Benemerita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO MATEMATICAS
MAESTRIA EN CIENCIAS MATEMATICAS

APLICACIONES DEL AXIOMA DE MARTIN Y SEPARABILIDAD

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA
ALEJANDRO PÉREZ MEJÍA

DIRECTORES DE TESIS
Dr. ALEJANDRO RAMÍREZ PÁRAMO
Dr. IVAN MARTÍNEZ RUIZ

ZARAGOZA, PUEBLA. Septiembre 2016

Agradecimientos

A Dios:
Por mi existencia.

A mis padres y hermano:
El señor Margarito Pérez Hernández y la señora Monica Mejía Martínez. Por creer y confiar en mi siempre y en cada momento, por su apoyo incondicional a lo largo de todo este tiempo. Muchas gracias. Alan Abdalla Pérez Mejía por apoyarme incondicionalmente y estar conmigo en las buenas y en las malas.

A mi esposa e hijas:
Maria Rosa Baez Duran por aceptarme tal y como soy y por apoyarme siempre y en cada momento. Mis dos pequeñas Abril Yamilet y Ana Paola por ser mi motor para seguir adelante.

A mis asesores de tesis:
Dr. Alejandro Ramírez Paramo y Dr. Ivan Martinez Ruiz Por su colaboracion, su apoyo, su tiempo, sus conocimientos y su guia en este trabajo de tesis.

A mi jurado:
Dr. Oleg Okunev, Dr. Agustín Contreras Carreto, M.C. Manuel Ibarra Contreras y Dr. Fernando Sánchez Texis.
Por brindarme parte de su tiempo para revisar este trabajo, por su colaboración para mejorar el mismo.

A todos gracias por todo y les deseo lo mejor.
Alex.

Introducción

Durante varias etapas de su desarrollo, la Topología General ha tenido varias interacciones con la Teoría de Conjuntos; una de éstas ocurrió en la década comprendida entre los años 1960 y 1970. Como era de esperarse, dicha interacción generó una gran actuación de los métodos conjuntistas en la investigación topológica; y ya para finales de dicha década se tenían muchas preguntas topológicas de carácter conjuntista y había la posibilidad de utilizar técnicas combinatorias, y nuevas traducciones de la técnica de forcing se generaron con la finalidad de resolver problemas propios del ámbito de la Topología General. De entre las respuestas obtenidas se pueden encontrar varias de tipo consistente o de consistencia y de entre éstas, las que tienen que ver con el ya famoso *Axioma de Martin*, AM.

Muchos de estos resultados, en los que se emplea AM, se encuentran en la literatura, de manera aislada o en textos que no se consiguen con facilidad. Además, los resultados se presentan como para especialistas en las áreas de Topología y Teoría de conjuntos; luego, surge la necesidad de tener un trabajo que presente tanto los aspectos básicos como los detalles que se dejan al lector, de una herramienta tan importante como AM y sus aplicaciones. Un trabajo que sea alcanzable por un público no tan restringido, sino apto para estudiantes de los últimos semestres de Licenciatura en Matemáticas o de los primeros semestres de Maestría en Matemáticas.

Esta es la idea principal del presente trabajo de tesis: Aplicaciones del Axioma de Martin, de manera básica y detallada.

El trabajo se encuentra dividido en tres capítulos. El primero de ellos, como es usual, es una compilación de resultados, notaciones y definiciones, intentando, en la medida de lo posible, que esta obra sea autocontenida.

Dividido en tres secciones, el capítulo dos (que es donde inicia nuestra labor) centra su atención al Axioma de Martin y algunas aplicaciones. La primera sección de este capítulo, contiene el material suficiente para establecer el famoso Axioma de Martin, además de algunos ejemplos de órdenes parciales. La segunda sección presenta las aplicaciones más usuales o comunes, o incluso las primeras aplicaciones que uno se puede encontrar al iniciar un estudio sobre el axioma en cuestión. Es importante comentar que el material expuesto en estas dos secciones está basado, casi en su totalidad, en el texto de Kunen [13]. La tercera y última sección de este capítulo, está dedicada, por una parte a extender a la clase de los espacios π-completos, la cual es más amplia que la de los espacios Hausdorff, compactos y por otra parte a extender él Teorema de categoría de Baire. Por supuesto, se hace un breve estudio de esta clase de espacios. Por otro lado, en esta sección analizamos, en presencia de AM, el problema siguiente (que bien citamos como Axioma de Martin y separabilidad).

Problema 1. *¿Bajo qué condiciones sobre un espacio topológico X, se obtiene la separabilidad de X?.*

El tercer y último capítulo de nuestra obra, está basado en la sección Axioma de Martin y separabilidad, del trabajo [1]. En este, estudiamos a la clase de los espacios Martin–κ–completos. Esta clase de espacios surge del análisis que diversos autores han hecho referente al problema anterior (Axioma de Martin y separabiliad).

Índice general

AXIOMA DE MARTIN Y SEPARABILIDAD

ALEJANDRO PÉREZ MEJÍA

Septiembre del 2016

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Notaciones y definiciones

Con la finalidad de hacer, en la manera de lo posible, un trabajo autocontenido, en el presente capítulo, presentamos una serie de resultados y definiciones que son requisito para la exposición de nuestra obra. Iniciamos con algunos resultados y definiciones referentes a números ordinales y cardinales; el lector interesado en una exposición más detallada del material que se presenta a continuación, puede consultar [6] o [4].

Definición 1.1. *Un conjunto α es un número ordinal* (*o simplemente un ordinal*) *si:*
(*i*) *α es transitivo* (*i.e. todo elemento de α es un subconjunto de α*)*,*
(*ii*) *α es bien ordenado por la relación de pertenencia restringida a α, que se define por $\in_\alpha = \{(a, b) : a \in \alpha, b \in \alpha$ y $a \in b\}$.*

Si α es un ordinal, el conjunto $\alpha \cup \{\alpha\}$, se llama sucesor de α y es denotado $\alpha + 1$ (el sucesor de cualquier ordinal es un ordinal). Esto permite una clasificación de ordinales: un número ordinal α, es llamado ordinal sucesor si $\alpha = \beta + 1$ para algún ordinal β. En otro caso α es llamado ordinal límite.

Para cada par de ordinales α, β definimos: $\alpha < \beta$ si y sólo si $\alpha \in \beta$.

Se dice que dos conjuntos bien ordenados $(X, \leq)$ y $(Y, \preceq)$ son isomorfos, si existe una función f inyectiva con dominio X y rango Y, tal que para todo $x, y \in X$:

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \preceq f(y).$$

Observación: (*i*) si α y β son números ordinales, entonces α y β son isomorfos si y sólo si $\alpha = \beta$

(ii) Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único número ordinal. De aquí, si X es un conjunto bien ordenado, el tipo de orden de X es el único número ordinal al cual X es isomorfo.

Definición 1.2. *Un ordinal α, se llama ordinal inicial si α no es equipotente a cualquier $\beta \in \alpha$ (i.e., no existe una función inyectiva con dominio α y rango β).*

El Axioma de Elección (AE) implica que todo conjunto es equipotente a un ordinal inicial.

Definición 1.3. *Sea X un conjunto, el cardinal de X se define como el único ordinal inicial equipotente a X.*

Así, un número cardinal es un ordinal inicial.

Si κ es un cardinal, denotamos κ^+, al menor cardinal mayor que κ. Un cardinal de la forma κ^+, se llama cardinal sucesor. Un cardinal límite es aquel cardinal que no es sucesor. De aquí que κ es un cardinal límite si para todo cardinal $\lambda < \kappa$, $\lambda^+ < \kappa$.

En el presente trabajo (aún cuando algunas veces usamos $\aleph_0$ y $\aleph_1$ para el primer cardinal numerable y el primer cardinal no numerable), con ω y ω_1 denotamos a ambos, el primero ordinal y cardinal infinito y el primer ordinal y cardinal no numerable.

Definición 1.4. *Sea λ un ordinal límite. Un conjunto $A \subseteq \lambda$ se dice acotado en λ, si existe $\gamma \in \lambda$ tal que $A \subseteq \gamma$. En otro caso se dice que A es no acotado en λ.*

Sea $\langle \gamma_\rho : \rho \in \theta \rangle$ una sucesión transfinita de ordinales de longitud θ. Decimos que la sucesión es creciente si $\gamma_\rho < \gamma_\beta$, siempre que $\rho < \beta < \theta$.

Definición 1.5. *Sea θ un ordinal límite, y sea $\langle \gamma_\rho : \rho \in \theta \rangle$ una sucesión creciente de ordinales en λ. Decimos que la sucesión $\langle \gamma_\rho : \rho \in \theta \rangle$ es cofinal en λ, si el conjunto $\{\gamma_\rho : \rho \in \theta\}$ es no acotado en λ.*

La cofinalidad de λ, denotada $cf(\lambda)$, es el menor ordinal límite, θ, tal que existe una θ-sucesión creciente la cual es cofinal en λ.

Es importante comentar que $cf(\lambda)$ es un cardinal y $cf(\lambda) \leq \lambda$.

Definición 1.6. *Un cardinal infinito κ es regular si $cf(\kappa) = \kappa$; en otro caso, se dice que κ es un cardinal singular.*

Otra forma de dedinir la singularidad de un cardinal es la siguiente: Un cardinal infinito κ es llamado singular si existe una sucesión creciente $\langle \gamma_\rho : \rho \in \theta \rangle$ de ordinales $\gamma_\rho < \kappa$ cuya longitud $\theta < \kappa$ y $\sup\{\gamma_\rho : \rho \in \theta\} = \kappa$.

Teorema 1.7. *Todo cardinal sucesor e infinito es regular.*

Sea E un conjunto. Denotamos por $\mathcal{P}(E)$ al conjunto potencia de E, $[E]^{\leq\kappa}$ es la colección de todos los subconjuntos de E con cardinalidad $\leq \kappa$, y $[E]^{\kappa}$ denota la colección de todos los subconjuntos de E con cardinalidad κ.

El teorema siguiente es de gran ayuda.

Teorema 1.8. *Si κ es un cardinal infinito, entonces:*
(i) $|[\kappa]^{<\omega}| = \kappa$,
(ii) si λ es un cardinal tal que $\lambda \leq \kappa$, entonces $\left|[\kappa]^{<\lambda}\right| \leq \kappa^{\lambda}$ *y también,* $\left|[\kappa]^{\lambda}\right| \leq \kappa^{\lambda}$.

Lema 1.9. (*König*) *Si κ es un cardinal infinito y $cf(\kappa) \leq \lambda$, entonces $\kappa < \kappa^{\lambda}$.*

Usaremos las siguientes notaciones y convenciones topológicas (mismas que se usan en [2]).

Si X es un espacio topológico y $A \subseteq X$, usamos $\overline{A}$ para denotar la clausura de A; en caso de trabajar con varios espacios a la vez, usamos, por ejemplo, $cl_Y(A)$, para la clausura de A respecto del espacio Y. Similarmente, denotamos $\overset{\circ}{A}$ para el interior de A en X e $Int_Y(A)$, para el interior de A en Y.

Recordemos que $D \subseteq X$ es denso en X (o simplemente denso) si $\overline{D} = X$. Se dice que un espacio X es separable si éste contine un subespacio denso numerable. También, $C \subseteq X$ es nada denso, si $int(\overline{X \setminus C}) = \emptyset$.

Un subconjunto D de X se dice que es discreto si D es un espacio discreto con la topología de subespacio. Así, D es discreto si y sólo si para todo $p \in D$, existe U conjunto abierto en X que contiene a p tal que $U \cap D = \{p\}$.

Para notaciones y definiciones de los invariantes cardinales topológicos (o funciones cardinales topológicas), recomendamos al lector los textos de Hodel [5] o Juhász [8]; que son en los que nos hemos basado.

Debido a que será muy usado en la mayoría del trabajo, a continuación recordamos la definición de celularidad. Una familia celular (en un espacio topógico X) es una colección $\mathcal{U}$, de conjuntos abiertos, no vacíos y ajenos dos a dos en el espacio X. La celularidad de X, denotada por $c(X)$ se define como el número cardinal $c(X) = \sup\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U}$ es una familia celular en $X\} + \omega$ (vea, por ejemplo [5]). Se dice que un espacio topológico X es *c.c.c.* o que tiene la *propiedad de Suslin* si $c(X) = \omega$. Claramente todo espacio topológico separable tiene la propiedad de Suslin.

Lema 1.10. *Si para todo $S_0 \in [S]^{<\omega}$, $c(X_{S_0}) \leq \kappa$, con $X_{s_0} = \prod_{s\in S_0} X_s$ entonces $c(X) \leq \kappa$, donde $X = \prod_{s<\omega} X_s$. En particular, si para cada $S_0 \in [S]^{<\omega}$, X_{s_0} tiene la propiedad de Souslin ($c(\prod_{s\in S_0} X_s) \leq \omega$) entonces X tiene la propiedad de Suslin.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U} = \{V_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ es una familia celular en X, de cardinalidad κ^+. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que cada V_α es un abierto canónico de X. Para cada $\alpha \in \kappa^+$, denotamos por F_α, al conjunto formado por las coordenadas restringidas de V_α y sea $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$.

Afirmación: $|\mathcal{F}| = \kappa^+$. Supongamos que no. Considere la función $f : \kappa^+ \to \mathcal{F}$, definida por $f(\alpha) = F_\alpha$. Ahora bien, para cada $F_\beta \in \mathcal{F}$, sea $A_\beta = \{\gamma \in \kappa^+ : f(\gamma) = F_\beta\}$; entonces $\kappa^+ = \bigcup_{F_\beta\in\mathcal{F}} A_\beta$. Puesto que $|\mathcal{F}| < \kappa^+$ y $\kappa^+ = \left|\bigcup_{F_\beta\in\mathcal{F}} A_\beta\right| \leq \sum_{F_\beta\in\mathcal{F}} |A_\beta|$, por la regularidad de κ^+, existe $F_\gamma \in \mathcal{F}$ tal que $|A_\gamma| = \kappa^+$. Consideremos ahora la colección $\{V_\alpha : \alpha \in A_\gamma\} \subseteq \mathcal{U}$ y $\left\{pr_{F_\gamma}(V_\alpha) : \alpha \in A_\gamma\right\}$. Note que al ser $\{V_\alpha : \alpha \in A_\gamma\}$, una familia celular, entonces la familia $\left\{pr_{F_\gamma}(V_\alpha) : \alpha \in A_\gamma\right\}$, también es celular. Además, $\left|\left\{pr_{F_\gamma}(V_\alpha) : \alpha \in A_\gamma\right\}\right| = |A_\gamma| = \kappa^+$; lo cual implica que $c(X_{F_\gamma}) \geq \kappa^+$. Pero esto contradice nuestra hipótesis. Por tanto $|\mathcal{F}| = \kappa^+$.

Así, por el lema 1.9 aplicado a $\mathcal{F}$, existe un conjunto $A \subseteq \kappa^+$ con $|A| = \kappa^+$, $\mathcal{F}_0 = \{F_\alpha : \alpha \in A\} \subseteq \mathcal{F}$ y un conjunto F tales que para todo $\alpha, \beta \in A$ con $\alpha \neq \beta$, $F_\alpha \cap F_\beta = F$. Se tienen dos casos:

(i) $F = \emptyset$. Sean α y β en A con $\alpha \neq \beta$ y $(y_s)_{s\in S} \in X$. Considérense $(z_s)_{s\in F_\alpha} \in pr_{F_\alpha}(V_\alpha) \subseteq X_{F_\alpha}$ y $(w_s)_{s\in F_\beta} \in pr_{F_\beta}(V_\beta) \subseteq X_{F_\beta}$. Ahora, sea

$$x_s = \begin{cases} z_s & \text{si} \quad s \in F_\alpha \\ w_s & \text{si} \quad s \in F_\beta \\ y_s & \text{si} \quad s \in S\backslash(F_\alpha \cup F_\beta) \end{cases}$$

entonces $(x_s)_{s\in S} \in V_\alpha \cap V_\beta$. Por tanto $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, lo cual no puede ocurrir, pues V_α, $V_\beta \in \mathcal{U}$.

(ii) $F \neq \emptyset$. Para cada $\alpha \in A$, denotemos por V_α^* al conjunto $pr_F(V_\alpha) \subseteq X_F$; dado que $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia celular, se tiene que $\{V_\alpha^* : \alpha \in A\}$ es una familia celular en X_F de cardinalidad κ^+. Entonces $c(X_F) \geq \kappa^+$. Pero esto contradice nuevamente a nuestra hipótesis. Por tanto, $c(X) \leq \kappa$. $\square$

Capítulo 2

Axioma de Martin y aplicaciones

2.1. Axioma de Martin

Para iniciar, introducimos los conceptos necesarios para formular el Axioma de Martin.

Definición 2.1. **(a)** *un orden parcial es una pareja* $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ *tal que* $\mathbb{P} \neq \emptyset$ *y* $\leq$ *es una relación en* $\mathbb{P}$ *que es reflexiva* $(\forall\ p \in \mathbb{P}\ (p \leq p))$ *y transitiva* $(\forall\ p, q, r \in \mathbb{P}\ (p \leq q \wedge q \leq r \rightarrow p \leq r))$*. Si* $p \leq q$*, se dice que "*p *extiende a* q*". Los elementos de* $\mathbb{P}$ *se llaman condiciones.*

(b) $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ *es un orden parcial en el sentido estricto si y sólo si satisface la condición adicional siguiente:*

$$\forall\ p, q\ (p \leq q \wedge q \leq p \rightarrow p = q).$$

En este caso se define $p < q$ *si y sólo si* $p \leq q \wedge p \neq q$*.*

Es usual escribir solamente $\mathbb{P}$ para referirse al orden parcial $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$.

Ejemplo 2.2. *Sea* X *un conjunto no vacío. Considere* $\mathbb{P} = X$*. Trivialmente la relación "*$\leq$*"*$= X \times X$ *es un orden parcial.*

Ejemplo 2.3. *Sea* X *un conjunto no vacío. Considere* $\mathbb{P} = \mathcal{P}(X)$*. Para* p*,* $q \in \mathbb{P}$*, definimos* $p \leq q$ *si y sólo si* $p \subseteq q$*. Entonces* $\mathbb{P}$ *es un orden parcial (en el sentido estricto).*

Es importante comentar que la mayoría de los órdenes parciales que usaremos en este trabajo serán órdenes parciales en el sentido estricto. En este caso, debemos observar que $<$ es transitivo e irreflexivo ($\forall\, p\, (p \not< p)$), y $p \leq q$ si y sólo si $p = q \vee p < q$.

Definición 2.4. *Sea $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ un orden parcial.*

(i) Una cadena en $\mathbb{P}$ es un conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}$ tal que $\forall\, p, q \in \mathcal{C}\ (p \leq q \vee q \leq p)$

(ii) Diremos que $p,\ q \in \mathbb{P}$, son

1. *Compatibles si $\exists\, r \in \mathbb{P}\ (r \leq p \wedge r \leq q)$.*
2. *Incompatibles $(p \perp q)$ si $\neg\, \exists\, r \in \mathbb{P}\ (r \leq p \wedge r \leq q)$.*

(iii) Una anticadena en $\mathbb{P}$ es un subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}$ tal que $\forall\ p, q \in \mathcal{A}$ $(p \neq q \rightarrow p \perp q)$.

(iv) $\mathbb{P}$ tiene la propiedad de la cadena contable (c.c.c.) si toda anticadena en $\mathbb{P}$ es contable (numerable).

Ejemplo 2.5. *Consideremos el orden parcial $\langle \omega_1, \leq \rangle$ donde $\leq$ es el orden usual en los ordinales. Es claro que todo subconjunto de ω_1 es una cadena; sin embargo, toda anticadena tiene cardinalidad ≤ 1. Por lo tanto este orden parcial tiene la c.c.c.*

Ejemplo 2.6. *Sea X un conjunto tal que $X \neq \emptyset$ y $\mathbb{P} = \mathcal{P}(X)\backslash\{\emptyset\}$, con $p \leq q$ si y sólo si $p \subseteq q$. Observemos que $p,\ q \in \mathbb{P}$ son incompatibles si y sólo si $p \cap q = \emptyset$. En caso de que p,q sean compatibles (observe que p y q son compatibles si y sólo si $p \cap q \neq \emptyset$) entonces $r = p \cap q$ es una extensión común de p y q. Más aún, $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ tiene la c.c.c. si y sólo si $|X| \leq \omega$. En efecto, si $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ tiene la c.c.c., entonces $|X| = |\{\{x\} : x \in X\}| \leq \omega$, pues $\{\{x\} : x \in X\}$ es una anticadena en $\mathbb{P}$. Supongamos, ahora, que $|X| \leq \omega$ y que $\mathbb{P}$ no satisface la c.c.c. Entonces existe una anticadena, $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ en $\mathbb{P}$. Para cada $x \in X$, denotemos $\alpha_x = \{\alpha < \omega_1 : x \in A_\alpha\}$. Entonces existe $x_0 \in X$ tal que $|\alpha_{x_0}| = \omega_1$. Lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c.*

Ejemplo 2.7. *Sean X un espacio topológico y $\mathbb{P} = \{p \in X : p$ es abierto $\wedge$ $p \neq \emptyset\}$: Consideremos la relación siguiente sobre los elementos de $\mathbb{P}$: $p \leq q$ si y sólo si $p \subseteq q$. Claramente esta relación hace de $\mathbb{P}$ un conjunto parcialmente ordenado (en el sentido estricto). Igual que en el ejemplo anterior, tenemos que $p \perp q$ si y sólo si $p \cap q = \emptyset$. De aquí se sigue, inmediatamente, que $\mathbb{P}$ satisface la c.c.c. si y sólo si X satisface la propiedad de Suslin; i.e., $c(X) = \omega$ (en la teoría de los invariantes cardinales, se dice que un espacio topológico satisface la c.c.c. o cumple la propiedad de Suslin si $c(X) = \omega$, vea [5]. En este contexto, podemos decir que $\mathbb{P}$ satisface la c.c.c. si y sólo si la satisface X).*

Recordemos que un álgebra booleana es un séxtuplo $\mathcal{A} = \{A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\}$ en el que A es un conjunto, $\vee$ y $\wedge$ operaciones binarias en A, $\neg$ una operación unaria sobre A y $0, 1 \in A$ tales que:

1. $\forall\, x \in A$, $x \vee x = x$ y $x \wedge x = x$
2. $\forall\, x, y \in A$, $x \vee y = y \vee x$ y $x \wedge y = y \wedge x$
3. $\forall\, x, y, z \in A$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ y $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
4. $\forall\, x, y \in A$, $x \vee (x \wedge y) = x$ y $x \wedge (x \vee y) = x$
5. $\forall\, x, y, z \in A$, $x \vee (x \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ y $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
6. $\forall\, x \in A$, $x \wedge \neg x = 0$ y $x \vee \neg x = 1$
7. $\forall\, x \in A$, $x \wedge 0 = 0$ y $x \vee 1 = 1$

Ejemplo 2.8. *Sea $\mathcal{A} = \{A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\}$ un álgebra booleana y $\mathbb{P} = A \backslash \{0\}$. La relación siguiente, en $\mathbb{P}$, da un orden parcial a éste: $x \leq y$ si y sólo si $x \vee y = y$.*

Definición 2.9. *Sea $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ un orden parcial. entonces*

(a) *$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{P}$ es un conjunto denso en $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ si $\forall\, p \in \mathbb{P}\ \exists\, d \in \mathcal{D}$ tal que $d \leq p$.*

(b) *$\mathcal{G} \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro en $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ si tiene las siguientes propiedades:*

1. *$\forall\, p, q \in \mathcal{G}\ \exists\, r \in \mathcal{G}$ tal que $r \leq p \wedge r \leq q$.*
2. *$\forall\, p \in \mathcal{G}\ \forall\, q \in \mathbb{P}$ tal que $q \leq p \rightarrow q \in \mathcal{G}$.*

(c) *Sea $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$. Un filtro $\mathcal{G}$ es $\mathcal{D}$–genérico, si para todo $D \in \mathcal{D}$, $D \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.*

La proposición siguiente es empleada en la prueba del Teorema 2.34.

