Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias físico-matemáticas

licenciatura en matemáticas

EL OPERADOR ADJUNTO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

RICARDO GÓMEZ CORTÉS

DIRECTORES DE TESIS:

M.C. GUADALUPE RAGGI CÁRDENAS

DR. JUAN ALBERTO ESCAMILLA REYNA

PUEBLA,PUE., 4 de abril de 2022

Dedicado a...

mis padres, Ma. de los Ángeles y Julio, quienes con su paciencia y esfuerzo me han permitido alcanzar una meta más, gracias por inculcar en mí la disciplina y perseverancia en todo lo que realizo.

Además a Jesús, mi hermano, quien junto con el resto de mi familia y amigos me brindaron apoyo en general para terminar un logro más.

Por último a Abi...

Agradecimientos

En primer instancia a mis asesores de tesis al Dr. Juan Albero Escamilla Reyna y a la M.C. Guadalupe Raggi Cárdenas, por el tiempo dedicado y los conocimientos brindados para hacer posible este trabajo.
Además a todos los docentes que me acompañaron durante este proceso y a mis amigos Missael, Cristian y Julio Romero Ibañez, con quienes compartí conocimiento y dilucidamos sobre este trabajo.

Introducción

Los conceptos de ecuación adjunta, matriz transpuesta y operador adjunto emergen de manera natural en el estudio de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias y de formas cuadráticas [5][10], aunque no necesariamente con esos nombres, y como instrumentos para el estudio de esos, no como un área de investigación propia. Todavía, Fredholm, en el estudio de las soluciones de ecuaciones integrales, define el concepto de operador adjunto ligado a ciertos espacios de funciones. Fueron Banach y Schauder quienes introducen el concepto de operador adjunto en el marco abstracto de los espacios normados. También, de manera independiente, Hildebrant definió el concepto de operador adjunto [17][6].

Von Newmann y Stone inician el estudio sistemático de operadores adjuntos no acotados [3]. Para los problemas teóricos y de aplicaciones fue necesario ampliar el marco abstracto a otro tipo de espacios y a operadores lineales no necesariamente acotados. Actualmente es una área de investigación independiente, fructífera y con muchas aplicaciones tanto teóricas como prácticas [8][16].

Para el estudio del concepto de operador adjunto, desarrollamos esta tesis de la siguiente manera:

Primer capítulo.

Se tiene un repaso de algunos conceptos y resultados básicos de Álgebra Lineal, Espacios métricos, Espacios normados y Espacios con producto interno que usaremos en los capítulos posteriores y que nos facilitarán el desarrollo de este trabajo.

Segundo capítulo.

Repasamos algunos conceptos fundamentales de matrices que nos permiten entender el concepto de matriz adjunta, dicho concepto tiene una propiedad fundamental que nos será de utilidad para formular la alternativa de Fredholm. Además, análogamente a las matrices finitas intentar generalizar estos conceptos desde la perspectiva de las matrices infinitas y mostrando la necesidad de formular dichos resultados en espacios más generales, de lo cual nos ocuparemos en el siguiente capítulo.

Tercer capítulo.

Finalmente, trabajamos el concepto de operador adjunto en espacios de Hilbert, tomando como guía el segundo capítulo de esta tesis.

Índice general

El Operador Adjunto

Ricardo Gómez Cortés

4 de abril de 2022

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos algunas definiciones y teoremas básicos de Álgebra Lineal, revisaremos algunos conceptos y resultados que necesitaremos en los siguientes capítulos de tal forma que la tesis tenga una lectura sencilla.

1.1. Espacios vectoriales

Definición 1.1. *Un espacio vectorial V sobre un campo K es un conjunto no vacío, en el que están definidas dos operaciones llamadas adición y multiplicación por escalares, respectivamente, tales que para cualesquiera $x, y \in V$, $x + y \in V$, y para cada $k \in K$ y cada $x \in V$, $kx \in V$, con las siguientes propiedades:*

1. *(Ley conmutativa) Para todo $x, y \in V$, $x + y = y + x$.*

2. *(Ley asociativa) Para todo $x, y, z \in V$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.*

3. *(Existencia de elemento cero) Existe un elemento en V, denotado con el símbolo 0, tal que para todo $x \in V$, $x + 0 = x$.*

4. *(Existencia de elementos opuestos) Para cada $x \in V$, existe un $y \in V$ tal que $x + y = 0$.*

5. *(Existencia de elemento idéntico) Para cada* $x \in V$*,* $1x = x$*.*

6. *(Ley asociativa) Para cada* $k, l \in K$ *y cada* $x \in V$*,* $(kl)x = k(lx)$*.*

7. *(Ley distributiva para la adición en* V*) Para cada* $k \in K$ *y cada* $x, y \in V$*,* $k(x + y) = kx + ky$*.*

8. *(Ley distributiva para la adición en* K*) Para cada* $k, l \in K$ *y cada* $x \in V$*,* $(k + l)x = kx + lx$*.*

Los elementos del campo K *se llaman escalares y los elementos del espacio vectorial* V *vectores. En lo que sigue en esta tesis,* K *denotará el campo* $\mathbb{C}$ *de los números complejos o el campo* $\mathbb{R}$ *de los números reales.*

Observación 1.1. La unicidad del elemento cero y de elementos opuestos se deduce fácilmente de la definición 1.1.

Definición 1.2. *Sean* $m, n \in \mathbb{N}$*. Una matriz* A *de orden* $m \times n$ *con valores de un campo* K *es un arreglo rectangular de la forma*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

donde cada $a_{ij} \in K$ *se llama entrada. Además* $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ *es el* i*-ésimo renglón de la matriz* A *y se considera un vector renglón en* K^n*, mientras que* $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ *es la* j*-ésima columna de la matriz* A *y se considera a menudo como un vector columna en* K^m*. Algunas veces escribiremos en forma abreviada la matriz como* $A = (a_{ij})$*. Además, si el número de renglones es igual al numero de columnas de una matriz, ésta se llama matriz cuadrada.*

Ejemplo 1.1. El conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ con entradas de un campo K es un espacio vectorial, denotado por $M_{m\times n}(K)$, con las siguientes operaciones: para cada $A, B \in M_{m\times n}(K)$ y $c \in K$,

$$A + B = (a + b)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$$

y

$$cA = c(a_{ij}) = (ca_{ij})$$

para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

Ejemplo 1.2. Sea

$$\mathbb{C}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}\}.$$

Sean $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$, tenemos que $u = v$ si y sólo si $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$. Además, este conjunto es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con las siguientes operaciones: si $u = (a_1, \ldots, a_n), v = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ y $c \in \mathbb{C}$, entonces

$$u + v = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

y

$$cu = (ca_1, \ldots, ca_n).$$

Los vectores en $\mathbb{C}^n$ también se pueden escribir como vectores columna

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.3. Sea $K^{\mathbb{N}} = \{\{x_n\} \mid \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, x_n \in K\}$. Con las operaciones usuales de suma de sucesiones y la multiplicación de una sucesión por un escalar $K^{\mathbb{N}}$ es un espacio vectorial.

El siguiente ejemplo podemos considerarlo como una generalización del ejemplo 1.2 y debemos prestarle atención especial pues tendrá un papel importante en el desarrollo de esta tesis.

Ejemplo 1.4. Sea

$$\ell^2 = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \text{para cada}\, n \in \mathbb{N},\, x_n \in \mathbb{C}\,\text{y} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

Usaremos la notación $\{x_n\}$ ó $(x_1, x_2, ...)$ para denotar una sucesión cuyo n-ésimo termino es x_n.
Además, para $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in \ell^2$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ definimos

$$x + y = \{x_n + y_n\}$$

y

$$\lambda x = \{\lambda x_n\}.$$

Con estas operaciones ver ([19] ejemplo 2.1.3), ℓ^2 es un espacio vectorial.

Ejemplo 1.5. Sea $c = \{\{x_n\} \in K^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to\infty} x_n \text{ existe}\}$. Con las operaciones usuales de suma de sucesiones y la multiplicación de una sucesión por un escalar, c es un espacio vectorial.

Ejemplo 1.6. Sea $c_o = \{\{x_n\} \in c \mid \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Con las operaciones usuales de suma de sucesiones y la multiplicación de una sucesión por un escalar, c_0 es un espacio vectorial.

Ejemplo 1.7. Sea $c_{00} = \{\{x_n\} \in c \mid \text{ existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que para cada } n \geq k, x_n = 0\}$. Con las operaciones usuales de suma de sucesiones y la multiplicación de una sucesión por un escalar, c_{00} es un espacio vectorial.

Ejemplo 1.8. Sea X un conjunto no vacío. Sea $K^X = \{f : X \to K \mid f \text{ es función}\}$. Con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación de una función por un escalar, K^X es un espacio vectorial.

Ejemplo 1.9. Sea $\mathcal{B}(X, K) = \{f \in K^X \mid f \text{ es acotada en X}\}$. Con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación de una función por un escalar, $\mathcal{B}(X, K)$ es un espacio vectorial.

Ejemplo 1.10. Sea $\mathcal{B}([a, b], K) = \{f \in K^{[a,b]} \mid f \text{ es acotada en [a,b]}\}$. Con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación de una función por un escalar, $\mathcal{B}([a, b], K)$ es un espacio vectorial.

Definición 1.3. *Sea V un espacio vectorial dado y sea $W \subseteq V$ no vacío. Si bajo las operaciones de V, W forma un espacio vectorial, entonces W es un subespacio vectorial de V.*

Observación 1.2. Para ver que W es un subespacio vectorial de V basta demostrar que W es no vacío y, si $w_1, w_2 \in W$ y $k_1, k_2 \in K$, entonces $k_1 w_1 + k_2 w_2 \in W$.

Definición 1.4. *Sea V un espacio vectorial y $S \subseteq V$ no vacío. Un vector $v \in V$ es una combinación lineal de vectores de S si existen $u_1, \ldots, u_n \in S$ y $k_1, \ldots, k_n \in K$ tales que*

$$v = k_1 u_1 + \ldots + k_n u_n.$$

En este caso decimos que v es una combinación lineal de $u_1, \ldots, u_n$.

Definición 1.5. *Sea $S \subseteq V$ no vacío del espacio vectorial V. El generado de S, denotado como $gen(S)$, es el conjunto de todas combinaciones lineales de vectores de S:*

$$gen(S) = \{k_1 u_1 + \ldots + k_n u_n \mid k_i \in K, u_i \in S\}.$$

Teorema 1.1. *El generado de cualquier subconjunto no vacío S de un espacio vectorial V, es un subespacio de V. Más aún, cualquier subespacio de V que contenga a S debe contener al $gen(S)$.*

Demostración. Si $x, y \in gen(S)$, entonces existen $k_1, \ldots, k_n, l_1, \ldots, l_m \in K$ y $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m \in S$ tales que

$$x = k_1 u_1 + \ldots + k_n u_n$$

y

$$y = l_1 v_1 + \ldots + l_m v_m.$$

Luego para $\alpha, \beta \in K$,

$$\alpha x + \beta y = \alpha(k_1 u_1 + \ldots + k_n u_n) + \beta(l_1 v_1 + \ldots + l_m v_m)$$

$$= (\alpha k_1) u_1 + \ldots + (\alpha k_n) u_n + (\beta l_1) v_1 + \ldots + (\beta l_m) v_m.$$

Luego $\alpha x + \beta y \in gen(S)$. Por lo tanto $gen(S)$ es un subespacio de V.
Ahora, sea W un subespacio arbitrario de V tal que contiene a S. Sea $w \in gen(S)$, entonces existen $k_1, \ldots, k_t \in K$ y $w_1, \ldots, w_t \in S$ tales que

$$w = k_1 w_1 + \ldots + k_t w_t.$$

Ya que $S \subseteq W$, tenemos que $w \in W$. Se sigue que $gen(S) \subseteq W$.

□

Definición 1.6. *Sea $S \subseteq V$. S genera al espacio vectorial V si $gen(S) = V$. En este caso decimos que los vectores de S generan a V.*

Definición 1.7. *Un conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ es linealmente dependiente, si existen $k_1, \ldots, k_n \in K$, no todos cero, tales que*

$$k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n = 0.$$

En caso contrario se dice que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente.

Definición 1.8. *Un subconjunto $S \subseteq V$ es linealmente dependiente si existe $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq S$ linealmente dependiente; en caso contrario, S es linealmente independiente.*

Teorema 1.2. *Sea V un espacio vectorial, y sean $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$. Si S_1 es linealmente dependiente, entonces S_2 es linealmente dependiente.*

Demostración. Como S_1 es linealmente dependiente, existe $\{u_1, \ldots, u_t\} \subseteq S_1$ y $k_1, \ldots, k_t \in K$ no todos cero tales que

$$k_1 u_1 + \ldots + k_t u_t = 0.$$

Como $S_1 \subseteq S_2$, se sigue que $u_1, \ldots, u_t \in S_2$ y $k_1, \ldots, k_t \in K$ no todos cero tales que $k_1 u_1 + \ldots + k_t u_t = 0$, es decir, S_2 es linealmente dependiente.

□

Corolario 1.1. *Sea V un espacio vectorial, y sean $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$. Si S_2 es linealmente independiente, entonces S_1 es linealmente independiente.*

Demostración. Supongamos que S_1 es linealmente dependiente, entonces por el Teorema 1.2, S_2 es linealmente dependiente, pero esto es una contradicción pues S_2 es linealmente independiente.

