



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Una introducción a las propiedades geométricas y
algebraicas del tamiz de Apolonio

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito para la obtención del grado de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

por

Hazel Eliuth Maceda Hernández

Asesorado por

Dra. Laura Angélica Cano Cordero

Puebla Pue.
Mayo 2022



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Una introducción a las propiedades geométricas y
algebraicas del tamiz de Apolonio

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

por

Hazel Eliuth Maceda Hernández

Asesorado por

Dra. Laura Angélica Cano Cordero

Puebla Pue.
Mayo 2022

Título: Una introducción a las propiedades geométricas y algebraicas del tamiz de Apolonio

Estudiante: HAZEL ELIUTH MACEDA HERNÁNDEZ

COMITÉ

Dra. Patricia Domínguez Soto
Presidente

Dr. Raúl Escobedo Conde
Secretario

M.C. Edgar Santiago Moyotl Hernández
Vocal

Dra. Laura Angélica Cano Cordero
Asesor

A "Salmis" que me enseñó a no rendirme nunca

*No necesitamos magia para cambiar el mundo,
llevamos todo el poder que necesitamos
dentro de nosotros mismos:
tenemos el poder de imaginar algo mejor.”
J.K. Rowling.*

Agradecimientos

Hace poco más de cinco años que emprendí una nueva aventura en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla en la cual aprendí lo que son en verdad las matemáticas; ahora que el viaje esta por terminar, solo me queda agradecer a la máxima casa de estudios por abrimme las puertas a este vasto conocimiento en las ciencias exactas y llevarme por el camino del aprendizaje hasta la culminación de mis estudios.

Primeramente quiero agradecer a mi asesora de tesis la Profesora Laura Angélica Cano Cordero, por su orientación, conocimientos, paciencia y sobretodo la confianza depositada en mí desde el inicio de este trabajo, sin sus consejos y su guía este trabajo no hubiera resultado tan satisfactorio, a pesar de las circunstancias.

Gracias a aquellos profesores que con su entrega y dedicación me motivaban cada día a seguir aprendiendo y a mejorar como estudiante. Entre ellos se encuentran la Dra. Patricia Domínguez que me acercó un poco a los sistemas dinámicos, la M.C. Mónica Macías que despertó en mí el gusto por la programación, el Dr. Carlos Guillén cuya pasión contagiaba cada día en el salón de clases, el M.C. Edgar Moyotl por su guía en el campo de la programación y al Dr. José Antonio Juárez quién me enseñó la buena enseñanza de las matemáticas.

A lo largo de mi estancia en la facultad puede conocer a personas increíbles con el mismo gusto y pasión por las matemáticas que yo, a los cuales puedo llamar amigos y en un futuro cercano colegas. Gracias Cristina, Eduardo, Itzel, Sofi, Jessi, Lore, Vivi, Cata, Brian, Gaby, por los momentos de estudio, las risas y los juegos de UNO interminables, por compartir su sentir a lo largo de este tiempo. También agradezco a Charly y a Jonh mis amigos físicos por acompañarme en este camino de las ciencias y hacer amenas las clases en las que coincidimos. Todos ustedes han contribuido tanto en mi crecimiento profesional como social y han dejado una parte de su ser en mí que me acompañará por siempre.

Itzel mi sensei del álgebra, amiga, colega, gracias por compartir tus conocimientos y por toda tu ayuda a lo largo de la carrera, por motivarme, por ser mi compañera en esta aventura y darme los consejos necesarios para sacar adelante mis tareas.

Eduardo gracias por ser mi mejor amigo y compañero de batallas, todos esos semestres que compartimos horas de estudio, tareas, risas, consejos, soluciones etc., los días de estudio fueron amenos y gratificantes contigo a mi lado y ayudandome a ser mejor cada día como persona y como profesionista.

Durante todo este viaje siempre tuve el apoyo de grandes personas, mis amigos queridos; Nancy gracias por contagiar toda esa alegría, Irais gracias por todas tus palabras de aliento en el transcurso de este viaje, Diego te agradezco todas las veces que me escuchaste y los ánimos que me has dado, Jessica mi sesos de alga, eres la hermana que el destino me brindó, gracias por todos los consejos los ánimos, las pláticas motivaciones y sobretodo por aquella amistad que ha perdurado a lo largo

IV

de los años, Cristina, aquí de nuevo, mi otra hermana del destino, gracias por todos los momentos compartidos tanto dentro y fuera de la facultad, sin ti no habría sido lo mismo esta experiencia.

Este camino no lo pude haber terminado sin el apoyo de mi familia quienes me dieron las herramientas suficientes para este viaje; a mis padres Nayelli y Rufino; mamá, gracias por estar ahí siempre que te necesité, por soportar todos mis cambios de humor, mis rabietas, mis enojos, sin ti apoyándome y alentándome no sé donde estaría ahora. A mi tía Donna que es más como mi hermana y a mi papá Mario que estuvieron en este barco junto con mis padres ayudándome a llegar a mi destino.

Estos agradecimientos culminan para una de las personas más importantes de mi vida, aquella que me formó desde pequeño, me cuidó, me enseñó a ser autosuficiente, a expresarme en público y sobretodo a creer en mí; aunque ya no está físicamente conmigo siempre la llevo en mi corazón. Gracias mamá Alma esto es por ti. Sé que donde quiera que estés, estás orgullosa de mí.

A todos ustedes, muchas gracias.

Índice general

Introducción	IX
1. Solución del Problema de Apolonio Usando Geometría Euclidea y Cartesiana	1
1.1. Solución por medio de Geometría Euclidea	1
1.2. Solución del problema de Apolonio mediante Geometría Analítica	22
2. Transformaciones de Möbius	27
2.1. La esfera de Riemann	27
2.1.1. Proyección estereográfica y métrica cordal	27
2.2. Transformaciones de Möbius	29
2.2.1. Puntos Fijos	31
2.2.2. Transformaciones de Möbius como grupo	32
2.2.3. Clasificación de las Transformaciones de Möbius	33
2.3. Aplicación geométrica	42
3. Grupos Kleinianos	47
3.1. Grupos discontinuos	47
3.2. Grupos discretos	48
3.2.1. Normalización, relación cruzada	49
3.2.2. Convergencia de Transformaciones de Möbius	49
3.3. Conjunto límite de grupos Kleinianos	50
3.3.1. Algunas propiedades topológicas	51
3.3.2. El complemento del conjunto límite	53
3.4. El grupo Apoloniano	54
4. Propiedades topológicas del Tamiz de Apolonio	57
4.1. El triángulo de Sierpinski	57
4.1.1. Sistema Iterado de Funciones	57
4.2. El triángulo de Sierpinski como límite inverso de continuos	61
4.3. Caracterización topológica del Triángulo de Sierpinski	64
Anexos	70
A. Anexo: Código en lenguaje Python	73
B. Anexo: Código lenguaje M de Octave	81
Bibliografía	83

Índice de figuras

1.1. Definición gráfica de potencia	2
1.2. Eje radical de dos circunferencias	2
1.3. Solución geométrica problema 1 (PPP).	3
1.4. Solución geométrica problema 2 (RRR): Configuración 2.	4
1.5. Solución geométrica problema 3 (PPR): Configuración 1	5
1.6. Solución geométrica problema 3 (PPR): Configuración 2	6
1.7. Solución geométrica problema 3 (PPR): Configuración 3	7
1.8. Solución geométrica problema 3 (PPR): Configuración 4	8
1.9. Solución geométrica problema 4 (RRP): Configuración 1	9
1.10. Solución geométrica problema 4 (RRP): Configuración 2	9
1.11. Solución geométrica problema 4 (RRP): Configuración 3	10
1.12. Solución geométrica problema 5 (PPC): Configuración 1	11
1.13. Solución geométrica problema 6 (CCP): Configuración 1	12
1.14. Solución geométrica problema 6 (CCP): Configuración 2	14
1.15. Solución geométrica problema 7 (RRC): Configuración 2	15
1.16. Solución geométrica problema 8 (CCR).	16
1.17. Solución geométrica problema 9 (PRC): Configuración 1.	18
1.18. Solución geométrica problema 9 (PRC): Configuración 2.	19
1.19. Solución geométrica problema 9 (PRC): Configuración 3	20
1.20. Solución geométrica problema 10 (CCC).	21
1.21. Los tres círculos iniciales C_1, C_2, C_3 , y los dos círculos mutuamente tangentes C_0 y C_4 garantizadas por el teorema de Apolonio.	25
2.1. Dinámica de $\varphi = e^{in\pi/4}z$	35
2.2. Dinámica de $\varphi = e^{in\pi/3}z$	36
2.3. Dinámica de $\varphi = e^{in\pi/6}z$	36
2.4. Dinámica de $\varphi = e^{in\sqrt{2}\pi}z$	37
2.5. Círculo isométrico	43
2.6. Construcción del tamiz de Apolonio mediante transformaciones de Möbius.	45
3.1. Círculo Isométrico y su inverso	51
3.2. Configuración de Descartes \mathcal{D}_0 y su dual	55
4.1. Distancia de Hausdorff	58
4.2. Construcción del triángulo de Sierpinski	60
4.3. Construcción del triángulo de Sierpinski	60
4.4. Construcción de \mathcal{S} a partir de $\{\mathbb{R}^2, w_1, w_2, w_3\}$	62
4.5. Función f_2^3 paso a paso.	63
A.1. Tamiz de Apolonio 200 iteraciones	77
A.2. Tamiz de Apolonio 1000 iteraciones	78

A.3. Tamiz de Apolonio 3000 iteraciones 79

Introducción

En la historia de las matemáticas griegas, los dos primeros lugares pertenecen a Euclides y Arquímedes. El tercer lugar está generalmente reservado para Apolonio. La fama del “Gran geómetra” como lo llamaban sus contemporáneos, se basa en sus sorprendentes secciones cónicas, una obra en ocho libros, de los cuales los primeros 7 han llegado a nosotros.

La obra de Apolonio comienza a filtrarse lentamente hacia Occidente por vía de la matemática árabe. Vitelio, monje polaco establecido en Italia, escribe en 1260 un tratado de óptica, que en el fondo es un comentario al tratado de óptica del árabe Al-Hazen, que residió en la península ibérica en el siglo XI, y en el que se contienen diversas proposiciones geométricas de Apolonio.

El primer texto griego de Las Cónicas que aparece en Occidente es el que Francisco Filelfo, nacido en Tolentino en 1398, se trajo de Constantinopla a Venecia en 1427.

La primera versión al latín de los cuatro primeros libros de Las Cónicas fue realizada por el matemático Juan Bautista Memo, en Venecia. Revela grandes lagunas en el conocimiento del griego, pero a pesar de ello, al morir Juan Bautista, un sobrino suyo, Juan María Memo, editó la obra en 1537. En 1566, en Bolonia, Federico Commandino publica una segunda traducción, mucho mejor, de los cuatro primeros libros, basada sobre los textos griegos, y acompañada de los lemas de Pappus, del comentario de Eutoquio y de dos libros sobre cónicas de Serenus Antissensis. Una segunda edición de esta obra fue impresa en París en 1626.

En 1655 aparece publicado un exponente de lo que constituía el ejercicio de moda en ese tiempo, la reconstrucción conjetural de las obras perdidas de los clásicos. El Padre Claude Richard publica en Amberes un comentario de los cuatro primeros libros sobre las cónicas de Apolonio, basado en los textos de Memo y Commandino, seguido de otros cuatro libros que, a juicio del P. Richard, pretendían reconstruir el contenido de los cuatro libros de Apolonio desconocidos entonces en Occidente. En 1675 Isaac Barrow, el maestro de Newton en Cambridge, publicó en Londres un manual de geometría en que condensaba los cuatro primeros libros de Apolonio, además de otras obras de Arquímedes y de Teodosio.

A partir de 1629 comienzan a conocerse en Occidente los primeros manuscritos árabes de la obra de Apolonio, que contenían más libros que los hasta entonces conocidos, a través de Golius, profesor de lenguas orientales en Leyden. El Padre Mersenne se hace eco de ello en una obra en 1644. Golius los trajo consigo a Holanda, después de un viaje por el Próximo Oriente, y en principio planeó traducirlos y publicarlos. No se sabe bien por qué no llevó a cabo su proyecto ni por qué su colección se dispersó después de su muerte. Mientras el geómetra Viviani, en 1658, se ocupaba de reconstruir conjeturalmente el contenido de los cuatro libros desconocidos de Apolonio, otro geómetra italiano, Borelli, encontró en la biblioteca de los Médicis, en Florencia, un manuscrito árabe, probablemente de la colección de Golius, que contenía los libros V, VI y VII de Las Cónicas, en una versión resumida y más o menos retocada por el matemático persa Abalphat de Ispahan, en 994. Viviani logró que Borelli no publicase tal hallazgo sino después de que él hubiese publicado su reconstrucción, lo que hizo en 1659. Como se pudo ver después, la reconstrucción del libro V de

Viviani fue de un acierto sorprendente y extendía el campo de Apolonio considerablemente. Borelli por su parte hizo traducir el libro de Abalphat al latín y lo publicó con numerosos comentarios en Florencia en 1661. Otro manuscrito árabe que contenía una versión abreviada de los mismos libros de Las Cónicas, comentada por el geómetra persa Abdolmelek de Chiraz en 1250, fue adquirida en 1641 por el orientalista alemán Christian Rau. Este lo tradujo al latín y lo publicó en Kiel en 1669. La primera versión completa en árabe de los libros V, VI, VII, aparece públicamente en Occidente al comienzo del siglo XVII en Irlanda, en un manuscrito que los herederos de Golius habían vendido al obispo de Armach (Codex Armachanus). Se trataba de una traducción del griego al árabe realizada en el siglo IX por Thabit ben Kurra, en Bagdad.

En 1704 Halley sustituyó a Gregory como profesor de geometría en Oxford. Gregory había traducido los Elementos de Euclides y en 1703 los había publicado en latín y griego. Él y Halley se habían propuesto traducir y publicar los siete libros de las Cónicas de Apolonio.

Con tal fin Halley decidió aprender árabe. En 1706 publica Halley el tratado de Apolonio sobre la sección de la razón. Muerto Gregory, Halley emprende en solitario la conclusión de la publicación de los siete libros conservados de las Cónicas y en 1710 aparece la obra en una impecable presentación. Se compone de tres partes. La primera contiene el texto griego de los cuatro primeros libros, publicado (en griego) por vez primera, junto con la versión latina de Commandino más o menos corregida, con los textos griegos de los lemas de Pappus y con el comentario de Eutoquio, todos los textos griegos acompañados de sus versiones en latín.

En la geometría plana euclidiana, el problema de Apolonio consiste en encontrar las circunferencias tangentes a tres circunferencias dadas; dicho problema se plantea en el tratado sobre tangencias y se enuncia de la siguiente forma:

“Dados tres objetos, cada uno de los cuales puede ser punto, recta o circunferencia, construir una circunferencia que sea tangente a los tres objetos dados. (o que los contenga en el caso de los puntos).”

Cabe señalar al hacer las combinaciones de tres objetos resultan hasta diez tipos de problemas de Apolonio. Excluyendo a las familias de posiciones particulares que presentan infinitas soluciones, o ninguna, y a las familias de posiciones que, por simetría, tienen algunas soluciones equivalentes o prohibidas, la resolución general del problema resulta en ocho circunferencias que son tangentes a las tres circunferencias dadas.

En el siglo XVI, Adriaan van Roomen resolvió el problema utilizando la intersección de hipérbolas, pero ésta solución no se basa únicamente en construcciones con regla y compás, por lo que puede considerarse menos elegante. François Viète encontró una solución aprovechando la simplificación de los puntos y rectas como casos extremos de circunferencias. El enfoque de Viète, que utiliza casos extremos sencillos para resolver otros más complicados, se considera una reconstrucción plausible del método de Apolonio.

A su vez, Isaac Newton simplificó el método de van Roomen y mostró que el problema de Apolonio es equivalente a encontrar una posición conociendo las diferencias de distancias a tres puntos conocidos. Esta formulación tiene aplicaciones en la navegación y en sistemas de posicionamiento como el LORAN —Long RANge Navigation, navegación de largo alcance—, y, por otra parte, se han desarrollado generalizaciones del problema para otras superficies diferentes al plano, como puede ser la superficie esférica y otras superficies cuádricas.

Algunos matemáticos posteriores introdujeron métodos algebraicos, que transforman el problema geométrico en una ecuación algebraica. A estos métodos se les realizó una abstracción o simplificación, aprovechando las simetrías inherentes al problema de Apolonio: por ejemplo, las

circunferencias resolutorias suelen encontrarse en parejas; en una de estas parejas, una circunferencia solución contiene las circunferencias dadas en su interior mientras que la otra no las contiene. Joseph Diaz Gergonne aprovechó esta simetría desarrollando un elegante método para encontrar las soluciones con regla y compás, mientras que otros matemáticos utilizaron transformaciones geométricas como la reflexión en una circunferencia —para que ésta se utilice debe haber simetría del problema— para simplificar la disposición de las circunferencias dadas. Estos desarrollos ofrecen una representación geométrica a través de métodos algebraicos (utilizando la geometría de la esfera de Lie, introducida por el noruego Sophus Lie) y una clasificación de soluciones para las treinta y tres disposiciones esencialmente diferentes posibles en la posición inicial de las tres circunferencias.

El problema de Apolonio ha impulsado mucha investigación adicional. Se han estudiado generalizaciones en tres dimensiones —la construcción de una esfera tangente a cuatro esferas dadas— y en dimensiones superiores. La disposición de tres circunferencias tangentes entre ellas ha recibido una atención especial. René Descartes dio una fórmula que relaciona los radios de las circunferencias dadas y los de las circunferencias resolutorias, que se conoce actualmente como teorema de Descartes. En este caso, la resolución iterativa del problema de Apolonio lleva a la formación de uno de los primeros fractales descubiertos y dibujados, el tamiz de Apolonio, importante en teoría de números, concretamente en los círculos de Ford y en el método del círculo de Hardy-Littlewood.

Su aplicación principal es determinar una posición a partir de las diferencias entre las distancias de, al menos, tres puntos conocidos mediante la trilateración hiperbólica, utilizada en navegación y en los sistemas globales de navegación por satélite como el GPS. Otras aplicaciones incluyen los códigos de corrección de errores utilizados en los discos DVD, así como desarrollos en farmacología.

El presente trabajo de tesis versa sobre el estudio del problema de Apolonio y el Tamiz de Apolonio (aplicación recursiva del problema de Apolonio) desde un punto de vista geométrico, para ello solucionaremos dicho problema utilizando la perspectiva del mismo Apolonio hasta Klein; es decir,

- i) Con ayuda de la Geometría Euclideana estudiamos la solución del problema de Apolonio utilizando regla y compás, y considerando los casos propuestos por Viète en el siglo XVII.
- ii) Con la Geometría Cartesiana mostramos el Teorema de los 4 puntos de Descartes y su aplicación en la solución del Problema de Apolonio.
- iii) Con la Geometría conforme, estudiamos las Transformaciones de Möbius y sus propiedades geométricas, para poder obtener el Tamiz de Apolonio vía la composición de Transformaciones de Möbius.
- iv) El Programa de Erlangen, propuesto por Klein en 1872 define geometría como seleccionar un grupo \mathcal{G} cualesquiera, y luego definir la «geometría» correspondiente con el estudio de los invariantes de \mathcal{G} .

Dicho estudio lo realizamos en los 4 capítulos y dos anexos que constituyen este trabajo de tesis y que a continuación se describen.

El capítulo 1 versa sobre la solución del problema de Apolonio considerando los 10 casos propuestos por Viète usando para ello Geometría Euclideana clásica para los primeros 9 casos (regla y compás) e inversión para el décimo. También se demuestra el Teorema de los 4 círculos de Descartes y se define que es el Tamiz de Apolonio.

En el capítulo 2 se estudia la definición, clasificación y propiedades de las transformaciones de Möbius de variable. Así como la invarianza de los círculos bajo este grupo para garantizar la existencia y unicidad del Tamiz de Apolonio así como la solución del problema de Apolonio.

En el capítulo 3 se introduce el concepto y propiedades de los grupos Kleinianos. En particular, se demuestra que el Tamiz de Apolonio es el conjunto límite de un grupo Kleiniano generado por dos transformaciones de Möbius parabólicas.

En el capítulo 4 se prueba que el Tamiz de Apolonio es un continuo mediante el estudio del triángulo de Sierpinski, pues de este último se prueba que es el atractor de un Sistema Iterado de Funciones, el límite inverso de continuos y homeomorfo al Tamiz de Apolonio.

En los anexos presentan el código en lenguaje Python con el que se generó la solución numérica del Tamiz de Apolonio y el código en lenguaje M de Octave que generó las figuras de la dinámica de algunas transformaciones de Möbius.

Finalmente se dan las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 1

Solución del Problema de Apolonio Usando Geometría Euclidea y Cartesiana

En el presente capítulo hablaremos sobre la solución del problema de Apolonio y su solución desde el punto de vista de la Geometría Euclidea y de la Geometría Analítica.

1.1. Solución por medio de Geometría Euclidea

A continuación demostraremos la solución al problema de Apolonio usando regla y compás. Cabe mencionar que para el caso 10 es necesario utilizar inversión.

Observación 1.1. *La estrategia básica de los métodos inversos es transformar un problema de Apolonio dado en otro que sea más sencillo de resolver, las soluciones del problema original se encuentran a partir de las soluciones del problema transformado, al deshacer la transformación. Las transformaciones examinadas deben cambiar un problema de Apolonio en otro; además, deben transformar las circunferencias, rectas y puntos dados en otras circunferencias, rectas y puntos, y no en otras formas.*

La inversión de la circunferencia tiene esta propiedad y además permite elegir de forma libre el centro y el radio de la circunferencia invertida.

La inversión de la circunferencia de centro O y radio R consiste en la siguiente operación: a cada punto P se le asigna un nuevo punto P' como O , P y P' deben estar alineados, y el producto de las distancias desde P y P' hasta el centro O sea igual al radio R al cuadrado:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = R^2.$$

Antes de dar la solución a nuestro problema debemos introducir los siguientes conceptos.

Definición 1.1. 1. Se llama **potencia de un punto P** respecto de una circunferencia c al producto de los segmentos determinados por dicho punto y los de intersección de una secante trazada por el punto P con la circunferencia A y B . Véase figura 1.1.

2. Se denomina **eje radical de dos circunferencias** al lugar geométrico de todos los puntos del plano que tienen la misma potencia respecto de las circunferencias y es una recta perpendicular a la que une los centros de las circunferencias. Véase figura 1.2.

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**
1.1. SOLUCIÓN POR MEDIO DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA

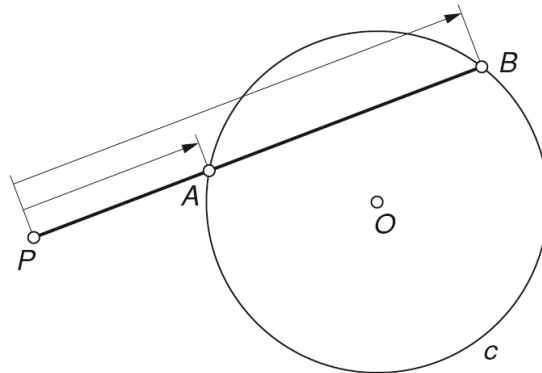


Figura 1.1: Definición gráfica de potencia

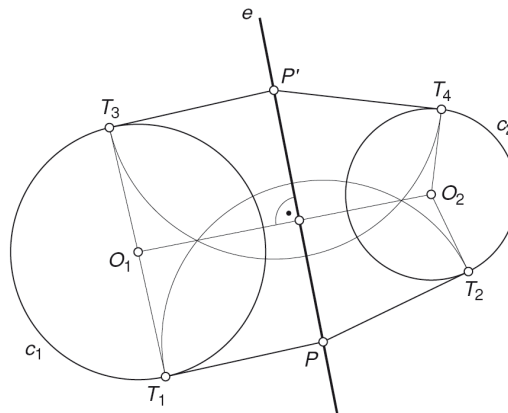


Figura 1.2: Eje radical de dos circunferencias

Teorema 1.1 (Problema de Apolonio). *Dados tres objetos tales que cada uno de ellos puede ser un punto, una recta o una circunferencia, existe al menos una circunferencia que es tangente a cada uno de los tres elementos dados.*

Demostración:

Dado que deseamos construir al menos una circunferencia tangentes a tres objetos dados y los cuales pueden ser circunferencias, rectas o puntos. Si consideramos las combinaciones de estos objetos resultan hasta 10 configuraciones de Apolonio distintas, a las cuales se les puede designar un código de tres letras C, R, P , para denotar si los objetos dados son una circunferencia, una recta o un punto respectivamente. Los casos que resultan de las combinaciones de los objetos anteriores son los casos siguientes y su correspondiente solución que enlistamos a continuación:

1. Dados tres puntos no colineales, el problema se reduce a construir una circunferencia que los contenga, (**PPP**).
2. Dadas tres rectas, el problema se reduce a construir una circunferencia que sea tangente a las tres rectas, (**RRR**).
3. Dados dos puntos y una recta, el problema se reduce a construir una circunferencia tangente a la recta y que contenga a los dos puntos, (**PPR**).

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**
1.1. SOLUCIÓN POR MEDIO DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA

4. Dadas dos rectas y un punto, el problema se reduce a construir una circunferencia que sea tangente a las dos rectas y que contenga al punto, (**RRP**).
5. Dadas dos puntos y una circunferencia, el problema se reduce a construir una circunferencia que contenga a los dos puntos y sea tangente a la circunferencia dada, (**PPC**).
6. Dadas dos circunferencias y un punto, el problema se reduce a construir una circunferencia que contenga al punto y que sea tangente a las dos circunferencias dadas, (**CCP**).
7. Dadas dos rectas y una circunferencia, el problema se reduce a construir una circunferencia que sea tangente a las rectas y a la circunferencia dada, (**RRC**).
8. Dadas una circunferencia, una recta y un punto, el problema se reduce a construir una circunferencia que pase por el punto y sea tangente a la recta y la circunferencia dada, (**CRP**).
9. Dadas dos circunferencias y una recta, el problema se reduce a construir una circunferencia que sea tangente a la recta y a las dos circunferencias dadas, (**CCR**).
10. Dadas tres circunferencias, construir una circunferencia que sea tangente a tres circunferencias dadas, (**CCC**).

Problema 1: Dados tres puntos no colineales, construir una circunferencia que los contenga (PPP). Véase figura 1.3

Pasos para la construcción:

- a) Trazar los segmentos que unan dichos puntos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$.
- b) Trazar las mediatrices de los segmentos.
- c) Encontrar el punto de intersección de las mediatrices (P).
- d) Trazar la circunferencia con centro P y radio PA .

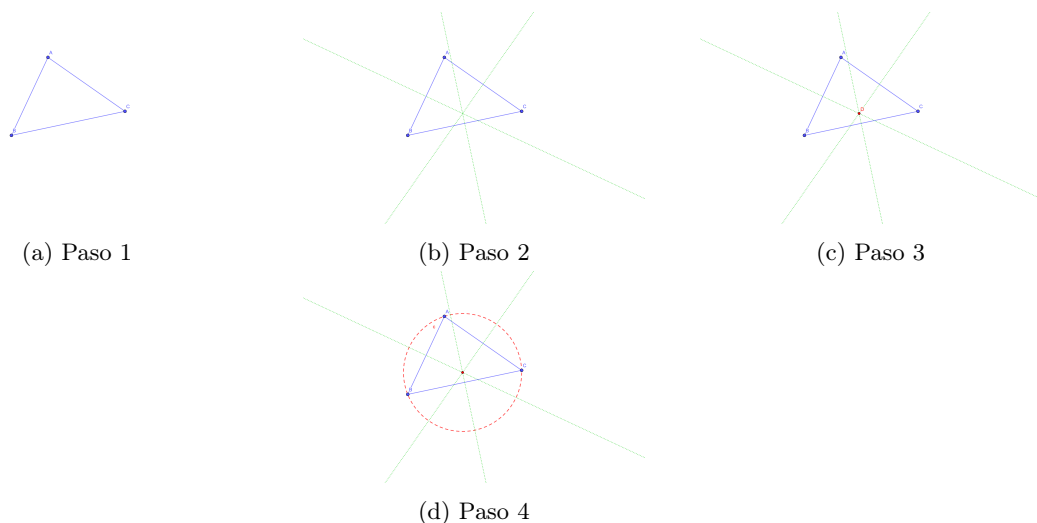


Figura 1.3: Solución geométrica problema 1 (PPP).

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**
1.1. SOLUCIÓN POR MEDIO DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA

Problema 2: Dadas tres rectas, construir una circunferencia que sea tangente a las tres rectas (RRR).

Este caso a su vez tiene dos posibles configuraciones; la primera es que dos de las rectas sean paralelas y la otra es que las tres rectas se corten entre sí. La solución que se describe a continuación es cuando las tres rectas se cortan entre sí. Véase figura 1.4

Pasos para la construcción:

- a) Trazar las bisectrices de los ángulos que se forman cuando se cortan las rectas.
- b) Hallar el punto de intersección de las bisectrices(Q), así como la intersección de las bisectrices con las rectas(D, E, F).
- c) Trazar la circunferencia C_1 con centro en Q y radio \overline{QD} (o radio $\overline{QE}, \overline{QF}$).
- d) Trazar rectas perpendiculares a los puntos de intersección de las rectas.
- e) Hallar los puntos de intersección de las rectas trazadas en el punto anterior con las bisectrices (P_1, P_2, P_3).
- f) Trazar las circunferencias $C_2(P_1, \overline{P_1E}), C_3(P_2, \overline{P_2F}), C_4(P_3, \overline{P_3D})$.

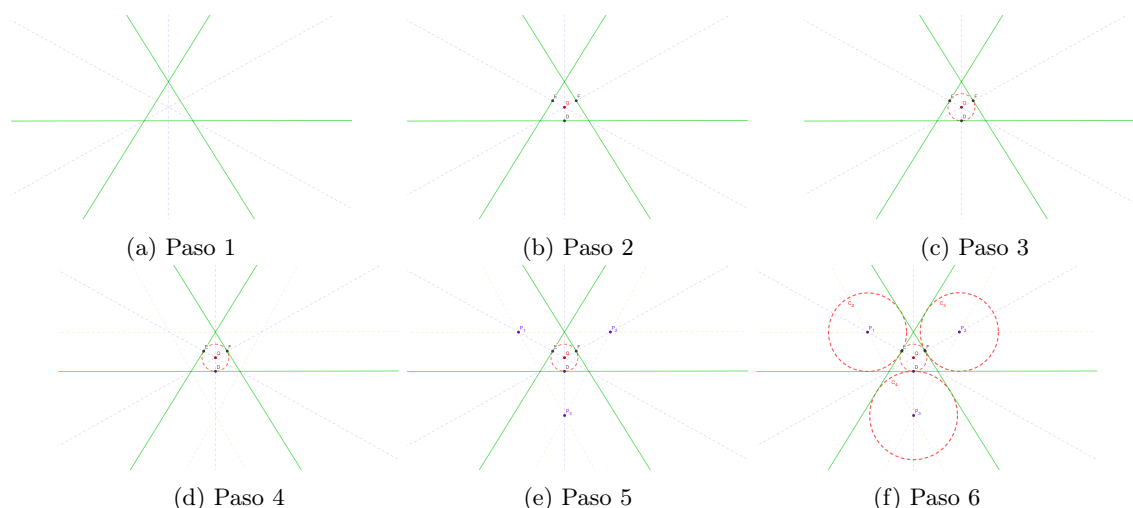


Figura 1.4: Solución geométrica problema 2 (RRR): Configuración 2.

Problema 3: Dados dos puntos y una recta, construir una circunferencia tangente a la recta y que contenga a los dos puntos (PPR).

Configuración 1: Si los dos puntos dados A y B están en una recta paralela a la recta L dada. Véase figura 1.5

Pasos para la construcción:

- a) Se construye un punto C sobre la recta L .
- b) Se traza la mediatriz del segmento AB .

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**
1.1. SOLUCIÓN POR MEDIO DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA

- c) C es la intersección de la mediatriz y la recta dada.
d) Se construye la circunferencia que contiene a los puntos A , B y C .

