perturbaciones. Una demostración de estabilidad exponencial global también es de alto impacto para el desarrollo de algoritmos de control avanzados, ampliando el espectro de aplicaciones.

Definición 3.6 (Inestabilidad) El origen $\mathbf{x}^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de equilibrio inestable* del sistema dinámico (3.1) si no es estable; i.e., existe al menos un $\varepsilon > 0$ para el cual no es posible encontrar un $\delta > 0$, tal que:

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{0}\| < \delta \implies \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{0}\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Cabe resaltar que si un equilibrio es inestable, no implica que la solución $\mathbf{x}(t)$ “crezca” indefinidamente, es decir, que el que un punto de equilibrio sea inestable no fuerza a que las trayectorias tiendan a infinito, no obstante sí puede ocurrir el caso.

Definición 3.7 (Función definida positiva localmente) Una función continua $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función definida positiva localmente* si satisface:

- $V(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.
- $\exists \rho > 0, \gamma > 0 : 0 < V(\mathbf{x}) < \gamma \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| < \rho$.

Definición 3.8 (Función definida positiva) Una función continua $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una *función definida positiva* si satisface:

- $V(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.
- $V(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Es importante mencionar que cuando se refiere a una función definida positiva, se refiere a una función definida positiva de forma global. La generalidad de una función definida positiva permite decir que si una función es definida positiva, entonces también es definida positiva localmente. De acuerdo con las definiciones de función definida positiva y de matriz definida positiva, se tiene que una función cuadrática $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la forma $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$, con $P \in \mathbb{R}^n$, es una función definida positiva si y solo si P es una matriz positiva.

Definición 3.9 (Función semidefinida positiva) Una función continua $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una *función semidefinida positiva* ($V(\mathbf{x}) \geq 0$) si satisface:

- $V(\mathbf{x}) \geq 0$ Es cero no solo cuando el argumento $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, también $V(\mathbf{x}) = 0$ para algunos valores de $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.
- $V(\mathbf{x}) > 0$ para algunos valores de $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ y también existen algunos valores $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ tales que $V(\mathbf{x}) = 0$.

Definición 3.10 (Función definida negativa localmente) Una función continua $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función definida negativa localmente* si satisface:

- $V(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.
- $\exists \rho > 0, \gamma > 0 : -\gamma < V(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \wedge \|\mathbf{x}\| < \rho$.

Definición 3.11 (Función definida negativa) Una función continua $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una *función definida negativa* si satisface:

- $V(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.
- $V(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Definición 3.12 (Función semidefinida negativa) Una función continua $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una *función semidefinida negativa* ($V(\mathbf{x}) \leq 0$) si satisface:

- $V(\mathbf{x}) \leq 0$ Es cero no solo cuando el argumento $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, también $V(\mathbf{x}) = 0$ para algunos valores de $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.
- $V(\mathbf{x}) < 0$ para algunos valores de $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ y también existen algunos valores $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ tales que $V(\mathbf{x}) = 0$.

Por notación, si una función $V(\mathbf{x})$ es definida positiva, será representada como $V(\mathbf{x}) > 0$. Si una función $V(\mathbf{x})$ es semidefinida positiva, su notación es: $V(\mathbf{x}) \geq 0$. Se debe notar que las definiciones de función definida negativa y función semidefinida negativa son contrarias a las definiciones de función definida positiva y función semidefinida positiva respectivamente; es decir, si la función $V(\mathbf{x}) > 0$ es definida positiva, entonces $-V(\mathbf{x}) < 0$ será definida negativa. Del mismo modo, si $V(\mathbf{x}) \geq 0$ es semidefinida positiva, entonces $-V(\mathbf{x}) \leq 0$ es semidefinida negativa.

Definición 3.13 (Función radialmente desacotada) Una función continua $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función radialmente desacotada* si:

- $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ cuando $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$.

Definición 3.14 (Función candidata de Lyapunov) Una *función candidata de Lyapunov* para el punto de equilibrio $\mathbf{x}^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ del sistema (3.1) es una función continua $V(t, \mathbf{x}) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que:

- $V(t, \mathbf{x}) > 0$ es una función definida positiva.
- $\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \exists$ y es una función continua con respecto a $\mathbf{x}$ y a t .
- $\frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} \exists$ y es una función continua con respecto a $\mathbf{x}$ y a t .

La definición anterior quiere decir que una función candidata de Lyapunov para el equilibrio $\mathbf{x}^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ del sistema (3.1) debe ser una función definida positiva con derivadas parciales continuas. Cualquier función que cumpla con dichas especificaciones, es una función candidata de Lyapunov para el punto de equilibrio $\mathbf{x}^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

Definición 3.15 (Derivada de una función candidata de Lyapunov) La derivada de una función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ a lo largo de las trayectorias de (3.1), denotada como $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ está dada por:

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \frac{d}{dt}V(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).$$

La derivada de una función candidata de Lyapunov juega un rol muy importante en los criterios de la teoría de estabilidad de Lyapunov, esto se verá más adelante. En la definición de *Derivada de una función candidata de Lyapunov*, se puede notar que si la función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ no depende explícitamente del tiempo, es decir, si $V(t, \mathbf{x}) = V(\mathbf{x})$ y el sistema (3.1) sea autónomo, la derivada de V toma la forma:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (3.3)$$

3.1.2. Método Directo de Lyapunov

Con las definiciones básicas es posible establecer los teoremas fundamentales empleados en la teoría de estabilidad de Lyapunov. El resultado primordial al que llegó Lyapunov se reduce en los siguiente:

Teorema 3.1 (Estabilidad en el sentido de Lyapunov) $\diamond\diamond\diamond$

El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un punto de equilibrio *estable* (en el sentido de Lyapunov) de (3.1) si:

- $\exists$ una función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x}) > 0$ tal que $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq 0$.

Bajo este concepto, la estabilidad no se refiere al sistema, es una propiedad exclusiva del punto de equilibrio. Bajo el contexto de la teoría de estabilidad de Lyapunov, decir que el *Sistema es estable* o frases similares no tienen sentido. El teorema anterior es aceptable tanto si la función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x})$ es una función definida positiva localmente o globalmente, aunque sea preferible una propuesta global.

Teorema 3.2 (Estabilidad asintótica global) $\diamond\diamond\diamond$

El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un punto de equilibrio *asintóticamente estable en forma global* de (3.1) si:

- $\exists$ una función candidata de Lyapunov $V(t, \mathbf{x}) > 0$ (de forma global), radialmente desacotada y menguante, tal que $\dot{V}(t, \mathbf{x}) < 0$.

En el caso anterior, para garantizar la estabilidad asintótica global sí se requiere que la función candidata de Lyapunov sea definida positiva global. Si la función candidata de Lyapunov es autónoma, $V(\mathbf{x}) > 0$ tal que $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ entonces se habrá demostrado estabilidad asintótica en el punto de equilibrio para el sistema (3.2).

Teorema 3.3 (Existencia y unicidad del punto de equilibrio) ◇◇◇

Retomando la ecuación del sistema dinámico autónomo (3.2)

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \geq 0$$

la existencia y unicidad de un único punto de equilibrio es una condición necesaria para que sea asintóticamente estable de forma global.

Con el teorema anterior se hace notar la importancia de realizar el análisis de existencia y unicidad del punto de equilibrio para saber de antemano si dicho equilibrio del sistema puede alcanzar la estabilidad asintótica global. Cabe aclarar que el teorema 3.3 solo restringe la unicidad del punto de equilibrio para alcanzar la estabilidad asintótica global, en ningún momento establece que la unicidad del punto de equilibrio sea requerida para la estabilidad de dicho equilibrio, pero sí la existencia de algún punto de equilibrio.

3.1.3. Principio de invariancia de LaSalle

El teorema de LaSalle es una herramienta muy importante en el análisis de estabilidad de puntos de equilibrio, pues permite determinar estabilidad asintótica en sistemas autónomos (3.2) aún teniendo que $\dot{V}(\mathbf{x})$ sea una función semidefinida negativa. Se hace énfasis en que el teorema es aplicable sólo a sistemas autónomos. El siguiente es una versión simplificada del teorema de LaSalle, adecuado para los propósitos de desarrollo del presente escrito.

Teorema 3.4 (LaSalle) ◇◇◇

Considérese el sistema autónomo (3.2) cuyo origen $\mathbf{x}^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de equilibrio. Supóngase que existe una función candidata de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ definida positiva (globalmente) y radialmente desacotada tal que:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Defínase el conjunto Ω como:

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$$

si $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ es la única condición inicial en Ω para la cual $\mathbf{x}(t) \in \Omega$ para toda $t \geq 0$, entonces el origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio asintóticamente estable en forma global.

3.2. Norma $\mathcal{L}$

La norma L es una herramienta importante en aplicaciones de estabilidad sistemas dinámicos debido a su estrecha relación con la teoría estabilidad de Lyapunov, al acotamiento de variables de estado y a que permite evaluar el desempeño de algoritmos de control de robots manipuladores. La norma $\mathcal{L}$, denotada como $\mathcal{L}_p^n$ (léase *ele-pe-ene*), no es más que una clase particular de espacios vectoriales. Los vectores que perteneces a dicho espacio son

funciones que presentan características particulares.

De forma general, el espacio $\mathcal{L}_p^n$ con $1 \leq p < \infty$ se define como el conjunto de funciones continuas $\mathbf{f} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que,

$$\mathcal{L}_p^n[\mathbf{f}] = \left(\int_0^\infty \|\mathbf{f}(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (3.4)$$

donde $\mathcal{L}_p^n[\mathbf{f}]$ representa a la norma $\mathcal{L}_p^n$ de la función $\mathbf{f}$, p se refiere al tipo de norma p usado para definir el espacio, mientras que n indica la dimensión de $\mathbf{f}$. Al tipo de espacio $\mathcal{L}_p^n \quad \forall 1 \leq p < \infty$ se le denomina espacio lineal normado.

3.2.1. Normas $\mathcal{L}_\infty^n$ y $\mathcal{L}_2^n$

De forma particular, los espacios lineales $\mathcal{L}_2^n$ y $\mathcal{L}_\infty^n$ son empleados en específico en el análisis de sistemas dinámicos interconectados en la metodología denominada: enfoque entrada-salida. Estos dos espacios son los que guardan una estrecha relación con la teoría de estabilidad de Lyapunov, la cual se verá más adelante.

El espacio $\mathcal{L}_\infty^n$ consiste en el conjunto de todas las funciones continuas $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que sus normas euclidianas sean acotadas, es decir;

$$\mathcal{L}_\infty = \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{f}(t)\| < \infty \quad (3.5)$$

donde $\sup$ indica el *supremo* o la cota superior de menor valor. Por notación $\mathcal{L}_\infty$ sirve para representar al espacio $\mathcal{L}_\infty^1$.

El espacio $\mathcal{L}_2^n$ consiste en el conjunto de todas las funciones continuas $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que:

$$\mathcal{L}_2[\mathbf{f}] = \sqrt{\int_0^\infty \|\mathbf{f}\|^2 dt} < \infty \quad (3.6)$$

entonces la integral del cuadrado de la norma euclidiana es medible y está acotada superiormente. Por notación $\mathcal{L}_2$ sirve para representar al espacio $\mathcal{L}_2^1$.

La norma $\mathcal{L}_2$ es una herramienta ampliamente usada para evaluar el desempeño de algoritmos de control de robots manipuladores dado un tiempo de experimentación o simulación. La norma $\mathcal{L}_2$ ofrece una forma de medir el índice de desempeño de dichos algoritmos, donde el desempeño de los algoritmos de control es inversamente proporcional a su índice de

desempeño. En este caso, la expresión está dada por:

$$\mathcal{L}_2[\tilde{\mathbf{q}}] = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \|\tilde{\mathbf{q}}(\sigma)\|^2 d\sigma} \quad (3.7)$$

donde T es el tiempo de experimentación o simulación (intervalo de integración).

3.2.2. Propiedades de la norma $\mathcal{L}$

La norma $\mathcal{L}[\mathbf{f}]$ satisface:

- La norma $\mathcal{L}_p^n[\mathbf{f}] \equiv 0 \iff \mathbf{f} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.
- Si $\mathbf{f}$ es diferente a cero, entonces $\mathcal{L}_p^n[\mathbf{f}]$ es positiva.
- La norma $\mathcal{L}_p^n[\mathbf{f}]$ satisface:

$$\mathcal{L}_p^n[\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2] \leq \mathcal{L}_p^n[\mathbf{f}_1] + \mathcal{L}_p^n[\mathbf{f}_2] \quad (\text{Desigualdad del triángulo}).$$

Lema 3.1 Considérese una función continua $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supóngase que la función $\mathbf{f}$ satisface las siguientes hipótesis:

- $\mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}} = \frac{d}{dt}\mathbf{f} \in \mathcal{L}_\infty^n$.
- $\mathbf{f} \in \mathcal{L}_2^n$.

entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{f}(t) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

3.2.3. Relación entre la norma $\mathcal{L}$ y Lyapunov

Existe una interconexión entre la norma $\mathcal{L}$ y la teoría de estabilidad de Lyapunov dada por el Lema 3.2.

Lema 3.2 Considérese las funciones continuas y diferenciables $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ dadas por:

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & B_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} > 0$$

donde $A_s, B_s \in \mathbb{R}^n$ son matrices simétricas definidas positivas. Si la derivada de V con respecto al tiempo,

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{\partial V(\mathbf{x}, \mathbf{z})^T}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial V(\mathbf{x}, \mathbf{z})^T}{\partial \mathbf{z}} \frac{d\mathbf{z}}{dt}$$

satisface:

$$\dot{V}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = - \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \leq 0$$

donde Q es una matriz definida positiva, entonces:

1. $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_\infty^n, \mathbf{z} \in \mathcal{L}_\infty^n$.
2. $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_2^n$.

Esto quiere decir que si se ha demostrado *estabilidad* en el sentido de Lyapunov con una función de energía $V(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, entonces se garantiza la membresía de las variables de estado $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$ en $\mathcal{L}_\infty^n$ y de $\mathbf{x}$ en $\mathcal{L}_2^n$. Si adicionalmente se puede demostrar que $\dot{\mathbf{x}} \in \mathcal{L}_\infty^n$, entonces se puede concluir convergencia asintótica hacia el punto de equilibrio de la variable $\mathbf{x}$.

En consecuencia del Lema 3.1 aplicado a variables de estado y aprovechando los resultados del Lema 3.2, se demuestra la convergencia asintótica hacia el punto de equilibrio de la variable de estado $\mathbf{x}(t)$ con el siguiente corolario.

Corolario 3.1 (Convergencia asintótica a través de la norma $\mathcal{L}$) Considérese la variable de estado $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, supóngase que

- $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \in \mathcal{L}_\infty^n$.
- $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_2^n$.

entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

3.3. Teorema de Rayleigh-Ritz

Se hace un apartado dedicado al Teorema de Rayleigh-Ritz debido a la utilidad que presenta en el diseño de algoritmos de control de robots manipuladores. Es una herramienta ampliamente utilizada en el problema de regulación, el cual se abordará más adelante, para acotar la norma del error. De forma particular, es empleado en este escrito como herramienta de acotamiento para la propuesta de una función estricta de Lyapunov.

Teorema 3.5 (Rayleigh-Ritz) $\diamond\diamond\diamond$

El teorema de Rayleigh-Ritz establece que:

$$\lambda_A^{\min} \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq \lambda_A^{\max} \|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (3.8)$$

donde $\lambda_A^{\min}$ y $\lambda_A^{\max}$ representan los valores propios mínimo y máximo de A respectivamente.

Una generalización de este teorema puede verse como:

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{z} \leq \lambda_A^{\max} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{z}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.9)$$

3.4. Problema de regulación

El problema de regulación de robots manipuladores consiste en posicionar el extremo final del robot en una referencia deseada $\mathbf{q}_d$ (constante en el tiempo) para cualquier condición inicial $\mathbf{x}(0) = [\mathbf{q}(0) \ \dot{\mathbf{q}}(0)]^T \in \mathbb{R}^n$.

Desde el punto de vista matemático, el problema de regulación se describe como el diseño de un regulador $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ tal que la velocidad de movimiento $\dot{\mathbf{q}}(t) \in \mathbb{R}^n$ y el error de posición $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n : \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}(t)$ convergen asintóticamente a cero $\forall t \geq 0$, sin importar cualquier condición inicial, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \quad \forall t \geq 0. \quad (3.10)$$

Un algoritmo de regulación no es más que una ecuación matemática diseñada con el objetivo de generar un atractor único en la ecuación en lazo cerrado conformada por el modelo dinámico del robot manipulador y el algoritmo de control, es decir, que el punto de equilibrio sea asintóticamente estable. En la figura 3.1 se muestra el esquema general de control de un robot manipulador.

El enfoque actual en el desarrollo de algoritmos de control es proponer algoritmos con

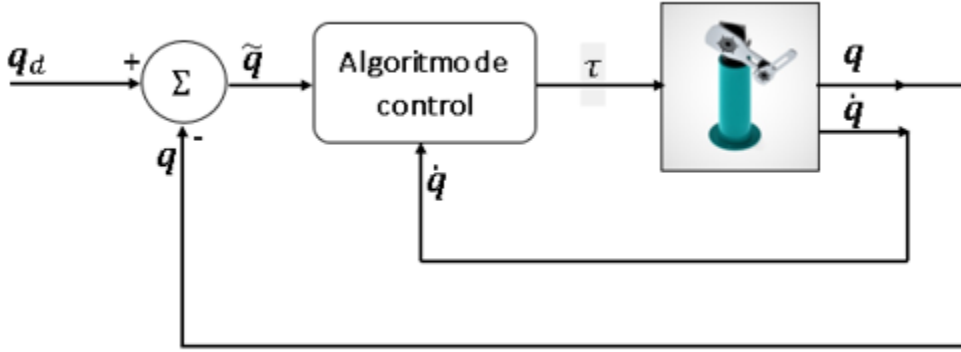


Figura 3.1: Esquema general de control de robots manipuladores.

un desempeño práctico alto, de tal forma que sea capaz de desempeñar de forma apropiada y precisa la tarea del robot y no solo que cumplan con el objetivo de control (3.10), haciendo de esta manera que el margen de aplicaciones de la robótica se vuelva más grande. He aquí la importancia en diseño de nuevos esquemas de control.