Proposición 2.10. ([*10*]) *Sean $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una familia de conjuntos densos en $\mathbb{P}$ y λ un cardinal infinito. Si $\mathcal{G} \subset \mathbb{P}$ es un filtro $\mathcal{D}$-genérico, entonces existe $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ tal que:*

1. *$|\mathcal{G}'| = \lambda$;*
2. *Para todo $\alpha < \lambda$, $D_\alpha \cap \mathcal{G}' \neq \emptyset$, y*
3. *Para cualesquiera $p, q \in \mathcal{G}'$, existe $r \in \mathcal{G}'$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$*

Demostración. Para cada $\alpha < \lambda$, fijamos un punto $p \in D_\alpha \cap \mathcal{G}$ y llamamos A_0 al conjunto formado por tales puntos. Ahora bien, recursivamente definimos, para todo $0 < \alpha < \lambda$, $A_{\alpha+1}$ como el conjunto de los $r \in \mathcal{G}$, formado como sigue:

Por cada p, $q \in A_\alpha$, fijamos $r \in \mathcal{G}$. Ahora, sea $\mathcal{G}' = \bigcup\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Claramente, por construcción, $\mathcal{G}'$ satisface (1) y (2).

Veamos que $\mathcal{G}'$ satisface (3). Para ésto, sean p y $q \in \mathcal{G}'$. Es claro que si $p = q$, entonces (3) se verifica trivialmente. Así que supongamos que $p \neq q$. Entonces existen $\alpha_1 < \lambda$ y $\alpha_2 < \lambda$ tales que $p \in A_{\alpha_1}$ y $q \in A_{\alpha_2}$; sin pérdida de generalidad, supongamos que $\alpha_1 \leq \alpha_2$, entonces p, $q \in A_{\alpha_2}$; luego, existe $r \in A_{\alpha_2+1}$ (y por tanto en $\mathcal{G}'$) tal que $r \leq p$ y $r \leq q$. La prueba está completa. □

Ahora estamos listos para formular el Axioma de Martin.

Definición 2.11. AM(κ) *es el enunciado: Cuando $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ es un orden parcial no vacío con la propiedad de la cadena contable (c.c.c.), y $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ con $|\mathcal{D}| \leq \kappa$, existe un filtro $\mathcal{G}$ en $\mathbb{P}$ que es $\mathcal{D}$-genérico.*

AM *es el enunciado: $\forall\ \kappa < 2^\omega$ se cumple* AM(κ).

Intuitivamente, las condiciones (elementos de $\mathbb{P}$) dicen algo acerca de $\mathcal{G}$ o algún objeto que planeamos construir directamente de $\mathcal{G}$. Si p extiende a q, entonces p dice más de $\mathcal{G}$ que q.

Hemos visto que en el enunciado de AM, sólo se piden cardinales menores que 2^ω. Una cuestión inmediata es: ¿Por qué no se pide en la definición de AM(2^ω)? En el resultado siguiente obtenemos la respuesta a esta cuestión.

Lema 2.12. (a) *Si $\lambda < \kappa$ entonces* AM$(\kappa) \to$ AM(λ)*.*

(b) AM(2^ω) *es falso.*

(c) AM(ω) *es verdadero.*

Demostración. (a) Es inmediato de la definición.

(b) Sea

$$\mathbb{P} = \{p : p \subset \omega \times 2 \wedge |p| < \omega \wedge p \text{ es una función}\}.$$

Diremos que $p \leq q$ si y sólo si $q \subseteq p$. De aquí, p y q son compatibles si y sólo si $p \mid_{dom(p)\cap dom(q)} = q \mid_{dom(p)\cap dom(q)}$. En efecto, supongamos que p y q son compatibles y que $p \mid_{dom(p)\cap dom(q)} \neq q \mid_{dom(p)\cap dom(q)}$. Entonces existen $x \in dom(p) \cap dom(q)$ y y_1, y_2, con $y_1 \neq y_2$ tales que $(x, y_1) \in p$ y $(x, y_2) \in q$. Ahora, por hipótesis, existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$. Luego, $(x, y_1) \in r$ y $(x, y_2) \in r$, en contradicción con el hecho de que r es una función.

Ahora supongamos que $p \mid_{dom(p)\cap dom(q)} = q \mid_{dom(p)\cap dom(q)}$. Sea $r = p \cup q$. Entonces r es una función: Si $(x, y_1), (x, y_2) \in r$, entonces se cumple:

(1) $(x, y_1), (x, y_2) \in p \to y_1 = y_2$,

(2) $(x, y_1), (x, y_2) \in p \to y_1 = y_2$, y

(3) $((x, y_1), (x, y_2) \in p \cap q) \to y_1 = y_2$.

Por tanto, r es un función y claramente $r \leq p$ y $r \leq q$.
Dado que $|\mathbb{P}| = \omega$, concluimos que $\mathbb{P}$ tiene la *c.c.c.*

Ahora, para cada $n \in \omega$, consideramos $D_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in dom(p)\}$. Para cada $h : \omega \to 2$, tomamos $D_h = \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in dom(p) \text{ tal que } p(n) \neq h(n)\}$. Finalmente consideremos $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{E_h : h \in {}^{\omega}2\}$. Entonces $\mathcal{D}$ es una familia de a lo más 2^ω conjuntos densos en $\mathbb{P}$. En efecto,

1. Sea $q \in \mathbb{P}$. Si $q \in D_n$, no hay nada que probar. Si $q \notin D_n$. sea $p = q \cup \{(n, 0)\}$, entonces $p \in D_n$ y $p \leq q$. Por tanto, D_n es denso.

2. Sea $q \in \mathbb{P}$. Si $q \in D_h$, no hay nada que probar. Si $q \notin D_h$, tomamos $n = max\{i \in \omega : i \in dom(q)\} + 1$ y definimos $p = q \cup \{(n, 1 - h(n))\}$, entonces $p \in D_h$ y $p \leq q$. Por tanto, D_h es denso.

Finalmente, por AM(2^ω), existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico, $\mathcal{G}$, tal que para todo $D \in \mathcal{D}$, $\mathcal{G} \cap D \neq \emptyset$.

Como $\mathcal{G}$ es un filtro en $\mathbb{P}$, entonces los elementos de $\mathcal{G}$ son compatibles dos a dos; luego, $f_\mathcal{G} = \bigcup \mathcal{G}$, es una función con dominio ω (pues para cada $n \in \omega$, $\mathcal{G} \cap D_n \neq \emptyset$) y $ran(f_\mathcal{G}) \subseteq 2$.

Sin embargo, dado que para toda $h : \omega \to 2$, $\mathcal{G} \cap D_h \neq \emptyset$, tenemos que $f_\mathcal{G}$ es diferente de toda tal h.

(c) Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial con la propiedad *c.c.c.* y sea $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$ una familia de conjuntos densos. Tomemos, $p_0 \in \mathcal{D}_0$. Puesto que $\mathcal{D}_1$ es denso en $\mathbb{P}$, existe $p_1 \in \mathcal{D}_1$ tal que $p_1 \leq p_0$. Continuando recursivamente, obtenemos una sucesión $p_0 \geq p_1 \geq ...$ tal que $p_i \in \mathcal{D}_i$. Sea $\mathcal{G} = \{p \in \mathbb{P} :$ para algún $i \in \omega, p_i \leq p\}$. Entonces $\mathcal{G}$ es un filtro $\mathcal{D}$-genérico en $\mathbb{P}$ que cumple lo requerido. $\square$

Notemos que de las condiciones (a) y (b), en el lema anterior, se deduce que AM(κ) no es válido para $2^\omega < \kappa$. De este hecho tenemos una cuestión inmediata: ¿Existe un cardinal κ tal que se verifica el lema anterior al reemplazar a ω por κ?

Denotemos M al conjunto de los números cardinales $\omega \leq \kappa \leq 2^\omega$ tales que AM(κ) no es válido. Es claro que $M \neq \emptyset$ y que $\omega \notin M$. En adelante, tomamos $\mathfrak{m} = \text{mín}\{\kappa \leq 2^\omega : \text{ AM}(\kappa) \text{ es falso}\}$.

2.2. Aplicaciones I

En esta sección presentamos algunas aplicaciones de AM. Iniciamos con la introducción de un orden parcial y sus propiedades. Una de sus aplicaciones es que permite concluir, bajo AM, que toda familia casi ajena en $\mathcal{P}(\omega)$ con cardinalidad menor que 2^ω no es maximal (Corolario 2.18).

Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$. En el conjunto $\mathbb{P}_\mathcal{A} = \{\langle s, F\rangle : s \in [\omega]^{<\omega} \wedge F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}\}$, definimos la relación siguiente:

$$\langle t, E\rangle \leq \langle s, F\rangle \text{ si y sólo si } s \subseteq t \wedge F \subseteq E \wedge \forall\, x \in F\ (x \cap t \subseteq s).$$

No es difícil verificar que la relación anterior satisface las condiciones de orden parcial (en el sentido estricto), que se dan en la Definición 2.1

A continuación presentamos algunas propiedades que se verifican en este orden parcial.

Lema 2.13. *En $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$, $\langle s_1, F_1\rangle$ y $\langle s_2, F_2\rangle$ son compatibles si y sólo si*

$$\forall\ x \in F_1\ (x \cap s_2 \subseteq s_1) \wedge \forall\ x \in F_2\ (x \cap s_1 \subseteq s_2),$$

en este caso $\langle s_1 \cup s_2, F_1 \cup F_2\rangle$ es una extensión común.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que $\langle s_1, F_1\rangle$ y $\langle s_2, F_2\rangle$ son compatibles, entonces existe $\langle r, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ tal que $\langle r, F\rangle \leq \langle s_1, F_1\rangle$ y $\langle r, F\rangle \leq \langle s_2, F_2\rangle$, entonces $s_1 \subseteq r$ y $s_2 \subseteq r$ con ello $s_1 \cup s_2 \subseteq r$; de manera análoga tenemos que $F_1 \cup F_2 \subseteq F$. Además, para todo $x \in F_i$, $x \cap r \subseteq s_i$, $i = 1,\ 2$. Ahora bien, como $s_1 \cup s_2 \subseteq r$, tenemos que para todo $x \in F_1$, $x \cap s_2 \subseteq x \cap r \subseteq s_1$ y, también, para todo $x \in F_2$, $x \cap s_1 \subseteq x \cap r \subseteq s_2$.

($\Leftarrow$ Supongamos que $\forall\ x \in F_1\ (x \cap s_2 \subset s_1)$ y $\forall\ x \in F_2\ (x \cap s_1 \subset s_2)$, y sea $\langle r, F\rangle := \langle s_1 \cup s_2, F_1 \cup F_2\rangle$.

Afirmación: $\langle r, F\rangle \leq \langle s_1, F_1\rangle$ y $\langle r, F\rangle \leq \langle s_2, F_2\rangle$. Resta probar que para todo $x \in F_i$, $x \cap r \subseteq s_i$. Para ver esto, notemos que $s_i \subseteq s_1 \cup s_2 = r$ y $F_i \subseteq F_1 \cup F_2 = F$; $i = 1,\ 2$. Claramente, para toda $x \in F_i$ $(x \cap s_i \subseteq s_i)$. Ahora bien, por hipótesis, para toda $x \in F_1$ tenemos que $x \cap s_2 \subseteq s_1$; luego, para toda $x \in F_1$ $(x \cap s_1) \cup (x \cap s_2) \subseteq s_1$, pero $(x \cap s_1) \cup (x \cap s_2) = x \cap (s_1 \cup s_2) = x \cap r$; así, para toda $x \in F_1$ se tiene que $x \cap r \subseteq s_1$. Por tanto, $\langle r, F\rangle \leq \langle s_1, F_1\rangle$. De manera análoga se concluye que $s_2 \subseteq r$, $\langle r, F\rangle \leq \langle s_2, F_2\rangle$. La prueba está completa.

□

Si $\mathcal{G}$ es un filtro en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$, denotamos $d_{\mathcal{G}} = \bigcup\{s : \exists\ F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}\ (\langle s, F\rangle \in \mathcal{G})\}$.

Teorema 2.14. *Sean $\mathcal{G}$ un filtro en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ y $\langle s', F'\rangle \in \mathcal{G}$, entonces para todo $x \in F'$, se tiene que $x \cap d_{\mathcal{G}} \subseteq s'$.*

Demostración. Sea $s'' \in \{s : \exists\ F\ (\langle s, F\rangle \in \mathcal{G})\}$. Entonces existe $F'' \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ tal que $\langle s'', F''\rangle \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ es un filtro, $\langle s', F'\rangle \in \mathcal{G}$ y $\langle s'', F''\rangle \in \mathcal{G}$ son compatibles. Luego, por el Lema 2.13, tenemos en particular que $\forall\ x \in F'$ $(x \cap s'' \subseteq s')$. La prueba está completa. □

Ahora denotamos, para cada $x \in \mathcal{A}$, $\mathcal{D}_x = \{\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}} : x \in F\}$.

Corolario 2.15. *Sea $x \in \mathcal{A}$. Entonces:*

(*a*) *Si $\mathcal{G}$ es un filtro en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ y $\mathcal{G} \cap \mathcal{D}_x \neq \emptyset$, entonces $|x \cap d_{\mathcal{G}}| < \omega$.*

(*b*) *$\mathcal{D}_x$ es denso en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$.*

Demostración. (*a*) Como $\mathcal{G} \cap \mathcal{D}_x \neq \emptyset$, existe $\langle s, F\rangle \in \mathcal{G} \cap \mathcal{D}_x$. Ahora bien, dado que $\mathcal{G}$ es un filtro en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$, por el Teorema 2.14, para todo $x \in F$ se tiene que $(x \cap d_{\mathcal{G}}) \subseteq s$, y como $|s| < \omega$, en consecuencia $|x \cap d_{\mathcal{G}}| < \omega$.

(*b*) Basta observar que para cualquier $\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$, se tiene que $\langle s, F \bigcup\{x\}\rangle \in \mathcal{D}_x$ y $\langle s, F \bigcup\{x\}\rangle \leq \langle s, F\rangle$.

□

Para continuar, veremos que el orden parcial $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ tiene *c.c.c.*

Lema 2.16. $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ *tiene la propiedad de la cadena contable.*

Demostración. Supongamos que no y sea $\{\langle s_\varepsilon, F_\varepsilon\rangle : \varepsilon < \omega_1\}$ una anticadena no numerable en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$. Entonces para cualesquiera $\eta,\ \mu < \omega_1$, con $\eta \neq \mu$, existe $x \in F_\mu$ tal que $x \cap s_\eta \subsetneq s_\mu$ o existe $x \in F_\eta$ tal que $x \cap s_\mu \subsetneq s_\eta$. Luego, podemos concluir (en cualquiera de los dos casos) que $s_\mu \neq s_\eta$; lo cual no puede ocurrir, pues $|[\omega]^{<\omega}| = \omega$. Por lo tanto $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ tiene la *c.c.c.* □

Teorema 2.17. (AM(κ)) *Sean $\mathcal{A}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, tales que $|\mathcal{A}| \leq \kappa$, $|\mathcal{C}| \leq \kappa$. Si para todo $y \in \mathcal{C}$ y cada $F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ se cumple que $|y \setminus \bigcup F| = \omega$, entonces existe $d \subseteq \omega$ tal que*

1. $\forall\ x \in \mathcal{A}\ (|d \cap x| < \omega)$, y

2. $\forall\ y \in \mathcal{C}\ (|d \cap y| = \omega)$.

Demostración. Denotemos, para cada $y \in \mathcal{C}$ y $n \in \omega$,

$$E_n^y = \{\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}} : s \cap y \subsetneq n\}$$

Afirmación: Para todo $y \in \mathcal{C}$ y $n \in \omega$, E_n^y es denso en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$. En efecto, sean $\langle s, F\rangle \in \mathbb{P}_{\mathcal{A}}$, $y \in \mathcal{C}$ y $n \in \omega$. Como $|y \setminus \bigcup F| = \omega$, elegimos $m \in y \setminus \bigcup F$ tal que $m > n$. Pongamos $s^{'} = s \cup \{m\}$ y $F^{'} = F$. Es claro que $\langle s^{'}, F^{'}\rangle \in E_n^y$.

Ahora veamos que $\langle s', F' \rangle \leq \langle s, F \rangle$. Obviamente $s \subset s'$, $F \subset F'$. Por último, si $x \in F$, entonces $x \cap s' = x \cap (s \cup \{m\}) = (x \cap s) \cup (x \cap \{m\})$; pero $x \cap \{m\} = \emptyset$, pues $x \in F$ y $m \notin \bigcup F$. Así, $x \cap s' = x \cap s \subset s$. Por lo tanto, $\langle s', F' \rangle \leq \langle s, F \rangle$ y con ello E_n^y es denso.

Ahora consideremos el conjunto $\mathcal{D} = \{E_n^y : y \in \mathcal{C} \wedge n \in \omega\} \cup \{\mathcal{D}_x : x \in \mathcal{A}\}$. Por la afirmación anterior y el Corolario 2.15 (b), tenemos que $\mathcal{D}$ es una familia de subconjuntos densos en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ con $|\mathcal{D}| \leq \kappa$. Luego, por AM, *existe un filtro $\mathcal{D}$–genérico, $\mathcal{G}$, en $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$. Sea $d = d_{\mathcal{G}} = \bigcup\{s : \exists\ F \in [\mathcal{A}]^{<\omega} : \langle s, F \rangle \in \mathcal{G}\}$. Del Corolario 2.15 ($a$), tenemos que $x \in \mathcal{A}$, $|d \cap x| < \omega$. Resta probar que si $y \in \mathcal{C}$, entonces $|d \cap y| = \omega$. En efecto, supongamos que no es así, es decir, que para algún $y_0 \in \mathcal{C}$, ocurre que $|d \cap y_0| < \omega$. Sea $n_0 \in \omega$ tal que $d \cap y_0 \subseteq n_0$. Puesto que $\mathcal{G}$ es $\mathcal{D}$–genérico, tenemos que existe $\langle s, F \rangle \in \mathcal{G} \cap E_{n_0}^{y_0}$. Lo cual implica que $s \cap y_0 \nsubseteq n_0$, y esto es es una contradicción, ya que $s \cap y_0 \subseteq d \cap y_0 \subseteq n_0$. Así, para todo $y \in \mathcal{C}$, $|d \cap y| = \omega$.* □

Corolario 2.18. (AM(κ)) *Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ una familia casi ajena de cardinalidad κ, donde $\omega \leq \kappa < 2^\omega$. Entonces $\mathcal{A}$ no es maximal casi ajena.*

Demostración. Supongamos que no; es decir, que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ es una familia maximal casi ajena. Sea $\mathcal{C} = \{\omega\}$.

Afirmación: Para todo $y \in \mathcal{C}$, y cada $F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$, $|y \setminus \bigcup F| = \omega$. En efecto, supongamos que para algún $F = \{x_i : i \in \overline{1, n}\}$ ocurre que $|\omega \setminus (\bigcup_{i=1}^n x_i)| < \omega$. Entonces $|\bigcap_{i=1}^n x_i^c| < \omega$. Pongamos $x = (\bigcap_{i=1}^n x_i^c)^c$ y notemos que $x \notin \mathcal{A}$; pues de lo contrario, $|x_1 \cap x| < \omega$, lo cual implica que $x_1 \subseteq \bigcap_{i=1}^n x_i^c$, una contradicción. Un argumento similar justifica el hecho de que $\mathcal{A} \cup \{x\}$ es una familia casi ajena y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \cup \{x\}$, en contradicción con la maximalidad de $\mathcal{A}$. Lo que demuestra la afirmación.

Ahora ya podemos aplicar el Teorema 2.17 a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{A}$, lo cual nos garantiza la existencia de $d \subseteq \omega$ tal que se satisfacen las condiciones 1 y 2 de dicho teorema. De estos hechos se obtiene que $\mathcal{A} \cup \{d\}$ es una familia casi ajena tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \cup \{d\}$. Luego, por la maximalidad de $\mathcal{A}$, $d \in \mathcal{A}$. Lo cual es imposible, pues por la propiedad 1 del Teorema 2.17, $|d \cap d| < \omega$; pero $|d \cap d| = |d| = \omega$. □

Corolario 2.19. (AM(κ)) *Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ una familia casi ajena de tamaño κ, donde $\omega \leq \kappa < 2^\omega$. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, entonces existe $d \subseteq \omega$ tal que $\forall\ x \in \mathcal{A}$ $|d \cap x| < \omega$ y para toda $x \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$, $d \cap x = \omega$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \mathcal{B} \backslash \mathcal{A}$.