$\square$

Teorema 1.3. *Sean V un espacio vectorial y $S \subseteq V$ linealmente independiente. Si $v \in V$ es tal que $v \notin S$, entonces $S \cup \{v\}$ es linealmente dependiente si y sólo si $v \in gen(S)$.*

Demostración. Supongamos que $S \cup \{v\}$ es linealmente dependiente, entonces existe $\{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq S \cup \{v\}$ y $k_1, \ldots, k_n \in K$ no todos cero tales que $k_1u_1 + \ldots + k_nu_n = 0$. Tenemos que si $u_1, \ldots, u_n \in S$, como S es linealmente independiente $k_1 = \ldots = k_n = 0$, contradiciendo que $k_1, \ldots, k_n$ son no todos cero. Así, uno de los u_i es v, digamos $u_1 = v$ y $k_1 \neq 0$. Luego de $k_1v + \ldots + k_nu_n = 0$, se sigue que

$$v = k_1^{-1}(-k_2u_2 - \ldots - k_nu_n) = -(k_1^{-1}k_2)u_2 - \ldots - (k_1^{-1}k_n)u_n.$$

Tenemos que v es una combinación lineal de $u_2, ..., u_n \in S$. Por lo tanto, $v \in gen(S)$.

Ahora, supongamos que $v \in gen(S)$. Entonces existen $v_1, \ldots, v_m \in S$ y $k_1, \ldots, k_m \in K$ tales que $v = k_1v_1 + \ldots + k_mv_m$. Así,

$$0 = k_1v_1 + \ldots + k_mv_m + (-1)v.$$

Ya que $v_i \neq v$ para cada $i = 1, \ldots, m$ y los coeficientes en esta combinación lineal no todos son cero, por lo tanto $\{v_1, \ldots, v_m, v\}$ es linealmente dependiente. Así, $\{v_1, \ldots, v_m, v\} \subseteq S \cup \{v\}$, entonces por el Teorema 1.2, $S \cup \{v\}$ es linealmente dependiente.

$\square$

Definición 1.9. *Una base β para un espacio vectorial V es un subconjunto linealmente independiente de V que genera a V. Si β es una base para V, también decimos que los vectores de β forman una base para V.*

En [18] se demuestra que todo espacio vectorial diferente del trivial tiene una base. Además, tenemos que considerar que las bases en un espacio vectorial no necesariamente son finitas. En esta tesis estamos interesados principalmente en espacios vectoriales que tienen bases no finitas.

Teorema 1.4. *Sea V un espacio vectorial. Decimos que $\beta = \{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq V$ es una base para V si y sólo si cada $v \in V$ se expresa de manera única como una combinación lineal de los vectores de β, esto es, se representa por*

$$v = k_1 u_1 + \ldots + k_n u_n$$

para los escalares únicos $k_1, \ldots, k_n$.

Demostración. Supongamos que β es una base para V. Sea $v \in V$, entonces $v \in gen(\beta) = V$. Entonces v es una combinación lineal de los vectores de β. Supongamos que

$$v = k_1 u_1 + \ldots + k_n u_n$$

y

$$v = l_1 u_1 + \ldots + l_n u_n$$

son dos representaciones de v. Se sigue que

$$0 = (k_1 - l_1)u_1 + \ldots + (k_n - l_n)u_n.$$

Ya que β es linealmente independiente, se tiene que $k_1 - l_1 = \ldots = k_n - l_n = 0$. Luego, $k_1 = l_1, \ldots, k_n = l_n$. Por lo tanto v tiene una representación única como combinación de los vectores de β.
Ahora, supongamos que cada $v \in V$ se expresa de forma única como combinación de los vectores de β. Por esto, se sigue que $gen(\beta) = V$. Resta demostrar que β es linealmente independiente, sean $k_1, \ldots, k_n \in K$ tales que

$$k_1 u_1 + \ldots + k_n u_n = 0,$$

pero el vector 0 también lo podemos expresar como

$$0 = 0u_1 + \ldots + 0u_n.$$

Entonces ya que la representación de los vectores de V como combinación lineal de los de β es única, se tiene que $k_1 = \ldots = k_n = 0$, es decir, β es linealmente independiente. Por lo tanto β es una base para V.

$\square$

Teorema 1.5. *Si un espacio vectorial V es generado por un conjunto finito S, entonces algún subconjunto de S es una base para V. Por lo tanto V tiene una base finita.*

Demostración. Supongamos que S tiene un vector diferente de cero, digamos u_1, entonces $\{u_1\}$ es linealmente independiente. Elegimos los vectores $u_2, \ldots, u_k \in S$ tales que

$$\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$$

sea linealmente independiente y si adjuntamos a β cualquier vector en S que no este en β obtengamos un conjunto linealmente dependiente. Afirmamos que β es una base para V. Por construcción β es linealmente independiente, resta demostrar que β genera a V. Para esto, demostremos que $S \subseteq gen(\beta)$. Sea $v \in S$. Si $v \in \beta$, entonces $v \in gen(\beta)$. Si $v \notin \beta$, la construcción anterior muestra que $\beta \cup \{v\}$ es linealmente dependiente, entonces por el Teorema 1.3, $v \in gen(\beta)$. Así, $S \subseteq gen(\beta)$, luego por el Teorema 1.1, $gen(S)$ es subespacio del $gen(\beta)$, entonces $gen(\beta) = V$, es decir, β genera V. Por lo tanto β es base para V.

$\square$

Teorema 1.6. *Sea V un espacio vectorial generado por un conjunto G que contiene exactamente n vectores, y sea L un subconjunto linealmente independiente de V que contiene exactamente m vectores, entonces $m \leq n$ y existe un subconjunto H de G que contiene exactamente $n - m$ vectores tales que $L \cup H$ genera a V.*

Demostración. La demostración es por inducción matemática sobre m. Sea $m = 0$; en este caso $L = \emptyset$, y tomamos $H = G$ para obtener el resultado.

Ahora, supongamos que el teorema es verdadero para algún entero $m > 0$. Demostraremos que el teorema es verdadero para $m+1$. Sea $L = \{v_1, \ldots, v_{m+1}\}$ un subconjunto linealmente independiente de V que consiste de $m+1$ vectores. Por el Corolario 1.1, $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es linealmente independiente, aplicando la hipótesis de inducción, $m \leq n$ y existe un subconjunto $\{u_1, \ldots, u_{n-m}\}$ de G tal que

$$\{v_1, \ldots, v_m\} \cup \{u_1, \ldots, u_{n-m}\}$$

genera a V. Entonces como $v_{m+1} \in V$, existen $k_1, \ldots, k_m, l_1, \ldots, l_{n-m} \in K$ tales que

$$k_1 v_1 + \ldots + k_m v_m + l_1 u_1 + \ldots + l_{n-m} u_{n-m} = v_{m+1}.$$

Notemos que algún l_i, digamos l_1 es distinto de cero, pues en caso contrario

$$v_{m+1} = k_1 v_1 + \ldots + k_m v_m.$$

Luego

$$k_1 v_1 + \ldots + k_m v_m + (-1) v_{m+1} = 0,$$

es decir, L es linealmente dependiente, pero esto contradice que L es linealmente independiente. Entonces

$$u_1 = (-l_1^{-1} k_1) v_1 + \ldots + (-l_1^{-1} k_m) v_m +$$

$$+ (l_1^{-1}) v_{m+1} + (-l_1^{-1} l_2) u_2 + \ldots + (-l_1^{-1} l_{n-m}) u_{n-m}.$$

Sea $H = \{u_2, \ldots, u_{n-m}\}$. Entonces $u_1 \in gen(L \cup H)$. Como $v_1, \ldots, v_m, u_2, \ldots, u_{n-m} \in gen(L \cup H)$, se sigue que

$$\{v_1, \ldots, v_m, u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}\} \subseteq gen(L \cup H).$$

Ya que $\{v_1, \ldots, v_m, u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}\}$ genera a V, entonces por el Teorema 1.1, $gen(L \cup H) = V$. Ya que H es un subconjunto de G que contiene $(n-m)-1 = n-(m+1)$ vectores, el teorema es verdadero para $m+1$. Esto completa la inducción.

$\square$

Corolario 1.2. *Sea V un espacio vectorial que tiene una base finita, entonces toda base de V contiene el mismo número de elementos.*

Demostración. Supongamos que β es una base finita para V que contiene exactamente n vectores y sea γ cualquier otra base para V. Si γ contiene más de n vectores, entonces podemos seleccionar un subconjunto S de γ que contiene exactamente $n+1$ vectores. Ya que S es linealmente independiente y β genera a V, entonces por el Teorema 1.6 $n+1 \leq n$, pero esto es una contradicción. Entonces γ es finito y el número m de vectores en γ satisface que $m \leq n$. Utilizando un argumento similar, se obtiene que $n \leq m$. Por lo tanto $n = m$.

$\square$

El Corolario 1.2 se demuestra en [18] para espacios vectoriales arbitrarios, es decir, dado un espacio vectorial V, entonces cualesquiera dos bases para V tienen la misma cardinalidad.

Definición 1.10. *Un espacio vectorial es de dimensión finita si tiene una base finita. El número de vectores en cada base para V se llama dimensión de V y se denota por* $\dim(V)$. *Un espacio vectorial que no es de dimensión finita es de dimensión infinita.*

Corolario 1.3. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n.*

1. *Cualquier conjunto finito que genera a V que contenga exactamente n vectores es una base para V.*

2. *Cualquier subconjunto linealmente independiente de V que contiene exactamente n vectores es una base para V.*

3. *Cada subconjunto linealmente independiente de V puede ser extendido a una base para V.*

Demostración. Como V es de dimensión n, tenemos que V tiene una base β con n vectores.

1. Sea G un conjunto finito que genera a V que contenga exactamente n vectores. Por el Teorema 1.5, algún subconjunto H de G es una base para V. El Corolario 1.2, implica que H contiene exactamente n vectores. Ya que G contiene exactamente n vectores, se sigue que $H = G$, así que G es base para V.

2. Sea L un subconjunto linealmente independiente de V que contiene exactamente n vectores. Resta demostrar que L genera a V. Así, β genera a V y L es un subconjunto linealmente independiente de V, entonces por el Teorema 1.6, tenemos que existe un subconjunto H de β con $n - n = 0$ vectores tales que $L \cup H$ genera a V. Entonces $H = \emptyset$ y $L \cup H = L$ genera a V. Se tiene que L genera a V.

3. Sea L un subconjunto linealmente independiente de V que contiene m vectores, además, como β genera a V, entonces por el Teorema 1.6, existe un subconjunto H de β con exactamente $n - m$ vectores tales que $L \cup H$ genera a V. Así, $L \cup H$ contiene al menos n vectores, entonces por 1. tenemos que $L \cup H$ es una base para V.

□

Observación 1.3. Del Corolario 1.3, vemos que una base β de un espacio vectorial V es un conjunto máximo linealmente independiente, es decir, β es un conjunto linealmente independiente y cualquier subconjunto de V que contenga propiamente a β es linealmente dependiente.

Teorema 1.7. *Sea W un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita V. Entonces W es de dimensión finita y $\dim(W) \leq \dim(V)$. Más aún, si $\dim(W) = \dim(V)$, entonces $V = W$.*

Demostración. Sea $\dim(V) = n$. Si $W = \{0\}$, entonces W es de dimensión finita y $\dim(W) = 0 \leq n$. De otra manera, W contiene un vector distinto de cero digamos x_1; así, $\{x_1\}$ es un conjunto linealmente independiente. Continuando con este proceso, encontramos $x_1, \ldots, x_k \in W$ tales que $\{x_1, \ldots, x_k\}$

es linealmente independiente, donde $k \leq n = \dim(V)$ y para cada $w \in W$ tal que $w \notin \{x_1, \ldots, x_k\}$, el conjunto $\{x_1, \ldots, x_k\} \cup \{w\}$ es linealmente dependiente. Luego $\{x_1, \ldots, x_k\}$ es una base de W. Entonces W tiene una base finita que contiene no más de n elementos; esto es, $\dim(W) = k \leq n$.
Si $\dim(W) = n = \dim(V)$, entonces cualquier base β para W consiste de exactamente n vectores. Por el Corolario 1.3, β es también una base para V; así $V = gen(\beta) = W$.

□

Corolario 1.4. *Si W es un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita, entonces cualquier base para W se puede extender a una base para V.*

Demostración. Sea S una base para W. Ya que S es un subconjunto linealmente independiente de V, por el Corolario 1.3, S puede ser extendido a una base para V.

□

1.2. Transformaciones lineales

En la presente sección, hablaremos de las transformaciones lineales, las cuales son funciones entre espacios vectoriales, que no alteran a las combinaciones lineales. Es decir, las transformaciones lineales conservan las operaciones estructurales en un espacio vectorial y esta es la razón de su importancia.

Definición 1.11. *Sean V y W espacios vectoriales sobre K. Llamamos una función $T : V \longrightarrow W$ un operador lineal o transformación lineal de V a W si para todo $v_1, v_2 \in V$ y $k \in K$, se cumple que*

1. $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$
2. $T(cv_1) = cT(v_1)$.

Definición 1.12. *Sean V y W espacios vectoriales, y sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Definimos el kernel de T denotado por* $\ker(T)$ *como*

$$\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}.$$

Definimos la imagen de T denotada por $\operatorname{Im} T$ *como*

$$\operatorname{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}.$$

Teorema 1.8. *Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces* $\ker(T)$ *y* $\operatorname{Im}(T)$ *son subespacios de V y W, respectivamente.*

Demostración. Sean $v_1, v_2 \in \ker(T)$ y $\alpha, \beta \in K$, como $T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$, luego $\alpha v_1 + \beta v_2 \in \ker(T)$. Por lo tanto, $\ker(T)$ es un subespacio de V. Ahora, sean $w_1, w_2 \in \operatorname{Im}(T)$ y $\alpha, \beta \in K$, entonces existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $T(v_1) = w_1$ y $T(v_2) = w_2$, luego $\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) = T(\alpha v_1 + \beta v_2) \in \operatorname{Im}(T)$. Por lo tanto, $\operatorname{Im}(T)$ es un subespacio de W.

□

Teorema 1.9. *Sean V y W espacios vectoriales, y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Si $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base para V, entonces* $\operatorname{Im}(T) = gen(T(\beta)) = gen(\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\})$.