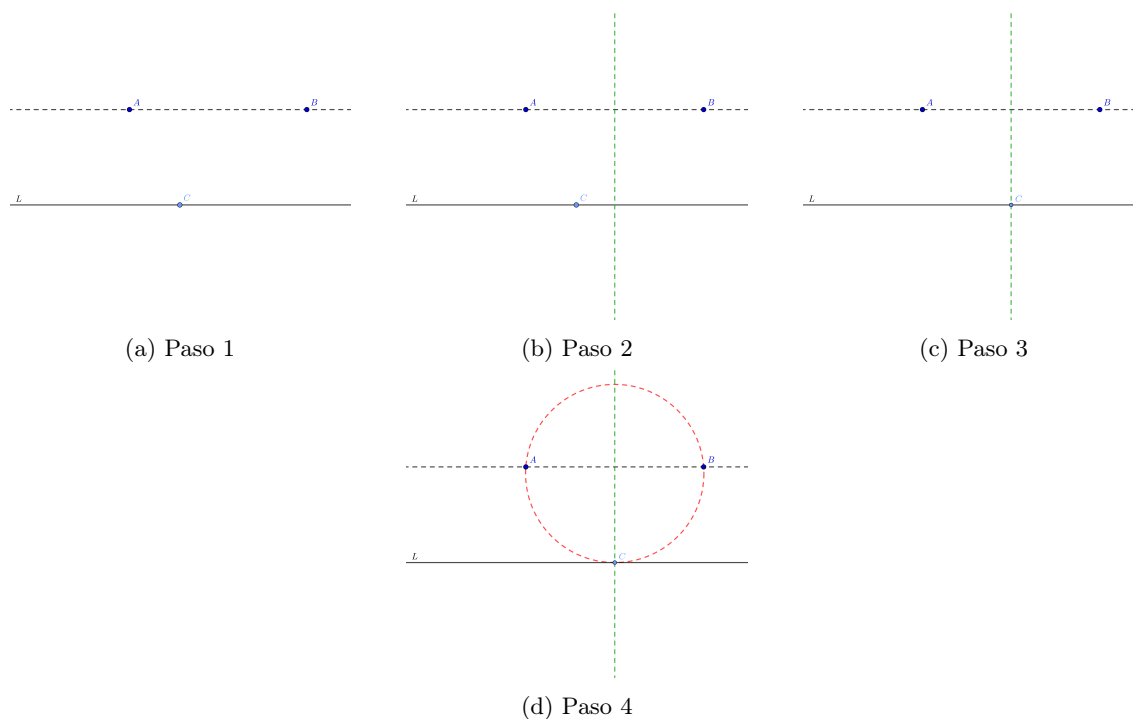


Figura 1.5: Solución geométrica problema 3 (PPR): Configuración 1

Configuración 2: Si los puntos A y B no están en una recta paralela a la recta L . Véase figura 1.6

Pasos para la construcción:

- a) Trazamos la recta AB .
- b) Hallamos la intersección de AB y la recta L (El punto de intersección es M).
- c) Trazar la circunferencia C_1 de diámetro AB .
- d) Desde M trazar una tangente a la circunferencia C_1 .
- e) Marcar el punto de tangencia T .
- f) Trazar circunferencia con centro M y radio MT .
- g) Hallar intersecciones entre la recta L y la circunferencia C_2 . (P y Q)
- h) Construir las circunferencias que pasan por A, B, P y A, B, Q .

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**
1.1. SOLUCIÓN POR MEDIO DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA

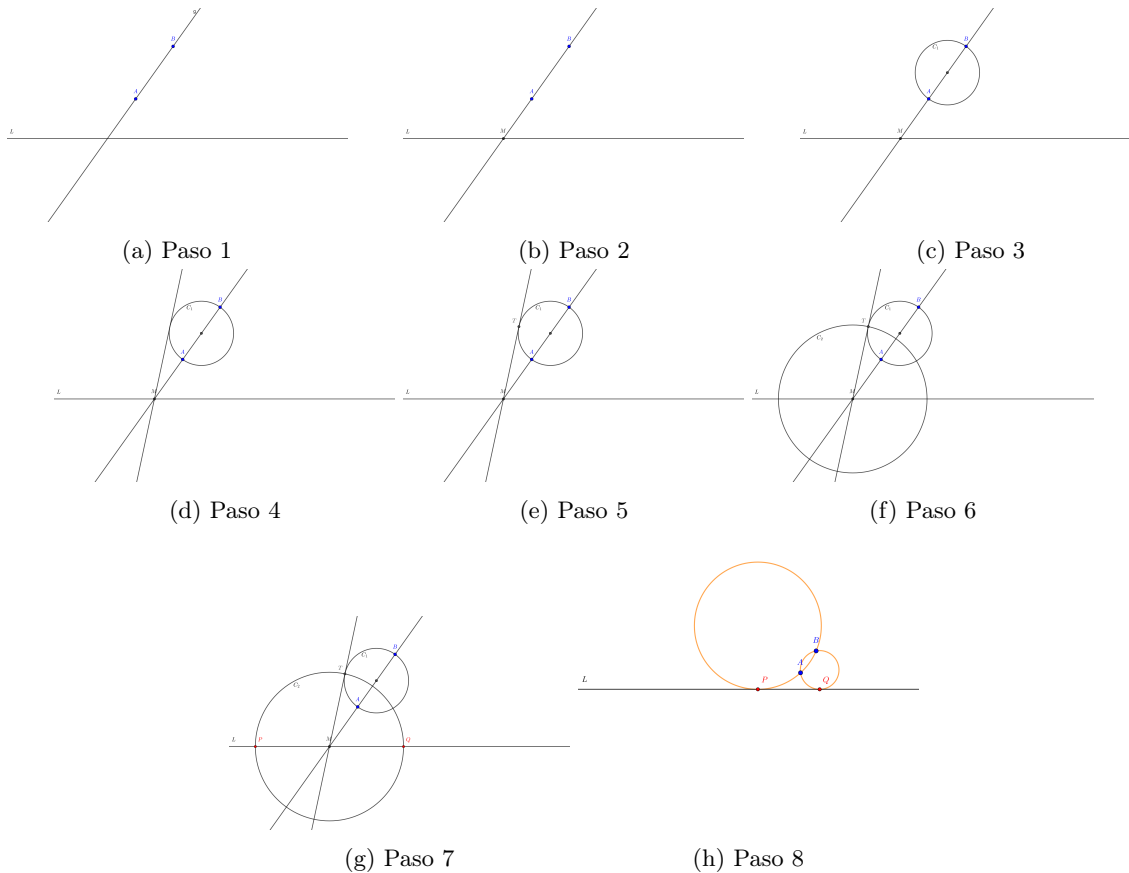


Figura 1.6: Solución geométrica problema 3 (PPR): Configuración 2

Configuración 3: Cuando uno de los puntos está sobre la recta L . Véase figura 1.7

Pasos para la construcción:

- a) Trazar el segmento AB .
- b) Trazar la mediatriz del segmento AB .
- c) Trazar perpendicular a la recta L , que pase por B .
- d) Hallar intersección de la mediatriz y la perpendicular a L (Punto C).
- e) Trazar circunferencia con centro C y radio BC .

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**
1.1. SOLUCIÓN POR MEDIO DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA

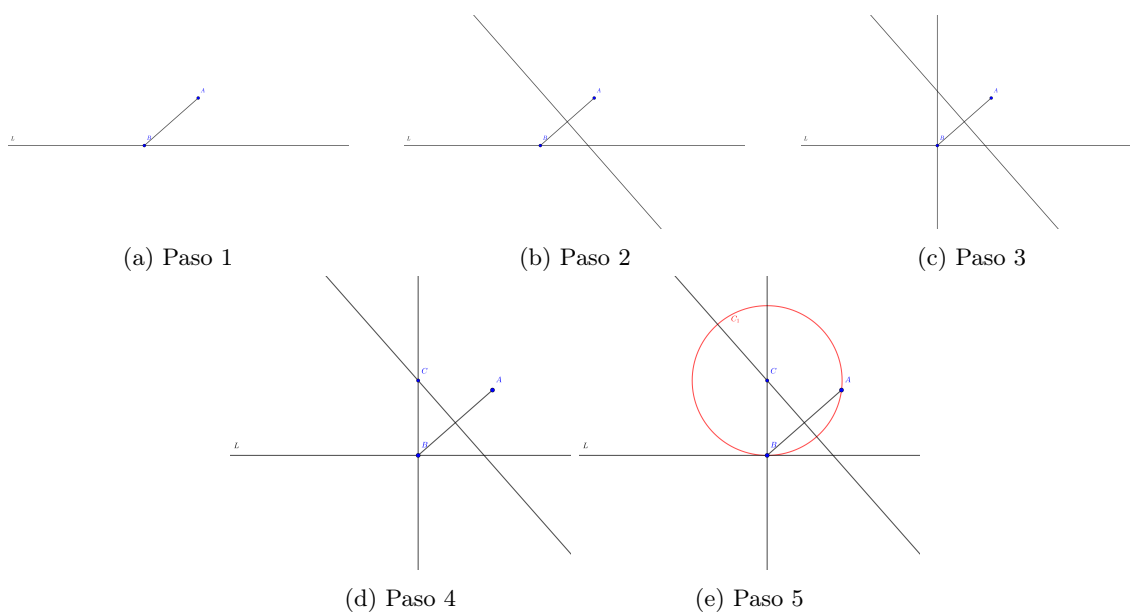


Figura 1.7: Solución geométrica problema 3 (PPR): Configuración 3

Configuración 4: Cuando los puntos están sobre una recta perpendicular a la recta L . Véase figura 1.8

Pasos para la construcción:

- a) Trazar la recta AB .
- b) Señalar la intersección de las recta L y AB , (punto P).
- c) Hallar el punto medio M_1 entre los puntos A y B .
- d) Trazar la perpendicular a la recta AB que pase por M_1 .
- e) Trazar la circunferencia con centro A y radio PM_1 .
- f) Marcar la intersección entre la perpendicular 1 y la circunferencia CA .
- g) Trazar circunferencia con centro C y radio CA .

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**
1.1. SOLUCIÓN POR MEDIO DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA

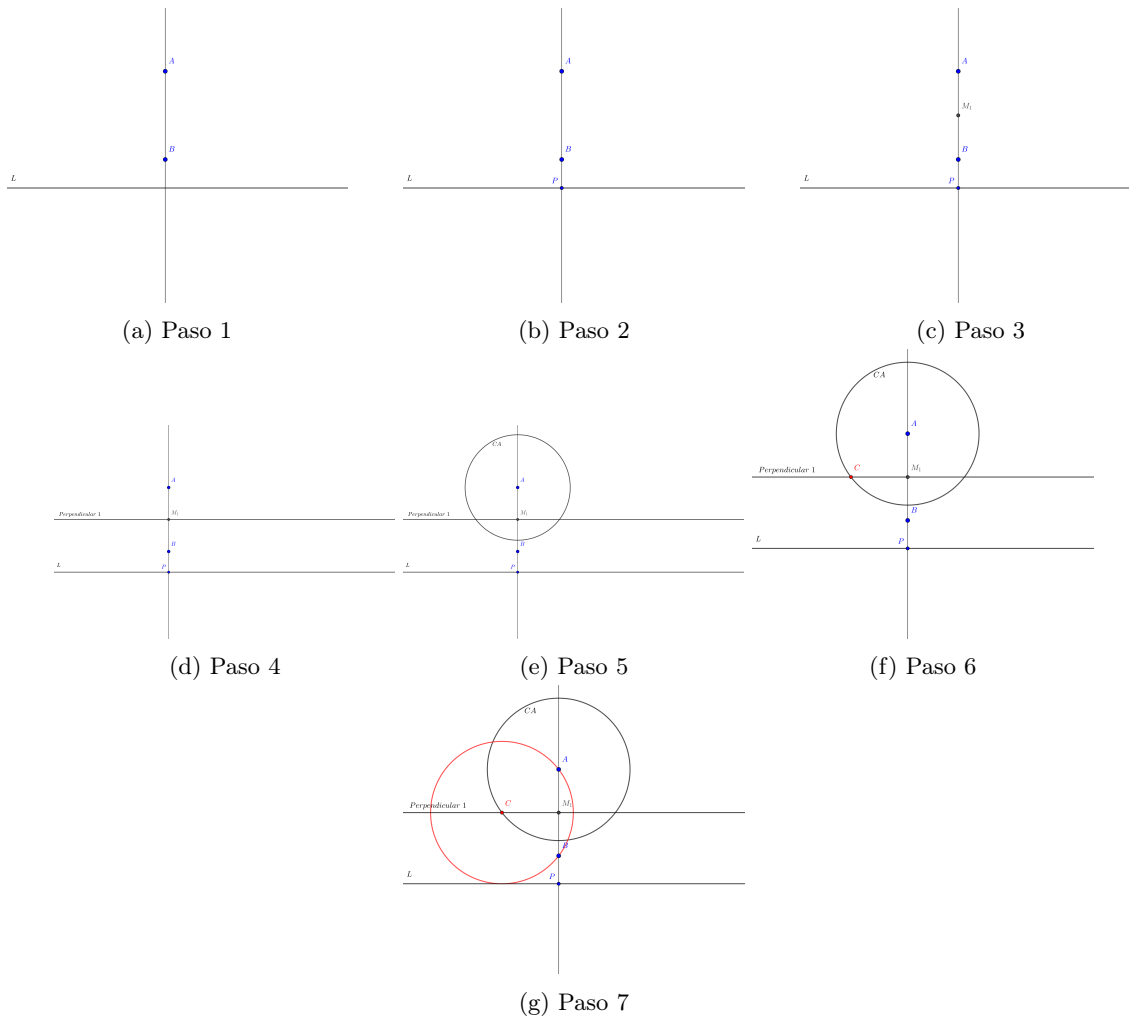


Figura 1.8: Solución geométrica problema 3 (PPR): Configuración 4

Problema 4: Dadas dos rectas y un punto, construir una circunferencia que sea tangente a las dos rectas y que contenga al punto (RRP).

Configuración 1: Si las rectas se cortan y el punto queda comprendido entre ellas. Véase figura 1.9

Pasos para la construcción:

- a) Trazar la bisectriz del ángulo formado por las rectas L y M .
- b) Hallar el punto simétrico del punto A respecto a la bisectriz.
- c) Realizar la construcción del problema 3: (PPR).

Configuración 2: Si el punto dado A pertenece a una de las rectas dadas. Véase figura 1.10

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**
1.1. SOLUCIÓN POR MEDIO DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA

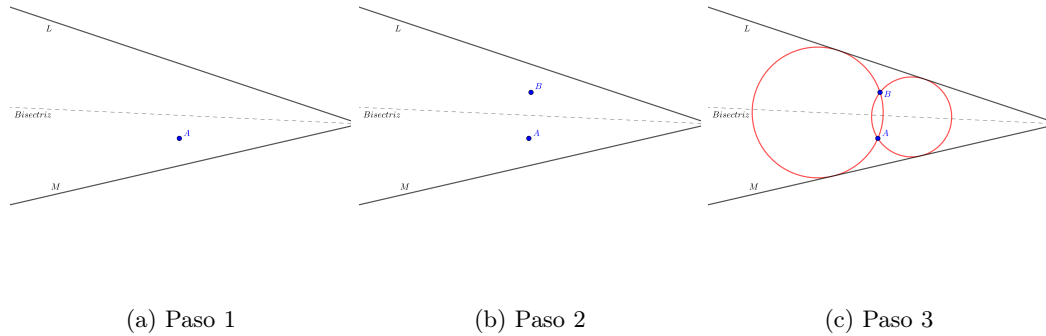


Figura 1.9: Solución geométrica problema 4 (RRP): Configuración 1

Pasos para la construcción:

- a) Trazar perpendicular P a la recta L por el punto A .
- b) Trazar las bisectrices de los ángulos determinados por las dos rectas.
- c) Hallar intersecciones entre la perpendicular y las bisectrices (P y Q).
- d) P y Q son los centros de las circunferencias buscadas.

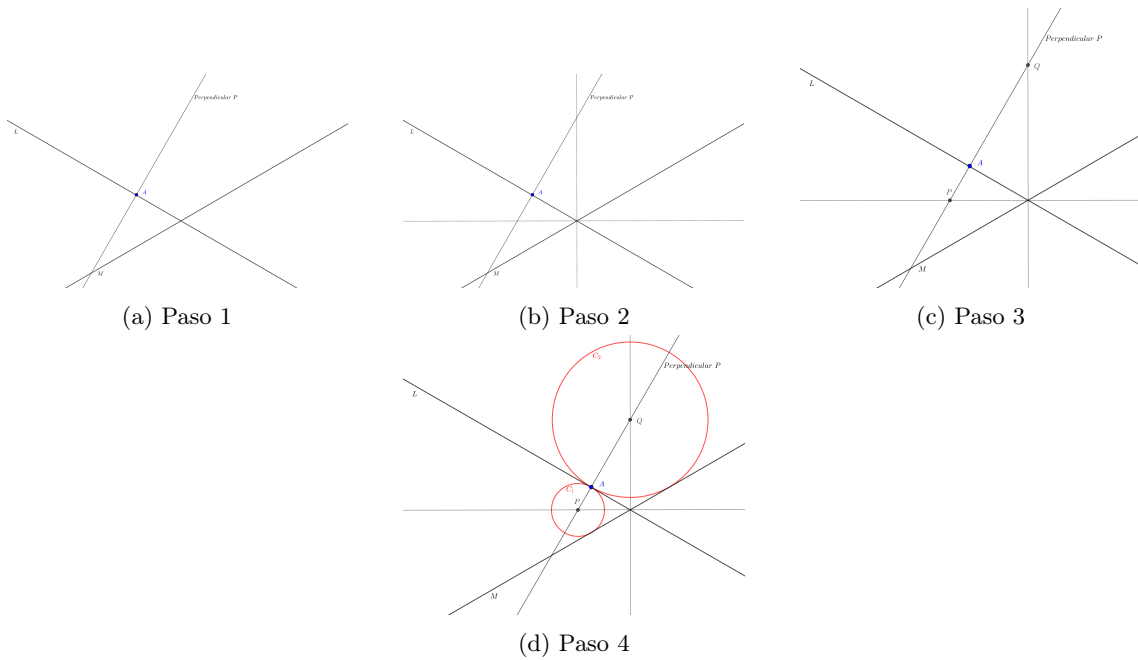


Figura 1.10: Solución geométrica problema 4 (RRP): Configuración 2

Configuración 3: El punto A está comprendido entre dos rectas que son paralelas.
Véase figura 1.11

Pasos para la construcción:

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**
1.1. SOLUCIÓN POR MEDIO DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA

- a) Trazar circunferencia con centro A y diámetro igual a la distancia entre las rectas.
- b) Trazar la paralela media M .
- c) Hallar intersecciones entre la circunferencia y la paralela media. (P y Q).
- d) P y Q son los centros de las circunferencias buscadas y los radio son AP y AQ .

Si el punto B está en una de las dos rectas dadas, la construcción se reduce a encontrar el centro, que es la intersección entre la media paralela y la recta que pasa por B y es perpendicular a la media paralela.

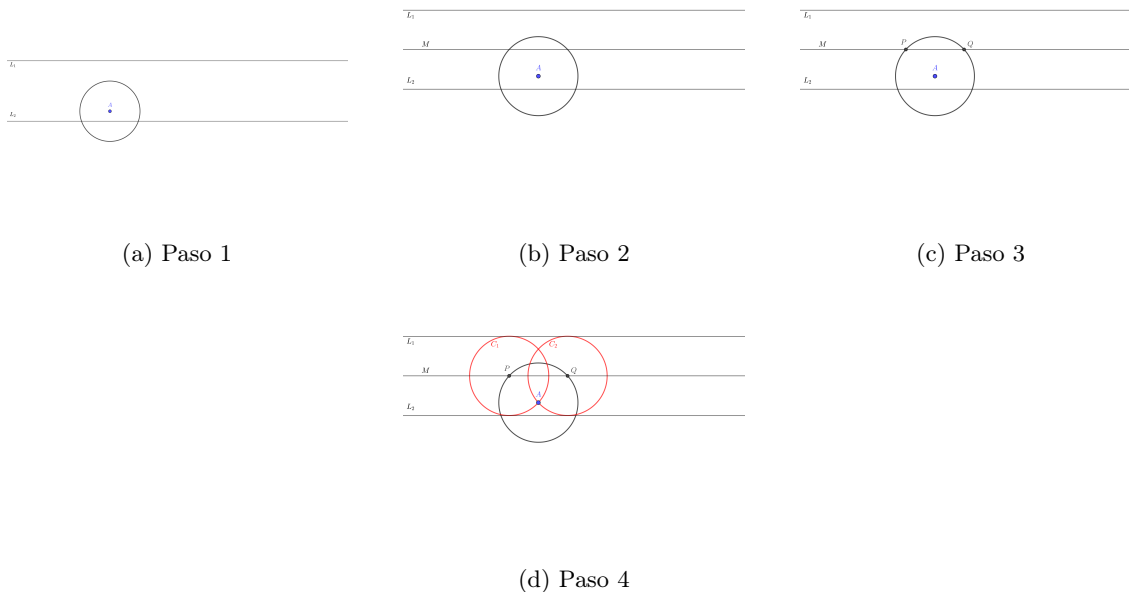


Figura 1.11: Solución geométrica problema 4 (RRP): Configuración 3

Problema 5: Dados dos puntos y una circunferencia, construir una circunferencia que contenga a los dos puntos y sea tangente a la circunferencia dada (PPC).

Este caso considera tres configuraciones

- I) Los puntos son exteriores a la circunferencia.
- II) Los puntos son interiores a la circunferencia.
- III) Uno de los puntos esta sobre la circunferencia y el otro puede ser interior o exterior.

A continuación se presenta la solución de I). Véase figura 1.12

- a) Trazar la recta AB .
- b) Trazar una circunferencia que pase por A y B , que corte la circunferencia.
- c) Trazar el eje radical de las circunferencias.

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**
1.1. SOLUCIÓN POR MEDIO DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA

- d) Hallar la intersección del eje radical con la recta $AB(k)$. Desde k trazar rectas tangentes a la circunferencia.
- e) Marcar los puntos de tangencia (L, M) .
- f) Trazar la circunferencia que pasa por A, B, L .
- g) Trazar la circunferencia que pasa por A, B, M .

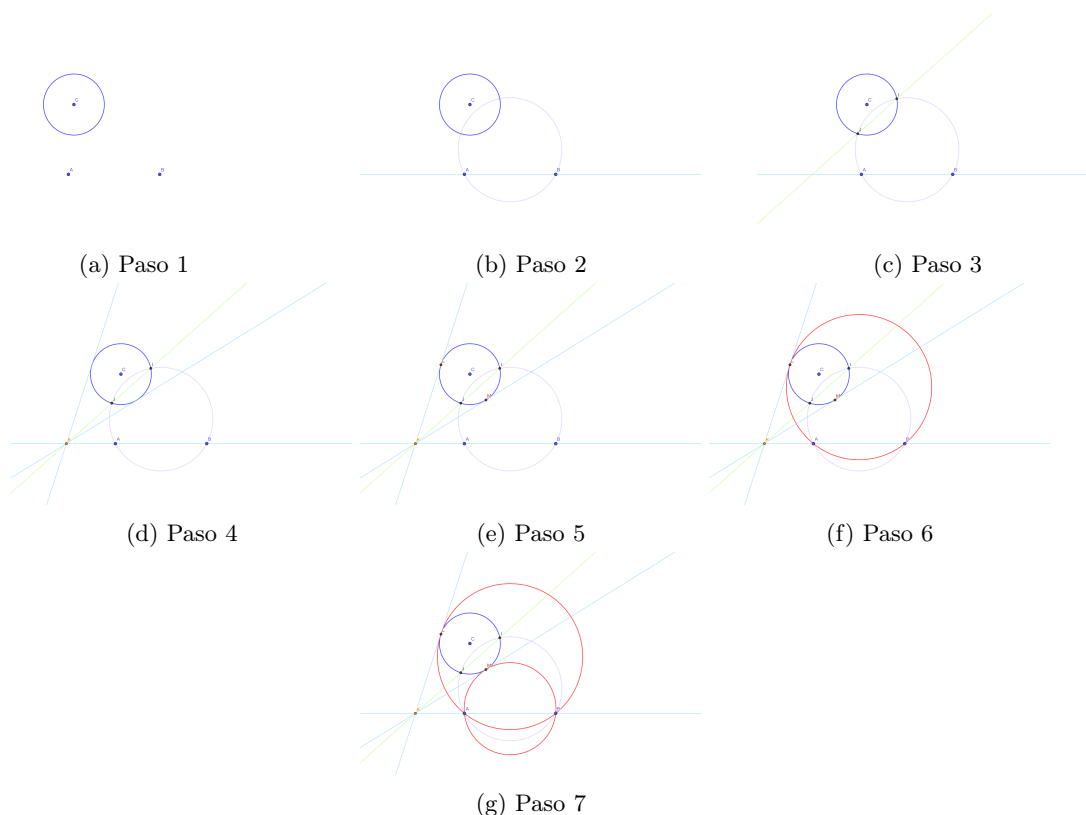


Figura 1.12: Solución geométrica problema 5 (PPC): Configuración 1

Problema 6: Dadas dos circunferencias y un punto, construir una circunferencia que contenga al punto y que sea tangente a las dos circunferencias dadas (CCP).

Configuración 1: Cuando el punto P es exterior a ambas circunferencias. Véase figura 1.13

Pasos para la construcción:

- a) Hallar los centros de homotecia directo e inverso.
- b) Trazar el segmento C_1C_2 (Que une los centros de las circunferencias dadas).
- c) Hallar las intersecciones del segmento C_1C_2 con las circunferencias dadas.
- d) Trazar la circunferencia que pasa por los puntos A, B y P .
- e) Trazar el segmento PH (Une el punto P con el centro de homotecia H).

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**
1.1. SOLUCIÓN POR MEDIO DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA

- f) Hallar la intersección entre el segmento PH y la circunferencia ABP .
- g) Ocultar las rectas tangentes, el segmento C_1C_2 , los puntos A, B, H y K .
- h) Para desarrollar el paso (9), seguir el problema 5 (PPC).
- i) Construir la circunferencia que pasa por P y M , tangente a la circunferencia C_1 .
- j) Se pueden obtener dos circunferencias más, repitiendo los pasos anteriores para el centro de homotecia inverso K .

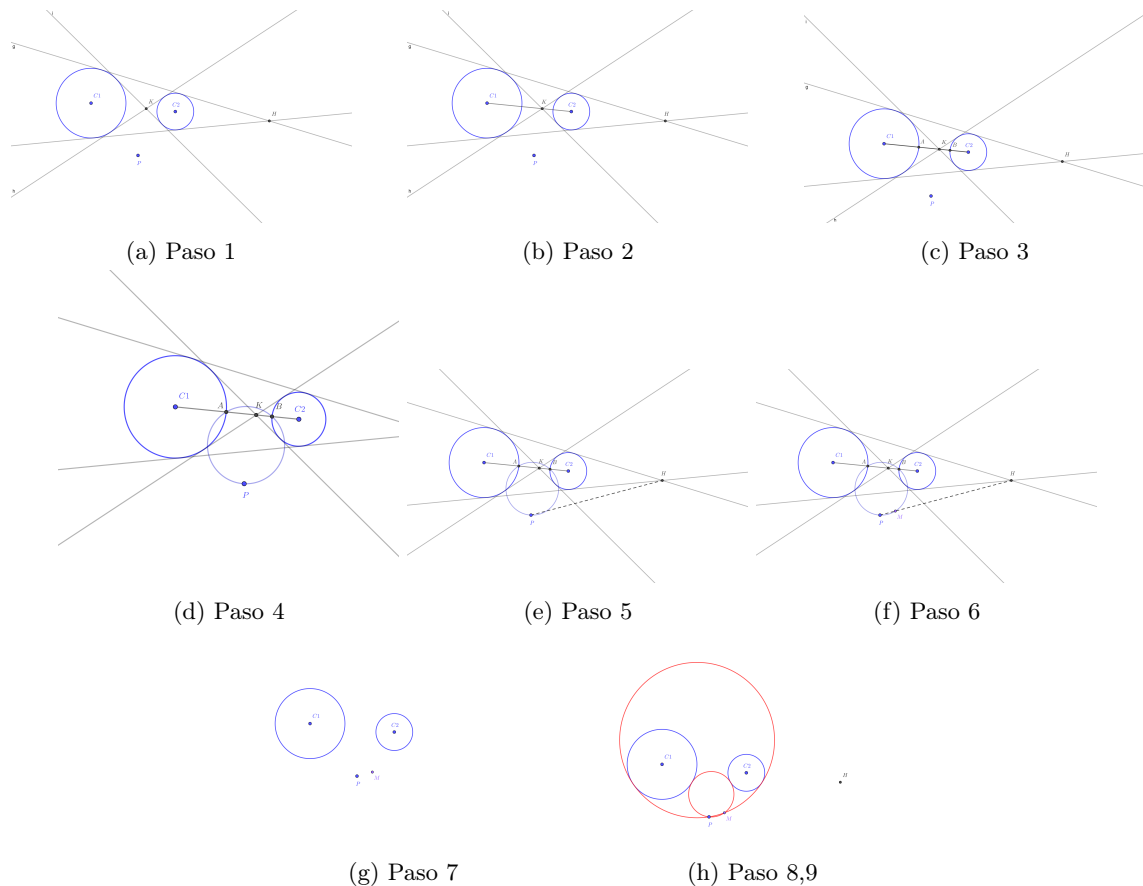


Figura 1.13: Solución geométrica problema 6 (CCP): Configuración 1

Configuración 2: Cuando el punto P pertenece a una de las circunferencias (C_2). Véase figura 1.14

Pasos para la construcción:

- a) Hallar los centros de homotecia directo e inverso (directo H , inverso K).
- b) Trazar la recta PH (del punto P al centro de homotecia H).
- c) Hallar la intersección de la recta PH con la circunferencia C_1 (punto Q).
- d) P y Q son los puntos de tangencia para una de las circunferencias buscadas.

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**
1.1. SOLUCIÓN POR MEDIO DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA

- e) Trazar las semirrectas C_1Q y C_2P .
- f) Hallar la intersección entre las rectas C_1Q y C_2P .
- g) Trazar la circunferencia de centro T_1 y radio T_1P .
- h) Ahora, trazar la recta PK .
- i) Hallar la intersección entre la recta PK y la circunferencia C_1 (punto R).
- j) P y R son los puntos de tangencia para otra de las circunferencias buscadas.
- k) Trazar las semirrectas C_1R y C_2P .
- l) Hallar la intersección entre las rectas C_1R y C_2P .
- m) Trazar la circunferencia de centro T_2 y radio T_2P .

Problema 7: Dadas dos rectas y una circunferencia, construir una circunferencia que sea tangente a las rectas y a la circunferencia dada (RRC).

Configuración 2: Cuando la circunferencia está comprendida entre dos rectas L y M . Véase figura 1.15

Pasos para la construcción:

- a) Determinar el radio de la circunferencia dada O .
- b) Trazar paralelas a cada lado de la recta L , a una distancia igual al radio de la circunferencia O .
- c) Trazar la bisectriz del ángulo formado por las rectas L y M .
- d) Hallar el punto simétrico del centro O respecto a la bisectriz. (punto O').
- e) Trazar la recta OO' .
- f) Señalar la intersección entre la recta OO' y la recta paralela L_1 . (punto M).
- g) Desde M , trazar tangentes a la circunferencia de diámetro OO' . Marcar los puntos de tangencia D y E .
- h) Trazar la circunferencia con centro en M y radio MD .
- i) Hallar las intersecciones de la paralela L_1 con la circunferencia CM de centro M .
- j) Trazar las perpendiculares a la paralela L_1 por los puntos A y B .
- k) Hallar las intersecciones de las perpendiculares halladas con la bisectriz.
- l) Los puntos P y Q son los centros de las circunferencias buscadas. Trazar circunferencias con centros en P y Q tangentes a las rectas L y M .
- m) Si se siguen estos pasos para la recta paralela L_2 , se obtienen otras dos circunferencias.