Afirmación: Para todo $y \in \mathcal{C}$ y cada $F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$, $|y \backslash \bigcup F| = \omega$. En efecto, sean $y \in \mathcal{C}$, y $F = \{x_i : i \in \{1, 2, ..., n\}\} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$. Entonces $y \backslash F = \bigcap_{i=1}^{n} (y \setminus x_i)$, y dado que $\mathcal{B}$ es familia casi ajena, tenemos que cada $y \cap x_1$ ($i \in \{1, 2, ..., n\}$) es finito; luego, $|y \backslash \bigcup_{i=1}^{n} (y \cap x_i)| = \omega$. Además, $y \backslash \bigcup_{i=1}^{n} (y \cap x_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (y \setminus x_i)$, pues si $a \in y \backslash \bigcup_{i=1}^{n} (y \cap x_i)$, entonces $a \notin \bigcup_{i=1}^{n} (y \cap x_i)$, lo cual implica que para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $a \in y \backslash x_i$. Así, $y \backslash \bigcup_{i=1}^{n} (y \cap x_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (y \setminus x_i)$, y por lo tanto $|y \backslash \bigcup F| = \omega$.

Ahora, aplicando el Teorema 2.17 a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{A}$, obtenemos $d \subseteq \omega$ de tal forma que las afirmaciones 1 y 2 de dicho teorema, se verifican. De estos hechos se obtiene, trivialmente la conclusión del resultado. □

Teorema 2.20. (AM(κ)) *Si $\omega \leq \kappa < 2^\omega$, entonces $2^\kappa = 2^\omega$.*

Demostración. Puesto que la conclusión es inmediata si $\kappa = \omega$, supondremos que $\omega < \kappa$. Sea $\mathcal{B}$ una familia casi ajena tal que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, con $|\mathcal{B}| \leq \kappa$. Consideremos la función $\Phi : \mathcal{P}(\omega) \to \mathcal{P}(\mathcal{B})$, definida por $\Phi(d) = \{x \in \mathcal{B} : |x \cap d| < \omega\}$. Por el corolario anterior, Φ es sobreyectiva; luego, $2^\kappa \leq 2^\omega$. Por otro lado, por aritmética cardinal (vea [13]), $\omega \leq \kappa$, implica que $2^\omega \leq 2^\kappa$. Por lo tanto, $2^\omega = 2^\kappa$.

□

Corolario 2.21. (AM) 2^ω *es regular.*

Demostración. Pongamos $\lambda = cf(2^\omega)$. Por definición de cofinalidad, $\lambda \leq 2^\omega$. Veamos que no puede ocurrir que $\lambda < 2^\omega$. Si $\lambda < 2^\omega$, entonces por el Teorema 1.9, aplicado a λ y $\kappa = 2^\omega$, tenemos que $\kappa = 2^\omega < \kappa^\lambda = 2^{cf(2^\omega)}$; pero del teorema anterior sabemos que $2^{cf(2^\omega)} = 2^\lambda = 2^\omega$, lo cual es una contradicción. Por tanto, 2^ω es regular. □

Teorema 2.22. (AM(κ)) *Sea X un espacio Hausdorff, segundo numerable y sin puntos aislados. Si $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de subconjuntos densos y abiertos en X, entonces existe una colección $\{V_n : n \in \omega\}$ de conjuntos densos y abiertos en X tal que:*

$$\bigcap_{n<\omega} V_n \subseteq \bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha.$$

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{B_i : i < \omega\}$ una base numerable de X.

Para cada $j < \omega$, denotamos $c_j = \{i \in \omega : B_i \subseteq B_j\}$. Para cada $\alpha < \kappa$, tomamos $a_\alpha = \{i \in \omega : B_i \nsubseteq U_\alpha\}$. Sean $\mathcal{C} = \{c_j : j < \omega\}$ y $\mathcal{A} = \{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Claramente, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{A}$ son unos subconjuntos de $\mathcal{P}(\omega)$ con $|\mathcal{C}| \leq \kappa$ y $|\mathcal{A}| \leq \kappa$.

Ahora bien, si $y \in \mathcal{C}$ y $F \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$, entonces existe $j < \omega$ tal que $y = c_j$. Sea $F = \{a_{\alpha_k} : k < m\}$ para algún $m < \omega$. Entonces $y \setminus \bigcup F = c_j \setminus (\bigcup\{a_{\alpha_k} : k < m\}$. Ahora, dado que cada U_{α_k} es denso y abierto, podemos asegurar la existencia de $x \in B_j \cap (\bigcap\{U_{\alpha_k} : k \in \{1, 2, ..., m\}\})$. Luego, como $\mathcal{B}$ es una base, existe $j' \in \omega$ tal que $x \in B_{j'} \subseteq B_j \cap (\bigcap\{U_{\alpha_k} : k \in \{1, 2, ..., m\}\})$. Note que para todo $i < \omega$ tal que $B_i \subseteq B_j$, se cumple que $i \in C_j \setminus (\bigcup\{a_{\alpha_k} : k < m\}$. De aquí y del hecho de que X es un espacio Hausdorff, separable y sin puntos aislados, tenemos que $|c_j \setminus \bigcup\{a_\alpha : \alpha \in F\}| = \omega$.

Lo anterior nos permite aplicar el Teorema 2.17 a las colecciones $\mathcal{C}$ y $\mathcal{A}$, para obtener un conjunto $d \subseteq \omega$ tal que las condiciones 1 y 2 del teorema, se satisfacen.

Definamos, para cada $n \in \omega$, $V_n = \bigcup\{B_i : i \in d \text{ e } i > n\}$.

Puesto que para todo $j < \omega$, $|d \cap c_j| = \omega$, entonces para cada $n \in \omega$ existe un $i > n$, tal que $i \in d$ y $B_i \subseteq B_j \cap V_n \subseteq V_n$. Esto es, cada V_n es denso.

Finalmente, dado que para cada $\alpha < \kappa$, $|d \cap a_\alpha| < \omega$, se tiene que para algún $n \in \omega$, $d \cap a_\alpha \subseteq n$. Así, para todo $i > n$, tenemos que si $i \in d$, entonces $B_i \subset U_\alpha$. Lo cual implica que $V_n \subseteq U_\alpha$. Por lo tanto, $\bigcap\{V_n : n \in \omega\} \subseteq \bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

□

Corolario 2.23. (AM(κ)) *Sea X un espacio Hausdorff, segundo numerable y sin puntos aislados. Si $\{K_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de subconjuntos cerrados y densos en ninguna parte, en X entonces existe una colección $\{H_n : n \in \omega\}$ de conjuntos cerrados y densos en ninguna parte, en X de tal forma que:*

$$\bigcup_{\alpha<\kappa} K_\alpha \subseteq \bigcup_{n<\omega} H_n.$$

Demostración. Se sigue del teorema anterior y el hecho de que el complemento de un conjunto cerrado y denso en ninguna parte es un conjunto abierto y denso. □

Recordemos que un subconjunto M de un espacio topológico X es llamado de la primera categoría si existe una colección numerable $\{K_n : n \in \omega\}$ de conjuntos densos en ninguna parte tales que $M = \bigcup\{K_n : n \in \omega\}$.

Claramente, todo subconjunto de un conjunto de la primera categoría es de la primera categoría.

Corolario 2.24. ($\mathrm{AM}(\kappa)$) *Sea X un espacio Hausdorff, segundo numerable y sin puntos aislados. Si $\{M_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de subconjuntos de la primera categoría en X, entonces $\bigcup\{M_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es de la primera categoría.*

Demostración. Por hipótesis, para cada $\alpha < \kappa$, $M_\alpha \subseteq \bigcup\{K_n^\alpha : n \in \omega\}$; donde cada K_n^α es denso en ninguna parte en X. Sea $\mathcal{K} = \{\overline{K}_n^\alpha : n < \omega \text{ y } \alpha < \kappa\}$. Claramente, $|\mathcal{K}| < \kappa$. Luego, por el corolario anterior, existe una colección numerable de cerrados densos en ninguna parte, H_n $n \in \omega$ tal que

$$\bigcup \mathcal{K} \subseteq \bigcup\{H_n : n < \omega\}.$$

Luego $\bigcup\{M_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \bigcup\{H_n : n < \omega\}$. Así, $\bigcup\{M_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es de la primera categoría en X. □

De lo anterior tenemos, en particular, que si $\{M_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia de subconjuntos de la primera categoría en $\mathbb{R}$, entonces $\bigcup\{M_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es de la primera categoría.

Teorema 2.25. ($\mathrm{AM}(\kappa)$). *Sea X un espacio Hausdorff y compacto con la c.c.c. Si $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una colección de subconjuntos densos y abiertos en X, entonces $\bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \neq \emptyset$.*

Demostración. Consideremos el orden parcial del Ejemplo 2.7. Dado que X satisface la *c.c.c.*, tenemos que $\mathbb{P}$ tiene la *c.c.c.*

Para cada α, sea $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} : \overline{p} \subseteq U_\alpha\}$. Observemos que cada D_α es denso en $\mathbb{P}$. En efecto, sea $q \in \mathbb{P}$. Como U_α es denso, entonces $q \cap U_\alpha \neq \emptyset$; luego, por la regularidad de X, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $\overline{p} \subseteq U_\alpha \cap q$. Entonces $p \in D_\alpha$ y claramente $p \leq q$.

Así, para $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \kappa\}$, existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico $\mathcal{G}$. Puesto que $\mathcal{G}$ es un filtro, tenemos que $\mathcal{G}$ tiene la pif y como X es compacto, tenemos que $\bigcap\{\overline{p} : p \in \mathcal{G}\} \neq \emptyset$, y por lo tanto, $\bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \neq \emptyset$. □

Lema 2.26. ($\mathrm{AM}(\omega_1)$). *Sea X un espacio con la c.c.c. y $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una familia de subconjuntos abiertos no vacíos de X, entonces existe $A \subseteq \omega_1$ no numerable tal que $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ tiene la propiedad de la intersección finita.*

Demostración. Pongamos, para cada $\alpha < \omega_1$, $V_\alpha = \bigcup\{U_\gamma : \gamma > \alpha\}$. Entonces $\alpha < \beta$ implica que $V_\beta \subseteq V_\alpha$.

Afirmación 1: Existe $\alpha < \omega_1$ tal que para todo $\beta > \alpha$ se cumple que

$$\overline{V}_\beta = \overline{V}_\alpha \qquad (*)$$

Supongamos que no. Entonces, por recursión, podemos construir una sucesión de ordinales, estrictamente creciente, $\{\alpha_\xi : \xi < \omega_1\}$ tal que para cada $\xi < \omega_1$, $V_{\alpha_\xi} \setminus \overline{V}_{\alpha_{\xi+1}} \neq \emptyset$. Observemos que la colección $\mathcal{U} = \{V_{\alpha_\xi} \setminus \overline{V}_{\alpha_{\xi+1}} : \xi < \omega_1\}$ es una familia celular en X. En efecto, supongamos que no; i.e. existen $U, V \in \mathcal{U}$ tales que $U \cap V \neq \emptyset$. Entonces existen $\rho, \xi < \omega_1$ tales que $U = V_{\alpha_\rho} \setminus \overline{V}_{\alpha_{\rho+1}}$ y $V = V_{\alpha_\xi} \setminus \overline{V}_{\alpha_{\xi+1}}$. Fijemos $x \in U \cap V$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\rho < \xi$. Del hecho $U \cap V \neq \emptyset$ se sigue que $\rho + 1 < \xi$; luego, $V_\xi \subseteq V_{\rho+1}$ y por tanto, $V_\xi \subseteq \overline{V}_{\rho+1}$. Ahora bien, dado que $x \in V = V_{\alpha_\xi} \setminus \overline{V}_{\alpha_{\xi+1}}$, tenemos que $x \in V_{\rho+1}$; lo cual no puede ocurrir ya que $x \in U = V_{\alpha_\rho} \setminus \overline{V}_{\alpha_{\rho+1}}$. Así, $\mathcal{U}$ es una familia celular con $|\mathcal{U}| = \omega_1$, en contradicción con el hecho de que $c(X) = \omega$. Con lo que se demuestra la afirmación.

Fijemos α tal que para todo $\beta > \alpha$, $\overline{V}_\beta = \overline{V}_\alpha$, y sea $\mathbb{P} = \{p \subseteq V_\alpha : p$ es abierto $\wedge\ p \neq \emptyset\}$, con el orden dado en el Ejemplo 2.7. Entonces $\mathbb{P}$ satisface la c.c.c., debido a que X la cumple.

Consideremos, para cada $\alpha \leq \beta < \omega_1$,

$$D_\beta = \{p \in \mathbb{P} : \exists\ \gamma > \beta\ (p \subseteq U_\gamma)\}.$$

Afirmación 2: D_β es denso (para cada $\alpha \leq \beta < \omega_1$). En efecto, sea $p \in \mathbb{P}$. Es claro que si $p \in D_\beta$, no hay nada que probar. Supongamos que $p \notin D_\beta$. Por $(*)$, tenemos que $\overline{V}_\alpha \subseteq \overline{V}_\beta$; luego $p \cap V_\beta \neq \emptyset$. De aquí, existe $\gamma > \beta$ tal que $p \cap U_\gamma \neq \emptyset$ Sea $q = p \cap U_\gamma$. Entonces, claramente, $q \leq p$ y $q \in D_\beta$. Por lo tanto, D_β es denso en $\mathbb{P}$.

Ahora, sea $\mathcal{D} = \{D_\beta : \alpha < \beta < \omega_1\}$. Por $\mathrm{AM}(\omega_1)$, existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico $\mathcal{G}$. Tomemos

$$A = \{\gamma < \omega_1 : \exists\ p \in G\ (p \subseteq U_\gamma)\}.$$

Dado que, evidentemente, $\mathcal{G}$ satisface la pif, tenemos que $\{U_\gamma : \gamma \in A\}$ también cumple la pif. □

Terminamos esta primera serie de aplicaciones del Axioma de Martin con el resultado siguiente, el cual se refiere a la productividad de la propiedad se Suslin.

Teorema 2.27. (AM(ω_1)) *El producto arbitrario de espacios c.c.c. tiene c.c.c.*

Demostración. Por el Lema 1.10, es suficiente demostrar que el producto de dos espacios *c.c.c.* tiene *c.c.c.*

Sean X y Y espacios con la *c.c.c.* y supongamos que $X \times Y$ no tiene *c.c.c.*, entonces existe una familia celular $\{W_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ en $X \times Y$. Para cada α, elegimos un abierto básico y no vacío $U_\alpha \times V_\alpha$ de $X \times Y$ tal que $U_\alpha \times V_\alpha \subseteq W_\alpha$ por el lema anterior, existe $A \subseteq \omega_1$ no numerable tal que $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ tiene la pif. De aquí que si $\alpha, \beta \in A$ y $\alpha \neq \beta$, entonces $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$; pero $(U_\alpha \times V_\alpha) \cap (U_\beta \times V_\beta) = \emptyset$; luego, para cada $\alpha,\ \beta \in A$ $(\alpha \neq \beta)$, $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$. Por lo tanto, $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia celular en Y. En contradicción con el hecho de que Y es *c.c.c.* lo cual prueba el teorema. □

2.3. Aplicaciones II (separabilidad)

En la presente sección nos interesamos en un par de objetivos. El primero es extender el Teorema 2.25 a una clase más amplia de espacios topológicos (vea el Corolario 2.35). Diversos autores han realizado trabajo en esta dirección (vea [9]). La noción con la que trabajaremos aquí, fue introducida por Juhász en [9].

Recordemos algunos conceptos antes de iniciar.

Definición 2.28. *Sea X un espacio topológico.*

1. *Una π-base de X es una colección $\mathcal{V}$ de conjuntos abiertos no vacíos en X tal que si U es un conjunto abierto abierto en X, entonces $V \subseteq U$ para algún $V \in \mathcal{V}$.*

2. *El π-peso de X se define como*

$$\min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es una } \pi - \text{base de } X\} + \omega.$$

Este número cardinal es denotado por $\pi w(X)$.

Como es sabido, vea por ejemplo [13], AM es equivalente al enunciado siguiente:

Todo espacio compacto con la propiedad de Suslin satisface la propiedad fuerte de Baire; *i.e.* no es la unión de menos que 2^ω subconjuntos densos en ninguna parte.

Resulta que la compacidad puede reemplazarse por una propiedad más general, *completez*, lo cual no es extraño puesto que la propiedad de Baire está más relacionada con la *completez* que con la compacidad.

En [9], Juhász define la propiedad con la cual trabajaremos en lo sucesivo. Antes de presentarla, recordemos que una colección $\mathcal{U}$ de abiertos no vacíos en el espacio topológico X es una base de filtro regular si para cualesquiera U, $V \in \mathcal{U}$ existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $\overline{W} \subseteq U \cap V$.

Definición 2.29. ([9]) *Un espacio regular X es π-completo si existe una colección $\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de π-bases, con $\lambda < 2^\omega$, con la propiedad de que para cualquier $\mathcal{G} \subseteq \bigcup\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha < \lambda\}$ base de filtro regular en X con $|\mathcal{G}| < 2^\omega$ tal que para todo $\alpha < \lambda$, $\mathcal{G} \cap \mathcal{B}_\alpha \neq \emptyset$, ocurre que $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$.*

Entre las clases importantes de espacios topológicos se encuentran la de los espacios Hausdorff y compactos y la de los Čech-completos. Recordemos que un espacio Tychonoff X es Čech-completo si X es G_δ en toda compactación (vea [2]). Una consecuencia del resultado siguiente es que ambas pertenecen a la de los π–completos.

Recordemos que un subconjunto Y del espacio X es G_κ o de tipo G_κ (donde κ es un cardinal) si Y es la intersección de a lo más κ conjuntos abiertos en X.

Teorema 2.30. ([10]) *Sea X un espacio Hausdorff y compacto, y $\kappa < 2^\omega$. Si Y es un subespacio denso de tipo G_κ en X, entonces Y es π–completo.*

Demostración. Por hipótesis, existe una colección $\{V_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ de conjuntos abiertos en X tales que $Y = \bigcap\{V_\alpha : \alpha \in \kappa\}$.

Sea, para cada $\alpha < \kappa$, $\mathcal{B}_\alpha = \{U \cap Y : U$ es conjunto abierto en X y $cl_X(U) \subseteq V_\alpha\}$.

Afirmamos que para todo $\alpha < \kappa$, $\mathcal{B}_\alpha$ es una π-base en Y. En efecto, sean $\alpha < \kappa$ y V abierto no vacío en X, entonces existe W abierto en X tal que $V = Y \cap W$. Dado que X es Tychonoff, existe un conjunto abierto no vacío, W', tal que $cl_X(W') \subseteq W \cap V_\alpha$ (pues $W \cap V_\alpha \neq \emptyset$). Ahora bien, como Y es denso en X, tenemos que $Y \cap W' \neq \emptyset$. Obviamente, $Y \cap W' \in \mathcal{B}_\alpha$ y $Y \cap W' \subseteq V$. Por lo tanto, $\mathcal{B}_\alpha$ es π–base de Y.

Ahora veremos que si $\mathcal{G} \subseteq \bigcup\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ es una base de filtro regular tal que para todo $\alpha \in \kappa$, $\mathcal{G} \cap \mathcal{B}_\alpha \neq \emptyset$, entonces $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Para cada $G \in \mathcal{G}$, existen $\alpha \in \kappa$ y $U_{(\alpha,G)}$ abierto en X tales que $G = Y \cap U_{(\alpha,G)}$ y $G \in \mathcal{B}_\alpha$

(luego, $U_{(\alpha,G)} \subseteq V_\alpha$). Dado que $\mathcal{G}$ es una base de filtro regular, tenemos que la colección $\mathcal{G}' = \{cl_X(U_{(\alpha,G)}) : G \in \mathcal{G}\}$ es una familia de conjuntos cerrados no vacíos con la propiedad de la intersección finita en X, el cual es compacto; entonces, $\bigcap \mathcal{B}' \neq \emptyset$. Finalmente, tenemos que para todo $\alpha < \kappa$, existe $E_\alpha \in \mathcal{G} \cap \mathcal{B}_\alpha$. Por tanto, para cada $\alpha < \kappa$, $E_\alpha = U_{(\alpha,E_\alpha)} \cap Y$. Por la construcción tenemos que $\overline{U}_{(\alpha,E_\alpha)} \subseteq V_\alpha$; de donde $x_0 \in \bigcap_{\alpha<\kappa} V_\alpha = Y$. Este hecho y el que $\mathcal{G}$ es una base de filtro regular implican que $\bigcap \mathcal{B}' \neq \emptyset$.

Esto prueba que Y es π-completo. □

Corolario 2.31. *Los espacios Čech-completos y los espacios compactos son π-completos.*

Ejemplo 2.32. *Un espacio Tychonoff X es llamado subcompacto si X tiene una base $\mathcal{B} \subseteq \tau(X) \setminus \{\emptyset\}$ tal que para toda base de filtro regular $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$, $\bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Es inmediato de la definición que todo espacio subcompacto es π-completo.*

Ejemplo 2.33. *Un espacio Tychonoff X se dice ser disperso, si todo subespacio no vacío de X tiene un punto aislado. Recientemente en [3], demostraron que todo espacio disperso es subcompacto; luego, tenemos que todo espacio disperso es π-completo.*

Ahora vamos a mostrar que los espacios π-completos y de Suslin, tienen la propiedad fuerte de Baire.

Teorema 2.34. (AM) *Si X es un espacio π-completo con $c(X) = \omega$, entonces X no es la unión de menos de 2^ω conjuntos densos en ninguna parte.*

Demostración. Sean $\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una colección de π–bases que garantiza la π-completez de X y $\{A_\xi : \xi < \kappa\}$ una colección de $\kappa < 2^\omega$ conjuntos densos en ninguna parte.

Para ver que $X \neq \bigcup\{A_\xi : \xi < \lambda\}$, pongamos $\mathbb{P} = \bigcup\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha \in \lambda\}$. Para $U, V \in \mathbb{P}$, definimos $U \leq V$ si y sólo si $\overline{U} \subseteq V$.

Observe que si $U, V \in \mathbb{P}$ son incompatibles, entonces $U \cap V = \emptyset$. De este hecho tenemos que $c(X) = \omega$ implica que $\mathbb{P}$ es *c.c.c.*

Definamos, para cada $(\alpha, \xi) \in \lambda \times \kappa$,

$$\mathcal{D}(\alpha, \xi) = \{U \in \mathbb{P} : U \in \mathcal{B}_\alpha \text{ y } U \cap A_\xi = \emptyset\}.$$

Afirmamos que para todo $(\alpha, \xi) \in \lambda \times \kappa$, $\mathcal{D}(\alpha, \xi)$ es denso en $\mathbb{P}$. En efecto, fijemos $(\alpha, \xi) \in \lambda \times \kappa$, y sea $V \in \mathbb{P}$. Tenemos dos casos:

1. $V \in \mathcal{D}(\alpha, \xi)$. No hay nada que probar.