Demostración. Tenemos que $T(v_i) \in \operatorname{Im}(T)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Ya que $\operatorname{Im}(T)$ es un subespacio de W, entonces por el Teorema 1.1,

$$gen(\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}) \subseteq \operatorname{Im}(T).$$

Ahora, sea $w \in \operatorname{Im}(T)$, luego existe un $v \in V$ tal que $w = T(v)$. Como β es una base para V, tenemos que existen $k_1, \ldots, k_n \in K$ tales que

$$v = k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n.$$

Además como T es lineal, entonces

$$w = T(v) = k_1 T(v_1) + \ldots + k_n T(v_n).$$

Por lo tanto, $w \in gen(T(\beta))$.

$\square$

Definición 1.13. *Sean V y W espacios vectoriales, y sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Si* $\ker(T)$ *y* $\mathrm{Im}(T)$ *son de dimensión finita, entonces definimos la nulidad de T, denotado por* $\mathrm{nul}(T)$ *como*

$$\mathrm{nul}(T) = \dim(\ker(T))$$

y el rango de T, denotado por $\mathrm{rang}(T)$ *como*

$$\mathrm{rang}(T) = \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

Teorema 1.10. *Sean V y W espacios vectoriales, y sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Si V es de dimensión finita, entonces*

$$\mathrm{nul}(T) + \mathrm{rang}(T) = \dim(V).$$

Demostración. Supongamos que $\dim(V) = n$, $\dim(\ker(T)) = t$ y sea $\{v_1, \ldots, v_t\}$ una base para $\ker(T)$. Por el Corolario 1.4, podemos extender $\{v_1, \ldots, v_t\}$ a una base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ para V. Afirmamos que $S = \{T(v_{t+1}), \ldots, T(v_n)\}$ es una base para $\mathrm{Im}(T)$. Primero demostremos que S genera $\mathrm{Im}(T)$. Por el Teorema 1.9 y como para cada $1 \leq i \leq t$, $T(v_i) = 0$, tenemos que

$$\mathrm{Im}(T) = gen(\{T(v_{t+1}), \ldots, T(v_n)\}) = gen(S).$$

Ahora, demostremos que S es linealmente independiente. Sean $b_{t+1}, \ldots, b_n \in K$ tales que

$$\sum_{i=t+1}^{n} b_i T(v_i) = 0.$$

Como T es lineal, se sigue que

$$T\left(\sum_{i=t+1}^{n} b_i v_i\right) = 0.$$

Así
$$\sum_{i=t+1}^{n} b_i v_i \in \ker(T).$$
Entonces existen $c_1, \ldots, c_t \in K$ tales que
$$\sum_{i=t+1}^{n} b_i v_i = \sum_{i=1}^{t} c_i v_i.$$
Luego
$$\sum_{i=1}^{t} (-c_i) v_i + \sum_{i=t+1}^{n} b_i v_i = 0.$$
Ya que β es una base para V, $b_i = 0$ para toda $i = t+1, \ldots, n$. Entonces $\operatorname{rang}(T) = n - t$.

□

Teorema 1.11. *Sean V y W espacios vectoriales sobre K, y supongamos que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base para V. Para $w_1, \ldots, w_n \in W$, existe exactamente una transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ tal que $T(v_i) = w_i$ para $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración. Sea $v \in V$. Entonces existen únicos $k_1, \ldots, k_n \in K$ tales que
$$v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i.$$
Definimos $T : V \longrightarrow W$ por
$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} k_i w_i.$$
Primero, T es lineal pues si $u, v \in V$ y $d \in K$, entonces existen $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n \in K$ tales que
$$u = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$$
y
$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i.$$

Entonces
$$du + v = \sum_{i=1}^{n} (db_i + c_i)v_i.$$
Así,
$$T(du + v) = \sum_{i=1}^{n} (db_i + c_i)w_i = d\sum_{i=1}^{n} b_i w_i + \sum_{i=1}^{n} c_i w_i = dT(u) + T(v).$$
Además, $T(v_i) = w_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Resta demostrar que T es única, en efecto, supongamos que $U : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal y $U(v_i) = w_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Entonces para $v \in V$ con
$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i,$$
tenemos que
$$U(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i U(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = T(v).$$
Entonces $U = T$.

□

Corolario 1.5. *Sean V y W espacios vectoriales, y supongamos que V tiene una base finita $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Si $U, T : V \longrightarrow W$ son transformaciones lineales tales que $U(v_i) = T(v_i)$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces $U = T$.*

Teorema 1.12. *Existe una correspondencia uno a uno entre las transformaciones lineales $L : K^m \longrightarrow K^n$ y las matrices de orden $m \times n$ con elementos en el campo K.*

Demostración. Ver [4], Teorema 2. □

Definición 1.14. *Sea $A \in M_{m\times n}(K)$. Denotamos por L_A la transformación lineal $L_A : K^n \longrightarrow K^m$ definida por $L_A(x) = Ax$ para cada vector columna $x \in K^n$.*

Definición 1.15. *Si $A \in M_{m\times n}(K)$, el rango de A, denotado como* $\mathrm{rang}(A)$, *es el rango de la transformación lineal $L_A : K^n \longrightarrow K^m$*

Teorema 1.13. *El rango de cualquier matriz es igual al máximo número de sus columnas linealmente independientes; esto es, el rango de una matriz es la dimensión del subespacio generado por sus columnas.*

Demostración. Para cualquier $A \in M_{m\times n}(K)$,

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(L_A) = \dim(\operatorname{Im}(L_A)).$$

Sea β la base estándar de K^n. Entonces β genera a K^n, luego por el Teorema 1.9,

$$\operatorname{Im}(L_A) = gen(L_A(\beta)) = gen(\{L_A(e_1), \ldots, L_A(e_n)\}).$$

Para cada j, $L_A(e_j) = Ae_j = a_j$ donde a_j es la j-ésima columna de A. Entonces

$$\operatorname{Im}(L_A) = gen(\{a_1, \ldots, a_n\}).$$

Así,

$$\operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{Im}(L_A)) = \dim(gen(\{a_1, \ldots, a_n\})).$$

□

Corolario 1.6. *Si $A \in M_{m\times n}(K)$, entonces el espacio de renglones y el espacio de columnas de A tienen la misma dimensión.*

Demostración. Ver [1] Teorema 12. □

1.3. Espacios métricos

Definición 1.16. *Sean X un conjunto diferente del vacío y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que d **es una métrica** o una distancia en X, si para cada $x, y, z \in X$, d cumple con las siguientes propiedades:*

a) $d(x, y) \geq 0$,

b) $d(x, y) = 0$, *si y sólo si,* $x = y$,

c) $d(x, y) = d(y, x)$,

d) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. *(Desigualdad triangular)*

A la pareja ordenada (X,d) le llamaremos espacio métrico. En general diremos, simplemente espacio métrico X.

Ejemplos de métricas

a) Sea X un conjunto diferente del vacío. Consideremos $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida como

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y, \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$$

d es una métrica sobre X y se le conoce como **métrica discreta**.

b) Sea $X = \mathbb{R}$ y consideremos $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$d(x,y) = |x - y|$$

d es una métrica en $\mathbb{R}$ y se le conoce como la **métrica usual**.

c) Sean $X = \mathbb{R}^n$, $p \geq 1$ y consideremos $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ donde } x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n),$$

d_p es una métrica en $\mathbb{R}^n$. Con esta métrica $\mathbb{R}^n$ se le denota por $\ell^p(n)$. Con $p = 2$, d_2, se le conoce como la **métrica euclideana**.

d) Sean $X = \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty \right\}$, donde $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ fijo y consideremos $d_p : X \times X \to \mathbb{R}$ definida como

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

d_p es una métrica en X. Con esta métrica X se le denota por ℓ^p.

e) Sea $X = \mathbb{R}^n$ y consideremos $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como

$$d_\infty(x, y) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\},$$

d_∞ es una métrica en $\mathbb{R}^n$. Esta métrica se conoce como la **métrica uniforme** y $\mathbb{R}^n$ con esta métrica se le denota por $\ell^\infty(n)$.

f) Sea $X = \{\{x_n\} \mid \{x_n\}$ es una sucesión acotada de números reales$\}$ y consideremos $d_\infty : X \times X \to \mathbb{R}$ definida como

$$d_\infty(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup\{|x_j - y_j| \ \mid j \in \mathbb{N}\},$$

d_∞ es una métrica en X. Esta métrica se conoce como la **métrica del supremo** y X con esta métrica se le denota por ℓ^∞.

g) Sea $X = \mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f$ continua en $[a, b]\}$, y consideremos $d_\infty : X \times X \to \mathbb{R}$ definida como

$$d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [a, b]\},$$

d_∞ es una métrica en X.

Definición 1.17. *Sean X un espacio métrico, $x_o \in X$ y $\epsilon > 0$,*

*a) **la bola abierta** con centro en x_o y radio ϵ, denotado por $\mathcal{B}(x_o, \epsilon)$, es el conjunto*

$$\mathcal{B}(x, \epsilon) = \{x \in X \mid d(x_o, x) < \epsilon\}.$$

*b) **la bola cerrada** con centro en x_o y radio ϵ, denotado por $\mathcal{B}[x_o, \epsilon]$, es el conjunto*

$$\mathcal{B}[x, \epsilon] = \{x \in X \mid d(x_o, x) \leq \epsilon\}.$$

Definición 1.18. *Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Definamos la distancia del punto x_o al subconjunto A como*

$$\mathbf{d}(x_o, A) = \text{ínf}\{d(x_o, x) \mid x \in A\}.$$

Definición 1.19. *Sea X un espacio métrico, $x \in X$ y $A \subset X$.*

a) x ***es un punto interior de*** A, *si existe $\epsilon = \epsilon_x > 0$ tal que $\mathcal{B}(x, \epsilon) \subset A$. El interior de A, denotado por $int(A)$ ó $\overset{\circ}{A}$, es el conjunto de los puntos interiores de A.*

b) $V = V_x$ *es una* ***vecindad de*** x, *si x es un punto interior de V.*

c) x ***es punto adherente de*** A, *si para cada vecindad $V = V_x$ de x se tiene que $V \cap A \neq \emptyset$. Esta definición es equivalente a: x es punto adherente de A, si para cada $\epsilon > 0$, $\mathcal{B}(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. La cerradura del conjunto A, denotada por $\overline{A}$, es el conjunto formado por todos los puntos adherentes de A.*

Definición 1.20. *Sea X un espacio métrico. Una sucesión en X es una función $f : \mathbb{N} \to X$; es decir, una función cuyo dominio es el conjunto de los naturales y su codominio es el espacio métrico X.*

Denotaremos una sucesión en X, como $\{x_n\}$, (x_n) o $\{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$

Definición 1.21. *Sea X un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\} \in X$ es una* ***sucesión convergente*** *en X, si existe $x \in X$ tal que para cada $\epsilon > 0$, existe $k = k(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ si $n \geq k$.*

Diremos también que $\{x_n\}$ converge a x.

Una sucesión que no es convergente se llama **divergente**.

Teorema 1.14. *Sea X un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\} \in X$ puede tener a lo más un límite.*

Si $\{x_n\}$ converge a x, escribiremos $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ ó simplemente $x_n \to x$ o $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Definición 1.22. *Sea X un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\} \in X$ se dice que es* ***acotada*** *si existe $M > 0$ tal que $d(x_n, x_o) \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x_o \in X$.*

Teorema 1.15. *Sean X un espacio métrico y $\{x_n\}$ una sucesión en X. Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente en X, entonces la sucesión $\{x_n\}$ es acotada.*

Teorema 1.16. *Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces $x \in \bar{A}$, si y sólo si, existe una sucesión $\{x_n\} \in A$, tal que $x_n \longrightarrow x$.*

Definición 1.23. *Sean X un espacio métrico, $\{x_n\}$ una sucesión en X y $\{n_k\}$ una sucesión de números naturales estrictamente creciente. A la sucesión $\{x_{n_k}\}$ se le llama **subsucesión** de la sucesión $\{x_n\}$.*

Teorema 1.17. *Sean X un espacio métrico y $\{x_n\}$ una sucesión en X. Si $\{x_n\}$ converge a $x \in X$, entonces toda subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ converge a x.*

Definición 1.24. *Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico X es una **sucesión de Cauchy** en X, si se cumple que para cada $\epsilon > 0$, existe $k = k(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ si $n, m \geq k$.*

Teorema 1.18. *Sean X un espacio métrico y $\{x_n\}$ una sucesión en X. Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente en X, entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X.*

Observación 1.4. El recíproco no siempre es verdadero; es decir existen espacios métricos en los cuales hay sucesiones que son de Cauchy pero no son convergentes.

Ejemplo 1.11. Consideremos $X = (0, 1)$, con la métrica usual en X, y la sucesión $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$. Obsérvese que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy, sin embargo no converge en $(0, 1)$.

Teorema 1.19. *Sean X un espacio métrico y $\{x_n\}$ una sucesión en X. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X, entonces $\{x_n\}$ es una sucesión acotada.*

Definición 1.25. *Sea X un espacio métrico. Diremos que X es un **espacio métrico completo**, si toda sucesión de Cauchy es convergente a un elemento de X.*

Ejemplos de espacios métricos completos

a) Todo espacio métrico discreto es completo.

b) $\mathbb{R}$ con la métrica usual es un espacio métrico completo.

c) $\mathbb{R}$ con la métrica del supremo es un espacio métrico completo.

d) El espacio $\mathbb{R}^n$ con cualquiera de las tres métricas, d_1, d_2 y d_∞, es completo

e) $(0, \infty)$ no es completo con la distancia usual.

Definición 1.26. *Sean X, Y dos espacios métricos, $f : X \to Y$ una función y $x_o \in X$. Diremos que la función f es **continua** en el punto x_o, si se cumple la siguiente condición: para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, x_o) > 0$ tal que*

$$\textit{si } x \in X, \ \textit{y } d(x, x_o)_X < \delta \textit{ entonces } d(f(x), f(x_o))_Y < \epsilon.$$

Definición 1.27. *Sean X, Y dos espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. Diremos que la función f es continua en X si lo es en todo punto de X.*

1.4. Espacios normados

Definición 1.28. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, una **norma** es una función $\| \cdot \|: X \to \mathbb{R}$ que cumple con las siguientes condiciones*

a) $\| x \| \geq 0$ *para toda* $x \in X$,

b) $\| x \| = 0$, *si y sólo si,* $x = 0$,

c) $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$ *para toda* $x \in X$ *y toda* $\lambda \in \mathbb{R}$,

d) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ *para toda* $x, y \in X$. *(Desigualdad del triángulo)*

A la pareja ordenada $(X, \| \cdot \|)$ se le llama **espacio normado**. En general, diremos simplemente espacio normado X.