Problema 8: Dadas dos circunferencias y una recta, construir una circunferencia que sea tangente a la recta y a las dos circunferencias dadas (CCR). Véase figura 1.16

Pasos para la construcción:

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**
1.1. SOLUCIÓN POR MEDIO DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA

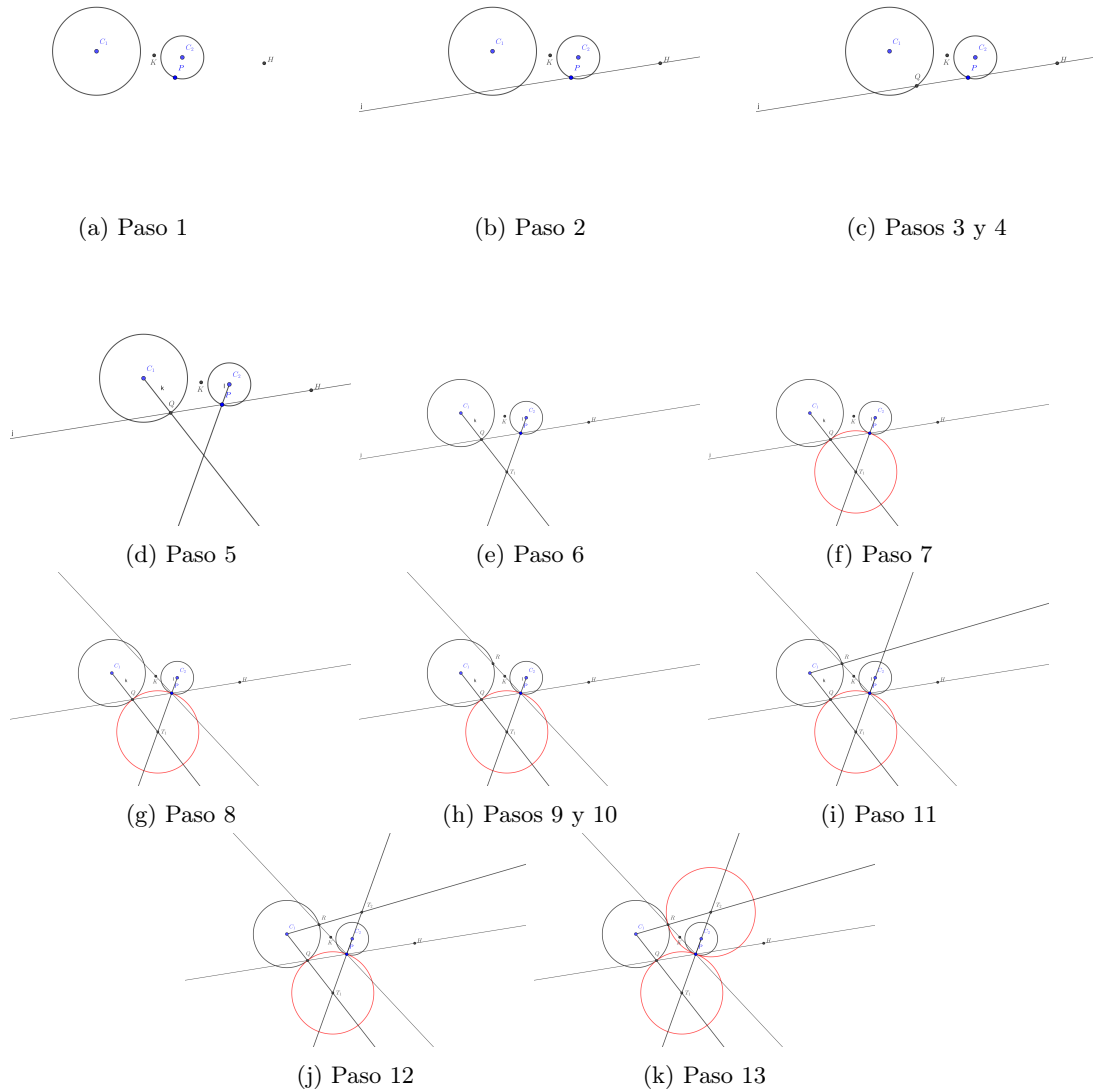


Figura 1.14: Solución geométrica problema 6 (CCP): Configuración 2

- a) Trazar una circunferencia auxiliar (C'_1) con radio $r_1 - r_2$ y una recta paralela a L a una distancia r_2 de L (R).
- b) Trazar una perpendicular a C'_1 y a la recta R y hallar sus puntos de intersección (A, B, D).
- c) Trazar una circunferencia auxiliar que pase por B, D, C_2 ($Aux1$).
- d) Trazar la recta AC_2 y hallar el punto de intersección con la circunferencia $Aux1$ (C'_2).
- e) Trazar la mediatriz del segmento $C_2C'_1$ (M) y trazar el punto k .
- f) Trazar una circunferencia auxiliar con centro en la mediatriz (k) y que pase por C_2 ($Aux2$).
- g) Hallar el punto de intersección de la recta AC_2 con la recta R (CR), éste será el centro radical.

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**
1.1. SOLUCIÓN POR MEDIO DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA

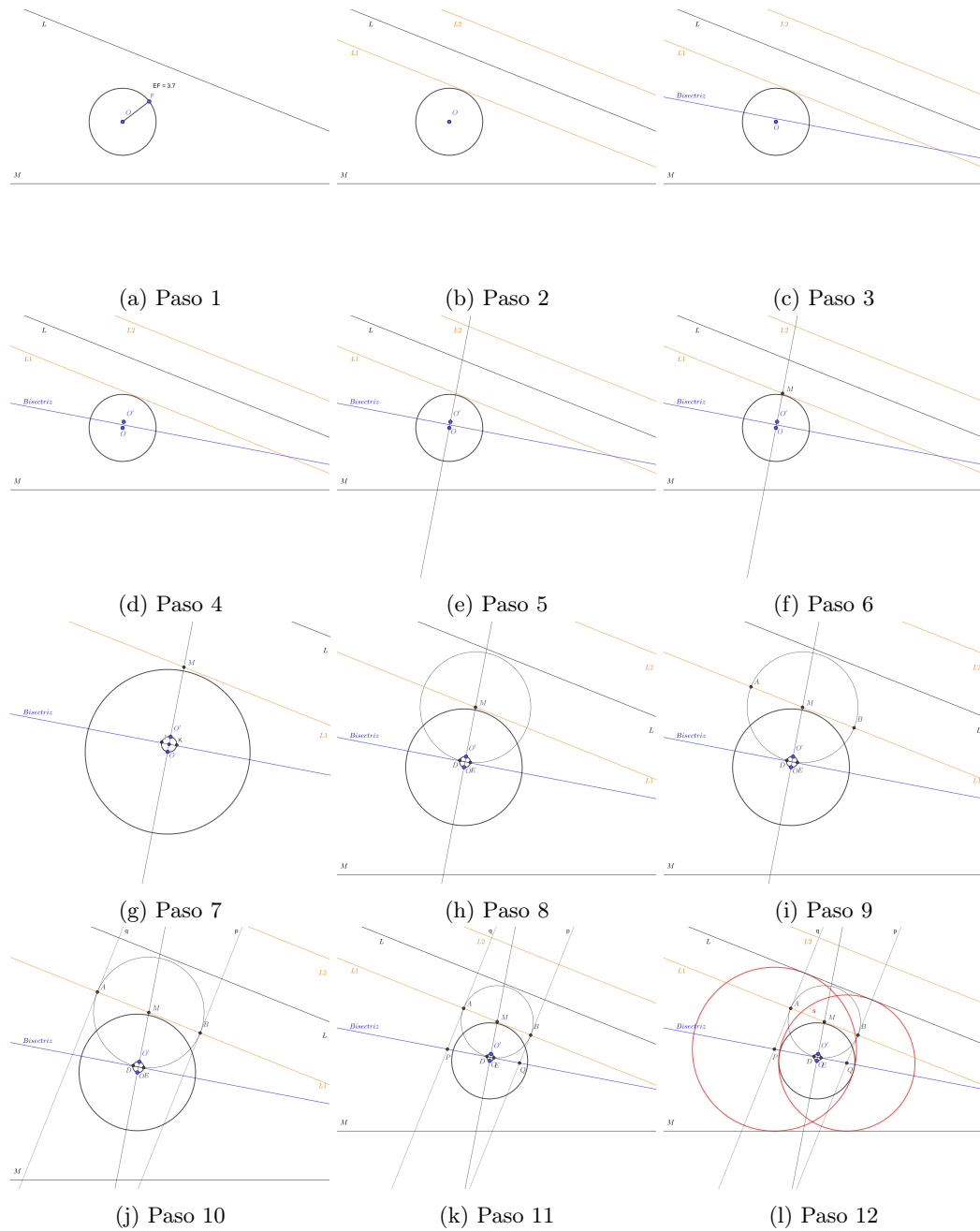


Figura 1.15: Solución geométrica problema 7 (RRC): Configuración 2

- h) Trazar una recta tangente desde CR hacia la circunferencia $Aux2$ y hallar el punto de tangencia T .
- i) Trazar una circunferencia con centro CR y que pase por T ($Aux3$).
- j) Hallar las intersecciones de la circunferencia $Aux3$ con la recta L , estos serán los puntos de tangencia de las circunferencias solución (T_1, T_2).
- k) Trazar rectas perpendiculares que pasen por los puntos T_1, T_2 y su intersección con M , estos

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**
1.1. SOLUCIÓN POR MEDIO DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA

serán los centros de las circunferencias solución (O_1, O_2).

- 1) Trazar las circunferencias con centro en O_1, O_2 y con radio O_1T_1, O_2T_2 respectivamente.

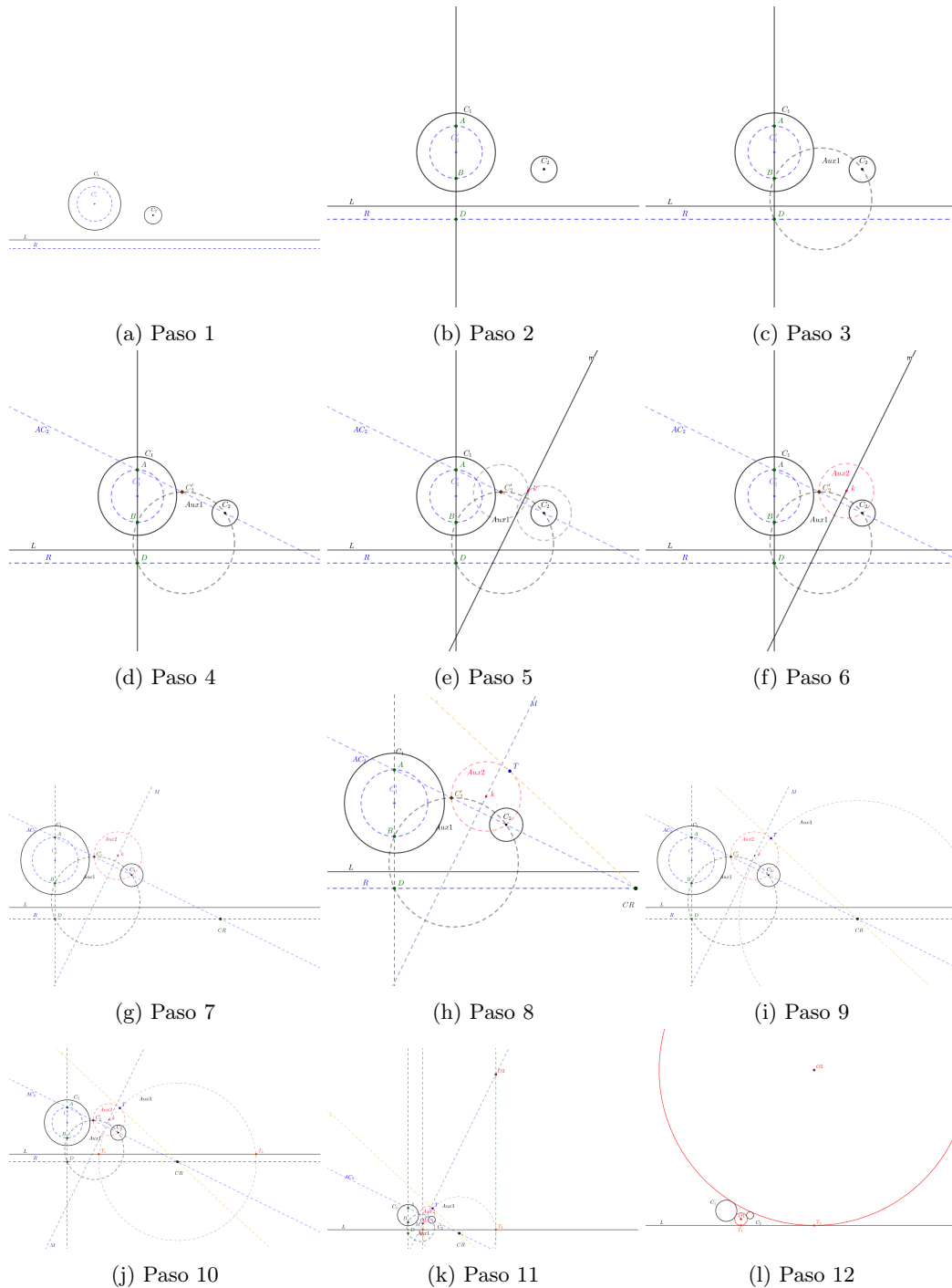


Figura 1.16: Solución geométrica problema 8 (CCR).

Problema 9: Dadas una circunferencia, una recta y un punto, construir una circun-

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA
1.1. SOLUCIÓN POR MEDIO DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA**

ferencia que pase por el punto y sea tangente a la recta y la circunferencia dada (CRP).

Configuración 1: El punto dado P está sobre la recta L . Véase figura 1.17.

Pasos para la construcción:

- a) Trazar un segmento perpendicular al centro de la circunferencia dada y hallar las intersecciones con ésta (puntos A, B).
- b) Unir los puntos A, B con el punto P y hallar las intersecciones con la circunferencia M, N , estos serán los puntos de tangencia.
- c) Trazar una recta perpendicular al punto $P(R)$.
- d) Unir los puntos M, N con el centro de la circunferencia ($L1, L2$).
- e) Hallar la intersección de la recta $L1$ con R y $L2$ con R , estos puntos son los centros de las circunferencias buscadas ($O1, O2$).
- f) Trazar la circunferencia con centro en $O1$ y radio $O1M$.
- g) Trazar la circunferencia con centro en $O2$ y radio $O2N$.

Configuración 2: El punto dado P está sobre la recta L . Véase figura 1.18.

Pasos para la construcción:

- a) Trazar un segmento perpendicular al centro de la circunferencia dada y hallar las intersecciones con ésta (puntos A, B).
- b) Unir los puntos A, B con el punto P y hallar las intersecciones con la recta $T1, T2$ estos serán los puntos de tangencia.
- c) Trazar una recta que pase por el centro de la circunferencia y el punto $P(R)$.
- d) Trazar una recta desde $T1, T2$ hacia R y hallar sus intersecciones ($O1, O2$) estos serán los centros de las circunferencias buscadas.
- e) Trazar las circunferencias con centro en $O1$, radio $O1T1$ y centro $O2$, radio $O2T2$ respectivamente.

Configuración 3: El punto dado P es exterior a la circunferencia. Véase figura 1.19.

Pasos para la construcción:

1. Trazar una perpendicular a la recta L .
2. Hallar las intersecciones de la perpendicular con la circunferencia, O , es el centro de inversión, A y la intersección de la perpendicular y la recta dada A' .
3. Hallar las mediatrices de los segmentos AP y PA' y su intersección (k).
4. Trazar una circunferencia que pase por A, A', P (C_1).
5. Trazar la recta OP y su intersección con la circunferencia C_1 (P').

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**
1.1. SOLUCIÓN POR MEDIO DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA

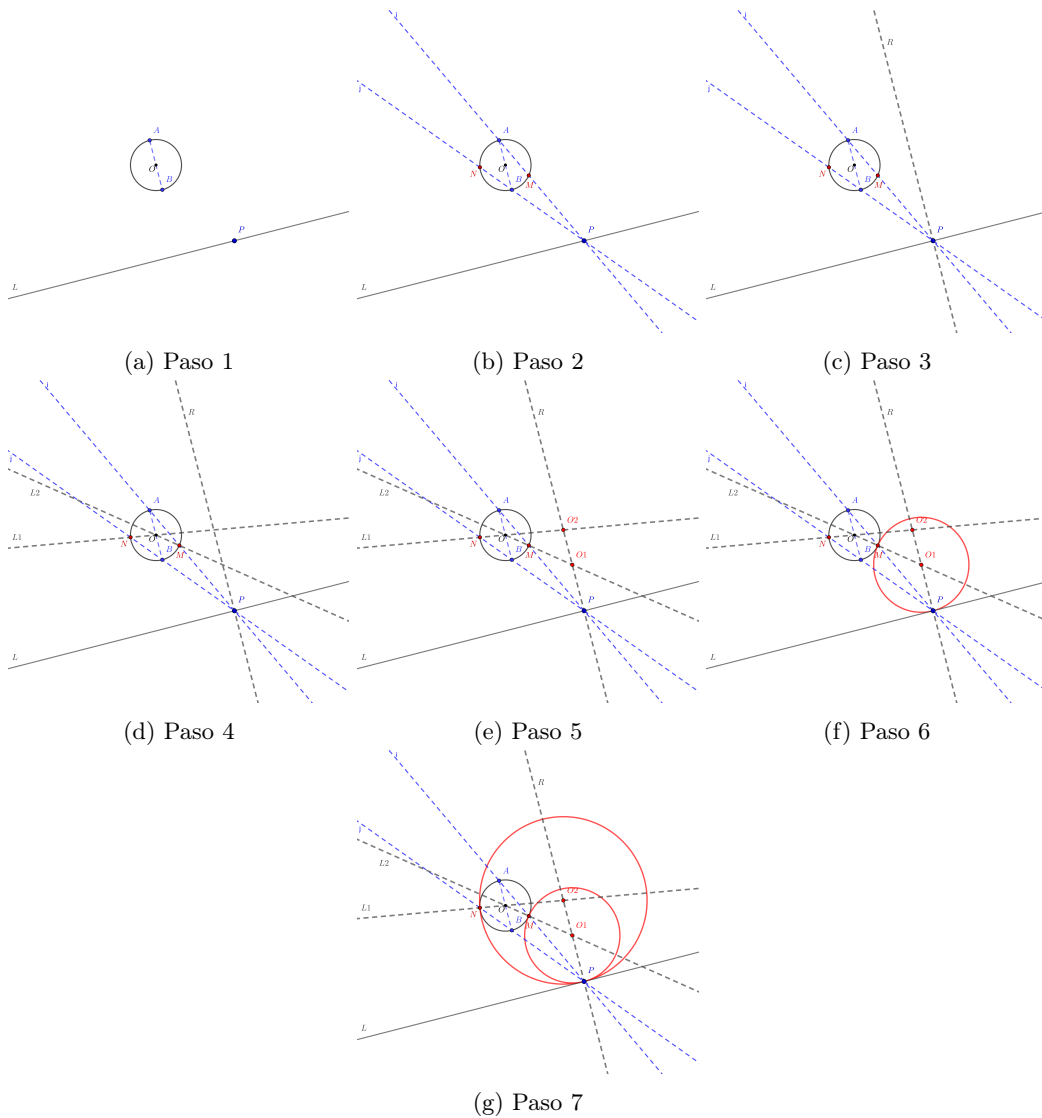


Figura 1.17: Solución geométrica problema 9 (PRC): Configuración 1.

6. Trazar el centro radical auxiliar (CR).
7. Trazar las rectas tangentes desde CR a la circunferencia C_1 y trazar los puntos de tangencia (t, t').
8. Trazar una semicircunferencia con centro en CR y radio CRt' y hallar las intersecciones con la recta L estos serán puntos de tangencia (T', T'_1).
9. Trazar la recta OT' y la recta OT'_1 y hallar sus intersecciones con la circunferencia inicial (T, T_1).
10. Trazar las rectas CT y CT_1 .
11. Trazar una recta perpendicular al punto T' y otra al punto T'_1 y las intersecciones con las rectas CT y CT_1 respectivamente, estos serán los centros de las circunferencias deseadas.

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**
1.1. SOLUCIÓN POR MEDIO DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA

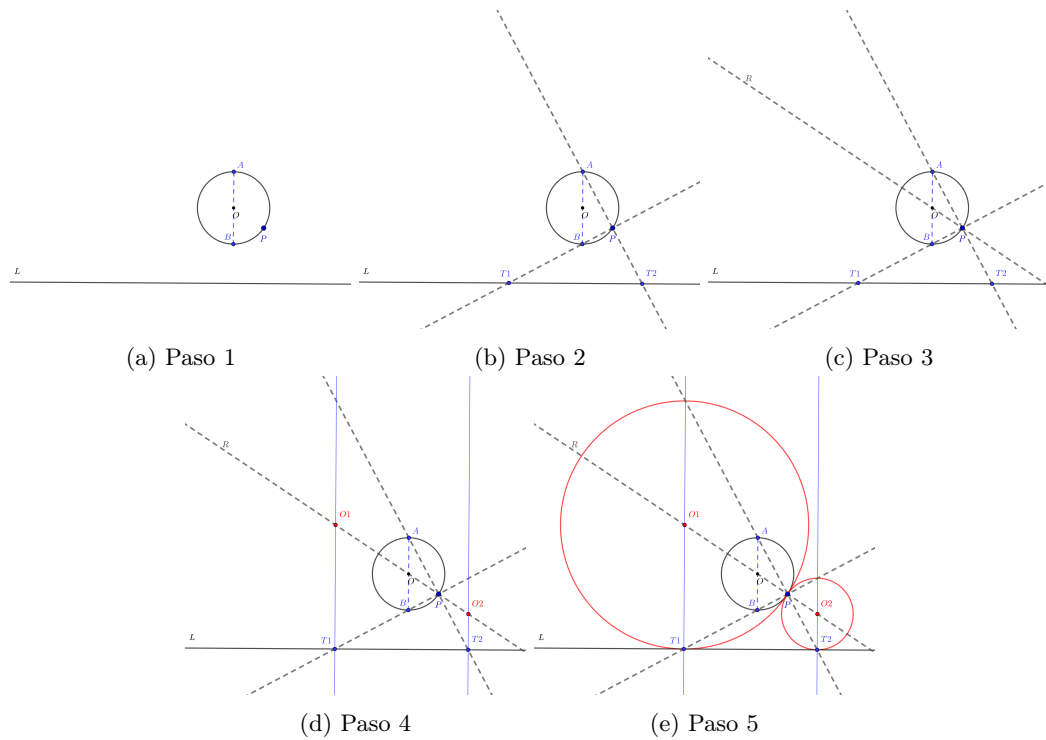


Figura 1.18: Solución geométrica problema 9 (PRC): Configuración 2.

12. Trazar las circunferencias con centro O_1 , radio O_1T_1 y con centro en O_2 , radio O_2T_2 .

Problema 10: Dados tres círculos, construir una circunferencia que sea tangente a los tres círculos dados (CCC). Véase figura 1.20.

Pasos para la construcción:

- a) Trazar dos circunferencias auxiliares con centro en O_2 y O_3 y radio $r_2 - r_1$ y $r_3 - r_2$ respectivamente $Aux1, Aux2$.
- b) Unir los centros O_2 y O_3 y encontrar su intersección con las circunferencias $Aux1, Aux2$. (R, S)
- c) Trazar un segmento perpendicular al centro O_2 y al centro O_3 .
- d) Encontrar las intersecciones de los segmentos con sus respectivas circunferencias auxiliares.
- e) Unir las intersecciones, encontrar el punto de intersección (M) este será el centro de inversión.
- f) Unir el punto M con el centro O_1 (MO_1).
- g) Unir el centro O_1 con los puntos R y S .
- h) Dibujar la circunferencia que pasa por R, S, O_1 (O_4).
- i) Hallar el punto de intersección de O_4 con la recta MO_1 (O_1').
- j) Trazar una recta que pasa por los puntos de intersección de la circunferencia O_4 y la circunferencia $Aux2$.

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**
1.1. SOLUCIÓN POR MEDIO DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA

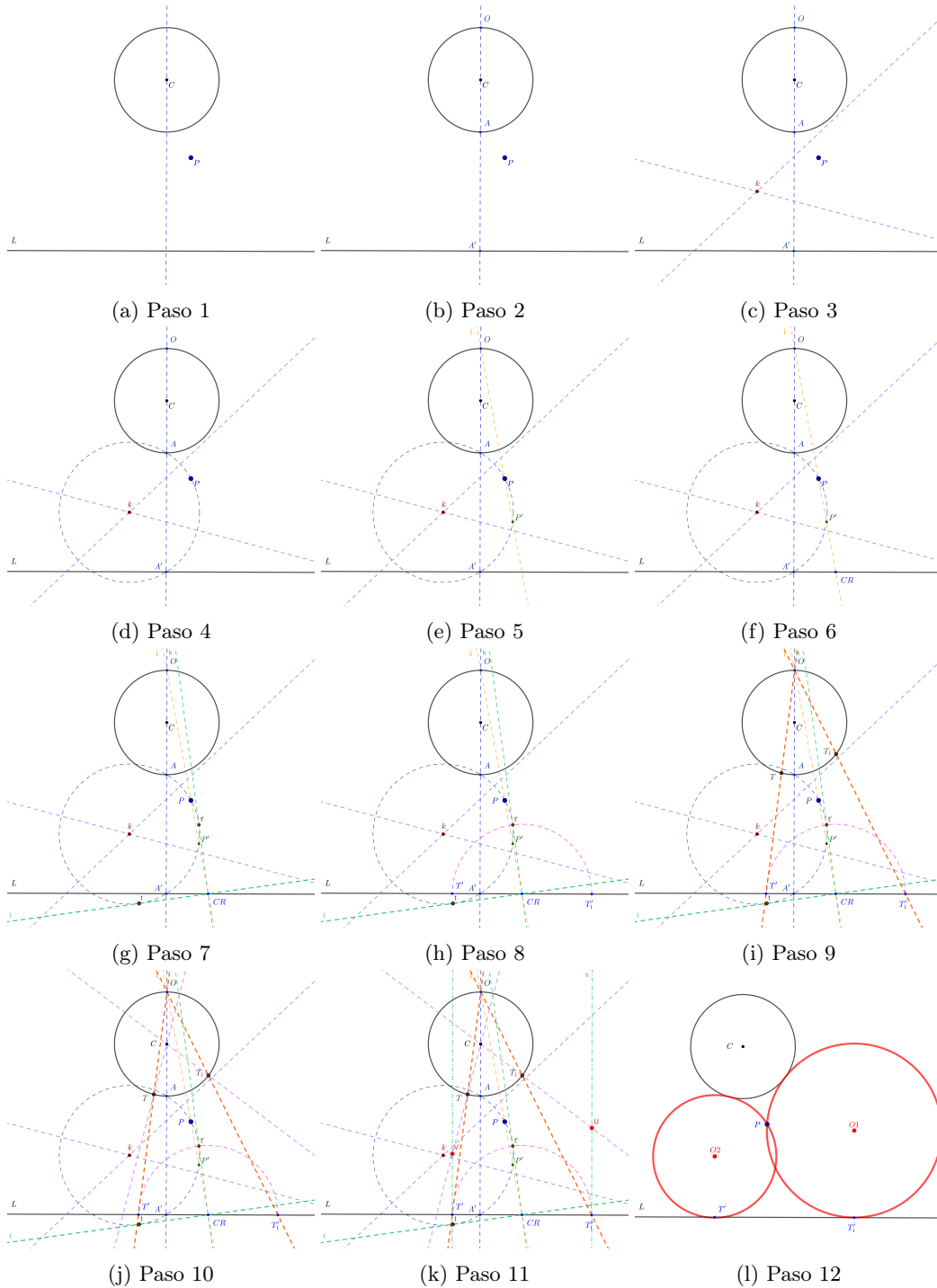


Figura 1.19: Solución geométrica problema 9 (PRC): Configuración 3

- k) Hallar la intersección de la recta anterior con la recta $MO1$.
- l) Trazar el segmento $PO2$.
- m) Hallar el punto medio del segmento $PO2$ (h).

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA
1.1. SOLUCIÓN POR MEDIO DE GEOMETRÍA EUCLIDEANA**

- n) Dibujar un arco de circunferencia con centro en h y radio $hO2$.
- ñ) Hallar los puntos de intersección del arco con la circunferencia $aux2$ ($T1, T2$).
- o) Trazamos la mediatriz del segmento $O1O1'$.
- p) Unir los puntos $T1, T2$ con el punto $O2$ y hallar los puntos de intersección con la mediatriz de $O1O1'$ ($O5, O6$).
- q) Unir los puntos $O5, O6$ con los centros dados inicialmente $O1, O2, O3$ y hallar los puntos de intersección $T3, T4, T5, T6, T7, T8$ (Puntos de tangencia).
- r) Trazar las circunferencias con centro en $O5, O6$ y radio hacia uno de sus puntos de tangencia.
- s) Esas circunferencias son las soluciones al problema.

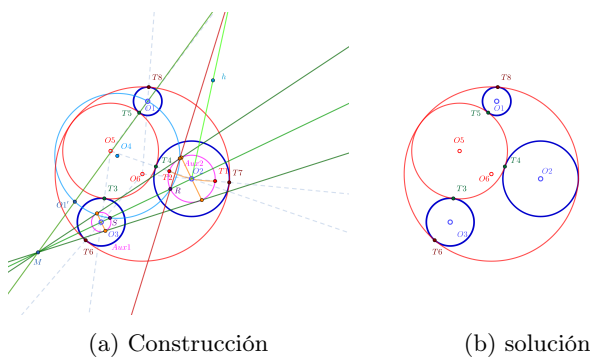


Figura 1.20: Solución geométrica problema 10 (CCC).



CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA

1.2. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO MEDIANTE GEOMETRÍA ANALÍTICA

1.2. Solución del problema de Apolonio mediante Geometría Analítica

Descartes encontró una relación entre los radios de cuatro radios tangentes disjuntos entre sí, resultado que hoy en día es conocido como el teorema de los 4 círculos de Descartes, el cual antes de enunciarlo definiremos los siguientes conceptos.

Definición 1.2. 1. *Círculo interno:* Dado cualquier triángulo, el círculo interno es el círculo más grande contenido en el triángulo, el cual es tangente a los tres lados, cuyo centro y radio se denominan **incentro** e **inradio** respectivamente.

2. Dado un triángulo, extiende dos lados en la dirección opuesta a su vértice común. La circunferencia tangente a estas dos líneas y al tercer lado del triángulo se llama **excírculo**, cuyo centro y radio se denominan **excentro** y **exradio** respectivamente.

3. **Semiperímetro:** La mitad del perímetro de un polígono. (Se usará el semiperímetro del triángulo, entonces $S = \frac{a+b+c}{2}$ para nuestros propósitos.)

4. **Curvatura del círculo:** La curvatura se define como el recíproco del radio $r' = \frac{1}{r}$.

5. **Círculo orientado:** Un círculo con una dirección asignada del vector normal unitario, que apunta hacia adentro o hacia afuera. Un radio positivo implica un vector normal que apunta hacia adentro (círculo más pequeño), y un radio negativo implica un vector normal que apunta hacia afuera (círculo más grande).

Teorema 1.2. (Cuatro círculos)

Supongamos que los radios de los círculos originales son $a_1, a_2, a_3 > 0$ y el cuarto círculo tiene un radio a_4 entonces

$$2 \sum_{i=1}^4 \frac{1}{a_i^2} = \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{a_i} \right)^2 \quad (1.1)$$

Observación 1.2. Si comenzamos con tres círculos tangentes entre sí con curvaturas k_1, k_2 y k_3 respectivamente, podemos resolver 1.1 en términos de la curvatura k_4 obteniendo así que $k_4^\pm = k_1 + k_2 + k_3 \pm \sqrt{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3}$ por lo que obtendremos dos curvaturas distintas, por ende, obtendremos exactamente dos circunferencias que resuelven el Problema de Apolonio, uno con curvatura k_4^+ y otro con curvatura k_4^- dando así una cota óptima al número de soluciones al problema de Apolonio en el caso 10, hecho notorio en la demostración del Teorema de los cuatro círculos de Descartes.