3.5. Técnica de moldeo de energía

La técnica del moldeo de energía es una de las herramientas más utilizadas del control automático y que permite desarrollar una familia amplia de esquemas de control que ayudan a resolver la problemática de regulación descrita anteriormente, pues permite la demostración, con ayuda del principio de invarianza de LaSalle (Teorema 3.4), de estabilidad asintótica de la ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico del robot manipulador de n grados de libertad y el esquema de control.

La técnica del moldeo de energía fue propuesta por Takegaki y Arimoto en 1981 y consiste en una estructura matemática formada del gradiente de la energía potencial artificial, la cual se propone como diseño y moldea la energía aplicada al robot, adicionando una acción de control derivativa compuesta por una función disipativa en carácter de amortiguador o freno mecánico y que está en función del vector de velocidad articular. También se incorpora el vector de pares de gravedad como término de compensación para robots manipuladores cuyo movimiento sea en un plano vertical o espacio tridimensional.

La estructura de control por moldeo de energía tiene la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) - \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.11)$$

donde:

- $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$ es la energía potencial artificial, es una función definida positiva, continua, suave y diferenciable; además satisface $\tilde{\mathbf{q}}^T \nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) > 0$.
- $\nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$ es el moldeo de la energía $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$ a través del gradiente.
- $K_p > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal definida positiva conocida como ganancia proporcional.
- $K_v > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva conocida como ganancia derivativa.
- $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de errores de posición definido como la diferencia entre la posición deseada $\mathbf{q}_d$ y la posición actual $\mathbf{q}(t)$, es decir $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$.
- $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de compensación de par de gravedad.
- $\mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}})$ es el término de acción de control derivativa, que realiza la función de amortiguador o freno mecánico y cumple: $\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) > 0$; además, si $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\mathbf{f}_v(K_v, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

La ecuación en lazo cerrado del modelo dinámico del robot manipulador y la estructura de control de moldeo de energía genera un punto de equilibrio global estable, cuya estabilidad asintótica puede demostrarse mediante el principio de invarianza de LaSalle. El diagrama

de control de robots manipuladores mediante el moldeo de energía se muestra en la figura 3.2. En términos de variables de estado para el problema de regulación $[\tilde{\mathbf{q}}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T \in \mathbb{R}^n$, la ecuación en lazo cerrado toma la forma de una ecuación diferencial ordinaria autónoma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [\nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) - \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) - B\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Para la demostración de estabilidad global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado (3.12) se propone como función candidata de Lyapunov una función de energía compuesta por la energía cinética del robot manipulador más la energía potencial artificial de diseño, de esta forma, la función candidata de Lyapunov queda expresada como un hamiltoniano:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) \quad (3.13)$$

Por propiedad, la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ es definida positiva, por lo que el primer término de la función candidata de Lyapunov es una función definida positiva. En el segundo término, por diseño, la matriz de ganancias proporcionales K_p es definida positiva y como $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$ es una función cuadrática del error de posición, la función $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$ es definida positiva. La derivada de la función de energía (3.13) toma la siguiente forma:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}} \quad (3.14)$$

Sustituyendo la segunda componente de (3.12) en (3.14) y aplicando la Propiedad 2.14 de antisimetría, se llega fácilmente a que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T \nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) \\ &= -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) + \underbrace{\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T [\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\mathbf{q}}}_{=0 \text{ por propiedad 2.14}} - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} \\ &= -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} \leq 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.6. Propuesta de algoritmo de control

Se considera el siguiente algoritmo de control:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (3.16)$$

donde:

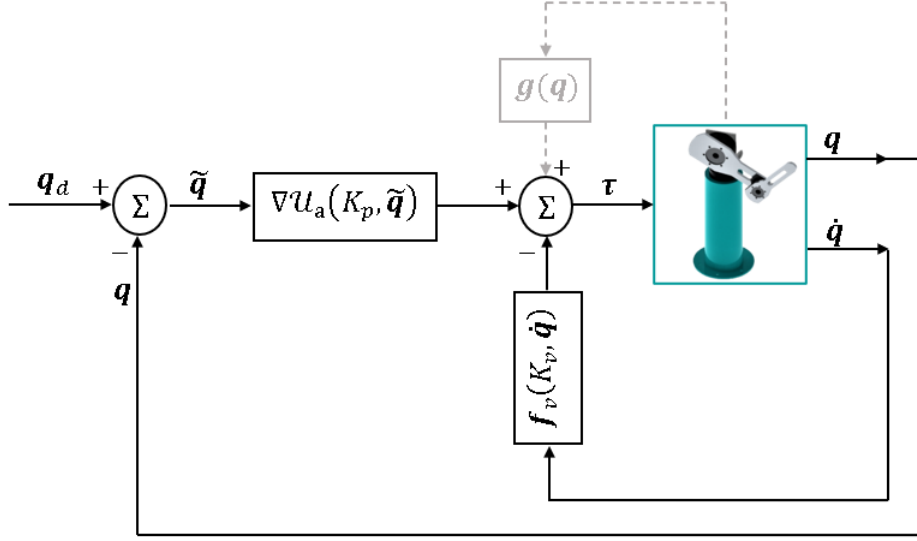


Figura 3.2: Esquema de control de robots manipuladores mediante moldeo de energía.

- $K_p > 0$, $K_v > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$; la matriz K_p generalmente es seleccionada como una matriz diagonal definida positiva y K_v una matriz definida positiva:

$$K_p = \begin{bmatrix} k_{p1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{p2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{pn} \end{bmatrix} > 0.$$

- $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad.
- $\alpha \in \mathbb{R}_+$ es una constante positiva menor a 1 ($0 < \alpha < 1$).
- $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de errores de posición tal que: $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}(t)$, siendo $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ el vector de referencias deseadas y $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ el vector de posiciones articulares.
- $e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal de la forma:

$$e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} = \begin{bmatrix} e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{q}_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{q}_2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{q}_n)} \end{bmatrix}$$

- Se define al vector $\sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$ como:

$$\sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \sinh(\alpha\tilde{q}_1) \\ \sinh(\alpha\tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \sinh(\alpha\tilde{q}_n) \end{bmatrix}$$

- Se define al vector $\arctan(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$ como:

$$\arctan(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \arctan(\dot{q}_1) \\ \arctan(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ \arctan(\dot{q}_n) \end{bmatrix}$$

La ecuación en lazo cerrado está dada por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p[I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}}) - K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) - B\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

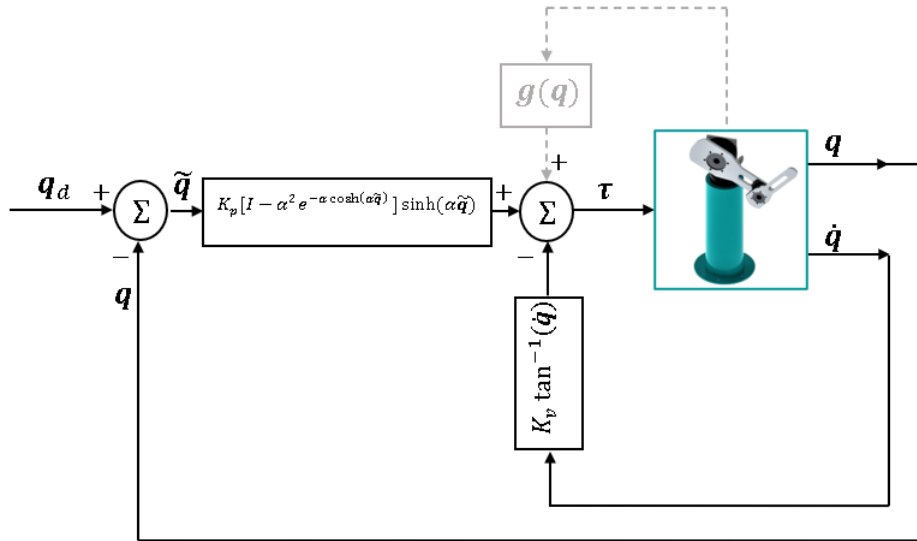


Figura 3.3: Esquema de control propuesto.

3.6.1. Análisis de la existencia y unicidad del punto de equilibrio

A continuación se procede a realizar el análisis de la existencia y unicidad del punto de equilibrio $[\mathbf{0} \ \mathbf{0}]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ de la ecuación en lazo cerrado (3.18) como requisito de la existencia de estabilidad asintótica.

$$\begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p[I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) - B\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Analizando cada componente:

i) $-\dot{\mathbf{q}} = [-I]\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, como $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad, entonces $[-I]\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{q}(t)$ es constante en estado estacionario.

ii) $M(\mathbf{q}) > 0 \Leftrightarrow M(\mathbf{q})^{-1} > 0$ entonces

$$M(\mathbf{q})^{-1} [K_p[I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) - B\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow K_p[I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) - B\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n.$$

Analizando cada término:

- En el término $K_p[I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})$

Note que en la matriz

$$[I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] = \begin{bmatrix} 1 - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{q}_1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{q}_2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{q}_n)} \end{bmatrix}$$

se cumple que $e^{\cosh(\alpha \tilde{q}_i)} > 1$, por lo que $e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{q}_i)} = (e^{\cosh(\alpha \tilde{q}_i)})^{-\alpha} < 1^{-\alpha} = 1$ puesto que $0 < \alpha < 1 \ \forall \ \tilde{q}_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \dots, n$, por lo que $\alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{q}_i)} < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{q}_i)} < 1 \ \forall \ \tilde{q}_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces, la matriz $[I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}]$ es definida positiva, es decir:

$$[I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] > 0$$

$\Rightarrow$

$$K_p[I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] > 0 \text{ Puesto que } K_p > 0 \text{ y } [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] > 0.$$

$\Rightarrow$

$$K_p[I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}.$$

$$\blacksquare K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \arctan(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \text{ puesto que } K_p > 0.$$

$$\blacksquare B\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \text{ puesto que } B > 0.$$

$$\blacksquare C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \text{ Además, cabe aclarar que si } \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Rightarrow C(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

$\therefore \exists$ el punto de equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}} \ \dot{\mathbf{q}}]^T = [\mathbf{0} \ \mathbf{0}]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ de la ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico del robot manipulador y el esquema de control (3.17) y es único.

3.6.2. Análisis de estabilidad

La función candidata de lyapunov se construye de la siguiente forma:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \boldsymbol{\rho}^T K_p \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \boldsymbol{\rho}}}}_{\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})} \quad (3.19)$$

donde:

$$\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \cosh(\alpha \tilde{q}_1) \\ \cosh(\alpha \tilde{q}_2) \\ \vdots \\ \cosh(\alpha \tilde{q}_n) \end{bmatrix}; \quad e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} = \begin{bmatrix} e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{q}_1)} \\ e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{q}_2)} \\ \vdots \\ e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{q}_n)} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} - e^{-\alpha} \\ \frac{1}{\alpha} - e^{-\alpha} \\ \vdots \\ \frac{1}{\alpha} - e^{-\alpha} \end{bmatrix}$$

Cabe observar que $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) = \mathcal{U}_a(K_p, \mathbf{0}) = 0$ y $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) > 0$ si $\tilde{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$, es decir $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$ es definida positiva, por lo que $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) > 0$. La derivada con respecto al tiempo de la función candidata de Lyapunov es:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + 2 \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \boldsymbol{\rho}^T K_p} \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} \frac{(1 - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{q}_1)}) \sinh(\alpha \tilde{q}_1)}{\sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{q}_1) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{q}_1)} - \rho_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{(1 - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{q}_2)}) \sinh(\alpha \tilde{q}_2)}{\sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{q}_2) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{q}_2)} - \rho_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \frac{(1 - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{q}_n)}) \sinh(\alpha \tilde{q}_n)}{\sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{q}_n) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{q}_n)} - \rho_n}} \end{array} \right] \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \sinh^T(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) K_p [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \dot{\mathbf{q}} \\
&= \dot{\mathbf{q}}^T K_p [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \\
&\quad + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \sinh^T(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) K_p [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \dot{\mathbf{q}} \\
&= -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T [\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\mathbf{q}}}_0 \\
&\quad \text{Propiedad 2.14} \\
&= -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} \leq 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ El punto de equilibrio es estable de forma global, y además satisface: $\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}} \in \mathcal{L}_\infty \wedge \dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{L}_2$.

La estabilidad asintótica se puede alcanzar aplicando el principio de invariancia de LaSalle (3.4). Sea

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = 0 \wedge \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

puesto que el mínimo conjunto invariante es el punto de equilibrio

$$\Omega_e = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} : \dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = 0 \wedge \tilde{\mathbf{q}} = 0 \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

3.6.3. Función estricta de Lyapunov

Una función estricta de Lyapunov $V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}})$ es aquella función tal que $V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) > 0$ y $\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) < 0$, evita utilizar el principio de invariancia de LaSalle. Para la demostración de estabilidad asintótica se hace uso de una nueva propuesta de una función estricta de Lyapunov. Dicha función es una función de energía definida positiva tal que su derivada o potencia es definida negativa, y representa la contribución de este escrito.

La función estricta de Lyapunov propuesta se ve de la forma:

$$\begin{aligned}
V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho}^T K_p \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho} \\
&\quad - \frac{\epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} + \frac{\epsilon_0^2 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{2[1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|]^2}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Note que $V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}})$ puede reescribirse con una estructura cuadrática de la forma:

$$\begin{aligned}
V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) &= \frac{1}{2} \left[\dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \right]^T M(\mathbf{q}) \left[\dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \right] + \\
&\quad \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \boldsymbol{\rho}}^T K_p \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \boldsymbol{\rho}}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Para demostrar que $V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) > 0$ es definida positiva se deben tener las siguientes consideraciones:

- $M(\mathbf{q}) > 0$ por propiedad del modelo dinámico del robot de n grados de libertad (propiedad 2.3).
- $K_p > 0$ por diseño del planteamiento del problema de regulación.
- $0 < \alpha < 1$ por propuesta de diseño.

Note que $V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}})$ tiene la forma:

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T M(\mathbf{q}) \mathbf{z} + \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \boldsymbol{\rho}}^T K_p \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \boldsymbol{\rho}} \tag{3.22}$$

Como K_p es una Matriz simétrica definida positiva, entonces verifica que

$$\sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \boldsymbol{\rho}}^T K_p \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \boldsymbol{\rho}} > 0 \tag{3.23}$$

$$\forall \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \boldsymbol{\rho}} \in \mathbb{R}^n \quad \text{no nulo.}$$

A su vez $\sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, por lo que:

$$\sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \boldsymbol{\rho}}^T K_p \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \boldsymbol{\rho}} > 0 \quad \forall \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \quad \text{no nulo.} \tag{3.24}$$

También se verifica que:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \boldsymbol{\rho}}^T K_p \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \boldsymbol{\rho}} = 0 \tag{3.25}$$

Por otro lado, como $M(\mathbf{q})$ es una matriz simétrica definida positiva, entonces verifica que

$$\mathbf{z}^T M(\mathbf{q}) \mathbf{z} > 0 \quad \forall \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \quad \text{no nulo} \quad (3.26)$$

A su vez $\mathbf{z} = \left[\dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \right] = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \in \mathbb{R}^n$, por lo que:

$$\mathbf{z}^T M(\mathbf{q}) \mathbf{z} \geq 0 \quad \forall \quad \dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \quad \text{no nulos} \quad (3.27)$$

También es verdad que:

$$\dot{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \left[\dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \right]^T M(\mathbf{q}) \left[\dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \right] = 0 \quad (3.28)$$

Así mismo, observe que $\dot{\mathbf{q}} = \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ y también que $\dot{\mathbf{q}} = \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \in \mathbb{R}^n$ es un vector no nulo $\Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ es un vector no nulo. El hecho que $\mathbf{z}^T M(\mathbf{q}) \mathbf{z}$ sea semidefinida positiva con respecto a $\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} & \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix}^T$ no implica que $V(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ también lo sea y es lo que se probará analizando los casos:

1. Si $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ y $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathbf{z} &= \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} = \mathbf{0} \wedge \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho} = \mathbf{0} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{z}^T M(\mathbf{q}) \mathbf{z} &= 0 \\ \wedge \quad &\sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho}^T K_p \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho} = 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \mathbf{z}^T M(\mathbf{q}) \mathbf{z} + &\sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho}^T K_p \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho} = 0 \\ \Rightarrow \quad V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) &= 0 \\ \therefore \quad V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) &= 0 \text{ para } \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Si $\dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$ y $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathbf{z} &= \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} = \dot{\mathbf{q}} \text{ es no nulo} \wedge \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho} = \mathbf{0} \\ \Rightarrow \quad \mathbf{z}^T M(\mathbf{q}) \mathbf{z} &> 0 \\ \wedge \quad &\sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho}^T K_p \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho} = 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \mathbf{z}^T M(\mathbf{q}) \mathbf{z} + &\sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho}^T K_p \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho} > 0 \\ \Rightarrow \quad V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) &> 0 \\ \therefore \quad V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) &> 0 \text{ para } \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ con } \dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0} \end{aligned}$$

3. Si $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ y $\tilde{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \mathbf{z} = \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} = -\frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|}, \text{ como } \tilde{\mathbf{q}} \text{ es no nulo, entonces } -\frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} = \mathbf{z}$$

es no nulo y $\sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho}$ es no nulo.

$$\Rightarrow \mathbf{z}^T M(\mathbf{q}) \mathbf{z} > 0$$

$$\wedge \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho}^T K_p \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \mathbf{z}^T M(\mathbf{q}) \mathbf{z} + \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho}^T K_p \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho} > 0$$

$$\Rightarrow V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) > 0$$

$$\therefore V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) > 0 \text{ para } \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \text{ con } \tilde{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$$

4. Si $\dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$ y $\tilde{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho} \text{ es no nulo, y no se puede afirmar directamente si}$$

$$\mathbf{z} \text{ es nulo o no, pero se tiene que } \mathbf{z} = \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \text{ es nulo si y solo si } \dot{\mathbf{q}} = \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|}$$

■ Si $\dot{\mathbf{q}} \neq \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|}$

$$\Rightarrow \mathbf{z} = \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \text{ es no nulo } \Rightarrow \mathbf{z}^T M(\mathbf{q}) \mathbf{z} > 0$$

$$\wedge \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho}^T K_p \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \mathbf{z}^T M(\mathbf{q}) \mathbf{z} + \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho}^T K_p \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho} > 0$$

$$\Rightarrow V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) > 0$$

$$\therefore V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) > 0 \text{ para } \dot{\mathbf{q}} \neq \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \text{ y } \tilde{\mathbf{q}} \text{ no nulos.}$$

■ Si $\dot{\mathbf{q}} = \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|}$

$$\Rightarrow \mathbf{z} = \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \text{ es nulo } \Rightarrow \mathbf{z}^T M(\mathbf{q}) \mathbf{z} = 0$$

$$\wedge \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho}^T K_p \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \mathbf{z}^T M(\mathbf{q}) \mathbf{z} + \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho}^T K_p \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho} > 0$$

$$\Rightarrow V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) > 0$$

$$\therefore V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) > 0 \text{ para } \dot{\mathbf{q}} = \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \text{ y } \tilde{\mathbf{q}} \text{ no nulos.}$$

$$\therefore V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) > 0 \text{ para } \dot{\mathbf{q}} \text{ y } \tilde{\mathbf{q}} \text{ no nulos.}$$

Note que como $\frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, el caso en el que $\dot{\mathbf{q}} \neq \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} = \mathbf{0}$ no entra aquí y pertenece al caso 2. A su vez, el caso en el que $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \neq \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|}$, pertenece al caso 3 y el caso en el que $\dot{\mathbf{q}} = \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} = \mathbf{0}$ pertenece al caso 1.