2. $V \notin \mathcal{D}(\alpha, \xi)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $V \in \mathcal{B}_\alpha$. Entonces $V \cap \overline{A}_\xi \neq \emptyset$; más aún, $V \setminus \overline{A}_\xi \neq \emptyset$. La regularidad de X y el hecho de que $\mathcal{B}_\alpha$ es una π-base garantizan la existencia de $U \in \mathcal{B}_\alpha$ tal que $\overline{U} \subseteq V \setminus \overline{A}_\xi$, lo cual implica que $U \in \mathcal{D}(\alpha, \xi)$ y $U \leq V$.

De lo anterior, $\mathcal{D}(\alpha, \xi)$ es denso en $\mathbb{P}$.

Sea $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}(\alpha, \xi) : (\alpha, \xi) \in \lambda \times \kappa\}$. Puesto que $|\mathcal{D}| \leq \lambda\kappa < 2^\omega$, existe filtro $\mathcal{D}$-genérico $\mathcal{G}$. Por la Porposición 2.10, existe $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ tal que las condiciones (1)-(3), de dicha proposición se verifican. Claramente, $\mathcal{G}'$ es una base de filtro regular, con $|\mathcal{G}'| < 2^\omega$ y tal que para todo $\alpha < \lambda$, $\mathcal{G}' \cap B_\alpha \neq \emptyset$. Luego $\bigcap \mathcal{G}' \neq \emptyset$. Observe que si $p \in \bigcap \mathcal{G}'$, entonces $p \in X \setminus \bigcup\{A_\xi : \xi < \lambda\}$. La demostración está completa. □

Corolario 2.35. (AM(κ)). *Sea X un espacio π-completo con la c.c.c. Si $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una coleccion de subconjuntos densos y abiertos en X, entonces $\bigcap\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \neq \emptyset$.*

Demostración. Basta observar que el complemento de todo conjunto denso es denso abierto en ninguna parte. □

Corolario 2.36. (AM) *Si X es π-completo y $c(X) = \omega$, entonces X^ω tiene la propiedad fuerte de Baire.*

Demostración. Sea $\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una colección de π bases que atestiguan la π–completez de X. Definimos, para cada $\alpha < \lambda$ y cada $n \in \omega$, $\mathcal{B}(\alpha, n)$ como la familia de todos los conjuntos abiertos básicos en X^ω de la forma

$$\bigcap\{\pi_i^{-1}(B_i) : i \in I\}$$

, donde $I \in [\omega]^{<\omega}$, $B_i \in \mathcal{B}_\alpha$ para cada $i \in I$ y $n \in I$. Claramante, cada $\mathcal{B}(\alpha, n)$ es una π–base de X^ω. También es inmediato que si $\mathcal{F} \subseteq \bigcup\{\mathcal{B}(\alpha, n) : \alpha < \lambda, n < \omega\}$ es una base de filtro regular con $|\mathcal{F}| < 2^\omega$ y para todo $(\alpha, n) \in \lambda \times \omega$ $\mathcal{F} \cap \mathcal{B}(\alpha, n) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{F}_n = \{\pi_n(B) : B \in \mathcal{F}\}$ es una base de filtro regular con $|\mathcal{F}_n| < 2^\omega$, contenida en $\bigcup\{\mathcal{B}_\alpha : \alpha < \lambda\}$, y tal que para todo $\alpha < \lambda$, $\mathcal{F}_n \cap \mathcal{B}_\alpha \neq \emptyset$. Luego, $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Por lo tanto, X^ω es π-completo. Además, AM y $c(X) = \omega$ implican que $c(X^\omega) = \omega$ (vea Teorema 2.27). Así que por el teorema anterior, X^ω tiene la propiedad fuerte de Baire. □

El resultado siguiente no usa AM, no obstante es interesante por sí mismo. Antes damos algunos conceptos.

Definición 2.37. *Sea κ un cardinal infinito. Un espacio topológico X es un espacio κ-Baire si para todo cardinal $\lambda < \kappa$ y toda familia $\{D_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de conjuntos densos y abiertos en X se cumple que $\bigcap\{D_\alpha : \alpha < \lambda\} \neq \emptyset$.*

En particular, todo espacio ω_1-Baire es un espacio de Baire. Además, es claro que todo espacio que satisface la propiedad fuerte de Baire es 2^ω–Baire.

Teorema 2.38. *Sean X un espacio topológico y κ un cardinal infinito. Si X^ω es un espacio κ–Baire y $\pi w(X) < \kappa$, entonces $d(X) = \omega$.*

Demostración. Sea $\mathcal{P}$ una π–base para X tal que $|\mathcal{P}| < \kappa$. Para cada $P \in \mathcal{P}$ defínase el conjunto

$$\mathcal{G}_P = \left\{ \bigcap_{i \in I} \pi^{-1}(G_i) : I \in [\omega]^{<\omega} \forall i \in I : G = int(G), \exists i \in I : G_i = P \right\}$$

Nótese que cada elemento de $\mathcal{G}_P$ es una π–base para X^ω, de lo cual se sigue que $D_P = \bigcup \mathcal{G}_P$ es un conjunto denso de X^ω. Dado que $|\mathcal{P}| < \kappa$ y X es κ-Baire, se sigue que $D = \bigcap\{D_P : P \in \mathcal{P}\} \neq \emptyset$.

Sea $x \in D$. Afirmamos que $S = \{x_n = \pi_n(x) : n \in \omega\}$ es un conjunto denso en X. En efecto, sea $G \subseteq X$ un conjunto abierto no vacío en X. Entonces existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $P \subseteq G$ y, dado que $x \in D_P$, existe $n \in \omega$ tal que $\pi_n(x) = x_n \in P \subset G$, de lo cual se concluye que S es denso y por lo tanto $d(X) = \omega$. □

Corolario 2.39. (AM) *Si X es un espacio π-completo de celularidad numerable y $\pi w(X) < 2^\omega$, entonces $d(X) = \omega$.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del Corolario 2.36 y el Teorema 2.38. □

El resultado anterior es la base para demostrar varios teoremas del tipo siguiente: (AM+¬HC) implica que si X es completo, Suslin y tiene caracter local *pequeño*, entonces X es separable (vea Hajnal y Juhász [9], Šapirovskii [11], Tall [12]). El resultado que presentamos enseguida es del tipo en cuestión, aunque de caracter general.

Recordemos que para un espacio topológico X, $t(X)^+$ es el menor cardinal regular κ con la propiedad de que para cualquier $A \subseteq X$ y $x \in \overline{A}$, existe $B \in [A]^{<\kappa}$ tal que $x \in \overline{B}$.

Teorema 2.40. ([*10*]) (AM) *Suponga que X es un espacio topológico con $c(X) = \omega$ y $t^+(X) < 2^\omega$. Si todo subespacio cerrado de X es π-completo y $Y = \{x \in X : \pi\chi(x, X) < 2^\omega\}$ es denso, entonces X es separable.*

Demostración. Sea $t^+(X) = \lambda$. Para cada $y \in Y$ tomamos una π–base local, $\mathcal{B}_y$, tal que $|\mathcal{B}_y| < 2^\omega$. Además, para cada $G \subseteq X$ abierto elegimos $y_{(G)} \in Y \cap G$ y sea $y_{(\emptyset)}$ un elemento arbitrario de Y. También, para $A \subseteq Y$ definimos:

$$A' = A \cup \{y_{(X \setminus \overline{A})}\} \cup \{y_{(U \cap V)} : U, V \in \bigcup \{\mathcal{B}_z : z \in A\}\}$$

A continuacón, definimos recursivamente una colección $\{F_\xi : \xi < \lambda\}$ de subconjuntos de X:

(i) $F_0 = \emptyset$.

(ii) Para todo $\xi < \lambda$, $F_{\xi+1} = F'_\xi$

(iii) Si $\xi \leq \lambda$ es un ordinal límite, no cero, definimos $F_\xi = \bigcup \{F_\alpha : \alpha < \xi\}$

Observemos que la regularidad de κ y la definición de A' (para $A \subseteq Y$) implican que para todo $\xi \leq \lambda$, $|F_\xi| < 2^\omega$. Veamos ahora que:

(1) $c(F_\lambda) = \omega$. En efecto, sea $\mathcal{H}$ una familia no numerable de conjuntos abiertos de F_λ. Para cada $H \in \mathcal{H}$ elegimos un punto $x(H) \in H$ y un conjunto abierto en X, G_H, tal que $H = F_\lambda \cap G_H$. Entonces, para cada $H \in \mathcal{H}$, existe $B_H \in \mathcal{B}_{x(H)}$ tal que $B_H \subseteq G_H$. Como X tiene *c.c.c*, existen H_1 y $H_2 \in \mathcal{H}$ tales que $B_{H_1} \cap B_{H_2} \neq \emptyset$. Ahora, considerando que λ es un ordinal limite, existe $\xi < \lambda$ tal que $x(H_1)$, $x(H_2) \in F_\xi$; luego, $B_{H_1}, B_{H_2} \in \bigcup \{B_y : y \in F_\xi\}$. Lo cual implica que $y_{(B_{H_1} \cap B_{H_2})} \in F'_\xi \subseteq F_\lambda$, además $y_{(B_{H_1} \cap B_{H_2})} \in B_{H_1} \cap B_{H_2}$ con lo cual $y_{(B_{H_1} \cap B_{H_2})} \in B_{H_1} \cap B_{H_2} \cap F_\lambda \subseteq B_{H_1} \cap B_{H_2} \cap F_\lambda \subseteq G_{H_1} \cap G_{H_2} \cap F_\lambda = (G_{H_1} \cap F_\lambda) \cap (G_{H_2} \cap F_\lambda) = H_1 \cap H_2$, por lo tanto $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$, y así $\mathcal{H}$ no es una familia celular, y por tanto $c(F_\lambda) = \omega$.

(2) $\pi\omega(\overline{F}_\lambda) < 2^\omega$. En efecto, sea $\mathcal{V} = \{U \cap \overline{F}_\lambda : U \in \bigcup \{\mathcal{B}_y : y \in F_\lambda\}$. Veamos que $\mathcal{V}$ es una π–base para $\overline{F}_\lambda$. Sea, pues, W un conjunto abierto no vacío en $\overline{F}_\lambda$. Como F_λ es denso en $\overline{F}_\lambda$, existe $y_0 \in W \cap F_\lambda$; luego, dado que λ es límite, existe $\xi < \lambda$ tal que $y_0 \in F_\xi$. Por otro lado, existe un conjunto abierto W' en X de tal foma que $W = \overline{F}_\lambda \cap W'$. Como $y_0 \in W'$ y $\mathcal{B}_{y_0}$ es una π-base local de y_0, existe $B_W \in \mathcal{B}_{y_0}$ tal

que $B_W \subseteq W'$. Entonces $y_{B_W} \in F_{\xi+1} \subseteq \overline{F}_\lambda$; luego, $\overline{F}_\lambda \cap B_W \in \mathcal{V}$ y $\overline{F}_\lambda \cap B_W \subseteq \overline{F}_\lambda \cap W' = W$.

Por lo tanto, $\mathcal{V}$ es una π-base para $\overline{F}_\lambda$ y, dado que $|\mathcal{V}| < 2^\omega$, concluimos que $\pi\omega(\overline{F}_\lambda) < 2^\omega$.

(3) $\overline{F}_\lambda$ es separable. Dado que $c(\overline{F}_\lambda) = c(F_\lambda) \leq \omega$ y $\pi\omega(\overline{F}_\lambda) < 2^\omega$, por el Corolario 2.39, tenemos que $\overline{F}_\lambda$ es separable.

(4) $\overline{F}_\lambda = X$. En efecto, dado que $t^+(X) = \lambda$ y $F_\lambda = \bigcup\{F_\xi : \xi < \lambda\}$, tenemos que $\overline{F}_\lambda = \bigcup\{\overline{F}_\xi : \xi < \lambda\}$. Luego, dado que $\overline{F}_\lambda$ es separable, existe $D \subseteq \overline{F}_\lambda$ denso numerable. Ahora bien, como λ es regular, existe $\xi < \lambda$ tal que $C \subseteq \overline{F}_\xi$. Finalmente, tenemos que $F'_\xi \subseteq F_{\xi+1} \subseteq F_\lambda = \overline{F}_\xi$. Pero para $A \subseteq Y$, ocurre que $A' \subseteq \overline{A}$ sólo cuando $\overline{A} = X$. Así que $\overline{F}_\xi = X$ y por lo tanto $\overline{F}_\lambda = X$.

La demostración está completa. □

Corolario 2.41. (*Juhász [9]*) (AM) *Suponga que X es un espacio topológico con $c(X) = \omega$ y $t^+(X) < 2^\omega$. Si todo subespacio cerrado de X es π–completo y $\pi\chi(X) < 2^\omega$, entonces X es separable.*

Corolario 2.42. (AM+¬HC) *Si X es un espacio compacto de celularidad numerable y $t(X) = \omega$, entonces $d(X) = \omega$.*

Para terminar con esta sección presentamos una lista de problemas para los que hasta el momento, no conocemos respuesta alguna.

1. ¿Para qué tipo de subespacios es hereditaria la π–completez de un espacio?

2. ¿Es productiva la propiedad de π-completez?

3. ¿Las imágenes continuas de espacios π–completos, comparten esta propiedad?

4. ¿Existe alguna relación entre los espacios pseudocompletos (según Oxtoby o Todd) y los π–completos?

5. ¿(AM+¬HC) Si X es un espacio de Lindelöf de celularidad numerable y $t(X) = \omega$, entonces $d(X) = \omega$?.

Capítulo 3

Axioma de Martin y Separabilidad

3.1. Martin–κ–completez

Diversos autores han trabajado en la línea que marcan los resultados vistos en la última sección del capitítulo anterior, particularmente los que conducen a la separabilidad de espacios topológicos. En este capítulo pondremos nuestra atención en esa misma línea, pero de manera unificada. El resultado central de este capítulo es el Teorema 3.13, que entre otras cosas es una especie de teorema fuerte de Baire.

Definición 3.1. *Sea κ un cardinal. Diremos que un espacio topológico X es Martin-κ-completo si existen $\preccurlyeq$, $\mathbf{U}$ tales que*

(i) *$\preccurlyeq$ es un orden parcial sobre los subconjuntos abiertos no vacíos de X definido por $G \prec H$ si $G \subset H$ por lo tanto, $G \preccurlyeq H$ si $G = H$ o $G \prec H$, tal que $G \preccurlyeq H$ implica que $G \subseteq H$ y si $G \subseteq G' \prec H' \subseteq H$, entonces $G \prec H$.*

(ii) *Si G_1, G_2 son conjuntos abiertos y $\emptyset \neq G_1 \subset G_2$, entonces existe un conjunto abierto no vacío H tal que $H \subseteq G_1$ y $H \prec G_2$.*

(iii) *$\mathbf{U}$ es una colección de π–bases para la topología de X.*

(iv) *Si $\mathcal{G}$ es una familia de subconjuntos abiertos no vacíos de X tal que $\mathcal{G}$ es dirigida hacia abajo por $\preccurlyeq$, e intersecta a todos los miembros de $\mathbf{U}$, entonces $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$.*

(v) $|\mathbf{U}| \leq \kappa$.

Si X es Martin-0-completo (es decir, las condiciones anteriores se satisfacen para $\mathbf{U} = \emptyset$). entonces decimos que X es *Martin-completo*. Además, se dirá que X es *Martin-$<\kappa$-completo* si X es Martin-λ-completo para algún $\lambda < \kappa$.

Debido a que las condiciones de la Definición 3.1 pueden resultar extrañas y de *difícil manejo*, a continuación demostramos, de manera explícita (salvo el primero), algunos hechos elementales que además de contribuir a obtener un poco de comprensión de dichas condiciones, serán de gran ayuda, más adelante, en las demostraciones de diversos resultados. Quizas valga la pena verificar algunos hechos elementales de manera explicita. En cada uno, la relación con la que se trabaja está definida sobre los conjuntos abiertos no vacíos de un espacio topológico X.

Proposición 3.2. *Si la relación $\prec$ satisface las propiedades siguientes*

$$G \prec H \to G \subset H, G \subseteq G' \prec H' \subseteq H \to G \prec H,$$

entonces la relación, $\preccurlyeq$, definida

$$G \preccurlyeq H \leftrightarrow G = H \vee G \prec H.$$

es un orden parcial que satisface la condición (i) de la Definición 3.1.

Proposición 3.3. *Si la relación $\preccurlyeq$ satisface (i) y (ii) de la Definición 3.1, entonces para cualesquiera G_1 y G_2 abiertos tales que $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$, existe un abierto no vacío H tal que $H \preccurlyeq G_1$ y $H \preccurlyeq G_2$.*

Demostración. Es claro que el resultado se verifica si $G_1 = G_2$. Si $G_2 \nsubseteq G_1$, entonces $G_1 \cap G_2 \subset G_2$, así que por (ii) de la Definición 3.1, existe un abierto no vacío, H_1 tal que $H_1 \subseteq G_1 \cap G_2$ y $H_1 \prec G_2$. Si $H_1 = G_1$ basta tomar $H = H_1$. Si $H_1 \subset G_1$, aplicamos (ii) de la Definición 3.12, a los conjuntos H_1 y G_1, para encontrar un conjunto abierto no vacío, H, tal que $H \subseteq H_1$ y $H \prec G_1$. Entonces $H \subseteq H_1 \prec G_2$, así que por (i) de la Definición 3.12, concluimos que $H \prec G_2$. Por lo tanto, en este caso, $H \preceq G_1$ y $H \preceq G_2$. □

De los resultados anteriores se sigue que en el conjunto $\mathbb{P}$ de conjuntos abiertos no vacíos de X, los conjuntos vinculados hacia abajo y los centrados hacia abajo, así como las anticadenas descendentes, son los mismos para las relaciones $\preccurlyeq$ y $\subseteq$, También los elementos mínimales de $\mathbb{P}$ son los mismos para ambos órdenes. Esto significa que $\mathbb{P}$ es dirigido hacia abajo por la *c.c.c*, o es centrado dirigido hacia abajo por $\preccurlyeq$ si y sólo si $\mathbb{P}$ tiene la misma propiedad para $\subseteq$, si y sólo si el espacio X es *c.c.c*, o σ-centrado.

Encontramos también que si $\mathcal{U}$ es una π–base para la topología de X (es decir es coinicial con $\mathbb{P}$ respecto a $\subseteq$), entonces $\mathcal{U}$ es coinicial con $\mathbb{P}$ respecto a $\preccurlyeq$. Evidentemente cuando queremos verificar la condición (iv) de la Definición 3.1 basta considerar familias no vacías sin elemento mínimo.

Proposición 3.4. *Sea $\preccurlyeq$ una relación que satisface (i),(ii) de la Definición 3.1. Si $\mathcal{G}$ es una colección de conjuntos abiertos no vacíos sin elemento mínimo, son equivalentes:*

(a) *$\mathcal{G}$ es dirigida hacia abajo por $\preccurlyeq$.*

(b) *$\mathcal{G}$ es dirigida hacia abajo por $\subseteq$ y $\forall\ G \in \mathcal{G}\ \exists\ H \in \mathcal{G}\ H \prec G$.*

(c) *$\mathcal{G}^* = \{H : H \subseteq X$ es abierto, $\exists\ G \in \mathcal{G} H \supseteq G\}$ es dirigida hacia abajo por $\preccurlyeq$.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Sean $G, H \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ es dirigida hacia abajo por $\preccurlyeq$, existe $F \in \mathcal{G}$ tal que $F \preccurlyeq G$ y $F \preccurlyeq H$, así (por (i) de la Definición 3.1), $F \subseteq G$ y $F \subseteq H$. Por lo tanto $\mathcal{G}$ es dirigida hacia abajo por $\subseteq$.

Ahora sea $G \in \mathcal{G}$ abierto y no vacío, entonces existe $x_0 \in G$. Definimos $D = G\backslash\{x_0\}$. Es claro que D es abierto y $D \subseteq G$. Luego, por (ii) de la Definición 3.1, existe H abierto no vacío tal que $H \subseteq D$ y $H \prec G$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Tomemos $H_1,\ H_2 \in \mathcal{G}^*$, entonces existen $G_1,\ G_2 \in \mathcal{G}$ tales que $G_i \subseteq H_i$, $i = 1,\ 2$. Por (b), existen F y $F' \in \mathcal{G}^*$ tales que $F \subseteq G_i$, $i = 1,\ 2$ y $F' \prec F$, y $F' \prec F$. Aplicando (b) a F', existe $K \in \mathcal{G}$ tal que $K \prec F'$, así $K \subseteq F'$, y por tanto $F' \in \mathcal{G}^*$. Finalmente, dado que $K \subseteq F' \prec F \subseteq G$ y $K \subseteq F' \prec F \subseteq H$, concluimos que $K \preccurlyeq G$ y $K \preccurlyeq H$.

$(c) \Rightarrow (a)$ Sean $G, H \in \mathcal{G}$ conjuntos abiertos y no vacíos, entonces $G, H \in \mathcal{G}^*$, así existe $F \in \mathcal{G}^*$ tal que $F \preccurlyeq G$ y $F \preccurlyeq H$. Por otro lado, existe $F' \in \mathcal{G}$ tal que $F' \subseteq F$. De lo anterior tenemos que $F' \subseteq F \preccurlyeq G$, $F' \subseteq F \preccurlyeq H$ con lo cual $F' \subseteq F \subseteq G$ y $F' \subseteq F \subseteq H$. Por lo tanto $F' \prec G$ y

$F^{'} \prec H$, con ello hemos demostrado que $\mathcal{G}$ es dirigida hacia abajo por $\preccurlyeq$.

Del resultado anterior tenemos que si $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}^*$ son como en éste, entonces $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$ si y sólo si $\bigcap \mathcal{G}^* \neq \emptyset$. De este hecho se desprende que la condición (iv) de la Definición 3.1 es equivalente a

$(iv)'$: Siempre que $\mathcal{G}$ sea una colección no vacía de conjuntos abiertos no vacíos dirigida hacia abajo por $\subseteq$ tal que para todo $G \in \mathcal{G}$ existe $H \in \mathcal{G}$, con $H \prec G$ y también para todo $\mathcal{U} \in \mathbf{U}$ existe $G \in \mathcal{G}$ con $U \in \mathcal{U}$ tal que $G \subseteq U$, entonces $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$.

