



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA

**MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA,
OPCIÓN EN AUTOMATIZACIÓN**

“Control adaptable de robots manipuladores”

T E S I S

Presentada para obtener el título de:
Maestro en Ciencias de la Electrónica, Opción en Automatización

Presenta:

Ing. Juan Carlos Sernaque Julca*

Directores:

Dr. José Fernando Reyes Cortés (FCE-BUAP)

Dr. Pablo Sánchez Sánchez (FCE-BUAP)

Dr. Basil M. Al-Hadithi (CAR-UPM**)

Puebla, México

Junio 2022

* Becario CONACYT

** Centro de Automática y Robótica - Universidad Politécnica de Madrid.

BUAP®

Agradecimientos

Un agradecimiento muy especial a mis asesores el Dr. Fernando Reyes Cortés, el Dr. Pablo Sánchez Sánchez y el Dr. Basil M. Al-Hadithi por el tiempo, la dedicación y apoyo que me brindaron en la resolución de las dudas que surgían durante el desarrollo de la tesis. Por compartir su conocimiento y experiencia enfocado al logro de cada uno de los objetivos planteados.

Al jurado evaluador, al Dr. Sergio Vergara Limón, al Dr. Carlos Leopoldo Pando Lambruschini y al Dr. Jesús Manuel Muñoz Pacheco por formar parte del jurado revisor y tomarse el tiempo para darme sus sugerencias y observaciones que ayudaron a enriquecer mi trabajo de tesis.

Y finalmente a CONACYT por la beca otorgada para realizar mis estudios de maestría. A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), en particular la Facultad de Ciencias de la Electrónica (FCE) por el apoyo brindado en el área administrativa y sobre todo por darme la oportunidad de llevar a cabo mis estudios de posgrado en sus instalaciones.

Índice general

Agradecimientos	III
1. Introducción	1
1.1. Orígenes del control adaptable	1
1.2. Motivación	2
1.3. Antecedentes	3
1.4. Formulación del problema	5
1.5. Objetivos	6
2. Preliminares matemáticos	7
2.1. Modelado	7
2.1.1. Ecuaciones de movimiento de Euler–Lagrange	8
2.1.2. Modelo dinámico	9
2.1.2.1. Modelo dinámico de robots con fricción	11
2.1.2.2. Modelo dinámico con accionadores	12
2.1.3. Propiedades del modelo dinámico	13
2.1.3.1. Matriz de inercia	13
2.1.3.2. Matriz de Coriolis y fuerzas centrífugas	15
2.1.3.3. Vector de gravedad	16
2.2. Moldeo de Energía	18
2.3. Estabilidad en el sentido de Lyapunov	18
2.3.1. Métodos para el análisis de estabilidad	21
2.3.2. Método directo o de linealización	21
2.3.3. Método directo	22
2.3.3.1. Función candidata de Lyapunov	22
2.3.3.2. Estabilidad global	22
2.3.3.3. Estabilidad asintótica global	23
2.3.4. Superficies de Lyapunov	23
2.4. Cinemática analítica de Euler	24
2.4.1. Matrices de rotación	24
2.4.2. Ángulos de Euler	25
2.4.3. Transformaciones de traslación y rotación	26
2.4.4. Matrices antisimétricas	27
2.4.5. Propiedades de matrices rotacionales y antisimétricas	28

3. Control Adaptable	29
3.1. Introducción	29
3.2. Control robusto de alta ganancia	30
3.3. Ganancias programadas (Gain Scheduling)	31
3.4. Control adaptable directo e indirecto	31
3.4.1. Control adaptable directo	32
3.4.2. Control adaptable indirecto	32
3.5. Esquemas de adaptación MRAC y STR	32
3.5.1. Control adaptable con base en el modelo de referencia MRAC	33
3.5.1.1. Modelo de referencia	33
3.5.1.2. Esquema de control	34
3.5.1.3. Esquema de adaptación	34
3.5.2. Control adaptable con autosintonía	34
3.5.2.1. Control Adaptable STR directo e indirecto	35
3.5.3. Relación entre control adaptable con base en el modelo de referencia y la autosintonía	35
4. Plataforma Experimental	37
4.1. Robot manipulador de 3gdl ROTRADI I	37
4.2. Lectura de encoders	39
4.3. Tarjeta de adquisición de datos: Arduino MKR Vidor 4000	39
4.3.1. Especificaciones técnicas	40
4.3.2. Programación de Arduino MKR Vidor 4000	40
4.3.3. Aplicación - Servomotor de transmisión directa	41
4.3.4. Prototipo de tarjeta de control	43
4.4. Interfaz gráfica	44
5. Modelado dinámico	47
5.1. Péndulo simple	47
5.1.1. Cinemática directa analítica de Euler	48
5.1.2. Cálculo de la velocidad	48
5.1.3. Cálculo de la rapidez lineal	48
5.1.4. Cálculo de las energías	48
5.1.4.1. Energía cinética	48
5.1.4.2. Energía potencial	48
5.1.5. Cálculo del Lagrangiano	49
5.1.6. Ecuaciones de Euler-Lagrange	49
5.1.7. Modelo dinámico	49
5.2. Nuevas propiedades del modelo cinemático y diferencial	49
5.3. Robot de 2 grados de libertad	50
5.3.1. Cinemática directa analítica de Euler	50
5.3.2. Cálculo de la velocidad	51
5.3.3. Cálculo de la rapidez lineal	51
5.3.4. Cálculo de las energías	52
5.3.4.1. Energía cinética	52
5.3.4.2. Energía potencial	52

5.3.5.	Cálculo del Lagrangiano	52
5.3.6.	Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange	52
5.3.7.	Modelo dinámico del robot de 2gdl	53
5.4.	Robot de 3 grados de libertad	54
5.4.1.	Cinemática directa analítica de Euler	54
5.4.2.	Cinemática diferencial	56
5.4.3.	Rapidez cartesiana	57
5.4.4.	Energía potencial	59
5.4.5.	Energía cinética	59
5.4.6.	Modelo dinámico del robot de 3gdl	60
6.	Control para robots manipuladores	61
6.1.	Algoritmo de control de posición puro	61
6.1.1.	Ecuación en Lazo cerrado	63
6.2.	Análisis de estabilidad asintótica global	63
6.2.1.	Análisis del punto de equilibrio	63
6.2.2.	Propuesta de la función candidata de Lyapunov	64
6.2.3.	Derivada de la función candidata de Lyapunov	64
6.3.	Algoritmo de control versión adaptable	65
6.4.	Ley de adaptación	65
6.5.	Control MRAC con compensación adaptable de gravedad	65
6.5.1.	Control MRAC con compensación adaptable de gravedad para el péndulo simple	66
6.5.2.	Control MRAC con compensación adaptable de gravedad para el robot de 2 gdl	67
6.6.	Control con autosintonía y compensación adaptable de gravedad	67
6.6.1.	Péndulo simple	68
6.6.2.	Robot de 2gdl	68
7.	Resultados de simulación y experimentales	69
7.1.	Resultados de simulación	69
7.1.1.	Robot tipo péndulo simple	69
7.1.2.	Robot de 2gdl	71
7.1.3.	Medida del desempeño	73
7.2.	Resultados experimentales: Robot de 3gdl	75
7.2.1.	Control de posición para el robot de 3gdl	75
7.2.2.	Control adaptable para el robot de 3gdl	76
7.2.3.	Medida del desempeño	78
	Conclusiones	79
	Anexos	85

Índice de figuras

1.1. Cabina de una aeronave	2
2.1. Robot manipulador de 2 grados de libertad (gdl).	7
2.2. Motor de CC.	12
2.3. Superposición.	20
2.4. Estabilidad asintótica.	20
2.5. Superficies de Lyapunov.	23
2.6. Sistemas de referencia fijo Σ_0 y rotado Σ_1	25
2.7. Ángulos de Euler.	26
2.8. Movimientos de traslación y rotación.	26
3.1. Diagrama de bloques de control robusto de alta ganancia	30
3.2. Diagrama de bloques de un sistema con ganancias programadas	31
3.3. Diagrama de bloques de un sistema con control directo	32
3.4. Diagrama de bloques de un sistema con control indirecto	32
3.5. Control adaptable con base en el modelo de referencia.	33
3.6. Control adaptable con autosintonía.	34
3.7. Diagrama de bloques general de un control MRAC - STR.	36
4.1. ROTRADI I.	37
4.2. Motor y amplificador electrónico.	38
4.3. Zona lineal y de saturación de un servomotor.	38
4.4. Encoder óptico incremental.	39
4.5. Vista superior de Arduino MKR Vidor 4000.	39
4.6. Procedimiento de desarrollo en Arduino MKR Vidor 4000.	40
4.7. Diagrama esquemático de un servomotor de transmisión directa.	41
4.8. Etapa de acondicionamiento de señal.	42
4.9. Diagrama de bloques de la lógica implementada en la tarjeta Arduino MKR Vidor 4000.	43
4.10. Prototipo de tarjeta de control.	44
4.11. Interfaz gráfica con Python - Ventana de inicio.	44
4.12. Interfaz gráfica con Python - Entorno de control.	45
4.13. Interfaz gráfica con Python - Entorno de visualización de señales obtenidas por los encoders.	46
5.1. Vista lateral y vista superior del péndulo simple en $q_1 = 0$ (posición de casa).	47
5.2. Vista lateral y vista superior del robot de 2gdl en $q_1 = q_2 = 0$ (posición de casa).	50
5.3. Robot de 3 gdl en la posición de casa ($q_1 = q_2 = q_3 = 0$).	54

5.4. Robot de 3 gdl en la posición de casa ($q_1 = q_2 = q_3 = 0$).	55
6.1. Familia de funciones hiperbólicas saturadas $f(x)$ para $\alpha_1 = 1$	62
6.2. Familia de funciones hiperbólicas saturadas $f(x)$ para $m = 1$	62
6.3. Control MRAC con compensación adaptable de gravedad.	66
6.4. Control con autosintonía y compensación adaptable de gravedad.	67
7.1. Posición del robot.	69
7.2. Valor numérico de $\hat{\theta}$	70
7.3. Par solicitado al servomotor.	70
7.4. Posición del robot.	71
7.5. Posición del robot	72
7.6. Valor numérico de $\hat{\theta}$	72
7.7. Par solicitado a los servomotores	73
7.8. Desempeño del esquema de control para el péndulo simple.	74
7.9. Desempeño del esquema de control para el robot de 2gdl.	74
7.10. Posición del robot de 3gdl.	75
7.11. Torque solicitado a los servomotores del robot de 3gdl.	76
7.12. Posición del robot de 3gdl.	76
7.13. Valor numérico de $\hat{\theta}$	77
7.14. Torque solicitado a los servomotores del robot de 3gdl.	78
7.15. Prototipo de tarjeta de control.	85

Índice de tablas

4.1. Características de los servomotores usados en el ROTRADI I.	38
4.2. Características específicas de la tarjeta MKR Vidor 4000.	40
7.1. Rendimiento durante simulación del algoritmo de control adaptable MRAC.	73
7.2. Rendimiento de los algoritmos de control observado en los experimentos con el robot de 3gdl.	78

Simbología

Escalares

f_m	Coefficiente de fricción del rotor con sus soportes
$f_p(\tilde{q})$	Función escalar asociada a la acción de control proporcional
$f_v(\dot{q})$	Función escalar asociada a la acción de control derivativa
γ	Ganancia de adaptación escalar
γ_g	Ganancia de adaptación escalar del control MRAC
$g_0(q)$	Par gravitacional escalar independiente de $\hat{\theta}$
$g_{m_0}(q)$	Par gravitacional escalar del modelo de referencia
I_i	Momento de inercia del i -ésimo eslabón
J_m	Inercia del rotor
K_a	Constante del motor
K_b	Constante de contrarreacción electromotriz
$\mathcal{K}(q, \dot{q})$	Energía cinética
$\mathcal{K}(q_i, \dot{q}_i)$	Energía cinética del i -ésimo eslabón
$\hat{k}_{pi}$	i -ésimo parámetro adaptable de ganancia proporcional
$\hat{k}_{vi}$	i -ésimo parámetro adaptable de ganancia derivativa
$\mathcal{L}(q, \dot{q})$	Lagrangiano
$\mathcal{L}_n$	Norma $\mathcal{L}_n$
m_i	Masa del i -ésimo eslabón
$\phi(q)$	Función escalar de lectura de posición
q_i	Posición de la i -ésima articulación

$\dot{q}_i$	Velocidad de la i -ésima articulación
$\ddot{q}_i$	Aceleración de la i -ésima articulación
r	Relación de reducción de los engranes
R_a	Resistencia de armadura
$\hat{\theta}$	Parámetro adaptable escalar
$\hat{\theta}_0$	Parámetro adaptable escalar en la condición inicial
$\hat{\theta}_{g_0}$	Parámetro adaptable del par gravitacional escalar en la condición inicial
$\hat{\theta}_g$	Parámetro adaptable escalar del par gravitacional
$\mathcal{U}(\mathbf{q})$	Energía potencial
$\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{\mathbf{q}})$	Energía potencial articular de diseño
v	Voltaje de armadura

Matrices

$B \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz diagonal de coeficientes de fricción viscosa
$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz de Coriolis y fuerzas centrípeta
$F_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz diagonal de coeficientes de fricción de Coulomb
$\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz diagonal de ganancias de adaptación
$\Gamma_g \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz de ganancias de adaptación del control MRAC
$K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz de ganancia derivativa
$\hat{K}_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz diagonal de ganancias derivativas estimadas
$K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz de ganancia proporcional
$\hat{K}_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz diagonal de ganancias proporcional estimadas
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz jacobiana constante
$M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz de masas e inercias
$\Phi(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz de lecturas

Vectores

$\mathbf{f}_e \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de fuerzas o pares de fricción estática
$\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector general de fuerzas o pares de fricción
$\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector asociado a la acción de control proporcional
$\mathbf{f}_v(K_v, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de amortiguamiento o freno mecánico
$\mathbf{f}_v(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector asociado a la acción de control derivativa
$\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de par gravitacional
$\mathbf{g}_0(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de par gravitacional independiente de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$
$\mathbf{g}_{m0}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de par gravitacional del modelo de referencia
$\hat{\mathbf{k}}_a \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de parámetros adaptables
$\hat{\mathbf{k}}_p \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de parámetros adaptables de K_p
$\hat{\mathbf{k}}_v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de parámetros adaptables de K_v
$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de posición en coordenadas articulares
$\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de posición deseada en coordenadas articulares
$\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de velocidad en coordenadas articulares
$\mathbf{q}_r \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de posición articular de referencia
$\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de error de posición en coordenadas articulares
$\tilde{\mathbf{q}}_a \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de error de adaptación
$\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de parámetros estimados
$\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de pares o torques aplicados
$\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de parámetros adaptables
$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de parámetros adaptables en la condición inicial
$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{g0} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de parámetros adaptables del par gravitacional en la condición inicial
$\hat{\boldsymbol{\theta}}_g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de parámetros adaptables del par gravitacional
$\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$	Vector de velocidad lineal del centro de masa del i -ésimo eslabón

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas dinámicos son representaciones matemáticas compuestas por ecuaciones diferenciales que incluyen un conjunto de parámetros y una representación mínima de variables de estado, para describir todos los fenómenos físicos que se encuentran presentes en un robot manipulador; evidentemente, dicho modelo dinámico representa su comportamiento físico asociado al ancho de banda operativo del brazo robot [1, 2].