Demostración: [Teorema de Cuatro círculos]

La clave para iniciar esta prueba es reconocer que los cuatro círculos mutuamente tangentes son parte de una configuración de ocho círculos, cada uno pasando por los puntos de tangencia de los otros.

Sean $b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4$ las curvaturas de estos ocho círculos, tales que los círculos con curvaturas b_i son mutuamente tangentes, así como los círculos con curvatura k_i , $i = 1, 2, 3, 4$; por definición la curvatura es el recíproco del radio del círculo dado.

El teorema establece que si $2 \sum b_i^2 = (\sum b_i)^2$ se cumple, del mismo modo $2 \sum k_i^2 = (\sum k_i)^2$ también se cumple.

Sean a, b, c, s, r, r_e los lados (a, b, c) el semiperímetro (s) , el inradio (r) y el primer exradio (r_e) , de

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**

1.2. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO MEDIANTE GEOMETRÍA ANALÍTICA

un triángulo ABC tal que $r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$ y $r_e^2 = \frac{s(s-b)(s-c)}{(s-a)}$.

Se puede considerar que tres circunferencias mutuamente tangentes tienen centros A, B, C y radios $s-a, s-b, s-c$ en el caso de un contacto externo o bien radios $s, s-c, s-b$ en el caso de contacto interno.

Contacto Externo:

Sea $r = \frac{1}{k_1}, s-a = \frac{1}{b_2}, s-b = \frac{1}{b_3}, s-c = \frac{1}{b_4}$, entonces tenemos definidos el radio de los tres círculos mutuamente tangentes con curvaturas b_2, b_3, b_4 , así como el inradio del incírculo del triángulo ABC , con curvatura k_1 .

Expandiendo el lado derecho de (1.1) notamos que

$$\left(\sum b_i\right)^2 = \sum b_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} b_i b_j. \quad (1.2)$$

Sabemos que $r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$ al invertir esta ecuación obtenemos lo siguiente:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Además $k_1 = \frac{1}{r}$ por definición, si elevamos al cuadrado ambos términos tenemos $k_1^2 = \frac{1}{r^2}$, entonces

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \frac{s}{\frac{1}{b_2} \frac{1}{b_3} \frac{1}{b_4}} = \frac{s}{b_2 b_3 b_4} \\ &= s(b_2 b_3 b_4). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Como s es el semi perímetro del triángulo ABC , $s = (s-a) + (s-b) + (s-c)$ y sustituyendo en 1.3 tenemos:

$$\begin{aligned} k_1^2 &= s(b_2 b_3 b_4) = [(s-a) + (s-b) + (s-c)] (b_2 b_3 b_4) \\ &= \left(\frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \frac{1}{b_4}\right) (b_2 b_3 b_4) \\ &= b_3 b_4 + b_2 b_3 + b_2 b_4 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\therefore k_1^2 = b_2 b_3 + b_2 b_4 + b_3 b_4. \quad (i)$$

Contacto Interno:

Sea $\frac{1}{k_1} = r_e, -s = \frac{1}{b_2}, s-c = \frac{1}{b_3}, \frac{1}{b_4} = s-b$ (el signo $-$ es para especificar el contacto interno).

Entonces tenemos definidos los radios de los 3 círculos mutuamente tangentes con curvatura b_2, b_3, b_4 así como el radio del primer excírculo del triángulo ABC con curvatura k_1 .

Sabemos que $r_e^2 = \frac{s(s-b)(s-c)}{c-a}$ invirtiendo tenemos: $\frac{1}{r_e^2} = \frac{(s-a)}{-s(s-b)(s-c)}$, además sabemos que $k_1 = \frac{1}{r_e}$, si elevamos al cuadrado tenemos $k_1^2 = \frac{1}{r_e^2}$, entonces:

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{s-a}{-s(s-b)(s-c)} \\ &= \frac{s-a}{\frac{1}{b_2 b_3 b_4}} \\ &= (s-a)(b_2 b_3 b_4). \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**

1.2. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO MEDIANTE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Por construcción podemos hacer $a = b - c$, con lo cual nos queda

$$(s - b - c)(b_2 b_3 b_4). \quad (1.6)$$

Así, llegamos a

$$\begin{aligned} k_1^2 &= (s - b - c)(b_2 b_3 b_4) \\ &= (s - b - c + s - s)(b_2 b_3 b_4) \\ &= -s + (s - b) + (s - c)(b_2 b_3 b_4) \\ &= \left(\frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \frac{1}{b_4} \right) (b_2 b_3 b_4) \\ &= b_2 b_3 + b_2 b_4 + b_3 b_4. \\ \therefore k_1^2 &= b_2 b_3 + b_2 b_4 + b_3 b_4. \end{aligned} \quad (i)$$

Del mismo modo, si en lugar de ello elegimos las tres circunferencias mutuamente tangentes con curvaturas k_2, k_3, k_4 y el incírculo o excírculo b_1 encontraríamos que $k_3 k_4 + k_2 k_4 + k_2 k_3 = b_1^2$. Obsérvese que inicialmente, pudimos elegir las tres circunferencias mutuamente tangentes de forma arbitraria. Por lo tanto podemos permutar los subíndices 1, 2, 3, 4 para obtener:

$$k_2^2 = b_3 b_4 + b_4 b_1 + b_1 b_3 \quad (ii)$$

$$k_3^2 = b_1 b_4 + b_4 b_2 + b_2 b_1 \quad (iii)$$

$$k_4^2 = b_3 b_1 + b_1 b_2 + b_2 b_3 \quad (iv)$$

Sumando las ecuaciones ii,iii,iv, obtenemos:

$$\begin{aligned} k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 &= b_2 b_3 + b_2 b_4 + b_3 b_4 + b_3 b_4 + b_4 b_1 + b_1 b_3 + \\ &+ b_1 b_4 + b_4 b_2 + b_2 b_1 + b_3 b_1 + b_1 b_2 + b_2 b_3. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Lo cual puede ser escrito también como:

$$\sum k_i^2 = 2 \sum b_i b_j. \quad (1.9)$$

Similarmente, como se menciona en el párrafo anterior, si se seleccionan tres círculos mutuamente tangentes con curvaturas k_i y el respectivo incírculo b_i obtenemos

$$\sum b_i^2 = 2 \sum k_i k_j. \quad (1.10)$$

Por tanto combinando (1.2),(1.9),(1.10) obtenemos:

$$\left(\sum b_i \right)^2 = \sum b_i^2 + 2 \sum b_i b_j = \sum b_i^2 + 2 \sum k_i k_j + \sum k_i^2 = \left(\sum k_i \right)^2. \quad (1.11)$$

Por lo que:

$$\sum b_i = \sum k_i \quad (1.12)$$

Queremos probar que $\sum b_i^2 = \sum k_i^2$. Considere

$$\begin{aligned} -b_1^2 + (b_2 + b_3 + b_4)^2 &= -b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + 2(b_2 b_3 + b_2 b_4 + b_3 b_4) \\ &= -b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + 2k_1 \\ &= -b_1^2 + k_1 k_3 + k_1 k_4 + k_3 k_4 + k_1 k_2 + k_1 k_4 + k_2 k_4 + k_1 k_3 + k_1 k_2 + k_2 k_3 + 2k_1^2 \\ &= 2k_1(k_2 + k_3 + k_4) + 2k_1^2 \\ &= 2k_1 \sum k_i \\ &= 2k_1 \sum b_i. \end{aligned} \quad (1.13)$$

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**

1.2. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO MEDIANTE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Entonces

$$-b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 2k_1$$

. Sumando cuatro de estas ecuaciones después de elevar al cuadrado cada lado, obtenemos:

$$\sum b_i^2 = \sum k_i^2. \quad (1.14)$$

Por lo tanto por (1.11), (1.14)

$$2 \sum b_i^2 = \sum b_i^2 + \sum k_i^2 = (\sum b_i)^2.$$

Lo cual completa la prueba. ■

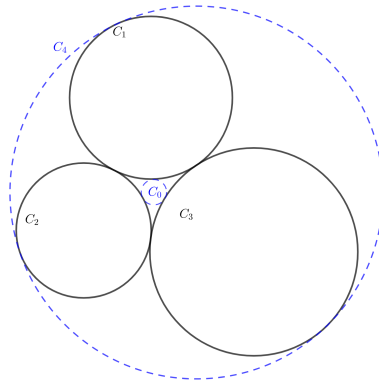


Figura 1.21: Los tres círculos iniciales C_1, C_2, C_3 , y los dos círculos mutuamente tangentes C_0 y C_4 garantizadas por el teorema de Apolonio.

Observación 1.3. Una consecuencia inmediata del teorema del círculo de Descartes es que, dada la curvatura de tres círculos mutuamente tangentes, C_1, C_2 y C_3 podemos resolver las curvaturas de los dos círculos que son mutuamente tangentes a los tres círculos originales. De esta nueva colección de cuatro círculos mutuamente tangentes, podemos elegir arbitrariamente tres de ellos y resolver la curvatura de dos nuevos círculos que son mutuamente tangentes a esta selección de tres círculos, estos se llaman **círculos apolíneos**. Sumando los dos círculos apolíneos C_4 y C_5 a los tres originales, ahora tenemos cinco círculos.

Tome uno de los dos círculos apolíneos, digamos C_4 . Es tangente a C_1 y C_2 , por lo que el triplete de círculos C_4, C_1 y C_2 tiene sus propios dos círculos apolíneos. Ya conocemos uno de estos, es C_3 , pero el otro es un nuevo círculo C_6 .

De manera similar podemos construir otro nuevo círculo C_7 que sea tangente a C_4, C_2 y C_3 , y otro círculo C_8 a partir de C_4, C_3 y C_1 . Esto nos da 3 nuevos círculos. Podemos construir otros tres círculos nuevos a partir de C_5 , dando seis círculos nuevos en total. Junto con los círculos C_1 a C_5 , da un total de 11 círculos.

Continuando la construcción etapa por etapa de esta manera, podemos agregar $2 \times 3n$ nuevos círculos en la etapa n , dando un total de $2(3^n + 1)$ círculos después de n etapas. Los tamaños de los nuevos círculos están determinados por el teorema de Descartes, al conjunto límite se le denomina **Tamiz de Apolonio** o empaquetado apoloniano como lo nombró Leibniz quien fuera el primero en realizar la construcción.

**CAPÍTULO 1. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO USANDO
GEOMETRÍA EUCLIDEANA Y CARTESIANA**

1.2. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE APOLONIO MEDIANTE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Definición 1.3. 1. Una *configuración de Descartes* es una configuración de cuatro círculos tangentes en el plano, en el que tres círculos no tienen una tangente común.

2. Una *configuración de Descartes* orientada es una configuración de Descartes en la que las orientaciones de los círculos son compatibles en el siguiente sentido: o (i) los interiores de los cuatro círculos orientados son disjuntos, o (ii) el los interiores son disjuntos cuando todas las orientaciones están invertidas.

Teorema 1.3. Para cualquier Tamiz de Apolonio generado por una configuración de Descartes orientado positivamente, los interiores de todos los círculos en el tamiz son disjuntos.

Demostración:

Para una demostración de este teorema el lector puede consultar [Lagarias et al., 2002]. ■

Capítulo 2

Transformaciones de Möbius

En este capítulo estudiaremos las propiedades analíticas de las transformaciones de Möbius cómo endomorfismos de la esfera de Riemann.

2.1. La esfera de Riemann

Algunas veces es necesario estudiar el comportamiento de una función de variable compleja cuando $|z|$ crezca arbitrariamente, por lo cual resulta conveniente agregar al plano complejo un punto ideal, llamado el punto al infinito, que denotamos ∞ .

Comencemos esta sección definiendo el concepto de plano extendido.

Definición 2.1. *Los puntos del plano complejo junto con ∞ forman el plano complejo extendido, denotado por $\hat{\mathbb{C}}$.*

Geoméricamente, el conjunto de números complejos extendidos se conoce como la esfera de Riemann, y definimos las operaciones con ∞ con las siguientes reglas:

Sea a un número finito, entonces definimos:

$$\begin{aligned}a + \infty &= \infty \\a - \infty &= \infty \\a \cdot \infty &= \infty, a \neq 0 \\ \frac{\infty}{a} &= \infty \\ \frac{a}{\infty} &= 0 \\ \frac{a}{0} &= \infty, a \neq 0.\end{aligned}$$

Observación 2.1. *Las operaciones $\infty + \infty$, $0 \cdot \infty$ y $\frac{\infty}{\infty}$, no están definidas.*

2.1.1. Proyección estereográfica y métrica cordal

Un modelo que representa el plano extendido lo constituye la esfera unitaria \mathbb{S}^2 en \mathbb{R}^3 , esto es: $\mathbb{S}^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$.

Para asociar cada punto en el plano con uno de \mathbb{S}^2 se utiliza la siguiente forma geométrica: se toma el plano $x_3 = 0$ como el plano complejo \mathbb{C} y la línea que proyecta el polo norte $e_3 = (0, 0, 1)$

CAPÍTULO 2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS
2.1. LA ESFERA DE RIEMANN

de la esfera de Riemann a cualquier otro punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ en dicha esfera.

De esta forma se define la función

$$\Psi : \mathbb{S}^2 - \{e_3\} \mapsto \mathbb{C}.$$

La cuál es una biyección de $\mathbb{S} - \{e_3\}$ al plano complejo \mathbb{C}

1. Ψ es inyectiva.
2. Ψ es sobreyectiva.

Si hacemos corresponder ∞ con el polo norte e_3 , obtenemos una biyección de \mathbb{S}^2 en $\hat{\mathbb{C}}$. A esta biyección se le llama **La proyección estereográfica**.

Geoméricamente el hemisferio sur $x_3 < 0$ corresponde al círculo unitario

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$$

y el hemisferio norte ($x_3 > 0$) al exterior de este disco.

Una propiedad fundamental de la proyección estereográfica es la siguiente:

Proposición 2.1. *Bajo la proyección estereográfica, rectas en $\hat{\mathbb{C}}$ y círculos en \mathbb{C} se transforman en círculos en \mathbb{S}^2 y viceversa.*

Demostración:

- a) Un círculo en \mathbb{S}^2 es la intersección de un plano con la esfera, por lo que sus puntos satisfacen a una ecuación de la forma

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d.$$

Por lo tanto este círculo es la imagen bajo la proyección estereográfica de un conjunto cuyos puntos satisfacen la siguiente ecuación en el plano

$$a \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} \right) + b \left(\frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)} \right) + c \left(\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = d.$$

Escribiendo $z = x + iy$, se obtiene

$$2ax + 2by + c(x^2 + y^2 - 1) = d(x^2 + y^2 + 1),$$

que es la ecuación de una recta o un círculo en el plano, dependiendo si $d = c$ o si $d \neq c$ (al completar cuadrados no se puede obtener un radio negativo, puesto que se trata de la imagen de un conjunto no vacío).

- b) Por otro lado, una recta en el plano está definida por la ecuación

$$ax + by = c.$$

Estos puntos bajo la proyección estereográfica son llevados al conjunto de puntos de la esfera definidos por la ecuación

$$a \left(\frac{x_1}{1 - x_3} \right) + b \left(\frac{x_2}{1 - x_3} \right) = c$$

$$ax_1 + bx_2 = c(1 - x_3).$$

Los cuales están contenidos en la intersección de un plano y la esfera, es decir, se trata de un círculo. Como $\pi(\infty) = (0, 0, 1)$ satisface dicha ecuación, este círculo pasa por el polo norte,

CAPÍTULO 2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS
2.2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

lo cual también es evidente a partir de la construcción geométrica. Finalmente, un círculo en el plano está definido por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} |z - a|^2 &= r^2 \\ (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) &= r^2 \\ |z|^2 - a\bar{z} - a\bar{z} + |a|^2 &= r^2 \end{aligned}$$

luego, considerando que $x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$

$$\frac{1 + x_3}{1 - x_3} - 2\Re(a\bar{z}) = r^2 - |a|^2.$$

Si $a = a_1 + ia_2, z = x + iy$, entonces $\Re(a\bar{z}) = a_1x + a_2y$ y la imagen del círculo en la esfera está definida por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1 + x_3}{1 - x_3} - 2(a_1x + a_2y) &= r^2 - |a|^2 \\ \frac{1 + x_3}{1 - x_3} - 2a_1\frac{x_1}{1 - x_3} - 2a_2\frac{x_2}{1 - x_3} &= r^2 - |a|^2 \\ 1 + x_3 - 2a_1x_1 - 2a_2x_2 &= (r^2 - |a|^2)(1 - x_3). \end{aligned}$$

Se sigue que estos puntos están en un plano y por lo tanto constituyen un círculo en la esfera. ■

Definición 2.2. Se define la métrica cordal en el plano complejo extendido $\hat{\mathbb{C}}$ de la siguiente forma:

$$d_C(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}} & \text{si } z_1, z_2 \neq \infty \\ \frac{2}{\sqrt{1 + |z_1|^2}} & \text{si } z_2 = \infty \end{cases} \quad (2.1)$$

2.2. Transformaciones de Möbius

Definición 2.3. Una transformación de Möbius o transformación racional lineal es la función $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (2.2)$$

donde a, b, c, d son constantes complejas.

Si $ad - cb = 0$ entonces $T(z)$ resulta un función sin interés, enviando cada punto z a un mismo punto de la imagen $\left(\frac{a}{c}\right)$, en este caso excepcional $T(z)$ es llamado singular. Al hablar de las transformaciones de Möbius supondremos siempre que $T(z)$ es no singular, es decir que $ad - cb \neq 0$.

Las transformaciones de Möbius más elementales son:

- a) **Traslación:** $T(z) = z + a$.
- b) **Dilatación:** $T(z) = az, a \neq 0$.

CAPÍTULO 2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS
2.2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

c) **Inversión:** $T(z) = \frac{1}{z}$.

d) **Rotación:** $T(z) = e^{i\theta}z$.

Toda transformación de Möbius es una composición de estas transformaciones elementales. En específico

- $z \mapsto z + \frac{d}{c}$, traslación.
- $z \mapsto \frac{1}{z}$, inversión.
- $z \mapsto -\frac{(ad - bc)}{c^2}z$, dilatación y rotación.
- $z \mapsto z + \frac{a}{c}$, traslación.

Es decir

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)}.$$

Podemos asociar la transformación T con la matriz $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y escribimos T_g para la transformación T y tenemos las siguientes propiedades:

1. $T_g = T_{g'}$ si y sólo si existe λ tal que la matriz $g = \lambda g'$.
2. $T_{g_1 \cdot g_2} = T_{g_1} \circ T_{g_2}$.
3. Si $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $T_g(z) = z$.

Para $a \neq 0$, definimos $\frac{a}{0} = \infty$. De esta forma definimos $T_g(\infty) = \frac{a}{c}$, $T_g\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$.

Definición 2.4. A las transformaciones de Möbius 2.2 con $ad - bc \neq 0$ se les llama transformaciones bilineales o Automorfismos de $\hat{\mathbb{C}}$ y se define el conjunto $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = \{\text{Transformaciones bilineales de } \hat{\mathbb{C}}\}$

Proposición 2.2. Las transformaciones de Möbius complejas son funciones continuas en \mathbb{C} con la métrica cordal.

Demostración:

Dado que las métricas cordal y euclidiana inducen la misma topología en \mathbb{C} , basta probar la continuidad en ∞ en $\frac{-d}{c}$ si $c = \infty$ y en ∞ , si $c = 0$.

Ahora, si $c \neq 0$ y $z_n \rightarrow \frac{-d}{c}$, cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene que:

$$\frac{az_n + b}{c} \rightarrow \frac{(-d/c)a + b}{c} \quad y \quad \frac{1}{z_n - (-d/c)} \mapsto \infty$$

entonces

$$\frac{az_n + b}{cz_n + d} = \frac{az_n + b}{c(z_n - (-d/c))} \mapsto \infty,$$

por lo tanto

$$d_{\mathbb{C}}\left(\frac{az_n + b}{cz_n + d}, \infty\right) \mapsto 0 \quad \text{cuando } n \mapsto \infty.$$

■

Proposición 2.3. *Dos transformaciones de Möbius*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad S(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

son iguales sí y sólo sí, existe $k \in \mathbb{C}$, tal que

$$a = ka', b = kb', c = kc', d = kd'$$

Demostración:

\Rightarrow] Notemos primero que T y S coinciden en 0 y en ∞ , se tiene que $a = 0$, entonces $a' = 0$ y si $b = 0$, entonces $b' = 0$. Probaremos tres casos

Caso I. $a, b, c, d \neq 0$ tenemos que:

$$T^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c} = -\frac{d'}{c'}, \quad T^{-1}(0) = -\frac{b}{a} = -\frac{b'}{a'}$$

Escribiendo

$$d/d' = c/c' = \lambda, \quad b/b' = a/a' = \mu$$

se sigue que:

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\mu a'z + \mu b'}{\lambda c'z + \lambda d'} = \frac{\mu(a'z + b')}{\lambda(c'z + d')}$$

En particular, al evaluar S y T en la preimagen de 1, se tiene que $\frac{\mu}{\lambda} = 1$

Caso II. Si $b, c = 0$.

Evaluando en 1 se tiene que $\frac{a}{d} = \frac{a'}{d'} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{d}{d'}$.

Caso III Si $c = 0$ y $b \neq 0$.

Como el primer caso $\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'} = \mu$ y para alguna $\lambda, d = \lambda d'$.

\Rightarrow] Es inmediato. ■

2.2.1. Puntos Fijos

Para encontrar los puntos fijos de una transformación de Möbius T , basta con resolver la ecuación $T(z) = z$. Supongamos que $c \neq 0$. Como $T(\infty) = a/c \neq \infty$, entonces ∞ no es punto fijo.

Buscamos las soluciones al resolver la ecuación

$$\frac{az + b}{cz + d} = z$$

esto es equivalente a

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0 \tag{2.3}$$

que tiene la siguiente solución

$$z = \frac{(a - d) \pm \sqrt{(d - a)^2 - 4bc}}{2c};$$

con esto vemos que $T(z)$ tiene a los más dos puntos fijos. Si $ad - bc = 1$, los puntos fijos pueden expresarse como:

CAPÍTULO 2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS
2.2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

$$z = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$$

y si el radical es 0, es decir si

$$a + d = \pm 2, \tag{2.4}$$

entonces existe solamente un punto fijo

$$z = \frac{a-d}{2c} \tag{2.5}$$

Supongamos que $c = 0$, entonces $z = \infty$ es punto fijo y resolviendo 2.3 tenemos además del ∞ , la solución

$$z = \frac{b}{d-a} \tag{2.6}$$

como el otro punto fijo.

Si $b = 0$, entonces por 2.6, $z = 0$. Luego $Fij(T) = \{0, \infty\}$.

Si $a = d$, entonces por 2.6, $z = \infty$. Luego $Fij(T) = \{\infty\}$.

Corolario 2.1. *La única transformación de Möbius que tiene más de dos puntos fijos, es la identidad.*

Teorema 2.1. *a) Una transformación de Möbius está determinada únicamente por la aplicación de tres puntos distintos de $\hat{\mathbb{C}}$.*

b) Los valores de esos tres puntos pueden elegirse arbitrariamente en $\hat{\mathbb{C}}$, con tal de que sean distintos.

Demostración:

Para una demostración detallada consultar [Hermosillo, 1985]. ■

2.2.2. Transformaciones de Möbius como grupo

El conjunto de matrices 2×2 con entradas complejas (g) y determinante 1, forma un grupo con la multiplicación de matrices y se denota $SL(2, \mathbb{C})$ —La S indica que el determinante es 1—. La función $g \rightarrow T_g$ es un isomorfismo de grupos entre $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm I_d\} = PSL(2, \mathbb{C})$ y la colección de transformaciones de Möbius.

Teorema 2.2. *Las transformaciones de Möbius en $PSL(2, \mathbb{C})$ transforman círculos en círculos.*

Demostración:

Basta probar que la transformación $z \rightarrow \frac{1}{z}$ tiene la propiedad mencionada. Consideremos para ello la ecuación general del círculo.

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy = D. \tag{2.7}$$

Escribiendo $z = x + iy$ y $\frac{1}{z} = u + iv$, cómo

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, v = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Sustituyendo en (2.7) obtenemos:

$$\begin{aligned} A \left(\frac{1}{u^2 + v^2} \right) + B \left(\frac{u}{u^2 + v^2} \right) + C \left(\frac{-v}{u^2 + v^2} \right) &= D \\ \left(\frac{1}{u^2 + v^2} \right) (A + Bu - Cv) &= D \\ -D(u^2 + v^2) + Bu - Cv &= -A, \end{aligned} \tag{2.8}$$

que es de nuevo la ecuación de un “círculo”. Esto se sigue, ya que si $D \neq 0$, se pueden completar cuadrados y obtener la ecuación del círculo. Éste argumento algebraico no se aplica en 0 y en ∞ , si el “círculo” pasa por ellos. Sin embargo, probar el resultado para estos puntos es sencillo. Si se trata de un círculo por el origen, entonces $D = 0$ y los puntos de la imagen satisfacen la ecuación de la recta $Bu - Cv = -A$. Como ∞ es la imagen del 0 y está en dicha recta, se sigue el argumento. ■

2.2.3. Clasificación de las Transformaciones de Möbius

Las Transformaciones de Möbius las podemos clasificar de la siguiente forma:

1. Por conjugación.
2. Por geometría .
3. Por traza.

Por Conjugación

Una clasificación se obtiene al considerar los puntos fijos en $\hat{\mathbb{C}}$. Notemos que si T es de Möbius y distinta de la identidad, entonces T fija a los más dos puntos cómo se ha mencionado anteriormente. Esto se sigue ya que si $T \neq \infty$, entonces

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = z \Leftrightarrow az + b = cz^2 + dz$$

de donde:

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

$$z = \frac{(a - d) \pm \sqrt{(d - a)^2 - 4bc}}{2c}.$$

Reduciendo el discriminante tenemos:

$$\begin{aligned} (d - a)^2 - 4bc &= d^2 - 2ad + a^2 - 4bc \\ &= a^2 - 2ad + d^2 + 4ad - 4; \quad \text{ya que } ad - bc = 1 \\ &= (a + d)^2 - 4 \\ &= \text{Tr}(T(z)) - 4. \end{aligned}$$

Así, tenemos que T tendrá un único punto fijo si la traza de la matriz asociada es ± 2 , y tendrá dos puntos fijos, si el discriminante es distinto de cero.

Por otro lado, si ∞ es un punto fijo, la ecuación

$$\frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z$$

tiene a lo más, una solución.

Definición 2.5. Sea T de Möbius, tal que fija exactamente un punto en $\hat{\mathbb{C}}$, entonces a T se le llama parabólica

Lema 2.1. Sean T y φ transformaciones de Möbius, entonces T fija un punto w en $\hat{\mathbb{C}}$ si y sólo si $S = \varphi T \varphi^{-1}$

Demostración:

$$T(w) = w \Leftrightarrow \varphi T(w) = \varphi(w) \Leftrightarrow \varphi T(w) \varphi^{-1} = \varphi(w). \quad \blacksquare$$

Proposición 2.4. Sea T una transformación de Möbius, entonces:

CAPÍTULO 2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS
2.2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

- a) Si T es parabólica, T es conjugada en $PSL(2, \mathbb{C})$ a una traslación.
 b) Si T no es parabólica, T es conjugada en $PSL(2, \mathbb{C})$ a una transformación de la forma $z \rightarrow \alpha z, \alpha \in \mathbb{C}$.

Demostración:

- a) Sea T parabólica con punto fijo z_0 y $\varphi \in PSL(2, \mathbb{C})$, tal que $\varphi(z_0) = \infty$, por ejemplo

$$\varphi(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

, Entonces $S = \varphi T \varphi^{-1}$ fija ∞ , y por lo tanto es de la forma

$$S = \alpha z + \beta$$

, por el lema anterior se sigue que S no tiene otro punto fijo, por lo cual $\alpha = 1$ (si $\alpha \neq 1, \alpha z + \beta$ tendría una solución finita)

- b) Supongamos que T fija dos puntos distintos w_1, w_2 y que

$$\varphi = \frac{z - w_1}{z - w_2},$$

(si $w_2 = \infty$, se toma $\varphi(z) = z - w_1$). Bajo éstas hipótesis la función

$$S = \varphi T \varphi^{-1}$$

fija 0 e ∞ , por lo cual si

$$S = \frac{az + b}{cz + d},$$

se tiene $b, c = 0$. Esto nos dice que cualquier transformación de Möbius es conjugada a una transformación canónica.

■

Definición 2.6. Sea $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ tal que T fija exactamente 2 puntos en $\hat{\mathbb{C}}$, suponga que T es conjugada en $PSL(2, \mathbb{C})$ a la transformación $S(z) = \alpha z$. Entonces:

- a) Si $|\alpha| = 1$, T se llama *elíptica*.
 b) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+$, T se llama *hiperbólica*.
 c) Si $|\alpha| \neq 1$ y $\alpha \notin \mathbb{R}^+$, T se llama *loxodrómica*.

Por geometría

Los siguientes casos resolverán la pregunta acerca de que pasa con las transformaciones de Möbius cuando hacemos composiciones sucesivas a puntos y círculos.

1. Consideremos una transformación de Möbius φ , sea x un punto de la esfera de Riemann que no es punto fijo de φ . Encontraremos los puntos de acumulación de la órbita de x

Solución. Sea $x \in \hat{\mathbb{C}}$ y sea $\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ una transformación de Möbius, queremos encontrar los puntos de acumulación de la órbita de x .

$$\tau_x = \{\varphi^n(x) : \varphi \in \tau\}.$$

Estudiaremos los casos en los que $\varphi(z)$ es parabólica, elíptica y loxodrómica.

CAPÍTULO 2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS
2.2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

- I. Supongamos que φ es parabólica, por tanto $\varphi(z)$ es conjugada a una transformación de la forma $\psi(z) = z + 1$ y dado que x no es punto fijo por hipótesis, entonces $x \neq \infty$. Tomaremos $\tau = \langle z+1 \rangle$, por lo tanto, cualquier elemento de τ_x lo podemos expresar como $z + n$, así si $n \rightarrow \infty$ tendremos que el punto de acumulación de la órbita sería ∞ . Así para una transformación parabólica cualquiera tendremos que el punto de acumulación de la órbita sería su punto fijo.
- II. Ahora supongamos que $\varphi(z)$ es elíptica, como φ es elíptica entonces es conjugada a una transformación de la forma $\psi = \alpha z$; donde $|\alpha| = 1$; para este caso $\tau = \langle \alpha z \rangle$ y cada elemento de τ_x lo podemos pensar como $\alpha^n z$, donde si $n \rightarrow \infty$, $|\alpha^n| = |\alpha|^n \rightarrow 1$. Para este caso tenemos que una transformación elíptica no es más que una rotación de un ángulo θ , donde $\alpha = e^{i\theta}$, así debemos considerar tres casos:

- 1) El ángulo $\theta = \frac{\pi}{m}$, $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$.
- 2) El ángulo $\theta = \frac{p}{q}\pi$; $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ con $(p, q) = 1$.
- 3) El ángulo $\theta = x\pi$; donde x es un número irracional.

Para saber como son las órbitas de los casos anteriores, tomaremos un ejemplo en cada caso; vemos que es lo que sucede para $\alpha = \frac{\pi}{4}$, donde la transformación asociada a la n -ésima composición estaría dada por

$$\varphi^n(z) = e^{in\pi/4}z,$$

donde la imagen de un punto $x_0 + iy_0$ está dada por:

$$z_n = (x_0 \cos(n\pi/4) - y_0 \sin(n\pi/4), y_0 \cos(n\pi/4) + x_0 \sin(n\pi/4))$$

la siguiente figura 2.1 muestra el conjunto de órbitas para $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $z_0 = 1$.