Ahora sea κ un cardinal y sea X un espacio topológico. Un par de cuestiones que emanan inmediatamente de la Definición 3.1 son:

1.- Suponga que, para todo $\lambda < \kappa$, X es Martin–λ–completo. ¿Es X un espacio Martin–κ–completo?, y

2.- ¿Si X es Martin–κ–completo, entonces X es Martin–λ–completo, para todo $\lambda < \kappa$?

El resultado siguiente, entre otras cosas, va en la dirección que marca estas preguntas.

Lema 3.5. *Las afirmaciones siguientes se verifican.*

(a) *Si X es Martin-κ-completo y $\lambda \geq \kappa$, entonces X es Martin–λ–completo.*

(b) *Si X es Martin-ω-completo entonces X es Martin-completo.*

Demostración. (a) Si X es un espacio Martin–κ–completo entonces existen $\preccurlyeq, \mathbf{U}$ tales que satisface las condiciones de la Definición 3.1, entonces tomemos exactamente $\preccurlyeq, \mathbf{U}$ y notemos que $|\mathbf{U}| \leq \kappa \leq \lambda$, con lo cual X es Martin-λ-completo.

(b) Sea X un espacio Martin–ω–completo por lo tanto existen $\preccurlyeq$ y $\mathbf{U}$ que satisfaen las condiciones de la Definición 3.1 de donde $|\mathbf{U}| \leq \omega$.

Si $\mathbf{U} = \emptyset$ entonces claramente X es Martin-completo.

En otro caso podemos expresar a $\mathbf{U}$ como $\mathbf{U} = \{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$.

Para cada conjunto $G \subseteq X$ abierto y no vacío definimos:

$N_G = \{n : n \in \omega, \nexists\, U \in \mathcal{U}_n G \subseteq U\}$ y

$\Theta(G) = \text{mín}(N_G)$ si $N_G \neq \emptyset$ y $\Theta(G) = \omega$ si $N_G = \emptyset$.

Observemos que si G y H son abiertos no vacíos tales que $G \subseteq H$, entonces $\Theta(G) \geq \Theta(H)$. En efecto, si $\Theta(G) = n$, $\Theta(H) = m$ y $n < m$, entonces $n \in N_G$ y para todo $U \in \mathcal{U}_n$ se tiene que $H \subseteq U$, y por tanto $G \subseteq U$. Así $n \notin N_G$ lo cual es una contradicción.

Ahora definimos una relación, $\preccurlyeq_1$, sobre los conjuntos abiertos de X, como sigue: Para G y H, $G \prec_1 H$ si $G \prec H$ y, o bien $\Theta(H) = \omega$ ó $\Theta(G) > \Theta(H)$. Diremos que $G \preccurlyeq_1 H$ si $G = H$ ó $G \prec_1 H$.

Es claro que $\preccurlyeq_1$ satisface la primera parte de (i) en la Definición 3.1. Para la segunda parte, supongamos que $G \subseteq G' \prec_1 H' \subseteq H$. Lo cual implica que $G \subseteq G' \prec H' \subseteq H$, y por tanto $G \prec H$. Resta probar que o bien $\Theta(H') = \omega$ ó $\Theta(H) < \Theta(G)$. Pero, $G' \prec_1 H'$, implica uno de los dos siguientes:

(1) $\Theta(H') = \omega$. En este caso $\Theta(H) = \omega$, y así $G \prec_1 H$.

(2) $\Theta(H') < \Theta(G')$. En este caso tenemos las relaciones siguientes: $\Theta(H) \leq \Theta(H')$, $\Theta(H') < \Theta(G')$ y $\Theta(G') \leq \Theta(G)$; luego, $\Theta(G) > \Theta(H)$; y por tanto $G \prec_1 H$.

A continuación verificamos que la relación $\preccurlyeq_1$ satisface (ii) de la Definición 3.1. Sea $\emptyset \neq G_1 \subset G_2$. Como X es Martin–ω–completo, existe H abierto y no vacío tal que $H \subseteq G_1$ y $H \prec G_2$. Si $\Theta(G_2) = \omega$ entonces $\Theta(H) = \omega$ (pues $H \subseteq G_2$) y entonces $H \subseteq G_1$ y $H \prec_1 G_2$. En el otro caso $\Theta(G_2) = n < \omega$. Como $\mathcal{U}_n$ es π-base, existe $U \in \mathcal{U}_n$ tal que $U \subseteq H$; luego, dado que $U \subseteq H \prec G_2 \subseteq G_2$, tenemos que $U \prec G_2$, y, claramente, $\Theta(U) > \Theta(G_2) = n$, por lo tanto, $U \prec_1 G_2$ y $U \subseteq G_1$.

Veamos, ahora, que la relación dada también satisface la condicion (iv) de la Definición 3.1. Sea $\mathcal{G}$ una familia no vacía de subconjutos abiertos no vacíos, dirigida hacia abajo por $\preccurlyeq_1$ y sin elemento mínimo. Entonces $\mathcal{G}$ es dirigida hacia abajo por $\preccurlyeq$ (y sin elemento mínimo) y, por (c) en la Proposición 3.4, la colección

$$\mathcal{G}^* = \{H : H \text{ es abierto}, \exists\, G \in \mathcal{G}, G \subseteq H\}$$

es dirigida hacia abajo por $\preccurlyeq$.

Afirmación: Existe una sucesión de conjuntos abiertos no vacíos, $\{G_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{G}$, estrictamente decreciente, respecto a $\preccurlyeq_1$, tal que para todo $n \in \omega$, $n \leq \Theta(G_n)$. En efecto, sea $m \in \omega$ y supongamos que para cada $n \leq m$ hemos construido la colección estrictamente decreciente $\{G_m : m \leq n\}$ de tal forma que para cada $n \leq m$, $n \leq \Theta(G_n)$. Por la condición (b) de la

Proposición 3.4, existe $H \in \mathcal{G}$ *tal que* $H \prec_1 G_n$. *Entonces* $H \prec G_n$ *y o bien* $\Theta(H) = \omega$ *ó* $\Theta(G_n) \leq \Theta(H)$. *Luego, basta considerar, en cualquiera de los dos casos a* $G_{n+1} = H$ *y claramente tendremos que* $G_{n+1} \prec_1 G_n$ *y* $\Theta(G_{n+1}) \leq n + 1$. *Lo que demuestra nuestra afirmación.*

De la afirmación anterior (y la definición de Θ*) tenemos que* $\mathcal{G}^*$ *intersecta a todo* $\mathcal{U}_n$ *y por tanto* $\bigcap \mathcal{G}^* \neq \emptyset$*; luego,* $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$.

Por lo tanto X *es Martin-completo.* $\square$

Entre otras cuestiones naturales en el estudio de propiedades en espacios topológicos se encuentran las de analizar si la propiedad en cuestión se hereda a subespacios o si ésta es productiva. El lema que presentamos a continuación nos dice qué pasa respecto a estos dos casos. Recordemos que un subconjunto Y *de un espacio topológico es* G_κ *si* Y *es la intersección de a lo ´más* κ *conjuntos abiertos en* X.

Lema 3.6. *Las afirmaciones siguientes se verifican.*

(a) *Sea* X *un espacio Martin-*κ*-completo y casi regular. Si* Y *es un subespacio denso y* G_κ *de* X*, entonces* Y *es Martin–*κ*-completo.*

(b) *Si para cada* i *en el conjunto de índices* I *tenemos un espacio* X_i *que es Martin–*κ_i*–completo, entonces* $X = \prod_{i \in I} X_i$ *es Martin-*κ*-completo, donde* κ *es el cardinal* $\kappa = \sum_{i \in I} \kappa_i$*. En particular, el producto arbitrario de espacios Martin-completo es Martin-completo, y el producto de a lo más* κ *espacios Martin-*κ*-completos, es Martin-*κ*-completo.*

Demostración. (a) Puesto que X es Martin-κ-completo, existen $\preccurlyeq, \mathbf{U}$ tales que las condiciones en la Definición 3.1 se satisfacen. Denotamos por $\mathcal{I}_Y$ a la topología de Y (como el subespacio de X), y para cada $A \in \mathcal{I}_Y$, definimos

$$W_A = \bigcup \{G : G \subseteq X \text{ abierto}, G \cap Y = A\}.$$

Claramente, para cada $\emptyset \neq A \in \mathcal{I}_Y$ tenemos que $W_A \neq \emptyset$.

Consideremos la relación, $A \preccurlyeq_Y$, definida en $\mathcal{I}_Y \setminus \{\emptyset\}$ como sigue:

$$A \preccurlyeq_Y B \text{ si y sólo si } A = B \text{ ó } A \prec_Y B.$$

Donde $A \prec_Y B$ si y sólo si $W_A \prec W_B$.

Afirmación 1: Para cada $A \in \mathcal{I}_Y$ *se tiene que* $W_A \subseteq \overline{A}$*. En efecto, sea* $x \in W_A$ *y* V *una vecindad de* x*. Dado que* $x \in W_A$ *existe* $U \subseteq X$ *abierto no vacío tal que* $x \in U$ *y* $U \cap Y = A$*, con lo anterior* $x \in U \cap V$ *y además es abierto, así* $U \cap V \cap Y \neq \emptyset$ *(pues* Y *es denso en* X*) de esta manera*

$V \cap U \cap Y \neq \emptyset$, pero $V \cap U \cap Y = V \cap A$ por lo tanto $V \cap A \neq \emptyset$ y de aquí $x \in \overline{A}$.

Ahora nos daremos a la tarea de verificar que la relación $\preccurlyeq_Y$ satisface las condiciones de la Definición 3.1. Supongamos que $A \preccurlyeq_Y B$, entonces $A = B$ o bien $W_A \prec W_B$. Tenemos dos casos:

(i) $A = B$. Claramente $A \subseteq B$.

(ii) $W_A \prec W_B$. Si $x \in A$, entonces $x \in W_a$, pues claramente $A \subseteq W_A$; luego, dado que $W_A \prec W_B$ implica que $W_A \subseteq W_B$ tenemos que $x \in W_B$. De aquí ya es inmediato que $x \in B$ y por tanto $A \subseteq B$.

Para verificar que $H \subseteq H' \prec_Y G' \subseteq G$ implica $H \prec_Y G$ primero mostraremos la siguiente:

Afirmación 2: si $A \subseteq B$ entonces $W_A \subseteq W_B$. En efecto, sea $x \in W_A$, entonces $x \in U$ para algún $U \subseteq X$ abierto tal que $U \cap Y = A$. Sea , $W = U \cup V$, donde V es cualquier abierto en X tal que $V \cap Y = B$. Claramente $x \in W$ y notemos que $W \cap Y = (U \cup V) \cap Y = (U \cap Y) \cup (V \cap Y) = A \cup B = B$, pues $A \subset B$, así $x \in W_B$.

Ahora, si $H \subseteq H' \prec_Y G' \subseteq G$ entonces $H' \prec G'$, además $W_H \subseteq W_{H'}$ y $W_{G'} \subseteq W_G$ y así $W_{H'} \subseteq W_H \prec W_{G'} \subseteq W_G$ entonces $W_H \prec W_G$ y por lo tanto $H \prec_Y G$.

Veamos que la relación dada satisface (ii) de la Definición 3.1. Sean $A, B \in \mathcal{I}_Y$ y $\emptyset \neq A \subset B$. De la Afirmación 2, tenemos que $\emptyset \neq W_A \subset W_B$. Por (ii) de la Definición 3.1, existe un abierto no vacío G tal que $G \subseteq W_A$ y $G \prec W_B$. Como X es casi regular existe $H \subseteq X$ abierto y no vacío tal que $\overline{H} \subseteq G$. Como $H \cap Y \subseteq H$, entonces $\overline{H \cap Y} \subseteq \overline{H} \subset G \prec W_B$ y además, por la Afirmación 1, $W_{H \cap Y} \subseteq \overline{H \cap Y}$; luego, obtenemos que:

$$W_{H \cap Y} \subseteq \overline{H \cap Y} \subseteq G \prec W_B$$

y dado que $H \cap Y \neq \emptyset$, pues Y es denso en X, concluimos que $W_{H \cap Y} \prec W_B$ y $H \cap Y \preccurlyeq_Y B$. También $H \cap Y \subseteq G \cap Y \subseteq A$. por lo tanto $\preccurlyeq_Y$ satisface la condición (ii) de la Definición 3.1.

Para cada $\mathcal{U} \in \mathbf{U}$, sea $\mathcal{U}_Y = \{A : A \in \mathcal{I}_y, \exists\, V \in \mathcal{U}, \overline{A} \subseteq V\}$. y para $H \in \mathcal{H}$ hacemos $\mathcal{V}_H = \{A : A \in \mathcal{I}_Y, \overline{A} \subseteq H\}$.

Afirmación 3: Para todo $\mathcal{U} \in U$, $\mathcal{U}_Y$ es π–base de Y. Fijemos $\mathcal{U} \in U$ y sea V un abierto no vacío en Y. Como X es casi regular y $\mathcal{U}$ es π–base de X, existen A', $V' \in \mathcal{U}$ tales que $\overline{A'} \subseteq V'$ y $\overline{V'} \subseteq V$. Tomemos $A = A' \cap Y$. Dado que Y es denso, temos que $\overline{A} = \overline{A' \cap Y} = \overline{A'} \subseteq V'$, lo que implica que $A \in \mathcal{U}_Y$. Finalmente, dado que $A' \subseteq V'$, tenemos que $A = A' \cap Y \subseteq V' \cap Y = V$. Así, $\mathcal{U}_Y$ es π–base.

Consideremos, ahora, para cada $H \in \mathcal{H}$, $\mathcal{V}_H = \{A : A \in \mathcal{I}_Y, \overline{A} \subseteq H\}$.

Afirmación 4: Para todo $H \in \mathcal{H}$, $\mathcal{V}_H$ *es* π*–base de* Y. *Sea* V *un abierto no vacío en* Y. *Entonces existe un abierto,* V', *en* X *tal que* $V = Y \cap V'$ *La casi regularidad de* X, *garantiza la existencia de un abierto no vacío* A', *en* X, *de tal forma que* $\overline{A'} \subseteq V' \cap H$. *Tomemos* $A = A' \cap Y$. *Dado que* Y *es denso, tenemos que* $\overline{A} = \overline{A' \cap Y} = \overline{A'} \subseteq V' \cap H$, *lo que implica que* $A \in \mathcal{U}_H$. *Finalmente, tenemos que* $A = A' \cap Y \subseteq V' \cap Y \subseteq V$. *Por tanto* $\mathcal{V}_H$ *es* π*-base para* Y. *Sea* $\mathbf{V} = \{\mathcal{U}_Y : \mathcal{U} \in \mathbf{U}\} \cup \{\mathcal{V}_H : H \in \mathcal{H}\}$, *entonces* $\mathbf{V}$ *es una colección de* π*–bases como se requiere en las condiciones* (iii) *y Definición 3.1*(iii).

Resta probar que la relación, $\preccurlyeq_Y$, *satisface la condición* (iv) *de la Definición 3.1. Sea* $\mathcal{G}$ *una coleción que satisface las hipótesis de* (iv) *de la Definición 3.1, y sin elemento mínimo. No es difícil verifcar que la colección* $\mathcal{W} = \{W_A : A \in \mathcal{G}\}$ *es dirigida hacia abajo por* $\preccurlyeq$ *y no tiene elemento mínimo; luego, por la Proposición 3.4, tenemos que* $\mathcal{W}^* = \{V \in \tau_X :$ *existe* $H \in \mathcal{G}$ *tal que* $H \subseteq U\}$ *es dirigida hacia abajo por* $\preccurlyeq$. *Luego, por esa misma proposición, tenemos que, para todo* $H \in \mathcal{W}^*$, *existe* $G \in \mathcal{W}^*$ *tal que* $H \prec G$. *Además, notemos que si* $\mathcal{U} \in \mathbf{U}$, *entonces (por hipótesis), existe* $A \in \mathcal{G} \cap \mathcal{U}_Y$ *y por ello existe* $U \in \mathcal{U}$ *tal que* $\overline{A} \subseteq U$. *Como* $W_A \subseteq \overline{A}$, *concluimos que* $W_A \subseteq U$. *Así* $\emptyset \neq \bigcap \mathcal{W}^* = \bigcap \mathcal{W}$ *(vea* $(iv)'$ *después de la Proposición 3.3).*

Sea $Z = \bigcap\{W_A : A \in \mathcal{G}\}$. *Observemos que si* $H \in \mathcal{H}$ *existe* $A \in \mathcal{G} \cap \mathcal{V}_H$ *tal que* $\overline{A} \subseteq H$. *Luego,* $Z \subseteq W_A$ *y* $W_A \subseteq \overline{A}$ *implican que* $Z \subseteq H$. *Por tanto* $Z \subseteq \bigcap \mathcal{H} = Y$ *y por lo tanto* $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$. *Así,* $\preccurlyeq_Y$, *cumple la condición* (iv) *de la Definición 3.1.*

Con todo, Y *es Martin-*$|\mathbf{V}|$*–completo.*

Si κ *es infinito entonces* $|\mathbf{V}| \leq \kappa$ *y así* Y *es Martin–*κ*–completo. Si* κ *es finito entonces* $\mathbf{V}$ *es finito y* Y *es Martin–*ω*–completo luego es Martin–completo y finalmente Martin–*κ*–completo.*

(b) *Para cada* $i \in I$ *sean* $\preccurlyeq_i$ *y* $\mathbf{U}_i$ *tales que satisfacen las condiciones de la Definición 3.1, para cada* X_i *y* $|\mathbf{U}_i| \leq \kappa_i$.

Un cilindro en X *es un conjunto de la forma* $C = \prod\{C_i : i \in I\}$, *donde* $C_i \subseteq X_i$ *para cada* $i \in I$ *y* $\{i : C_i \neq X_i\}$, *es finito.*

Si G, H *son conjuntos abiertos no vacíos en* X *decimos que:*

$G \prec H$ *si* $G \subset H$ *y existen cilindros en* X, $C = \prod\{C_i : i \in I\}$ *y* $C' = \prod\{C_i' : i \in I\}$ *tales que* C *y* C' *son abiertos en* X *y* $G \subseteq C \subseteq C' \subseteq H$ *y para todo* $i \in I$ *se cumple que* $C_i \prec_i C_i'$ *o bien* $C_i = X_i$ *o* C_i' *es un conjunto abierto minimal no vacío.*

Recordemos que el conjunto abierto minimal para $\preccurlyeq_i$ es el conjunto abierto minimal para $\subseteq$. Decimos que que $G \preccurlyeq H$ si $G = H$ o $G \prec H$.

Verifiquemos que $\preccurlyeq$ satisface las condiciones de la Definición 3.1. Sean G, H abiertos no vacíos tales que $G \preccurlyeq H$, entonces $G = H$ o $G \prec H$, si $G = H$, entonces $G \subseteq H$; en caso que $G \prec H$ existen cilindros abiertos $C, C^{'}$ tales que $G \subseteq C \subseteq C^{'} \subseteq H$ y por tanto $G \subseteq H$.

Es inmediato de la definición de $\prec$ que si $G \subseteq G' \prec H' \subseteq H$, entonces $G \prec H$. En suma, la relación $\preccurlyeq$ satisface (i) de la Definición 3.1.

Para (ii). Supongamos que G y H son conjuntos abiertos en X y que $\emptyset \neq G \subset H$ entonces existe un cilindro abierto $C^{'} \subseteq G$. Sea

$$J = \{i : i \in I, C_i^{'} \neq X_i, C_i^{'} \text{ no es minimal }\}$$

Entonces J es finito. Tomemos un cilindro abierto C tal que

$$\emptyset \neq C_i \prec_i C_i^{'} \ \forall\ i \in J \text{ y } C_i = C_i^{'} \ \forall\ i \in I \backslash J.$$

De aquí se tiene que $C \subseteq C^{'}$ entonces $\emptyset \neq C \subseteq G$ pues $C \subseteq C^{'} \subseteq G$ y dado que $C \subseteq C \subseteq C^{'} \subseteq H$ tenemos que $C \prec H$. Así $\preccurlyeq$ satisface (ii).

Para cada $i \in I$, y cada $\mathcal{U} \in \mathbf{U}_i$, definimos:

$$\mathcal{V}_{\mathcal{U}}^i = \{C : C \subseteq X : \text{ es cilindro abierto y } C_i \in \mathcal{U}\}.$$

Veamos que cada $\mathcal{V}_{\mathcal{U}}^i$ es π–base. En efecto, sea G un abierto en X entonces existe un cilindro abierto C tal que $C \subseteq G$, así $C_i = \pi_i[C]$, de donde C_i es un conjunto abierto en X_i; luego, existe $C_i^* \in \mathcal{U} \in \mathbf{U}$ tal que $C_i^* \subseteq C_i$. definimos el cilindro abierto $C^{'}$ como sigue:

$$C_i^{'} = C_i^* \text{ y } C_j^{'} = C_j \text{ para } j \neq i.$$

Así $C^{'} \in \mathcal{V}_{\mathcal{U}}^i$ y $C^{'} \subseteq G$. Por lo tanto $\mathcal{V}_{\mathcal{U}}^i$ es π-base para X.

Claramente $\mathbf{V} = \{\mathcal{V}_{\mathcal{U}}^i : i \in I, \mathcal{U} \in \mathbf{U}_i\}$. es una colección de π–bases para la topología de X.

Sea $\mathcal{G}$ una colección no vacía de conjuntos abiertos en X, dirigido hacia abajo por $\preccurlyeq$, sin elemento mínimo y que intersecta a todo elemento de $\mathbf{V}$.

Consideremos, para cada $i \in I$,

$$\mathcal{G}_i = \{B \subseteq X_i : B \text{ es abierto, y existe } G \in \mathcal{G}, \pi_i[G] \subseteq B\},$$

donde $\pi_i : X \to X_i$ *es la proyección usual.*

Afirmación 1: Para cada $i \in I$, $\mathcal{G}_i$ *es dirigido hacia abajo por* $\subseteq$. *En efecto, sean* $A_1, A_2 \in \mathcal{G}_i$, *entonces existen* $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ *tales que* $\pi_i[G_1] \subseteq A_1$ *y* $\pi_i[G_2] \subseteq A_2$. *Como* $\mathcal{G}$ *es dirigida hacia abajo entonces existe* $C \in \mathcal{G}$ *el cual satisface que* $C \preccurlyeq G_1$ *y* $C \preccurlyeq G_2$ *lo cual implica que* $C \subseteq G_1$ *y* $C \subseteq G_2$*; luego,* $\pi_i[C] \subseteq \pi_i[G_1] \subseteq A_1$ *y* $\pi_i[C] \subseteq \pi_i[G_2] \subseteq A_2$, *con lo cual* $\pi_i[C] \subseteq A_1 \cap A_2$, *así* $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{G}_i$, *además* $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$ *y* $A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$ *por tanto* $\mathcal{G}_i$ *es dirigida hacia abajo por* $\subseteq$.