Generalmente el proceso de modelado en sistemas dinámicos lleva consigo a problemas de incertidumbre paramétrica (dinámica no modelada), como, por ejemplo, los casos de una inadecuada compensación del par gravitacional y del fenómeno disipativo de fricción, es decir, el modelado dinámico de un sistema mecánico puede tener conocimiento parcial o desconocimiento completo de algunos fenómenos físicos propios del sistema. A pesar de no contar con el modelado de esos fenómenos inciertos, es posible estimar la dinámica desconocida a través de técnicas de control adaptable, con base en la medición de ciertas variables de estado [3–5].

La naturaleza inherente de la estructura matemática de un esquema de control adaptable es no lineal y con propiedades bien definidas. Sin embargo, las técnicas de control adaptable se pueden aplicar a sistemas dinámicos lineales y no lineales [6, 7]. En esta tesis se va a diseñar, desarrollar y analizar un esquema de control aplicado a robots manipuladores usando la teoría de estabilidad de Lyapunov.

Si bien se pueden utilizar diversas teorías para diseñar algoritmos de control, tales como la teoría de estabilidad de Lyapunov, la estabilidad $\mathcal{L}_n$, la teoría de hiperestabilidad, pasividad, etcétera. Todas estas teorías establecen equivalencias entre los resultados obtenidos [6, 8–11]. En este trabajo se utilizará la teoría de estabilidad de Lyapunov [3, 9, 11, 12] y la técnica de moldeo de energía para el diseño del algoritmo de control [1, 2].

1.1. Orígenes del control adaptable

A principios de la década de 1950, hubo una extensa investigación sobre el control adaptativo, en relación con el diseño de pilotos automáticos de alto rendimiento para aviones, cuyos controles se encuentran implementados en las cabinas de control como la mostrada en la Figura 1.1. Estos aviones operan en una amplia gama de velocidades y altitudes.



Figura 1.1: Cabina de una aeronave

Se descubrió que el control de retroalimentación lineal de ganancia constante ordinaria podía funcionar bien en una condición operativa, pero que las condiciones operativas cambiantes generaban dificultades. Por lo tanto, se necesitaba un regulador más sofisticado, que pudiera funcionar bien en una amplia gama de condiciones operativas [6].

El origen del control adaptable está relacionado a otras áreas de la ingeniería, pues muchos de los algoritmos y enfoques propuestos hasta la fecha requieren herramientas que se obtienen de una amplia gama de campos. Existen fuertes vínculos con la teoría de sistemas no lineales, porque los sistemas adaptativos son inherentemente no lineales. La teoría de la estabilidad es un elemento clave. También existen vínculos con el control estocástico y la estimación de parámetros, porque una forma de ver los sistemas adaptativos es verlos como una combinación de estimación y control de parámetros [6].

1.2. Motivación

La teoría de Lyapunov [3, 9, 11, 12] y la técnica de moldeo de energía [1] permiten el diseño de un gran número de algoritmos de control con estabilidad asintótica y global del punto de equilibrio. Sin embargo, el desempeño del robot depende de que también se conozca la dinámica del robot.

Particularmente, en el problema de control de posición puro o regulación se requiere del conocimiento exacto del par gravitacional en el robot para lograr el objetivo de control, es decir, garantizar que: $[\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^T \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$ conforme el tiempo t evoluciona a infinito, $t \rightarrow \infty$; siendo $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ el error de posición, el cual se define como la diferencia entre la posición deseada $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y la posición real $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, ambos en coordenadas articulares; y $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de la velocidad de movimiento del robot [1, 2].

En el caso de tener un desconocimiento parcial o completo en algunos fenómenos de la dinámica del robot, entonces se puede causar inexactitud en el posicionamiento del robot, obteniendo errores de posición $\tilde{q}$ muy grandes o inaceptables, provocando que inclusive el error de posición $\tilde{q}$ pueda ser no acotado [1, 2]. Otros escenarios de la incertidumbre paramétrica pueden conducir a la inestabilidad del sistema.

La motivación para el uso del control adaptable en el diseño de algoritmos de control está relacionada a sus características principales. Una de ellas es que no necesariamente se requiere conocer *a priori* determinada información sobre la dinámica del robot, como pueden ser las cotas superiores de los efectos físicos o el intervalo de existencia donde se encuentran los parámetros del robot. Además, los esquemas de control adaptable pueden mantener el desempeño del sistema dinámico frente a perturbaciones.

1.3. Antecedentes

La teoría de control adaptable inició al rededor de los 60's [13], básicamente su motivación fue ajustar parámetros del esquema de control debido a la dinámica variante de ciertos sistemas mecánicos. En [14] se presenta un resumen de los sistemas de control adaptativo que se empezaban a estudiar, describiendo un sistema que se optimiza de forma automática con respecto a una medida de respuesta al impulso mostrando resultados experimentales. En [15] se describe un procedimiento adaptativo que causa una reducción del error cuadrático medio de un proceso aleatorio estacionario lineal, sin el conocimiento explícito de las características del proceso.

En los 80's se presenta una mayor cantidad de trabajos en el área. En [16] se muestra un nuevo enfoque para el control de posición y velocidad de un manipulador mediante el uso de controladores adaptativos (con autoajuste); y en [17] se exhibe un nuevo enfoque de la posición y control de velocidad de un manipulador mediante el uso de un controlador adaptativo del tipo de autoajuste para cada articulación.

En [18] se enseña el desarrollo de un control de perturbación adaptativo para compensar parámetros dinámicos inexactos o cambiantes en un manipulador, con el objetivo de obtener un mejor seguimiento a lo largo de una trayectoria deseada; Además, se realizó una simulación por computadora para verificar el desempeño de la estrategia de control adaptativo. En [19] se presenta un modelo adaptativo que sigue la ley de control para sistemas robóticos no lineales con articulaciones rotacionales. En el sistema de lazo cerrado, los ángulos de las articulaciones convergen asintóticamente a las trayectorias de referencia.

En las últimas tres décadas, el tema de control adaptable ha recobrado un enorme interés en la comunidad científica usando varias herramientas modernas de control no lineal; al mismo tiempo, con el avance de la tecnología en electrónica digital de alto desempeño y bajo costo, tales como los sistemas empujados o embebidos que trabajan en tiempo real, se puede hacer que las aplicaciones de control adaptable sean mucho más extensas.

En los años 90's se pueden destacar algunos trabajos tales como [20] donde se analiza el problema del control de manipuladores robóticos con articulaciones flexibles. Se desarrolla un esquema de control compuesto basado en la identificación en línea de los parámetros tomando en cuenta el efecto de una clase de dinámica no modelada, errores de identificación y variaciones de parámetros. Se presenta el análisis de estabilidad del sistema resultante de orden completo en lazo cerrado. En [21] la información visual obtenida de una cámara y una unidad de procesamiento de imágenes se incorpora en un algoritmo de control adaptativo para

hacer que un robot manipulador agarre un objeto en movimiento. Se presentan simulaciones y experimentos de laboratorio. En [22] se examina el papel de los controladores adaptativos para controlar la fuerza y el comportamiento del contacto, además se realizan simulaciones y experimentos para validar las conclusiones teóricas.

En [23] se propone un método de control adaptativo basado en modelos para el control coordinado tanto del movimiento del objeto a manipular como las fuerzas ejercidas en los puntos finales de múltiples manipuladores. En [24] se considera el control de dos robots manipuladores que llevan un objeto desconocido, considerando las incertidumbres en masa, inercia y centro de masa del objeto. Se realiza un análisis de estabilidad basado en Lyapunov para el esquema propuesto. En [25] se propone el control dinámico de la posición de una articulación flexible aplicando el control adaptativo y la teoría de las redes neuronales artificiales. Se realiza la identificación de los parámetros utilizando un algoritmo recursivo de mínimos cuadrados. Mediante simulación se muestra que el controlador propuesto puede suprimir las vibraciones. En [26] se desarrolla un esquema de Control Difuso Adaptativo del Modelo de Referencia directo (MRAFC) para el modelo de planta cuya estructura está representada por el modelo Takagi-Sugeno.

Del año 2000 en adelante se encuentra una gran cantidad de trabajos relacionados con el control adaptable para robot manipuladores. El problema de seguimiento para robots manipuladores con parámetros y fricción dinámica desconocidos en presencia de perturbaciones acotadas y/o incertidumbres de modelado es considerado en [27]. Se diseña un algoritmo de control adaptativo robusto que garantiza la atenuación de perturbaciones arbitrarias. En [28] se presenta un controlador neural difuso adaptativo robusto (AFNC) adecuado para la identificación y el control de una clase de sistemas no lineales inciertos de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO). La estabilidad global del sistema se establece utilizando el enfoque de Lyapunov, se presentan simulaciones en un péndulo invertido y un robot manipulador de dos grados de libertad (GDL). En [29] se diseñó el control de seguimiento robusto y adaptativo de un robot paralelo de seis grados de libertad (GDL) conocido como plataforma Stewart-Gough en presencia de no linealidad e incertidumbre. Se incluyen simulaciones.

La dinámica acoplada para dos manipuladores móviles que cooperan para manipular un objeto con movimiento relativo en presencia de incertidumbre en la dinámica del sistema y perturbaciones externas es presentada en [30]. La estabilidad del sistema en lazo cerrado y la delimitación de los errores de seguimiento se prueban utilizando la síntesis de estabilidad de Lyapunov, en este trabajo se presentan simulaciones.

En [31], se presenta un análisis de estabilidad asintótica semiglobal a través de la teoría de Lyapunov para un nuevo esquema de control proporcional integral derivado (PID), que se basa en un sistema difuso para ajustar las ganancias PID, se presentan resultados experimentales en tiempo real en un brazo robótico de 2 grados de libertad (GDL).

Recientemente se han presentado diversos trabajos de control adaptable, como [32] en el que se propone un método adaptable PID con lógica difusa para controlar la velocidad de un vehículo de transmisión directa modelo FOCUS de la compañía Ford. En [33] se analiza el diseño de control adaptativo de referencia del modelo para un robot manipulador de 4 grados de libertad (GDL), se diseña un Control Adaptativo con Modelo de Referencia, se muestra un análisis utilizando la teoría de estabilidad de Lyapunov, así como resultados de simulación. En [34] se diseña un esquema de control PID adaptable híbrido (fuerza/impedancia) para controlar las características de la respuesta de contacto transitoria, sobreimpulsos y el error de seguimiento de la fuerza aplicada en estado estacionario. El problema de seguimiento de trayectoria de un

robot manipulador rígido con dinámica desconocida y fallas en los actuadores es analizado en [35], un esquema de identificación de parámetros es incorporado a un esquema de control adaptable tipo PID, el cual es diseñado para resolver el problema planteado.

Un esquema de control adaptable robusto usando polinomios de Bernstein para robots manipuladores es presentado en [36], los coeficientes del polinomio son sintonizados con la ley de adaptación; se realiza análisis de estabilidad. En [37] se implementa un sistema MIMO (Multiple Input Multiple Output) MRAC (Model Reference Adaptive Controller) en tiempo real para hacer que las posiciones angulares de un brazo robot articulado de 3 grados de libertad (GDL) sigan entradas de referencia arbitrarias que cumplen con las especificaciones de diseño establecidas previamente. En [33] se analiza el diseño de control adaptativo de modelo de referencia para un robot manipulador en 4 grados de libertad (GDL), se diseña un control adaptativo de modelo de referencia, se presenta un análisis utilizando la teoría de estabilidad de Lyapunov, así como simulaciones.

En [38] se propone una metodología adaptable para abordar el problema de cinemática inversa cuando la matriz Jacobiana de un robot manipulador tiene componentes inciertos. Se muestra el análisis de estabilidad usando la teoría de Lyapunov y simulaciones. Un esquema adaptable en modos deslizantes con redes neuronales TSK (Takagi-Sugeno-Kang) para robots móviles es propuesto en [39], las simulaciones y el análisis de estabilidad son presentados. En [40] se diseña un esquema de control de trayectoria robusto con características de convergencia asintótica en tiempo finito-exponencial para robots manipuladores. Se desarrolla el análisis de estabilidad asintótica y global y se presentan los resultados experimentales en un robot de transmisión directa de 3 grados de libertad (GDL).

Un compensador robusto de zona muerta con red neuronal adaptable de seguimiento para robots manipuladores industriales cuyo objetivo es obtener un alto desempeño en el seguimiento de trayectorias es propuesto en [41], son presentados el análisis de estabilidad usando la teoría de Lyapunov y los resultados experimentales. Un esquema de control adaptable para robots submarinos con dinámica no modelada y sometido a perturbaciones es presentado en [42], el esquema de control está compuesto por una red neuronal y los parámetros del esquema de control son estimados por medio de algoritmos genéticos, el análisis de estabilidad y las simulaciones son presentados. En [43] se utiliza un control PD+ con autoajuste basado en el algoritmo evolutivo diferencial adaptativo JADE para lograr cortes circulares de tejido vegetal *in vitro* utilizando retroalimentación visual.

Como se observa, un número amplio de publicaciones utiliza redes neuronales y lógica difusa para formar el esquema de control adaptable. Sin embargo, el análisis de estabilidad queda relajado. También, otro importante número de trabajos presentan solo simulaciones y muy pocos trabajos presentan evaluaciones experimentales; algunos artículos científicos en forma limitada realizan análisis de estabilidad, pero evitan la prueba de estabilidad asintótica y global por medio de funciones estrictas de Lyapunov.