$\therefore V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = 0$ para $\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$ y $V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) > 0$ para $\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$. Por definición $V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}})$ es definida positiva.

Ya se demostró que $V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}})$ es definida positiva, a continuación se procede a verificar que su derivada $\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}})$ es definida negativa y de esta manera demostrar estabilidad asintótica global. La derivada de $V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}})$ tiene la forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \sinh^T(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) K_p [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \dot{\mathbf{q}} \\ &+ \frac{\epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) [\alpha I] [\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}]}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} - \frac{\epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} - \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \\ &- \frac{\alpha \epsilon_0 \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T [\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}] \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{\|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\| \|1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|^2} - \frac{\alpha \epsilon_0^2 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) I [\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}]}{[1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|]^2} \\ &+ \frac{\epsilon_0^2 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T \dot{M}(\mathbf{q}) \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{2 \|1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|^2} + \frac{\alpha \epsilon_0^2 \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T [\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{\|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\| \|1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|^3} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} \sinh(\alpha \tilde{q}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sinh(\alpha \tilde{q}_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sinh(\alpha \tilde{q}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sinh(\alpha \tilde{q}_1) \dot{q}_1 \\ \sinh(\alpha \tilde{q}_2) \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \sinh(\alpha \tilde{q}_n) \dot{q}_n \end{bmatrix}; \\ \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} \cosh(\alpha \tilde{q}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cosh(\alpha \tilde{q}_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cosh(\alpha \tilde{q}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\alpha \tilde{q}_1) \dot{q}_1 \\ \cosh(\alpha \tilde{q}_2) \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \cosh(\alpha \tilde{q}_n) \dot{q}_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sustituyendo la segunda componente de (3.17) en (3.29):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) [M(\mathbf{q})^{-1} [K_p [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) - B \dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}]] \\ &+ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \sinh^T(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) K_p [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \dot{\mathbf{q}} + \frac{\epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) [\alpha I] [\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}]}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} - \frac{\epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \left[M(\mathbf{q})^{-1} \left[K_p [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) - B\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \right] \right. \\
& - \frac{\alpha \epsilon_0 \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T [\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{\|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\| \|1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|^2} - \frac{\alpha \epsilon_0^2 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) I [\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}]}{[1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|]^2} \\
& \left. + \frac{\epsilon_0^2 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T \dot{M}(\mathbf{q}) \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{2\|1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|^2} + \frac{\alpha \epsilon_0^2 \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T [\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{\|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\| \|1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|^3} \right] \\
& = \quad \xrightarrow{\text{①}} \quad \dot{\mathbf{q}}^T(\mathbf{q}) K_p [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} \\
& \quad \xrightarrow{\text{②}} \quad \underbrace{-\dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \sinh^T(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) K_p [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \dot{\mathbf{q}}}_{\text{Propiedad 2.37}} + \frac{\epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) [\alpha I] [\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}]}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \\
& \quad - \frac{\epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} - \frac{\epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} - \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T K_p [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \\
& \quad + \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} + \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T B \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} + \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \quad \xrightarrow{\text{②}} \\
& \quad - \frac{\alpha \epsilon_0 \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T [\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{\|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\| \|1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|^2} - \frac{\alpha \epsilon_0^2 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) I [\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}]}{[1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|]^2} \\
& \quad + \frac{\epsilon_0^2 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T \dot{M}(\mathbf{q}) \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{2\|1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|^2} + \frac{\alpha \epsilon_0^2 \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T [\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{\|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\| \|1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|^3} \\
& = \quad -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} + \frac{\alpha \epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) [\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}]}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} - \frac{\epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \\
& \quad - \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T K_p [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} + \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} + \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T B \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \\
& \quad - \frac{\alpha \epsilon_0 \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T [\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{\|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\| \|1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|^2} - \frac{\alpha \epsilon_0^2 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) I [\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}]}{[1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|]^2} \\
& \quad + \frac{\epsilon_0^2 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T [C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{2\|1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|^2} + \frac{\alpha \epsilon_0^2 \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T [\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T M(\mathbf{q}) \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{\|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\| \|1 + \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|^3} \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Obtención de cotas superiores.

Observe que:

$$-\frac{\alpha\epsilon_0\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})[\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}]}{1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|} \leq \frac{\alpha\epsilon_0\|\dot{\mathbf{q}}^T\| \|M(\mathbf{q})\| \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\mathbf{q}}\|}{1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|} \quad (3.31)$$

La norma espectral de $M(\mathbf{q})$ está acotada. Sea $\|M(\mathbf{q})\| \leq \beta$. Entonces:

$$-\frac{\alpha\epsilon_0\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})[\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}]}{1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|} \leq \frac{\alpha\epsilon_0\|\dot{\mathbf{q}}^T\| \|M(\mathbf{q})\| \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\mathbf{q}}\|}{1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|} \leq \alpha\epsilon_0\beta\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \quad (3.32)$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) \leq & -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} + \alpha\epsilon_0\beta\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \frac{\epsilon_0\dot{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|} \\ & - \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})^T K_p [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|} + \frac{\epsilon_0 \|\sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\| \lambda_{K_v}^{max} \|\arctan(\dot{\mathbf{q}})\|}{1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|} + \frac{\epsilon_0 \|\sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\| \lambda_B^{max} \|\dot{\mathbf{q}}\|}{1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|} \\ & + \frac{\alpha\epsilon_0 \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\| \|\sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \beta \|\sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|}{\|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\| [1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|^2]} + \frac{\alpha\epsilon_0^2 \|\sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\| \beta \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\mathbf{q}}\|}{[1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|]^2} \\ & + \frac{\epsilon_0^2 \|\sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\| \|C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \|\sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|}{2[1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|^2]} + \frac{\alpha\epsilon_0^2 \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\| \|\sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \|\sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\| \beta \|\sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|}{\|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\| [1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|]^3} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ya se demostró estabilidad global del punto de equilibrio, entonces $\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}} \in \mathcal{L}_\infty$, entonces $\|\arctan(\dot{\mathbf{q}})\| < \gamma_1 \|\dot{\mathbf{q}}\|$, donde $\gamma_1 \in \mathbb{R}_+$ por propiedad de los números reales. Por lo que, $\exists \gamma_1^*, \gamma_1$ tal que:

$$\lambda_{K_v}^{min} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \gamma_1^* \leq \dot{\mathbf{q}}^T K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) \leq \|\dot{\mathbf{q}}\| \lambda_{K_v}^{max} \|\arctan(\dot{\mathbf{q}})\| \leq \lambda_{K_v}^{max} \gamma_1 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2. \quad (3.34)$$

Usando el teorema de Rayleigh-Ritz (Teorema 3.5) en el quinto término de la ecuación (3.33):

$$\frac{\epsilon_0 \lambda_A^{min} \|\sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|^2}{1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|} \leq \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})^T A \sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|} \leq \frac{\epsilon_0 \lambda_A^{max} \|\sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|^2}{1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|} \quad (3.35)$$

donde $A = K_p[I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})}]$. Como $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow \sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}}) \in \mathcal{L}_\infty$, entonces existen γ_2^*, γ_2 tales que:

$$\gamma_2^* \alpha \|\tilde{\mathbf{q}}\| < \|\sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\| < \gamma_2 \alpha \|\tilde{\mathbf{q}}\| \quad (3.36)$$

entonces

$$\frac{\epsilon_0 \lambda_A^{min} (\gamma_2^*)^2 \alpha^2 \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2}{1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|} \leq \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})^T A \sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|} \leq \frac{\epsilon_0 \lambda_A^{max} (\gamma_2)^2 \alpha^2 \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2}{1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|} \quad (3.37)$$

por lo que

$$-\frac{\epsilon_0 \lambda_A^{min} (\gamma_2^*)^2 \alpha^2 \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2}{1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|} \geq -\frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})^T A \sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|} \geq -\frac{\epsilon_0 \lambda_A^{max} (\gamma_2)^2 \alpha^2 \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2}{1 + \|\cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})\|}. \quad (3.38)$$

Note que $\lambda_A^{min} = \lambda_{K_p[I - \alpha^2 e^{-\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})]}^{min} = \lambda_{K_p}^{min}[1 - \alpha^2 e^{-\alpha}]$, por lo que:

$$-\frac{\epsilon_0 \lambda_{K_p}^{min}[1 - \alpha^2 e^{-\alpha}](\gamma_2^*)^2 \alpha^2 \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \geq -\frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T A \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|}. \quad (3.39)$$

También se debe tomar en cuenta que

$$\frac{\|\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \leq 1 \quad (3.40)$$

y que de acuerdo a la propiedad 2.12

$$\|C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \leq k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2. \quad (3.41)$$

Tomando en consideración las ecuaciones (3.34) a (3.41), se puede llegar a una forma de acotar la ecuación (3.30), tomando la forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) \leq & -\lambda_{K_v}^{min} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \gamma_1^* - \lambda_B^{min} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \alpha \epsilon_0 \beta \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \epsilon_0 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 k_{C_1} - \frac{\epsilon_0 \lambda_{K_p}^{min}[1 - \alpha^2 e^{-\alpha}](\gamma_2^*)^2 \alpha^2 \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \\ & + \epsilon_0 \alpha \lambda_{K_v}^{max} \gamma_1 \gamma_2 \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| + \epsilon_0 \alpha \lambda_B^{max} \gamma_2 \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| + \alpha \epsilon_0 \beta \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \alpha^2 \epsilon_0^2 \beta \gamma_2 \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \\ & \epsilon_0^2 k_{C_1} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \alpha^2 \epsilon_0^2 \beta \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{aligned} \quad (3.42)$$

Una vez acotada la derivada de la función estricta de Lyapunov, lo que se requiere es probar que es definida negativa, para esto resulta conveniente describir a la ecuación (3.42) en una forma matricial:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) \leq - \begin{bmatrix} \|\dot{\mathbf{q}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_{K_v}^{min} \gamma_1^* + \lambda_B^{min} - 2\alpha \epsilon_0 \beta & -\frac{1}{2}[\epsilon_0 \alpha \lambda_{K_v}^{max} \gamma_1 \gamma_2 + \epsilon_0 \alpha \lambda_B^{max} \gamma_2 + \alpha^2 \epsilon_0^2 \beta \gamma_2 + \alpha^2 \epsilon_0^2 \beta] \\ -\frac{1}{2}[\epsilon_0 \alpha \lambda_{K_v}^{max} \gamma_1 \gamma_2 + \epsilon_0 \alpha \lambda_B^{max} \gamma_2 + \alpha^2 \epsilon_0^2 \beta \gamma_2 + \alpha^2 \epsilon_0^2 \beta] & \frac{\epsilon_0 \lambda_{K_p}^{min}[1 - \alpha^2 e^{-\alpha}](\gamma_2^*)^2 \alpha^2}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\dot{\mathbf{q}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} < 0. \quad (3.43)$$

En esta forma es fácil observar que para que $\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}})$ sea definida negativa, basta con probar que la matriz central sea definida positiva. Empleando el criterio de Sylvester se pueden obtener las condiciones bajo las cuales la matriz central es definida positiva:

$$i) \lambda_{K_v}^{min} \gamma_1^* + \lambda_B^{min} > \epsilon_0[2\alpha\beta + k_{C_1} + \epsilon_0 k_{C_1}]$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\lambda_{K_v}^{min} \gamma_1^* + \lambda_B^{min}}{2\alpha\beta + k_{C_1} + \epsilon_0 k_{C_1}} > \epsilon_0 > 0. \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}
\text{ii)} \quad & \left[\lambda_{K_v}^{min} \gamma_1^* + \lambda_B^{min} - \epsilon_0 [2\alpha\beta + k_{C_1} + \epsilon_0 k_{C_1}] \right] \frac{\epsilon_0 \lambda_{k_p}^{min} [I - \alpha^2 e^{-\alpha}] (\gamma_2^*)^2 \alpha^2}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} > \frac{\epsilon_0^2}{4} [\alpha \lambda_{K_v}^{max} \gamma_1 \gamma_2 + \alpha \lambda_B^{max} \gamma_2 + \alpha^2 \epsilon_0 \beta \gamma_2 + \alpha^2 \epsilon_0 \beta]^2 \\
& \Rightarrow \\
& \frac{\epsilon_0 \lambda_{k_p}^{min} [I - \alpha^2 e^{-\alpha}] (\gamma_2^*)^2 \alpha^2 [\lambda_{K_v}^{min} \gamma_1^* + \lambda_B^{min}]}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} > \frac{\epsilon_0^2 \lambda_{k_p}^{min} [I - \alpha^2 e^{-\alpha}] (\gamma_2^*)^2 \alpha^2 [2\alpha\beta + k_{C_1} + \epsilon_0 k_{C_1}]}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} + \frac{\epsilon_0^2}{4} [\alpha \lambda_{K_v}^{max} \gamma_1 \gamma_2 + \alpha \lambda_B^{max} \gamma_2 + \\
& \alpha^2 \epsilon_0 \beta \gamma_2 + \alpha^2 \epsilon_0 \beta]^2 \\
& \Rightarrow \\
& \frac{\epsilon_0 \lambda_{k_p}^{min} [I - \alpha^2 e^{-\alpha}] (\gamma_2^*)^2 \alpha^2 [\lambda_{K_v}^{min} \gamma_1^* + \lambda_B^{min}]}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} > \frac{4\epsilon_0^2 \lambda_{k_p}^{min} [I - \alpha^2 e^{-\alpha}] (\gamma_2^*)^2 \alpha^2 [2\alpha\beta + k_{C_1} + \epsilon_0 k_{C_1}]}{4[1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|]} \\
& \quad + \frac{\epsilon_0^2 [\alpha \lambda_{K_v}^{max} \gamma_1 \gamma_2 + \alpha \lambda_B^{max} \gamma_2 + \alpha^2 \epsilon_0 \beta \gamma_2 + \alpha^2 \epsilon_0 \beta]^2 [1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|]}{4[1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|]} \\
& \Rightarrow \\
& \frac{\epsilon_0 \lambda_{k_p}^{min} [I - \alpha^2 e^{-\alpha}] (\gamma_2^*)^2 \alpha^2 [\lambda_{K_v}^{min} \gamma_1^* + \lambda_B^{min}]}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} > \frac{\epsilon_0^2}{4[1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|]} [4\lambda_{k_p}^{min} [I - \alpha^2 e^{-\alpha}] (\gamma_2^*)^2 \alpha^2 [2\alpha\beta + k_{C_1} + \epsilon_0 k_{C_1}] \\
& \quad + [\alpha \lambda_{K_v}^{max} \gamma_1 \gamma_2 + \alpha \lambda_B^{max} \gamma_2 + \alpha^2 \epsilon_0 \beta \gamma_2 + \alpha^2 \epsilon_0 \beta]^2 [1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|]] \\
& \Rightarrow \\
& \lambda_{k_p}^{min} [I - \alpha^2 e^{-\alpha}] (\gamma_2^*)^2 \alpha^2 [\lambda_{K_v}^{min} \gamma_1^* + \lambda_B^{min}] > \frac{\epsilon_0}{4} [4\lambda_{k_p}^{min} [I - \alpha^2 e^{-\alpha}] (\gamma_2^*)^2 \alpha^2 [2\alpha\beta + k_{C_1} + \epsilon_0 k_{C_1}] + [\alpha \lambda_{K_v}^{max} \gamma_1 \gamma_2 + \alpha \lambda_B^{max} \gamma_2 \\
& \quad + \alpha^2 \epsilon_0 \beta \gamma_2 + \alpha^2 \epsilon_0 \beta]^2 [1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|]] \\
& \Rightarrow \\
& \frac{4\lambda_{k_p}^{min} [I - \alpha^2 e^{-\alpha}] (\gamma_2^*)^2 \alpha^2 [\lambda_{K_v}^{min} \gamma_1^* + \lambda_B^{min}]}{[4\lambda_{k_p}^{min} [I - \alpha^2 e^{-\alpha}] (\gamma_2^*)^2 \alpha^2 [2\alpha\beta + k_{C_1} + \epsilon_0 k_{C_1}] + [\alpha \lambda_{K_v}^{max} \gamma_1 \gamma_2 + \alpha \lambda_B^{max} \gamma_2 + \alpha^2 \epsilon_0 \beta \gamma_2 + \alpha^2 \epsilon_0 \beta]^2 [1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|]]} > \epsilon_0 > 0.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Los resultados (3.44) y (3.45) brindan las condiciones necesarias para determinar que la matriz central de (3.43) es definida positiva, y que por ende (3.43) sea verdadera, es decir $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}})$ sea definida negativa, implicando a su vez la demostración de estabilidad asintótica global en el punto de equilibrio de la ecuación el lazo cerrado.