Afirmación 2: Para cada $i \in I$, $\bigcap \mathcal{G}_i \neq \emptyset$. *Si* $\mathcal{G}_i$ *tiene elemento mínimo, entonces trivialmente* $\bigcap \mathcal{G}_i \neq \emptyset$. *Supongamos que* $\mathcal{G}_i$ *no tiene elemento mínimo. Tomemos* $B \in \mathcal{G}_i$ *tal que* $B \neq X_i$. *Entonces existe* $H \in \mathcal{G}$ *tal que* $\pi[H] \subseteq B$. *Luego, para tal* H, *existe* $G \in \mathcal{G}$ *tal que* $G \prec H$. *Entonces existen cilindros abiertos* C, C', *para* G *y* H *que satisfacen la definicion de* $\prec$. *Entonces* $C_i' = \pi_i[C'] \subseteq \pi_i[H] \subseteq B$, *así* $C_i' \neq X_i$. *Como* $\pi_i[G] \subseteq C_i'$, *entonces* $C_i' \in \mathcal{G}_i$. *Notemos que* C_i' *no puede ser un conujunto abierto minimal distinto del vacío (pues estamos suponiendo que* $\mathcal{G}_i$ *no tiene elemento mínimo); luego, dado que* $G \subseteq C$, $C_i \in \mathcal{G}_i$ *y* $C_i \prec_i B$. *De esto se sigue (Proposición 3.4–(b)) que* $\mathcal{G}_i$ *es dirigido hacia abajo por* $\preccurlyeq_i$. *Ahora, sea* $\mathcal{U} \in \mathbf{U}_i$. *Como* $\mathcal{G}$ *intersecta a todo elemento de* $\mathbf{V}$, *existe* $C \in \mathcal{G} \cap \mathcal{V}^i_{\mathcal{U}}$. *Entonces* $C_i \in \mathcal{G}_i \cap \mathcal{U}$*; luego,* $\mathcal{G}_i$ *intersecta a todo elemento de* $\mathbf{U}_i$ *y por tanto* $\bigcap \mathcal{G}_i \neq \emptyset$.

Ahora, dado que $\mathcal{G}$ *no tiene elemento mínimo, tenemos que si* $H \in \mathcal{G}$, *existen* $G \in \mathcal{G}$ *y un cilindro abierto* C *tales que* $G \subseteq C \subseteq H$. *En este caso, para todo* $i \in I$, $C_i \in \mathcal{G}_i$. *Así*

$$\emptyset \neq \prod \{\bigcap \mathcal{G}_i : i \in I\} \subset \bigcap \mathcal{G}.$$

Como $\mathcal{G}$ *es arbitrario, cocluimos que la relación* $\preccurlyeq$, *también satisface la condición* (iv) *de la Definición 3.1*(iv).

Entonces X *es Martin–*$|\mathbf{V}|$*–completo. Pero* $|\mathbf{V}| \leq \sum_{i \in I} |\mathbf{U}_i| \leq \kappa$, *así* X *es Martin-*κ*-completo.*

□

Ejemplo 3.7. *Un espacio casi-regular y localmente compacto es Martin–completo. En particular un espacio Hausdorff compacto es Martin–completo.*

Demostración. Consideremos la relación $\prec$, definida como sigue: Para conjuntos abiertos G y H, $G \prec H$ si $\overline{G}$ es compacto y $\overline{G} \subseteq H$. Ahora definimos $\preccurlyeq$ como sigue: $G \preccurlyeq H$ si y sólo si $G = H$ ó $G \prec H$. A continuación veremos que esta relación satisface las condiciones $(i), (ii), (iv)$ de la Definición 3.1.

(i) Sean G, H conjuntos abiertos y no vacíos tales que $G \preccurlyeq H$ entonces $G = H$ ó $G \prec H$. Si $G = H$ entonces claramente $G \subseteq H$; si $G \prec H$ entonces $\overline{G} \subseteq H$ y como $G \subseteq \overline{G}$ se tiene que $G \subseteq H$.

Ahora si $G \subseteq G^{'} \prec H^{'} \subseteq H$ entonces $\overline{G^{'}}$ es compacto y $\overline{G^{'}} \subseteq H^{'}$. Como $G \subseteq G^{'}$ entonces $\overline{G} \subseteq \overline{G^{'}} \subseteq H^{'} \subseteq H$ con lo cual $\overline{G} \subseteq H$ y $\overline{G}$ es un subconjunto cerrado del conjunto compacto $\overline{G^{'}}$ por lo tanto $\overline{G}$ es compacto y así $G \prec H$.

(ii) Sean A, B conjuntos abiertos para los cuales $\emptyset \neq A \subset B$. Como $A \neq \emptyset$ tomemos $x \in A$, así A es una vecindad de x y como X es localmente compacto existe un conjunto abierto U tal que $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq A$ y $\overline{U}$ es compacto, por tanto $U \subseteq A$ y dado que $A \subset B$ entonces $\overline{U} \subseteq B$ y $\overline{U}$ es compacto lo cual implica que $U \prec B$.

(iv) Sea $\mathcal{G}$ una familia no vacía de conjuntos abiertos no vacíos dirigida hacia abajo por $\preccurlyeq$ y sin elemento mínimo., Mostremos que $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Claramente la colección $\{\overline{G} : G \in \mathcal{G}\}$ la cual tiene la propiedad de la intersección finita. Como $\mathcal{G}$ es dirigida hacia abajo, podemos elegir $G_0 \in \mathcal{G}$ tal que $\overline{G_0}$ es compacto. Sea $\mathcal{G}_0 = \{\overline{G} : G \prec G_0 \text{ y } G \in \mathcal{G}\}$. Evidentemente $\mathcal{G}_0$ es una colección de conjuntos cerrados en el compacto $\overline{G_0}$ que tiene la $p.i.f.$ (pues $\mathcal{G}$ es dirigida hacia abajo); luego, $\bigcap \mathcal{G}_0 \neq \emptyset$. Veamos que $\bigcap \mathcal{G}_0 \subseteq \bigcap \mathcal{G}$. En efecto, sean $x \in \bigcap \mathcal{G}_0$ y $G \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ es dirigida hacia abajo existe $G^{'} \in \mathcal{G}$ tal que $G^{'} \preccurlyeq G_0$ y $G^{'} \preccurlyeq G$. Para tal $G^{'}$ existe $G^{''} \in \mathcal{G}$ tal que $G^{''} \prec G^{'}$, así $G^{''} \prec G^{'} \subseteq G_0$ y $G^{''} \prec G^{'} \subseteq G$, por tanto $G^{''} \prec G_0$ y $G^{''} \prec G$; luego entonces $\overline{G^{''}} \in \mathcal{G}_0$ y en consecuencia $x \in \overline{G^{''}}$ y $\overline{G^{''}} \subseteq G$, pues $G^{''} \prec G$ de lo anterior se tiene que $x \in G$ y por lo tanto $x \in \bigcap \mathcal{G}$. De esta manera $\emptyset \neq \bigcap \mathcal{G}_0 \subseteq \bigcap \mathcal{G}$, y en consecuencia $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Con todo, X es Martin–completo □

Ejemplo 3.8. *Se dice que un espacio topológico X es absoluto G_κ si X es homeomorfo a un subespacio de un espacio Hausdorff y compacto el cual es expresable como la intersección de a lo más κ conjuntos abiertos* (*los espacios Čech–completos son, por ejemplo, G_ω–absolutos*). *Se sigue del Lema 3.6 que todo espacio G_κ–absoluto es Martin-κ-completo; un espacio metrico completo es Martin-completo.*

Recordemos que un espacio X es compacto–base si existe una base $\mathcal{U}$ para la topología de X tal que si

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{U} \text{ tiene la } pif \text{ entonces } \bigcap\{\overline{U} : U \in \mathcal{U}\} \neq \emptyset.$$

Un espacio casi regular X es casi–subcompacto si existe una π–base $\mathcal{U}$ para la topología de X tal que siempre que

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{U} \text{ que satisface que para cualesquiera } G_1, G_2 \in \mathcal{G}, \text{ existe } G \in \mathcal{G},$$
$$\overline{G} \subseteq G_1 \cap G_2, \text{ entonces } \bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset.$$

Claramente un espacio compacto-base es casi-subcompacto.

Ejemplo 3.9. *Los espacios compacto-base y los espacios casi-subcompactos son Martin-completos.*

Demostración. Supongamos que X es casi–subcompacto y que $\mathcal{U}$ es una π–base que lo atestigua. Definimos $\preccurlyeq$, como sigue:

$$G \preccurlyeq H \text{ si } G = H \text{ o existe } U \in \mathcal{U},\ G \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq H.$$

Veamos que la relación, $\preccurlyeq$, satisface las condiciones de la Definición 3.1.

(i) Si G y H son abiertos no vacíos en X tales que $G \preccurlyeq H$, entonces $G = H$ o $\exists\ U \in \mathcal{U}$, $G \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq H$. En cualquiera de los dos casos $G \subseteq H$.

(ii) Consideremos conjuntos abiertos A y B tales que $\emptyset \neq A \subset B$. Como X es casi regular existe $V \subseteq X$ abierto no vacío tal que $V \subseteq \overline{V} \subseteq A$; además, como $\mathcal{U}$ es π–base, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subseteq V$ y como consecuencia $\overline{U} \subseteq \overline{V}$. Luego, $U \subseteq \overline{U} \subseteq \overline{V} \subset A$ y como $A \subseteq B$, entonces $U \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq B$ y por lo tanto $U \subseteq A$ y $U \prec B$.

(iv) Sea $\mathcal{G}$ una familia no vacía de conjuntos abiertos no vacíos que es dirigida hacia abajo por $\preccurlyeq$ y sin elemento mínimo. Definimos:

$$\mathcal{G}' = \{U : U \in \mathcal{U},\ \exists\ G \in \mathcal{G},\ G \subseteq U\}.$$

Notemos que si $U_1, U_2 \in \mathcal{G}'$, entonces existen $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ tales que $G_1 \subseteq U_1$ y $G_2 \subseteq U_2$; luego, dado que $\mathcal{G}$ es dirigida hacia abajo existe $G' \in \mathcal{G}$ tal que $G' \subseteq G_1$ y $G' \subseteq G_2$, entonces $G' \subseteq G_1 \cap G_2 \subseteq A_1 \cap A_2$ y para G' existe $G'' \in \mathcal{G}$ tal que $G'' \prec G'$ y por tanto existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $G'' \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq G'$ de donde $U \in \mathcal{G}'$, además $\overline{U} \subseteq G' \subseteq U_1 \cap U_2$. Así, dado que X es casi–subcompacto $\bigcap \mathcal{G}' \neq \emptyset$.

Afirmación: $\bigcap \mathcal{G}' \subseteq \bigcap \mathcal{G}$. *En efecto, sean $x \in \bigcap G'$ y $G \in \mathcal{G}$, como $\mathcal{G}$ es dirigida hacia abajo existe $G' \in \mathcal{G}$ tal que $G' \prec G$, y en consecuencia $G' \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq G$ para algún $U \in \mathcal{U}$, así $U \in \mathcal{G}'$ y por lo tanto $x \in U$ por consiguiente $x \in G$ pues $U \subseteq G$, esto muestra que $x \in \bigcap \mathcal{G}$. Como $\bigcap \mathcal{G}' \neq \emptyset$*

se tiene que $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$.

Con todo, X es Martin–completo. $\square$

Se dice que un espacio topológico (X, τ) es co–metrizable si existe una topología, τ', sobre X la cual es metrizable y separable y tal que:

1. *$\tau' \subseteq \tau$,*

2. *Cada punto de X tiene una base de vecindades para τ consistente de τ'–cerrados.*

Si la topología τ' es una topología polaca, diremos que X es co–polaco.

Ejemplo 3.10. *Un espacio co-polaco es Martin-completo.*

Demostración. Sea $(X, \mathcal{I})$ un espacio co-polaco, y sea $\mathcal{C}$ la topología polaca asociada a X. Para $G, H \in \mathcal{I}$ no vacíos diremos que $G \preccurlyeq H$ si $G = H$ o $cl_{(X,\mathcal{C})}G \subseteq H$. No es difícil verificar que la relación $\preccurlyeq$ satisface las condiciones $(i) - (ii)$ de la Definición 3.1. Ahora, para $n \in \omega$, sea

$$\mathcal{U}_n = \{G : G \in \mathcal{I} \backslash \{\emptyset\}, \text{diám}(G) \leq 2^{-n}\}$$

donde diám (G) es el diámetro de G para una métrica completa $\mathcal{C}$ definida. Entonces cada $\mathcal{U}_n$ es una π–base para $\mathcal{I}$. Además, también tenemos que $\preccurlyeq$ y $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ satisfacen la condición (iv) en la Definición 3.1. Esto demuestra que X es Martin–ω–completo en $\mathcal{I}$; luego, por el Lema 3.5 (b), X es Martin–completo. $\square$

Antes de presentar el resultado siguiente, presentamos la siguiente definición.

Definición 3.11. *Sea $\mathbb{P}$ un conjunto parcialmente ordenado y $R \subseteq \mathbb{P}$. Diremos que:*

1. *R es una anticadena hacia arriba en $\mathbb{P}$ si cualesquiera dos elementos distintos de R no tienen una cota superior común en $\mathbb{P}$.*

2. *$\mathbb{P}$ es ccc-hacia arriba, si toda anticadena hacia arriba en $\mathbb{P}$ es numerable.*

3. *R es ligado hacia arriba si todo par de elementos de R tiene una cota superior en P.*

4. *$\mathbb{P}$ satisface la condición de Knaster hacia arriba si, para cualquier $R \subseteq \mathbb{P}$, no numerable, existe un subconjunto no numerable $R' \subseteq R$ el cual es dirigido hacia arriba.*

Lema 3.12. *Sea $\mathbb{P}$ un orden parcial que satisface la condicion de Knaster hacia arriba. Sean $\mathcal{D}$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ familias de subconjuntos de $\mathbb{P}$ tales que:*

- $|\mathcal{D}| < \mathfrak{m}_k$, $|\mathcal{R}| < \mathfrak{m}_k$, $|\mathcal{S}| < \mathfrak{m}_k$;
- *todo elemento de $\mathcal{D}$ es cofinal en $\mathbb{P}$;*
- $S \cap \bigcap R_0 \neq \emptyset$ *para todo* $S \in \mathcal{S} \cup \{\mathbb{P}\}$, $R_0 \subseteq \mathcal{R}$ *finito.*

Entonces existe una sucesión $\{P_i\}_{i\in\omega}$ de subconjuntos de $\mathbb{P}$ tal que:

(α) *Para todo $i \in \omega$, P_i es no vacío y dirigido hacia arriba;*

(β) *Para todo $i \in \omega$, $P_i \cap Q \neq \emptyset$, $Q \in \mathcal{D}$;*

(γ) *si $R \in \mathcal{R}$, $\{i : P_i \cap R = \emptyset\}$ es finito;*

(δ) *si $S \in \mathcal{S}$, $\{i : P_i \cap S \neq \emptyset\}$ es infinito.*

Demostración. (a) Sea $\mathcal{R}^* = \{\mathbb{P} \cap \bigcap R_0 : R_0 \in [\mathcal{R}]^{<\omega}\}$. Entonces $\mathbb{P} \in \mathcal{R}^*$, $\emptyset \notin \mathcal{R}^*$, $R \cap R' \in \mathcal{R}^*$ siempre que $R, R' \in \mathcal{R}^*$. En efecto, si $R, R' \in \mathcal{R}^*$ entonces $R = \mathbb{P} \cap \bigcap R_1$ y $R' = \mathbb{P} \cap \bigcap R_2$ para $R_1, R_2 \subseteq \mathcal{R}$, $|R_1| < \omega$ y $|R_2| < \omega$. Entonces $R \cap R' = (\mathbb{P} \cap \bigcap R_1) \cap (\mathbb{P} \cap \bigcap R_2) = \mathbb{P} \cap (R_1 \bigcap R_2)$ donde $R_1 \bigcap R_2 \subseteq \mathcal{R}$ y $|R_1 \bigcap R_2| < \omega$. Además $R \cap S \neq \emptyset$ siempre que $R \in \mathcal{R}^*$ y $S \in \mathcal{S}$.

Para $R \in \mathcal{R}^*$ sea $\hat{R} = \{q : \exists\, p \in R, p \leq q\}$.

Para cada $n \in \omega$, definimos $F_n = \{(\langle p_i \rangle_{i \leq n}, R_n) : p_i \in \mathbb{P}, R_n \in \mathcal{R}^*\}$, y sea $X = \bigcup\{F_n : n \in \omega\}$. Notemos que con esta notación, $x \in X$ implica que existe $n(x) \in \omega$ tal que $x \in F_{n(x)}$.

Para $x, y \in X$ definimos $\preccurlyeq$ como sigue: $x \preccurlyeq y$ si y sólo si

1. $n(x) \leq n(y)$,
2. si $i \leq n(x)$ entonces $p_i^x \leq p_i^y$,

3. $p_i^y \in \hat{R}_{n(x)}$ para $n(x) < i \leq n(y)$, y

4. $R_{n(y)} \subseteq R_{n(x)}$.

No es difícil verificar que $\preccurlyeq$ es un orden parcial en X.

(b) Veamos que X satisface la condicion de Knaster hacia arriba. Sea $Y \subseteq X$ no numerable definimos $Y_n = \{y : y \in Y, n(y) = n\}$, por lo tanto podemos expresar a Y como $Y = \bigcup\{Y_n : n \in \omega\}$. Entonces existe $m_0 \in \omega$ tal que $Y^{'} = \{y \in Y : n(y) = m_0\}$ es no numerable. Para $i \leq m_0$ definimos Y_i de manera inductiva y tal que Y_i es no numerable, de la siguiente manera:

$$Y_0 \subseteq Y^{'},\ Y_i \subseteq Y_{i-1} \text{ para } i > 0;$$

si $x, y \in Y_i$ entonces para p_i^x, p_i^y existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $p_i^x < q$ y $p_i^y < q$, puesto que $\mathbb{P}$ satisface la condición de Knaster hacia arriba. Ahora si $x, y \in Y_m$, podemos encontrar una sucesión finita $\{q_i\}_{i<m_0}$ tal que $p_i^x < q_i$, $p_i^y < q_i$ para cada $i \leq m_0$ y así $z = (\langle q_i\rangle_{i\leq m_0}, R_{n(x)} \cap R_{n(y)})$ es tal que $x \leq z$ y $y \leq z$. Así Y_{m_0} es ligado hacia arriba y como Y es arbitrario concluimos que X satisface la condición de Knaster hacia arriba.

(c) Para cada $m \in \omega$, $Q \in \mathcal{D} \cup \{\mathbb{P}\}$ definimos

$$T_{Qm} = \{x : x \in X, n(x) \geq m, p_m^x \in Q\};$$

Afirmación T_{Qm} es cofinal en X. En efecto, sea $x \in X$, debemos hallar $z \in T_{Qm}$ tal que $x \preccurlyeq z$. Si $m \leq n(x)$ tomamos $x = y$. Si $m > n(x)$, entonces tomamos $r \in R_{n(x)}$ y definimos a y como sigue:
Si $i \leq n(x)$ consideramos $p_i^y = p_i^x$, y para $n(x) < i \leq m$, tomamos $p_i^y = r$ y, finalmente, hacemos $R_{n(y)} = R_{n(x)}$. Con todo, tenemos que $y = (\langle p_i^y\rangle_{i\leq m}, R_{n(y)})$. Notemos que en cualquiera de los dos casos se tiene que $x \leq y$ y $n(y) \geq m$. Ahora dado que Q es cofinal en $\mathbb{P}$ existe un $q \in Q$ tal que $q \geq p_m^y$. Ahora definimos a z como sigue:

Si $i \leq n(y)$ consideramos $p_i^z = p_i^y$, y para $i \neq m$, tomamos $p_i^z = q$ y $R_z = R_y$.

$p_i^y = r$ y, finalmente, hacemos $R_{n(y)} = R_{n(x)}$; esto es $z = (\langle p_i^z\rangle_{i\leq m}, R_{n(z)})$. Claramente $z \in T_{Qm}$ y $x \preccurlyeq y \preccurlyeq z$ por lo tanto T_{Qm} es cofinal con X.

(d) Para cada $R \in \mathcal{R}$, definimos $U_R = \{x \in X : R_x \subseteq R\}$.

Notemos que, para cada $R \in \mathcal{R}$, U_R *es cofinal con* X, *pues si* $x \in X$, *entonces* $x \leq (\langle p_i^x \rangle_{i \leq n(x)}, R_{n(x)} \cap R) \in U_R$.

(*e*) *Para cada* $S \in \mathcal{S}$ *y* $m \in \omega$, *definimos* $V_{Sm} = \{x \in X : \text{ existe } m \leq i \leq n(x), p_i^x \in S\}$. *Veamos que cada* V_{Sm} *es cofinal con* X. *En efecto, si* $x \in X$, *entonces existe* $r \in R_x \cap S$. *Consideremos, para cada* $i \leq n(x)$, $p_i^y = p_i^x$ *y para* $n(x) < i \leq \max\{m, n(x)+1\}$, $p_i^y = r$. *Entonces* $y = (\langle p_i^y \rangle_{i \leq n(y)}, R_{n(x)} \in V_{Sm}$; *donde* $n(y) = \max\{m, n(x)+1\}$ *satisface que* $x \leq y$.

(*f*) *Puesto que* $\mathcal{D}$, $\mathcal{R}$ *y* $\mathcal{S}$ *tienen cardinalidad menor que* $\mathfrak{m}_k$, *existe* $Z \subseteq X$ *dirigido hacia arriba, tal que* $T_{Qm} \cap Z \neq \emptyset$, $U_R \cap Z \neq \emptyset$ *y* $V_{Sm} \cap Z \neq \emptyset$, *para cada* $Q \in \mathcal{D} \cup \{\mathbb{P}\}$, $R \in \mathcal{R}$, $S \in \mathcal{S}$ *y* $m \in \omega$.