1.4. Formulación del problema

La naturaleza del presente trabajo de investigación se centra en abordar el problema de control adaptable de robots manipuladores, a través del diseño de algoritmos de control adaptable con estructura hiperbólica y con análisis formal de estabilidad asintótica y global.

Hipótesis. Con el diseño de un algoritmo de control adaptable para robots manipuladores es posible lograr un mejor desempeño en el seguimiento de trayectorias

Alcances. Diseñar y analizar un esquema de control aplicado a robots manipuladores usando la teoría de estabilidad de Lyapunov. El desempeño de los algoritmos de control adaptable propuestos en este trabajo será evaluado usando el índice de desempeño y se realizarán experimentos en un robot de transmisión directa de 3 grados de libertad (ROTRADI).

1.5. Objetivos

En la presente tesis se desarrolla el tema de control adaptable de robots manipuladores ubicada en la Línea de Investigación de la Maestría en Ciencias de la Electrónica, Opción en Automatización. Específicamente, se pretende abordar el siguiente objetivo general.

Objetivo general

Abordar el problema de control adaptable de robots manipuladores a través del diseño de dos algoritmos de control adaptable, uno con base al modelo de referencia y otro más, con esquema autosintonizable.

Objetivos particulares

1. Estudiar el estado del arte en control adaptable aplicado a robots manipuladores.
2. Diseñar un esquema de control adaptable con base en el modelo de referencia.
3. Diseñar un algoritmo de control de posición pura (regulador) con estructura hiperbólica.
4. Demostrar estabilidad asintótica y global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado formada por: la dinámica del robot manipulador, algoritmo de control y esquema adaptable).
5. Obtener resultados de simulación y experimentos del esquema propuesto.
6. Diseñar un esquema de control adaptable con autosintonía.
7. Diseñar un esquema de identificación paramétrica.
8. Diseñar un segundo algoritmo de control de posición pura (regulador) con estructura hiperbólica.
9. Demostrar estabilidad asintótica y global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado formada por: dinámica del robot, algoritmo de control de posición y esquema autosintonizable).
10. Obtener resultados de simulación y experimentos del esquema propuesto.

Capítulo 2

Preliminares matemáticos

En este capítulo se muestran las herramientas matemáticas que serán empleadas en los capítulos posteriores. Este capítulo se divide en tres apartados: modelo dinámico de robots manipuladores, moldeo de energía y estabilidad en el sentido de Lyapunov.

2.1. Modelado

Los robots manipuladores son sistemas mecánicos articulados formados por eslabones conectados entre sí a través de uniones o articulaciones. Las articulaciones son básicamente de dos tipos: rotacionales y traslacionales [44]. En este trabajo se considera un robot manipulador formado por articulaciones rotacionales. El marco de referencia cartesiano de tres dimensiones se considera en la base del robot. Cada unión se controla independientemente a través de un actuador que se coloca en dicha unión, y el movimiento de las uniones produce el movimiento relativo de los eslabones. El eje de movimiento de la i -ésima unión se realiza con respecto al eje z . La coordenada articular generalizada denotada por q_i es el desplazamiento angular alrededor del eje z . En el caso típico donde los actuadores se localizan en las uniones entre eslabones, las coordenadas articulares generalizadas reciben el nombre de posiciones articulares [44].

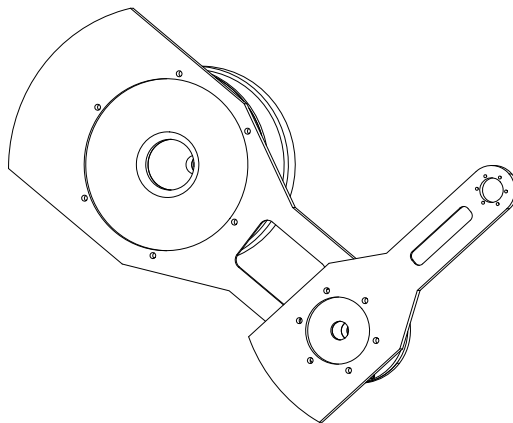


Figura 2.1: Robot manipulador de 2 grados de libertad (gdl).

2.1.1. Ecuaciones de movimiento de Euler–Lagrange

Las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de movimiento de Newton. Sin embargo, el inconveniente que presenta este método es que el análisis se complica notablemente cuando aumenta el número de articulaciones del robot. En estos casos, es conveniente emplear las ecuaciones de movimiento de Euler–Lagrange, las cuales reciben el nombre de Lagrange, debido a que fue él primero que las dio a conocer en 1788 [44].

La ecuación de movimiento de Euler–Lagrange permite deducir el modelo dinámico de un robot con n grados de libertad:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ representa el vector de posiciones articulares o coordenadas generalizadas, $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de velocidades articulares, $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de pares aplicados, donde el i -ésimo par τ_i se encuentra asociado con la i -ésima coordenada generalizada q_i , y $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de fuerzas o pares de fricción que depende de la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$; $t \in \mathbb{R}_+$ representa el tiempo, $n \in \mathbb{N}$ es el número de grados de libertad [1, 44].

El lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ de un robot de n grados de libertad se define como la diferencia entre la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2.2)$$

El uso de las ecuaciones de Lagrange para el modelado dinámico de manipuladores se reduce 6 pasos [1, 44]:

P1. Obtener la **cinemática directa** del centro de masa de cada uno de los eslabones. Para el i -ésimo eslabón se deben tomar en cuenta las longitudes anteriores l_{i-1} y ángulos q_i y q_{i-1} :

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(l_{i-1}, l_i, l_{ci-1}, l_{ci}, q_{i-1}, q_i) \quad (2.3)$$

P2. Calcular la **velocidad** del i -ésimo eslabón:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

P3. Evaluar la **rapidez lineal** del centro de masa de cada eslabón, la cual se calcula usando la norma Euclidiana:

$$\|\mathbf{v}_i\|^2 = \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \quad (2.5)$$

P4. Obtener las **energías**:

P4 (a) Se procede a obtener la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, la cual incluye el movimiento de traslación y rotación, definida como:

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} I_i \left[\sum_i^n \dot{q}_i \right]^2 \quad (2.6)$$

donde I_i es el momento de inercia del i -ésimo eslabón.

P4 (b) Se calcula la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$, la cual se define como:

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = mgh \quad (2.7)$$

siendo h una función que indica la altura del eslabón con respecto al origen del sistema de referencia del servomecanismo.

P5. Se calcula el Lagrangiano usando (2.2).

P6. Se evalúa el Lagrangiano en la ecuación de movimiento de Euler–Lagrange y se incluye el modelo de fricción.

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) \quad (2.8)$$

2.1.2. Modelo dinámico

Sea un robot manipulador de n grados de libertad (GDL) formado por eslabones rígidos, conectados por uniones libres de fricción y elasticidad. La energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ asociada a tal dispositivo mecánico articulado se relaciona con la matriz de inercias $M(\mathbf{q})$ de la siguiente manera [1, 44]:

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.9)$$

donde $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica definida positiva.

La energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}$ no tiene una forma específica como el caso de la energía cinética, pero se sabe que depende del vector de posiciones articulares $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

El lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ se obtiene reemplazando la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ en (2.2):

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2.10)$$

Con esta forma para el lagrangiano, la ecuación de movimiento de Lagrange (2.2) incluyendo el fenómeno de fricción puede expresarse como [1, 44]:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) \quad (2.11)$$

donde, luego de resolver, se obtiene:

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) \quad (2.12)$$

De modo compacto el modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad, formado con eslabones rígidos conectados por articulaciones libres de elasticidad en cadena cinemática abierta se define como [1, 44]:

$$M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.13)$$

donde $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de posición, velocidad y aceleración en coordenadas articulares, respectivamente. $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, la cual es cuadrada, simétrica y definida positiva; $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de Coriolis y fuerzas centrípetas; $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el par gravitacional; $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de pares de fricción presente en cada articulación del robot. Además, se tienen las definiciones:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \quad (2.14)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.15)$$

2.1.2.1. Modelo dinámico de robots con fricción

Los efectos de fricción en sistemas mecánicos son fenómenos complicados que dependen de múltiples factores como la naturaleza de los materiales en contacto, lubricación entre ellos, temperatura, etcétera. Se distinguen dos familias de modelos de fricción: los modelos estáticos en los que la fuerza o par de fricción viene dada en función de la velocidad instantánea relativa entre los cuerpos, y los modelos dinámicos, que dependen del pasado de la velocidad relativa [44].

En los modelos estáticos, la fricción es modelada por un vector $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ que depende solamente de la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$. Los efectos de fricción son locales, es decir, $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}})$ puede expresarse como:

$$\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} f_1(\dot{q}_1) \\ f_2(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ f_n(\dot{q}_n) \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Es importante notar que el fenómeno de fricción es disipativo, esto significa que la energía mecánica se transforma en energía térmica, es decir, satisface [1, 44]:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) > 0. \quad (2.17)$$

El aspecto disipativo se traduce como desgaste y envejecimiento en las partes mecánicas del robot. Sin embargo, el fenómeno de fricción ayuda a generar la región de atracción para puntos de equilibrio estables, [1].

Gracias a su característica principal en velocidades diferentes a cero y con entradas acotadas dentro del primer y tercer cuadrante, se pueden considerar los modelos tradicionales de fricción como una combinación lineal de la fricción viscosa, la fricción de Coulomb y la fricción estática, definida de la siguiente manera:

$$\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) = B\dot{\mathbf{q}} + F_c \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) + \begin{bmatrix} [1 - |\text{sgn}(\dot{q}_1)|] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [1 - |\text{sgn}(\dot{q}_2)|] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [1 - |\text{sgn}(\dot{q}_n)|] \end{bmatrix} \mathbf{f}_e \quad (2.18)$$

donde $B, F_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales de coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb, respectivamente. La fricción estática $\mathbf{f}_e \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ está representada por $\mathbf{f}_e = [f_{e1}, f_{e2}, \dots, f_{en}]^T$ que es el vector de fricción estática que contiene los coeficientes de fricción estática de cada uno de los servomotores del robot manipulador. En velocidades cero únicamente está presente la fricción estática [1].

2.1.2.2. Modelo dinámico con accionadores

En un robot manipulador real, el vector de pares $\tau \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es suministrado por accionadores que tradicionalmente son de tipo electromecánico, neumático o hidráulico. Dichos accionadores relacionan dinámicamente el par o fuerza suministrado con la entrada de dicho accionador.

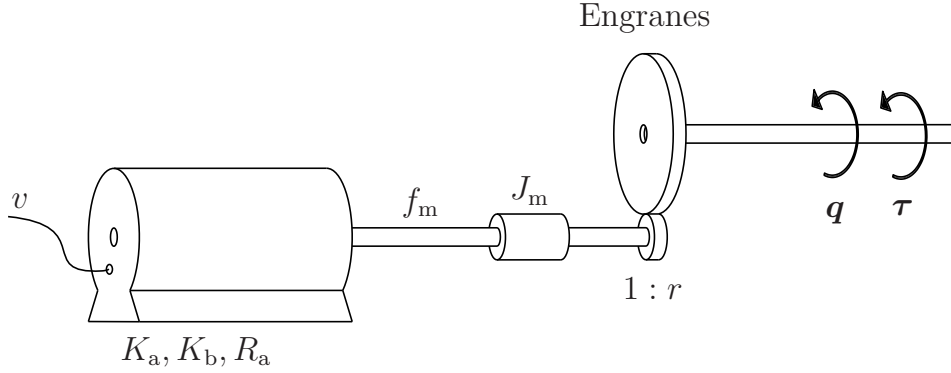


Figura 2.2: Motor de CC.

En el caso donde los accionadores son motores de Corriente Continua (CC), un modelo dinámico lineal simplificado con inductancia de armadura despreciable, como el mostrado en la Figura 2.2, está dado por:

$$J_m \ddot{q} + f_m \dot{q} + \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q} + \frac{\tau}{r^2} = \frac{K_a}{r R_a} v \quad (2.19)$$

donde J_m es la inercia del rotor [kg m^2]; K_a es la constante del motor-par [Nm/A]; R_a resistencia de armadura [Ω]; K_b constante de contrarreacción electromotriz [Vs/rad]; f_m coeficiente de fricción del rotor con sus soportes [N m]; τ par neto aplicado después del juego de engranes sobre el eje de la carga [N m]; q posición angular del eje de la carga [rad]; r relación de reducción de los engranes (en general $r \gg 1$); y v voltaje de armadura [V], [44].

Considerando que cada uno de los accionadores de las n articulaciones es un motor de CC.

$$J \ddot{\mathbf{q}} + B \dot{\mathbf{q}} + R \boldsymbol{\tau} = K \mathbf{v} \quad (2.20)$$

con $J = \text{diag}\{J_{m_i}\}$; $B = \text{diag}\left\{f_{m_i} + \left(\frac{K_a K_b}{R_a}\right)_i\right\}$; $R = \text{diag}\left\{\frac{1}{r_i^2}\right\}$ y $K = \text{diag}\left\{\left(\frac{K_a}{R_a}\right)_i \frac{1}{r_i}\right\}$ donde para cada motor ($i = 1, \dots, n$), J_{m_i} es la inercia del rotor, f_{m_i} es el coeficiente de amortiguamiento, $(K_a K_b / R_a)_i$ es una constante electromecánica y r_i es la tasa de reducción del juego de engranes [44].

El modelo dinámico completo de un manipulador (considerando fricción en las articulaciones) cuyos accionadores se localizan en las articulaciones se obtiene reemplazando τ de (2.20) en (2.13):

$$\tau = [RM(\mathbf{q}) + J]\ddot{\mathbf{q}} + RC(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + R\mathbf{g}(\mathbf{q}) + R\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) + B\dot{\mathbf{q}} = K\mathbf{v}. \quad (2.21)$$

Es importante resaltar que los parámetros involucrados en la ecuación (2.20), dependen exclusivamente de los accionadores, y no del manipulador ni de su carga. Entonces, es razonable suponer conocidos y constantes dichos parámetros. Como la relación de engranes r_i se supone no nula, entonces la matriz R es no singular por lo que R^{-1} existe y la ecuación (2.21) puede escribirse como:

$$\tau = M'(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) + R^{-1}B\dot{\mathbf{q}} = R^{-1}K\mathbf{v} \quad (2.22)$$

donde $M'(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q}) + R^{-1}J$.