3.7. Control adaptable

La complejidad del sistema que presenta un robot manipulador puede ocasionar que se desconozcan de forma parcial o total algunos fenómenos de su dinámica, que a su vez puede causar inexactitud en el posicionamiento del robot con respecto a la referencia dada, ocasionando errores que pueden ser inaceptables e incluso provocar que el error de posición sea no acotado, o peor aún, causar la inestabilidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado en el sentido de Lyapunov. A pesar de no contar con el modelado completo de los fenómenos que provocan la incertidumbre paramétrica, es posible estimar la dinámica desconocida mediante técnicas de control adaptable.

El control adaptable tiene como función principal mantener constante el desempeño de un sistema dinámico e incrementar la eficiencia si existe dinámica desconocida o incertidumbre paramétrica. La ventaja del control adaptable es que no es necesario conocer con anticipación cierta información de los parámetros físicos de la dinámica del robot y sin embargo presentar un desempeño consistente del sistema dinámico del robot frente a perturbaciones externas.

Es precisamente la resolución al problema de regulación, aún con incertidumbre paramétrica, la característica más importante del control adaptable. No es necesario conocer información específica sobre la dinámica del robot, ya sea las cotas superiores de los efectos físicos, parámetros del par gravitacional o las fuerzas de fricción y aun así presentar un desempeño constante, esta característica lo convierte en un esquema de control robusto.

El control adaptable puede clasificarse en dos principales esquemas de control adaptable [12],[14]:

- Métodos con base en el modelo de referencia.
- Métodos con autosintonía.

En la figura 3.4 se muestra el esquema de control con base en el modelo de referencia; este esquema está formado por: un sistema físico de dinámica desconocida, un modelo de referencia, el cual es utilizado para obtener una respuesta ideal del esquema de control y que cuenta con especificaciones de la respuesta deseada, una ley de control con ajuste de ganancias y un esquema de adaptación que modifica y ajusta los parámetros de la ley de control de tal forma que se obtenga la respuesta deseada.

- **Modelo de referencia.** Es la herramienta empleada para obtener una respuesta ideal del esquema de control adaptable, de modo tal que el error de adaptación $\tilde{\mathbf{q}}_a$ tienda a cero cuando el tiempo tienda a infinito: $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}_a(t) = \mathbf{0}$. De esta forma, el robot manipulador alcanza la posición deseada $\mathbf{q}_d$ aún con perturbaciones y dinámica no modelada. Las ganancias del control proporcional $\hat{\mathbf{k}}_{pi}$ y de acción de control derivativa $\hat{\mathbf{k}}_{vi}$ son ajustadas con el fin de obtener un desempeño deseado (tiempo de respuesta, amortiguamiento, libre de ruido mecánico o vibraciones, etc.).

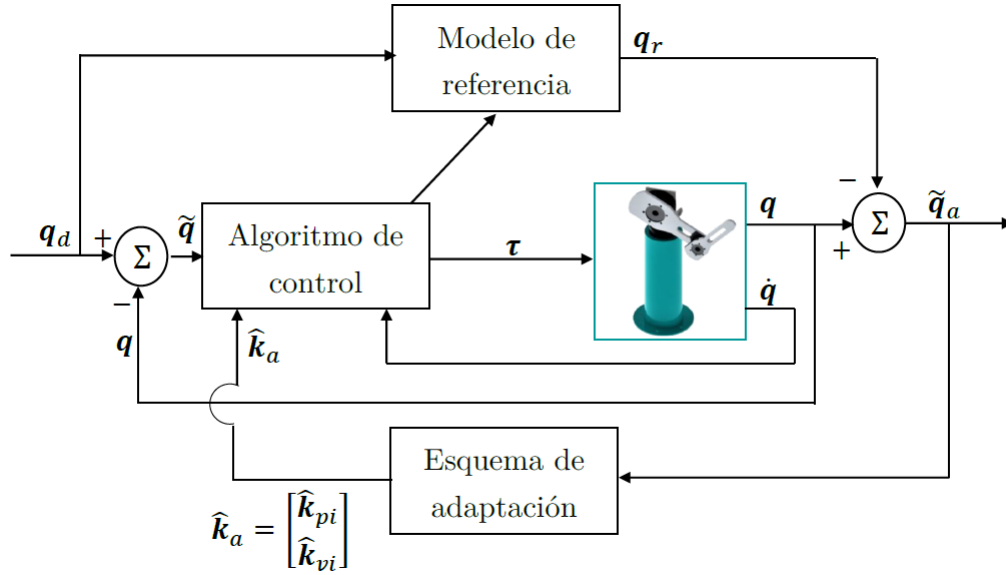


Figura 3.4: Esquema de control adaptativo con base en el modelo de referencia

- **Algoritmo de control.** Es el ya conocido algoritmo de control, diseñado mediante la técnica de moldeo de energía y la teoría de estabilidad de Lyapunov. El esquema de control permite suministrar la energía al manipulador en forma del torque aplicado τ .
- **Esquema de adaptación.** El principal objetivo del esquema de adaptación es variar las ganancias del algoritmo control K_p y K_v , de tal forma que los elementos de la ganancia proporcional $\hat{k}_{pi}$ y de acción de control derivativa $\hat{k}_{vi}$ se adapten para garantizar que el punto de equilibrio del sistema dinámico formado por el esquema de control adaptable sea asintóticamente estable.

En la figura 3.5 se muestra el esquema de control adaptable por medio de autosintonía. A diferencia del esquema de control adaptable por medio de modelo de referencia, en este método se realiza de manera simultánea la acción de control y la identificación paramétrica de los fenómenos físicos desconocidos. Cabe observar que en el esquema de control por modelo de referencia, las ganancias se sintonizan de tal forma que el error de adaptación tienda a cero $\tilde{q}_a \rightarrow 0$ en conjunto al error de posición $\tilde{q}$, mientras que en el esquema por autosintonía, las ganancias de control proporcional y la acción de control derivativa se ajustan conforma a la estimación de parámetros de la dinámica desconocida.

- **Esquema de identificación.** Es el encargado de entregar una estimación de los parámetros físicos del robot $\hat{\theta}$ en cada periodo de muestreo para proceder a realizar el ajuste de ganancias. El esquema de identificación no tiene como objetivo principal la identificación exacta de la incertidumbre paramétrica, si no que tiene como objetivo la identificación del fenómeno tal que las ganancias de control proporcional y de acción de control derivativa sean sintonizadas de tal forma que se resuelva el problema de regulación. Para llevar a cabo la identificación paramétrica se debe contar con la estructura

matemática de los fenómenos desconocidos para poder obtener el valor numérico de estos parámetros.

- **Ajuste de ganancias.** De acuerdo a los parámetros estimados por el esquema de identificación, se ajustan los elementos de las matrices de ganancias de control proporcional K_p y acción de control derivativa K_v , los cuales se obtienen al observar las señales de salida de control τ y la respuesta del robot $q, \dot{q}$.

Los esquemas de control adaptable autosintonizables se pueden clasificar en:

- **Directo.** En este tipo de esquemas se realiza la parametrización de forma directa la dinámica desconocida del robot como funciones de regresión lineal donde se incluyen las ganancias de control proporcional y acción de control derivativa. De este modo se puede obtener la ley de control adaptada que permite la estabilidad asintótica del punto de equilibrio mediante una estimación paramétrica.
- **Indirecto.** En este tipo de esquemas primero se realiza la estimación de parámetros y entonces se sintonizan las ganancias de control proporcional y de acción de control derivativa. Es conocido como control adaptable indirecto, pues se trasladan los parámetros estimados $\hat{\theta}$ hacia la sintonía automática de las ganancias.

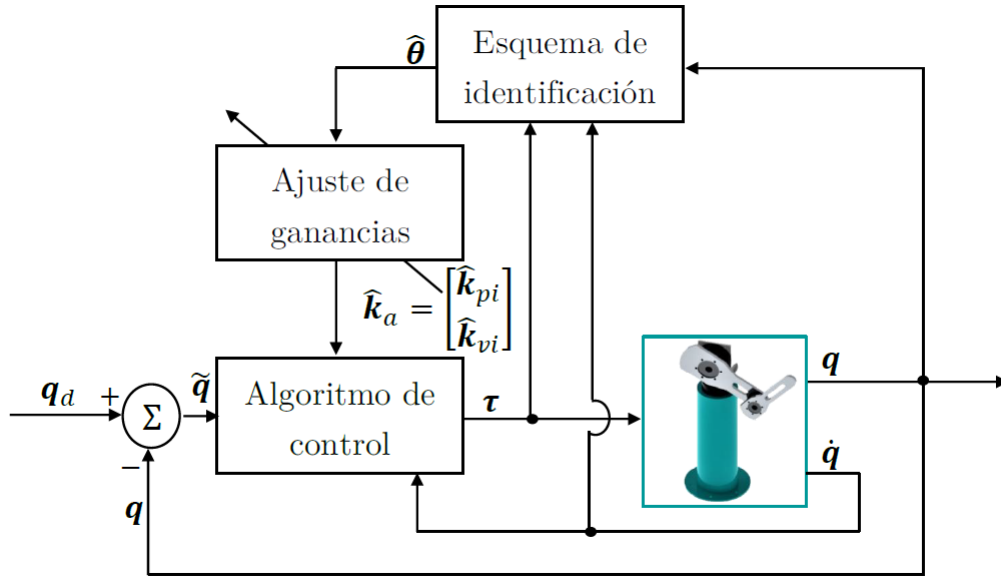


Figura 3.5: Esquema de control adaptativo por autosintonía

3.8. Algoritmo de control versión adaptable

En regulación un elemento de compensación es el par gravitacional, el cual puede presentar incertidumbre que se aborda como componente adaptable en el regulador. Considere la siguiente versión adaptable del esquema de control propuesto (3.16):

$$\boldsymbol{\tau} = K_p [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) + \underbrace{\Psi(\mathbf{q})\hat{\boldsymbol{\theta}}}_{\mathbf{g}(\mathbf{q})} \quad (3.46)$$

donde:

- La descripción de cada uno de los elementos que conforman los términos de control proporcional $K_p [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})$ y de acción de control derivativa $K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}})$ se mantiene igual que en el algoritmo propuesto en la ecuación (3.16).
- El término $\Psi(\mathbf{q})\hat{\boldsymbol{\theta}}$ es la versión adaptable de la compensación de gravedad $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \Psi(\mathbf{q})\hat{\boldsymbol{\theta}}$.
- $\Psi(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz conocida.
- $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de parámetros adaptables.

Como ley de adaptación se propone:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \Gamma \int_0^t \left[\frac{\beta^* \sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh^2(\tilde{\mathbf{q}})} - \dot{\mathbf{q}} \right] d\sigma \quad (3.47)$$

donde $\beta^* \in \mathbb{R}_+$ y $\Gamma > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal definida positiva que contiene las ganancias de adaptación.

Al relacionar el algoritmo de control (3.16) con el modelo dinámico del robot manipulador de n grados de libertad (2.24) y despejar $\ddot{\mathbf{q}}$ para obtener la ecuación en lazo cerrado, se llega a obtener una diferencia de términos que relaciona a la versión adaptable de la compensación de gravedad con el vector de compensación de gravedad teórico:

$$\Psi(\mathbf{q})\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \Psi(\mathbf{q})\hat{\boldsymbol{\theta}} - \Psi(\mathbf{q})\boldsymbol{\theta} \quad (3.48)$$

siendo $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ el vector de parámetros teórico, entonces

$$\Psi(\mathbf{q})\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \Psi(\mathbf{q})[\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}] = -\Psi(\mathbf{q})\tilde{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.49)$$

donde $\tilde{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^n$ se define como el vector de errores de parámetros, tal que $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}$, lo cual crea una nueva variable de estado. Adicionalmente si $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}$, entonces

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = -\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\Gamma \left[\frac{\beta^* \sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh^2(\tilde{\mathbf{q}})} - \dot{\mathbf{q}} \right] \quad (3.50)$$

por lo que la ecuación en lazo cerrado toma la forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} \left[K_p [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - B\dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\Psi(\mathbf{q})\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})}_{-\Psi(\mathbf{q})\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \right] \\ -\Gamma \left[\frac{\beta^* \sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh^2(\tilde{\mathbf{q}})} - \dot{\mathbf{q}} \right] \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

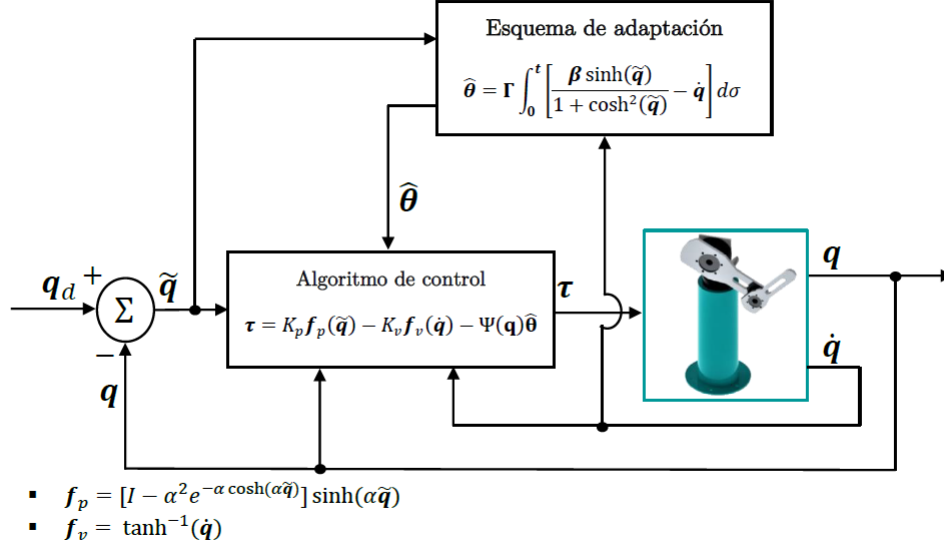


Figura 3.6: Control con compensación adaptable de par de gravedad.

En el caso particular de un robot manipulador de 3 gdl (robot de donde se obtendrán resultados experimentales), se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= g \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 l_{c2} \sin(q_2) + m_3 l_2 \sin(q_2) + m_3 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \\ m_3 l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \\ &= g \begin{bmatrix} 0 \\ \Psi(\mathbf{q})\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \begin{bmatrix} \sin(q_2) & \sin(q_2 + q_3) \\ 0 & \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 l_{c2} + m_3 l_2 \\ m_3 l_{c3} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.52)$$

3.8.1. Análisis de la existencia y unicidad del punto de equilibrio

A continuación se procede a realizar el análisis de la existencia y unicidad del punto de equilibrio $[\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}]^T \in \mathbb{R}^{3n}$ de la ecuación en lazo cerrado (3.53) como requisito de la existencia de estabilidad asintótica.

$$\begin{bmatrix} -\dot{q} \\ M(\mathbf{q})^{-1} \left[K_p [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{q})}] \sinh(\alpha \tilde{q}) - K_v \arctan(\dot{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - B\dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\Psi(\mathbf{q})\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})}_{-\Psi(\mathbf{q})\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \right] \\ -\Gamma \left[\frac{\beta^* \sinh(\tilde{q})}{1 + \cosh^2(\tilde{q})} - \dot{q} \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Analizando cada componente:

i) $-\dot{\mathbf{q}} = [-I]\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, puesto que $I > 0$ es una matriz definida positiva, dado que $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad.

ii) $M(\mathbf{q}) > 0 \Leftrightarrow M(\mathbf{q})^{-1} > 0$ entonces

$$M(\mathbf{q})^{-1} [K_p[I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) - B\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow K_p[I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) - B\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n.$$

Analizando cada término:

- $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})|_{\dot{\mathbf{q}}=0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$.

- $B\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ puesto que $B > 0$.

- $K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \arctan(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ puesto que $K_p > 0$.

- Para $K_p[I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) - \Psi(\mathbf{q})\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ se tiene que:

$$K_p[I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] > 0 \text{ Puesto que } K_p > 0 \text{ y } [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] > 0 \text{ (inciso ii, subsección 3.6.1).}$$

$\Rightarrow$

$$K_p[I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) = \Psi(\mathbf{q})\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) = \Psi(\mathbf{q})\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n.$$

iii) $\Gamma > 0$ es una matriz diagonal definida positiva; $\beta^* > 0$, por lo que

$$-\Gamma \left[\frac{\beta^* \sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh^2(\tilde{\mathbf{q}})} - \underbrace{\dot{\tilde{\mathbf{q}}}}_{\text{por i)}} \right] = \mathbf{0} \Rightarrow -\Gamma \left[\frac{\beta^* \sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh^2(\tilde{\mathbf{q}})} \right] = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}.$$

$\therefore \exists$ el punto de equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}} \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \ \tilde{\boldsymbol{\theta}}]^T = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}]^T \in \mathbb{R}^{3n}$ de la ecuación en lazo cerrado formada por el modelo dinámico del robot manipulador y el esquema de control (3.51) y es único.