Teorema 1.20. *Sea X un espacio normado. La función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = \|x - y\|$ es una métrica en X.*

Así, todas las nociones de espacios métricos están definidas también para los espacios normados. Cuando consideremos un espacio normado como espacio métrico será con esta métrica.

Definición 1.29. *Diremos que un espacio normado es un espacio de Banach si como espacio métrico es completo.*

Ejemplo de espacios normados

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, donde la norma se considera como

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

  es un espacio normado.

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, donde la norma se considera como

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

  es un espacio normado.

- $(l^p, \|\cdot\|_p)$, donde la norma se considera como

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n \geq 1} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

  es un espacio normado.

- $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, donde la norma se considera como

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty,$$

  es un espacio normado.

- $(C([a,b],\mathbb{R}),\|\cdot\|)$, donde la norma se considera como

$$\|x\| = |\max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

  es un espacio normado.

Definición 1.30. *Sean X, Y dos espacios normados. Sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Decimos que el operador lineal T es* ***acotado****, si existe una constante $M \geq 0$ tal que*

$$\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X, \text{ para toda } x \in X.$$

Denotamos por:

$$B(X,Y) = \{T : X \to Y \mid T \text{ es un operador lineal acotado}\}$$

Además, si $X = Y$ denotamos $B(X,Y)$ por $B(X)$.

En el caso de los espacios normados se introduce el concepto de serie y serie convergente.

Definición 1.31. *Sea $\{x_n\}$una sucesión en un espacio normado X. La serie generada por $\{x_n\}$, es la sucesión $\{\sum_{n=1}^{k} x_n\}$.*

A veces, a la sucesión $\{\sum_{n=1}^{k} x_n\}$ se le llama sucesión de sumas parciales de $\{x_n\}$. También se acostumbra a usar el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o $\sum x_n$. para la serie. A x_n se le llama término general de la serie y a $\sum_{n=1}^{k} x_n$, la k-ésima suma parcial de la serie. Si la sucesión $\{\sum_{n=1}^{k} x_n\}$ converge, esto es si $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} x_n$ existe, entonces decimos que la serie es convergente y al límite se le llama la suma de la serie y se denota por $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ o por $\sum x_n$.

Teorema 1.21. *Sea X un espacio normado. Entonces*

1. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.*

2. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$*,* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *convergen , entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)$ *converge y*
$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n+\sum_{n=1}^{\infty}y_n.$$

3. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge y* α *es un escalar, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha x_n$ *converge y*
$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha x_n=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}x_n.$$

4. *Si* Y *es un espacio normado,* $T : X \to Y$ *un operador lineal acotado y* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} T(x)_n$ *converge y*
$$T(\sum_{n=1}^{\infty}x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}T(x_n).$$

Definición 1.32. *Sean* X, Y *dos espacios normados, un operador lineal* $T : X \to Y$ *y* $x_o \in X$*. Diremos que el operador* T *es* ***continuo*** *en el punto* x_o*, si se cumple la siguiente condición: para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta = \delta(\epsilon, x_o) > 0$ *tal que*

$$\text{si } x \in X,\ y\ \|x - x_o\|_X < \delta,\ \text{entonces } \|T(x) - T(x_o)\|_Y < \epsilon.$$

Definición 1.33. *Sean* X, Y *dos espacios normados y un operador lineal* $T : X \to Y$*. Diremos que el operador* T *es continuo en* X*, si lo es en cada punto de* X*.*

Cuando el espacio normado Y es igual al campo escalar K, los elementos de $B(X, Y)$ son llamados funcionales lineales en X. La clase $B(X, K)$ se denota por X^*.

Teorema 1.22. *Sean* X *y* Y *espcios normados. Sea un operador lineal* $T : X \to Y$*. Son equivalentes*

1. T *es continuo en 0.*

2. T es continuo en X.

3. T es acotado.

$B(X,Y)$ es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación de una función por un escalar, y además, si Y es Banach, entonces, $B(X,Y)$ es un espacio de Banach con la siguiente norma

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \mid x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

Definición 1.34. *Sea X un espacio vectorial sobre un campo K. El **dual algebraico** de X, denotado como X^*, se define como:*

$$X^* = \{F : X \to K \mid \ F \text{ es funcional lineal}\}$$

Tenemos que X^* es un espacio vectorial sobre K con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación de una función por un escalar.

Observación 1.5. Como X^* es un espacio vectorial podemos hablar del dual algebraico de X^*; éste es denotado como X^{**}.

1.5. Espacios con producto interno

En esta sección definiremos al producto interno, en base a este se puede definir la longitud de un vector y el concepto de ortogonalidad. De aquí en adelante, centraremos nuestra atención en bases donde los vectores sean ortogonales y cada una con longitud uno, es decir, bases ortonormales. Se presentará el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal a partir de una base arbitraria.

Definición 1.35. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un producto interno en V es una función que asigna a cada par ordenado de vectores $v, w \in V$ un escalar en K, representado como $< v, w >$, tal que para toda $v, w, z \in V$ y toda $c \in K$ se tiene que:*

1. $< v+z, w >=< v, w > + < z, w >$

2. $< cv, w >= c < v, w >$

3. $\overline{< v, w >} =< w, v >$, *donde la barra indica la conjugación compleja.*

4. $< v, v >> 0$ *si* $v \neq 0$

Ejemplo 1.12. Para $x = (a_1, \ldots, a_n), y = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$, definimos

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i}$$

es un producto interno en $\mathbb{C}^n$.

Ejemplo 1.13. Por analogía con el Ejemplo 1.12, definimos para cualesquiera $x, y \in \ell^2$,

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}.$$

No es fácil ver que esta serie converge, para ello, revisar [19] Ejemplo 2.1.3. Con esto tenemos un producto interno en ℓ^2.

Ejemplo 1.14. Sea $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$. Definamos, $< \cdot >: V \times V \to \mathbb{C}$ como

$$< f, g >= \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx.$$

$< \cdot >$ es un producto interno en $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$.

Teorema 1.23. *Sea V un espacio con producto interno. Entonces para $v, w, z \in V$ y $c \in K$*

1. $< v, w+z >=< v, w > + < v, z >$

2. $< v, cw >= \bar{c} < v, w >$

3. $< v, 0 >=< 0, v >= 0$

4. $< v, v >= 0$ *si y sólo si* $v = 0$

5. *Si* $< v, w > = < v, z >$ *para todo* $v \in V$, *entonces* $w = z$

Teorema 1.24. ***Desigualdad de Cauchy-Schwarz***

Sea V *un espacio con producto interno. Entonces, para cada* $x, y \in V$ *se tiene que*

$$| < x, y > | \leq \|x\|\|y\|. \tag{1.1}$$

Demostración. Si $x = 0$ o $y = 0$ entonces (1.1) se cumple, ya que ambos lados son iguales a cero. Supongamos que $x \neq 0$ y $y \neq 0$. Entonces, para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\begin{aligned} 0 \leq < x + \alpha y, x + \alpha y > = < x, x > + \overline{\alpha} < x, y > \\ + \alpha < y, x > + |\alpha|^2 < y, y > . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Tomando $\alpha = \dfrac{- < x, y >}{< y, y >}$ en (1.2), y multiplicando por $< y, y >$ obtenemos

$$0 \leq < x, x >< y, y > -| < x, y > |^2.$$

Se sigue que

$$| < x, y > | \leq \|x\| \, \|y\|.$$

□

Teorema 1.25. *Sea* V *un espacio con producto interno. Entonces, la función, denotada por* $\| \cdot \|$ *y tal que* $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ *está definida por*

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >}$$

es una norma en V.

Demostración. Sean $x, y \in V$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

1. Es claro que $\|x\| \geq 0$
2. Tenemos que $\|x\| = \sqrt{< x, x >} = 0$, si y sólo si $x = 0$.
3. $\|\lambda x\| = \sqrt{< \lambda x, \lambda x >} = \sqrt{\lambda \overline{\lambda} < x, x >} = |\lambda| \|x\|$.

4. Cuando $\alpha = 1$, la ecuación (1.2) se escribe como

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= <x+y, x+y> = <x,x> + 2<x,y> + <y,y> \\ &\leq <x,x> + 2|<x,y>| + <y,y> \end{aligned}$$

Por la Desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

$\square$

Teorema 1.26. *Sea V un espacio con producto interno. Sean $\{v_n\}$ y $\{w_n\}$ dos sucesiones de elementos de V que convergen a $v, w \in V$, respectivamente. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} <v_n, w_n> = <v, w> .$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como la sucesión $\{v_n\}$ es convergente, entonces es acotada, es decir existe $M > 0$ tal que , para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\|v_n\| \leq M.$$

Además, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq k$, entonces

$$\|v_n - v\| < \frac{\epsilon}{2(1+\|w\|)}, \text{ y } \|w_n - w\| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq k$, entonces

$$\begin{aligned} |<v_n, w_n> - <v, w>| &\leq |<v_n, w_n> - <v_n, w> + <v_n, w> - <v, w>| \\ &\leq |<v_n, w_n - w>| + |<v_n - v, w>|. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$|<v_n, w_n> - <v, w>| \leq \|v_n\|\|w_n - w\| + \|v_n - v\|\|w\|,$$

Por lo tanto

$$| < v_n, w_n > - < v, w > | \leq M\|w_n - w\| + \|v_n - v\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

$\square$

Definición 1.36. *Sea V un espacio con producto interno. Los vectores $v, w \in V$ son ortogonales si $< v, w >= 0$ y se denota por $x \perp y$. Un subconjunto S de V es ortogonal, si cualesquiera dos vectores distintos en S son ortogonales. Un vector v en V es un vector unitario si $\|v\| = 1$. Finalmente, un subconjunto S de V es ortonormal si S es ortogonal y todos sus vectores son unitarios.*

Teorema 1.27. *Sea V un espacio con producto interno y $S = \{w_1, \ldots, w_n\}$ un subconjunto linealmente independiente de V. Definimos $S' = \{v_1, \ldots, v_n\}$, donde $v_1 = w_1$ y*

$$v_k = w_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{< w_k, v_j >}{\|v_j\|^2} v_j$$

para $2 \leq k \leq n$. Entonces S' es un conjunto ortogonal de vectores distinto de cero tales que $gen(S') = gen(S)$.

Demostración. Ver [13] Teorema 6.4 $\square$

Definición 1.37. *Sea S un subconjunto no vacío de un espacio con producto interno V. Definimos el complemento ortogonal de S, denotado por $S^\perp$, como*

$$S^\perp = \{v \in V \,|< v, w >= 0 \text{ para todo } w \in S\}.$$

Con el símbolo $S^{\perp\perp}$ representamos el complemento ortogonal de $S^\perp$,etc.

Teorema 1.28. *Sea V un espacio con producto interno. Sean S, U subconjuntos de V. Entonces*

1. *$S^\perp$ es un subespacio cerrado.*

2. *$S \cap S^\perp = \{0\}$.*

3. $S \subset S^{\perp\perp}$

4. Si $S \subset U$*, entonces* $U^{\perp} \subset S^{\perp}$.

5. $S^{\perp\perp\perp} = S^{\perp}$.

Demostración. Para 1. Sean $v, w \in S^{\perp}$ y $\alpha, \beta \in K$. Entonces tenemos que para toda $y \in S$,

$$< \alpha v + \beta w, y >= \alpha < v, y > + \beta < w, y > = \alpha 0 + \beta 0 = 0.$$

Luego, $\alpha v + \beta w \in S^{\perp}$. Por lo tanto $S^{\perp}$ es un subespacio de V. Vamos a demostrar que $S^{\perp}$ es cerrado. Sea $v \in \overline{S^{\perp}}$. Entonces existe una sucesión $\{v_n\}$ de elementos de $S^{\perp}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v.$$

Sea $u \in S$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $< v_n, u >= 0$ y por

$$\lim_{n\to\infty} < v_n, u >=< v, u >,$$

se tiene que $< v, u >= 0$. Entonces $v \in S^{\perp}$. Hemos demostrado que $S^{\perp}$ es cerrado.

2. Supongamos que $S \cap S^{\perp} \neq \{0\}$. Entonces, sea $v \in S \cap S^{\perp}$ con $v \neq 0$. Como $v \in S$ y $v \in S^{\perp}$ se tiene que

$$< v, v >= 0,$$

Entonces $v = 0$ y esto es una contradicción. Así $S \cap S^{\perp} = \{0\}$.

3. Sea $u \in S$ y sea $v \in S^{\perp}$. Luego $< u, v >= 0$. De aquí se sigue $u \in S^{\perp\perp}$. Por lo tanto $S \subset S^{\perp\perp}$.

4. Sea $v \in U^{\perp}$ y sea $u \in S$. Entonces $u \in U$, se sigue que $< v, u >= 0$. Por lo tanto $v \in S^{\perp}$.

5. De 2. $S^{\perp} \subset S^{\perp\perp\perp}$. Como $S \subset S^{\perp\perp}$, entonces por 3. $S^{\perp\perp\perp} \subset S^{\perp}$. Por lo tanto $S^{\perp\perp\perp} = S^{\perp}$.