2.1.3. Propiedades del modelo dinámico

A pesar de la complejidad de la ecuación dinámica (2.13) que gobierna el comportamiento de los robots manipuladores, esta ecuación y los elementos que la forman poseen propiedades que resultan de interés por sí mismas. Una particularidad importante de la ecuación dinámica (2.13), que entre paréntesis es no lineal en el vector de estado $[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]^T$, es que puede expresarse en términos lineales de los parámetros dinámicos del robot, por ejemplo de las masas e inercias.

2.1.3.1. Matriz de inercia

La matriz de inercia $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica definida positiva cuyos elementos son funciones solamente de $\mathbf{q}$. La matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ satisface las siguientes propiedades:

Propiedad 1. [44] *Existe una constante real positiva α tal que:*

$$M(\mathbf{q}) \geq \alpha \mathbf{I}, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (2.23)$$

donde $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad. La matriz $M(\mathbf{q})^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existe y es definida positiva. ■

Propiedad 2. [44] *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $\beta > 0$ tal que:*

$$\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\} \geq \beta \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (2.24)$$

una manera sencilla de calcular β es la dada por:

$$\beta \geq n \left[\max_{i,j,\mathbf{q}} |M_{ij}(\mathbf{q})| \right] \quad (2.25)$$

donde $M_{ij}(\mathbf{q})$ denota al ij -ésimo elemento de la matriz $M(\mathbf{q})$.

■

Propiedad 3. [44] *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_M > 0$ tal que:*

$$\|M(\mathbf{x})\mathbf{z} - M(\mathbf{y})\mathbf{z}\| \leq k_M \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{z}\| \quad (2.26)$$

para todo vector $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Una manera sencilla de determinar k_M es:

$$k_M \geq n^2 \left[\max_{i,j,k,\mathbf{q}} \left| \frac{\partial M_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right| \right] \quad (2.27)$$

■

Propiedad 4. [44] *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k'_M > 0$ tal que:*

$$\|M(\mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq k'_M \|\mathbf{y}\| \quad (2.28)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

■

2.1.3.2. Matriz de Coriolis y fuerzas centrífugas

La matriz de Coriolis y fuerzas centrífugas $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ cuyos elementos son funciones de $\mathbf{q}$ y $\dot{\mathbf{q}}$, satisface las siguientes propiedades:

Propiedad 5. [44] *La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ puede no ser única, pero el vector $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ es único.* ■

Propiedad 6. [44] *$C(\mathbf{q}, \mathbf{0})$ para todo vector, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.* ■

Propiedad 7. [44] *Para todo vector $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y escalar α tiene que:*

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} = C(\mathbf{q}, \mathbf{y})\mathbf{x} \quad (2.29)$$

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{z} + \alpha\mathbf{x})\mathbf{y} = C(\mathbf{q}, \mathbf{z})\mathbf{y} + \alpha C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} \quad (2.30)$$

■

Propiedad 8. [44] *El vector $C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}$ puede expresarse en la forma:*

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T C_1(\mathbf{q})\mathbf{y} \\ \mathbf{x}^T C_2(\mathbf{q})\mathbf{y} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T C_n(\mathbf{q})\mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

donde $C_k(\mathbf{q})$ son matrices simétricas de dimensión n para todo $k = 1, 2, \dots, n$. De hecho, el ij -ésimo elemento $C_{kij}(\mathbf{q})$ de la matriz $C_k(\mathbf{q})$ corresponde al símbolo de Christoffel $C_{jik}(\mathbf{q})$. ■

Propiedad 9. [44] *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_{C_1} > 0$ tal que:*

$$\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| = k_{C_1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad (2.32)$$

para todo $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. ■

Propiedad 10. [44] *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existen constantes $k_{C_1} > 0$ y $k_{C_2} > 0$ tales que:*

$$\|C(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{w} - C(\mathbf{y}, \mathbf{v})\mathbf{w}\| \leq k_{C_1}\|\mathbf{z} - \mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| + k_{C_2}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|\|\mathbf{w}\|\|\mathbf{z}\| \quad (2.33)$$

para todo $\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. ■

Propiedad 11. [44] *La matriz $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ está relacionada con la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$ por la expresión:*

$$\mathbf{x}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (2.34)$$

donde

$$\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.35)$$

es una matriz antisimétrica. De igual manera resulta cierto que:

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.36)$$

Independientemente de la manera en la que se obtenga $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, está siempre satisfecha:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{M}(\mathbf{q}) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} \equiv 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (2.37)$$
■

2.1.3.3. Vector de gravedad

El vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ depende sólo de las posiciones articulares $\mathbf{q}$. El vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ está acotado si $\mathbf{q}$ lo está también. Adicionalmente, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ tiene las siguientes propiedades:

Propiedad 12. [44] *El vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ y el vector de velocidad $\dot{\mathbf{q}}$ pueden relacionarse mediante:*

$$\int_0^T \mathbf{g}^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} dt = \mathcal{U}(\mathbf{q}(T)) - \mathcal{U}(\mathbf{q}(0)) \quad (2.38)$$

para todo $T \in \mathbb{R}_+$. ■

Propiedad 13. [44] *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante finita $k_{\mathcal{U}}$ tal que:*

$$\int_0^T \mathbf{g}^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} dt - \mathcal{U}(\mathbf{q}(T)) \geq k_{\mathcal{U}} \quad (2.39)$$

para todo $T \in \mathbb{R}_+$ y donde $k_{\mathcal{U}} = \min_{\mathbf{q}} \{\mathcal{U}(\mathbf{q})\}$

■

Propiedad 14. [44] *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, el vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es Lipschitz; es decir, existe una constante $k_g > 0$ tal que:*

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq k_g \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (2.40)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Una forma sencilla de calcular k_g es como:

$$k_g \geq n \left[\max_{i,j,\mathbf{q}} \left| \frac{\partial \mathbf{g}_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right| \right] \quad (2.41)$$

Además, k_g satisface:

$$k_g \geq \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \geq \lambda_{\max} \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\} \quad (2.42)$$

■

Propiedad 15. [44] *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante k' tal que:*

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| \leq k' \quad (2.43)$$

para todo $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

■

2.2. Moldeo de Energía

El moldeo de energía es una de las técnicas más utilizadas para diseñar algoritmos de control de movimiento de robots [1,2]. El moldeo de energía es control dinámico, es decir no sólo requiere la estructura matemática del modelo dinámico del robot, también sus propiedades matemáticas para generar los pares o torques (energía aplicada) con la finalidad de alcanzar los objetivos de control (por ejemplo, generar un punto de equilibrio con un atractor asintóticamente estable). El moldeo de energía se define como

$$\tau = \nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) - f_v(K_v, \dot{q}) + g(q) \quad (2.44)$$

donde $\tilde{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de errores de posición que se define como: $\tilde{q} = q_d - q$, siendo $q_d \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ un vector constante de referencias deseadas, $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representan las matrices de ganancias proporcional (diagonal definida positiva) y derivativa (definida positiva), respectivamente. $f_v(K_v, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de amortiguamiento o freno mecánico que permite generar el efecto disipativo de control a través de la inyección de velocidad $\dot{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q})$ es la energía potencial articular de diseño, la cual es una función definida positiva. $\nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q})$ es el gradiente de la energía potencial artificial, es decir:

$$\nabla \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}_a(K_p, \tilde{q})}{\partial \tilde{q}} \quad (2.45)$$

2.3. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

Dentro del área de ingeniería el concepto de estabilidad tiene varias facetas, por ejemplo estabilidad exponencial, clásica, absoluta, entrada-salida, $\mathcal{L}$ y en el sentido de Lyapunov. Sin embargo, la que mayor ventaja ofrece es la teoría de estabilidad de Lyapunov debido a que proporciona varias propiedades matemáticas que facilitan el análisis y diseño de esquemas de control [1].

La teoría de estabilidad de Lyapunov tiene como principal objetivo estudiar el comportamiento de sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales de la forma [1,44] :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad \forall t \geq 0, \quad (2.46)$$

donde el vector $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ se refiere al estado del sistema dinámico representado por (2.46) y $x(0) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ se denomina la condición inicial o estado inicial. La función $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 1}$ es una función continua en t y $x(t)$.

Esta teoría establece que para toda condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ que se encuentra dentro del atractor, si el sistema tiene un estado de equilibrio asintóticamente estable, la energía acumulada del sistema dentro del dominio de atracción cae al evolucionar el tiempo, hasta alcanzar un valor mínimo en su punto de equilibrio [1].

Definición 1. [1] El concepto de **atractor** o **región de atracción** significa que para cada solución de la trayectoria $\mathbf{x}(t)$ que empieza suficientemente cercana a cero, a partir de t_0 se aproxima al origen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ como el tiempo evoluciona. es decir $t_0 + t \rightarrow \infty$. ■

Un concepto que, a pesar de su sencillez, juega un papel clave en la teoría de estabilidad de Lyapunov es el **equilibrio** definido como:

Definición 2. [44] Un vector constante $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un equilibrio o estado de equilibrio del sistema (2.46) si

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_e) = \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0 \quad (2.47)$$

■

Como consecuencias inmediatas de la definición de equilibrio, se tiene que si la condición inicial $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es justamente un equilibrio $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, entonces se satisface:

- $\mathbf{x} = \mathbf{x}_e \quad \forall t \geq 0$
- $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0$

Tradicionalmente se supone que el origen del espacio de estado $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, es un equilibrio de (2.46). Si éste no es el caso, puede demostrarse que mediante un cambio adecuado de coordenadas, cualquier equilibrio de (2.46) puede trasladarse al origen del espacio de estado.

El concepto de **estabilidad** se define como:

Definición 3. [44] El origen $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un equilibrio estable (en el sentido de Lyapunov) de la Ecuación (2.46) si para cada número $\epsilon > 0$ se puede encontrar un número $\delta > 0$, tal que:

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0 \quad (2.48)$$

■

Debe tenerse claro que la definición de estabilidad requiere la existencia de un $\delta > 0$ para cada $\epsilon > 0$ y no para algún $\epsilon > 0$. La estabilidad del origen debe ser interpretada como dada una pequeña discrepancia de la condición inicial $\mathbf{x}(0)$ con respecto al equilibrio (origen), la solución $\mathbf{x}$ correspondiente permanecerá acotada, tal como se muestra en la Figura 2.3.

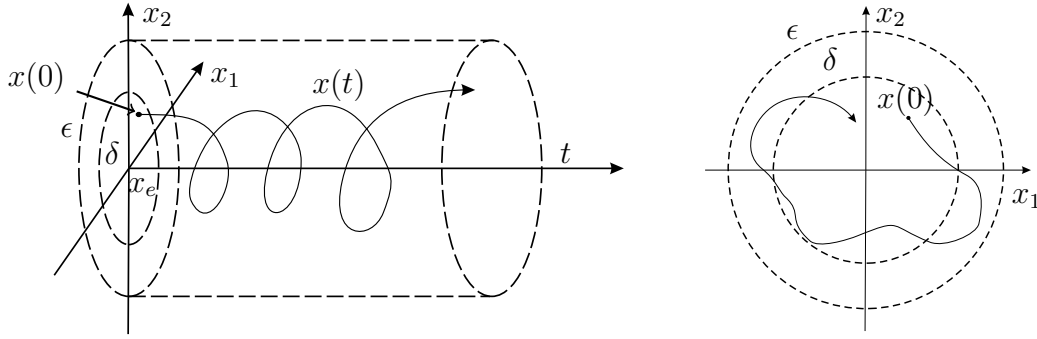


Figura 2.3: Superposición.

Otro concepto importante es **estabilidad asintótica** definido como:

Definición 4. [44] El origen $x = 0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un equilibrio asintóticamente estable de (2.46) si:

1. El origen es estable.
2. El origen es atractivo, es decir, existe un número $\delta' > 0$ tal que:

$$\|x(0)\| < \delta' \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \text{ tiende a } \infty_+ \quad (2.49)$$

■

La Figura 2.4 ilustra el concepto de estabilidad asintótica para el caso de una condición inicial $x(0) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

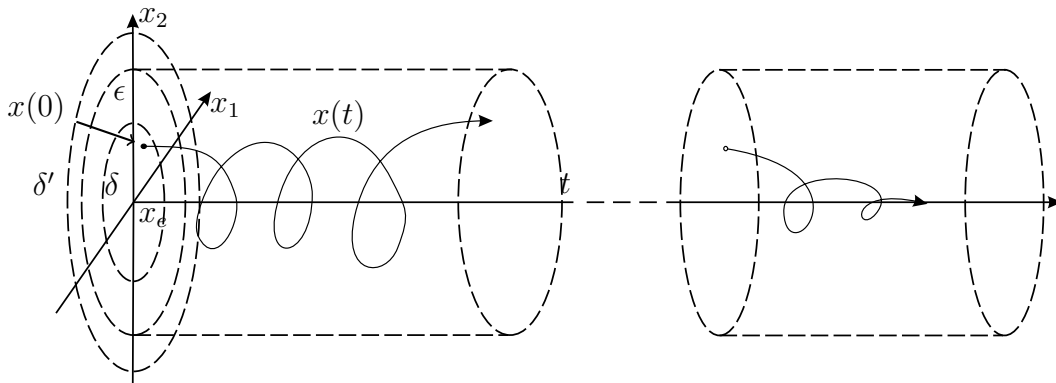


Figura 2.4: Estabilidad asintótica.

2.3.1. Métodos para el análisis de estabilidad

La teoría básica de Lyapunov comprende dos métodos introducidos por Lyapunov. El **método indirecto**, o **método de linealización**, establece que las propiedades de estabilidad de un sistema no lineal en las inmediaciones de un punto de equilibrio son esencialmente las mismas que las de su aproximación linealizada al rededor de una vecindad pequeña del punto de equilibrio. El **método directo** es una generalización de los conceptos de energía asociados con un sistema mecánico: el movimiento de un sistema mecánico es estable si su energía mecánica total disminuye todo el tiempo (energía decreciente) [8].

2.3.2. Método directo o de linealización

El método de linealización de Lyapunov se ocupa de la *estabilidad local* de un sistema no lineal. El método de linealización de Lyapunov sirve como la justificación fundamental para el uso de técnicas de control lineal en la práctica; es decir, muestra que el diseño estable por control lineal garantiza la estabilidad del sistema físico original a nivel local [8].

Sea la matriz constante $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para denotar la matriz jacobiana del sistema dinámico (2.46) con respecto a $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ en el punto de equilibrio $x = 0$.