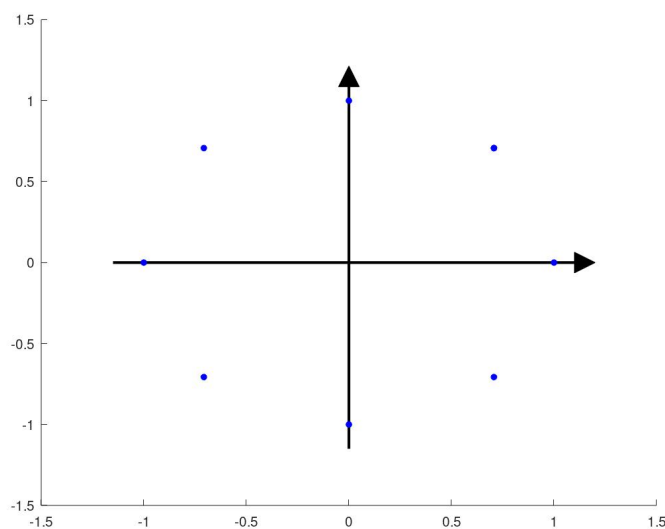


Figura 2.1: Dinámica de $\varphi = e^{in\pi/4}z$

Si variamos el ángulo y consideramos $\theta = \frac{\pi}{3}$ obtenemos la figura 2.2, mientras que

CAPÍTULO 2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS
2.2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

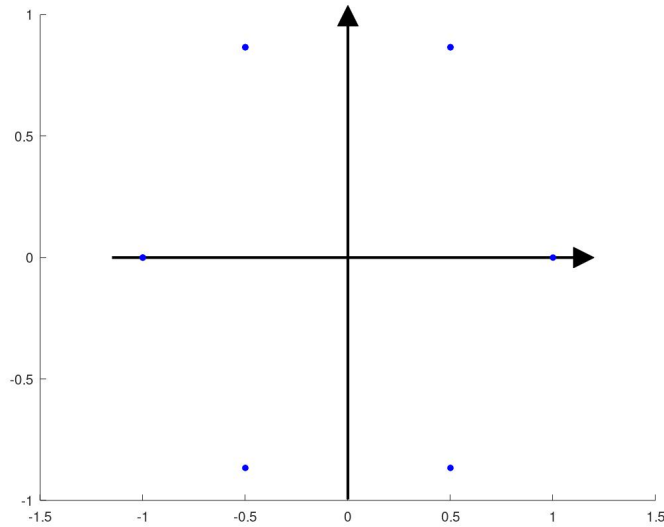


Figura 2.2: Dinámica de $\varphi = e^{in\pi/3}z$

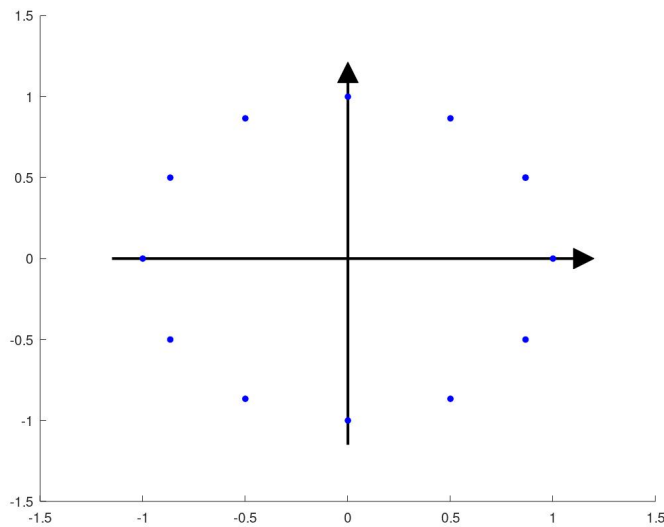


Figura 2.3: Dinámica de $\varphi = e^{in\pi/6}z$

para un ángulo $\theta = \frac{\pi}{6}$ se genera la figura 2.3 finalmente para el ángulo $\theta = x\pi$ con x irracional, en este caso tomaremos $x = \sqrt{2}$ como se ve en la figura 2.4.

Así para los casos donde $\theta = \pi/m$ ó $\theta = \frac{p}{q}\pi$ las órbitas se acumularán en los vértices de un $2m$ -agono ó un $2q$ -agono regular, mientras que para un ángulo $\theta = x\pi$ con $x \in \mathbb{I}$, las órbitas se acumularán en un círculo.

- III. Por último si $\varphi(z)$ es loxodrómica, entonces φ es una transformación conjugada a una transformación de la forma $\psi = \alpha z$; donde $|\alpha| \neq 1$, en este caso consideraremos el

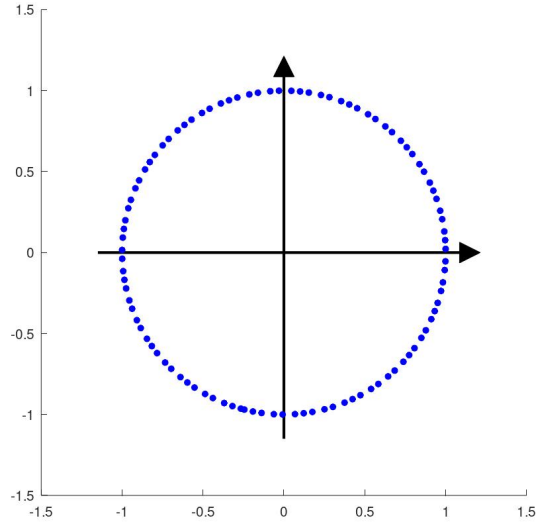


Figura 2.4: Dinámica de $\varphi = e^{in\sqrt{2}\pi} z$

grupo $\tau = \langle \alpha z \rangle$, si x es distinto de los puntos fijos, los puntos de acumulación de la órbita serán $\alpha^n z$, donde el módulo de este complejo será 0 si $0 < |\alpha| < 1$, por lo que el punto de acumulación sería 0, en otro caso, sería ∞ . Finalmente, para una transformación loxodrómica cualquiera, las órbitas se estarán acumulando en los puntos fijos de dicha transformación.

2. ¿Cómo actúan las transformaciones de Möbius sobre los círculos?

Solución. Sabemos que las transformaciones de Möbius, nos llevan de rectas y círculos a círculos y viceversa, ¿qué forma tendrán los círculos cuando se aplican sucesivamente transformaciones de Möbius?

Consideremos la ecuación de la circunferencia centrada en el origen

$$x^2 + y^2 = r^2; r > 0.$$

Tomemos a $\varphi(z)$ como una transformación parabólica, en este caso, podemos trabajar con la dinámica que le generará la transformación conjugada $\psi(z) = z + 1$ al componerla sucesivamente tendremos $\psi^n(z) = z + n$, la cual desplazará al círculo centrado en el origen hacia la derecha, así el nuevo círculo tendrá por ecuación

$$(x - n)^2 + y^2 = r^2,$$

por otro lado, las rectas de la forma $x = k$ (k , constante) las transformará en rectas de la forma $x = k + n$, mientras que las rectas de la forma $y = k$ quedarán fijas.

Supongamos que la transformación es elíptica, así podemos considerar el efecto que le hace su transformación conjugada, que es de la forma $\psi = \alpha z = e^{i\theta} z$, donde su matriz asociada es,

$$M = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}.$$

Luego, composiciones sucesivas de $\varphi(z)$, tendrán la forma $\psi^n(z) = e^{in\theta} z$. Así para el complejo $z = x + iy = (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))(x + iy) = (x \cos(n\theta) - y \sin(n\theta)) + i(y \cos(n\theta) + x \sin(n\theta))$

CAPÍTULO 2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS
2.2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

tenemos

$$\begin{aligned}x &= u \cos(n\theta) + v \sin(n\theta); \\y &= v \cos(n\theta) - u \sin(n\theta).\end{aligned}$$

Por lo que el círculo $C_r = \left\{x + \frac{iy}{x^2} + y^2 = r^2\right\}$ queda fijo, mientras que para las rectas $x = k$, obtenemos

$$x \cos(n\theta) + y \sin(n\theta) = k$$

y para las rectas $y = k$

$$y \cos(n\theta) - x \sin(n\theta) = k.$$

Finalmente, supongamos que φ es loxodrómica, esto es $\varphi(z)$ es una transformación conjugada a una de la forma $\psi(z) = \alpha z$, con $|\alpha| \neq 1$; sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\alpha = e^{r+i\theta}$, así composiciones sucesivas serán de la forma $\psi^n(z) = e^{rn+ni\theta}z$, por tanto si lo aplicamos al círculo $C_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$ obtenemos:

$$w = u + iv = e^{rn}(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))(x + iy)$$

así

$$\begin{aligned}u &= xe^{rn} \cos(n\theta) - ye^{rn} \sin(n\theta) \\v &= xe^{rn} \sin(n\theta) + ye^{rn} \cos(n\theta).\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}x &= \frac{u \cos(n\theta) + v \sin(n\theta)}{2e^{rn}} \\y &= \frac{v \cos(n\theta) - u \sin(n\theta)}{2e^{rn}}\end{aligned}$$

de este modo

$$x^2 + y^2 = r^2 = \frac{u^2 + v^2}{4e^{2rn}}$$

Luego, el círculo transformado sería de la forma:

$$u^2 + v^2 = 4r^2 e^{2rn} = (2e^{rn})^2$$

o equivalentemente

$$x^2 + y^2 = (2e^{rn})^2$$

Por traza

Esta clasificación es de gran utilidad, ya que permite detectar de manera inmediata de qué tipo es una transformación de Möbius dada.

Definición 2.7. *Sea T una transformación de Möbius distinta de la identidad*

- a) *Si T es parabólica se define su multiplicador como 1.*
- b) *Si T es conjugada a una transformación de la forma $z \rightarrow kz, k \neq 0, 1$ a los números $k, \frac{1}{k}$ se les llama los multiplicadores de T .*

Se sigue de la clasificación definida por la conjugación a formas canónicas que los multiplicadores están bien definidos. El grupo de matrices 2×2 con entradas complejas y determinante distinto de 0, se denota por $GL(2, \mathbb{C})$, se define la traza de $A \in GL(2, \mathbb{C})$ como la suma de los elementos diagonales, ésta se denota por $Tr(A)$. Usaremos el siguiente resultado básico de Álgebra Lineal.

CAPÍTULO 2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS
2.2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

Lema 2.2. *La traza es invariante bajo conjugación en $GL(2, \mathbb{C})$.*

Demostración:

Basta probar que $Tr(AB) = Tr(BA)$. Sean $A, B \in (2, \mathbb{C})$, ya que $Tr(ABA^{-1}) = Tr(A^{-1}AB) = Tr(B)$. Escribiendo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

se tiene

$$AB = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & ** \\ ** & c\beta + d\delta \end{pmatrix} \quad y \quad BA = \begin{pmatrix} a\alpha + c\beta & ** \\ ** & b\gamma + d\delta \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Por lo que

$$Tr(AB) = Tr(BA).$$

La traza de una transformación de Möbius está bien definida salvo un signo, puesto que existen dos matrices unimodales que la definen. ■

Definición 2.8. *Dada $T \in PSL(2, \mathbb{C})$*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

se define la traza de T como $\pm \frac{a + d}{\sqrt{ad - bc}}$.

Denotaremos la traza de T como $\mathcal{X}(T)$. Es útil tener fórmulas explícitas de las coordenadas de los puntos fijos. Obtenemos una expresión en términos de la traza, para ello consideremos

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc = 1, T \neq I_d$$

se tienen dos casos:

C.1 $c \neq 0$. En este caso cómo:

$$T(z) = z \Leftrightarrow az + b = (cz + d)z \Leftrightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

los puntos fijos están dados por

$$\frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4cb}}{2c}$$

usando la condición unimodular, la fórmula se reduce a

$$\frac{(a - d) \pm \sqrt{\mathcal{X}^2 - 4}}{2c}. \quad (2.10)$$

C.2 $c = 0$. En este caso

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

Si T es parabólica, ∞ es el único punto fijo. De otra manera

$$T(z) = z \Leftrightarrow \left(\frac{a}{d} - 1\right)z = -\frac{b}{d}$$

el punto fijo está dado por

$$\frac{b}{d - a}.$$

CAPÍTULO 2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS
2.2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

Teorema 2.3. Sea $T \in PSL(2, \mathbb{C}), T \neq I_d$, entonces

$$k + \frac{1}{k} + 2 = \mathcal{X}^2,$$

donde $k, \frac{1}{k}$ son los multiplicadores de T y \mathcal{X} es su traza.

Demostración:

I. Si T es parabólica. Como el cuadrado de la traza es invariante bajo conjugación se tiene

$$\mathcal{X}^2(T) = \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

y se sigue el resultado.

II. Si T no es parabólica, en este caso T es conjugada a una transformación de la forma $S = kz$, la cual está definida por la matriz

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k}} \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{C}).$$

Por lo cual

$$\mathcal{X}^2(T) = \mathcal{X}^2(S) = \left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2 = k + \frac{1}{k} + 2.$$

■

Para transformaciones con dos puntos fijos α_1, α_2 , se tiene una expresión de los multiplicadores en términos de estos puntos. Sea

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con esta propiedad $S(z) = kz$, donde k es uno de los multiplicadores de T y

$$\varphi(z) = \frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_2}.$$

Entonces

$$S = \varphi T \varphi^{-1} \quad \text{y} \quad S\varphi = \varphi T.$$

Por lo cual

$$\frac{T(z) - \alpha_1}{T(z) - \alpha_2} = k \frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_2}$$

evaluando la expresión en ∞ , se tiene

$$k = \frac{a/c - \alpha_1}{a/c - \alpha_2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{k} = \frac{a/c - \alpha_2}{a/c - \alpha_1}.$$

Para el caso de una transformación en $PSL(2, \mathbb{C})$ que fija dos puntos, uno de los cuales es ∞ , es decir, de la forma $T = \alpha z + \beta$, los multiplicadores se encuentran fácilmente, estos son precisamente α y $\frac{1}{\alpha}$. Lo cual se sigue, ya que con esta notación el segundo punto fijo está dado por:

$$\frac{\beta}{1 - \alpha}$$

y conjugando con $\varphi(z) = z - \frac{\beta}{1-\alpha}$, se obtiene

$$S(z) = \varphi T \varphi^{-1}(z) = \varphi T \left(z + \frac{\beta}{1-\alpha} \right) = \alpha z.$$

El siguiente resultado es muy importante, ya que exhibe un criterio sencillo para clasificar cualquier transformación en $PSL(2, \mathbb{C})$

Teorema 2.4. *Sea $T \in PSL(2, \mathbb{C})$, $T \neq 0$ y \mathcal{X} la traza de T . Entonces:*

- a) T es parabólica si y sólo si $\mathcal{X} = \pm 2$;
- b) T es elíptica si y sólo si $\mathcal{X} \in (-2, 2)$;
- c) T es hiperbólica si y sólo si $\mathcal{X} \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$;
- d) T es loxodrómica si y sólo si $\mathcal{X} \notin \mathbb{R}$.

Demostración:

\Rightarrow] a) Ya se probó anteriormente.

- b) Como T es elíptica, entonces T es conjugada a una transformación de la forma $S(z) = e^{i\theta} z$, $\theta \in (0, 2\pi)$, la cual está determinada por la matriz

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{C}).$$

Por lo tanto $\pm \mathcal{X}(T) = \pm \mathcal{X}(S) = \pm 2 \cos(\theta/2) \in (-2, 2)$.

- c) Como T es hiperbólica, entonces T está conjugada a una transformación definida por la matriz

$$\begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k}} \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{C}), k \in \mathbb{R}^+,$$

por lo cual

$$\mathcal{X}(T) = \mathcal{X}(S) = \left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2 = k + 2 + \frac{1}{k} > 4$$

puesto que:

$$\left(\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2 > 0.$$

- d) Como T es loxodrómica y si $\rho^{i\theta}$, $\rho \neq 0, 1$, $\theta \in (0, 2\pi)$ es uno de sus multiplicadores, se sigue del teorema 2.3

$$\rho(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{\rho}(\cos \theta - i \sin \theta) + 2 = \mathcal{X}^2(T).$$

Si $\mathcal{X}(T) \in \mathbb{R}$, se tendría que $\mathcal{X}^2(T) \in \mathbb{R}^+$ y $(\rho - 1/\rho) \sin \theta = 0$ por lo que $\sin \theta = 0$ y $\theta = \pi$. Al tomar la parte real se tiene $-(\rho + 1/\rho) + 2 \in \mathbb{R}^+$, lo cual es una contradicción ya que $\rho + 1/\rho > 2$.

\Leftarrow] Notemos que si $\mathcal{X}^2(T) = 4$, se sigue de la primera parte que T no es elíptica, ni hiperbólica o loxodrómica, por lo que deberá ser parabólica. Los casos restantes se demuestran de manera similar. ■

Corolario 2.2. *Las transformaciones de Möbius complejas T, S son conjugadas en $PSL(2, \mathbb{C})$ si y sólo si*

$$\mathcal{X}(T) = \mathcal{X}(S).$$

2.3. Aplicación geométrica

En esta sección se da solución al Problema de Apolonio, así como a la construcción del Tamiz de Apolonio mediante el uso de las transformaciones de Möbius, para ello necesitamos de la siguiente proposición.

Proposición 2.5. *Si C una circunferencia en la esfera de Riemann, entonces C es invariante bajo las transformaciones de Möbius, es decir, dado T una transformación de Möbius $T(C)$ es una circunferencia.*

Demostración:

Sea T una transformación de Möbius sabemos que es la composición de traslaciones, homotecias e inversiones, concretamente, $T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$, con $T_1(z) = z + \frac{d}{c}$, $T_2(z) = \frac{1}{z}$, $T_3(z) = \frac{bc-ad}{c^2}z$ y $T_4(z) = z + \frac{b}{d}$, recordamos que las traslaciones (T_1, T_4) y las homotecias (T_3) transforman circunferencias en circunferencias, por lo que bastará ver que las inversiones transforman circunferencias en circunferencias. De geometría analítica básica sabemos que una circunferencia, o línea, tienen ecuación $Ax + By + C(x^2 + y^2) = D$ con $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, constantes, no todas cero. Sea $z = x + iy$, y supongamos $z \neq 0$, luego $\frac{1}{z} = u + iv$, con $u = \frac{x}{x^2+y^2}$, y $v = \frac{y}{x^2+y^2}$, por lo que la ecuación de la circunferencia es equivalente a: $Au - Bv - D(u^2 + v^2) = -C$, la cual también es una línea o una circunferencia. ■

Observación 2.2. *Por la Proposición anterior sabemos que los círculos son invariantes bajo las transformaciones de Möbius, sin embargo, en el caso de círculos de radio finito se cumple que si*

$$T_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

es una transformación de Möbius entonces el círculo C de radio r y centro γ su imagen es un círculo C' con centro

$$\alpha' = \frac{a}{c} - \frac{1}{c} \frac{1}{c(\gamma + d)} \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\left(\gamma + \frac{d}{c}\right)^2}}$$

$$r' = \frac{r}{(c\gamma + d)^2} - r^2 c^2$$

para una demostración de esta afirmación el lector puede consultar [Rubiano et al., 2011].

Esta proposición no es útil para estudiar el comportamiento de círculos concretos bajo la acción de transformaciones de Möbius, como es el caso del círculo isométrico.

Definición 2.9. *Sea $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ definimos*

$$I(T) = \{z \in \mathbb{C} : |T'(z)| = 1\}$$

a $I(T)$ se le llama el círculo isométrico de la transformación T .

Teorema 2.5. *Todo $T \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ transforma su círculo isométrico en el círculo isométrico de su transformación inversa T^{-1} , invirtiendo su orientación.*

Demostración:

Sea $z \in I(T)$ por lo que $|T'(z)| = 1$, luego $|(T^{-1})'(T(z))| = \frac{1}{|T'(z)|} = 1$ de donde $T(z) \in I(T^{-1})$.

Debido a que $I(T)$ e $I(T^{-1})$ son del mismo radio, podemos definir una transformación T_1 compuesta por una traslación y una rotación tal que $T_1 : I(T) \rightarrow I(T^{-1})$ y con $z_1 \in I(T)$ tenemos que $T_1(z_1) = T(z_1)$; T_1 preserva la orientación, es isometría y por ser conforme $T_1 \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$.

CAPÍTULO 2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS
2.3. APLICACIÓN GEOMÉTRICA

Supongamos que $T : I(T) \rightarrow I(T^{-1})$ preservando la orientación natural de estos círculos, y recordando que es isometría tenemos que si $z_2, z_3 \in I(T), z_2 \neq z_3$ entonces $T(z_2) = T_1(z_2)$ y $T(z_3) = T_1(z_3)$ luego por el teorema 2.1 a) afirmamos que $T_1(z) = T(z) \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$, pero T_1 fija al ∞ , contradicción ! Luego T no preserva la orientación al enviar su propio círculo isométrico en el de su inversa ■

Observación 2.3. *Una interpretación geométrica de T con relación a su círculo isométrico es la siguiente:*

Sea $p \in I(T)$ y por el teorema anterior $T(p) \in I(T^{-1})$; sea L la bisectriz perpendicular al segmento L' que une los centros de $I(T)$ e $I(T^{-1})$. Si aplicamos una inversión respecto a $I(T)$, p queda fijo, y luego una reflexión respecto a L , entonces p cae sobre un punto p_1 , que pertenece a $I(T^{-1})$, y por último mandamos p_1 a $T(p)$, por medio de una rotación con centro en a/c . Luego si denotamos a la composición de las dos inversiones con la rotación, por la transformación T_1 , tenemos que $T_1 : I(T) \rightarrow I(T^{-1})$ y $T_1(p) = T(p)$. Por el mismo razonamiento que utilizamos en la demostración anterior, vemos que $T_1 = T$.

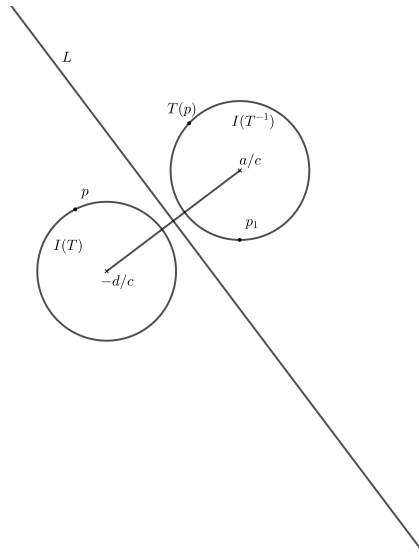


Figura 2.5: Círculo isométrico

Los círculos isométricos $I(T), I(T^{-1})$ se intersectan, se tocan o son ajenos dependiendo del tipo de transformación (2.6) que sea, veamos:

$I(T) : |cz + d| = 1$ con centro $-d/c$ y radio $1/|c|$;

$I(T^{-1}) : |cz - a| = 1$ con centro a/c y radio $1/|c|$; la distancia entre los centros : $|a/c + d/c|$; La suma de los radios : $2/|c|$ Entonces $I(T)$ e $I(T^{-1})$ se intersectarán si $|\frac{a}{c} + \frac{d}{c}| < 2/|c|$ es decir si $|a + d| < 2$ o sea si T es elíptica, de igual manera; si T es hiperbólica $I(T)$ e $I(T^{-1})$ son ajenos; si T es parabólica $I(T)$ e $I(T^{-1})$ son tangentes; si T es loxodrómica puede suceder cualesquiera de los casos anteriores, excepto la coincidencia.

Observación 2.4. *De la observación anterior observamos que las transformaciones parabólicas garantizan que la tangencia entre el círculo isométrico y de su círculo inverso, esta propiedad será de utilidad en el Teorema 2.3. Antes de enunciar y demostrar dicho teorema, daremos la solución al problema de Apolonio usando las propiedades de las transformaciones de Möbius.*

Teorema 2.6. *Dados 3 círculos mutuamente tangentes en el plano, existen exactamente dos círculos tangentes a los tres dados.*

CAPÍTULO 2. TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS
2.3. APLICACIÓN GEOMÉTRICA

Demostración:

Como es bien sabido, una transformación de Möbius envía círculos en $\hat{\mathbb{C}}$ a círculos en $\hat{\mathbb{C}}$, conservando los ángulos entre ellos. En particular, asigna círculos tangentes a círculos tangentes. Para tres círculos C_1, C_2, C_3 mutuamente tangentes dados en el plano, denotamos por p a el punto tangente entre C_1 y C_2 , y sea $g \in PSL_2(\mathbb{C})$ un elemento que mapea p a ∞ . Entonces g envía C_1 y C_2 a dos círculos tangentes en ∞ , es decir, dos líneas paralelas, y $g(C_3)$ es un círculo tangente a estas líneas paralelas. En la configuración de $g(C_1), g(C_2), g(C_3)$, está claro que hay precisamente dos círculos, digamos, D y D' tangentes a los tres $g(C_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Usando g^{-1} , que es nuevamente una transformación de Möbius, se sigue que $g^{-1}(D)$ y $g^{-1}(D')$ son precisamente esos dos círculos tangentes a C_1, C_2, C_3 ■

Teorema 2.7. *Existe un único Tamiz de Apolonio.*

Demostración:

Para la construcción del Tamiz consideremos sin pérdida de generalidad tres círculos con radio r y centros en las raíces cúbicas de la unidad: $1, \omega, \omega^2$

Etiquetemos los círculos como X_1, X_2, X_3 en sentido contrario a las manecillas del reloj y comenzando con el círculo de radio 1. Deseamos construir un cuarto círculo X_0 y tres funciones de Möbius T_1, T_2, T_3 tales que:

$$\begin{aligned} T_i(X_j) &= X_j \text{ con } i \neq j, i, j = 1, 2, 3; \\ T_i(X_i) &= X_0; \\ T_2 &= R \circ T_1 \circ R^{-1}; \\ T_3 &= R^{-1} \circ T_1 \circ R. \end{aligned}$$

donde R es una rotación de ángulo $\frac{2\pi}{3}$ alrededor del origen. Se sigue que X_0 tiene centro en el origen pues es invariante bajo R . En efecto,

$$R(X_0) = R(T_1(X_1)) = R(T_1(R^{-1}(R(X_1)))) = T_2(R(X_1)) = T_2(X_2) = X_0.$$

Por lo que, T_1 se puede definir como la composición $T_1 = S \circ J$, donde S es la reflexión a lo largo del eje de simetría de X_2 y X_3 y J es la inversión con respecto a un círculo ortogonal X_2 y X_3 . Más aún, $T_1(z) = \frac{I-1}{2} \frac{2z-I}{z+I}$, donde I es el centro del círculo de inversión:

$$I = \frac{1+\sqrt{9-8r^2}}{2}.$$

Los puntos fijos f y f^* de T_1 son los puntos de intersección del círculo de inversión J con el eje de simetría de X_2 y X_3 . Más aún, $f = -\frac{1}{2} + i\beta$ donde $\beta = \sqrt{\frac{3}{4} - r^2} = \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha - 2/3}}$.

Supongamos que $0 \leq r \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. El ángulo α en la figura 2.6 es el argumento de $(f + I)$, esto es,

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9 - 8r^2}{3(1 - r^2)}}.$$

Por ende, el radio ρ_0 del círculo X_0 está dada por:

$$\rho_0 = \frac{2r^2 - 3 + \sqrt{9 - 8r^2}}{2r}.$$

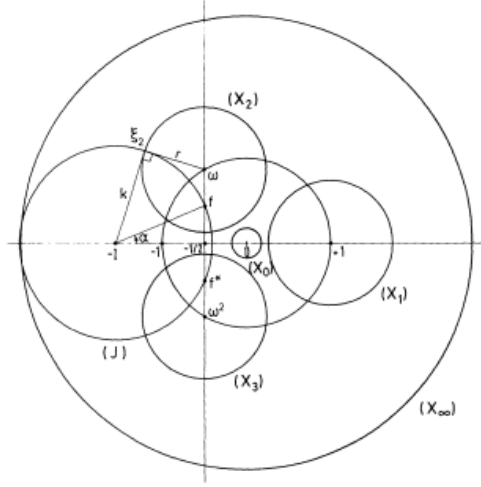


Figura 2.6: Construcción del tamiz de Apolonio mediante transformaciones de Möbius.

Consideremos $X_\infty := T_1^{-1}(X_1)$ y dado que T_1 es una transformación de Möbius y X_1 es invariante bajo T_1 X_∞ es una circunferencia con radio $\rho_\infty = \frac{\sqrt{\cos 2\alpha + 1} \sqrt{3 \cos 2\alpha - 1} + \sqrt{3 \cos 2\alpha}}{\sqrt{2(2 \cos 2\alpha - 1)(3 \cos 2\alpha - 1)}}$ y con centro en 0. Así, X_∞ es invariante bajo R y satisface que

$$X_\infty = T_i^{-1}(X_i), i = 1, 2, 3.$$

Así

$$T_1 = \begin{bmatrix} \frac{2(I-1)}{\sqrt{6I(I-1)}} & \frac{-I(I-1)}{\sqrt{6I(I-1)}} \\ \frac{2}{\sqrt{6I(I-1)}} & \frac{2I}{\sqrt{6I(I-1)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha - \sqrt{\cos^2 \alpha - \frac{2}{3}} & -\frac{1}{6} \frac{1}{\cos^2 \alpha - \frac{2}{3}} \\ 2\sqrt{\cos^2 \alpha - \frac{2}{3}} & \cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha - \frac{2}{3}} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

la cual es parabólica si y sólo si $r^2 = \frac{3}{4}$ o elíptica si $r^2 \geq \frac{9}{8}$ o $r^2 < \frac{3}{4}$

Cuando $r^2 = \frac{3}{4}$ corresponda al caso cuando los círculos X_1, X_2, X_3 con X_0 el círculo inscrito y X_∞ el círculo circunscrito.

Más aún, si consideremos cualquier otra terna de círculos es posible construir una transformación de Möbius que envíe los tres círculos dados en los círculos propuestos. Por ende, el Tamiz de Apolonio es único. ■

Capítulo 3

Grupos Kleinianos

En este capítulo estudiaremos el concepto de grupo kleiniano, y en particular demostraremos que el Tamiz de Apolonio es el conjunto límite de un grupo kleiniano particular.

3.1. Grupos discontinuos

Consideremos un grupo de transformaciones de Möbius G y un conjunto $X \neq \emptyset$, este da lugar a una aplicación

$$G \times X \rightarrow X,$$

donde a cada par (g, x) se le asocia $g(x)$, es decir esta aplicación es tradicionalmente definida como la acción del grupo G sobre el conjunto X , donde también nos interesa el caso en el que X es un espacio métrico y donde todos los elementos de G sean isometrías de (X, d) ; en este caso diremos que g actúa por isometrías sobre (X, d) o que tiene una acción isométrica de g sobre (X, d) .

Definición 3.1. Sea X un espacio métrico¹ y sea G un grupo de homeomorfismos de X en sí mismo. Un grupo G actúa en un conjunto X , si existe una función

$$\mu : G \times X \rightarrow X$$

tal que $\mu(g_2g_1, x) = \mu(g_2, \mu(g_1, x))$ y $\mu(I_d, x) = x$

Definición 3.2. La acción de G en un punto $x \in X$ es libremente discontinua, si existe una vecindad U de x tal que $g(U) \cap U \neq \emptyset, \forall g \in G \neq I_d$. La vecindad U es llamada una buena vecindad de x .

Definición 3.3. El conjunto de puntos en los cuales la acción de G es libremente discontinua es llamado conjunto libre regular y se denota por ${}^\circ\Omega = {}^\circ\Omega(G)$.

Definición 3.4. Un subconjunto $Y \subset X$ es G -invariante o invariante bajo G , si $g(Y) = Y, \forall g \in G$.

Definición 3.5. La clase de equivalencia de la acción del grupo G sobre cualquier conjunto Y se define de la siguiente manera:

$$x \equiv y \quad \text{si y sólo si} \quad \exists g \in G \quad g(x) = y$$

diremos que X y Y son G -equivalentes o equivalentes bajo G .

¹ X también puede ser un espacio topológico

La topología usual sobre el espacio

$$Y/G$$

está definida por la proyección natural

$$p : Y \rightarrow Y/G$$

ya que es continua y abierta.