3.8.2. Análisis de estabilidad

La función candidata de Lyapunov para la versión adaptable se construye de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) &= \underbrace{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left[\dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \right] \\ 2\sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M(\mathbf{q}) & 0 \\ 0 & K_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[\dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \right] \\ \sqrt{\frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) + e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})} - \rho} \end{bmatrix}}_{\text{Ecuación (3.21)}} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}}_{\text{Nuevo término de versión adaptable}}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Es de notar que el primer término corresponde a la propuesta de función estricta de Lyapunov de la ecuación (3.21), la cual ya se probó que es definida positiva para $\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$. El segundo término es claramente definido positivo con respecto a $\tilde{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^n$ por tener una estructura cuadrática, de aquí que $V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) > 0$ es definida positiva. Aprovechando el álgebra desarrollada en la subsección 3.6.3, la derivada de la función de energía puede verse como:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) &\leq - \begin{bmatrix} \|\dot{\mathbf{q}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_{K_v}^{min} \gamma_1^* + \lambda_B^{min} - 2\alpha\epsilon_0\beta & -\frac{1}{2}[\epsilon_0\alpha\lambda_{K_v}^{max}\gamma_1\gamma_2 + \epsilon_0\alpha\lambda_B^{max}\gamma_2 \\ -\epsilon_0k_{C_1} - \epsilon_0^2k_{C_1} & +\alpha^2\epsilon_0^2\beta\gamma_2 + \alpha^2\epsilon_0^2\beta] \\ -\frac{1}{2}[\epsilon_0\alpha\lambda_{K_v}^{max}\gamma_1\gamma_2 + \epsilon_0\alpha\lambda_B^{max}\gamma_2 & \epsilon_0\lambda_{k_p}^{min}[I - \alpha^2e^{-\alpha}](\gamma_2^*)^2\alpha^2 \\ +\alpha^2\epsilon_0^2\beta\gamma_2 + \alpha^2\epsilon_0^2\beta] & \frac{\epsilon_0\lambda_{k_p}^{min}[I - \alpha^2e^{-\alpha}](\gamma_2^*)^2\alpha^2}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\dot{\mathbf{q}}\| \\ \|\tilde{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} \\
&\quad - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} - \dot{\mathbf{q}}^T \Psi(\mathbf{q}) \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^T \Psi(\mathbf{q}) \tilde{\boldsymbol{\theta}}}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})\|}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Note que en el nuevo término de versión adaptable:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}} \right] = \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \tag{3.56}$$

debido a que $\Gamma > 0$ es una matriz diagonal definida positiva, existe su matriz inversa $\Gamma^{-1} > 0$ definida positiva y utilizando la ecuación (3.50):

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = -\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = -\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \cancel{\Gamma} \cancel{\Gamma}^{-1} \left[\frac{\beta^* \sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh^2(\tilde{\mathbf{q}})} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \right] = \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\beta^* \sinh(\tilde{\mathbf{q}})}{1 + \cosh^2(\tilde{\mathbf{q}})} \tag{3.57}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
-\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} - \dot{q}^T \Psi(q) \tilde{q} + \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{q})^T \Psi(q) \tilde{\theta}}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{q})\|} &\leq \left| -\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} - \dot{q}^T \Psi(q) \tilde{\theta} + \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{q})^T \Psi(q) \tilde{\theta}}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{q})\|} \right| \\
&= \left| \tilde{\theta}^T \dot{q} - \tilde{\theta}^T \frac{\beta^* \sinh(\tilde{q})}{1 + \cosh^2(\tilde{q})} - \dot{q}^T \Psi(q) \tilde{\theta} + \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{q})^T \Psi(q) \tilde{\theta}}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{q})\|} \right| \\
&\leq \|\tilde{\theta}\| \|\dot{q}\| + \|\tilde{\theta}\| \beta^* \left\| \frac{\sinh(\tilde{q})}{1 + \cosh^2(\tilde{q})} \right\| + \|\dot{q}\| \|\Psi(q)\| \|\tilde{\theta}\| \\
&\quad + \frac{\epsilon_0 \|\sinh(\alpha \tilde{q})\| \|\Psi(q)\| \|\tilde{\theta}\|}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{q})\|}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

También se tiene que:

$$\left\| \frac{\sinh(\tilde{q})}{1 + \cosh^2(\tilde{q})} \right\| \leq \|\sinh(\tilde{q})\| \leq \zeta_a^* \|\tilde{q}\| \tag{3.59}$$

La norma de $\Psi(q)$ está acotada. Sea $\|\Psi(q)\| < k$, entonces:

$$\frac{\epsilon_0 \|\sinh(\alpha \tilde{q})\| \|\Psi(q)\| \|\tilde{\theta}\|}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{q})\|} < \epsilon_0 \|\sinh(\alpha \tilde{q})\| \|\Psi(q)\| \|\tilde{\theta}\| < \epsilon_0 \alpha \gamma_2 k \|\tilde{q}\| \|\tilde{\theta}\| \tag{3.60}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}
-\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} - \dot{q}^T \Psi(q) \tilde{q} + \frac{\epsilon_0 \sinh(\alpha \tilde{q})^T \Psi(q) \tilde{\theta}}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{q})\|} &\leq \|\tilde{\theta}\| \|\dot{q}\| + \|\tilde{\theta}\| \beta^* \zeta_a^* \|\tilde{q}\| + k \|\dot{q}\| \|\tilde{\theta}\| \\
&\quad + \alpha \epsilon_0 \gamma_2 k \|\tilde{q}\| \|\tilde{\theta}\|.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Con lo anterior y retomando la expresión (3.55), es fácil obtener la siguiente expresión:

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}, \tilde{\theta}) \leq - \begin{bmatrix} \|\dot{q}\| \\ \|\tilde{q}\| \\ \|\tilde{\theta}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_{K_v}^{min} \gamma_1^* + \lambda_B^{min} - 2\alpha \epsilon_0 \beta & -\frac{1}{2} [\epsilon_0 \alpha \lambda_{K_v}^{max} \gamma_1 \gamma_2 + \epsilon_0 \alpha \lambda_B^{max} \gamma_2 + \alpha^2 \epsilon_0^2 \beta \gamma_2 + \alpha^2 \epsilon_0^2 \beta] & -\frac{1}{2} [1 + k] \\ -\frac{1}{2} [\epsilon_0 \alpha \lambda_{K_v}^{max} \gamma_1 \gamma_2 + \epsilon_0 \alpha \lambda_B^{max} \gamma_2 + \alpha^2 \epsilon_0^2 \beta \gamma_2 + \alpha^2 \epsilon_0^2 \beta] & \frac{\epsilon_0 \lambda_{k_p}^{min} [I - \alpha^2 e^{-\alpha}] (\gamma_2^*)^2 \alpha^2}{1 + \|\cosh(\alpha \tilde{q})\|} & -\frac{1}{2} [\beta^* \zeta_a^* + \alpha \epsilon_0 \gamma_2 k] \\ -\frac{1}{2} [1 + k] & -\frac{1}{2} [\beta^* \zeta_a^* + \alpha \epsilon_0 \gamma_2 k] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\dot{q}\| \\ \|\tilde{q}\| \\ \|\tilde{\theta}\| \end{bmatrix} \leq 0 \tag{3.62}$$

$\Rightarrow$ El punto de equilibrio es estable de forma global.

Capítulo 4

Resultados

Los experimentos fueron realizados con infraestructura del Laboratorio de Robótica de la Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Este Laboratorio cuenta con un número más que suficiente de robots manipuladores de transmisión directa de tres grados de libertad, que sirven para experimentación práctica de diversos algoritmos de control; en específico sirven para obtener los datos experimentales, tales como errores de posición, velocidad articular y torque aplicado, ya que, debido a sus características, estos sistemas dinámicos no lineales se prestan incluso para realizar publicaciones de calidad.

En específico, los experimentos fueron llevados a cabo en la plataforma experimental **Rotradi**, la cual consiste de un robot manipulador de 3 gdl con servomotores de transmisión directa y que se mueve en el espacio tridimensional, equipado con tarjetas y software que le permiten realizar aplicaciones de automatización y pruebas de diversos esquemas de control, cuyos módulos se muestran en la tabla 4.1, de los cuales sus eslabones son fabricados en aluminio 6061 y de longitud igual a 0.45 m. Tiene una computadora Pentium con tarjetas FPGA's y 3 DAC's de 12 bits, los servoamplificadores admiten una entrada de ± 10 V. Una vez obtenidos los datos experimentales, fue posible graficarlos mediante su importación a **MATLAB**.

Como posición de casa del robot experimental se propone su posición natural, es decir, los ejes x_2 y x_3 paralelos y en sentido opuesto al eje z_0 de su modelo de cinemática directa. En todos los experimentos se propone la misma sintonía de ganancias, variando su constante interna α y las posiciones deseadas. Con el fin de probar la eficacia y desempeño del algoritmo de control propuesto en este escrito, se realizaron un total de cinco experimentos; tres de los cuales se realizaron con el nuevo algoritmo de control diseñado (3.16), uno con el típico control PD más compensación de gravedad, esto con el fin de realizar una comparación cualitativa del desempeño de ambos algoritmos de control, y el último con el nuevo algoritmo de control en su versión adaptable. Una vez establecido el contexto de los experimentos, se procede a mostrar los resultados obtenidos en cada una de las pruebas. El robot experimental en su posición de casa se ilustra en la figura 4.1.

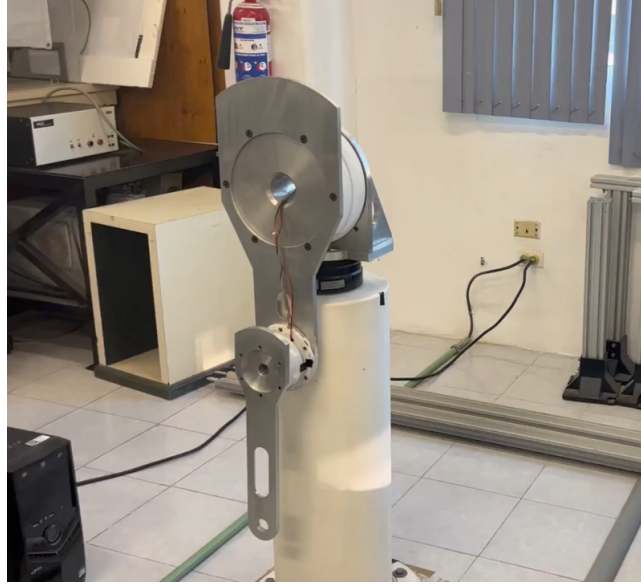


Figura 4.1: Robot experimental “Rotradi” en posición de casa.

Articulación	Capacidad	Resolución del encoder
Base	15 Nm	656,000 ppr
Hombro	50 Nm	1,024,000 ppr
Codo	4 Nm	65,600 ppr

ppr: pulsos por revolución (360°).

Tabla 4.1: Características de los servomotores.

4.1. Experimentos con el nuevo control propuesto

Se retoma el algoritmo de control propuesto, expresado en la ecuación (3.16).

$$\boldsymbol{\tau} = K_p [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

Se define $k_{p1} = 14$, $K_{p2} = 40$, $K_{p3} = 3.5$, tal que la matriz de ganancias de control proporcional $K_p = \text{diagonal}(k_{p1}, k_{p2}, k_{p3})$; $k_{v1} = 0.65k_{p1}$, $k_{v2} = 0.6k_{p2}$, $k_{v3} = 0.4k_{p3}$, tal que la matriz de ganancias de acción de control derivativa $K_v = \text{diagonal}(k_{v1}, k_{v2}, k_{v3})$. El eslabón 1 corresponde a la base, el eslabón 2 corresponde al hombro y el eslabón 3 corresponde al codo. Este orden se conserva en cada uno de los vectores graficados, refiérase a error, velocidad y torque aplicado. En cada caso el algoritmo de control fue implementado en lenguaje C y el periodo de muestreo utilizado fue 2.5 ms.

4.1.1. Experimento I

Se considera al vector de posiciones deseadas como $\mathbf{q}_d = [q_{d1} \ q_{d2} \ q_{d3}]^T = [45^\circ \ 90^\circ \ 0^\circ]^T$, condiciones iniciales iguales a cero: $\mathbf{q}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ y $\dot{\mathbf{q}}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$. En el algoritmo de control se propone $\alpha = 0.9$.

En la figura 4.2 se aprecia la gráfica de errores de posición expresados en grados contra el tiempo de experimentación. Se puede observar una convergencia asintótica al origen. El error de posición de la base ($\tilde{q}_1$) obtiene un valor en el estado estacionario del orden de 10^{-5} . El error de posición del hombro ($\tilde{q}_2$) presenta un error en el estacionario en el orden de 10^{-3} , el cual sigue siendo valor permisible y bajo. Por último, el error de posición del codo (línea amarilla) se encuentra en el orden de 10^{-4} en el estado estacionario.

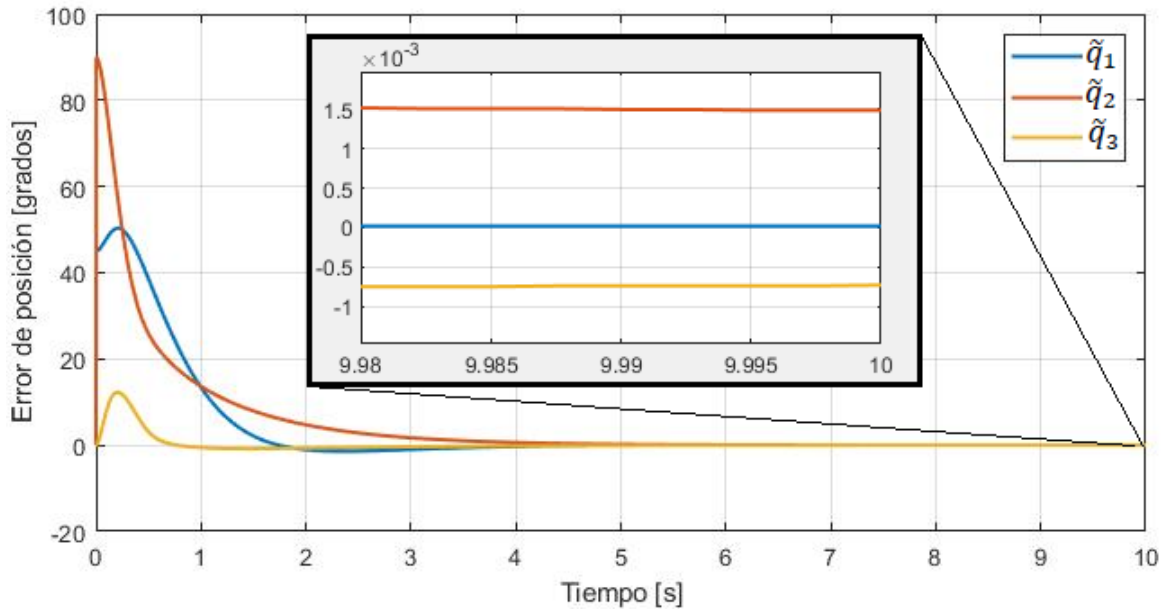


Figura 4.2: Errores de posición de experimento I.

En la figura 4.3 se presentan las velocidades de cada articulación en grados/s, se puede apreciar claramente la convergencia asintótica al origen en conjunto con el error de posición, la etapa transitoria es suave, sin sobre impulsos y alcanza el estacionario en 4.6 segundos, quedando en el punto de equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}} \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^T \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^6$ cuando $t \rightarrow \infty$.

En la figura 4.4 se muestra el par aplicado por el algoritmo de control y solicitado por los servomotores. El par solicitado en cada articulación no supera al 80 % de su par máximo τ_{max} . También se aprecia que en el estado estacionario, los torques aplicados cumplen la función de compensación de gravedad, pues cabe mencionar que el robot experimental no tiene un freno mecánico de forma física.

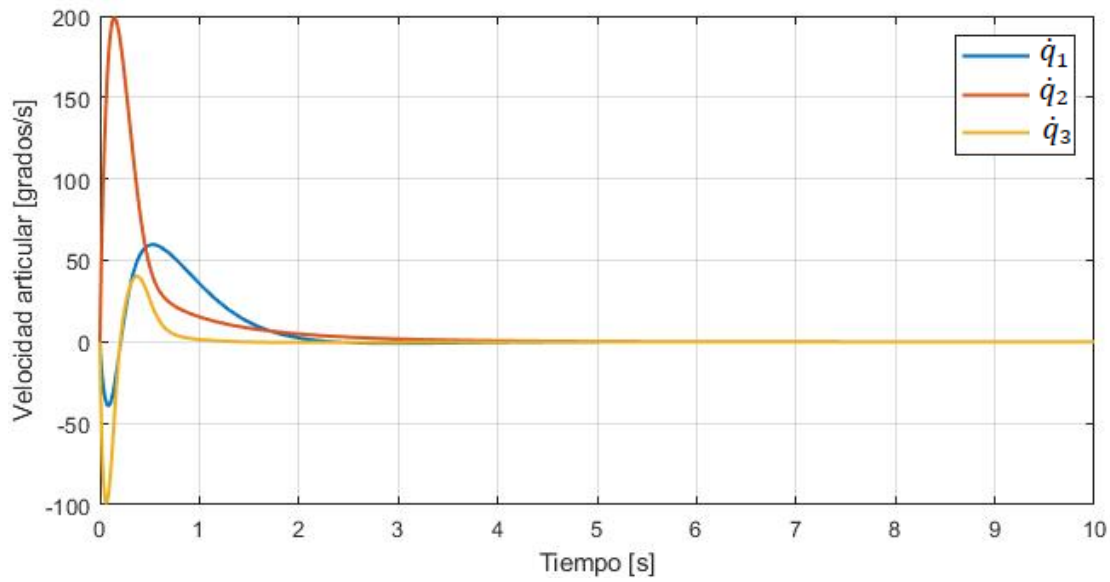


Figura 4.3: Velocidades articulares de experimento I.