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \bigg|_{x=0} \quad (2.50)$$

tal que, el sistema lineal:

$$\dot{x} = Ax \quad (2.51)$$

es llamado *linealización* (o aproximación lineal) del sistema no lineal original (2.46) en el punto de equilibrio $x = 0$. Teniendo en cuenta que, la estabilidad del sistema lineal (2.51) y la del sistema no lineal original (2.46) se relaciona de la siguiente manera, [8]:

- Si el sistema linealizado es estrictamente estable (en relación a los valores propios de A), entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable (para el sistema no lineal real).
- Si el sistema linealizado es inestable, entonces el punto de equilibrio es inestable (para el sistema no lineal).
- Si el sistema linealizado es marginalmente estable, entonces no se puede concluir nada a partir de la aproximación lineal (el equilibrio punto puede ser estable, asintóticamente estable o inestable para el sistema no lineal).

El teorema de linealización de Lyapunov muestra que se debe diseñar un controlador de manera que el sistema permanezca en su *rango lineal*. También enfatiza las principales limitaciones del diseño lineal: ¿qué tan grande es el rango lineal? ¿Cuál es el grado de estabilidad?. Estas preguntas motivan un enfoque más profundo del problema del control no lineal; es decir, el método directo de Lyapunov, [8].

2.3.3. Método directo

La idea es construir una función escalar similar a la energía (una función de Lyapunov) para el sistema y ver si disminuye. El poder de este método proviene de su generalidad: es aplicable a todo tipo de sistemas de control, ya sean variables en el tiempo o invariantes en el tiempo, de dimensión finita o de dimensión infinita. Por el contrario, la limitación del método radica en el hecho de que a menudo es difícil diseñar una función de Lyapunov para un sistema dado. Es importante mencionar que a continuación se presentan los teoremas comúnmente más utilizados en el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov, [1, 8, 44].

2.3.3.1. Función candidata de Lyapunov

La propuesta de la función de Lyapunov es importante debido a que su estructura matemática permite demostrar las propiedades de estabilidad del punto de equilibrio del modelo dinámico (2.46). Una función $V(\mathbf{x})$ es una función candidata de Lyapunov para el equilibrio $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ de la ecuación $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ si $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ cumple con lo siguiente [1]:

- $V(\mathbf{x}) > 0$ es una función definida positiva.
- $\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ es una función continua con respecto a $\mathbf{x}$.
- La derivada con respecto al tiempo $\dot{V}(\mathbf{x}) \exists$ y es una función continua con respecto a $\mathbf{x}$.

donde, la derivada con respecto al tiempo de la función candidata de Lyapunov es:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V^T(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (2.52)$$

2.3.3.2. Estabilidad global

El punto de equilibrio del sistema dinámico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ es estable si, existe una función candidata de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ con derivadas parciales continuas con respecto a $\mathbf{x}$, tal que su derivada temporal satisfaga [1]:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (2.53)$$

Definición 5. [11] *Se llama **función de Lyapunov** a una función continuamente diferenciable $V(\mathbf{x})$ definida positiva $V(\mathbf{x}) > 0$ cuya derivada $\dot{V} \leq 0$ es semidefinida negativa.*

■

Es decir, que si se ha demostrado como mínimo *estabilidad* del punto de equilibrio, entonces la *función candidata de Lyapunov* pasa a llamarse **función de Lyapunov**.

2.3.3.3. Estabilidad asintótica global

El punto de equilibrio del sistema dinámico $\dot{x} = f(x)$ es asintóticamente estable si:

- Si $\exists$ una función candidata de Lyapunov $V(x) > 0$ tal que $\dot{V}(x) < 0$, entonces se cumple que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

La propuesta de la función candidata de Lyapunov tal que su derivada satisfaga las condiciones de una función definida negativa no es trivial, depende de la intuición y experiencia del diseñador [1].

En control de robots la **estabilidad** no es importante. La parte clave y relevante que debe ser atribuible al algoritmo de control involucrado en el punto de equilibrio del modelo dinámico es la *estabilidad asintótica global* [1].

Definición 6. [1] *Los conceptos de **estabilidad global** y **estabilidad asintótica global** significan que el punto de equilibrio es único.*

■

2.3.4. Superficies de Lyapunov

La superficie $V(x) = c$, para algún $c > 0$, es conocida como superficie de Lyapunov o superficie de nivel. En la Figura 2.5 se muestran superficies de Lyapunov para valores crecientes de c . La condición $\dot{V} \leq 0$ implica que cuando una trayectoria cruza una superficie de Lyapunov $V(x) = c$, se mueve dentro del conjunto $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^{n \times 1} \mid V(x) \leq c\}$ y nunca vuelve a salir. Cuando $\dot{V} < 0$, la trayectoria se mueve desde una superficie de Lyapunov a una superficie interior de Lyapunov con una c más pequeña. A medida que c disminuye, la superficie de Lyapunov $V(x) = c$ se contrae hasta el origen, mostrando que la trayectoria se acerca al origen a medida que avanza el tiempo [11].

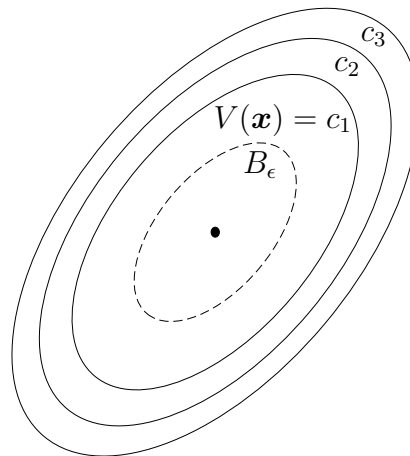


Figura 2.5: Superficies de Lyapunov.

Si solo sabemos que $\dot{V} \leq 0$, no podemos estar seguros de que la trayectoria se acerque al origen, pero podemos concluir que el origen es estable ya que la trayectoria puede estar contenida dentro de cualquier esfera B_ϵ : al requerir que el estado inicial $\mathbf{x}(0)$ se encuentre dentro de una superficie de Lyapunov contenida en esa esfera [11].

2.4. Cinemática analítica de Euler

El modelado mediante las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange se vió en la sección 2.1. Sin embargo el primer paso del modelado requiere la cinemática asociada al robot manipulador. Cinemática es la parte de la física que estudia el movimiento de sistemas mecánicos, sin tomar en cuenta las fuerzas que lo originan. Por lo tanto, no involucra ecuaciones diferenciales como en el caso de modelos dinámicos [1].

Al estudio de la cinemática aplicado a la robótica se denomina cinemática directa. La cinemática directa es el estudio analítico del movimiento del robot con respecto a un sistema de referencia cartesiano fijo $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ relacionando la dependencia que existe entre las coordenadas articulares o generalizadas $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ con las coordenadas cartesianas $[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ y la orientación $[\phi, \theta, \psi]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ del extremo final del robot (donde habitualmente se coloca la herramienta de trabajo). La cinemática directa es un mapeo vectorial $\mathbf{f}_R : \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times 1}$ tal que:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(l_i \mathbf{q}) \quad (2.54)$$

donde n indica el número de grados de libertad y la dimensión del vector de coordenadas articulares $\mathbf{q}$, m es la dimensión conjunta de las coordenadas cartesianas y la orientación de la herramienta de trabajo.

2.4.1. Matrices de rotación

La Figura 2.6 muestra dos sistemas de referencia cartesianos, asociados a un cuerpo rígido, representados por $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ y $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$, ambos sistemas comparten el mismo origen. El sistema de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ mantiene una orientación relativa al sistema de referencia fijo $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$. Considérese un punto p sobre el cuerpo rígido, con respecto al sistema $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ tiene coordenadas $\mathbf{p}_0 = [x_0, y_0, z_0]^T$, el mismo punto p se representa como $\mathbf{p}_1 = [x_1, y_1, z_1]^T$ con respecto al sistema de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ [1, 2]. El problema que se plantea es encontrar la relación que hay entre las coordenadas de un punto $\mathbf{p}_1$ en el sistema de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ con el vector $\mathbf{p}_0$ definido en el sistema de referencia $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$. tal que:

$$\mathbf{p}_0 = R_0^1 \mathbf{p}_1 \quad (2.55)$$

donde la matriz $R_0^1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz de transformación de las coordenadas del punto p del sistema de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ hacia las coordenadas del sistema $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$. En otras palabras, dado un punto

p_1 en el sistema $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$, entonces $R_0^1 p_1$ representa el mismo vector expresado con respecto al sistema de referencia $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$.

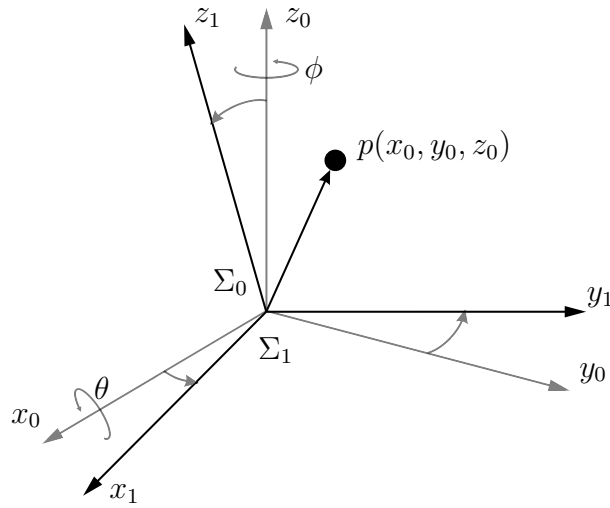


Figura 2.6: Sistemas de referencia fijo Σ_0 y rotado Σ_1 .

Las matrices R_x , R_y y R_z que relacionan la orientación θ del sistema de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ relativo a $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ al rededor los ejes x_0 , y_0 y z_0 respectivamente se pueden obtener analizando las proyecciones geométricas. En este documento no se realiza dicho análisis; sin embargo puede consultarlo en [1, 2]. La matriz de rotación $R_x(\theta)$ se define como:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

La matriz de rotación $R_y(\theta)$ se define como:

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

De igual manera la matriz de rotación $R_z(\theta)$ se ha definido como:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

2.4.2. Ángulos de Euler

Generalmente la descripción de la orientación del sistema de referencia de la herramienta de trabajo del robot colocada en el extremo final del robot con respecto al sistema de referencia fijo en la base del ro-

bot involucra varias rotaciones sucesivas (composición de rotaciones) [1, 2]. Existen varios métodos que permiten definir el orden o reglas de las rotaciones consecutivas.

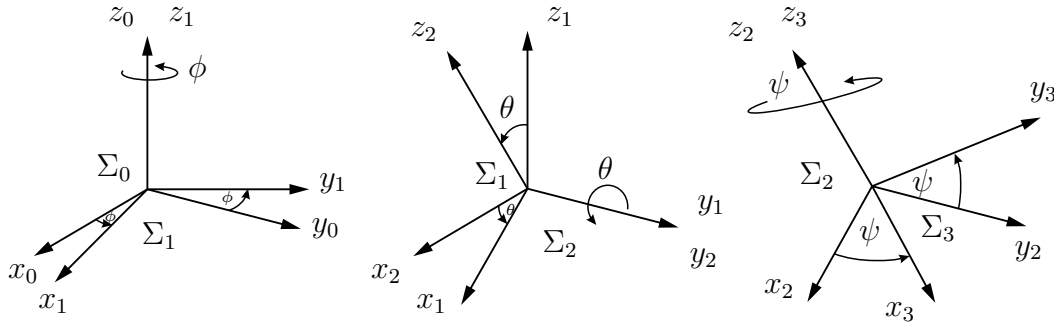


Figura 2.7: Ángulos de Euler.

$$R(\phi, \theta, \psi) = R_z(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi) \quad (2.59)$$

Los ángulos de Euler son una regla de composición de rotaciones usando 3 matrices elementales de rotación mostrada en 2.59 sirve para expresar las rotaciones mostradas en la Figura 2.7.

2.4.3. Transformaciones de traslación y rotación

Considere el sistema de referencia cartesiano fijo $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ y el sistema de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$, donde sus respectivos orígenes son no coincidentes. El origen del sistema de referencia Σ_1 se encuentra desplazado una distancia d_0^1 con respecto al origen del sistema Σ_0 , como se muestra en la figura 2.8.

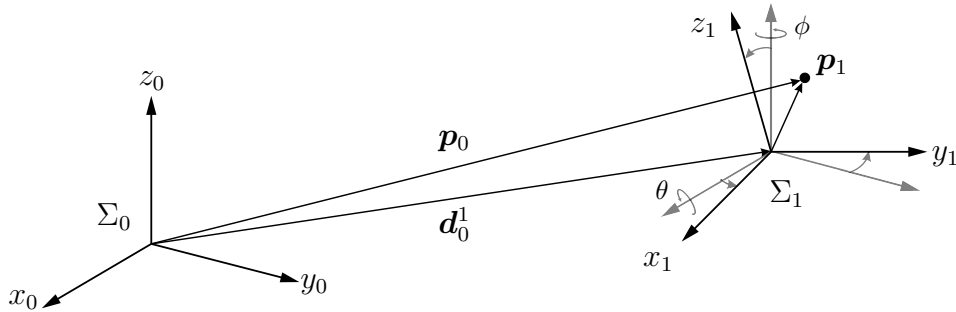


Figura 2.8: Movimientos de traslación y rotación.

La relación general entre los sistemas de referencia $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ y $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ incluyendo la matriz de rotación $R(\phi, \theta, \psi)$ y el vector de traslación d_0^1 es [1, 2]:

$$p_0 = d_0^1 + R(\phi, \theta, \psi)p_1 = d_0^1 + R_z(\phi)R_x(\theta)R_y(\psi)p_1 \quad (2.60)$$

Dado que en el análisis cinemático de robots industriales se asignan los ejes de tal manera que las rotaciones se realizan sobre los ejes z_i y x_i , se considera al ángulo $\psi = 0$, por lo tanto la ecuación fundamental quedará representada por [1, 2]:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + R(\phi, \theta, \psi)\mathbf{p}_1 = \mathbf{d}_0^1 + R_z(\phi)R_x(\theta)R_y(0)\mathbf{p}_1$$

$$\begin{bmatrix} p_{0x} \\ p_{0y} \\ p_{0z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{0x}^1 \\ d_{0y}^1 \\ d_{0z}^1 \end{bmatrix} + R_z(\phi)R_x(\theta)I \begin{bmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \\ p_{1z} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

2.4.4. Matrices antisimétricas

Una matriz antisimétrica, es una matriz cuadrada, que es representada por $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$; se define como:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & 0 & -s_{23} \\ -s_{31} & s_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{si } i \neq j, & s_{ij} + s_{ji} = 0 \\ \text{si } i = j, & s_{ij} = 0 \end{cases}$$

$$S + S^T = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (2.62)$$

donde, los nueve elementos de la matriz S , se reducen a 3 elementos independientes, que denotamos por $s_{12}, s_{13}, s_{23} \in \mathbb{R}$ los cuales son los elementos de un vector. La matriz antisimétrica S puede aceptar como argumento de entrada a vectores $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ con tres coordenadas de los sistemas de referencia cartesianos tridimensionales: función matriz antisimétrica $S = S(\mathbf{p})$ [1, 2].