Definición 3.6. *Un subgrupo G de transformaciones de Möbius que es libremente discontinuo en algún punto $z \in \hat{\mathbb{C}}$ es llamado un **grupo Kleiniano**.*

En general el conjunto $\hat{\mathbb{C}}/G$ es un espacio complicado, más no así el conjunto ${}^\circ\Omega/G$

Corolario 3.1. *Consideremos una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de un grupo Kleiniano G . $\infty \in {}^\circ\Omega$ y tomemos ρ_m como el radio del círculo isométrico de la transformación g_m . Entonces $\rho_m \rightarrow 0$*

Definición 3.7. *Un espacio topológico X se denomina **espacio de Hausdorff** si para cada par de elementos x_1, x_2 distintos en X , existen abiertos disjuntos U_1, U_2 tales que $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$*

Proposición 3.1. *El conjunto ${}^\circ\Omega/G$ es un espacio Hausdorff.*

Demostración:

Supongamos que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ donde, U_1 y U_2 son abiertos ; entonces para algún $x \in U_1$ y $x \in U_2$ podemos encontrar una vecindad lo suficientemente pequeña que lo contenga y si consideremos una sucesión $x_n \rightarrow x$, esa vecindad V contendría infinitos puntos de la sucesión que estarían a la vez en U_1 y U_2 , por otro lado, como los elementos de G son transformaciones continuas tenemos que $g(x_n) \rightarrow g(x)$ tanto en $g(U_1)$ como en $g(U_2)$ lo cual contradice el hecho de que U_1, U_2 sean buenas vecindades. ■

Proposición 3.2. *Todo grupo Kleiniano es numerable.*

3.2. Grupos discretos

Definición 3.8. *Sea $G < SL(2, \mathbb{C})$, se dice que G es discreto si no existe una sucesión de matrices distintas $T_n \in G, n \in \mathbb{N}$ tal que $T_n \rightarrow T$, cuando $n \rightarrow \infty$, donde T es una matriz de 2×2 con entradas complejas.*

Definición 3.9. *(Convergencia de transformaciones de Möbius) Decimos que una cierta sucesión $\{g_m\}$ de elementos de un grupo G converge a cierta transformación $g \in G$ si cada entrada de la matriz equivalente de g_m converge, como número complejo a la correspondiente entrada de g .*

Proposición 3.3. *Sea G un subgrupo no discreto de transformaciones de Möbius (\mathbb{M}). Entonces existe una sucesión de elementos distintos de G que convergen a la identidad*

Demostración:

Como G no es discreto, existe una sucesión de elementos $\{g_m\}$ de G que convergen a algún elemento $g \in \mathbb{M}$. Normalizando G tenemos que g es de la forma $z \rightarrow z + 1$ o de la forma $z \rightarrow k^2 z$. En cada caso podemos verificar que $g_{m+1} \circ g_m^{-1}$ convergen a la identidad. ■

Proposición 3.4. *Sea G un grupo Kleiniano. Entonces G es un subgrupo discreto de \mathbb{M} .*

Demostración:

Supongamos que G no fuera discreto, entonces existiría una sucesión de elementos distintos $\{g_n\}$ que convergen a la identidad; es decir $g_n(z) \rightarrow I_d(z) = z \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$ por lo que G no sería discontinuo, por lo tanto no sería un grupo Kleiniano ! ■

Corolario 3.2. *Sea $G < SL(2, \mathbb{R})$ discreto, entonces $({}^\circ\Omega)^c \subset \hat{\mathbb{R}}$.*

3.2.1. Normalización, relación cruzada

Si G es un grupo Kleiniano, g una transformación en G y h una transformación de Möbius. Los puntos $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$, pueden ser llevados a $x_1, x_2, x_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ a través de h . Esto es de interés debido a la conjugación $h \circ g \circ h^{-1}$. Si aplicamos la transformación h a todos los miembros de G , realizando la conjugación de todo el grupo, hGh^{-1} , diremos que el grupo G ha sido normalizado. Las localizaciones convenientes de los puntos x_1, x_2, x_3 son usualmente $0, 1, \infty$. Una manera sencilla de realizar la normalización es mediante el uso de la relación cruzada.

Definición 3.10. *La relación cruzada es la transformación*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] \rightarrow \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

La cuál tiene la propiedad de ser la única transformación de Möbius que transforma z_2 a 1, z_3 a 0 y z_4 a ∞ .

3.2.2. Convergencia de Transformaciones de Möbius

Definición 3.11. *Una sucesión de funciones $\{f_\nu\}, f_\nu : X \rightarrow \mathbb{C}$. converge uniformemente a una función limitante f en un subconjunto arbitrario no vacío $X \subset \mathbb{C}$ si dado cualquier número positivo $\epsilon \in \mathbb{R}$ existe un valor $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m > n$ cada función f_m difiere de f no más que ϵ para todos los puntos $x \in X$.*

Definición 3.12. *Una sucesión de funciones $\{f_\nu\}$ converge localmente de manera uniforme a f , si para cada punto $x \in X$ existe una vecindad U de $x \in \mathbb{C}$ tal que $f_\nu|_{U \cap X}$ es uniformemente convergente.*

Definición 3.13. *Una sucesión de funciones es llamada **convergente de manera compacta o uniformemente convergente sobre conjuntos compactos** si converge de manera uniforme en cualquier compacto $K \subset X$.*

Teorema 3.1. *Supongamos que $\{T_n\}$ es una sucesión infinita de transformaciones de Möbius distintas tal que los correspondientes puntos fijos p_n, q_n convergen a $p, q \in \mathbb{S}^2$*

Ya sea $p_n = q_n$ (implica una secuencia de transformaciones parabólicas), o T_n es elíptica o p_n es el punto fijos repulsor y q_n el punto fijo atractor de T_n (cuando T_n es loxodrómica). Existe una subsucesión $\{T_n\}$ con alguna de estas propiedades.

- *Existe una transformación T tal que $\lim T_k(z) = T(z)$ converge uniformemente en $\mathbb{H}^3 \cup \mathbb{S}^2$.*
- *$\lim T_k(z) = q$, para toda $z \neq p$ convergiendo uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{H}^3 \cup (\mathbb{S}^2 \setminus \{p\})$. También $\lim T_k^{-1} = p$, para toda $z \neq q$ convergiendo uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{H}^3 \cup (\mathbb{S}^2 \setminus \{q\})$.*

\mathbb{H}^3 representa el espacio hiperbólico.

Demostración:

Se estudian por separado los casos de uno o dos puntos fijos, a saber, $p \neq q$ y $p = q$.

- **Caso $p \neq q$**
Consideremos un punto $\zeta \in \mathbb{C}$ distinto de $p, q, p_n, q_n, \forall n$. La relación cruzada $R_n(z) = (z, \zeta, p_n, q_n)$ converge a $R(z) = (z, \zeta, p, q)$ uniformemente sobre \mathbb{S}^2 por hipótesis. $S_n(z) = R_n T_n R_n^{-1}$ fija 0 e ∞ y tiene las mismas propiedades de convergencia de $\{T_n\}$. Para índices grandes, $S_n(z) = a_n z$ con $|a_n| \geq 1$, $|a_n|$ puede ser acotado o no acotado.

1. Si es acotado, entonces S_n converge uniformemente a una transformación de Möbius.

2. Si no es acotado, entonces existe una subsucesión para la cual $\lim a_m = \infty$ lo que significa que esta subsucesión converge uniformemente a $S(z) = \infty$ para cualquier vecindad (compacta) de $z = 0$.

■ **Caso $p = q$**

Sean ζ_1, ζ_2 dos puntos en \mathbb{C} y $\zeta_1, \zeta_2 \neq q_n$ o q . Consideramos la relación cruzada $R_n(z) = (z, \zeta_1, \zeta_2, q_n)$ y la conjugación, $S_n(z) = R_n T_n R_n^{-1}$ la cual fija ∞ y tiene las mismas propiedades de convergencia de $\{T_n\}$. Para índices suficientemente grandes, $S_n(z) = a_n z + b_n$. El otro punto fijo de S_n es $-b_n/(a_n - 1)$. Consideremos una subsucesión de b_m cuyo límite puede ser acotado o no acotado.

1. Si es acotado $\lim b_m = b \neq \infty$. S_n y $\{T_n\}$ tienen las mismas propiedades de convergencia. Entonces considerando el segundo punto fijo, $\lim a_m = 1$. Esto implica que $\lim S_m = z + b$.
2. Si no es acotado $\lim b_m = \infty$. S_m se puede reescribir como

$$S_m(z) = b_m \left(\frac{(a_m - 1)z}{b_m} + 1 \right) + z.$$

Como S_n y T_n tienen las mismas propiedades de convergencia y el segundo punto fijo es $-b_n/(a_n - 1)$, $\lim (a_n - 1)/b_n = 0$. Obtenemos que $\lim S_m(z) = \infty$. Su inverso es

$$S_m^{-1}(z) = \frac{b_m}{a_m} \left(\frac{z}{b_m} - 1 \right).$$

Pero

$$0 = \lim \frac{a_m - 1}{b_m} = \lim \left(\frac{a_m}{b_m} - \frac{1}{b_m} \right)$$

También, $\lim b_m = 0$ y por lo tanto $\lim \frac{a_m}{b_m} = 0$. Así $\lim S_m^{-1}(z) = \infty, \forall z$.

■

Definición 3.14. Sean $C_1, C'_1, C_2, C'_2, \dots, C_n, C'_n$ un conjunto de círculos disjuntos en $\hat{\mathbb{C}}$. También tomemos en cuenta el grupo $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$, con $n \geq 1$ cuyos miembros g_i cumplen que $g_i(C_i) = C'_i$. Cada una de las transformaciones g_i tiene además la particularidad de que el interior de C_i es llevado al exterior de C'_i . Los grupos que verifican tales condiciones son llamados **grupos de Schottky**.

3.3. Conjunto límite de grupos Kleinianos

Definición 3.15. Un punto x es un punto límite para el grupo Kleiniano G si existe un punto $z \in {}^\circ\Omega$, y una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de G con $g_m(z) \rightarrow x$. El conjunto de todos los puntos límites es llamado **conjunto límite** y se denotará como: $\Lambda = \Lambda(G)$

Teorema 3.2. La intersección del conjunto libre regular y el conjunto límite es vacía.

Demostración:

U es una vecindad de $x \in \Lambda$. Entonces pasa que $g(U) \cap U = \emptyset$. Sin embargo, para cualquier vecindad \mathcal{L} , de $l \in \Lambda$, existe un punto l_0 y hay infinitas transformaciones $g_m \in G$ tales que $g_m(l_0) \in \mathcal{L}$. Eso implica que $\Lambda \cap {}^\circ\Omega = \emptyset$ ■

Teorema 3.3. Sea x un punto límite de un grupo Kleiniano $G, x \in \Lambda(G)$. Existe un segundo punto límite y de $\Lambda(G)$, no necesariamente distinto de x y una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de G tal que $g_m(z) \rightarrow x$ converge uniformemente sobre conjuntos compactos de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{y\}$

Demostración:

Dado que x es un punto límite, existe un punto $z_0 \in {}^\circ\Omega$ y una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de G tal que $g_m(z_0) \rightarrow x$.

Si es necesario, para cumplir la afirmación anterior podemos normalizar la serie funcional a un conjugado conveniente.

Podemos considerar que $z_0 = \infty$. Elegimos una subsucesión de g_m tal que $g_m^{-1}(\infty) \rightarrow y$, y es un punto límite.

Se pretende hacer la descomposición de la función g_m usando la representación dada por la ecuación

$$g = r \circ q \circ p$$

El centro del círculo isométrico de g_m , de hecho la sucesión de los centros de los círculos isométricos tiende a y ver la figura 3.1.

Sea p_m la reflexión del círculo isométrico de g_m . Sea q la reflexión en la bisectriz perpendicular del segmento de línea entre $\vartheta = g_m^{-1}(\infty)$ y $\vartheta' = g_m(\infty)$. Recordemos que ϑ y ϑ' son los centros de los círculos isométricos de la transformación g_m y su inverso. Si $c \neq 0$ todos los g_m pueden descomponerse en términos $g_m = r \circ q \circ p$. q y r son isometrías. Tomamos r como $r(z) = k^2(z - \vartheta') + \vartheta'$, o, $r(z) = k^2(\bar{z} - \vartheta') + \vartheta'$

g_m lleva el exterior de su círculo isométrico al interior del círculo isométrico de su inverso. Es fácil verificarlo, ya que $g_m(\infty)$ es el centro de $I(g_m^{-1})$ y la imagen del centro del círculo isométrico de g_m , g_m^{-1} es ∞ . Por el corolario 3.1 el radio del círculo isométrico tiende a 0. Porque $g_m(\infty) \rightarrow x$ el centro del círculo isométrico de g_m^{-1} tiende a x . Por la convergencia de $g_m(\infty) \rightarrow x$ la convergencia uniforme de g_m se demuestra, ya que la respectiva descomposición también converge. ■

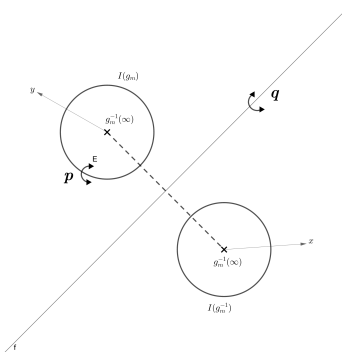


Figura 3.1: Círculo Isométrico y su inverso

Teorema 3.4. Λ es G -invariante.

Demostración:

Sean $x \in \Lambda(G)$ y $g \in G$, como $x \in \Lambda$, hay una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de G y un punto $z \in {}^\circ\Omega$ tal que $g_m(z) \rightarrow x$, así $g \circ g_m(z) \rightarrow g(x)$. Esta es la definición de punto límite, hay una sucesión $\{h_m\}$ que es en realidad $h_m = g \circ g_m$, que converge a $g(x)$. Por lo tanto $g(x) \in \Lambda$. ■

3.3.1. Algunas propiedades topológicas

Recordemos algunos conceptos de topología

Definición 3.16. i) El conjunto $A \subset X$ es denso en X si cada punto $x \in X$ pertenece a A ó es un punto límite de A . Equivalentemente ser denso implica que la clausura de A , \bar{A} , coincide con X .

ii) Un conjunto no denso es aquel cuya cerradura tiene un interior vacío.

Teorema 3.5. Λ es no denso en \hat{C} .

Demostración:

Por la definición del conjunto límite hay puntos de ${}^\circ\Omega$ en cada vecindad de $x \in \Lambda$, pero ${}^\circ\Omega$ y Λ son separados, ${}^\circ\Omega \cap \Lambda = \emptyset$, así el interior de Λ es vacío. ■

Teorema 3.6. Λ es cerrado.

Demostración:

La demostración se basa en el hecho de que un conjunto cerrado contiene todos sus puntos límite. Sea $\{x_m\}$ una sucesión de puntos en Λ que converge a x . Existe un solo punto $z \in {}^\circ\Omega$ y una sucesión $\{g_{m,k}\}$ de distintos $g_{m,k}$ tal que $g_{m,k} \rightarrow x_m$.

Sea δ_m la distancia mínima entre x_m y cualquier otro $x_j \in \{x_m\}$. Ahora hagamos que el subíndice k de $g_{m,k}$ dependa de $m, i, e., k(m)$. Los $k(m)$ son elegidos de forma que el conjunto $\{g_{m,k(m)}\}$ sea tal que $d(g_{m,k(m)}(z), x_m) < \delta_m/2$. Por lo tanto $\{g_{m,k(m)}\}$ es una sucesión de elementos distintos de G y ya que $x_m \rightarrow x$, entonces $g_{m,k(m)}(z) \rightarrow x$. ■

Definición 3.17. Un punto aislado de un conjunto, es aquel para el que existe una vecindad que no contiene ningún otro punto del conjunto.

Definición 3.18. Un conjunto perfecto es un conjunto cerrado sin puntos aislados.

Teorema 3.7. Si Λ contiene más de dos puntos, entonces es perfecto.

Demostración:

Supongamos que Λ contiene al menos tres puntos. Sean $x, y, z \in \Lambda$. Para cualquier punto x existe una sucesión $\{g_m\}$ de elementos distintos de G tal que $g_m(z) \rightarrow x$. Notemos que $y \neq z$. Luego por el teorema 3.3 hay dos puntos límite distintos x_1, x_2 , no necesariamente distintos de x , así que $g_m(x_1) \rightarrow x$ y $g_m(x_2) \rightarrow x$. Para un m particular $g_m(x_1) \neq x$ o $g_m(x_2) \neq x$. Por lo tanto existe una sucesión de puntos límite que convergen a cualquier punto arbitrario x . ■

Definición 3.19. Un grupo Kleiniano cuyo conjunto límite consiste de a lo más dos puntos es llamado **Grupo Elemental**. Los grupos con conjuntos límite con más elementos se les llama **no elemental**.

Teorema 3.8. La G -órbita de cualquier punto en $\Lambda(G)$ es densa en $\Lambda(G)$.

Demostración:

Supongamos que un punto $\zeta \in \Lambda(G)$ y sea D un disco abierto centrado en ζ . Supongamos que la sucesión de elementos distintos $\{A_n\} \in G$ han sido normalizados para un $\omega \in \mathbb{S}^2$, tenemos que $\zeta = \lim A_n(\omega)$.

Ahora tomemos $\zeta_1 \neq \zeta_2 \in \Lambda(G)$. Afirmamos que la familia $\{G\}$ de transformaciones de Möbius que actúa en D no puede omitir los valores ζ_1, ζ_2 .

Asumamos lo contrario, suponiendo por tanto que el tercer enunciado del Teorema de Montrel² se cumple. Bajo esta hipótesis, $\{G\}$ debe ser normal.

Consideremos la sucesión $\{A_n\}$. Para algún índice $N \in \mathbb{N}$ tenemos que $A_n(\omega) \in D$ para toda $n \geq N$. Denotemos $\omega' = A_N(\omega)$ y el conjunto $B_n = A_n A_N^{-1}$. $\lim B_n(\omega') = \zeta$. También debemos tener convergencia. Así $\lim B_n(z) = \zeta$ que convergen uniformemente para z en subconjuntos compactos de D . Particularmente, la imagen $B_N(D')$, de un subdisco D' el cual verifica que $\zeta \in D' \subset \overline{D'} \subset D$, para índices grandes n , es un subconjunto propio de D' . Por lo tanto, para toda k, n , tenemos que $B_n^k(D') \subset B_n^{k-1} \subset \dots \subset D'$ lo que implica que B_n es loxodrómica (para un n grande) con un punto fijo atractor en D' . Para un n fijo, la sucesión $\{B_n^{-k}\}$ no converge uniformemente en subconjuntos

²Una familia de funciones holomorfas, todas las cuales omiten los mismos dos valores $a, b \in \mathbb{C}$ es normal. Una familia F de funciones holomorfas se llama normal en una región D de \mathbb{C} si toda secuencia de funciones en F tiene una subsecuencia que converge de forma compacta en D .

compactos de D porque contiene los puntos fijos de repulsión, hecho que implica una contradicción. Consideremos que para algún $\xi \in \Lambda(G)$, ζ no es un punto límite de la G -órbita $G(\xi)$. Entonces existe un disco D centrado en ζ que no contiene puntos de $G(\xi)$. La G -órbita no se encuentra ni con ξ ni con ningún otro punto de su órbita. Sin embargo se ha probado antes que esto es imposible. Esto significa que $\Lambda(G)$ es denso³. ■

Teorema 3.9. $\Lambda(G)$ es la clausura del conjunto de puntos fijos loxodróxicos, y si hay puntos fijos parabólicos es la clausura del conjunto de puntos fijos parabólicos.

Demostración:

G es no elemental. Por lo tanto hay infinitas transformaciones loxodróxicas distintas en G . Si ξ es un punto fijo loxodróxico de T , cualquier punto $A(\xi)$ en su G -órbita es un punto fijo de una loxodrómica ATA^{-1} . Lo mismo pasa si ξ es un punto fijo parabólico.

Como Λ es cerrado y denso, Λ es igual a su cerradura. Sea q_n un punto fijo atractor de T_n loxodrómica. $\zeta = \lim q_n$ es el límite de una subsucesión de potencias positivas $\{T_n^k(\omega)\}$ para cualquier ω distinta del punto repulsor $p = \lim p_n$. ■

Teorema 3.10. Si G_0 tiene índice finito en G entonces $\Lambda(G_0) = \Lambda(G)$

Demostración:

Consideremos una transformación $A \in G$ que es loxodrómica. Si G_0 tiene índice finito en G , hay un $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ tal que $A^k \in G_0$. Así, $\Lambda(G_0)$ tiene el mismo conjunto de puntos loxodróxicos de $\Lambda(G)$. La clausura es $\Lambda(G)$. Como la clausura de ambas es la misma entonces $\Lambda(G_0) = \Lambda(G)$ ■

Teorema 3.11. Si G_0 es un subgrupo normal de G , entonces $\Lambda(G_0) = \Lambda(G)$.

Demostración:

Como G_0 es normal, se cumple que $gG_0g^{-1} = G_0$, $\forall g \in G$. La imagen por g de los puntos fijos de un $h \in G_0$ son los puntos fijos de $ghg^{-1} \in G_0$. Entonces $g\Lambda(G_0) = \Lambda(G_0)$, $\forall g \in G$. Pero $\Lambda(G_0) \subset \Lambda(G)$. Considerando que la G -órbita de los puntos fijos de una transformación loxodrómica $h \in G_0$ es densa en $\Lambda(G)$, esto significa que los conjuntos límite son iguales. ■

3.3.2. El complemento del conjunto límite

Definición 3.20. Un grupo G actúa de forma discontinua en un $x \in X$ si hay una vecindad U de x , tal que $g(U) \cap U = \emptyset$ para todos los $g \in G$ menos los finitos.

Definición 3.21. El conjunto de todos los puntos de X en el que un grupo G actúa de forma discontinua se denomina **conjunto de discontinuidad** y se denota por $\Omega(G)$.

Definición 3.22. El **estabilizador** de Y en G es el conjunto

$$\text{Stab}_G(Y) = \{g \in G : g(Y) = Y\}. \quad (3.1)$$

Definición 3.23. El conjunto Y es precisamente invariante bajo el subgrupo H en G si

- $H = \text{Stab}_G(Y)$.
- $g(Y) \cap Y = \emptyset$, $\forall g \in (G - H)$.

Teorema 3.12. Sea G un grupo Kleiniano. Un punto x está en $\Omega(G)$, si y solo si

- $\text{Stab}(x)$ es finito.
- Existe una vecindad U de x tal que es precisamente invariante bajo $\text{Stab}(x)$.

³Un subconjunto $A \subset X$ es denso en X si cada punto $x \in X$ si pertenece a A o es un punto límite de A

Demostración:

⇒]

Si $x \in (G)$ por definición $Stab_G$ es finito.

Si $x \in \Omega(G)$, $g(U) \cap U \neq \emptyset$ para un número finito de transformaciones g . Sea $V \subset U$ tal que $g(V) \cap V \neq \emptyset$ solo para $g \in Stab_G(x)$. La intersección $\bigcap_{g \in Stab_G(x)} g(V)$ es una vecindad que es precisamente invariante bajo H .

⇐]

Si $Stab_G(x)$ es finito y U es precisamente invariante bajo $Stab_G(x)$, entonces $g(U) \cap U \neq \emptyset$ para el número finito de elementos de $Stab_G(x)$. ■

Teorema 3.13. *Para cualquier grupo Kleiniano G , $\hat{\mathbb{C}}$ es la unión disjunta de $\Lambda(G)$ y $\Omega(G)$*

Demostración:

Primero se probará que $\Lambda(G) \cap \Omega(G) = \emptyset$, después que $\Lambda(G)$ y $\Omega(G)$ hacen una partición de $\hat{\mathbb{C}}$.

1. Si $z \in \Lambda$ su órbita es densa (teorema 3.8) en Λ . Así hay infinitos elementos de $g \in G$ tal que para cualquier vecindad U de z , $g(U) \cap U = \emptyset$. Por lo tanto, $\Lambda(G) \cap \Omega(G) = \emptyset$.
2. Consideremos un punto $x \notin \Omega(G)$. Para cada vecindad U de x hay infinitas traslaciones de U , $g_m(U)$ con $m \in \mathbb{N}$ y $g_m \in G$ que intersectan a U . Entre ellos consideremos una sucesión de elementos $\{g_m\} \in G$ y una sucesión de puntos $\{z_m\}$ tal que $z_m \rightarrow x$ y $g_m(z_m) \rightarrow x$. Por el teorema 3.3 existe una subsucesión de $\{g_m\}$ y hay dos puntos w, y tales que $g_m(z) \rightarrow w$ converge uniformemente en subconjuntos compactos para $z \in \mathbb{C} - y$. w y y son puntos límite. Tenemos dos casos i) $x = y$; ii) $x \neq y$. Si $x = y$ entonces, $x = y \in \Lambda(G)$. De lo contrario, si $x \neq y$, entonces los puntos no se acumulan en y . Hemos demostrado la partición, porque si $x \notin \Omega(G)$ podemos tomar $x = w$ y sucede que $x \in \Lambda(G)$. ■

3.4. El grupo Apoloniano

Teorema 3.14. *Retomando el Teorema 1.1.*

Demostración:

Dada una configuración de Descartes invertimos en un círculo centrado en un punto de tangencia (ξ). De ésta manera terminamos con una configuración de Descartes donde dos de los círculos son líneas rectas (\tilde{C}_1, \tilde{C}_2) y los otros dos se encuentran en la franja entre ellos. Usando isometrías Euclidianas organizamos los círculos y líneas de tal manera que \tilde{C}_1 es la línea $\{y = -1\}$, \tilde{C}_2 es la línea $\{y = 1\}$, \tilde{C}_3 tiene centro $(-1, 0)$ y radio 1 y \tilde{C} tiene centro $(1, 0)$ y radio 1. Recordemos que el inverso de un círculo de radio r y centro (x, y) con respecto a un círculo de referencia de radio k y centro $\xi = (x_0, y_0)$ es un círculo de radio $r' = \frac{rk^2}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - r^2}$. Además, el inverso de una línea cuya distancia del centro $\xi = (x_0, y_0)$ es d es un círculo de radio $r' = \frac{k^2}{2d}$.

Ahora, invirtiendo a la configuración inicial de Descartes y utilizando las fórmulas anteriores, obtenemos los radios de los círculos iniciales. Sustituyendo sus curvaturas en la ecuación de Descartes y tras unos cuantos cálculos, comprobamos que se cumple. ■

Sea \mathcal{A} que denota un empaquetado apoloniano. Entonces el conjunto residual de \mathcal{A} , está definido por

$$\Lambda(\mathcal{A}) = \overline{\bigcup_{C \in \mathcal{A}} C}.$$

Equivalentemente, si tomamos el complemento en $\hat{\mathbb{C}}$ de los interiores de todos los círculos en \mathcal{A} , nos queda el conjunto residual $\Lambda(\mathcal{A})$. El empaquetado Apoloniano, descansa sobre $\hat{\mathbb{C}}$.

Sea $\mathcal{D}_0 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ una configuración de Descartes de un empaquetado Apoloniano \mathcal{A} . Consideremos el grupo de transformaciones de Möbius $S = \langle i_1, i_2, i_3, i_4 \rangle$ actuando sobre $\hat{\mathbb{C}}$, donde i_k está definido como una inversión con respecto al círculo \tilde{C}_k que pasa a través de los puntos de tangencia de los círculos C_l para $l \neq k$. En otras palabras cada inversión i_k fija tres de los círculos iniciales en \mathcal{D}_0 (no puntualmente) y actúa recíprocamente en los dos círculos tangentes a esos tres. El conjunto de los círculos \tilde{C}_k es llamado la configuración *dual* de Descartes. Dichos círculos se ilustran en la figura 3.2 junto con los círculos \mathcal{D}_0 .

Partiendo de una configuración diferente de Descartes tenemos otro grupo de inversiones. Sin embargo, siempre podemos conjugar estos dos grupos mediante una transformación de Möbius. Recordemos simplemente que las transformaciones de Möbius están completamente determinadas por su acción sobre tres puntos, que en nuestro caso los elegimos como puntos de tangencia y que mapean círculos a círculos.

Un grupo S es generado por inversiones en los hemisferios cuyas intersecciones con la frontera son exactamente los círculos C_l . Se puede probar que el grupo S es un subgrupo discreto de $M(\hat{\mathbb{C}})$. Notemos que S deja al empaquetado \mathcal{A} invariante y hay cuatro S -órbitas de círculos en \mathcal{A} , llamadas $S(C_k)$. Así, el grupo S genera al empaquetado \mathcal{A} completamente a través de esas inversiones y el conjunto límite Λ_S es igual al conjunto residual $\Lambda(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} . Por esta razón el grupo S ha sido llamado el *grupo Apoloniano*.

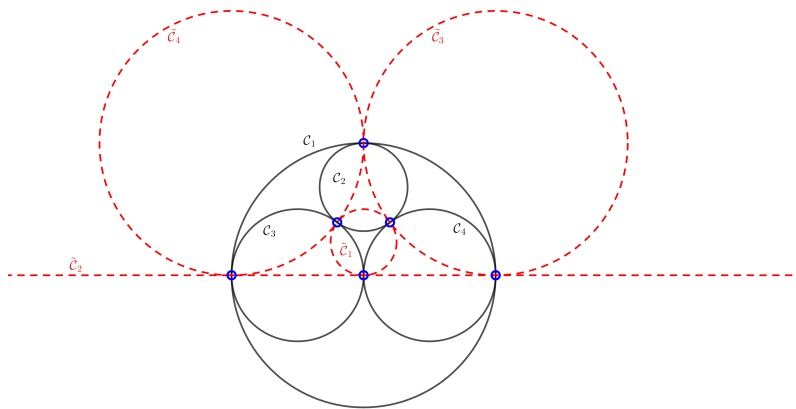


Figura 3.2: Configuración de Descartes \mathcal{D}_0 y su dual

Proposición 3.5. *Para un grupo S y un empaquetado Apoloniano \mathcal{A} , tenemos que $\Lambda_S = \Lambda(\mathcal{A})$.*

Demostración:

Λ_S es el conjunto de todos los puntos de acumulación de la órbita S_x para cualquier $x \in \mathbb{H}^3$. Además de que $\Lambda(\mathcal{A})$ es la cerradura de todos los puntos de tangencia de los círculos en el empaquetado tenemos que $\Lambda_S \subset \Lambda(\mathcal{A})$. Supongamos que $z \in \Lambda(\mathcal{A})$ y N es cualquier conjunto abierto que contiene a z . Entonces N contiene infinitos círculos de \mathcal{A} . Como se mencionó anteriormente \mathcal{A} está generado por las órbitas $S(\tilde{C}_k)$ para $k = 1, 2, 3, 4$ entonces ahí existe k y una sucesión s_l finita de elementos de S tales que $s_l(\tilde{C}_k) \subset N$ para toda l . Se sigue que $z \in \Lambda_S$ y que $\Lambda(\mathcal{A}) \subset \Lambda_S$. ■

Si tomamos el círculo \tilde{C}_1 de la configuración de Descartes \mathcal{D}_0 para ser el círculo unitario, entonces podemos calcular fácilmente la expresión analítica de las i_k 's. La expresión general de una

CAPÍTULO 3. GRUPOS KLEINIANOS
3.4. EL GRUPO APOLONIANO

inversión en un círculo de radio r y centro w está dada por:

$$i(z) = \frac{w\bar{z} + r^2 - w\bar{w}}{\bar{z} - \bar{w}}.$$

Entonces, los generadores del grupo Apoloniano son

$$\begin{aligned} i_1(z) &= \frac{\bar{z}}{-4iz + 1}, & i_2(z) &= \bar{z} \\ i_3(z) &= \frac{(1+i)\bar{z} - 1}{\bar{z} - 1 + i}, & i_4(z) &= \frac{(-1+i)\bar{z} - 1}{\bar{z} + 1 + i}. \end{aligned}$$

Las i_k 's son funciones conformes que invierten la orientación. De cualquier forma podemos reescribirlos como composiciones de funciones que preservan la orientación que son elementos de $PSL(2, \mathbb{C})$ y la función complejo de conjugación j . Entonces $i_k = \alpha_k \circ j$ donde las α_k 's están representadas por las siguientes matrices,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4i & 1 \end{pmatrix}, & \alpha_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \alpha_3 &= \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 1 & -1+i \end{pmatrix}, & \alpha_4 &= \begin{pmatrix} -1+i & -1 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El grupo General de Möbius, $GM(\hat{\mathbb{C}})$ es generado por conjugación compleja y el subgrupo $M(\hat{\mathbb{C}}) = PSL(2, \mathbb{C})$. Así el subgrupo que preserva orientación de los elementos de S denotado por S_h está dado por

$$S_h = S \cap PSL(2, \mathbb{C}).$$

Ya que $\alpha_2 = I$ y notando que $\bar{\alpha}_k = \alpha_k^{-1}$ tenemos

$$\begin{aligned} S_h &= \langle \alpha_1 \bar{\alpha}_2, \alpha_1 \bar{\alpha}_3, \alpha_1 \bar{\alpha}_4, \alpha_2 \bar{\alpha}_1, \alpha_2 \bar{\alpha}_3, \alpha_2 \bar{\alpha}_4, \alpha_3 \bar{\alpha}_1, \alpha_3 \bar{\alpha}_2, \alpha_3 \bar{\alpha}_4, \alpha_4 \bar{\alpha}_1, \alpha_4 \bar{\alpha}_2, \alpha_4 \bar{\alpha}_3 \rangle \\ S_h &= \langle \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4 \rangle. \end{aligned}$$

S_h es discreto como un subgrupo de S , entonces S_h es un grupo Kleiniano. Además S_h es un subgrupo normal infinito de S y

$$\Lambda_{S_h} = \Lambda_S = \Lambda(\mathcal{A}).$$

Capítulo 4

Propiedades topológicas del Tamiz de Apolonio

En este capítulo demostraremos que el Tamiz de Apolonio es un continuo, es decir, un conjunto compacto conexo y no vacío; para ello demostraremos primero que este es homeomorfo al triángulo de Sierpinski.