Sea $P_i = \{p \in \mathbb{P} : \text{ existe } z \in Z \text{ tal que } n(z) \geq i \text{ y } p \leq p_i^z\}$. *Veamos que la sucesión* $\{P_i : i \in \omega\}$ *satisface lo deseado.*

(α) *Como* $Z \cap T_{Pi} \neq \emptyset$, *tenemos que* $P_i \neq \emptyset$. *Además, si* $p,\ q \in P_i$ *existen* $x,\ y \in Z$ *tales que* $n(x) \geq i$, $n(y) \geq i$, $p \leq p_i^x$ *y* $q \leq p_i^y$. *Ahora bien,* x *y* y *tiene una cota superior común* $z \in Z$; *luego,* $n(z) \geq i$ *y* $p_i^z \in P_i$ *es una cota superior para* p_i^x, p_i^y, p *y* q. *Por lo tanto,* P_i *es dirigido hacia arriba.*

(β) *Si* $Q \in \mathcal{D}$ *e* $i \in \omega$, *existe* $z \in Z \cap T_{Qi}$. *Entonces* $n(z) \geq i$ *y* $p_i^z \in P_i \cap Q$. *Así* $P_i \cap Q \neq \emptyset$.

(γ) *Si* $R \in \mathcal{R}$, *entonces existe* $z \in Z \cap U_R$. *Si* $i > n(z)$, *entonces existe* $x \in T_{pi} \cap Z$. *Sea* y *una cota superior común para* x *y* z *en* Z. *Entonces* $n(y) \geq n(x) \geq i > n(z)$, *así* $p_i^y \in \hat{R}_z$. *Sea* $r \in R_z$ *tal que* $r \leq p_i^y$, *entonces* $r \in P_i \cap R_z \subseteq P_i \cap R$. *Luego, para todo* $i > n(z)$, $P_i \cap R \neq \emptyset$, *y* $\{i \in \omega : P_i \cap R \neq \emptyset\}$ *is finito.*

(δ) *Si* $s \in \mathcal{S}$, *y* $m \in \omega$. *entonces existe* $z \in Z \cap V_{Sm}$. *Entonces existe* $i \in \omega$ *tal que* $m \leq i \leq n(z)$ *y* $p_i^z \in S$. *Luego,* $P_i \cap S \neq \emptyset$. *Así, dado que* m *fue arbitrario, tenemos que* $\{i \in \omega : P_i \cap S \neq \emptyset\}$ *es infinito.*

La prueba está completa. □

Para cardinales κ, *denotamos* MAK(κ), *a la afirmación: Si* $\mathbb{P}$ *es un orden parcial no vacío el cual satisface la condición de Knaster hacia arriba, y* $\mathcal{D}$ *es una familia de subconjuntos cofinales de* $\mathbb{P}$ *con* $|\mathcal{D}| \leq \kappa$, *entonces existe un subconjunto dirigido hacia arriba,* P, *el cual intersecta a todo elemento de* $\mathcal{D}$.

Teorema 3.13. *Sea* X *un espacio con la c.c.c. y Martin–*$<\mathfrak{m}$*–completo. Si* $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, *y* $\mathcal{V}$ *son familias de subconjuntos abiertos de* X *tales que*

(*i*) $|\mathcal{G}| < \mathfrak{m}$, $|\mathcal{H}| < \mathfrak{m}$, $|\mathcal{V}| < \mathfrak{m}$, *(ii) todo elemento de $\mathcal{V}$ es denso en X, y*

(iii) $H \cap \bigcap \mathcal{G}_0 \neq \emptyset$ $\forall$ $H \in \mathcal{H} \cup \{X\}$ finito y $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}$,

entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$ en $X \cap \bigcap \mathcal{V}$ tal que:

(a) *$\forall$ $G \in \mathcal{G}$, $\{n : x_n \notin G\}$ es finito.*

(b) *$\forall$ $H \in \mathcal{H}$, $\{n : x_n \in H\}$ es infinito.*

Demostración. **(a)** Tomemos $\preccurlyeq$, $\mathbf{U}$ tales que satisfacen las condiciones de la Definición 3.1, con $|\mathbf{U}| < \mathfrak{m}$. Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de conjuntos abiertos no vacíos en X, ordenados por $\preccurlyeq$. Entonces $\mathbb{P}$ es *c.c.c.* y dirigido hacia abajo. Para cada $G \in \mathbb{P}$ definimos $Q_G = \{E \in \mathbb{P} : E \subseteq G\}$.

(b) Sea $\mathcal{D} = \mathbf{U} \cup \{Q_V : V \in \mathcal{V}\}$. Entonces todo elemento de $\mathcal{D}$ es una π–base. En efecto, claramente sólo debemos mostrar tal afirmación para la colección $\{Q_V : V \in \mathcal{V}\}$. Sea $V_0 \in \mathcal{V}$ arbitrario y tomemos un abierto no vacío, B, en X. Entonces $V_0 \cap B \neq \emptyset$, pues V_0 es denso en X. Además, dado que V_0 es abierto, tenemos que $B \cap V_0$ es un abierto en X; más aún $V_0 \cap B \subseteq V_0$ y $V_0 \cap B \subseteq B$ con lo cual $V_0 \cap B \in Q_{V_0}$ y así Q_{V_0} es π–base. Por tanto $\mathcal{D}$ es coinicial

Sean $\mathcal{R} = \{Q_G : G \in \mathcal{G}\}$, $\mathcal{S} = \{Q_H : H \in \mathcal{H}\}$.

Notemos que (por *(iii)*), si $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}$ es finito y $H \in \mathcal{H} \cup \{X\}$ entonces

$$H \cap \bigcap \mathcal{G}_0 \in Q_H \cap \bigcap \{Q_G : G \in \mathcal{G}_0\}.$$

Así, si $\mathcal{G}_0 \in [\mathcal{G}]^{<\omega}$ y $H \in \mathcal{H} \cup \{X\}$, entonces $Q_H \cap \bigcap \{Q_G : G \in \mathcal{G}_0\} \neq \emptyset$. De donde $S \cap \bigcap \mathcal{R}_0 \neq \emptyset$ para todo $S \in \mathcal{S} \cup \{\mathbb{P}\}$ y $\mathcal{R}_0 \in \mathcal{R}$.

(c) Del el Lema 3.12, existe una sucesión $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de $\mathbb{P}$ tal que

(α) todo P_n es no vacío es dirigida hacia abajo por $\preccurlyeq$

(β) $P_n \cap Q_V \neq \emptyset$, $P_n \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, $V \in \mathcal{V}$, $\mathcal{U} \in \mathbf{U}$

(γ) $\{n : P_n \cap Q_G = \emptyset\}$ es finito, $\forall$ $G \in \mathcal{G}$

(δ) $\{n : P_n \cap Q_H \neq \emptyset\}$ es infinito, $\forall$ $H \in \mathcal{H}$

Entonces, para cada $n \in \omega$, $\bigcap P_n \neq \emptyset$ (puesto que $\preccurlyeq$ y $\mathbf{U}$ satisfacen la condición (iv) de la Definición 3.1). Así, para cada $n \in \omega$, fijamos $x_n \in \bigcap P_n$.

Afirmación. Si $P_n \cap Q_V \neq \emptyset$ entonces $x_n \in V$. En efecto si $P_n \cap Q_V \neq \emptyset$ entonces existe $U \in P_n \cap Q_V$ lo cual implica que $x_n \in U \subseteq V$. De aquí se sigue que para todo $n \in \omega$, $x_n \in \bigcap \mathcal{V}$. Entonces

- $\{n : x_n \notin G\} \subseteq \{n : P_n \cap Q_G = \emptyset\}$ es finito, $\forall\ G \in \mathcal{G}$
- $\{n : x_n \in H\} \supseteq \{n : P_n \cap Q_H \neq \emptyset\}$ es infinito, $\forall\ H \in \mathcal{H}$

Por lo tanto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene las propiedades requeridas.

□

Corolario 3.14. *Sea X un espacio con la c.c.c. y Martin-$<$ $\mathfrak{m}$-completo.*

(a) *la intersección de a lo más $\mathfrak{m}$ conjuntos densos abiertos en X es denso.*

(b) *Si $\pi w(X) < \mathfrak{m}$, entonces X es separable.*

(c) *Si $\omega < cf(\kappa) \leq \kappa < \mathfrak{m}$, entonces κ es un calibre de X.*

Demostración. **(a)** Sean $\mathcal{V}$ una familia de menos que $\mathfrak{m}$ conjuntos abiertos densos en X. Tomemos, V, un abierto no vacío y consideremos $\mathcal{G} = \emptyset$, $\mathcal{H} = \{V\}$. Del Teorema 3.13, aplicado a $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{V}$, obtenemos que existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$ en $X \cap \bigcap \mathcal{V}$ tal que (a) y (b) de dicho teorema se verifican. Luego, por (b), tenemos que $V \cap (\bigcap \mathcal{V})$. Por tanto $\bigcap \mathcal{V}$, es denso en X.

(b) $\mathcal{H}$ una π–base patra X, con $|\mathcal{H}| < \mathfrak{m}$. Por el Teorema 3.13, aplicado a las familias $\mathcal{H}$ y $\mathcal{G} = \mathcal{V} = \emptyset$, tenemos que existe una sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$, la cual verifica las condiciones (a) y (b) de dicho teorema. De aquí se sigue, usando (b) y el hecho de que $\mathcal{H}$ es π–base, que $D = \{x_n : n \in \omega\}$ es denso en X, y por ende X es separable, ¿será densa en X?

(c) Sea $\{H_\xi\}_{\xi<\kappa}$ una familia de conjuntos abiertos no vacios. Por el Teorema 3.13, aplicado a las familias $\mathcal{H}$ y $\mathcal{G} = \mathcal{V} = \emptyset$, tenemos que existe una sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$, la cual verifica las condiciones (a) y (b) de dicho teorema. Puesto que $\omega < cf(\kappa)$, tenemos que existe $n_0 \in \omega$ tal que $|\{\xi : x_n \in H_\xi\}| = |\mathcal{H}|$. Por tanto κ es calibre de X.

□

Antes de ver el resultado siguiente presentamos una definición y un resultado que será de utilidad en la prueba del mismo.

Definición 3.15. *Sean X y Y espacios topológicos. Una funcion f de X sobre Y es continua si para todo $A = \overline{A}$, $f(A) \neq Y$.*

Proposición 3.16. *Si $f : X \to Y$ es continua y sobreyectiva tal que para todo $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\})$ es compacto, entonces existe $X_0 \subseteq X$ con $\overline{X}_0 = X_0$ tal que $f(X_0) = Y$ y $f|_{X_0}$ es irreducible.*

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : F = \overline{F}, f(F) = Y\}$ ordenado por la contención. Veamos que toda cadena en $\mathcal{F}$ es acotada inferiormente en $\mathcal{F}$. En efecto sea $\mathcal{C}$ una cadena en $\mathcal{F}$ y llamemos $F_{\mathcal{C}} = \bigcap\{F : F \in \mathcal{C}\}$ claramente $F_{\mathcal{C}}$ es cerrado y ahora veamos que $f(F_{\mathcal{C}}) = Y$. Supongamos que $Y \backslash f(F_{\mathcal{C}}) \neq \emptyset$ y fijemos $y_0 \in Y \backslash f(F_{\mathcal{C}})$. Por hipótesis $B = f^{-1}(\{y_0\})$ es compacto. Además $B \subseteq X \backslash \bigcap\{F : F \in \mathcal{C}\}$ en efecto pues si para algún $b \in B$, $b \in \bigcap\{F : F \in \mathcal{C}\}$ entonces $y_0 = f(b)$ para todo $F \in \mathcal{C}$ entonces $y_0 \in f(F_{\mathcal{C}})$ lo cual es contradicción. Pero $X \backslash \bigcap\{F : F \in \mathcal{C}\} = \bigcup\{(X \backslash F) : F \in \mathcal{C}\}$. Como B es compacto existen $\{F_1, F_2, ..., F_n\} \in \mathcal{C}$ tales que $B \subseteq \bigcup\{(X \backslash F_i) : i \in \{1, 2, ..., n\}\}$. Sea F_{n_0} tal que para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $F_{n_0} \subseteq F_i$. Entonces $B \subseteq (X \backslash F_{n_0})$, de aqui que para todo $b \in B$ se tiene que $b \notin \overline{F_{n_0}} = F_{n_0}$ (pues $b \in (X \backslash F_{n_0})$ y $(X \backslash F_{n_0}) \cap F_{n_0} = \emptyset$) de donde $B \cap \overline{F_{n_0}} = \emptyset$ lo cual es una contradicción (pues para todo $x \in F_{n_0}$ se tiene $f(x) \neq y_0$ es decir $y_0 \notin f(F_{n_0}) = Y$) por lo tanto $F_{\mathcal{C}} \in \mathcal{F}$ y para todo $F \in \mathcal{C}$ se tiene $F_{\mathcal{C}} \subseteq F$ y así toda cadena tiene elemento minimal con ello $\mathcal{F}$ tiene elemento minimal digamos X_0 y claramente $X_0 = \overline{X_0}$ y $f(X_0) = Y$. Veamos que $f|_{X_0}$ es irreducible, en efecto pues si $F \subseteq X_0$ en X_0 y $f(F) = Y$ por la minimalidad de X_0, $F = X_0$.

$\square$

Proposición 3.17. *Sea X un espacio Hausdorff compacto. Entonces*

(i) $\pi w(X) \leq \max\{t^+(X), s(X)\}$;

(ii) *Si κ es un calibre de X y $t^+(X) \leq cf(\kappa)$, entonces $\pi w(X) < \kappa$;*

Demostración. Haremos, simultáneamente, las pruebas de (i) y(ii). Sea $\lambda = \max(t^+(X), hc(X))^+$ para la parte (i) y $\lambda = cf(\kappa)$ para la parte (ii).

Supongamos que $\pi w(X) \geq \lambda$. A continuación, vamos a construir una sucesión $\{g_\xi : \xi < \lambda\}$, de funciones $g_\xi : X \to [0,1]$, para $\xi < \lambda$ y una colección $\{G_\xi : 0 < \xi < \lambda\}$; de tal forma que:

1. Para cada $\xi < \lambda$, $g_\xi : X \to [0,1]$, es continua y no constante, y
2. Para cada $0 < \xi < \lambda$, $0 \notin g_\xi(X \setminus G_\xi)$

Sea $\xi < \lambda$ y supongamos que hemos construido, para cada $\eta < \xi$, a g_η y G_η de tal forma que (1) y (2) se verifican. Pongamos, $f_\xi(x) = \langle g_\eta \rangle_{\eta<\xi} \in [0,1]^\xi$. Dado que $\pi w(X) \geq \lambda > t^+(X) \geq \omega$, tenemos que X es infinito y $t^+(X) \geq \omega_1$ y $\lambda > \omega$; como consecuencia $\pi w(X) > \text{máx}(\omega, |\xi|) \geq \pi w([0,1]^\xi)$ y por ende, f_ξ no puede ser irreducible. Luego, existe $G_\xi \subseteq X$ abierto no vacío tal que $f_\xi(X \backslash G_\xi) = f_\xi(X)$ y $X \backslash G_\xi \neq \emptyset$. Dado que X es T_4, existe g_ξ no constante y distinta de cero en $X \backslash G_\xi$. Esto termina la construcción.

Ahora, para cada $\xi < \lambda$, hacemos $H_\xi = \{x : g_\xi(x) > 0\}$.

Afirmación: Si $x \in X$, entonces $|\{\xi : x \in H_\xi\}| < t^+(X)$. Es suficiente demostrar que si $\theta \leq \lambda$ y $cf(\theta) = t^+(X)$, entonces existe $\zeta < \theta$ tal que $g_\eta(x) = 0$ para $\zeta < \eta < \theta$. Tomemos, pues, un tal $\theta \leq \lambda$. Definamos, por recursión:

Para cada $\xi \leq \zeta \leq \theta$, $\xi < \theta$ elegimos $x_{\xi\zeta}$ como sigue $x_{\xi\zeta} = x$. Dado $x_{\xi\zeta}$ elegimos $x_{\xi,\zeta+1} \in X \backslash G_\zeta$ tal que $f_\zeta(x_{\xi,\zeta+1}) = f_\zeta(x_{\xi\zeta})$. Para ordinales límite $\zeta \in (\xi, \theta]$ elegimos un punto clausura de $\langle x_{\xi\eta} \rangle_{\eta\uparrow\zeta}$. Las afirmaciones siguientes se prueban por inducción sobre ζ:

(a) Si $\eta < \xi \leq \zeta \leq \theta$, entonces $g_\eta(x_{\xi\zeta}) = g_\eta(x)$. Supongamos que la afirmación es cierta para todo $\alpha < \zeta$. Entonces tenemos dos casos:

(a.1) ζ es sucesor. Pongamos $\zeta = \alpha + 1$, y sean $\eta < \xi \leq \alpha + 1 \leq \theta$. Entonces, si $\eta < \xi \leq \alpha + 1$, entonces $x_{\xi,\alpha+1}$ fue tomado tal que $x_{\xi,\alpha+1} \in X \setminus G_\alpha$ y $f_\alpha(x_{\xi,\alpha+1}) = f_\alpha(x_{\xi,\alpha})$; luego, $g_\eta(x_{\xi,\alpha+1}) = g_\eta(x_{\xi,\alpha})$.

(a.2) ζ es límite. Pongamos $\zeta = \alpha + 1$, y sean $\eta < \xi \leq \alpha + 1 \leq \theta$. Entonces, si $\eta < \xi \leq \alpha + 1$, entonces $x_{\xi,\alpha+1}$ fue tomado tal que $x_{\xi,\alpha+1} \in X \setminus G_\alpha$ y $f_\alpha(x_{\xi,\alpha+1}) = f_\alpha(x_{\xi,\alpha})$; luego, $g_\eta(x_{\xi,\alpha+1}) = g_\eta(x_{\xi,\alpha})$.

(b) Si $\xi \leq \eta < \zeta \leq \theta$, $g_\eta(x_{\xi\eta}) = 0$.

Ahora sea y un punto clausura de $\langle x_{\xi\theta}\rangle_{\xi\uparrow\theta}$ y tendremos $g_\xi(y) = g_\xi(x)$ para todo $\xi < \theta$ y $y \in \overline{\{x_{\xi\theta} : \xi < \theta\}}$. Como $t^+(X) = cf(\theta)$ existe $\zeta < \theta$ tal que $y \in \overline{\{x_{\xi\theta} : \xi < \zeta\}}$. Ahora si $\eta \in (\zeta, \theta)$, $g_\eta(x_{\xi\theta}) = 0$ para todo $\xi \leq \zeta$, así que $g_\eta(x) = g_\eta(y) = 0$, como se requiere.

Esto finaliza la parte (ii), por que $\lambda = cf(\kappa)$ y κ es un calibre de X, de modo que no deberia ser un punto perteneciente...

Para concluir la parte (i), requerimos de un poco más de trabajo. Pongamos $\alpha = \max\{t^+(X), hc(X)\}$.

Elíjanse, inductivamente para $\xi \leq \alpha$, conjuntos $Y_\xi \subseteq X$ y $A_\xi \subseteq \lambda$, como sigue. Sea $\xi \leq \alpha$ y suponga construidos a Y_η y A_η, para cada $\eta < \xi$. Por construir a Y_{xi} y A_ξ. Pongamos $A_\xi = \{\zeta < \lambda : H_\zeta \cap (\bigcup_{\eta<\xi} Y_\eta) = \emptyset\}$. Ahora elija $Y_\xi \subseteq \bigcup\{H_\zeta : \zeta \in A_\xi\}$ de tal forma que Y_ξ es maximal respecto a la propiedad

$$|Y_\xi \cap H_\zeta| \leq 1, \text{ para todo } \zeta \in A_\xi.$$

Observemos que para cada $\xi \leq \alpha$, Y_ξ es discreto; luego, $|Y_\xi| \leq s(X)$ (vea [5]); de donde, $|Y_\xi| \leq \alpha$. Ahora, dado que para cada $x \in X$, $|\{\zeta < \lambda : x \in H_\zeta\}| < t^+(X) \leq \alpha$, tenemos que $|\{\zeta < \lambda : H_\zeta \cap (\bigcup_{\xi<\alpha Y_\xi}) \neq \emptyset\}| \leq \alpha$, y $A_\alpha \neq \emptyset$. Ahora tomemos cualquier $\zeta \in A_\alpha$ y cualquier $x \in H_\zeta$. Si $\xi < \alpha$, entonces $\zeta \in A_\xi$, pero $x \notin Y_\xi$, porque $H_\zeta \cap Y_\xi = \emptyset$; así que por la maximalidad de Y_ξ, existen $\theta(\xi) \in A_\xi$ y $y_\xi \in Y_\xi$ tales que ambos x y y_{xi} pertenecen a $H_{\theta(\xi)}$. Si $\eta < \zeta\alpha$, entonces $\theta(\xi) \in A_\xi$ así que $H_{\theta(\xi)}$ no puede intersctar a Y_η; como $y_\eta \in H_{\theta(\eta)} \cap Y_\eta$, entonces $\theta(\eta) \neq \theta(\xi)$.

Así $|(\{\xi : x \in H_\xi\})| \geq |(\{\theta(\xi) : \xi < \alpha\})| = \alpha \geq t^+(X)$, lo cual es una contradicción con (b). Así que en (i) también tenemos una contradicción.

□

Corolario 3.18. *Si X es un espacio Hausdorff compacto, entonces $\pi w(X) < \max(t^+(X), d(X)^+)$.*

Demostración. Se obtiene de aplicar (ii) con $\kappa = \max\{t^+(X), d(X)^+\}$. □

Corolario 3.19. *Sea X un espacio Hausdorff y compacto, separable y con estrechez numerable. Entonces X tiene una π-base numerable.*

Demostración. Claramente $\max(t^+(X), d(X)^+) \leq \omega_1$; luego, por (iii) de la proposición anterior, $\pi w(X) = \omega$. □

Corolario 3.20. *Sea X un espacio Hausdorff y compacto con $c(X) = \omega$. Las afirmaciones siguientes son satisfechas.*

(a) *Si $t^+(X) < \mathfrak{m}$, entonces $\pi w(X) < t^+(X)$ y X es separable.*

(b) $[\mathfrak{m} > \omega_1]$ *Si $t(X) = \omega$, entonces $\pi w(X) = \omega$.*

(c) $[\mathfrak{m} > \omega_1]$ *Si $\chi(X) = \omega$, entonces X es separable y .*

Demostración. **(a)** Notemos que $\omega < cf(t^+(X)) \leq t^+(X) < \mathfrak{m}$, del Corolario 3.14 c, tenemos que $t^+(X)$ es un calibre de X. Entonces por el Corolario 3.17(ii), $\pi(X) < t^+(X) < \mathfrak{m}$ y así, de la Proposición 3.14 b, concluimos que X es separable.