Propiedad 16. [1] Una matriz antisimétrica $S(\mathbf{p})$ satisface lo siguiente $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$.

$$S(\mathbf{p}) + S^T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_z & -p_y \\ -p_z & 0 & p_x \\ p_y & -p_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

■

Propiedad 17. [1] El producto de $S(\mathbf{p})S^T(\mathbf{p})$ es conmutativo, $S(\mathbf{p})S^T(\mathbf{p}) = S^T(\mathbf{p})S(\mathbf{p})$, el resultado es una matriz simétrica; además:

$$S(\mathbf{p})S^T(\mathbf{p}) = -S^2(\mathbf{p}) \quad (2.64)$$

■

Propiedad 18. [1] Propiedad de escalamiento de $S(\mathbf{p})$: dada una matriz antisimétrica $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, el vector $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, y el escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$S(\alpha\mathbf{p}) = \alpha S(\mathbf{p}) \quad (2.65)$$

■

2.4.5. Propiedades de matrices rotacionales y antisimétricas

Aquí se mencionan algunas de las propiedades de matrices rotacionales y antisimétricas que utilizarán durante el desarrollo de la tesis.

Propiedad 19. [1] *Derivada parcial de una matriz de rotación: $\frac{\partial}{\partial \theta} R(\theta) = S(\mathbf{n})R(\theta)$, donde $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es un vector base unitario. Tal que se cumplen los siguientes puntos:*

- $\frac{\partial}{\partial \theta} R_x(\theta) = S(\theta \mathbf{i})R_x(\theta)$, donde $\mathbf{i} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es un vector base unitario $\mathbf{i} = [1, 0, 0]^T$.
- $\frac{\partial}{\partial \theta} R_y(\theta) = S(\theta \mathbf{j})R_y(\theta)$, donde $\mathbf{j} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es un vector base unitario $\mathbf{j} = [0, 1, 0]^T$.
- $\frac{\partial}{\partial \theta} R_z(\theta) = S(\theta \mathbf{k})R_z(\theta)$, donde $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es un vector base unitario $\mathbf{k} = [0, 0, 1]^T$.

■

Propiedad 20. [1] *Derivada temporal de una matriz de rotación: $\frac{d}{dt} R(\theta) = S(\dot{\theta} \mathbf{n})R(\theta)$, donde $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es un vector base unitario, $\mathbf{w}_0 = \dot{\theta} \mathbf{n}$, tal que se cumplen los siguientes puntos:*

- $\frac{d}{dt} R_x(\theta) = S(\dot{\theta} \mathbf{i})R_x(\theta)$, donde $\mathbf{i} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es un vector base unitario $\mathbf{i} = [1, 0, 0]^T$.
- $\frac{d}{dt} R_y(\theta) = S(\dot{\theta} \mathbf{j})R_y(\theta)$, donde $\mathbf{j} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es un vector base unitario $\mathbf{j} = [0, 1, 0]^T$.
- $\frac{d}{dt} R_z(\theta) = S(\dot{\theta} \mathbf{k})R_z(\theta)$, donde $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es un vector base unitario $\mathbf{k} = [0, 0, 1]^T$.

■

Capítulo 3

Control Adaptable

A continuación se presenta la teoría referente al control adaptable que será usada en el diseño de la estructura de control.

3.1. Introducción

Intuitivamente, un controlador adaptativo puede cambiar su comportamiento en respuesta a cambios en la dinámica del proceso y las perturbaciones [45]. El control adaptativo (CA) tiene el potencial de mejorar el desempeño del control en presencia de incertidumbres o fallas.

A diferencia de las técnicas de control robusto, los parámetros inciertos de la planta se identifican y se compensan directamente en lugar de intentar encontrar el mejor equilibrio entre rendimiento y robustez [46].

Una característica importante del control adaptable es que no necesariamente se requiere conocer *a priori* determinada información sobre la dinámica del robot, como pueden ser las cotas superiores de los efectos físicos o el intervalo de existencia donde se encuentran los parámetros del robot. A pesar de eso, los esquemas de control adaptable pueden mantener el desempeño del sistema dinámico frente a perturbaciones. Los avances recientes en el control adaptable de robots manipuladores se muestran en [32–34, 36–42] con el objetivo de obtener alto desempeño en los algoritmos de control aún en presencia de perturbaciones o dinámica no modelada.

En esta tesis se consideran dos esquemas para el control de robots manipuladores, los métodos de control adaptable con base en el modelo de referencia (Model Reference Adaptive Control MRAC), y los métodos de autosintonía (Self-tuning Regulators SRF). Estos esquemas son similares. El problema clave es encontrar una forma conveniente de cambiar los parámetros del regulador en respuesta a los cambios en la dinámica del proceso y las perturbaciones. Los esquemas difieren solo en la forma en que se ajustan los parámetros del controlador [45].

El esquema MRAC se originó a partir de un problema de servocontrol determinista y el esquema de STR de un problema de regulación estocástica. A pesar de sus diferentes orígenes, están estrechamente relacionados. Ambos sistemas tienen dos bucles de retroalimentación. El bucle interno es un lazo de retroalimentación ordinario con una planta y un regulador. El regulador tiene parámetros ajustables, que son establecidos por el bucle exterior. Los ajustes se basan en la retroalimentación de las entradas y salidas del proceso. Sin

embargo, los métodos para diseñar el lazo interno y las técnicas utilizadas para ajustar los parámetros en el lazo externo son diferentes [6].

En el diccionario webster se define **Adaptar** como:

Definición 7. [47] *Cambiar el comportamiento para que sea más fácil funcionar en un lugar o situación en particular.* ■

Mientras que para un **sistema adaptativo** se consideran las siguientes definiciones:

Definición 8. [4] *Un sistema de control adaptativo se define como un sistema de control retroalimentado lo suficientemente inteligente como para ajustar sus características en un entorno cambiante para operar de manera óptima de acuerdo con algún criterio específico.* ■

Definición 9. [6] *En uno de los primeros simposios de 1961, una larga discusión terminó con la siguiente definición sugerida: Un sistema adaptativo es cualquier sistema físico que ha sido diseñado con un punto de vista adaptativo.* ■

Por otro lado, se puede encontrar una definición para **control adaptativo** en [6]:

Definición 10. [6] *El control adaptativo es un tipo especial de control retroalimentado no lineal en el que los estados del proceso se pueden separar en dos categorías que cambian a diferentes ritmos. Los estados que cambian lentamente se consideran parámetros.* ■

3.2. Control robusto de alta ganancia

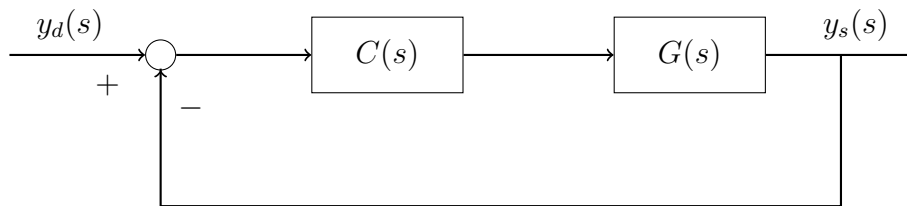


Figura 3.1: Diagrama de bloques de control robusto de alta ganancia

Este es un regulador de ganancia constante diseñado para hacer frente a las variaciones de los parámetros. En la Figura 3.1 se muestra el diagrama de bloques de un control robusto. Hay una retroalimentación de alta ganancia alrededor de la planta, lo que hace que la salida $y_s(s)$ siga la señal de referencia $y_d(s)$ sobre un ancho de banda amplio ω_B ; si el ancho de banda del modelo es menor que ω_B , la salida $y_s(s)$ responderá a la señal de comando $y_d(s)$, según lo especificado por el modelo, incluso si la dinámica del

proceso cambia, también hay un modelo que proporciona la señal de referencia. Este tipo de diseño es útil cuando las incertidumbres no están estructuradas y se conocen de antemano. El control robusto no se considera un sistema adaptable, aunque puede manejar ciertas clase de incertidumbres paramétricas y dinámicas [6].

3.3. Ganancias programadas (Gain Scheduling)

La programación de ganancias se ha empleado con éxito en una variedad de aplicaciones, incluido el control de procesos y el control de sistemas de aeronaves, y puede considerarse como una forma simple de control adaptativo [4].

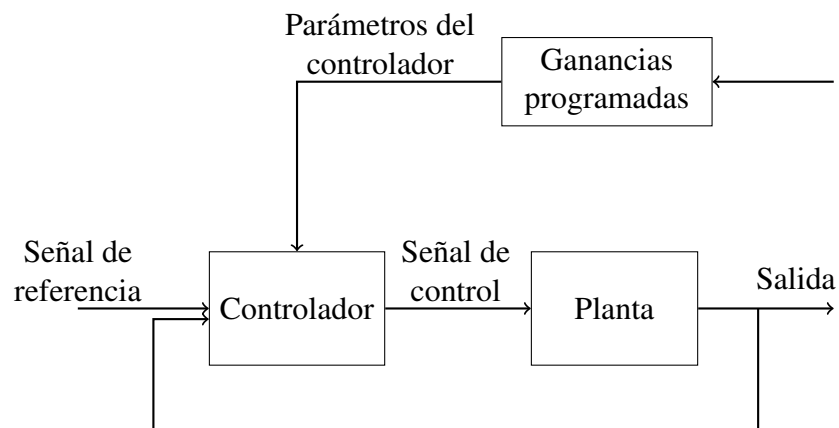


Figura 3.2: Diagrama de bloques de un sistema con ganancias programadas

Las ganancias programadas es un tipo de control de lazo abierto y puede verse como un sistema con control en el que las ganancias se ajustan, pero sin retroalimentación del desempeño del sistema en lazo cerrado, tal como se observa en la Figura 3.2. Es controvertido si la programación de ganancia debe considerarse como un sistema adaptativo o no, porque los parámetros se cambian en lazo abierto [6].

3.4. Control adaptable directo e indirecto

Un controlador adaptable se forma combinando *un estimador de parámetros* en línea que proporciona estimaciones de parámetros desconocidos en cada instante con *una ley de control* con parámetros conocidos. La forma en que el estimador de parámetro, también denominado ley adaptativa o ley de adaptación, se combina con la ley de control da lugar a dos enfoques diferentes [4].

- Control adaptable directo.
- Control adaptable indirecto.

3.4.1. Control adaptable directo

En el primer enfoque, cuyo diagrama de bloques se muestra en la Figura 3.3, los parámetros de la planta se estiman en línea y los parámetros de control se ajustan con base en estas estimaciones. Este procedimiento también se conoce como *control adaptable explícito*, porque el diseño se basa en un modelo explícito de la planta [4, 6].

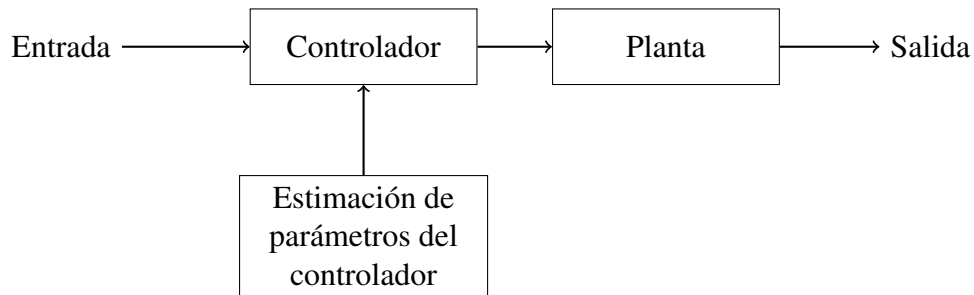


Figura 3.3: Diagrama de bloques de un sistema con control directo

3.4.2. Control adaptable indirecto

En la Figura 3.4 se muestra el diagrama de bloques del control adaptable indirecto. En este caso no se hace ningún esfuerzo para identificar los parámetros de la planta, pero los parámetros de control se ajustan directamente para mejorar un índice de rendimiento. Esto también se conoce como *control adaptable implícito* [4, 6].

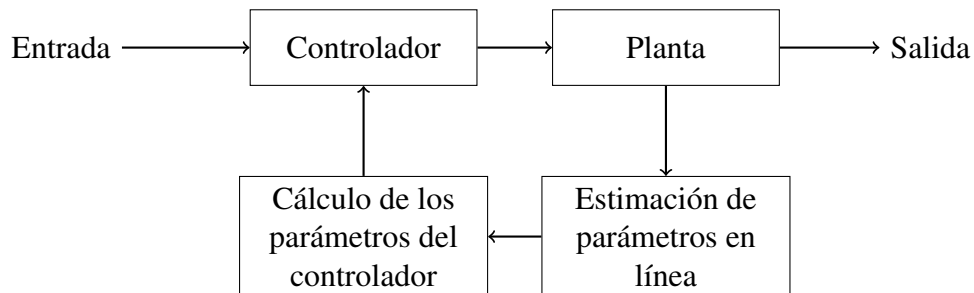


Figura 3.4: Diagrama de bloques de un sistema con control indirecto

3.5. Esquemas de adaptación MRAC y STR

En forma general, el control adaptable se puede clasificar en dos principales esquemas [6, 8, 10]:

- Métodos de control adaptable con base en el modelo de referencia, y
- Métodos de autosintonía.

3.5.1. Control adaptable con base en el modelo de referencia MRAC

El modelo de control adaptable con base en el modelo de referencia es el que se muestra en la Figura 3.5, el cual está formado por el robot manipulador con dinámica desconocida (por ejemplo, fricción o par gravitacional), un modelo de referencia con especificaciones de la respuesta deseada del sistema de control $\mathbf{q}_r$, una ley de control τ con ajuste de parámetros de las ganancias proporcional K_p , y derivativa K_v ; y el algoritmo de adaptación que ajusta los parámetros de la ley de control, tal que se obtenga la respuesta deseada en el robot, por lo que, el error de adaptación $\tilde{\mathbf{q}}_a \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ converja a cero conforme $t \rightarrow \infty$, siendo $\tilde{\mathbf{q}}_a = \mathbf{q}_r - \mathbf{q}$.