4.1. El triángulo de Sierpinski

Para poder construir dinámicamente el triángulo de Sierpinski debemos recordar algunos conceptos de Análisis matemático.

4.1.1. Sistema Iterado de Funciones

Antes de definir un Sistema Iterado de Funciones, se introducirán algunos conceptos.

Definición 4.1. *Un espacio métrico es una dupla (M, d) , donde M es un conjunto y $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que para cualesquiera dos puntos x, y , define la distancia $d(x, y)$ entre ellos y que satisface las siguientes propiedades:*

1. **Positividad:** *Para todo $x, y \in M$ la cantidad $d(x, y)$ es un número real no negativo que desaparece si y sólo si $x = y$*
2. **Simetría:** $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in M.$
3. **Desigualdad Triangular:** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in M.$

Definición 4.2. 1. *Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico (M, d) es convergente si existe $a \in M$ tal que $d(x_n, a) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty.$*

2. *Una sucesión $\{x_n\}$ se llama **fundamental** o **sucesión de Cauchy** si satisface:*

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0 \tag{4.1}$$

3. *Un espacio métrico se llama **completo** si cada sucesión fundamental es convergente.*
4. *Un subespacio X de un espacio métrico (M, d) se llama **cerrado** en M si contiene todos sus puntos límite.*

CAPÍTULO 4. PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DEL TAMIZ DE APOLONIO
4.1. EL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

5. Una función f de un espacio métrico en sí mismo se llama **contractante o contracción** si existe un número real $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in M \quad (4.2)$$

Teorema 4.1. (Punto fijo para funciones contractantes). Supongamos que M es un espacio métrico completo y f es un función contractante de M en sí mismo. Entonces existe un único punto fijo para f en M , es decir, el punto x satisface $f(x) = x$.

Demostración:

Sea x_0 un punto arbitrario de M . Consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0}$ definida por $x_n = f(x_{n-1})$, para $n \geq 1$.

Afirmamos que esta sucesión es convergente. Para esto demostramos que la sucesión $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, sea $d := d(x_0, x_1)$. Entonces dado que f es contractante en M satisface (4.2). Así,

$$d(x_1, x_2) \leq \lambda \cdot d, d(x_2, x_3) \leq \lambda^2 \cdot d, \dots, d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n \cdot d$$

Por lo tanto, para cualquier $m < n$ tenemos que $d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} \lambda^k \cdot d \leq \frac{\lambda^m}{1-\lambda} \cdot d$. Entonces

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) \rightarrow 0,$$

lo cual demuestra la afirmación.

Como M es completo, la sucesión de Cauchy tiene un límite el cual denotamos x_∞ .

La función f al ser contractante es continua. Por lo tanto, $f(x_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x_\infty$, i.e. x_∞ es un punto fijo.

Finalmente, si tenemos dos puntos fijos x, y , entonces $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y)$. Esto es posible si y sólo si $d(x, y) = 0$, por lo que $x = y$. ■

Definición 4.3. Sea M un espacio métrico. Denotamos por $\mathbb{K}(M)$ la colección de todos los subconjuntos compactos no vacíos de M . Definimos la distancia entre un punto x y un conjunto compacto Y denotado por $d(x, Y)$ como

$$d(x, Y) := \inf_{y \in Y} d(x, y).$$

Ahora la distancia entre dos conjuntos X y Y se define como

$$d(X, Y) := \max\left\{ \sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(X, y) \right\}.$$

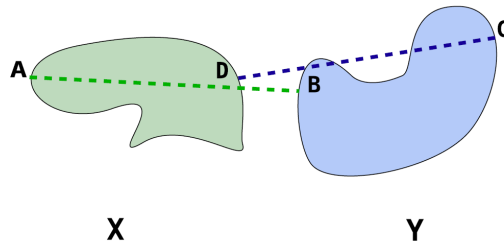


Figura 4.1: Distancia de Hausdorff

CAPÍTULO 4. PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DEL TAMIZ DE APOLONIO
4.1. EL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

Teorema 4.2. *Supongamos que una familia de funciones contractantes $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ en M ésta dada. Si definimos la transformación $F : \mathbb{K}(M) \rightarrow \mathbb{K}(M)$ por*

$$F(X) = f_1(X) \cup f_2(X) \cup \dots \cup f_k(X), \quad (4.3)$$

entonces F es contractante. Más aún, existe un único subconjunto compacto no vacío $X \subset M$ que cumple que $F(X) = X$

Observación 4.1. *Algunas veces, se utiliza una definición más general. En lugar de 4.3, se define la función F como sigue*

$$F(X) = f_1(X) \cup f_2(X) \cup \dots \cup f_k(X) \cup Y, \quad (4.4)$$

dónde Y es un subconjunto compacto fijo de M . Esta función generalizada también es contractante.

Definición 4.4. *Dada una función continua $f : X \rightarrow X$ denotaremos por $f^{\circ n}$ a la composición de f consigo misma, n veces. Para $n = 1$ escribiremos f en lugar de $f^{\circ 1}$*

Definición 4.5. *Dado un espacio métrico completo X con métrica acotada d , definimos el espacio*

$$\mathcal{H}(X) = \{A \subset X : A \text{ es compacto y diferente del vacío}\}.$$

*A el espacio $\mathcal{H}(X)$ se le llama **espacio de fractales**.*

Observación 4.2. *Un resultado muy conocido es el Teorema del punto fijo de Banach, que dice que toda contracción w definida sobre un espacio métrico completo X tiene exactamente un punto fijo; es decir, existe un único punto $x \in X$ tal que $w(x) = x$.*

Además, si x es el punto fijo, este punto se puede obtener calculando el límite de la sucesión $(z, f(z), f^{\circ 2}(z), \dots)$, tomando cualquier punto $z \in X$.

Teorema 4.3. *Si $\{w_i : i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ son contracciones en X , en donde X es un espacio métrico completo, entonces $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ definida por $W(A) = \cup_{i=1}^n w_i(A)$, para cada $A \in \mathcal{H}(X)$, es una contracción.*

Demostración:

Para una prueba detallada ver [Camargo and Isaacs, 2012]. ■

A continuación introduciremos el conjunto de Sistema Iterado de Funciones.

Definición 4.6. *Un sistema iterado de funciones (SIF), consiste de un espacio métrico completo X y un conjunto finito de contracciones w_1, w_2, \dots, w_n sobre X . Lo notaremos por $\{X, w_1, w_2, \dots, w_n\}$. Además, el punto fijo de la contracción W definida en $\mathcal{H}(X)$ por las contracciones w_1, w_2, \dots, w_n como en el Teorema 4.3, lo llamaremos **atractor**.*

A continuación realizaremos la construcción del triángulo de Sierpinski resultado de un SIF como atractor de un SIF. Para ello, recordemos que es triángulo de Sierpinski.

Definición 4.7. *Sea Δ equilátero de lado 1, junto con su interior. Determine los puntos medios de los lados de Δ y una dichos puntos de tal manera que se forme un triángulo por lo que se forman cuatro triángulos de los cuales se elimina el triángulo central. Luego, en cada uno de los tres triángulos que quedan se repite la construcción y así sucesivamente; se determina una sucesión de conjuntos $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$, Figura 4.2.*

Sea $(S_n)_n$ la sucesión obtenida anteriormente, se define el triángulo de Sierpinski que notaremos \mathcal{S} , como $\mathcal{S} := \cap_{n=0}^{\infty} S_n$

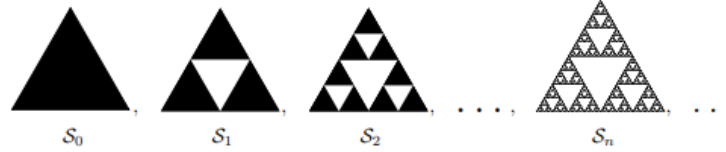


Figura 4.2: Construcción del triángulo de Sierpinski

Teorema 4.4. Sean w_1, w_2, w_3 contracciones en \mathbb{R}^2 , definidas de la siguiente manera:

$$w_1(x, y) = \frac{1}{2}(x, y), \quad w_2(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$w_3(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix},$$

dónde $\{\mathbb{R}^2, w_1, w_2, w_3\}$ es un sistema iterado de funciones cuyo atractor es el triángulo de Sierpinski \mathcal{S}

Demostración:

El conjunto S_1 se obtiene escalando tres copias de Δ cada una por un factor de $r = 1/2$. Supongamos que el lado inferior de Δ se encuentra a lo largo del eje x con vértices en el origen y en el punto $(1, 0)$, entonces dos de los triángulos escalados se trasladan para que la parte inferior izquierda los vértices están en $(1/2, 0)$ y $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ respectivamente, véase la figura 4.3.

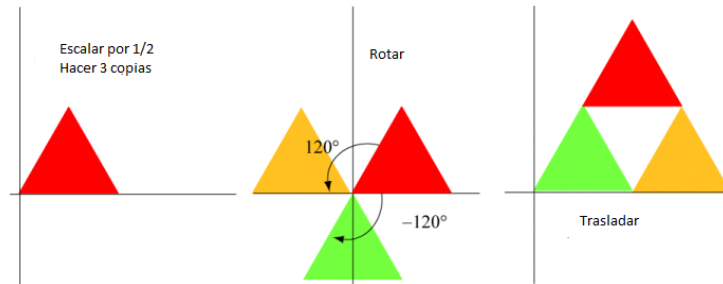


Figura 4.3: Construcción del triángulo de Sierpinski

Aplicando inducción matemática sobre la sucesión $\{F^n(\Delta)\}_n$ obtenemos los conjuntos S_n .

Por construcción se tiene que cada S_n es un conjunto compacto no vacío y que además: $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots \supseteq S_n \supseteq \dots$

Solo resta mostrar que $(S_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$. En efecto,

$$d(S_0, S_1) = \frac{\sqrt{3}}{12} d(S_1, S_2) = \frac{\sqrt{3}}{12 \times 2} d(S_2, S_3) = \frac{\sqrt{3}}{12 \times 2^2} \dots d(S_n, S_{n+1}) = d(S_0, S_1) = \frac{\sqrt{3}}{12 \times 2^n}$$

de modo que si $m \geq n$ se tiene:

CAPÍTULO 4. PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DEL TAMIZ DE APOLONIO
4.2. EL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI COMO LÍMITE INVERSO DE CONTINUOS

$$d(S_n, S_m) \leq \sum_{j=n}^{m-1} d(S_j, S_{j+1}) = \frac{\sqrt{3}}{12 \times 2^n} + \frac{\sqrt{3}}{12 \times 2^{n+1}} + \dots + \frac{\sqrt{3}}{12 \times 2^m} = \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^m} \right) \rightarrow 0$$

cuando $n, m \rightarrow \infty$. ■

4.2. El triángulo de Sierpinski como límite inverso de continuos

En la sección anterior obtuvimos a \mathcal{S} como el atractor de un *SIF* ahora lo obtendremos utilizando Teoría de Continuos, para ello introduciremos los siguientes conceptos.

Definición 4.8. *Un continuo X se dice indescomponible si no existen dos subconjuntos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$.*

Definición 4.9. *Un punto x de un espacio X es llamado un punto de corte local si existe una vecindad conexa abierta U de x tal que $U \setminus \{x\}$ no es conexo.*

Definición 4.10. *Una curva cerrada simple es cualquier espacio homeomorfo al círculo unitario.*

Definición 4.11. *Un arco es cualquier espacio que es homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$.*

Definición 4.12. *Un grafo es la unión de un número finito de arcos tal que cada par de estos arcos son disjuntos, o se intersecan en uno o sus dos puntos extremos. Los arcos que forman el grafo los llamaremos *aristas* y los puntos de intersección de las aristas de un grafo los llamaremos *vértices*. Un vértice de un grafo lo llamaremos *vértice simple*, si es un punto de intersección de a lo más dos aristas.*

Definición 4.13. *Un dominio complementario de un plano continuo X es cualquier componente del complemento de X .*

Definición 4.14. *Sean X un espacio métrico y compacto y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X . Definimos el límite inferior de $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, denotado por $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$, y el límite superior de $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, denotado por $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$, como:*

1. $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \in X : \text{para toda vecindad } U \text{ de } X, \text{ tenemos que } U \cap A_n \neq \emptyset, \text{ para cada } n \geq k, \text{ para algún } k\}$
2. $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \in X : \text{para toda vecindad } U \text{ de } X, \text{ tenemos que } U \cap A_n \neq \emptyset, \text{ para un número infinito de índices}\}$

Finalmente, diremos que la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A , denotado por $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$, si $A = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$.

El límite dado en la definición 4.14 coincide con el límite que obtenemos si consideramos la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}(X)$ como espacio métrico.

Definición 4.15. *Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos compactos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n^{n+1} : X_{n+1} \rightarrow X_n$ una función continua y sobreyectiva. La doble sucesión $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ la llamaremos *sucesión inversa*. Además, el límite inverso de la sucesión inversa $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ que denotamos por $\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$, lo definimos por*

CAPÍTULO 4. PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DEL TAMIZ DE APOLONIO
4.2. EL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI COMO LÍMITE INVERSO DE CONTINUOS

$$\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\} = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n : f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n, \text{ para cada } n \right\}. \quad (4.6)$$

Teorema 4.5. *El límite inverso de espacios métricos compactos es un espacio métrico compacto y el límite inverso de continuos es un continuo.*

Para una demostración detallada de este teorema el lector puede consultar [Nadler Jr, 1992].

Definición 4.16. *Un subconjunto $S \in M$ es llamado ϵ -red en M si para cualquier $m \in M$ existe un punto $s \in S$ tal que $d(m, s) < \epsilon$.*

Teorema 4.6. *(Sobre ϵ -red). Un espacio métrico (M, d) es compacto si es completo y para cualquier $\epsilon > 0$ existe una ϵ -red finita en M .*

Sea T_1 el grafo en \mathbb{R}^2 tal que las aristas forman un triángulo equilátero con vértices(simples): $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Definimos $T_n = W^{o_n-1}(T_1)$. donde W es la construcción sobre $\mathcal{H}(X)$ definida usando las contracciones w_1, w_2, w_3 , como en el teorema 4.3(ver figura 4.4).

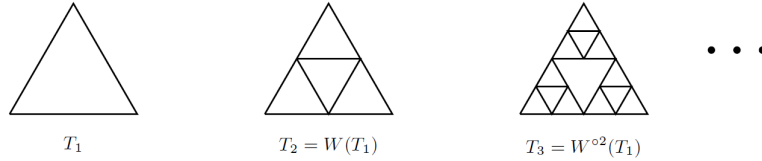


Figura 4.4: Construcción de \mathcal{S} a partir de $\{\mathbb{R}^2, w_1, w_2, w_3\}$

Es importante tener en cuenta la siguiente observación.

Observación 4.3. *Por la definición de W , el grafo $T_{k+1} = w_1(T_k) \cup w_2(T_k) \cup w_3(T_k)$. Sea $T_k^i = w_i(T_k)$, con $i \in \{1, 2, 3\}$. Entonces $w_i : T_k \rightarrow T_k^i$ es un homeomorfismo, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, tal que T_k^1 tiene sus vértices simples en $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$, T_k^2 en $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ y $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ y T_k^3 en $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$, $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ y $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, como se puede ver, para $k \in \{1, 2\}$, en la figura 4.4. Además para cada k , T_k siempre tiene los mismos vértices simples $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.*

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos $f_k^{k+1} : T_{k+1} \rightarrow T_k$ de la siguiente manera:

$$f_k^{k+1}(x, y) = w_i^{-1}(x, y), \text{ cuando } (x, y) \in T_k^i, i \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.7)$$

Evaluando en (4.5), tenemos que $w_1(1, 0) = w_2(1, 0) = (\frac{1}{2}, 0)$, $w_1(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = w_3(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ y $w_2(0, 0) = w_3(0, 0) = (\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$. Además, $T_k^1 \cap T_k^2 = \{(\frac{1}{2}, 0)\}$, $T_k^1 \cap T_k^3 = \{(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})\}$ y $T_k^2 \cap T_k^3 = \{(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})\}$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$. De lo anterior tenemos que f_k^{k+1} está bien definida y es continua, para cada $k \in \mathbb{N}$. La razón por la cual escogimos las contracciones definidas en el teorema 4.4 es para que la función f_k^{k+1} esté bien definida.

Es importante resaltar, para tener una idea geométrica, que la definición de la función $f_k^{k+1} : T_{k+1} \rightarrow T_k$ se puede presentar como $f_k^{k+1} = f|_{T_k} : T_k \rightarrow T_k$, donde $f(x, y) = 2(g_3(g_2(g_1(x, y))))$, y:

$$g_1(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } \sqrt{3}(x - \frac{1}{2}) \leq y; \\ (-\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2} + \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}) & \text{si } y \leq \sqrt{3}(x - \frac{1}{2}), \end{cases}$$

CAPÍTULO 4. PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DEL TAMIZ DE APOLONIO
4.2. EL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI COMO LÍMITE INVERSO DE CONTINUOS

$$g_2(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } y \leq \frac{\sqrt{3}}{4}; \\ (x, \frac{\sqrt{3}}{2} - y) & \text{si } \frac{\sqrt{3}}{4} \leq y, \end{cases}$$

$$g_3(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } y \leq -\sqrt{3}(x - \frac{1}{2}); \\ (-\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2} + \frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}) & \text{si } \sqrt{3}(x - \frac{1}{2}) \leq y. \end{cases}$$

Esta definición muestra con mayor claridad la continuidad de la función. Además, no es difícil verificar que las funciones g_1, g_2 y g_3 son doblesces del plano \mathbb{R}^2 , como mostramos, para $k = 2$ en la Figura 4.5.

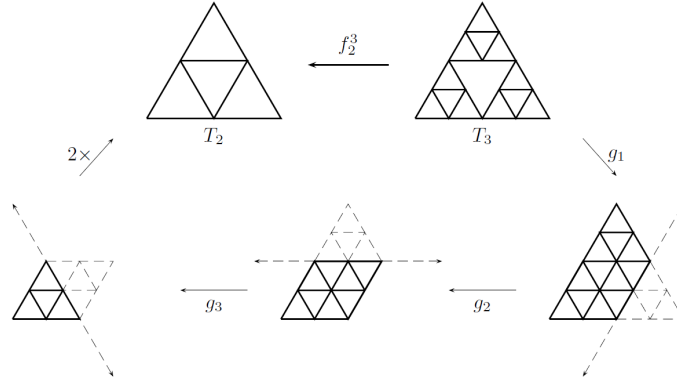


Figura 4.5: Función f_2^3 paso a paso.

Basándonos en lo anterior y en la Definición 4.15, $\{T_n, f_{n-1}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión inversa. Definimos el continuo (ver Teorema 4.5)

$$\mathcal{K}_S = \varprojlim \{T_n, f_{n-1}^n\}. \quad (4.8)$$

Como \mathcal{S} es el atractor del $SIF \{\mathbb{R}^2, w_1, w_2, w_3\}$ que definimos anteriormente, entonces tenemos que $W(\mathcal{S}) = \mathcal{T}$. Así, es natural definir una sucesión inversa donde cada uno de los espacios factor es homeomorfo a \mathcal{S} . Con base en esta idea, definiremos un continuo que denotaremos como \mathcal{L}_S .

Sabemos que $\mathcal{S} = w_1(\mathcal{S}) \cup w_2(\mathcal{S}) \cup w_3(\mathcal{S})$, donde w_1, w_2, w_3 son las contracciones definidas en 4.4. La función $g : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, definida por $g(x, y) = w_i^{-1}(x, y)$ si $(x, y) \in w_i(\mathcal{S})$, $i \in \{1, 2, 3\}$ está bien definida y es continua. Así podemos definir la sucesión inversa $\{\mathcal{S}_n, g_n^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}$ y $g_n^{n+1} = g$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$\mathcal{L}_S = \varprojlim \{\mathcal{S}_n, g_n^{n+1}\}. \quad (4.9)$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $\mathcal{K}_S^k = \varprojlim \{T_{n+k}, f_{n+k}^{n+k+1}\}$, donde T_i y f_i^{i+1} las tomamos como en 4.8. Notemos lo siguiente:

1. \mathcal{K}_S^k es homeomorfo a \mathcal{K}_S , para cada $k \in \mathbb{N}$.
2. Como $T_{k+1} \subset T_{k+2}$, tenemos que $\mathcal{K}_S^k \subset \mathcal{K}_S^{k+1}$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Una propiedad del continuo \mathcal{K}_S es que, como \mathcal{K}_S es el límite inverso de grafos, \mathcal{K}_S tiene dimensión 1.

Teorema 4.7. $\mathcal{L}_S = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{K}_S^k$

CAPÍTULO 4. PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DEL TAMIZ DE APOLONIO
4.3. CARACTERIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

Para ver la demostración consultar [Camargo and Isaacs, 2012]

Proposición 4.1. *Si $x \in \mathcal{L}_S$, entonces existe un subcontinuo T de \mathcal{L}_S tal que $x \in T$ y T es homeomorfo al triángulo de Sierpinski \mathcal{S} .*

Demostración:

Sea $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un punto en \mathcal{L}_S . Como $\mathcal{S}_2 = w_1(\mathcal{S}_1) \cup w_2(\mathcal{S}_1) \cup w_3(\mathcal{S}_1)$, tenemos que $x_2 \in w_{k_1}(\mathcal{S}_1)$ para algún $k \in \{1, 2, 3\}$. Obsérvese que $g_1^2|_{w_{k_1}(\mathcal{S}_1)} = w_{k_1}^{-1} : w_{k_1}(\mathcal{S}_1) \rightarrow \mathcal{S}_1$ es un homeomorfismo. De la misma manera, existe $k_2 \in \{1, 2, 3\}$ tal que $x_3 \in w_{k_2}$ y $g_2^3|_{w_{k_2}(\mathcal{S}_2)} = w_{k_2}^{-1} : w_{k_2}(\mathcal{S}_2) \rightarrow \mathcal{S}_2$ es un homeomorfismo. Como $w_{k_1}(\mathcal{S}_1) \subset \mathcal{S}_2$, tenemos que $w_{k_2}(w_{k_1}(\mathcal{S}_1))$ es un subcontinuo de $w_{k_2}(\mathcal{S}_2)$ y $g_2^3|_{w_{k_2}(w_{k_1}(\mathcal{S}_1))} : w_{k_2}(w_{k_1}(\mathcal{S}_1)) \rightarrow w_{k_1}(\mathcal{S}_1)$ es un homeomorfismo. De forma inductiva, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $k_1, k_2, \dots, k_n \in \{1, 2, 3\}$ tales que $x_{n+1} \in (w_{k_n} \circ \dots \circ w_{k_1})(\mathcal{S}_1)$ y $g_n^{n+1}|_{(w_{k_n} \circ \dots \circ w_{k_1})(\mathcal{S}_1)} : (w_{k_n} \circ \dots \circ w_{k_1})(\mathcal{S}_1) \rightarrow (w_{k_n} \circ \dots \circ w_{k_1})(\mathcal{S}_1)$ es un homeomorfismo.

Así definimos $L_n = (w_{k_n} \circ \dots \circ w_{k_1})(\mathcal{S}_1)$ y $h_n^{n+1} = g_n^{n+1}|_{(w_{k_n} \circ \dots \circ w_{k_1})(\mathcal{S}_1)}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Nótese que $\{L_n, h_n^{n+1}\}$ es una sucesión inversa tal que $x \in T = \varprojlim \{L_n, h_n^{n+1}\}$. y $T \subset \mathcal{L}_S$. Además dado que L_n es homeomorfo a \mathcal{S} y h_n^{n+1} es un homeomorfismo para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que T es homeomorfo a \mathcal{S} . ■

Observación 4.4. *Observemos que por la autosimilitud del triángulo de Sierpinski \mathcal{S} , podemos decir que para cualquier abierto U en \mathcal{L}_S , existe una copia de \mathcal{S} contenido en U .*

4.3. Caracterización topológica del Triángulo de Sierpinski

En esta sección estudiaremos la relación entre el triángulo de Sierpinski y el Tamiz de Apolonio.

Proposición 4.2. *Sea X un continuo localmente conexo en el plano. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ solo hay un número finito de dominios complementarios de X con diámetro más grande que ε .*

Definición 4.17. *Toda curva cerrada simple C en un continuo X se llamará enlace siempre que $X \setminus C$ sea conexo.*

Teorema 4.8. *Un continuo X es homeomorfo a al tamiz de Apolonio si y sólo si*

1. X es plano y conexo localmente,
2. dos enlaces cualesquiera en X se cruzan como máximo en un punto,
3. no hay ningún punto en X común a tres enlaces,
4. X contiene al menos tres enlaces, cada par de los cuales se cruza,
5. Siempre que haya tres enlaces cada par de los cuales se corta, hay otros dos enlaces que se cortan a cada uno de los tres enlaces dados.

Demostración:

Se observa fácilmente que cualquier espacio homeomorfo al tamiz de Apolonio satisface todas las condiciones 1-5.

Recíprocamente, supongamos que X es un continuo que satisface las cinco condiciones. Por la condición 4 existen tres enlaces distintos C_0, C_1 y C_2 cada uno de los cuales se interseca. Observamos que de la condición 5 y de la condición 1 se deduce que para cualquier tripleta de enlaces que se cruzan entre sí, existen exactamente otros dos enlaces que se cruzan con cada uno de los tres enlaces dados.

Denotemos por $A = \cup_{n=0}^{\infty} \{0, 1, 2\}^n$ un conjunto de índices. Por inducción construimos una familia de enlaces $\{L(a) : a \in A\}$ tales que:

CAPÍTULO 4. PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DEL TAMIZ DE APOLONIO
4.3. CARACTERIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

- $L(a)$ toca a $L(a, b)$ siempre que $a \in \{0, 1, 2\}^n$ y $b \in \{0, 1, 2\}^m$ donde $n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}$ y $b_1 \notin \{b_2 \dots b_n\}$.
- $L(a)$ toca a C_i siempre que $i \in \{0, 1, 2\}, a \in \{0, 1, 2\}^n$ e $i \notin \{a_1, \dots, a_n\}$.

Sea $L(\emptyset)$ un enlace que toca a los enlaces C_0, C_1, C_2 . Por la condición 5 hay dos de ellos por lo que tenemos dos posibles opciones. Suponemos que se han construido todos los enlaces $L(a)$ para $|a| \leq n$ y que satisfacen la hipótesis de inducción. Fijamos $a \in A$ e $i \in \{0, 1, 2\}$, donde $|a| = n$, y definimos un enlace $L(a, i)$. Distinguimos varios casos:

- Si $n = 0$, consideramos tres enlaces $L(\emptyset), C_j, C_k$ donde $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$. Estos tres enlaces se intersectan entre sí. Por tanto, según la condición 5, hay otros dos enlaces que tocan a los tres enlaces dados. Uno de ellos es el enlace C_i . Definimos $L(i)$ como el otro enlace.
- Si $n \geq 1$ y $|\{a_1, \dots, a_n\}| = 1$, podemos encontrar j y k tales que $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$. Claramente los enlaces $L(a), C_j$ y C_k se tocan entre sí por la hipótesis de inducción. Por lo tanto hay otros dos enlaces que tocan a cada uno de estos tres. Uno de ellos es $L(a_1, \dots, a_{n-1})$. Definimos a $L(a, i)$ como el otro enlace.
- Si $n \geq 1$ y $a_1 = \dots = a_n$, podemos definir $j = a_n$ y k tal que $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$. Los enlaces $L(a), L(a_1, \dots, a_{n-1})$ y C_k se tocan entre sí. Por lo tanto, hay otros dos enlaces que tocan cada uno de estos tres. Uno de ellos es C_i . Definimos $L(a, i)$ como el otro enlace.
- Si $|\{a_1, \dots, a_n\}| = |\{a_1, \dots, a_n, i\}| = 2$. Podemos encontrar $j \in \{a_1, a_n\}$ y k tales que $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$. Sea $l \leq n$ un número natural para el cual $a_l \neq a_{l+1} = \dots = a_n = i$. Además sea $m \leq n$ el mayor número entero para el cual $a_m = i$. Los enlaces $L(a), L(a_1, \dots, a_{l-1})$ y C_k se tocan entre sí. Por lo tanto hay otros dos enlaces que tocan a cada uno de estos tres. Uno de ellos es $L(a_1, \dots, a_{m-1})$. Sea $L(a, i)$ el otro enlace.
- Si $|\{a_1, \dots, a_n\}| = 2$ y $|\{a_1, \dots, a_n, i\}| = 3$. Denotemos por $l \leq n$ un número natural para el cual $a_l \neq a_{l+1} = \dots = a_n$. Después encontramos el número natural $m < l$ para el cual $a_m \notin \{a_{m+1}, \dots, a_n, i\}$. Los enlaces $L(a), L(a_1, \dots, a_{l-1})$ y $L(a_1, \dots, a_{m-1})$ son tres enlaces cada par de los cuales se intersectan. Por lo tanto, hay otros dos enlaces que tocan cada uno de estos tres. Uno de ellos es C_i . Definimos $L(a, i)$ como el otro.
- Si $|\{a_1, \dots, a_n\}| = |\{a_1, \dots, a_n, i\}| = 3$. Denotemos por $l \leq n$ un número natural para el cual $a_l \neq a_{l+1} = \dots = a_n = i$. Después encontramos el número natural $m < l$ para el cual $a_m \notin \{a_{m+1}, \dots, a_n, i\}$. Podemos encontrar el mayor número entero $p \leq n$ para el cual $a_p = i$. Los enlaces $L(a), L(a_1, \dots, a_{l-1})$ y $L(a_1, \dots, a_{m-1})$ son tres enlaces cada par de los cuales se intersectan. Por lo tanto, hay otros dos enlaces que tocan cada uno de estos tres. Uno de ellos es $L(a_1, \dots, a_{p-1})$. Definimos $L(a, i)$ como el otro.

En cada caso podemos verificar fácilmente que la hipótesis de inducción se sigue cumpliendo. Ahora definimos un función $f : \{(a, \bar{i}) : a \in A, i \leq 2\} \rightarrow X$ como sigue:

- $f(\bar{i})$ es el único punto en la intersección $C_j \cap C_k$ donde $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$.
- Si $|\{a_1, \dots, a_n, i\}| = 2$ y $a_n \neq i$ definimos $f(a, \bar{i})$ para ser el único punto en $L(a_1, \dots, a_{n-1}) \cap C_k$ donde k satisface $\{a_n, i, k\} = \{0, 1, 2\}$.
- Si $|\{a_1, \dots, a_n, i\}| = 2$ y $a_n \neq i$ encontramos un número natural $l < n$ para el cual $a_l \notin \{a_{l+1}, \dots, a_n, i\}$ y definimos $f(a, \bar{i})$ para ser el único punto en $L(a_1, \dots, a_{n-1}) \cap L(a_1, \dots, a_{l-1})$.