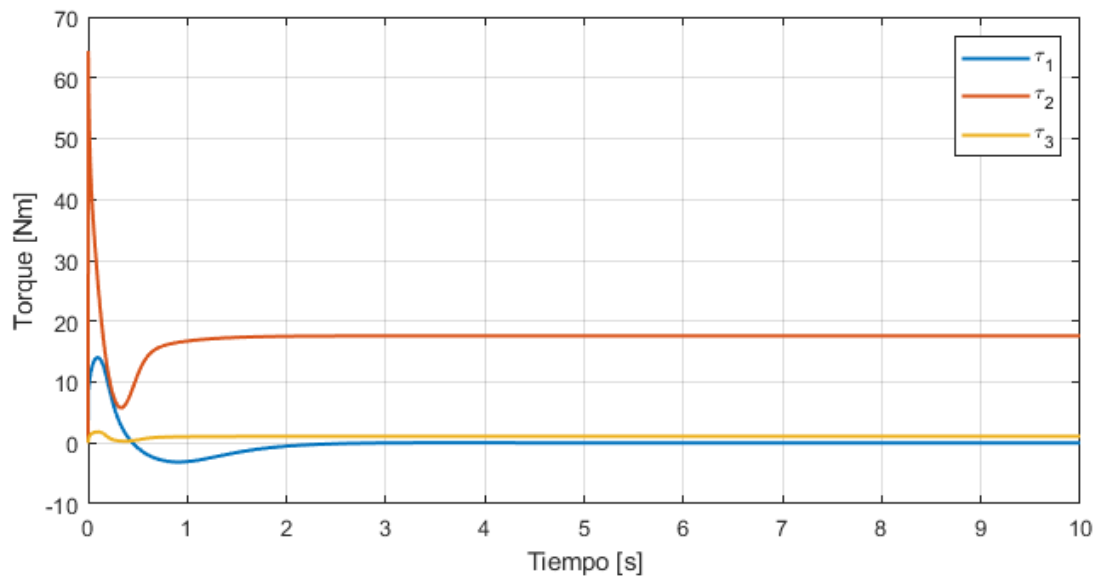


Figura 4.4: Par aplicado de experimento I.

Por último, en la figura 4.5 se muestra la posición final alcanzada por cada articulación en la prueba del experimento I aplicado al robot de transmisión directa de 3gdl. A simple vista pareciera que se ha colocado en la posición precisa, pues los errores no son perceptibles. También se puede ver en funcionamiento la compensación del par de gravedad.

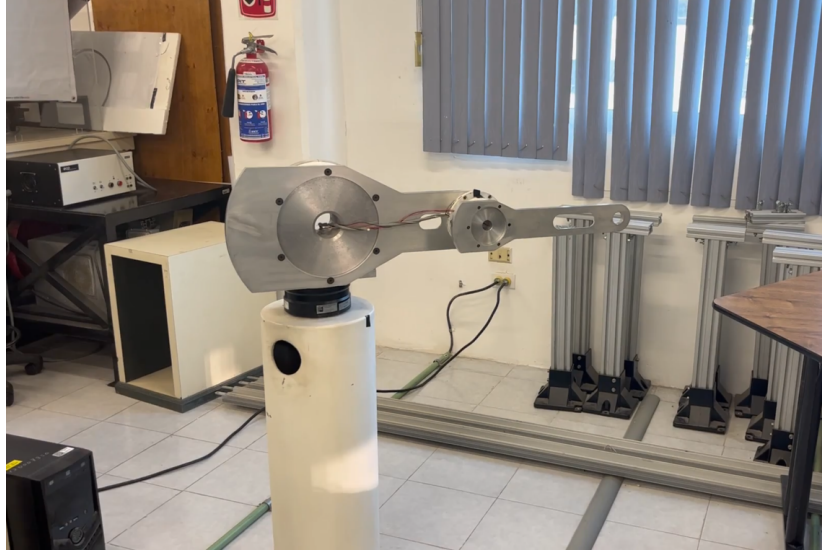


Figura 4.5: Posicionamiento final de robot de 3 gdl en experimento I.

4.1.2. Experimento II

Se define el vector de posiciones deseadas como $\mathbf{q}_d = [q_{d1} \ q_{d2} \ q_{d3}]^T = [45^\circ \ 180^\circ \ 0^\circ]^T$, condiciones iniciales iguales a cero: $\mathbf{q}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ y $\dot{\mathbf{q}}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$. En el algoritmo de control se propone $\alpha = 0.5$. El periodo de muestreo y el intervalo de tiempo es el mismo que en el experimento I.

En la figura 4.6 se puede apreciar la gráfica de errores de posición obtenidos en el segundo experimento. De igual forma que en el experimento I, se puede apreciar una convergencia asintótica al origen del vector de errores de posición; sin embargo en esta ocasión los errores presentan valores de un orden mayor de magnitud. Si bien los errores se presentan en un orden mayor a comparación del experimento I, estos errores siguen estando en el rango de lo admisible, pues ninguno supera el 2 %, de igual forma el error de posición del codo.

En la figura 4.7 se pueden apreciar las velocidades de cada articulación del robot. Nuevamente el objetivo de control se logra, pues al igual que los errores de posición, el vector de velocidad converge asintóticamente a cero, quedando en el equilibrio. Se observa la suavidad de las curvas, pues no se presentan sobreimpulsos. El orden de las curvas es el mismo.

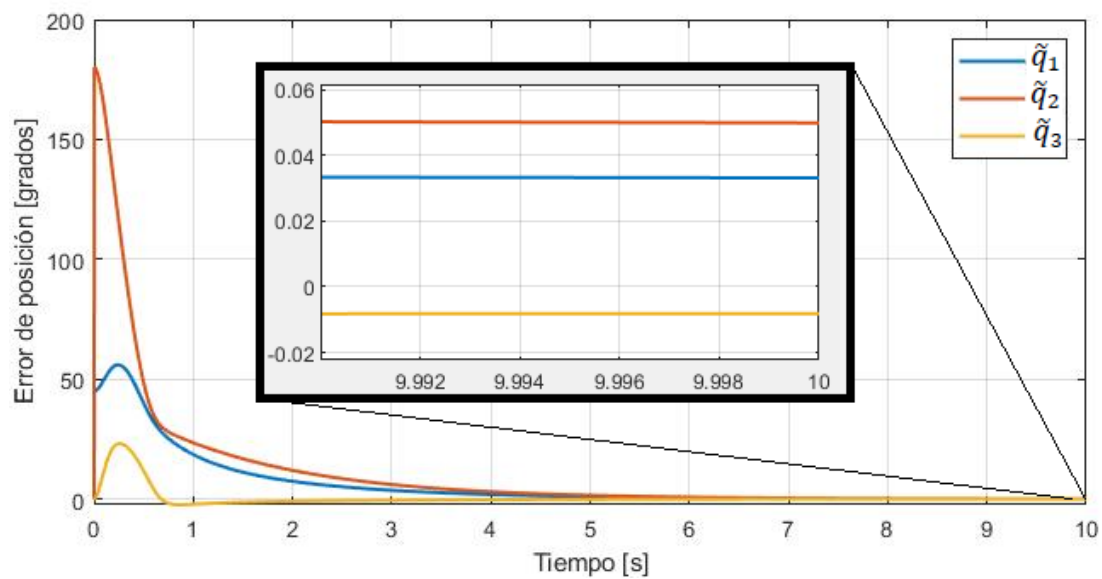


Figura 4.6: Errores de posición de experimento II.

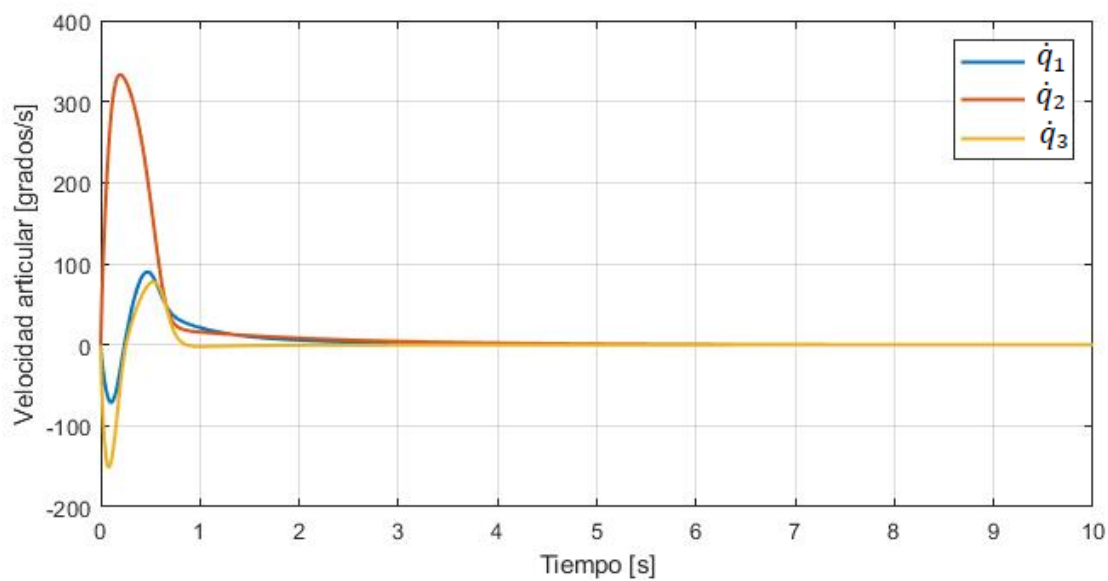


Figura 4.7: Velocidades articulares de experimento II.

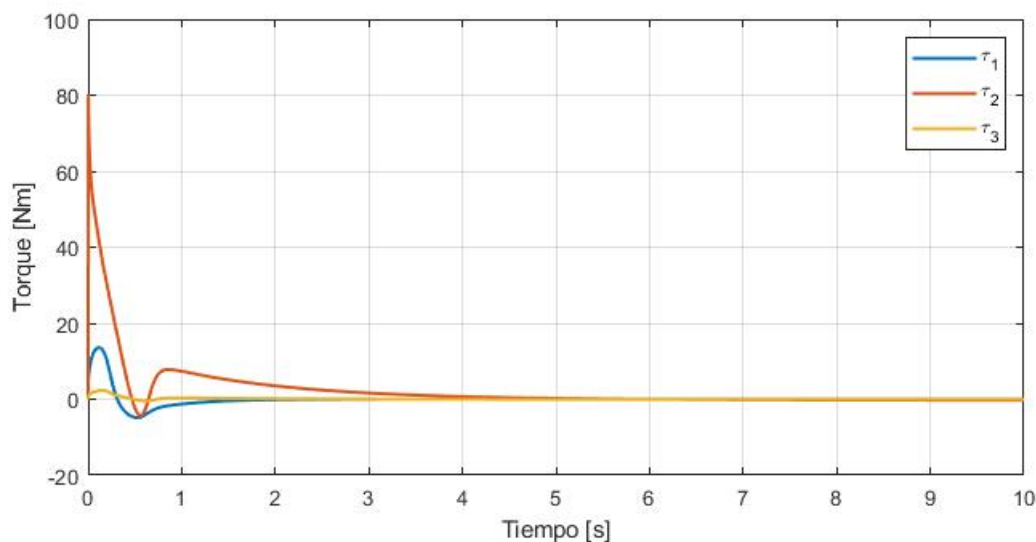


Figura 4.8: Par aplicado de experimento II.

En la figura 4.8 se observa el par solicitado al servomotor. El par solicitado en cada articulación no supera al 80 % de su par máximo τ_{max} , por lo que siempre se trabaja en la zona lineal del servomotor. Observe que en este caso la posición final del robot permite aplicar bajo torque en el estado estacionario. Por último, en la figura 4.9 se muestra la posición final alcanzada por el robot manipulador en la prueba del experimento II.

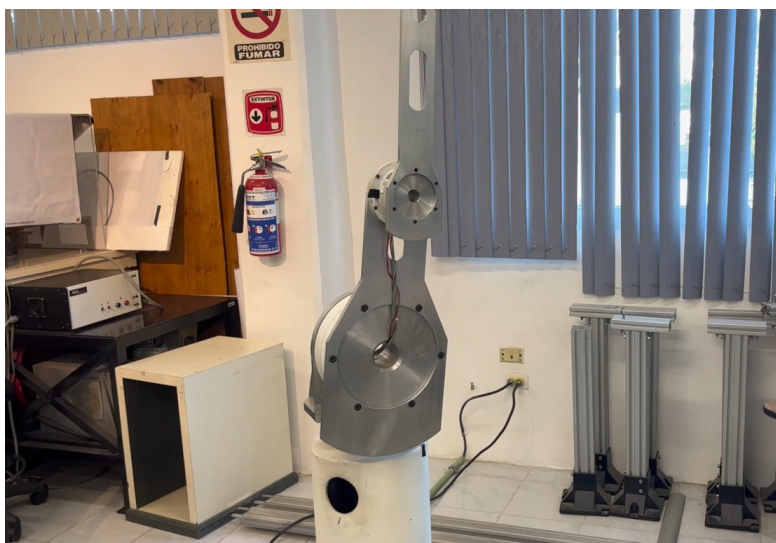


Figura 4.9: Posicionamiento final de robot de 3 gdl en experimento II.

4.1.3. Experimento III

Se define el vector de posiciones deseadas como $\mathbf{q}_d = [q_{d1} \ q_{d2} \ q_{d3}]^T = [45^\circ \ 45^\circ \ 90^\circ]^T$. En el algoritmo de control se propone $\alpha = 0.9$, condiciones iniciales iguales a cero: $\mathbf{q}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ y $\dot{\mathbf{q}}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$. El periodo de muestreo y el intervalo de tiempo es el mismo que en el experimento I.

En la figura 4.10 se puede apreciar la gráfica de errores de posición experimentales. Se puede observar una convergencia asintótica al origen del vector de errores de posición, las curvas representadas son más suaves y amortiguadas que en los ejercicios I y II y los errores en el estacionario mantienen ordenes de magnitud de 10^{-3} y 10^{-4} .

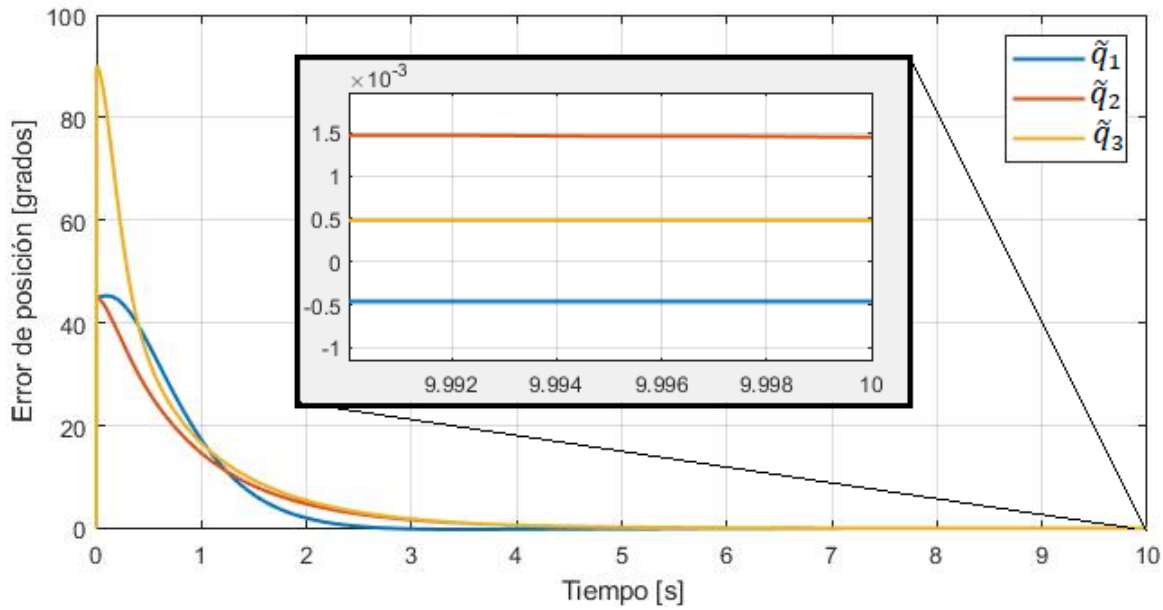


Figura 4.10: Errores de posición de experimento III.

En la figura 4.11 se pueden apreciar las velocidades de cada articulación del robot. Nuevamente el objetivo de control se logra de forma muy eficiente, pues el vector de las variables de estado converge asintóticamente a cero cuando el tiempo tiende a infinito. El orden de las curvas es el mismo que en los experimentos anteriores.

En la figura 4.12 se observa el par solicitado al servomotor. El par aplicado en cada articulación no supera al 80 % de su par máximo τ_{max} , por lo que siempre se trabaja en la zona lineal de los servomotores sin saturarlos. El torque en el estacionario compensa casi perfectamente al par de gravedad, haciendo que el robot se mantenga en su posición final. En la figura 4.13 se muestra el posicionamiento del robot al final del experimento, donde a simple vista no son apreciables los errores de posición.

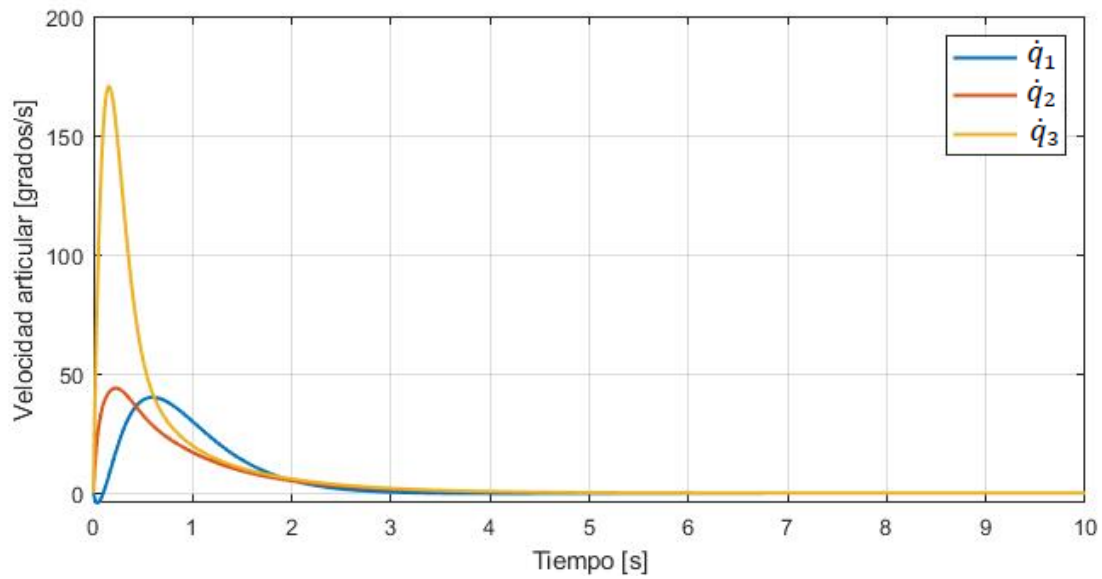


Figura 4.11: Velocidades articulares de experimento III.