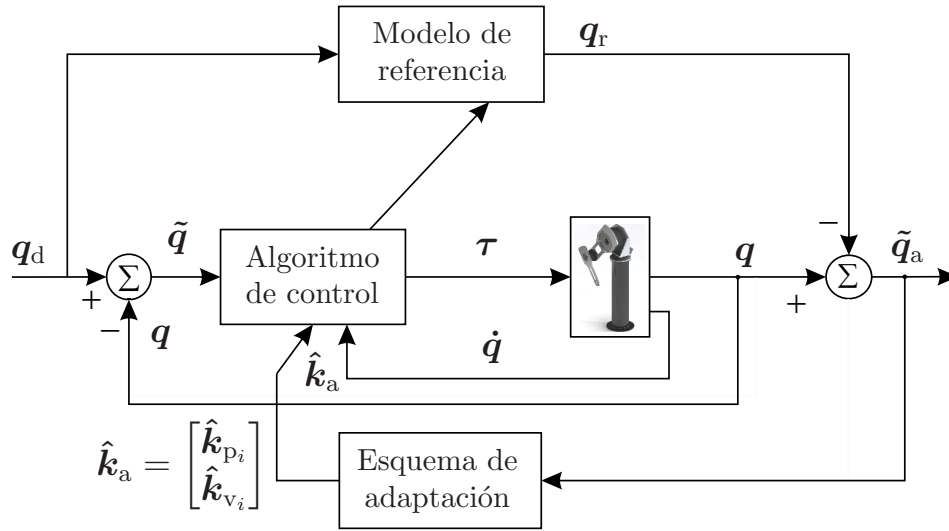


Figura 3.5: Control adaptable con base en el modelo de referencia.

La posición y velocidad de movimiento (ambas son la respuesta del robot) están dadas por los vectores $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$; $\hat{\mathbf{k}}_a \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$ es el vector de parámetros adaptables. El vector $\hat{\mathbf{k}}_a$ corresponde a los elementos de adaptación en la diagonal de las matrices de ganancia proporcional $K_p = \text{diag}\{k_{p_i}\}$ y derivativa $K_v = \text{diag}\{k_{v_i}\}$, para $i = 1, 2, \dots, n$; es decir, $\hat{\mathbf{k}}_a = [\hat{k}_{p1}, \hat{k}_{p2}, \dots, \hat{k}_{pn}, \hat{k}_{v1}, \hat{k}_{v2}, \dots, \hat{k}_{vn}]^T$ [6, 8, 10].

3.5.1.1. Modelo de referencia

El modelo de referencia es utilizado para obtener la respuesta ideal del esquema de control adaptable, de tal forma que el error de adaptación

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}_a \rightarrow \mathbf{0} \quad (3.1)$$

entonces el robot alcanza la posición deseada $\mathbf{q}_d$, a pesar de perturbaciones y dinámica no modelada; en consecuencia, $\mathbf{q}$ tiende a $\mathbf{q}_r$. En otras palabras, los elementos de las ganancias proporcional $\hat{k}_{p_i}$ y derivativa $\hat{k}_{v_i}$, para $i = 1, 2, \dots, n$ son ajustados para que el robot obtenga la respuesta con el desempeño esperado; por ejemplo, tiempo de respuesta, un mínimo de sobre impulsos y alcance el estado estacionario libre de ruido mecánico, vibraciones u oscilaciones [6, 8, 10].

3.5.1.2. Esquema de control

Es el algoritmo que proporciona la energía aplicada τ al robot, cuyo diseño se realizará a través de la técnica de moldeo de energía y la teoría de estabilidad de Lyapunov. Por ejemplo, proponer una energía potencial artificial, tal que, su gradiente forme el término del regulador, y con la incorporación de la acción de control derivativo no lineal más compensación de gravedad, el esquema de control adquiere una estructura bien definida [6, 8, 10].

3.5.1.3. Esquema de adaptación

El esquema de adaptación es utilizado para ajustar los parámetros del algoritmo de control K_p y K_v , tal que, los elementos de la ganancia proporcional $\hat{k}_{pi}$ y los correspondientes a la ganancia derivativa $\hat{k}_{vi}$, con $i = 1, 2, \dots, n$ se adapten hasta obtener la respuesta deseada en el robot. Por lo que, el objetivo de la ley de adaptación es hacer que el error $\tilde{q}_a$ converja al punto de equilibrio, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}_a \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (3.2)$$

En otras palabras, el principal objetivo para diseñar el esquema de adaptación es variar las ganancias de control para garantizar que el sistema dinámico formado por el robot manipulador, el algoritmo de control, así como el propio esquema adaptable tenga un punto de equilibrio asintóticamente estable [6, 8, 10].

3.5.2. Control adaptable con autosintonía

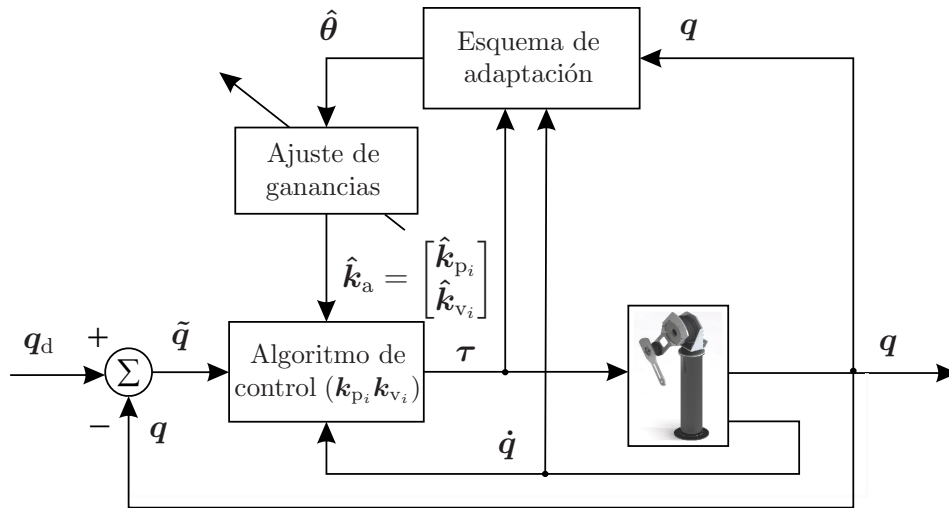


Figura 3.6: Control adaptable con autosintonía.

La Figura 3.6 muestra el diagrama a bloques del algoritmo de control adaptable con autosintonía, el cual realiza simultáneamente la acción de control y la identificación de parámetros de los efectos físicos desconocidos del robot. En cada período de muestreo, el esquema de identificación envía al algoritmo de control

un conjunto de parámetros estimados $\hat{\theta}$ de los efectos físicos del robot, para modificar los elementos de la diagonal en las ganancias de control proporcional $\hat{K}_p$ y derivativa $\hat{K}_v$, es decir,

$$\hat{k}_a = [\hat{k}_{p1}, \hat{k}_{p2}, \dots, \hat{k}_{pn}, \hat{k}_{v1}, \hat{k}_{v2}, \dots, \hat{k}_{vn}]^T \quad (3.3)$$

los cuales se obtienen a partir de observar las señales de salida del algoritmo de control $\tau \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y la respuesta del robot $q, \dot{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, haciendo que la ley de control τ entregue energía mecánica actualizada (adaptable) al robot tal que, el objetivo de control se cumpla.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T \rightarrow \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n \times 1}, \forall t \geq 0 \quad (3.4)$$

La identificación paramétrica de la dinámica desconocida del robot es el proceso de obtener el valor numérico de los parámetros físicos del robot, evidentemente se cuenta con la estructura matemática de estos fenómenos por el conocimiento *a priori*, pero con el desconocimiento de sus valores numéricos. Nótese en el esquema de adaptación en base al modelo de referencia, que los elementos de las ganancias proporcional y derivativa son ajustados de acuerdo al modelo de referencia tal que, los errores de adaptación $\tilde{q}_a$ y de posicionamiento $\tilde{q}$ converjan simultáneamente a cero. Mientras en el esquema de adaptación autosintonizable, los elementos de las ganancias de control son ajustados de acuerdo a la estimación paramétrica de la dinámica desconocida del robot [6, 45].

Es importante hacer notar que, el esquema de identificación que forma parte de la estructura adaptable, no tiene como objetivo fundamental la identificación exacta de los parámetros de la dinámica desconocida del robot, más bien, es realizar la identificación del fenómeno tal que sean sintonizadas las ganancias del algoritmo de control para llevar a cabo la convergencia asintótica hacia el punto de equilibrio de todas las variables de estado que componen la ecuación en lazo cerrado [6, 45].

3.5.2.1. Control Adaptable STR directo e indirecto

Los esquemas básicos de control adaptable autosintonizables, donde se estiman los parámetros del robot manipulador y entonces se ajustan las ganancias de control proporcional y derivativo, se conoce como **control adaptable indirecto**, debido a que se requiere trasladar mediante ciertas reglas operativas los parámetros estimados del robot hacia la sintonía automática de las ganancias de control. Por otro lado, también es posible eliminar el proceso de computo de trasladar los parámetros estimados del robot hacia las ganancias de control, a través de parametrizar directamente la dinámica desconocida del robot como funciones de regresión lineal, donde se incluya las ganancias de control, entonces por medio de estimación paramétrica (por ejemplo, mínimos cuadrados), se obtiene la ley de control modificada que hace que el error de posición $\tilde{q}$ converja asintóticamente hacia el punto de equilibrio. En este caso, esta técnica es conocida como **control adaptable directo** [4, 6].

3.5.3. Relación entre control adaptable con base en el modelo de referencia y la autosintonía

Ambos sistemas tienen dos lazos de retroalimentación. El bucle interno es un lazo de retroalimentación ordinario con una planta y un controlador. El controlador tiene parámetros ajustables, que son establecidos

por el bucle exterior. Los ajustes se basan en la retroalimentación de las entradas y salidas del proceso. Sin embargo, los métodos para diseñar el lazo interno y las técnicas utilizadas para ajustar los parámetros en el lazo externo son diferentes [6].

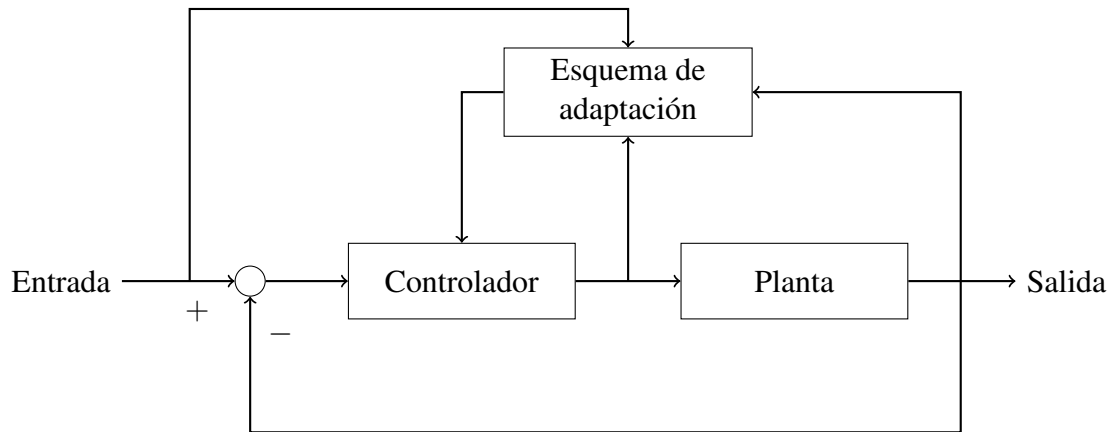


Figura 3.7: Diagrama de bloques general de un control MRAC - STR.

Capítulo 4

Plataforma Experimental

Se presentan los elementos que conforman la plataforma experimental robótica, incluyendo la estructura mecánica, sistema de accionamiento, sensores e instrumentación de control.

4.1. Robot manipulador de 3gdl ROTRADI I

La plataforma se encuentra en el Laboratorio de Control y Robótica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Está conformada por un robot manipulador de transmisión directa de 3gdl ROTRADI I incluyendo la estructura mecánica, transmisiones, sistema de accionamiento, sensores e instrumentación de control. El ROTRADI tiene la ventaja de ser de *arquitectura abierta*, esto implica que pueden ser modificados elementos de hardware y software por el usuario. En este caso se ha modificado parte del hardware de control, dedicado a obtener la señal de los encoders para calcular las posiciones articulares y proporcionar una señal analógica de control a los drivers del robot manipulador.



Figura 4.1: ROTRADI I.

El ROTRADI I cuenta con tres grados de libertad y todas sus articulaciones son de tipo rotacional. La energía para producir movimiento es proporcionada por servomotores. Un servomotor convencional esta

compuesto por un motor eléctrico, un sensor de posición y el amplificador electrónico, o servoamplificador. Un servoamplificador esta constituido por microprocesadores y electrónica de potencia que acondiciona la señal que proviene del sistema de control. El robot ROTRADI I cuenta con servomotores de transmisión directa Dynaserv de la serie DM. La figura 4.2 muestra el motor y el servoamplificador.

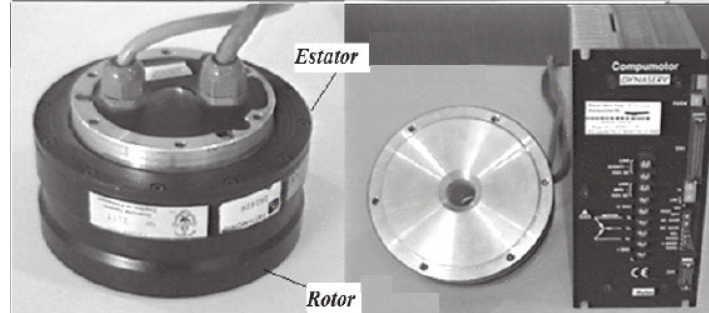


Figura 4.2: Motor y amplificador electrónico.

Un servomotor de transmisión directa es una fuente par; es decir, el par que proporciona como salida se mantiene en magnitud y signo independientemente de la carga que desplace [1]. Un servomotor no puede proporcionar un par de magnitud infinita. en la práctica la respuesta se encuentra acotada por sus límites físicos [1], tal como se observa en la figura 4.3.