□

Teorema 1.29. ***Ley del Paralelogramo.***

Sea V un espacio con producto interno. Entonces para cada $u, v \in V$ se tiene

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= < u+v, u+v > = < u,u > +2 < u,v > + < v,v > \\ &\leq \|u\|^2 + 2| < u,v > | + \|v\|^2. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|u-v\|^2 &= < u-v, u-v > = < u,u > -2 < u,v > + < v,v > \\ &\leq \|u\|^2 - 2| < u,v > | + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Entonces, sumando estas dos igualdades obtenemos

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

□

Teorema 1.30. ***Teorema de Pitágoras.***

Sea V un espacio con producto interno. Entonces para cada $u, v \in V$

$$\text{si } u \perp v, \text{ entonces } \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= < u+v, u+v > = < u,u > +2 < u,v > + < v,v > \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2. \end{aligned}$$

□

Definición 1.38. *Sea V un espacio vectorial con producto interno. Sean S un subconjunto de V y $v \in V$. La distancia de v a S, denotada por $d(v,S)$, es*

$$d(v,S) = \text{ínf}\{\|v-u\| \mid u \in S\}.$$

Teorema 1.31. *Sea V un espacio vectorial con producto interno. Sea S un subespacio de V. Sean $v \in V$ y $w \in S$*

$$\|v - w\| = d(v, S) = \text{ínf}\{\|v - u\| \mid u \in S\}$$

si y sólo si $(v - w) \in S^{\perp}$. Además si tal vector $w \in S$ existe es único.

Demostración. Supongamos que

$$\|v - w\| = d(v, S) = \text{ínf}\{\|v - u\| \mid u \in S\}.$$

y supongamos que no es verdadero que $(v - w) \in S^{\perp}$; es decir que existe un $u \in S$ tal que u no es ortogonal a $v - w$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\|u\| = 1$. Sea $\delta =< v - w, u > \neq 0$. Definamos

$$u_1 = w + \delta u.$$

Entonces

$$\|v - u_1\|^2 = \|v - w - \delta u\|^2 = \|v - w\|^2 - < v - w, \delta u > - < \delta u, v - w > + |\delta|^2$$

$$= \|v - w\|^2 - |\delta|^2 < \|v - w\|^2.$$

Esto contradice que

$$\|v - w\| = d(v, S).$$

Ahora, supongamos que $(v - w) \in S^{\perp}$. Sea $u \in S$. Entonces, por el Teorema de Pitágoras se tiene

$$\|v - u\|^2 = \|(v - w) + (w - u)\|^2 = \|v - w\|^2 + \|w - u\|^2.$$

Así,

$$\|v - u\| \geq \|v - w\|.$$

Por lo tanto $\|v - w\| = d(v, S)$. La unicidad se sigue de que

$$\|v - u\| > \|v - w\|,$$

para $u \neq w$.

□

Teorema 1.32. *Sea V espacio vectorial con producto interno. Sea S un subespacio de V y $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base ortonormal de S. Para cada $v \in V$ existe un único $u \in S$ tal que*

$$\|v - u\| = \text{ínf}\{\|v - w\| \mid w \in S\}.$$

Además, para cada $w \in S$ $v - u \perp w$ y $u = v - \sum_{j=1}^{m} < v, v_j > v_j$.

Demostración. Para cada $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in K^m$ tenemos

$$\begin{aligned}
0 \leq \|v - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j\|^2 &= < v - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j, v - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j > \\
&= < v, v > - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j < v_j, v > - \sum_{j=1}^{m} \bar{\alpha_j} < v, v_j > + \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_i \bar{\alpha_j} < v_i v_j > \\
&= \|v\|^2 - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \overline{< v, v_j >} + \sum_{j=1}^{m} \bar{\alpha_j} < v, v_j > + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \bar{\alpha_j} \\
&= \|v\|^2 - \sum_{j=1}^{m} | < v, v_j > | + \sum_{j=1}^{m} | < v, v_j > - \alpha_j|^2.
\end{aligned}$$

Para cada $j \in \{1, \cdots, m\}$, sea $\alpha_j =< v, v_j >$. Entonces se obtiene que

$$u = v - \sum_{j=1}^{m} < v, v_j > v_j$$

satisface

$$\|v - u\| = \text{ínf}\{\|v - w\| \mid w \in S\}.$$

Además, para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$ se tiene

$$< v - \sum_{j=1}^{m} < v, v_j > v_j, v_i >= 0.$$

y por lo tanto, como $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es base de S, que para cada $w \in S$ se tiene

$$< v - \sum_{j=1}^{m} < v, v_j > v_j, w >= 0.$$

□

Teorema 1.33. *Supongamos que $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ es un conjunto ortonormal de un espacio con producto interno V de dimensión finita. Entonces*

1. *S puede ser extendido a una base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ para V.*

2. *Si $W = gen(S)$, entonces $S_1 = \{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ es una base ortonormal para $W^\perp$.*

3. *Si W es cualquier subespacio de V, entonces $dim(V) = dim(W) + dim(W^\perp)$.*

Demostración.

1. Por el Corolario 1.3, S puede ser extendido a una base

$$S' = \{v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_n\}$$

para V. Aplicando el Teorema 1.27 a S'. Los primeros k vectores resultantes de este proceso son los vectores en S, y este nuevo conjunto genera a V. Normalizando los últimos $n-k$ vectores de este conjunto obtenemos un conjunto ortonormal que genera a V.

2. Ya que S_1 es un subconjunto de una base, es linealmente independiente. Como S_1 es un subconjunto de $W^\perp$, resta demostrar que S_1 genera a $W^\perp$. Notemos que, para cada $w \in V$, tenemos que

$$w = \sum_{i=1}^{n} < w, v_i > v_i.$$

Si $w \in W^\perp$, entonces $< w, v_i >= 0$ para $1 \leq i \leq k$. Entonces

$$w = \sum_{i=k+1}^{n} < w, v_i > v_i \in gen(S_1).$$

3. Sea W un subespacio de V. Luego W es un espacio con producto interno de dimensión finita ya que V lo es. Así, tenemos una base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_k\}$. Por 1 y 2, tenemos que

$$dim(V) = n = k + (n - k) = dim(W) + dim(W^{\perp}).$$

$\square$

Capítulo 2

Alternativa de Fredholm

2.1. Matrices

En esta sección recordemos algunos conceptos y resultados básicos de matrices, iniciamos con la siguiente

Definición 2.1. *Sean A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times p$. Definimos el producto de $A = (a_{ik})$ y $B = (b_{kj})$, denotado $AB = (c_{ij})$, como la matriz $m \times p$ tal que*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq p$.

Teorema 2.1. *El producto de matrices A, B y C, satisface las siguientes propiedades:*

1. *$(AB)C = A(BC)$ (ley asociativa).*

2. *$A(B + C) = AB + AC$ (ley distributiva por la izquierda).*

3. *$(B + C)A = BA + CA$ (ley distributiva por la derecha).*

4. *$k(AB) = (kA)B = A(kB)$, con k un escalar.*

Definición 2.2. *La traspuesta de una matriz A, denotada por A^t, es la matriz obtenida escribiendo las filas de A, por orden, como columnas. Es decir, si $A = (a_{ij})$ es una matriz de orden $m \times n$, entonces $A^t = (a^t_{ij})$ es la matriz de orden $n \times m$ con $a^t_{ij} = a_{ji}$ para todos los valores i y j.*

Teorema 2.2. *La operación de trasposición definida sobre las matrices A y B, satisface las siguientes propiedades:*

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$.
2. $(A^t)^t = A$.
3. $(kA)^t = kA^t$, *si k es un escalar.*
4. $(AB)^t = B^t A^t$.

Definición 2.3. *Definimos la delta de Kroneker δ_{ij} como $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. La matriz identidad de orden $n \times n$, denotada por I, se define por $(I)_{ij} = \delta_{ij}$.*

Definición 2.4. *Una matriz cuadrada A de orden $n \times n$ es invertible si existe una matriz B de orden $n \times n$ con la propiedad de que*

$$AB = BA = I,$$

donde I es la matriz identidad.

Teorema 2.3. *La matriz B de la definición 2.4 es única.*

Demostración. Supongamos que existen B_1 y B_2 matrices de orden $n \times n$ tales que $AB_1 = B_1A = I$ y $AB_2 = B_2A = I$, entonces

$$B_1 = B_1I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2.$$

Por lo tanto la matriz B es única.

$\square$

Observación 2.1. Nombramos a la matriz B de la definición 2.4 la inversa de A y la denotamos por A^{-1}.

Teorema 2.4. *Sean A y B matrices cuadradas de orden $n \times n$.*

1. *Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
2. *A es invertible si y sólo si lo es A^t.*
3. *$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*

Demostración.

1. Tenemos que
$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$
y
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$
Por lo tanto, $B^{-1}A^{-1}$ es la inversa de AB.

2. Si A es invertible, existe una matriz B tal que $AB = BA = I$. En tal caso, $(AB)^t = (BA)^t = I^t$ por lo que $B^tA^t = A^tB^t = I$. Por consiguiente, A^t es invertible con inversa B^t.
Si A^t es invertible, existe la matriz B tal que $A^tB = BA^t = I$. Luego
$$B^tA = B^t(A^t)^t = (A^tB)^t = I^t = I$$
y
$$AB^t = (A^t)^tB^t = (BA^t)^t = I^t = I.$$
Por lo tanto, A es invertible con inversa B^t.

3. Por 2. B^t es la inversa de A^t, esto es, $B^t = (A^t)^{-1}$. Pero $B = A^{-1}$; se sigue que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

$\square$

2.2. Alternativa de Fredholm

Uno de nuestros principales objetivos de esta tesis es dar solución a un sistema de ecuaciones lineales vía el operador adjunto de una transformación lineal; para comenzar, siguiendo con la idea de matrices de la sección 2.1, daremos la siguiente

Definición 2.5. *Sea $A \in M_{m\times n}(K)$. Definimos la adjunta de A a la matriz A^* de orden $n\times m$ tal que $(a^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$ para todo i, j.*

Ejemplo 2.1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} i & 1+2i \\ 2 & 3+4i \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A^* = \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 1-2i & 3-4i \end{pmatrix}$$

Una propiedad importante de la matriz adjunta que nos ayudará a dar solución al sistema de ecuaciones lineales la revela el siguiente

Teorema 2.5. *Consideremos el espacio vectorial $V = K^n$ con producto interno dado en el ejemplo 1.12 del capítulo 1, y sea $A = (a_{is}) \in M_{n\times n}(K)$ entonces $< Ax, z >=< x, A^*z >$ para todo $x, z \in V$.*

Demostración. Sean $x, z \in V$. Cada componente de Ax esta dada por

$$y_i = \sum_{s=1}^{n} a_{is}x_s.$$

Así,

$$< Ax, z >= \sum_{i=1}^{n} y_i\bar{z}_i = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{s=1}^{n} a_{is}x_s)\bar{z}_i =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} x_s \sum_{i=1}^{n} a_{is}\bar{z}_i = \sum_{s=1}^{n} x_s \overline{\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{is}z_i} =< x, A^*z >$$

$\square$

Teorema 2.6. *Supongamos que para algún $B \in M_{n\times n}(K)$,*
$< Ax, z >=< x, Bz >$ para todo $x, z \in V = K^n$, entonces $B = A^*$.

Demostración. Tenemos que para todo $x, z \in V$

$$< Ax, z >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{is}x_s\bar{z}_i,$$

$$< x, Bz >= \sum_{s=1}^{n} x_s \overline{\sum_{i=1}^{n} b_{si}z_i} = \sum_{s=1}^{n} x_s \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_{si}\bar{z}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \bar{b}_{si}x_s\bar{z}_i.$$

Por hipótesis

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{is}x_s\bar{z}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \bar{b}_{si}x_s\bar{z}_i$$

entonces $a_{is} = \bar{b}_{si}$.

□

El teorema 2.5 nos dice que la matriz adjunta es única y nos permite formular la siguiente definición, pero considerando la definición 1.15, pues nuestro objetivo es ver a las matrices como transformaciones lineales para facilitar el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

Definición 2.6. *Como en la definición 1.14, consideremos $A \in M_{n\times n}(K)$ y $T_A : K^n \longrightarrow K^n$ el operador lineal, definido por $T_A(x) = Ax$ para cada $x \in K^n$. El operador conjugado de T_A es el operador $T_{A^*} : K^n \longrightarrow K^n$ definido por $T_{A^*}(x) = A^*x$ para todo $x \in K^n$ donde A^* es la adjunta de A.*

Teorema 2.7. *Sea $A \in M_{n\times n}(K)$. Consideremos el operador lineal $T_A : K^n \longrightarrow K^n$ y su operador conjugado $T_{A^*} : K^n \longrightarrow K^n$ definidos por $T_A(x) = Ax$ y $T_{A^*}(x) = A^*x$ para todo $x \in K^n$ respectivamente, entonces $\mathrm{Im}(T_A)$ y $\ker(T_{A^*})$ son subespacios de K^n.*

Demostración. Se sigue del Teorema 1.8.

□

Lema 2.1. Sea $A \in M_{n\times n}(K)$. Consideremos el operador lineal $T_A : K^n \longrightarrow K^n$ y su operador conjugado $T_{A^*} : K^n \longrightarrow K^n$ definidos por $T_A(x) = Ax$ y $T_{A^*}(x) = A^*x$ para todo $x \in K^n$ respectivamente, entonces $\ker(T_{A^*})^\perp = \mathrm{Im}(T_A)$ y $\mathrm{Im}(T_A)^\perp = \ker(T_{A^*})$. Además, si $rang(T_A) = k$, entonces $nul(T_{A^*}) = n - k$.