(b) Dado que $t(X) = \omega$, entonces $t^+(X) \leq \omega_1 < \mathfrak{m}$, por (a) se tiene $\pi w(X) < t^+(X) \leq \omega_1$, así (por la proposición anterior) $\pi w(X) \leq \omega$.

(c) Como X es primero numerable, entonces $t(X) = w$ (pues para cualquier espacio, X, $t(X) \leq \chi(X)$, vea [5]); luego, por (b) X tiene una π–base numerable; *i.e.* $\pi w(X) \leq \omega$ y como $d(X) \leq \pi w(X)$ (vea [5]) tenemos que $d(X) \leq \omega$ y por tanto X es separable.

□

Corolario 3.21. $(\mathfrak{m} > \omega_1)$ *Sea X un espacio Hausdorff y compacto con $t(X) = \omega$, entonces $hd(X) = hc(X)$.*

Demostración. Si X es finito entonces trivialmente $hd(X) = hc(X)$. Supongamos que X es infinito entonces $hc(X) \leq hd(X)$ (esta desigualdad se verifica para cualquier espacio, vea [5]). Para mostrar la otra desigualdad, sea $Y \subseteq X$. Claramente $\overline{Y}$ es un espacio Hausdorff y compacto con estrechez numerable. Tenemos dos casos:

(i) $c(\overline{Y}) = \omega$: Entonces

$$d(Y) \leq \pi w(Y) = \pi w(\overline{Y}) \leq \omega \leq hc(X)$$

(ii) $c(\overline{Y}) > \omega$. Por (b) del corolario anterior, $t^+(\overline{Y}) \leq \omega_1$; luego, por el Corolario 3.17 (i), tenemos que

$$d(Y) \leq \pi(Y) = \pi(\overline{Y}) \leq \text{máx}\{\omega_1, hc(\overline{Y})\} = hc(\overline{Y}) \leq hc(X).$$

Así en todo caso $d(Y) \leq hc(X)$ y $hd(X) \leq hc(X)$. □

Proposición 3.22. *Sean X un espacio c.c.c. y G_κ absoluto, y Y la imagen continua de X. Si* $\max\{\omega_1, t^+(Y)\} \leq cf(\kappa) \leq \kappa < \mathfrak{m}$ *entonces* $d(Y) < \kappa$.

Demostración. Dado que X es G_κ absoluto, existen un espacio Hausdorff y compacto, Z y una colección $\{H_\xi : \xi < \kappa\}$ de abiertos en Z, de tal forma que $X = \bigcap\{H_\xi : \xi < \kappa\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $Z = \overline{X}$, por lo que Z tambien es *c.c.c.* Sea $\mathcal{I}$ la topología de Z. Sea $\varphi : X \to Y$ una función continua sobreyectiva.

Supongamos que $d(Y) \geq \kappa$. Usando inducción sobre κ, vamos a definir conjuntos conjuntos numerables $A_\xi \subseteq X$ y familias de abiertos en $Z, \mathcal{U}_\xi \subseteq \mathcal{I}$ $(\xi < \kappa)$ tales que $|\mathcal{U}_\xi| \leq \max\{\omega, |\xi|\}$, como sigue: Sea $\xi < \kappa$ y supongamos construidos, para todo $\eta < \xi$ a $A_\eta \in [X]^{\leq\omega}$ y $\mathcal{U}_\eta \in [\mathcal{I}]^{\leq \max\{\omega,|\eta|\}}$. Sea $B_\xi = \bigcup\{A_\eta : \eta < \xi\}$. Entonces $|B_\xi| < \kappa$, en efecto $|B_\xi| = |\bigcup\{A_\eta : \eta < \xi\}| \leq \sum_{\eta<\xi} |A_\eta| \leq \omega.|\xi| = \max(w, |\xi|) < \kappa$. Así $|\varphi[B_\xi]| < \kappa$ y por lo tanto $\varphi[B_\xi]$ no es denso en Y, pues hemos supuesto que $d(Y) \geq \kappa$. Ahora definimos $E_\xi = \varphi^{-1}[\overline{\varphi[B_\xi]}]$ (notemos que $E_\xi \neq X$). Consideremos $F_\xi = \overline{E}_\xi$ (la cerradura de E_ξ en Z). Veamos que $F_\xi \cap X = E_\xi$. En efecto, notemos que $F_\xi \cap X = \overline{E}_\xi \cap X = \overline{\varphi^{-1}(\overline{\varphi(B_\xi)})} \cap X = \varphi^{-1}(\overline{\varphi(B_\xi})) = E_\xi$ (pues φ es continua), por tanto $\overline{E}_\xi \neq \overline{X}$ y así $F_\xi \neq Z$.

Sea $\mathcal{U}_\xi \in \mathcal{I}$ tal que

(a) $Z \backslash F_\xi \in \mathcal{U}_\xi$, $H_\xi \in \mathcal{U}_\xi$;

(b) Si $U, V \in \bigcup\{\mathcal{U}_\eta : \eta < \xi\}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{U}_\xi$;

(c) Si $U \in \bigcup\{\mathcal{U}_\eta : \eta < \xi\}$ y $X \in U \cap B_\xi$ existe V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ y $V, Z\backslash\overline{V}$ ambos pertenecen a $\mathcal{U}_\xi$;

Observemos que B_ξ y $\bigcup\{\mathcal{U}_\eta : \eta < \xi\}$ tienen cardinalidad menor o igual que el $\max(\omega, |\xi|)$); luego, $|\mathcal{U}_\xi| \leq \max\{\omega, |\xi|\}$. Ahora como X es G_κ–absoluto, entonces X es Martin–κ–completo y como $\kappa < \mathfrak{m}$, entonces X es Martin–$< \mathfrak{m}$–completo.

Aplicando el Teorema 3.13 a las familias $\mathcal{H} = \mathcal{U}_\xi$ y $\mathcal{G} = \mathcal{V} = \emptyset$, existe $A_\xi \in [X]^{\leq\omega}$ tal que $A_\xi \cap U \neq \emptyset$, para todo $U \in \mathcal{U}_\xi$ (no vacío).

Sea $\mathcal{U} = \bigcup\{\mathcal{U}_\xi : \xi < \kappa\}$ entonces (por las condiciones (a) y (b) y la definición de F_ξ), $\mathcal{U}$ es base para una topología $\mathfrak{G}$ en Z más gruesa que $\mathcal{I}$. Como $\mathcal{I}$ tiene la *c.c.c.* entonces $\mathfrak{G}$ también.

Pongamos $B = \bigcup\{A_\xi : \xi < \kappa\}$ y sean F la $\mathcal{I}$–clausura de B (*i.e.* $F = cl_{(Z,\mathcal{I})}B$) y $\mathfrak{G}_F$ la topología inducida en F por $\mathfrak{G}$. Como F intersecta a todo elemento no vacío de $\mathcal{U}$, F es $\mathfrak{G}$–denso en Z, y también es *c.c.c.* bajo $\mathfrak{G}_F$.

Afirmación $(F, \mathfrak{G}_F)$ *es casi regular. Si* $S \in \mathfrak{G}_F$ *y* $S \neq \emptyset$*, existe* $W \in \mathfrak{G}$ *tal que* $S = W \cap F$ *y como* W *es unión de elementos de* $\mathcal{U}$*, existe* $U \in \mathcal{U}$ *tal que* $\emptyset \neq F \cap U \subseteq S$*. Sea* $\xi < \kappa$ *tal que* $U \in \mathcal{U}_\xi$*. Entonces* $A_\xi \cap U \neq \emptyset$*. Así, existe* $x \in U \cap B$*; luego, por la condición (c), existe* $V \in \mathcal{U}_{\xi+1}$ *tal que* $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$*. De donde* $A_\xi \cap V \neq \emptyset$*,* $\overline{V}^{\mathcal{I}} \subseteq U$ *y* $Z \backslash \overline{V}^{\mathcal{I}} \in \mathcal{U}_{\xi+1}$*; de aquí que* $\overline{V}^{\mathfrak{G}} = \overline{V}^{\mathcal{I}} \subseteq U$*. Con lo cual* $\emptyset \neq F \cap V \subseteq F \cap \overline{F \cap V}^{\mathfrak{G}} \subseteq F \cap U \subseteq S$*.*

Esta última contención es cierta pues:

$F \cap V \subseteq F \cap \overline{V}^{\mathcal{I}} = F \cap \overline{V}^{\mathfrak{G}} = F \cap (F \cap \overline{V}^{\mathfrak{G}}) \subseteq F \cap \overline{F \cap V}^{\mathfrak{G}} \subseteq F \cap \overline{F}^{\mathfrak{G}} \cap \overline{V}^{\mathfrak{G}} = F \cap \overline{V}^{\mathfrak{G}} = F \cap \overline{V}^{\mathcal{I}} \subseteq F \cap U$*. Pero* $F \cap \overline{F \cap V}^{\mathfrak{G}} = \overline{F \cap V}^{\mathfrak{G}_F}$*.*

Por lo tanto, $(F, \mathfrak{G}_F)$ *es Martin–completo. Aplicando el Teorema 3.13 a* F*,* $\mathfrak{G}_F$ *con* $\mathcal{V} = \{F \cap H_\xi : \xi < \kappa\}$ *y* $\mathcal{F} = \{F \cap U : U \in \mathcal{U} \backslash \emptyset\}$*, tenemos que existe un conjunto numerable* $C \subset \bigcap \mathcal{V} = F \cap X$ *tal que para todo* $U \in \mathcal{U} \setminus \{\emptyset\}$*,* $C \cap U \neq \emptyset$*; luego* $\overline{C}^{\mathfrak{G}} = Z$*. Ahora, observemos que*

$$\varphi[C] \subseteq \varphi[F \cap X] = \varphi[X \cap \overline{B}^{\mathcal{I}}] \subseteq \overline{\varphi[B]} = \overline{\varphi[\bigcup\{A_\xi : \xi < \kappa\}]} = \overline{\varphi[\bigcup\{B_\xi : \xi < \kappa\}]} = \overline{\bigcup\{\varphi[B_\xi] : \xi < \kappa\}} = \bigcup\{\overline{\varphi[B_\xi]} : \xi < \kappa\}$$

Esta ultima igualdad se da pues si $x \in \overline{\bigcup\{\varphi[B_\xi] : \xi < \kappa\}}$*, como* $t^+(Y) \leq cf(\kappa)$ *existe* $C_0 \subseteq \bigcup\{\varphi[B_\xi] : \xi < \kappa\}$ *con* $|C_0| < t^+(Y) \leq cf(\kappa)$ *tal que* $x \in \overline{C_0}$ *luego dado que* $|C_0| < cf(\kappa)$ *existe* $\xi_0 < \kappa$ *tal que* $C_0 \subseteq \varphi[B_{\xi_0}]$*. Así* $x \in \overline{C_0} \subseteq \overline{\varphi[B_{\xi_0}]}$*.*

Por otro lado, el hecho de que $\omega < cf(\kappa)$*, implica que existe* $\zeta < \kappa$ *tal que* $\varphi[C] \subseteq \overline{\varphi[B_\zeta]}$ *y* $C \subseteq E_\zeta$*. Pero en este caso* $\overline{C}^{\mathfrak{G}} \subseteq F_\zeta \neq Z$*, pues* $Z \backslash F_\zeta \in \mathcal{U}_\zeta \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathfrak{G}$*. Lo cual es una contradicción.* □

Corolario 3.23. $[\mathfrak{m} > \omega_1]$ *Sea* X *un espacio con* $t(X) = \omega$*. Si* X *es la imagen continua de un espacio Čech-completo y c.c.c., entonces* X *es separable.*

Teorema 3.24. *Sea* X *un espacio Hausdorff con* $c(X) = \omega$ *tal que todo subespacio cerrado es Martin–*$< \mathfrak{m}$*–completo. Sea, además,* $\kappa \leq \mathfrak{m}$ *un cardinal regular. Si* $t^+(X) < \kappa \leq \mathfrak{m}$ *y* $Y = \{x : x \in X, \pi_\chi(\chi, X) < \kappa\}$ *es denso, entonces* X *es separable.*

Demostración. Pongamos $\lambda = t^+(X)$. Notemos que $\lambda \geq \omega_1$. Para cada $y \in Y$ tomamos una π–base local, $\mathcal{B}_y$, tal que $|\mathcal{B}_y| < \kappa$. Además, para cada $G \subseteq X$ abierto elegimos $y_{(G)} \in Y \cap G$ y sea $y_{(\emptyset)}$ un elemento arbitrario de Y. También, para $A \subseteq Y$ definimos:

$$A' = A \cup \{y_{(X\setminus\overline{A})}\} \cup \{y_{(U\cap V)} : U, V \in \bigcup\{\mathcal{B}_z : z \in A\}\}$$

A continuacón, definimos, recursivamente una colección $\{F_\xi : \xi < \lambda\}$ de subconjuntos de X:

(i) $F_{0=}\emptyset$.

(ii) Para todo $\xi < \lambda$, $F_{\xi+1} = F'_\xi$

(iii) Si $\xi \leq \lambda$ es ordinal límite, no cero, $F_\xi = \bigcup\{F_\alpha : \alpha < \xi\}$

Observemos que la regularidad de κ y la definición de A' (para $A \subseteq Y$) implican que para todo $\xi \leq \lambda$, $|F_\xi| < \kappa$. Veamos ahora que:

(1) $c(F_\lambda) = \omega$. En efecto, sea $\mathcal{H}$ una familia no numerable de conjuntos abiertos de F_λ. Para cada $H \in \mathcal{H}$ elegimos un punto $x(H) \in H$ y un conjunto abierto en X, G_H, tal que $H = F_\lambda \cap G_H$. Entonces, para cada $H \in \mathcal{H}$, existe $B_H \in \mathcal{B}_{x(H)}$ tal que $B_H \subseteq G_H$. Como X es *c.c.c* existen H_1 y $H_2 \in \mathcal{H}$ tales que $B_{H_1} \cap B_{H_2} \neq \emptyset$. Ahora, considerando que λ es ordinal limite, existe $\xi < \lambda$ tal que $x(H_1)$, $x(H_2) \in F_\xi$; luego, $B_{H_1}, B_{H_2} \in \bigcup\{B_y : y \in F_\xi\}$. Lo cual implica que $y_{(B_{H_1}\cap B_{H_2})} \in F'_\xi \subseteq F_\lambda$, además $y_{(B_{H_1}\cap B_{H_2})} \in B_{H_1} \cap B_{H_2}$ con lo cual $y_{(B_{H_1}\cap B_{H_2})} \in B_{H_1} \cap B_{H_2} \cap F_\lambda \subseteq B_{H_1} \cap B_{H_2} \cap F_\lambda \subseteq G_{H_1} \cap G_{H_2} \cap F_\lambda = (G_{H_1} \cap F_\lambda) \cap (G_{H_2} \cap F_\lambda) = H_1 \cap H_2$ por lo tanto $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$ y así $\mathcal{H}$ no es una familia celular y por tanto $c(F_\lambda) = \omega$.

(2) $\pi\omega(\overline{F}_\lambda) < \kappa$. En efecto, sea $\mathcal{V} = \{U \cap \overline{F}_\lambda : U \in \bigcup\{\mathcal{B}_y : y \in F_\lambda\}$. Veamos que $\mathcal{V}$ es una π–base para $\overline{F}_\lambda$. Sea, pues, W un abierto no vacío en $\overline{F}_\lambda$. Como F_λ es denso en $\overline{F}_\lambda$, existe $y_0 \in W \cap F_\lambda$; luego, dado que λ es límite, existe $\xi < \lambda$ tal que $y_0 \in F_\xi$. Por otro lado, existe un abierto W' en X de tal foma que $W = \overline{F}_\lambda \cap W'$. Como $y_0 \in W'$ y $\mathcal{B}_{y_0}$ es π–base local de y_0, existe $B_W \in \mathcal{B}_{y_0}$ tal que $B_W \subseteq W'$. Entonces $y_{B_W} \in F_{\xi+1} \subseteq \overline{F}_\lambda$; luego, $\overline{F}_\lambda \cap B_W \in \mathcal{V}$ y $\overline{F}_\lambda \cap B_W \subseteq \overline{F}_\lambda \cap W' = W$.

Por lo tanto $\mathcal{V}$ es π–base para $\overline{F}_\lambda$ y $|\mathcal{V}| < \kappa$. Así $\pi\omega(\overline{F}_\lambda) \leq |\mathcal{V}| < \kappa$.

(3) $\overline{F}_\lambda$ es separable. Dado que $c(\overline{F}_\lambda) = c(F_\lambda) \leq \omega$ y $\pi\omega(\overline{F}_\lambda) < \omega \leq \mathfrak{m}$ y por el Corolario 3.14(b), tenemos que $\overline{F}_\lambda$ es separable.

(4) $\overline{F}_\lambda = X$. En efecto, dado que $t^+(X) = \lambda$ y $F_\lambda = \bigcup\{F_\xi : \xi < \lambda\}$, tenemos que $\overline{F}_\lambda = \bigcup\{\overline{F}_\xi : \xi < \lambda\}$. Luego, dado que $\overline{F}_\lambda$ es separable, existe $D \subseteq \overline{F}_\lambda$ denso numerable. Ahora bien, como λ es regular, existe $\xi < \lambda$ tal que $C \subseteq \overline{F}_\xi$. Finalmente, tenemos que $F'_\xi \subseteq F_{\xi+1} \subseteq F_\lambda = \overline{F}_\xi$. Pero para $A \subseteq Y$, ocurre que $A' \subseteq \overline{A}$ sólo cuando $\overline{A} = X$. Así que $\overline{F}_\xi = X$ y por lo tanto $\overline{F}_\lambda = X$.

La prueba está completa. □

Corolario 3.25. $[\mathfrak{m} > \omega_1]$ *Sea X un espacio Hausdorff c.c.c. y primero numerable tal que todo subespacio cerrado de X es Martin–ω_1–completo. Entonces X es separable.*

Demostración. Se sigue del teorema anterior, con $\kappa = \omega_2$. □

Conclusiones

Como hemos podido ver en el Capítulo 2, de este trabajo de tesis, el material previo a la definición del Axioma de Martin no sólo es poco sino que, además, es hasta cierto punto sencillo de comprender y usar; a diferencia, por ejemplo, con lo que ocurre con la clase de los espacios Martin–κ–completos, cuya definición es bastante compleja. Aún más, este axioma es una herramienta muy útil y manejable, que en muchas casos su aplicación genera demostraciones, además de elegantes, sencillas de comprender.

No tenemos duda de que la manera en la que exponemos al Axioma de Martin y algunas de sus aplicaciones, en las dos primeras secciones del Capítulo 2, harán que el lector le tome un mayor sabor e interés al tema. Si bien en estas secciones el aporte sólo sea en cuanto al orden de las ideas y el de presentar el material con el mayor lujo de detalles, la labor no ha sido, digamos, sencilla o trivial.

Para el caso de la tercera sección del Capítulo 2, además de extender el famoso *Teorema de Categoría de Baire* a una clase más amplia que la de los Hausdorff y compactos (Teorema 2.34), abordamos el problema de la separabilidad de un espacio topológico bajo el Axioma de Martin (teoremas 2.39 y 2.43) . En ésta, basados en el trabajo de Juhász en [9], intitulado *Consistency results in topology*, estudiamos a los espacios π–completos. En esta temática han quedado diversas cuestiones a revisar, entre otras:

1. ¿Para qué tipo de subespacios es hereditaria la π-completez de un espacio?

2. ¿Es productiva la propiedad de π-completez?

3. ¿Las imágenes continuas de espacios π–completos, comparten esta propiedad?

4. ¿Existe alguna relación entre los espacios pseudocompletos (según Oxtoby o Todd) y los π-.completos?

5. ¿(AM+$\neg$HC) Si X es un espacio Lindelöf de celularidad numerable y $t(X) = \omega$, entonces $d(X) = \omega$.

Si bien el capítulo final de este trabajo está basado en la referencia [1], completar los detalles en las demostraciones de resultados y ejemplos que presentamos en éste no fue, para nada, sencilla. La definición de la clase de espacios Martin–κ-completos es bastante compleja y aún cuando se presentan resultados que permiten hacer más comprensible y manejable a esta clase de espacios, el material es bastante *pesado y complejo*. En esta parte, se podría concluir que se extienden algunos resultados de la tercera sección del Capítulo 2, por ejemplo el Teorema 2.43, sin embargo, para esto se requiere de una respuesta afirmativa al primer problema de la lista siguiente, que bien resulta un camino a seguir.

1. ¿Son los espacios π–completos, Martin–κ–completo, para algún cardinal κ?

2. ¿Son los espacios pseudocompletos (ya sea según Oxtoby o Todd), Martin–κ–completo, para algún cardinal κ?

3. ¿Hay alguna equivalencia entre estas clases de espacios y los Martin-κ-completos, para algún κ?

Bibliografía

[1] Fremlin, D. H. *Consequences of Martin's axiom.* (1988), Cambridge University press.

[2] Engelking R., *General topology*, Polish Sci. Publ., Warsaw, 1977.

[3] Fleissner W., Tkachuk, V., Yengulalp L. *Every scatered space is subcompact*, Top. and it's app. 12, 160(2013) 1305-1312.

[4] Hernández Hernández F., *Teoría de conjuntos*, Sociedad Matemática Mexicana, Aportaciones Matemáticas, 1998.

[5] Hodel R. E., *Cardinal functions I*, in: K. Kunen, J. Vaughan (Eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp 1-61.

[6] Hrbacek K., Jech T., *Introduction to Set Theory*, Marcel Dakker, Inc., Second Edition 1978.

[7] Juhász, I. *Consistency results in topology*, in: Barwisw J. (Ed.), Handbook of Mathematical logic, North-Holland, Amsterdam, vol. 90, 1977.

[8] Juhász I., *Cardinal functions in topology -ten years later-*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980.

[9] Juhász, I. *Consistency results in topology*, in: Barwisw J. (Ed.), Handbook of Mathematical logic, North-Holland, Amsterdam, vol. 90, 1977.

[10] Casas de la Rosa, J.; Martínez Ruiz, I.; Romero Morales, A; Ramírez Páramo, A., π*–completitud*, En arbitraje para Topología y sus Aplicaciones, Textos Científicos BUAP.

[11] Šapirovskii B. E., *On separability and metrizability of spaces with Suslin's condition*, Soviet Mat. Dokl, 13, 1972, 1633-1638.

[12] Tall F. D., *The countable chain condition*, General topology and appl, 4 1974, 315-339.

[13] Kunen, K., *Set theory, an introduction to independence proofs*, Studies in Logic and the foundamentations of Mathematics, vol. 102, 1980.