Consideramos la familia de enlaces $\{C_0, C_1, C_2\} \cup \{L(a) : a \in A\}$ y enumeramos como $\{D_m : m \in M\}$ una familia de todas las cerraduras de los dominios complementarios de estos enlaces que no intersectan a X . Notemos que los diámetros de los conjuntos D_m convergen a

CAPÍTULO 4. PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DEL TAMIZ DE APOLONIO
4.3. CARACTERIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

cero por la proposición 4.2. Los supuestos de la proposición 4.2 se satisfacen debido a la condición 1.

Para mostrar que la función f es uniformemente continuo es suficiente probar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que los componentes de $\mathbb{R}^2 \cup \{D_m : m < n\}$ son de diámetro menor que ε . Supongamos que eso no es cierto. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ y hay dominios complementarios G_n de $\mathbb{R}^2 \cup \{D_m : m < n\}$ cuyos diámetros son al menos ε y tales que $G_{n+1} \subseteq G_n$. Para cada $m \in \mathbb{N}_0$ hay tres índices distintos entre sí $p_m, q_m, r_m \in \mathbb{N}$ tal que G_m es el dominio complementario acotado de $\mathbb{R}^2 \setminus (D_{p_m} \cup D_{q_m} \cup D_{r_m})$. Por la eventual restricción a una subsecuencia de (G_m) y la posible permutación de p_m, q_m y r_m basta con considerar los siguientes tres casos.

- La sucesión (p_m) tiende a infinito y q_m y r_m son constantes. Denotamos por x el único punto en $D_{q_0} \cap D_{r_0}$. Como los diámetros de (D_{p_m}) convergen a cero obtenemos que (D_{p_m}) converge al punto x . Entonces los conjuntos G_m tienden a x y así los diámetros de G_m convergen a cero.
- Las sucesiones (p_m) y q_m tienden a infinito y r_m es constante. Hay un punto $x \in X$ que es un punto límite de la sucesión $(D_{p_m} \cup D_{q_m})$. De manera similar al caso anterior llegamos a que la sucesión G_m converge al punto x y sus diámetros tienden a cero.
- Todas las sucesiones $(p_m), (q_m), (r_m)$ convergen a infinito. Entonces obtenemos que el diámetro de G_m es menor o igual al diámetro de $D_{p_m} \cup D_{q_m} \cup D_{r_m}$ el cual converge a cero.

En todos los casos se obtiene una contradicción.

Denotamos por $g : \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow X$ la única extensión continua de la función f . Usando la condición 2 llegamos a que $g(a_1, \dots, a_n, i, j) = g(a_1, \dots, a_n, j, i)$ y esas son las únicas posibilidades cuando $g(x) = g(y)$ para $x \neq y$ por la condición 3. Así la imagen de $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ bajo g es homeomorfo al triángulo de Sierpinski.

Ahora recordamos que había dos posibilidades $L(\emptyset)$ y $L'(\emptyset)$, cómo elegir el primer enlace en el proceso inductivo. Por lo tanto podemos obtener por la misma prueba otra familia de enlaces $\{L'(a) : a \in A\}$ y la función correspondiente f' y su continua extensión g .

Por un razonamiento similar al de la prueba de que f es uniformemente continua, podemos demostrar que la unión de las imágenes de los funciones f y f' es densa en X . Y por tanto la unión de las imágenes de g y g' cubre todo el espacio X . La intersección de las imágenes de los g y g' está formada por tres puntos. Se trata de los puntos contenidos en exactamente dos enlaces de C_0, C_1 y C_2 . Así obtenemos que X es homeomorfo al cociente de la suma directa de dos copias del triángulo de Sierpinski, donde se identifican los vértices correspondientes. Por tanto, X es homeomorfo al tamiz de Apolonio. ■

Observación 4.5. Como la elección de los tres enlaces C_0, C_1, C_2 al principio de la prueba anterior fue aleatoria llegamos a la conclusión de que para cualquier tripleta de enlaces distintos que se cruzan entre sí C_0, C_1, C_2 existe un homeomorfismo del tamiz de Apolonio sobre sí mismo, que envía C_i sobre C'_i para cualquier $i \leq 2$.

Lema 4.1. Sea X un continuo localmente conexo y K un subcontinuo no degenerado de X con frontera finita. Entonces cada punto de la frontera de K es un punto local de corte de X .

Demostración:

Sea x un punto de la frontera de K . Como la frontera de K es finita y X es localmente conexo, existe una vecindad abierta conexa U de x cuya intersección con la frontera de K contiene solo el punto x . Tenemos que el conjunto $U \setminus \{x\}$ es una unión disjunta de dos conjuntos abiertos $K \cap U \setminus \{x\}$ y $U \setminus K$. Ambos conjuntos son no vacíos y como x es un elemento de la frontera de K . Entonces x es un punto de corte de U y consecuentemente es un punto de corte local de x . ■

Teorema 4.9. Cualquier subcontinuo del tamiz de Apolonio cuya frontera esté formada por exactamente tres puntos es homeomorfo al triángulo de Sierpinski.

CAPÍTULO 4. PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DEL TAMIZ DE APOLONIO
4.3. CARACTERIZACIÓN TOPOLÓGICA DEL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

Demostración:

Supongamos que X es un subcontinuo del tamiz de Apolonio con exactamente tres puntos v_0, v_1, v_2 en la frontera. Por el lema 4.1 sabemos que los puntos $v_i, i = 0, 1, 2$ son puntos de corte local, que son aquellos puntos en el tamiz de Apolonio donde se cruzan dos enlaces distintos. Para cualquier par de índices $i, j \in \{0, 1, 2\}$ existe un dominio complementario D_k , donde $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$ y los puntos v_i y v_j pertenecen a la frontera de D_k . Las fronteras C_0, C_1, C_2 de D_0, D_1, D_2 son enlaces distintos por pares y $\{v_i\} = C_j \cap C_k$ para $i, j, k = \{0, 1, 2\}$. Por la observación 4.5 concluimos que X es homeomorfo al triángulo de Sierpinski. ■

Corolario 4.1. *Sea X un continuo y sean v_0, v_1, v_2 tres puntos en X . Definimos un espacio Y como la suma de X y una copia disjunta X' de X donde cada punto v_i se indentifica con v'_i que es un punto correspondiente en X' . Si el espacio Y es homeomorfo al tamiz de Apolonio, entonces X es homeomorfo al triángulo de Sierpinski.*

Demostración:

Claramente X es un subcontinuo del tamiz de Apolonio Y y que su frontera consta de tres puntos. Entonces por el teorema 4.3 se sigue que X es homeomorfo al triángulo de Sierpinski. ■

Observación 4.6. *Del Teorema anterior se sigue que el Tamiz de Apolonio es un continuo pues por el Corolario 4.1 estos dos conjuntos son homeomorfos, y por la Proposición 4.1 se sigue que el triángulo de Sierpinski es un continuo, por ende, el Tamiz de Apolonio también lo es.*

Conclusión

En este trabajo de tesis se abordó la solución del problema de Apolonio desde la perspectiva de la escuela griega hasta la perspectiva de Félix Klein, es decir, desde la construcción con regla y compás hasta una categorización topológica del tamiz de Apolonio.

Además, sabemos que al estudiar la recursividad del problema de Apolonio obtenemos el tamiz de Apolonio el cual es un objeto geométrico que se puede construir computacionalmente; como lo muestran los anexos de este trabajo; y en los que sin duda se logra apreciar la fuerza del estudio geométrico a través de funciones complejas.

El tamiz de Apolonio es una estructura fractal de gran interés para muchos matemáticos, los cuales utilizando herramientas de Sistemas Dinámicos, Teoría de Números, Teoría de la Medida y Teoría de la Dimensión se sabe que:

1. La dimensión de Hausdorff del Tamiz de Apolonio está acotada.
2. Existe una función racional cuyo conjunto de Julia es homeomorfo al Tamiz de Apolonio.

Los cuales son propiedades interesantes de estudiar a futuro.

Anexos

Apéndice A

Anexo: Código en lenguaje Python

Con el siguiente código se solucionó de manera numérica el problema de Apolonio, generando así el tamiz de Apolonio.

```
1 #importacion de librerias a utilizar
2 import math #libreria matematica
3 import cmath #libreria matematica compleja
4 import random #libreria para generar numeros aleatorios
5 from PIL import Image, ImageDraw #libreria para generar la imagen
6 import matplotlib.colors as colors #importacion de los colores
7
8 coles=colors.cnames #arreglo para guardar los colores
9 values= coles.values() #arreglo con los numeros de los colores
10 lista= list(values)
11 imgx = 512 #tamaño de imagen
12 imgy = 512
13 image = Image.new("RGB", (imgx, imgy))
14 draw = ImageDraw.Draw(image)
15
16
17 def apxI(u, v): #aproximadamente igual
18     return abs(abs(u) - abs(v)) <= eps
19
20 # prueba si 2 circulos aproximadamente iguales
21 def apxCir(a, b):
22     return (abs(a[0] - b[0]) <= eps and apxI(a[1], b[1]))
23
24 # 2 circulos son tangentes
25 def CirTan(a, b):
26     return (apxI(a[0] - b[0], abs(a[1]) + abs(b[1])) or apxI(a[0] - b[0],
27         abs(a[1]) - abs(b[1])))
28
29 # dos circulos se intersectan
30 def CirInt(a, b):
31     dist = abs(a[0] - b[0]) # distancia entre 2 centros
32     rmin = min(abs(a[1]), abs(b[1])) # radio min
33     rmax = max(abs(a[1]), abs(b[1])) # radio max
34     return (dist + eps < rmin + rmax and dist + rmin > rmax + eps)
35
36 # 3 circulos son tangentes entre ellos
37 def Tangente(a, b, c):
```

APÉNDICE A. ANEXO: CÓDIGO EN LENGUAJE PYTHON

```
37     flag = True
38     if apxCir(a, b) or apxCir(a, c) or apxCir(b, c):
39         flag = False
40     if not CirTan(a, b):
41         flag = False
42     if not CirTan(a, c):
43         flag = False
44     if not CirTan(b, c):
45         flag = False
46     return flag
47
48 # 4 circulos son tangentes
49 def Tan4(a, b, c, d):
50     return Tangente(a, b, d) and Tangente(a, c, d) and Tangente(b, c, d)
51
52
53 #implementa el teorema de descartes para encontrar las circunferencias
54 def tdes(a, b, c):
55     # curvaturas de los circulos
56     k1 = 1.0 / a[1]
57     k2 = 1.0 / b[1]
58     k3 = 1.0 / c[1]
59     # curvaturas de los circulos tangentes
60     temp0 = 2.0 * math.sqrt(k1 * k2 + k1 * k3 + k2 * k3)
61     temp1 = k1 + k2 + k3
62     k40 = temp1 + temp0
63     k41 = temp1 - temp0
64     # centros de los circulos
65     temp0 = 2.0 * cmath.sqrt(k1*k2*a[0]*b[0]+k1*k3*a[0]*c[0]+k2*k3*b[0]*c
66         [0])
67     temp1 = k1 * a[0] + k2 * b[0] + k3 * c[0]
68     c40 = (temp1 + temp0) / k40
69     c41 = (temp1 - temp0) / k41
70     c42 = (temp1 - temp0) / k40
71     c43 = (temp1 + temp0) / k41
72     # radios de los circulos
73     r0 = 1.0 / k40
74     r1 = 1.0 / k41
75     #hay 4 soluciones que pueden ser C0, C1, o C2,C3
76     c0 = (c40, r0)
77     c1 = (c41, r1)
78     c2 = (c42, r0)
79     c3 = (c43, r1)
80     if Tan4(a, b, c, c0) and Tan4(a, b, c, c1):
81         return (c0, c1)
82     else:
83         return (c2, c3)
84
85
86 def pxy(x, y):
87     kx = int((x - xa) / (xb - xa) * (imgx - 1))
88     ky = int((y - ya) / (yb - ya) * (imgy - 1))
89     return (kx, ky)
90
91 maxIt = input("Ingrese el numero de iteraciones a realizar:")
```

APÉNDICE A. ANEXO: CÓDIGO EN LENGUAJE PYTHON

```
92 maxIt=int(maxIt)
93 n=3 #numero de circunferencias principales
94 if maxIt <2:
95     while maxIt <2:
96         maxIt = input("Ingrese el numero de iteraciones a realizar:")
97         maxIt=int(maxIt)
98
99 eps = 0.0001
100
101 # genramos los circulos principales
102 circulos = []
103 a = 2.0 * math.pi / n
104 #radio del circulo interno
105 r = math.hypot(math.cos(a) - math.cos(0), math.sin(a) - math.sin(0)) / 2.0
106 r0 = 1.0 + r # radio del circulo exterior
107 r1 = r0 - 2.0 * r # radio del circulo central
108 # origin
109 ox = r0
110 oy = r0
111 rmin = 2.0 * r0 / math.hypot(imgx, imgy) # radio minimo
112 # area de dibujo
113 xa = ox - r0
114 xb = ox + r0
115 ya = oy - r0
116 yb = oy + r0
117
118
119 circulos.append((complex(ox, oy), -r0))
120 for j in range(n): # insertamos los circulos principales
121     cx = math.cos(a * j) + ox
122     cy = math.sin(a * j) + oy
123     circulos.append((complex(cx, cy), r))
124 if r1 > rmin: # i
125     circulos.append((complex(ox, oy), r1))
126
127
128 p0 = 0
129 for i in range(maxIt):
130     p = int(100 * i / (maxIt - 1))
131     if p > p0:
132         p0 = p
133
134
135     while True:
136         a = random.choice(circulos)
137         b = random.choice(circulos)
138         c = random.choice(circulos)
139
140         if Tangente(a, b, c):
141             break
142
143     d = tdes(a, b, c)
144     for e in d:
145         dx = e[0].real
146         dy = e[0].imag
147         dr = e[1]
```

APÉNDICE A. ANEXO: CÓDIGO EN LENGUAJE PYTHON

```
148
149     if dx > 0.0 and dy > 0.0 and dr > rmin:
150
151         flag = True
152         for cir in circulos:
153
154             if apxICir(cir, e) or CirInt(cir, e):
155                 flag = False
156                 break
157         if flag:
158             circulos.append(e)
159
160         #dibujamos la solucion
161 for cir in circulos:
162     dx = cir[0].real
163     dy = cir[0].imag
164     dr = abs(cir[1])
165     try:
166         v = random.randint(0, len(lista))
167         draw.ellipse((pxy(dx - dr, dy - dr), pxy(dx + dr, dy + dr)), outline
168                     =lista[v])
169     except:
170         pass
171
172 image.show()
173 image.save("TamizDeApolonio_" + str(maxIt) + ".png", "PNG")
```

Como se mencionó éste código resuelve de manera numérica el problema 10 (CCC). Dicho código implementa el teorema de Descartes y un método recursivo para la generación de las circunferencias tangentes.

Notemos qué, conforme se incrementan las iteraciones la figura que se genera se vez cada vez más “llena”, generando así el tamiz de Apolonio. Específicamente en la figura A.1 generamos un tamiz con 200 iteraciones, pero, se notan huecos aún en la estructura, en cambio con 3000 iteraciones se genera el tamiz visto en la figura A.3, dónde se ve más completo.

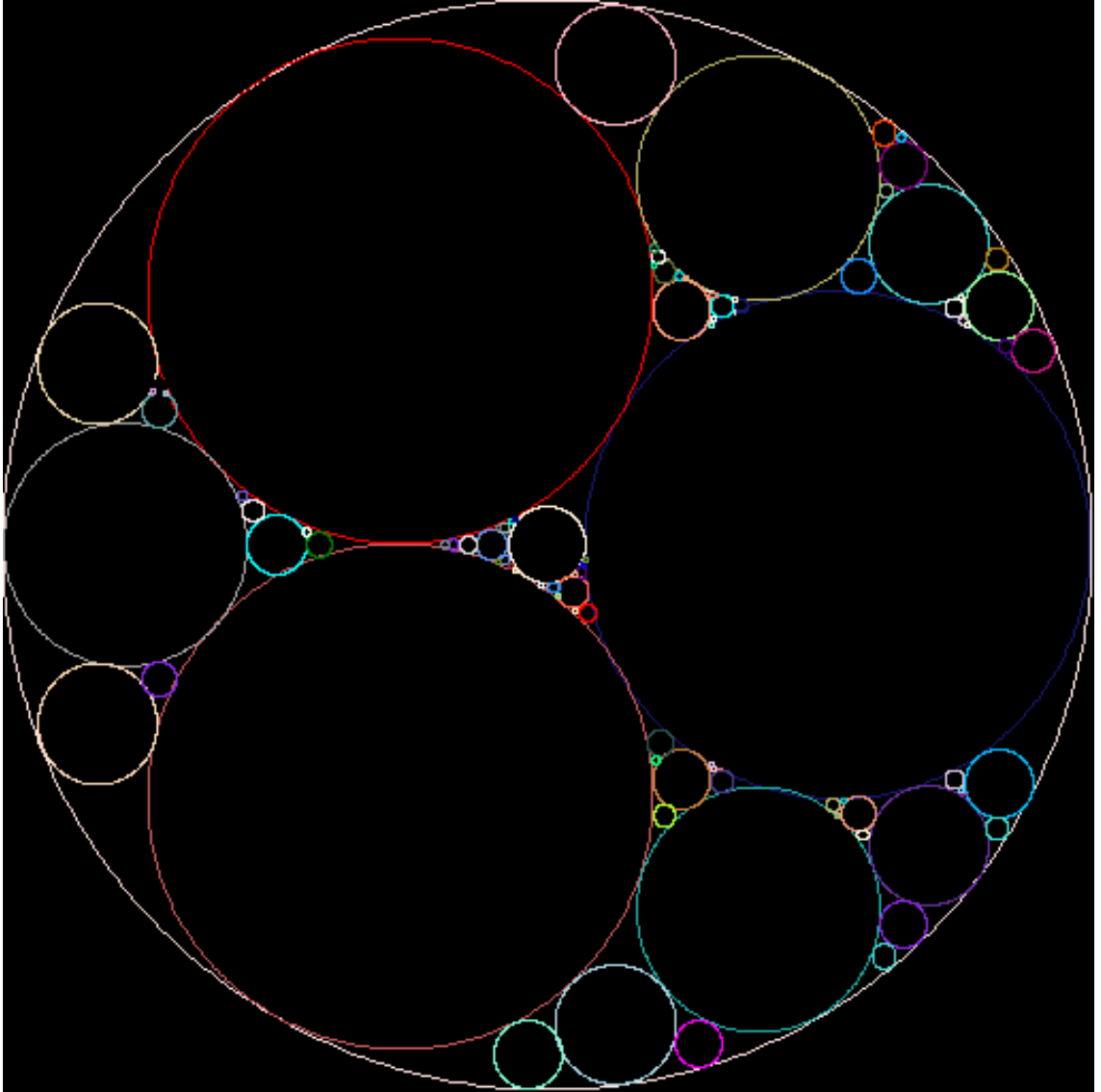


Figura A.1: Tamiz de Apolonio 200 iteraciones

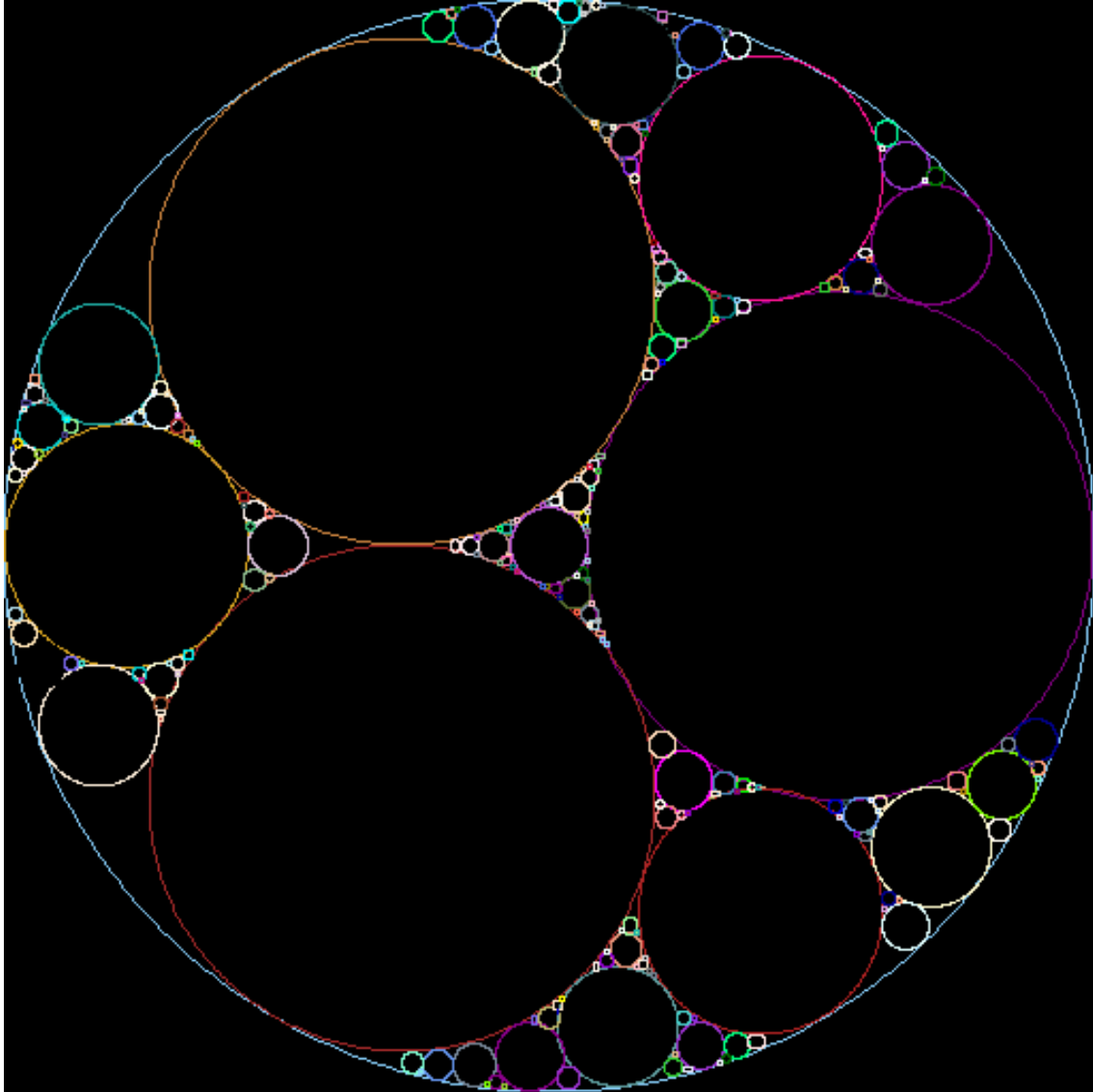


Figura A.2: Tamiz de Apolonio 1000 iteraciones

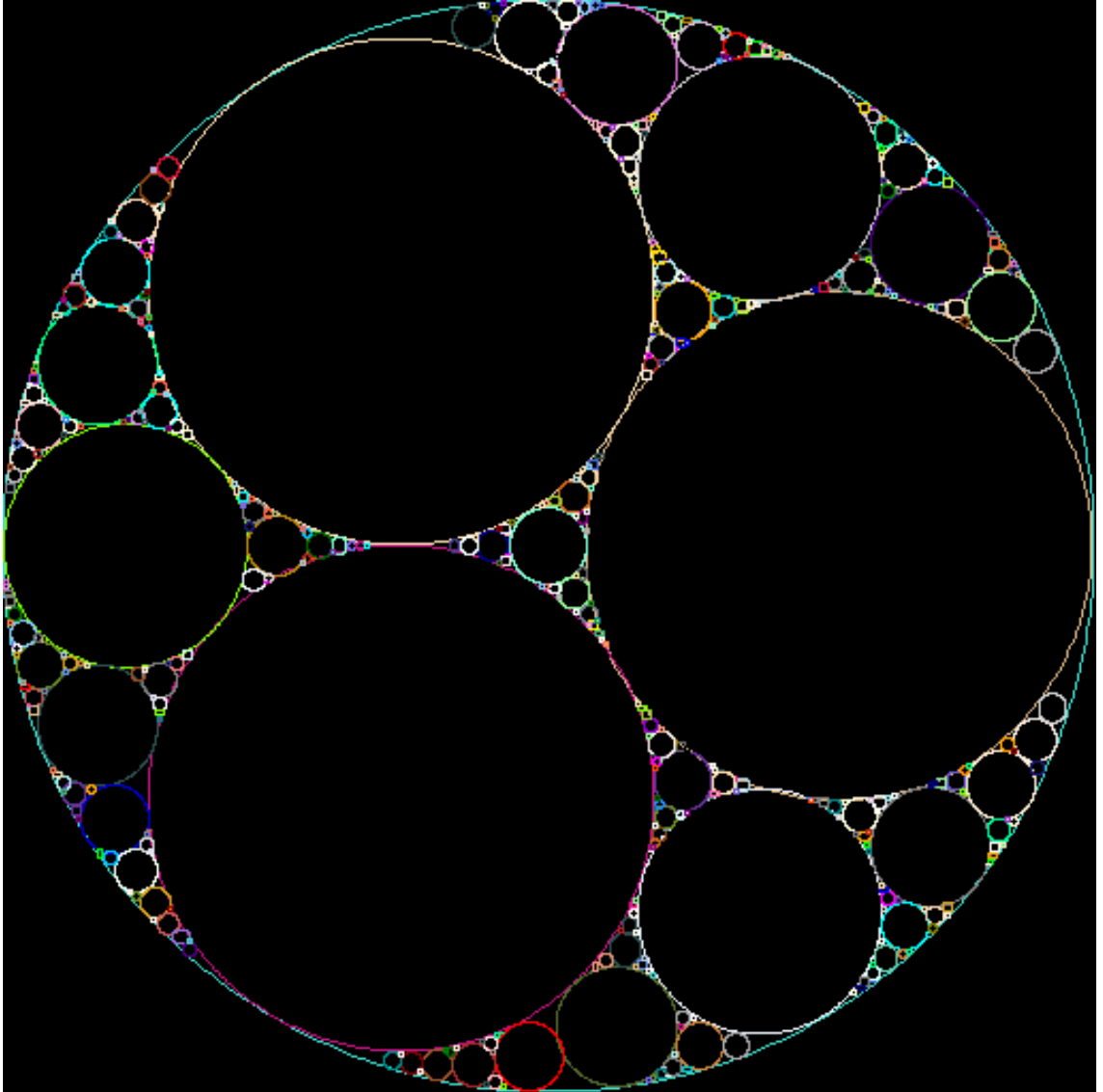


Figura A.3: Tamiz de Apolonio 3000 iteraciones

Apéndice B

Anexo:Código lenguaje M de Octave

```
1 n=100; %numero de puntos a dibujar
2 w = zeros(1,n);%arreglos de puntos
3 z= zeros(1,n);
4
5
6 teta=sqrt(2)*pi; %angulo en radianes
7 p=rad2deg(teta); %conversion del angulo a grados
8
9
10 x0=1; %puntos iniciales
11 y0=0;
12
13 %ciclo que evalua y llena los arreglos
14 for i=1:n
15 x=x0*cosd(i*p)-y0*sind(i*p);
16 y=y0*cosd(i*p)+x0*sind(i*p);
17 w(i)=x;
18 z(i)=y;
19 endfor
20
21
22 %generaci n de la grafica
23 hold on
24 f = gcf;
25 set (gca, "box", "off")
26 plot(w,z, 'b*', 'markersize', 4, 'linewidth', 3)
27 minx= 1.15*min(w); maxx=1.15*max(w);
28 miny= 1.15*min(z); maxy=1.15*max(z);
29 plot(maxx,0, '>k', 'markersize', 15, 'markerfacecolor', 'k');
30 plot([minx,maxx],[0,0], 'k', 'linewidth', 2);
31 plot(0,maxy, '^k', 'markersize', 15, 'markerfacecolor', 'k');
32 plot([0,0],[miny,maxy], 'k', 'linewidth', 2);
33 axis 'square'
34 plot(w,z, 'b*', 'markersize', 4, 'linewidth', 3)
35 %set (gca, "axislocation", "origin")
36 %set (gca, "yaxislocation", "origin")
37
38 saveas(f, 'prd.jpg')
39 hold off
```

APÉNDICE B. ANEXO: CÓDIGO LENGUAJE M DE OCTAVE

Bibliografía

- [Bakelman et al., 1974] Bakelman, I. I., Bakel'man, I. Y., Bakelman, I. I., Bakelman, I. I., et al. (1974). *Inversions*. University of Chicago Press.
- [Bessis and Demko, 1990] Bessis, D. and Demko, S. (1990). Generalized apollonian packings. *Communications in mathematical physics*, 134(2):293–319.
- [Camargo and Isaacs, 2012] Camargo, J. and Isaacs, R. (2012). Un continuo generado con el triángulo de sierpinski usando límites inversos. *Revista Integración*, 30(1):1–13.
- [Cruz, 2022] Cruz, E. (2022). Unidad 2. geometría moderna 1 circunferencia y cuadriláteros cíclicos inversión.
- [Gheorghe, 2020] Gheorghe, L. G. (2020). Apollonius problem: In pursuit of a natural solution. *International Journal of Geometry*, 9(2).
- [Graham et al., 2005] Graham, R. L., Lagarias, J. C., Mallows, C. L., Wilks, A. R., and Yan, C. H. (2005). Apollonian circle packings: geometry and group theory i. the apollonian group. *Discrete & Computational Geometry*, 34(4):547–585.
- [Hermosillo, 1985] Hermosillo, S. M. d. (1985). *Transformaciones bilineales de una variable compleja*. PhD thesis, Universidad de Sonora.
- [Laganas, 2011] Laganas, P. (2011). *Hyperbolic geometry Kleinian groups and the Apollonian gasket*. PhD thesis, Queen Mary University of London.
- [Lagarias et al., 2002] Lagarias, J. C., Mallows, C. L., and Wilks, A. R. (2002). Beyond the descartes circle theorem. *The American mathematical monthly*, 109(4):338–361.
- [Lascurain Orive, 2005] Lascurain Orive, A. (2005). *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*. UNAM.
- [Lodge et al., 2019] Lodge, R., Lyubich, M., Merenkov, S., and Mukherjee, S. (2019). On dynamical gaskets generated by rational maps, kleinian groups, and schwarz reflections. *arXiv preprint arXiv:1912.13438*.
- [L'Heureux et al., 2013] L'Heureux, J., Scarr, G., Shtiu, Y., and Tian, Y. (2013). Descartes and the apollonian gasket. *Math 445 A-Group Project*.
- [Nadler Jr, 1992] Nadler Jr, S. (1992). Continuum theory: An introduction, a series of monographs and textbooks pure and applied mathematics 158, marcel decker inc. *New York*.
- [Needham, 1998] Needham, T. (1998). *Visual complex analysis*. Oxford University Press.
- [Pollicott, 2015] Pollicott, M. (2015). Apollonian circle packings. In *Fractal geometry and stochastics V*, pages 121–142. Springer.
- [Rivas and Adony, 2015] Rivas, S. and Adony, Y. (2015). Geometría hiperbólica y conjuntos límites de grupos kleinianos: grupos quasifuchsianos y algunas degeneraciones.
- [Rubiano et al., 2011] Rubiano, G., Palacios, O., and Zlobec, B. J. (2011). Transformaciones de m obius y fractales [con mathematical]. *Boletín de Matemáticas*, 18(2):183–198.
- [Sarmiento, 2006] Sarmiento, B. (2006). El problema de apolonio.
- [Shively, 1984] Shively, L. (1984). *Geometría Moderna*.
- [Tarrida, 2003] Tarrida, A. R. (2003). Geometria inversiva. *LA GACETA DE LA RSME*, 6:39–79.
- [Vejnar, 2012] Vejnar, B. (2012). A topological characterization of the sierpiński triangle. *Topology and its Applications*, 159(5):1404–1408.
- [Yáñez Escanciano, 2017] Yáñez Escanciano, J. (2017). An introduction to the limit set of kleinian groups.