Demostración. Demostremos que $\ker(T_{A^*})^\perp = \mathrm{Im}(T_A)$. Sea $y \in \mathrm{Im}(T_A)$. Luego existe $x \in K^n$ tal que $Ax = T_A(x) = y$. Sea $z \in \ker(T_{A^*})$. Aplicando el Teorema 2.1

$$< y, z >=< Ax, z >=< x, A^*z >=< x, 0 >= 0,$$

es decir, $y \in \ker(T_{A^*})^\perp$. Por lo tanto $\mathrm{Im}(T_A) \subseteq \ker(T_{A^*})^\perp$.
Ahora, sea $y \in \ker(T_{A^*})^\perp$. Por demostrar que existe un $x \in K^n$ tal que $Ax = T_A(x) = y$. Para ello, sea $x \in K^n$ una solución de $A^*Ax = A^*y$, entonces

$$A^*(y - Ax) = T_{A^*}(y - Ax) = 0,$$

luego $y - Ax \in \ker(T_{A^*})$. Como $y \in \ker(T_{A^*})^\perp$, tenemos que $< y - Ax, y >= 0$. Además, como Ax es el punto más cercano a y en $\mathrm{Im}(T_A)$, por el Teorema 1.32, se sigue que para todo $x_1 \in K^n$,

$$< y - Ax, Ax_1 >= 0.$$

En particular, esto es verdadero para $x_1 = x$, entonces

$$0 =< y - Ax, y > - < y - Ax, Ax >= \|y - Ax\|^2.$$

Se sigue que $y = Ax$. Por lo tanto $\ker(T_{A^*})^\perp \subseteq \mathrm{Im}(T_A)$.
Ahora, demostremos que $\mathrm{Im}(T_A)^\perp = \ker(T_{A^*})$. Sea $z \in \mathrm{Im}(T_A)^\perp$, luego para todo $y \in \mathrm{Im}(T_A)$, $< z, y >= 0$. Es decir, para todo $x \in K^n$

$$< z, Ax >=< z, T_A(x) >= 0.$$

Entonces por el Teorema 2.1, para todo $x \in K^n$

$$0 =< z, Ax >= \overline{< Ax, z >} = \overline{< x, A^*z >} =< A^*z, x > .$$

Así, para todo $x \in K^n$, $< A^*z, x >= 0$, en particular para $x = A^*z$ tenemos que $< A^*z, A^*z >= 0$ entonces por el Teorema 1.23, $A^*z = 0$, se sigue que $0 = A^*z = T_{A^*}(z)$. Luego $z \in \ker(T_{A^*})$. Por lo tanto $\mathrm{Im}(T_A)^\perp \subseteq \ker(T_{A^*})$.
Después, sea $z \in \ker(T_{A^*})$, entonces $T_{A^*}(z) = A^*z = 0$. Sea $y \in \mathrm{Im}(T_A)$, luego existe $x \in K^n$ tal que $Ax = T_A(x) = y$. Se sigue que

$$< z, y >=< z, Ax >= \overline{< Ax, z >} = \overline{< x, A^*z >} = \overline{< x, 0 >} = 0.$$

Así, $z \in \mathrm{Im}(T_A)^\perp$. Por lo tanto $\ker(T_{A^*}) \subseteq \mathrm{Im}(T_A)^\perp$.
Por último, como $\mathrm{Im}(T_A)^\perp = \ker(T_{A^*})$ por el Teorema 2.7, $\mathrm{Im}(T_A)$ es un subespacio de K^n, entonces por el Teorema 1.33,

$$n = \dim(K^n) = \dim(\mathrm{Im}(T_A)) + \dim(\mathrm{Im}(T_A)^\perp) =$$

$$= \mathrm{rang}(T_A) + \mathrm{nul}(T_{A^*}) = k + \mathrm{nul}(T_{A^*}),$$

por lo tanto, $\mathrm{nul}(T_{A^*}) = n - k$.

□

Recordemos algunos conceptos básicos de los sistemas de ecuaciones lineales.

El sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

donde a_{ij} y b_i ($1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$) son escalares en el campo K y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son n variables que toman valores en K, se llama un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas sobre el campo K.
La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se llama la matriz de coeficientes del sistema (2.1).
Si consideramos

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

y

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

entonces el sistema (2.1), se puede reescribir como una sola ecuación

$$Ax = b.$$

En lo que sigue consideraremos sistemas de ecuaciones con esta representación.
Una solución del sistema (2.1), es una n-ada

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in K^n$$

tal que $As = b$. El conjunto de todas las soluciones del sistema (2.1), se llama el conjunto solución del sistema. El sistema (2.1) se dice que es consistente si el conjunto solución es no vacío; de otro manera es inconsistente.

Definición 2.7. *Un sistema $Ax = b$ de m ecuaciones lineales con n incógnitas es homogéneo si $b = 0$. De otra forma, se dice que el sistema es no homogéneo.*

El siguiente teorema nos permite estudiar la solución de un sistema de ecuaciones lineales a partir del operador adjunto, este resultado es conocido como la alternativa de Fredholm, que sirvió de base y analogía para numerosas generalizaciones en el análisis matemático. Esto se reflejará en el siguiente capítulo.

Teorema 2.8.

1. *Sea $y \in K^n$, el sistema $y = Ax$ admite solución si y sólo si para cada $z \in \ker(T_{A^*})$, $< z, y >= 0$.*

2. *Sea K el conjunto solución del sistema $y = Ax$, y sea K_H el conjunto solución del correspondiente sistema homogéneo $Ax = 0$. Entonces para cualquier solución s de $y = Ax$,*

$$K = \{s\} + K_H = \{s + k \mid k \in K_H\}.$$

Demostración.

1. Supongamos que el sistema $y = Ax$ admite solución, luego existe $x_0 \in K^n$ tal que $y = Ax_0 = T_A(x_0)$, es decir, $y \in \operatorname{Im}(T_A)$. Sea $z \in \ker(T_{A^*})$. Por el Lema 2.1, $\ker(T_{A^*}) = \operatorname{Im}(T_A)^\perp$. Así, $z \in \operatorname{Im}(T_A)^\perp$, entonces para todo $x \in \operatorname{Im}(T_A)$, $< z, x >= 0$. Como $y \in \operatorname{Im}(T_A)$, tenemos que $< z, y >= 0$.
   Ahora, supongamos que para cada $z \in \ker(T_{A^*})$, $< z, y >= 0$, entonces $y \in \ker(T_{A^*})^\perp$, por el Lema 2.1, tenemos que $\ker(T_{A^*})^\perp = \operatorname{Im}(T_A)$, entonces $y \in \operatorname{Im}(T_A)$. Se sigue que existe $x_0 \in K^n$ tal que $y = T_A(x_0) = Ax_0$. Por lo tanto, el sistema $y = Ax$ admite solución.

2. Sea s cualquier solución de $y = Ax$. Demostraremos que $K = \{s\} + K_H$. Sea $w \in K$, entonces $y = Aw$. Luego

$$A(s - w) = T_A(s - w) = T_A(s) - T_A(w) = As - Aw = y - y = 0.$$

   Entonces $w - s \in K_H$, luego existe $k \in K_H$ tal que $w - s = k$. Así, tenemos que $w = s + k \in \{s\} + K_H$. Por lo tanto,

$$K \subseteq \{s\} + K_H.$$

Ahora, sea $w \in \{s\} + K_H$, entonces existe $k \in K_H$ tal que $w = s + k$. Así,

$$Aw = T_A(w) = T_A(s+k) = T_A(s) + T_A(k) = As + Ak = y + 0 = y,$$

luego $w \in K$. Por lo tanto $\{s\} + K_H \subseteq K$.

$\square$

Ejemplo 2.2. Analicemos las soluciones de un sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}^2$, mediante el Teorema 2.8. Demostremos que si y es ortogonal al $\ker(T_{A^*}) = \{z \in \mathbb{R}^2 : A^*z = 0\}$, si y sólo si, $\operatorname{rango} A = \operatorname{rango} B$ donde B es la matriz ampliada de A, es decir, la ecuación $y = Ax$ admite solución.

Demostración. $\Longrightarrow]$ Supongamos que el vector $y = (y_1, y_2)$ es ortogonal a $\ker(T_{A^*})$, todas las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} a_{11}z_1 + a_{21}z_2 &= 0 \\ a_{12}z_1 + a_{22}z_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Demostremos que los rangos de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

y la matriz ampliada

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & y_2 \end{pmatrix},$$

son iguales.

Si el rango $A = 2$, entonce el rango $B = 2$. Supongamos que el rango $A = 1$. Siempre se tiene que $\operatorname{rango} B \geq \operatorname{rango} A = 1$. Luego tenemos que demostrar que

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{21} & y_2 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & y_1 \\ a_{22} & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

En efecto, como $y = (y_1, y_2)$ es ortogonal a $\ker(T_{A^*})$, entonces para todo $z = (z_1, z_2) \in N(T_{A^*})$, $< y, z >= y_1 z_1 + y_2 z_2 = 0$, luego suponiendo que $z_1 \neq 0$, resulta

$$\Delta_1 = a_{11} y_2 - a_{21} y_1 = a_{11} y_2 + a_{21} \frac{y_2 z_2}{z_1} = \frac{y_2}{z_1}(a_{11} z_1 + a_{21} z_2) = 0,$$

$$\Delta_2 = a_{12} y_2 - a_{22} y_1 = a_{12} y_2 + a_{22} \frac{y_2 z_2}{z_1} = \frac{y_2}{z_1}(a_{11} z_1 + a_{22} z_2) = 0.$$

Por lo tanto, el rango $B =$ rango $A = 1$.
$\Longleftarrow$] Supongamos que el vector $y = (y_1, y_2)$ es tal que rango $B =$ rango A, entonces $y = Ax$ admite solución, digamos (x_1, x_2). Demostremos que y es ortogonal a las soluciones $z = (z_1, z_2)$ del sistema 2.2. En efecto,
$y_1 z_1 + y_2 z_2 = (a_{11} x_1 + a_{12} x_2) z_1 + (a_{21} x_1 + a_{22} x_2)) z_2 = (a_{11} z_1 + a_{21} z_2) x_1 + (a_{12} z_1 + a_{22} z_2) x_2 = 0 x_1 + 0 x_2 = 0.$

$\square$

Teorema 2.9. *Las ecuaciones homogéneas $Ax = 0$ y $A^* x = 0$ tienen el mismo numero de soluciones linealmente independientes.*

Demostración. Por el Corolario 1.6, tenemos que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*)$, es decir, $\text{rang}(T_A) = \text{rang}(T_{A^*})$. Si el $\text{rang}(T_A) = \text{rang}(T_{A^*}) = n$, entonces por el Teorema 1.10,

$$\text{nul}(T_A) + \text{rang}(T_A) = \text{nul}(T_A) + n = n = \dim(K^n)$$

y

$$\text{nul}(T_{A^*}) + \text{rang}(T_{A^*}) = \text{nul}(T_{A^*}) + n = n = \dim(K^n).$$

Así, $\text{nul}(T_A) = 0$ y $\text{nul}(T_{A^*}) = 0$, es decir, los sistemas $Ax = 0$ y $A^* x = 0$ sólo admiten la solución trivial.
Ahora, supongamos que $\text{rang}(T_A) = \text{rang}(T_{A^*}) = k$ con $1 \leq k \leq n$. Luego por el Teorema 1.10, tenemos que

$$\text{nul}(T_A) + \text{rang}(T_A) = \text{nul}(T_A) + k = n = \dim(K^n).$$

Entonces $\mathrm{nul}(T_A) = n - k$, es decir, la ecuación $Ax = 0$ tiene $n - k$ soluciones linealmente independientes. Ya que $\mathrm{rang}(T_A) = \mathrm{rang}(T_{A^*})$, aplicando nuevamente el Teorema 1.10,

$$\mathrm{nul}(T_{A^*}) + \mathrm{rang}(T_{A^*}) = \mathrm{nul}(T_{A^*}) + k = n = \dim(K^n).$$

Se sigue que $\mathrm{nul}(T_{A^*}) = n - k$, es decir, el sistema $A^*x = 0$ tiene $n - k$ soluciones linealmente independientes. Por lo tanto los sistemas $Ax = 0$ y $A^*x = 0$ tienen el mismo número de soluciones linealmente independientes.

□

2.3. Matrices infinitas

El material de la presente sección se obtuvo de [3] y [11]. Acontinuación se da una definición análoga a la definición 1.2.

Definición 2.8. *Una matriz infinita A con valores en un campo K es un arreglo rectangular de la forma*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

donde cada $a_{ij} \in K$ se llama entrada. Escribiremos en forma abreviada a la matriz infinita por $A = (a_{ij})$.

Siguiendo la analogía con las matrices finitas, podemos dar las siguietes definiciones.

Definición 2.9. *Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ matrices infinitas. Diremos que $A = B$ si todas sus entradas correspondientes son iguales, es decir, $a_{ij} = b_{ij}$.*

Definición 2.10. *Sean* $A = (a_{ij})$ *y* $B = (b_{ij})$ *matrices infinitas. Tenemos que*

$$A + B = (a + b)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$$

y

$$cA = c(a_{ij}) = (ca_{ij})$$

Observación 2.2. Con las operaciones de la definición 2.10, es fácil comprobar que el conjunto de todas las matrices infinitas forma un espacio vectorial y lo denotamos como $M_\infty(K)$.

Guiándonos con la definición de la traspuesta de una matriz finita, tenemos la siguiente

Definición 2.11. *Sea* $A = (a_{ij}) \in M_\infty(K)$*. La traspuesta de la matriz* A*, denotada por* A^t *es* $A^t = (a^t_{ij})$ *donde* $(a^t_{ij} = a_{ji})$*.*

Observación 2.3. Podemos verificar que para cada $A, B \in M_\infty(K)$, $(A + b)^t = A^t + B^t$, $(A^t)^t = A$ y $(kA)^t = kA^t$ con $k \in K$.

Pero para demostrar que $(AB)^t = B^t A^t$, tenemos que definir el producto de matrices infinitas. Análogamente a la definición para producto de matrices finitas, tenemos la siguiente

Definición 2.12. *Sean* $A, B \in M_\infty(K)$ *. Definimos el producto de* $A = (a_{ij})$ *y* $B = (b_{ij})$*, denotado* AB*, como*

$$(ab)_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj}.$$

El problema con esta definición es cómo saber si la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj}$ converge. Para ello veamos el siguiente ejemplo donde esto no se cumple.

Ejemplo 2.3. Sean $A, B \in M_\infty(K)$ tales que

$$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

Entonces el producto AB no está definido pues la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{\infty} 1$$

diverge.