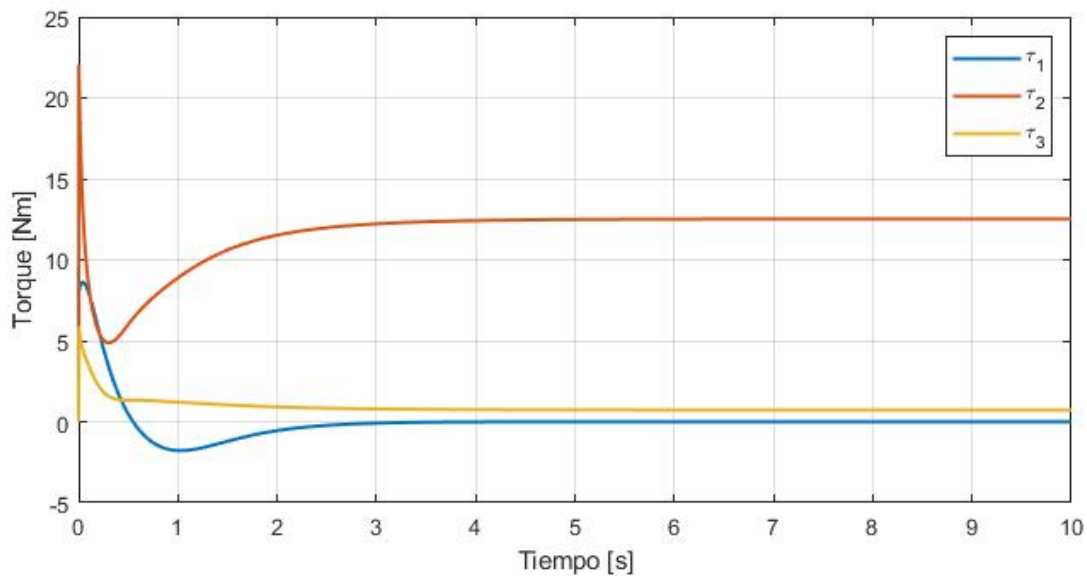


Figura 4.12: Par aplicado de experimento III.



Figura 4.13: Posicionamiento final de robot de 3 gdl en experimento III.

4.2. Experimento con control PD+g

El control PD+g tiene la forma

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} + g(q).$$

Se define $k_{p1} = 14$, $K_{p2} = 40$, $K_{p3} = 3.5$, tal que la matriz de ganancias de control proporcional $K_p = \text{diagonal}(k_{p1}, k_{p2}, k_{p3})$; $k_{v1} = 0.65k_{p1}$, $k_{v2} = 0.6k_{p2}$, $k_{v3} = 0.4k_{p3}$, tal que la matriz de ganancias de acción de control derivativa $K_v = \text{diagonal}(k_{v1}, k_{v2}, k_{v3})$. El eslabón 1 corresponde a la base, el eslabón 2 corresponde al hombro y el eslabón 3 corresponde al codo. Este orden se conserva en cada uno de los vectores graficados, refiérase a error, velocidad y torque aplicado. Se define al vector de posiciones deseadas como $\mathbf{q}_d = [q_{d1} \ q_{d2} \ q_{d3}]^T = [45^\circ \ 45^\circ \ 90^\circ]^T$ y condiciones iniciales iguales a cero: $\mathbf{q}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ y $\dot{\mathbf{q}}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$. El algoritmo de control fue implementado en lenguaje C y el periodo de muestreo utilizado fue 2.5 ms. Observe que se conservan las mismas condiciones que en el Experimento III, esto con el fin de tener una mejor comparación entre algoritmos.

La figura 4.14 muestra los errores de posición de cada articulación. Cabe notar que la base ($\tilde{q}_1$) presenta algunas oscilaciones antes de llegar al estacionario, cosa indeseable para diversas aplicaciones de automatización. También se puede apreciar claramente que el transitorio tiene sobreimpulsos y entra al estacionario con rizo en 9 segundos. Si bien los errores de posición son bajos y dentro de lo admisible, no son tan pequeños en comparación al experimento III.

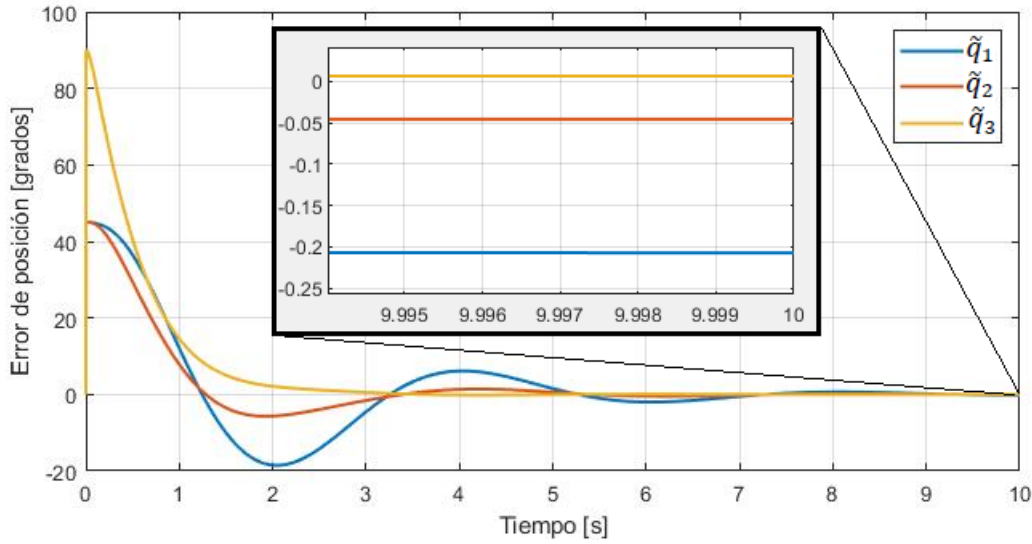


Figura 4.14: Errores de posición con control PD+g.

La figura 4.15 muestra las velocidades articulares relacionadas a los errores de posición. En la figura 4.16 se observa el par aplicado a cada articulación. El orden de las gráficas es el mismo que en los experimentos anteriores.

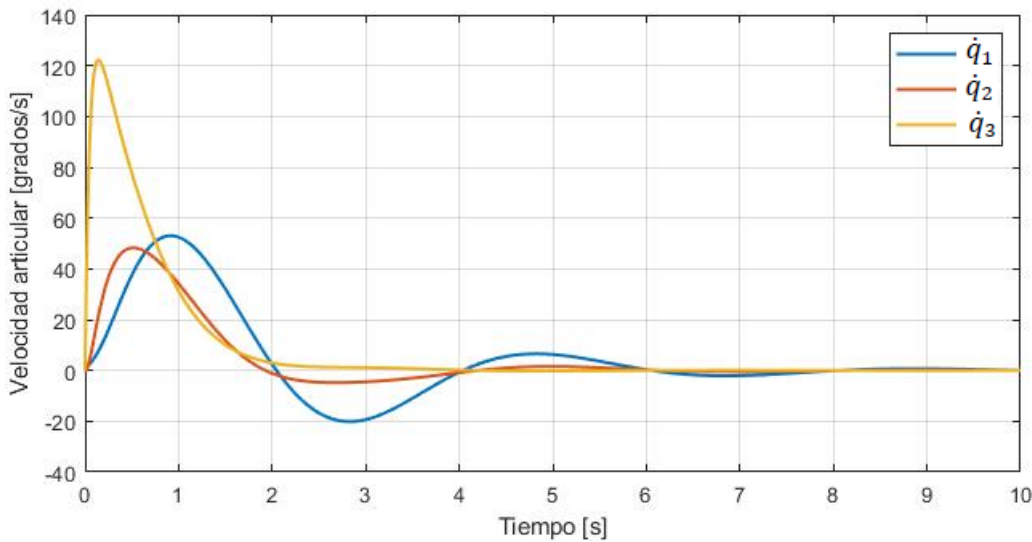


Figura 4.15: Velocidades articulares con control PD+g.

Los torques aplicados también compensan el par gravitacional en el estado estacionario, la problemática con este algoritmo de control se encuentra en el transitorio.

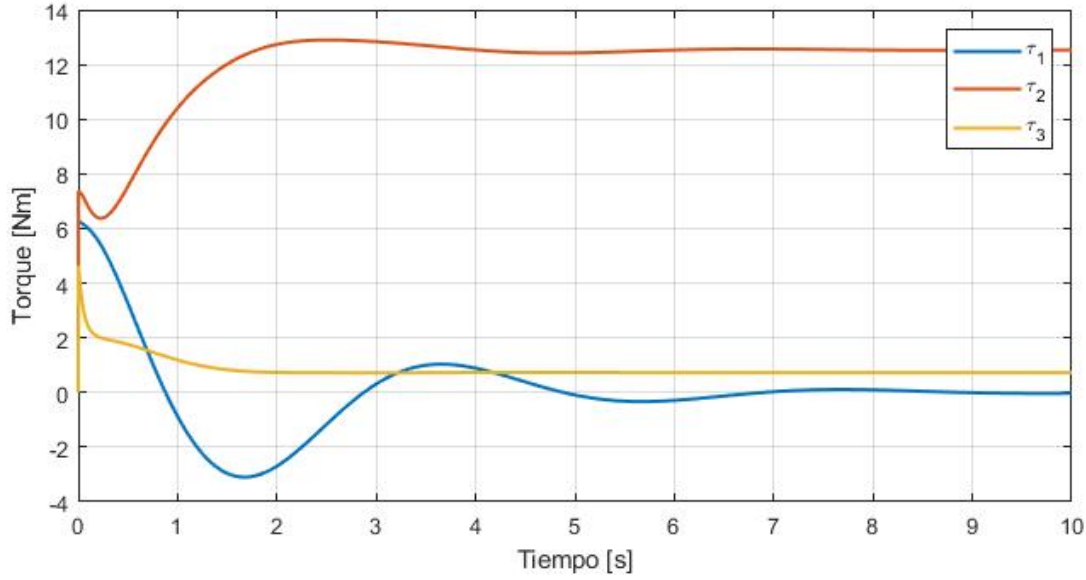


Figura 4.16: Par aplicado con control PD+g.

4.3. Experimento del control en versión adaptable

Se retoma el algoritmo de control propuesto en su versión adaptable (3.46)

$$\boldsymbol{\tau} = K_p [I - \alpha^2 e^{-\alpha \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}] \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) - K_v \arctan(\dot{\mathbf{q}}) + \Psi(\mathbf{q}) \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Se define $k_{p1} = 14$, $K_{p2} = 40$, $K_{p3} = 3.5$, tal que la matriz de ganancias de control proporcional $K_p = \text{diagonal}(k_{p1}, k_{p2}, k_{p3})$; $k_{v1} = 0.65k_{p1}$, $k_{v2} = 0.6k_{p2}$, $k_{v3} = 0.4k_{p3}$, tal que la matriz de ganancias de acción de control derivativa $K_v = \text{diagonal}(k_{v1}, k_{v2}, k_{v3})$. El eslabón 1 corresponde a la base, el eslabón 2 corresponde al hombro y el eslabón 3 corresponde al codo. Este orden se conserva en cada uno de los vectores graficados, refiérase a error, velocidad y torque aplicado. Se define al vector de posiciones deseadas como $\mathbf{q}_d = [q_{d1} \ q_{d2} \ q_{d3}]^T = [45^\circ \ 45^\circ \ 90^\circ]^T$ y condiciones iniciales iguales a cero: $\mathbf{q}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$ y $\dot{\mathbf{q}}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$. El algoritmo de control fue implementado en lenguaje C y el periodo de muestreo utilizado fue 2.5 ms. Adicionalmente, para la ley de control se define a $\gamma_{11} = 7$ y a $\gamma_{22} = 7$, tal que $\Gamma = \text{diagonal}(0, \gamma_{11}, \gamma_{22})$, también se definen los valores $\alpha = 0.9$ y $\beta^* = 0.35$.

En la figura 4.17 se muestran los errores de posición del control propuesto en su versión adaptable. Los errores de posición son bastante bajos, el primer eslabón presenta un error en el orden de 10^{-5} , mientras que los errores de posición de los eslabones 2 y 3 son prácticamente nulos; sin embargo se pueden apreciar pequeños escalonamientos en la gráfica de error que no se atribuyen a baja resolución de imagen. Durante el experimento se notaron vibraciones indeseables en el transitorio del robot.

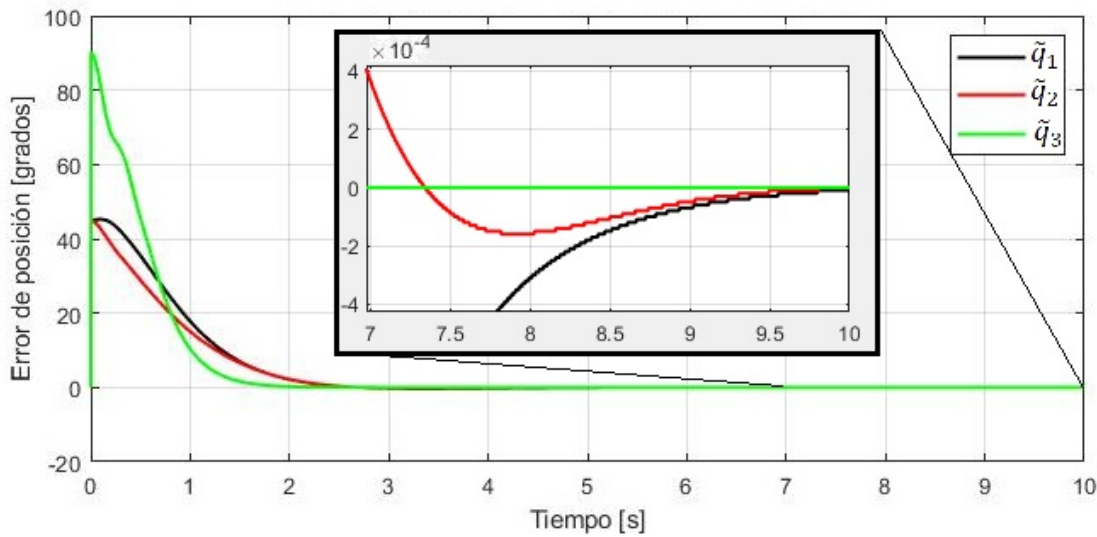


Figura 4.17: Errores de posición del control adaptable.

En la figura 4.18 se muestran las velocidades articulares. Se puede observar una convergencia asintótica. La velocidad articular $\dot{q}_3$ correspondiente al codo, presenta cambios más abruptos.

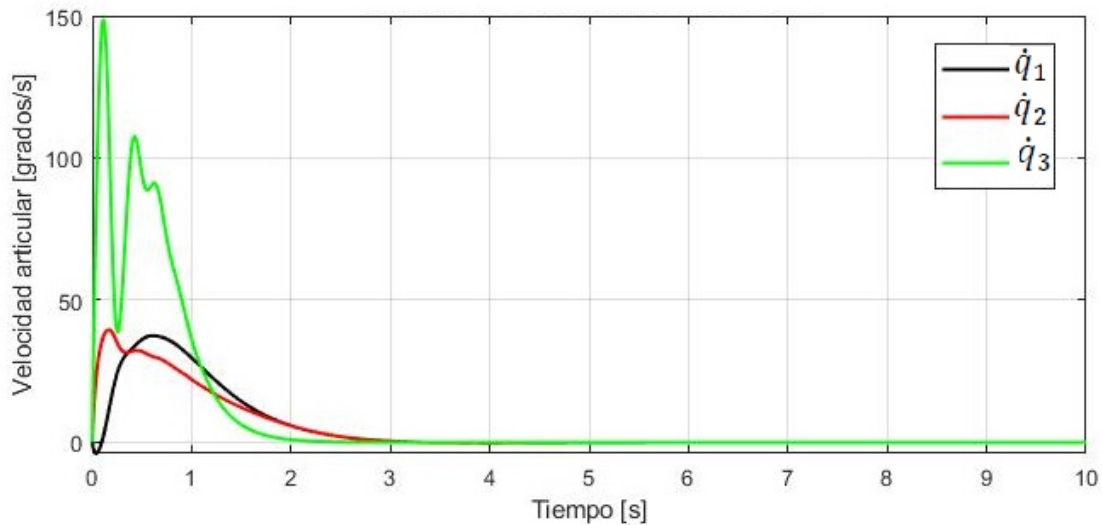


Figura 4.18: Velocidades articulares $\dot{q}$ del control adaptable.

En la figura 4.19 se puede ver el valor numérico que toman los parámetros estimados para el segundo y tercer eslabón, recordando que el primer eslabón no necesita estimación pues no se ve afectado por la gravedad. Se observa que el valor numérico converge a 1.702 y 0.1047 para $\hat{\theta}_2$ y $\hat{\theta}_3$ respectivamente.