El ejemplo 2.3, nos lleva a plantearnos la siguiente pregunta: ¿Cuándo el producto de matrices está bien definido? Una respuesta parcial nos la proporciona el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4. Sean $A, B \in M_\infty(K)$ tales que las filas y columnas de A y B tienen un número finito de entradas diferentes de cero, es decir,

$$A = B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} & 0 & 0 \cdots \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} & 0 & 0 \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

En este caso AB esta bien definido.

Según el ejemplo 2.4, tenemos una condición suficiente pero no necesaria donde el producto este bien definido. Quedando por resolver cuáles son las condiciones necesarias que hacen que el producto este bien definido.
Ahora, sin considerar si la matriz es cuadrada, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.13. *Sea* $A \in M_\infty(K)$*, diremos que* A *es invertible si existe* $B \in M_\infty(K)$ *tal que* $AB = BA = I = (a_{ij})$ *donde*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ i \neq j. \end{cases}$$

Observación 2.4. De la definición 2.13 se demuestra que la matriz B es única y se denota por A^{-1}. Además, nuevamente se tiene que tener cuidado con los productos AB y BA.

Para finalizar, consideremos al sistema $y = Ax$ donde $A \in M_\infty(K)$. Consideremos al operador lineal $T_A : K^n \longrightarrow K^n$ tal que $T_A(x) = Ax$, donde $K^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n, ...) | x_1, x_2, ..., x_n, ... \in K \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$. Nuevamente el producto Ax no sabemos si está bien definido, luego para estudiar el teorema 2.8, se requiere pensar en una teoría más general que las matrices infinitas la cual abordaremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

El Operador Adjunto

En este capítulo estudiaremos el operador adjunto en espacios de Hilbert, considerando como prototipo el capítulo 2 de esta tesis, y presentaremos algunos ejemplos.

Comencemos por definir a los espacios de Hilbert

Definición 3.1. *Un espacio con producto interior completo se llama un espacio de Hilbert.*

Ver definición de espacio completo [9] Definición 1.4.5

Ejemplo 3.1. Sea

$$\ell^2 = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \text{para cada}\, n \in \mathbb{N},\ x_n \in \mathbb{C}\, \text{y} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

ℓ^2 es un espacio vectorial con producto interior por el Ejemplo 1.4 y el Ejemplo 1.13, también por [19] Ejemplo 2.3.4 es un espacio completo. Por lo tanto, ℓ^2 es un espacio de Hilbert.

Sea H un espacio de Hilbert, denotamos

$$\mathcal{B}(H) = \{T : H \longrightarrow H \mid T\, \text{es un operador lineal acotado}\}.$$

Ejemplo 3.2. Sea $R : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$, $R(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$ para todo $(x_1, x_2, ...) \in \ell^2$, el operador desplazamiento a la derecha. Es sencillo demostrar que R es lineal. Además, como para todo $x = (x_1, x_2, ...) \in \ell^2$

$$\|Rx\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = |x|^2 .$$

Se sigue que, $R \in \mathcal{B}(H)$.

Ejemplo 3.3. Sea $L : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$, $L(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$ para todo $(x_1, x_2, ...) \in \ell^2$, el operador desplazamiento a la izquierda. De forma análoga al Ejemplo 3.2, se demuestra que $L \in \mathcal{B}(H)$.

Teorema 3.1. ***Teorema de la Proyección*** *Sean V un espacio de Hilbert y S un subespacio cerrado de V. Entonces, para cada $v \in V$ existe un único $w \in S$ tal que*

$$\|v - w\| = d(v, S) = \text{ínf}\{\|v - u\| \mid u \in S\}.$$

Además $(v - w) \in S^{\perp}$.

Demostración. La unicidad y ortogonalidad se siguen de teorema 1.31. Para la existencia,

sea $d = d(v, S)$. Existe una sucesión $\{u_n\}$ de elementos de S tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|v - u_n\| = d.$$

Demostraremos que la sucesión $\{u_n\}$ es de Cauchy. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces, por la Ley del Paralelogramo se tiene

$$\|u_n - u_m\|^2 = \|(u_n - v) + (v - u_m)\|^2 = 2\|u_n - v\|^2 + 2\|v - u_m\|^2 - \|u_n + u_m - 2v\|^2.$$

Entonces, se sigue que

$$\begin{aligned}\|u_n - u_m\|^2 &= \|(u_n - v) + (v - u_m)\|^2 \\ &= 2\|u_n - v\|^2 + 2\|v - u_m\|^2 - 4\left\|\frac{(u_n + w_m)}{2} - v\right\|^2.\end{aligned}$$

Como S es un subespacio de V y u_n y u_m pertenecen a S. entonces $\dfrac{u_n + u_m}{2}$ pertenece a S y además $d^2 \leq \left\| \dfrac{(u_n + u_m)}{2} - v \right\|^2$. Así, obtenemos

$$\|u_n - u_m\|^2 \leq 2\|u_n - v\|^2 + 2\|v - u_m\|^2 - 4d^2$$

Tomando el límite, en ambos lados de la última desigualdad, cuando $n, m \to \infty$ se tiene que la sucesión $\{u_n\}$ es de Cauchy. Como V es un espacio de Hilbert, existe $w \in V$ tal que la sucesión $\{u_n\}$ converge a w. Como S es cerrado $w \in S$.

$$\|v - w\| = \|v - \lim_{n\to\infty} u_n\| = \lim_{n\to\infty} \|v - u_n\| = d.$$

□

Teorema 3.2. *Sea S un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert V. Entonces*

1. $V = S \oplus S^{\perp}$.
2. $S^{\perp\perp} = S$.

Demostración. Para 1. Sea $v \in V$, entonces existe un único $w \in S$ tal que $\|v - w\| = d(v, S)$ y $v - w \in S^{\perp}$. Tomemos $u = v - w$, entonces

$$v = w + u.$$

Para demostrar que la representación es única, supongamos que

$$v = w_1 + u_1,$$

con $w_1 \in S$ y $u_1 \in S^{\perp}$. Entonces

$$0 = w_1 - w + u_1 - u.$$

Como $w_1 - w$ es ortogonal a $u_1 - u$, entonces por el Teorema de Pitágoras se tiene

$$0^2 = \|w_1 - w\|^2 + \|u_1 - u\|^2.$$

Esto implica que $w = w_1$ y $u = u_1$.
2. Sabemos que $S \subset S^{\perp\perp}$: Así que basta demostrar que $S^{\perp\perp} \subset S$. Sea $v \in S^{\perp\perp}$, entonces existen $w \in S$ y $u \in S^{\perp}$ tal que $v = w + u$. Como $v, w \in S^{\perp\perp}$, entonces $v - w \in S^{\perp\perp}$; esto es $u \in S^{\perp\perp}$, pero como $u \in S^{\perp}$. Entonces $u = 0$. Por lo tanto $v = w + u = w + 0 = w \in S$. Así que $S^{\perp\perp} \subset S$.
$\square$

A continuación, veremos que dado $T \in \mathcal{B}(H)$ existe el operador adjunto $T^* \in \mathcal{B}(H)$ tal que para todo $x, y \in H$,

$$< Tx, y > = < x, T^* y > .$$

Es decir, análogamente para la matriz adjunta del capítulo 2 y el Teorema 2.1 dicha propiedad se satisface. Para ello necesitamos definir lo siguiente

Definición 3.2. *Sea H un espacio de Hilbert. Un funcional es un operador lineal $T : H \longrightarrow \mathbb{C}$.*

Definición 3.3. *Un funcional $T : H \longrightarrow \mathbb{C}$ es acotado si existe una constante K tal que para todo $x \in H$,*

$$|T(x)| \leq K\|x\|.$$

Teorema 3.3. *(Teorema de representación de Riesz) Sea H un espacio de Hilbert. Para cada funcional $T : H \longrightarrow \mathbb{C}$, existe un único $y \in H$ tal que para todo $x \in H$,*

$$T(x) = < x, y > .$$

Demostración. Sea $S = Ker(T)$. Si $S = H$, entonces, para cada $x \in H$, se tiene

$$T(x) = < x, 0 > .$$

Si $S \neq Y$, entonces, por 1. de Teorema 3.2 existe, $0 \neq u \in S^{\perp}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $T(u) = 1$. Sea $y = \frac{u}{\|u\|^2}$. Sea $x \in H$. Entonces

$$< x, y > = < x - T(x)u + T(x)u, y > .$$

Como $T(x-T(x)u)=0$ donde $(x-t(x)u)\in S$, entonces

$$< x,y >= T(x) < u,y >= \frac{T(x) < u,u >}{\|u\|^2} = T(x).$$

Si existe $y_1 \in H$ tal que, para cada $x \in H$ se tiene

$$T(x) =< x, y_1 > .$$

Sea $x \in H$. Entonces

$$< x,y >=< x,y_1 > .$$

De aquí se sigue que $y = y_1$.

□

Teorema 3.4. *Sea H un espacio de Hilbert. Si $T \in \mathcal{B}(H)$, entonces existe un único operador lineal y acotado $T^* \in \mathcal{B}(H)$, llamado el operador adjunto de T, tal que para todo $x, y \in H$,*

$$< Tx, y >=< x, T^*y > .$$

Además, $\|T^*\| = \|T\|$, $\|T^*T\| = \|T\|^2$ y para cada $S, T \in \mathcal{B}(H)$, $(T^*)^* = T$ y $(ST)^* = T^*S^*$.

Demostración. Para cada $y \in H$, definimos el funcional $\phi_y : H \longrightarrow \mathbb{C}$, $\phi_y(x) =< T(x), y >$ para toda $x \in H$. Tenemos que el funcional ϕ_y es lineal, pues sean $x_1, x_2 \in H$ y $\lambda\in \mathbb{C}$. Luego

$$\phi_y(x_1 + x_2) =< T(x_1 + x_2), y >=< Tx_1 + Tx_2, y >=$$

$$=< Tx_1, y > + < Tx_2, y >= \phi_y(x_1) + \phi_y(x_2).$$

y

$$\phi_y(\lambda x_1) =< T(\lambda x_1), y >=< \lambda Tx_1, y >=$$

$$= \lambda< Tx_1, y > = \lambda\phi_y(x_1).$$

Además, ϕ_y es acotado, por el Teorema 1.24

$$\phi_y(x) = | < Tx, y > | \leq \|Tx\|\|y\| \leq$$

$$\leq (\|T\|\|x\|)\|y\| = (\|T\|\|y\|)\|x\|.$$

Por otro lado, por el Teorema 3.3, existe una única $z \in H$ tal que para todo $x \in H$

$$\phi_y(x) =< x, z > .$$

Así, para cada $y \in H$, hay un $z \in H$ únicamente determinado tal que para todo $x \in H$

$$< Tx, y >=< x, z > .$$

Por lo tanto, podemos definir una función $T^* : H \longrightarrow H$, $T^*(y) = z$, tal que para todo $x, y \in H$

$$< Tx, y >=< x, T^*y > .$$

Afirmamos que T^* es un operador lineal. En efecto, sean $y_1, y_2 \in H$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, tenemos que para cada $x \in H$

$$< x, T^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) >=< Tx, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 >=$$

$$= \overline{\alpha_1} < Tx, y_1 > + \overline{\alpha_2} < Tx, y_2 >= \overline{\alpha_1} < x, T^*y_1 > + \overline{\alpha_2} < x, T^*y_2 >=$$

$$=< x, \alpha_1 T^*y_1 + \alpha_2 T^*y_2 > .$$

Ya que esto se cumple para todo $x \in H$, por el Teorema 1.23 tenemos que

$$T^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 T^*y_1 + \alpha_2 T^*y_2.$$

Además, T^* es acotado, pues para todo $y \in H$

$$\|T^*y\|^2 =< T^*y, T^*y >=< T(T^*y), y >\leq \|T(T^*y)\|\|y\| \leq$$

$$\leq \|T\|\|T^*y\|\|y\|.$$

Como $\|T^*y\| \neq 0$, se sigue que $\|T^*y\| \leq \|T\|\|y\|$. Por lo tanto, T^* es acotado y $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Veamos que $\|T^*\| = \|T\|$, ya tenemos que $\|T^*\| \leq \|T\|$. Resta demostrar que $\|T\| \leq \|T^*\|$. En efecto, para todo $x \in H$

$$\|Tx\|^2 =< Tx, Tx >=< x, T^*(Tx) >\leq \|x\|\|T^*(Tx)\| \leq \|x\|\|T^*\|\|Tx\|.$$

Luego para todo $x \in H$, $\|Tx\| \leq \|T^*\|\|x\|$. Así, $\|T\| \leq \|T^*\|$. Por lo tanto, $\|T\| = \|T^*\|$.
Por último, para $\|x\| = 1$

$$\|Tx\|^2 =< Tx, Tx >=< x, T^*Tx >\leq \|x\|\|T^*T\|\|x\| = \|T^*T\|.$$

Entonces $\|T^2\| \leq \|T^*T\|$.
Ya que

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|\|T\| = \|T^2\|,$$

con esto, $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

$\square$

Una vez demostrado el Teorema 3.4, podemos formular la siguiente

Definición 3.4. *Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. El operador $T^* : H \longrightarrow H$ definido por*

$$< Tx, y >=< x, T^*y >$$

para todo $x, y \in H$ es el operador adjunto de T.

Una vez dada la definición del adjunto de un operador, intentemos encontrar el operador adjunto de un $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dado.

Ejemplo 3.4. Sea $T \in \mathcal{B}(H)$ definida para toda $x \in H$, $Tx = \alpha x$ con $\alpha \in \mathbb{C}$. Para encontrar el adjunto T^*, tenemos que para $x, y \in H$,

$$< x, T^*y >=< Tx, y >=< \alpha x, y >=< x, \bar{\alpha}y > .$$

Entonces

$$< x, (T^* - \bar{\alpha}I)y) >= 0 =< x, 0 > .$$

Luego

$$T^*y = \bar{\alpha}Iy.$$

Por lo tanto, $T^* = \bar{\alpha}I$.

Ejemplo 3.5. Sea ℓ^2 del Ejemplo 3.1 y sea

$$\tau = \{e_1 = (1, 0, 0, ...), e_2 = (0, 1, 0, ...), ...\}$$

una base ortonormal de ℓ^2. Consideremos $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ operador lineal acotado; le asociamos a T una matriz que nos permitirá encontrar el adjunto de T de manera más sencilla. Para ello, consideremos el siguiente

Teorema 3.5. *Si $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ operador lineal acotado y sea τ del ejemplo 3.5, entonces existe una matriz infinita*

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$$

tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty,$$

y para todo $x \in \ell^2$, $T(x) = Ax$.

Demostración. Sea $\{x_n\} \in \ell^2$. Como τ es base ortonormal de ℓ^2, tenemos que

$$\{x_n\} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j.$$

Entonces

$$T(\{x_n\}) = T\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j\right).$$

Como T es continua y lineal, se sigue que

$$T\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j T(e_j).$$

Además,

$$\begin{aligned} T(e_1) &= \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} a_{i1} e_i \\ T(e_2) &= \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} a_{i2} e_i \\ &\vdots \\ T(e_j) &= \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} e_i \\ &\vdots \end{aligned}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Así, asociamos a T la matriz infinita

$$A_\infty = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

Ahora demostremos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty.$$

Para ello, primero demostremos que para cada $j \in \mathbb{N}$, $\{a_{ij}\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^2$, es decir,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty.$$

Sea $j \in \mathbb{N}$, como

$$\lim_{k \to +\infty} \sum_{i=1}^{k} a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} e_i,$$

entonces $\left\{ \sum_{i=1}^{k} a_{ij} e_i \right\}_{k=1}^{\infty}$ es acotada, luego existe un $M > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} a_{ij} e_i \right\| = \left(\sum_{i=1}^{k} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq M.$$

Se sigue que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{k} |a_{ij}|^2 \leq M^2,$$

es decir, $\left\{ \sum_{i=1}^{k} |a_{ij}|^2 \right\}_{k=1}^{\infty}$ es acotada. Así, por el Teorema(de series con términos no negativos),

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty.$$

Ahora, para cada $\{x_n\} \in \ell^2$,

$$A_\infty(\{x_n\}) =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^\infty a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^\infty a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^\infty a_{ni}x_i \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Veamos que

$$\sum_{i=1}^\infty a_{1i}x_i$$

converge. Por la desigualdad de Holder tenemos que

$$\sum_{i=1}^\infty |a_{1i}x_i| \le \left(\sum_{i=1}^\infty |a_{1i}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como $\{x_n\} \in \ell^2$,

$$\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 = k < \infty.$$

Así,

$$\sum_{i=1}^\infty |a_{1i}x_i| \le \|a_{1i}\| \, k^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^\infty a_{1i}x_i < \infty.$$

Resta demostrar que

$$\left(\sum_{i=1}^\infty a_{1i}x_i, \sum_{i=1}^\infty a_{2i}x_i, ..., \sum_{i=1}^\infty a_{ni}x_i, ...\right) \in \ell^2.$$

Como para cada $j = 1, ..., \infty$,

$$\sum_{i=1}^\infty a_{ji}x_i$$

converge, tenemos la siguiente sucesión de números complejos

$$(b_1, b_2, ..., b_n, ...)\,.$$

Si esta sucesión converge, entonces el producto para todo $\{x_n\} \in \ell^2$, $A_\infty(\{x_n\})$ esta bien definido.

$\square$

Ahora, análogamente como en el caso finito, definimos el adjunto de T como $T^* : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$

$$T^*(x) = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{n1}} & \cdots \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{n2}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{pmatrix} = A_\infty^*(\{x_n\}).$$

donde A_∞^* es la matriz traspuesta conjugada de A_∞.
Así, tenemos que demostrar que para todo $x, z \in \ell^2$, $< Tx, z >=< x, T^*z >$.
Sean $x, z \in \ell^2$

$$< Tx, z >= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ji} x_i \right) \overline{z_j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{j=1}^{\infty} a_{ji} \overline{z_j} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{\sum_{j=1}^{\infty} \overline{a_{ji}} z_j} =< x, T^*z > .$$

La segunda igualdad se sigue del siguiente teorema (ver [2]):

Teorema 3.6. *Sea f una doble sucesión compleja. Supongamos que para cada m fijo $\sum_{n=1}^{\infty} f(m,n)$ converge absolutamente y que*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |f(m,n)|$$

converge. Entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m,n)$ y $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m,n)$ convergen absolutamente y tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f(m,n) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m,n).$$

Por lo tanto, el operador $T^* : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$, definido por $T^*(\{x_n\}) = A_\infty^*(\{x_n\})$ para todo $\{x_n\} \in \ell^2$ es el adjunto de T.

Ahora, consideremos una matriz infinita

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Esta matriz define el operador lineal acotado $T_{A_i} : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$, mediante la regla $T_{A_i}(x) = A_i x$ para todo $x \in \ell^2$, ya que ℓ^2 es separable (ver [19] página 79).

Teorema 3.7. *Sea H un espacio de Hilbert. Sea $T : H \to H$ un operador lineal acotado. Entonces $Ker(T) = Im(T^*)^\perp$.*

Demostración. Sea $x \in Ker(T)$. Sea $z \in H$. Entonces

$$< x, T^*(z) >=< T(x), z >=< 0, z >= 0.$$

Por lo tanto $x \in Im(T^*)^\perp$; así $Ker(T) \subset Im(T^*)^\perp$. Recíprocamente, sea $x \in Im(T^*)^\perp$, entonces

$$< T(x), T(x) >=< x, T^*(T(x)) >= 0.$$

Por lo tanto $T(x) = 0$, entonces $x \in Ker(T)$; así $Im(T^*)^\perp \subset Ker(T)$.

□

Corolario 3.1. *Todo operador lineal acotado en un espacio de Hilbert con imagen densa es inyectivo.*

Teorema 3.8. *Sea H un espacio de Hilbert. Sea $T : H \to H$ un operador lineal acotado con imagen cerrada. Entonces $Im(T) = Ker(T^*)^\perp$.*

Demostración. Sea $y \in Im(T)$. Sea z tal que $T^*(z) = 0$. Como $y \in Im(T)$, existe x tal que $T(x) = y$. Entonces

$$< y, z >=< T(x), z >=< x, T^*(z) >=< x, 0 >= 0.$$

Entonces $y \in Ker(T^*)^\perp$. Por lo tanto $Im(T) \subset Ker(T^*)^\perp$.

$\square$

Tenemos que dado un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ podemos asignarle el operador adjunto $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, es decir, esta correspondencia tiene propiedades similares a la conjugación compleja en $\mathbb{C}$ como veremos en el siguiente teorema.

Teorema 3.9. *Sean A y B operadores acotados en un espacio de Hilbert H. Entonces*

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$.

2. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.

3. $(A^*)^* = A$.

4. $I^* = I$

5. $(AB)^* = B^* A^*$.

Demostración. Sean $x, y \in H$ y $\alpha \in K$.

1.

$$< x, (A + B)^* y >=< (A + B)x, y >=< Ax, y > + < Bx, y >=$$

$$=< x, A^* y > + < x, B^* y >=< x, (A^* + B^*)y > .$$

2.
$$< x, (\alpha A)^*)y >=< \alpha Ax, y >= \alpha < Ax, y > =$$
$$= \overline{< \overline{\alpha} A^* y, x >} =< x, (\overline{\alpha} A^*)y > .$$

3.
$$< x, (A^*)^* y > = < A^* x, y > = \overline{< y, A^* x >} =$$
$$= \overline{< Ay, x >} = < x, Ay > .$$

4.
$$< x, I^* y > = < Ix, y > = < x, Iy > .$$

5.
$$< x, (AB)^* y > = < (AB)x, y > = < A(Bx), y > =$$
$$= < Bx, A^* y > = < x, (B^* A^*) y > .$$

□

El operador adjunto en espacios de Hilbert apareció en el estudio de ecuaciones diferenciales e integrales. El operador adjunto nos ayuda a definir tres importantes clases de operadores(auto-adjuntos, unitarios y normales) en el espacio $\mathcal{B}(H)$. A continuación, definamos a los operadores en el espacio $\mathcal{B}(H)$ que coinciden con su adjunto.

Definición 3.5. *Si $A = A^*$, entonces A es auto-adjunto.*

Teorema 3.10. *Para cada operador acotado T en un espacio de Hilbert H, existen únicos operadores auto-adjuntos A y B tales que $T = A + iB$ y $T^* = A - iB$.*

Demostración. Sea T un operador acotado en H. Definimos
$$A = \frac{1}{2}(T + T^*) \text{ y } B = \frac{1}{2i}(T - T^*).$$

Tenemos que A y B son auto-adjuntos, en efecto, sean $x, y \in H$
$$< Ax, y > = < \frac{1}{2}(T + T^*), y > = \frac{1}{2} < Tx, y > + \frac{1}{2} < T^* x, y > =$$
$$= \frac{1}{2} < x, T^* y > + \frac{1}{2} < x, Ty > = \overline{< \frac{1}{2} T^* y, x >} + \overline{< \frac{1}{2} Ty, x >} =$$

$$= \overline{< \frac{1}{2}T^*y + \frac{1}{2}Ty, x >} =< x, \frac{1}{2}(T + T^*)y > .$$

También, tenemos que

$$< Bx, y >=< \frac{1}{2i}(T - T^*)x, y >= \frac{1}{2i} < Tx, y > -\frac{1}{2i} < T^*x, y >=$$

$$= \frac{1}{2i} < x, T^*y > -\frac{1}{2i} < x, Ty >= \overline{\overline{\frac{1}{2i}} < T^*y, x >} - \overline{\overline{\frac{1}{2i}} < Ty, x >} =$$

$$= \overline{< \frac{1}{-2i}T^*y, x >} + \overline{< \frac{1}{2i}Ty, x >} =< x, \frac{1}{2i}(T - T^*)y > .$$

Además,

$$A + iB = \frac{1}{2}(T + T^*) + i(\frac{1}{2i}(T - T^*)) = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T^* + \frac{1}{2}T - \frac{1}{2}T^* = T.$$

Veamos que $T^* = A - iB$, para ello, sean $x, y \in H$, luego

$$< Tx, y >=< (A + iB)x, y >=$$

$$=< Ax, y > +i < Bx, y >=< x, Ay > +i < Bx, y >=$$

$$=< x, Ay > +i < x, By >=< x, (A - iB)y > .$$

Por lo tanto $T^* = A - iB$.

Para la unicidad, supongamos que existen C y D operadores tales que $T = C + iD$ y $T^* = C - iD$.

$\square$

Conclusiones

En esta tesis se estudiaron las propiedades básicas para los operadores lineales en espacios dimensión finita y para espacios de Hilbert.
Se vió la alternativa de Fredholm para espacios de dimensión finita. Al igual que, se consideraron sistemas de ecuaciones de dimensión infinita desde el punto de vista de las matrices infinitas, para intentar estudiar dicha alternativa, pero nos encontramos con el problema del producto de matrices infinitas y de ahí, la necesidad de generalizar los operadores en espacios de dimensión finita y traducir dicha alternativa a operadores en espacios de Hilbert.
De todo este estudio, nos encontramos con el concepto de operador adjunto que forma parte una rama de las matemáticas llamada análisis funcional y goza de propiedades importantes que se necesitará otro trabajo de tesis para poder abordarlas.

Bibliografía

[1] Anton Howard *Introducción al Álgebra lineal,* Primera Edición, Editorial LIMUSA, 1994.

[2] Apostol, T. M. *Análisi matemático,* Reverte, 1976.

[3] Bernkopf, M. *A history of infinite matrices,* Archive for History of Exact Sciences, 4(4), 308-358.

[4] Birkhoff, G., McLane, S. *Álgebra moderna,* Tercera Edición, Editorial Vicens Vives, 1954.

[5] Bourbaki, N. *Elementos de historia de las matemáticas,* Segunda Edición, Alianza, 1976.

[6] Bugrov Ya.S., Nikolski S.M. *Matemáticas superiores, Elementos de Álgebra lineal y geometría analítica,* Primera Edición, Editorial Mir Moscú, 1984.

[7] Christensen Ole *Functions, Spaces, and Expansions: Mathematical Tools in Physics and Engineering,* Springer Science and Business Media, 2010.

[8] Cnossen, J. M., et al. *Adjoint based model adaptation for a linear problem. En Proceedings of the 4th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering,* 2004.

[9] Debnath Lokenath, Mikusinski Piotr, *Hilbert Spaces with Applications,* Third Edition, Elsevier Academic Press, 2005.

[10] Gauss, Carl Friedrich, *Disquisitiones arithmeticae,* Volumen 157, Yale University Press, 1966.

[11] Goertzen, C. M. *Operations on Infinite x Infinite Matrices and Their Use in Dynamics and Spectral Theory,* 2013.

[12] Hansen Vagn Lundsgaard, *Functional analysis: entering Hilbert Space,* World Scientific Publishing Company, 2015.

[13] H. Friedberg Stephen, J. Insel Arnold, E. Spence Lawrence, *Linear Algebra,* Fourth Edition, Pearson, 2002.

[14] Hernández Castaños Diego Bricio, *Formas Cuadráticas y Operadores Lineales,* Volumen I, Sociedad Matemática Mexicana, 1994.

[15] Kuttler Kenneth, *Linear Algebra Theory and Applications,* Textbook Equity Edition, 2012.

[16] Marchuk, G. I.; Shutyaev, V.; Bocharov, G. *Adjoint equations and analysis of complex systems: Application to virus infection modelling. Journal of computational and applied mathematics,* 2005, vol. 184, no 1, p. 177-204.

[17] Pietsch, Albrech, *History of Banach Spaces and Linear Operators,* Springer Science & Business Media, 2007.

[18] Roman Steven, *Advanced Linear Algebra,* Third Edition, Springer, 2007.

[19] Vasudeva Harkrishan Lal, Shirali Satish, *Elements of Hilbert Spaces and Operator Theory,* Springer, 2017.