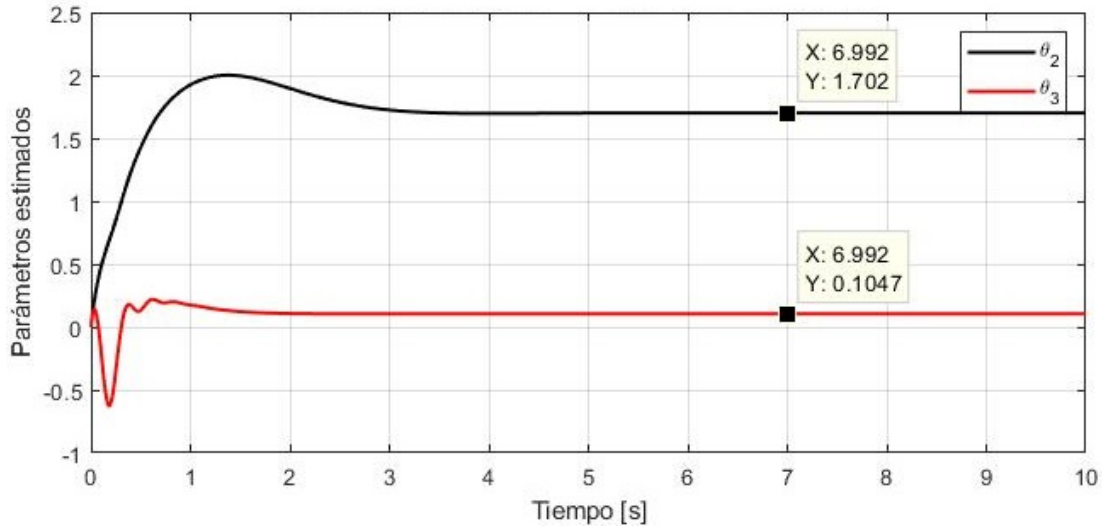


Figura 4.19: Valor numérico de parámetros estimados $\hat{\theta}$.

Por último, en la figura 4.20 se pueden observar que en los torques aplicados en cada articulación existen pequeñas oscilaciones en el transitorio, sin embargo se obtienen resultados similares a los anteriores experimentos en el estado estacionario, ya que compensa de forma eficiente al vector de pares de gravedad.

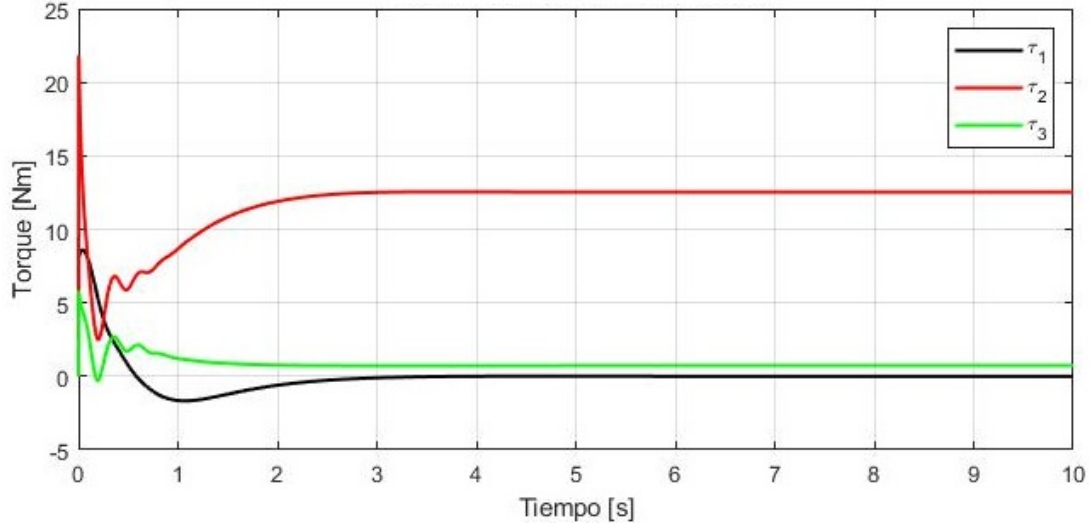


Figura 4.20: Par aplicado con control adaptable.

4.4. Comparación cualitativa de resultados

4.4.1. Recopilación de datos

En la tabla 4.2 se muestra una comparación de resultados numéricos y cualitativos de los distintos esquemas de control. Se resaltan en color verde las mejores características en comparación a los otros dos esquemas, en color gris características sobresalientes, en blanco las características que no representan un problema y son buenos resultado pero quedaron opacadas por las características de los otros algoritmos, y por ultimo, se resalta en color rojo aquellas características poco deseables.

Tipo de resultado		Control propuesto	Control adaptable	Control PD
Error mínimo	$\tilde{q}_1$	4.6×10^{-4} [grados]	-1×10^{-5} [grados]	-0.2072 [grados]
	$\tilde{q}_2$	1.45×10^{-3} [grados]	0[grados]	-4.563×10^{-2} [grados]
	$\tilde{q}_3$	4.8×10^{-4} [grados]	0[grados]	6.73×10^{-3} [grados]
Tiempo de asentamiento (errores menores al 2%)	t_{s1}	< 2.3 s	< 2.3 s	< 6.9 s
	t_{s2}	< 3.6 s	< 2.3 s	< 4.8 s
	t_{s3}	< 3 s	< 1.5 s	< 2.1 s
Oscilaciones nulas	$\tilde{q}_1$	✓	~	x
	$\tilde{q}_2$	✓	✓	x
	$\tilde{q}_3$	✓	✓	✓
Vibraciones nulas		✓	x	✓

Tabla 4.2: Comparación de resultados numéricos y cualitativos de algoritmos de control.

4.4.2. Índice de desempeño

Con ayuda de **MATLAB** se realiza el cómputo de la norma $\mathcal{L}_2$ como forma de medir el desempeño. Se utiliza la integral recursiva de Euler para estimar numéricamente la integral de la norma del error al cuadrado, puesto que no se cuenta con la estructura matemática de dicho error. En la figura 4.21 se observa una comparación cualitativa de los índices de desempeño del nuevo esquema de control de estructura hiperbólica (3.16) y el control PD+g.

Se puede ver claramente que la norma $\mathcal{L}_2$ de (3.16) tiene un menor valor numérico que la del control PD+g. Recordando que la norma $\mathcal{L}_2$ es inversamente proporcional al desempeño del controlador, se puede decir que el algoritmo de control propuesto presenta un mejor desempeño que el típico control PD+g.

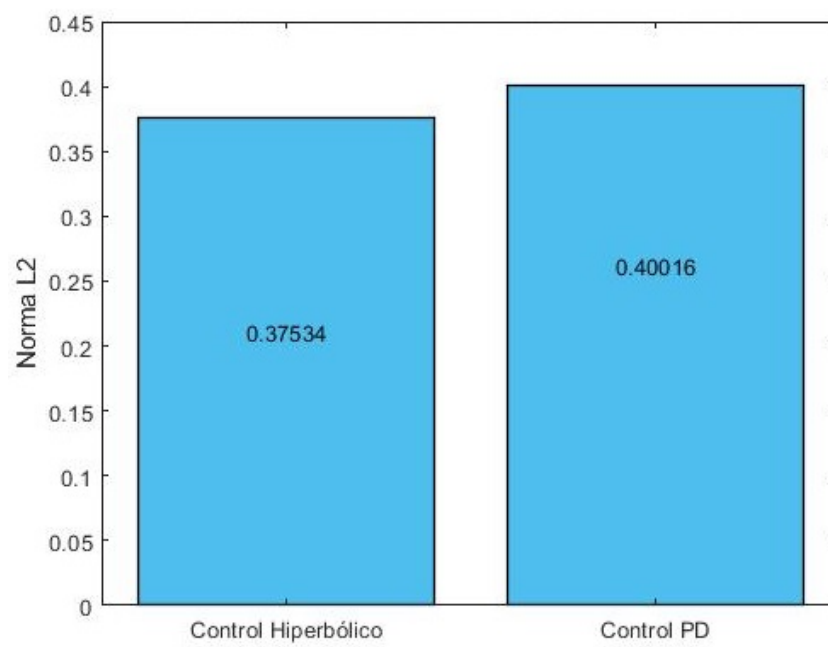


Figura 4.21: Comparación cualitativa de índice de desempeño mediante la norma $\mathcal{L}_2$.

Conclusiones

Durante el desarrollo de la presente tesis se ha evidenciado que el diseño de nuevos esquemas de control no necesariamente representa una tarea trivial, pues lleva consigo la comprensión de un vasto número de teoría sobre el control de robots manipuladores, tales como cinemática directa, cinemática diferencial, obtención de modelos dinámicos, preliminares matemáticos de álgebra lineal, teoría de estabilidad de Lyapunov, entre otros. Es de aquí que se resalta la importancia del estudio del arte del control de robots manipuladores como herramienta previa para atacar el problema de regulación con el diseño de nuevos algoritmos de control. Se ha expuesto también que la obtención de nuevos esquemas de control se ha vuelto una actividad de desarrollo científico importante debido a sus implicaciones en aplicaciones de automatización.

Se ha podido diseñar con vasto rigor científico un nuevo algoritmo de control de posición (regulador), el cual se considera competente, funcional y que representa una alternativa moderna ante reguladores típicos pero cada vez más anticuados, tal es el caso del control PD. Se ha empleado un sólido contenido científico y técnicas modernas de control para la construcción del nuevo algoritmo de control propuesto, lo cual ha permitido reducir la labor de diseño.

Se ha demostrado que el nuevo algoritmo de control cumple estabilidad y sobre todo estabilidad asintótica de forma global en el sentido de Lyapunov sobre el punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado formada por la dinámica del robot manipulador y el esquema de control. Esto permite su uso extendido para múltiples aplicaciones de control automático en diversas plataformas experimentales con robots de n grados de libertad. Si bien bastaba demostrar estabilidad asintótica del punto de equilibrio con el principio de invariancia de LaSalle, el uso de una función estricta de Lyapunov para la demostración de estabilidad asintótica permite que el escrito obtenga un mejor nivel de calidad y pueda aspirar a un mejor alcance ante la comunidad científica internacional.

Gracias a los resultados experimentales se pudieron rescatar condiciones para las cuales el algoritmo de control propuesto presenta un mejor desempeño, tal es el caso de la propuesta de α . Sin embargo, el algoritmo de control propuesto presentó un desempeño idóneo en las tres pruebas realizadas, respaldado por la teoría. Los errores de posición en el estado estacionario no superaron en ninguna prueba el 2 %, de hecho permanecían muy por debajo de este valor.

Hablando de sus propiedades cualitativas, las curvas de error se presentaron suaves y con un buen tiempo de asentamiento. Los primeros experimentos muestran pequeños picos en los errores de posición del primer y tercer eslabón, esto es fácilmente explicable con el efecto inercial que, puede decirse, pone a prueba al algoritmo de control propuesto frente a perturbaciones. Como en los experimentos I y II la posición inicial del tercer eslabón coincide con la posición deseada, el torque inicial aplicado es cero, al moverse el segundo eslabón, el tercer eslabón tiende a permanecer en su estado inicial, ocasionando un error de posición positivo. La pronta recuperación de dicho error de posición solo evidencia la eficacia de reacción del algoritmo propuesto frente a perturbaciones.

Bajo las mismas condiciones y ganancias de control proporcional y acción de control derivativa, el algoritmo de control propuesto resultó sobresaliente sobre el algoritmo PD. Aunque se ha logrado el objetivo de regulación con el algoritmo PD, se ha logrado de una forma menos eficiente que con el nuevo algoritmo de estructura hiperbólica propuesto. Se puede decir de manera segura y con fundamento, que el algoritmo de control propuesto presenta un mejor desempeño que el típico PD+g. Adicionando características como menor porcentaje de error y oscilaciones nulas en las mismas condiciones de experimentación del control PD+g, se puede aceptar al algoritmo propuesto como una alternativa viable a problemas de automatización. Si bien se esperaba un mejor desempeño en comparación al control PD y con un tiempo de asentamiento menor, los resultados son favorables, pues la convergencia al punto de equilibrio de las tres articulaciones es asintótica y se realizan de forma críticamente amortiguada.

La propuesta de ganancias de control proporcional y de acción control derivativa fueron idóneas para que en ningún momento los servomotores trabajasen en su zona de saturación. Se observó que a menor valor de α en el algoritmo propuesto, el desempeño disminuye, haciendo que los errores de posición sean más grandes; sin embargo, este no es un agravante, puesto que en ningún momento los errores superan los límites admisibles para ingeniería.

El diseño de la versión adaptable del algoritmo de control propuesto se ha realizado con éxito. A pesar de solo haber demostrado estabilidad del punto de equilibrio, los resultados experimentales muestran convergencia asintótica. La forma escalonada de las gráficas de error de la versión adaptable pone en evidencia vibraciones no deseables para diversas aplicaciones de automatización. Estas vibraciones pueden deberse al proceso de estimación de los parámetros de par de gravedad. Puede decirse que en esta ocasión resultó mejor tener una parametrización previa si es que se desean evitar esas vibraciones en el transitorio.

Lo que es verdaderamente sobresaliente del algoritmo de control en su versión adaptable es su estimación de parámetros, pues aún sin conocer el vector de pares de gravedad, fue posible obtener errores de posición casi nulos y los mejores tiempos de asentamiento. Este algoritmo de control es un buen estimador del par gravitacional en el estacionario, incluso se podrían aprovechar los valores numéricos del vector de parámetros estimados para un algoritmo no adaptable que requiera compensación de gravedad. Al igual que en su versión no adaptable, los torques solicitados no exceden los torques que pueden brindar los servomo-

tores, por lo que siempre se trabaja en la zona activa del servomotor. En comparación con el control PD, la versión adaptable no presenta oscilaciones ni un comportamiento subamortiguado; no obstante, las vibraciones que presenta son indeseables y restringen su aplicación.

De forma general, se puede afirmar que se cumplió el objetivo de control de posición, pues el algoritmo de control propuesto en todos sus experimentos, incluyendo su versión adaptable, presenta una convergencia asintótica al punto de equilibrio de la velocidad articular y el error de posición. Por lo anterior y debido a las cualidades observadas en los resultados, pude afirmarse que se resuelve con éxito el problema de regulación planteado en el cuerpo del presente escrito. De forma particular se cumplió cada uno de los objetivos propuestos. No se cumplieron en un tiempo estimado debido a problemáticas exteriores y sanitarias, pero sí se cubrieron todos y cada uno de los objetivos particulares de manera formal. Se espera una publicación de los resultados obtenidos en un congreso arbitrado o una revista indexada.

Bibliografía

- [1] R. Kelly y V. Santibañez. Control de Movimiento de Robots Manipuladores, Pearson, Prentice Hall, 2003.
- [2] Slotine, J.J. y Li, W. Applied Nonlinear Control, Englewood Cliffs, Pentice Hall, 1991.
- [3] Chi-Tsong C. Linear Systems Theory and Design. Third Edition. Oxford University Press, 1999.
- [4] Kumpati. S. Narentra and Anuradha M. Annaswamy. Stable Adaptive Systems. Prentice Hall, 1989.
- [5] Muñoz, E. Control no lineal de un Robot Manipuador (Magister). Universidad del Cauca, 2009.
- [6] Sánchez Garcia, B., Rodríguez Hernández, H., Reyes Cortés, F., Feliz Beltrán, O., y B. M., A., Diseño e implementación de reguladores saturados con ganancias variables para robots manipuladores, Asociación Mexicana De Mecatrónica, 113-130, 2020.
- [7] Aguiñaga Ruiz, E., Control de Movimiento de Robots Manipuladores con Entradas Aco-tadas (Maestría). Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C., 2006.
- [8] Torres, S., y Méndez, J., Seguimiento de Trayectorias en Robots Manipuladores: Revisión de Soluciones y Nuevas Propuestas. Revista Iberoamericana De Automática E Informática Industrial, 6(4), 80-92., 2009.
- [9] Rascón, R., Álvarez, J. y Aguilar L.T., Control Robusto de Posición para un Sistema Mecánico Subactuado con Fricción y Holgura Elástica. Revista Iberoamericana De Automá-tica E Informática Industrial, 11, 275-284., 2014.
- [10] Rubio, R.F., Ortega, G. M. y Gordillo, F., Control de Posición e Inercial de Plataforma de Dos Grados de Libertad. Revista Iberoamericana De Automática E Informática Indus-trial, 7(4), 65-73., 2010.
- [11] Huerta, H., Osorio, R. y Vázquez, N., Control no Lineal Robusto de una Máquina para Fabricación de Películas Delgadas. Revista Iberoamericana De Automática E Informática Industrial, 14, 246-255., 2017.
- [12] Jean JacQues E., Slotine y Weiping L. Applied Nonlinear Control. Prentice Hall, 1991.
- [13] Vidyasagar, M. Nonlinear Systems. Prentice Hall, 1993.
- [14] Shankar S. Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control. Springer Verlag, 1999.
- [15] Frigyes Csáki. Modern Control Theories. Akadémiai, Kiadó, Budapest. 1972.
- [16] Wassim M. H. y VijaySekahr C. Nonlinear Dynamical Systems and Control. Princeton University Press, 2008.
- [17] Gordillo, F., Estabilidad de Sistemas no Lineales basada en la Teoría de Lyapunov. Re-

vista Iberoamericana De Automática E Informática Industrial, 6(2), 5-16., 2009.

[18] Reyes Cortés, F. Robótica: Control de Robots Manipuladores. Grupo Editorial Alfaomega.2011.

[19] Reyes Cortés, F. Matlab aplicado a robótica y control. Grupo Editorial Alfaomega.2011.

[20] Mark W. Spong, Seth Hutchinson y M. Vidyasagar. Robot modeling and control. John Wiley and Sons, Inc. 2006.

[21] Martínez, P., Gonzalez, V. J. y León H., Simulación del Modelo Matemático de la Cinemática Diferencial de Robots Seriales Planos Configuración RRR y RPR.Revista de Simulación y Laboratorio, 6(20), 1-8., 2019.

[22]Mark W. Spong, Seth Hutchinson y M. Vidyasagar. “Robot dynamics and control”. John Wiley and Sons, Inc. 2004.