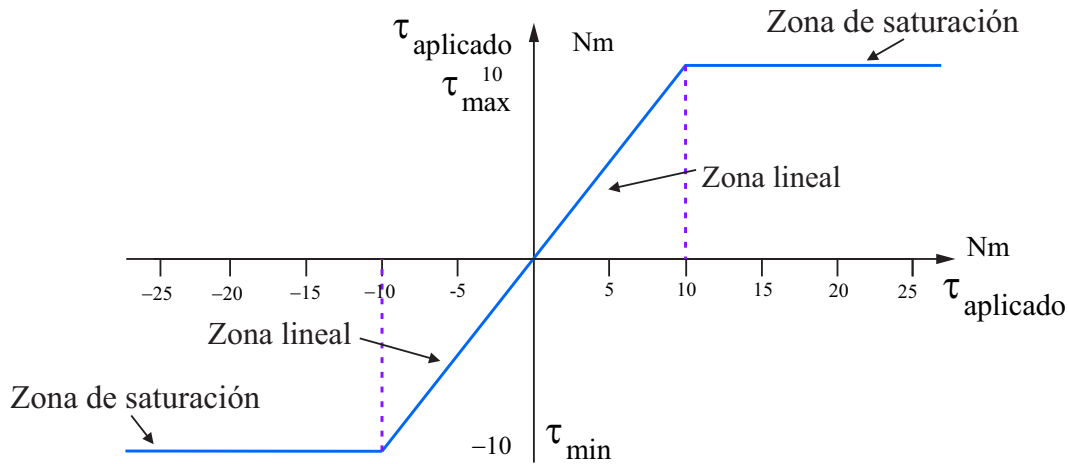


Figura 4.3: Zona lineal y de saturación de un servomotor.

La siguiente tabla muestra las características de los servomotores del robot.

Articulación	Modelo	Par máx	Resolución	Velocidad
Base.	DM-1015	15[Nm]	655360	2.0 rps
Hombro.	DM-1050	50[Nm]	1024000	1.0 rps
Codo.	DM-1004	4 [Nm]	655360	2.5 rps

Tabla 4.1: Características de los servomotores usados en el ROTRADI I.

4.2. Lectura de encoders

El Driver recibe la señal de cuadratura proveniente de los encoders acoplados a cada servomotor y las entrega por medio de uno de sus puertos diseñados para la comunicación entre el driver y la etapa de control, la señal de cuadratura que entrega el Driver es de forma diferencial con la finalidad de disminuir las radio frecuencias o interferencia electromagnética que se podría inducir en la señal por agentes externos.

El robot cuenta con encoders ópticos incrementales por cada articulación, estos consisten en una fuente de luz que se encuentra frente a un disco giratorio con ranuras y en la parte posterior se encuentran celdas sensibles a la luz. Los encoders incrementales de cuadratura tienen como salida cuatro señales A, A-, B y B- las cuales están desfasadas 90°, esto permite calcular el sentido del giro, tal como se muestra en la Figura 4.4. En este trabajo sólo utilizamos las señales A y B.

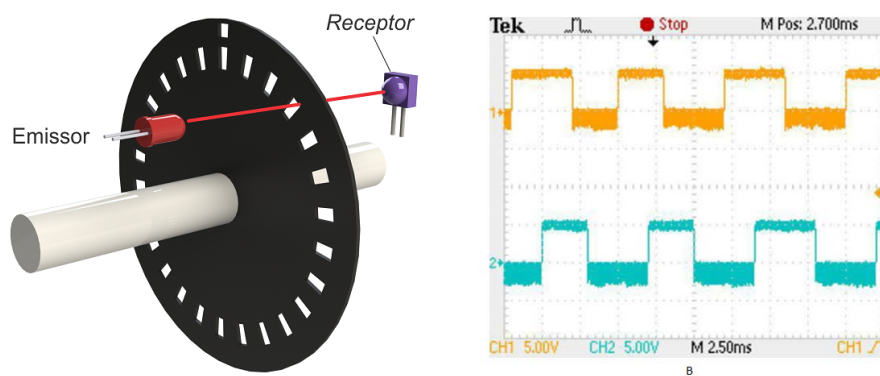


Figura 4.4: Encoder óptico incremental.

4.3. Tarjeta de adquisición de datos: Arduino MKR Vidor 4000

Las características principales de la tarjeta Arduino MKR Vidor 4000, disponible en la Figura 4.5, se pueden consultar directamente en la página oficial de arduino; sin embargo, algunas de las más importantes son que su fuente de alimentación es de 5V (USB/VIN), voltaje de operación en los pines: 3.3V, 22 pines compartidos (SAMD21 y Cyclone FPGA), puerto USB B micro, conector micro HDMI, conector de cámara MIPI, miniconector PCI Express con hasta 25 pines programables por el usuario, conector para baterías LiPo de 3.7 V, módulo Wi-Fi y BLE (Bluetooth Low Energy) [48].

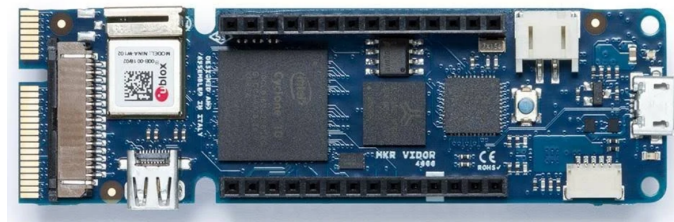


Figura 4.5: Vista superior de Arduino MKR Vidor 4000.

4.3.1. Especificaciones técnicas

Dado que la tarjeta arduino MKR Vidor 4000 posee un microcontrolador ARM y un FPGA, resultará útil conocer algunas especificaciones adicionales, las mismas que se resumen en la tabla 4.2 :

SAMD21	FPGA
- SAMD21 Cortex-M0 + MCU ARM(32 bits) - 8 pines digitales - 1 DAC de 10 bits - 7 ADC 8/10/12 bits - 1 UART / 1 SPI / 1 I2C - 32,768 kHz (RTC), 48 MHz	- Intel Cyclone 10CL016 - 16K E/L - 504Kbit de RAM - 56 multiplicadores - 48 MHz - hasta 200 MHz

Tabla 4.2: Características específicas de la tarjeta MKR Vidor 4000.

4.3.2. Programación de Arduino MKR Vidor 4000

El diseño de hardware se realiza en Quartus, mediante lenguaje AHDL,VHDL, Verilog, entre otros. Luego se procede a compilar el diseño y se convierte el bitstream generado .tff a un archivo .h, por último en el IDE de arduino se carga a la tarjeta el diseño en FPGA junto con el scketch [48].

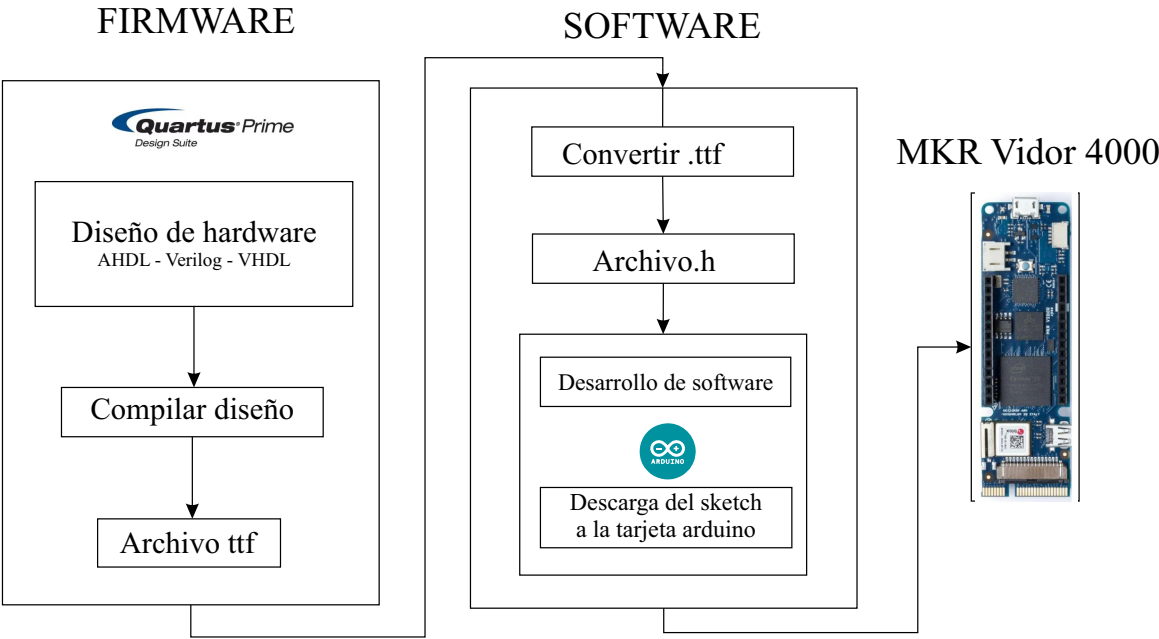


Figura 4.6: Procedimiento de desarrollo en Arduino MKR Vidor 4000.

En el scketch se programa el algoritmo de control haciendo uso del IDE de Arduino. Este se implementa en líneas de código y posteriormente el programa es cargado en la tarjeta mediante el puerto serial. Es importante considerar que las bibliotecas necesarias para asegurar la compatibilidad de la tarjeta con el Arduino IDE se deben descargar desde la página oficial siguiendo las indicaciones proporcionadas en [48].

4.3.3. Aplicación - Servomotor de transmisión directa

En este trabajo se ha implementado el algoritmo de control siguiendo la idea presentada en la Figura 4.7 donde se presenta un diagrama esquemático de un servomotor de transmisión directa con un lazo de control conformado por la tarjeta Arduino MKR Vidor 4000, tal que, el algoritmo de control quede implementado en el ARM, mientras que las señales de posición y velocidad serían proporcionadas por un decoder y un estimador de velocidad implementados en el FPGA.

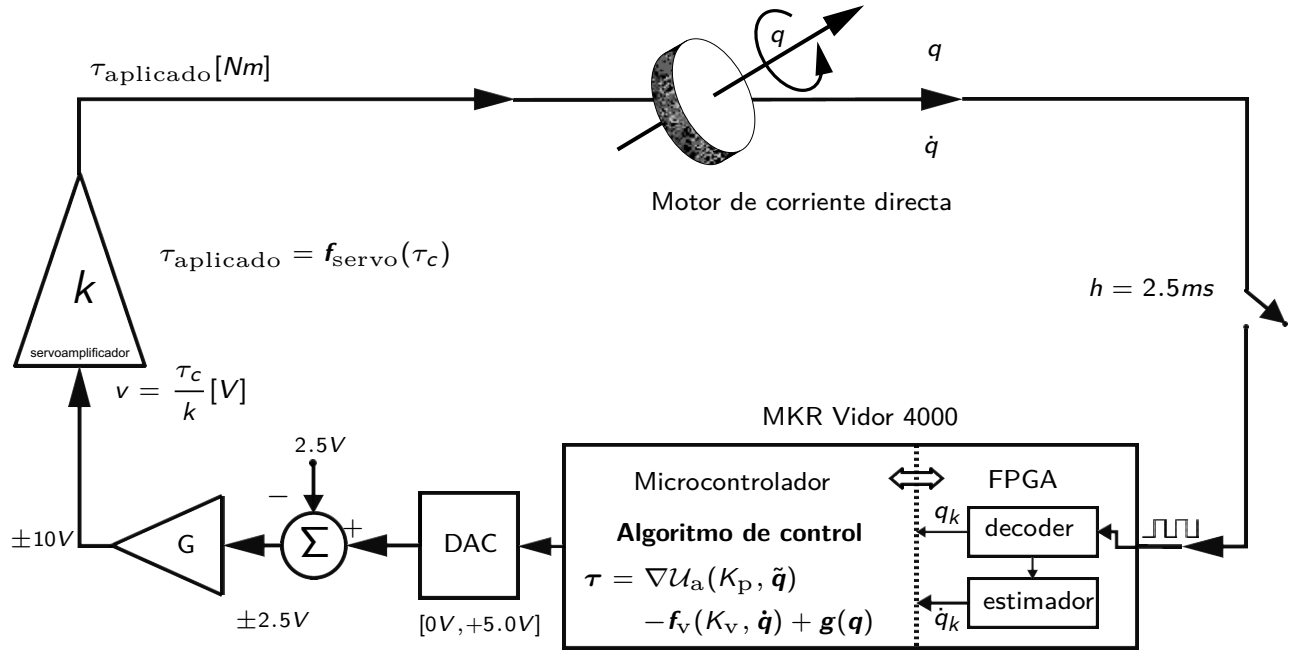


Figura 4.7: Diagrama esquemático de un servomotor de transmisión directa.

La implementación del esquema presentado en la Figura 4.7 implica el diseño en dos etapas. Una de ellas corresponde al acondicionamiento de señal y la otra a la implementación de la lógica necesaria para la lectura de las posiciones y el algoritmo de control en la tarjeta Arduino MKR Vidor 4000.

La etapa de acondicionamiento de señal está conformada por tres módulos DAC MCP4725, cada uno asociado a un circuito sumador-amplificador, como el que se muestra en la figura 4.8. La señal presente en la salida de cada uno de los DAC's, la cual está en un rango de 0v a 5v, es desplazada hasta un nivel de voltaje de $\pm 2.5v$. Esto se consigue por medio de un seguidor de voltaje y un circuito divisor de voltaje cuya salida está dada por la ecuación (4.1):

$$V_{\text{off}} = V_{12-} \left(\frac{R_{20} + R_{16\text{pot}}}{R_{20} + R_{16\text{pot}} + R_{14}} \right), \quad (4.1)$$

donde $V_{\text{off}} = -2.5v$, $V_{12-} = -12v$, $R_{14} = 10K\Omega$, $R_{16\text{pot}} = 100\Omega$, y $R_{20} = 2.6K\Omega$, cuyo valor se logró usando un juego de resistencias en paralelo de $4.7K\Omega$ y $5.6K\Omega$.

El circuito sumador-amplificador se encarga de llevar la señal desplazada hasta un nivel de voltaje de $\pm 10v$, de acuerdo con la ecuación (4.2):

$$V_{in2} = -(R_6 + R_{7pot}) \left(\frac{V_{DAC}}{R_8} + \frac{V_{off}}{R_9} \right), \quad (4.2)$$

donde $R_6 = R_8 = R_9 = 1K\Omega$ y R_{7pot} es un potenciómetro de $10K\Omega$ el cual es usado para modificar la ganancia del circuito amplificador.

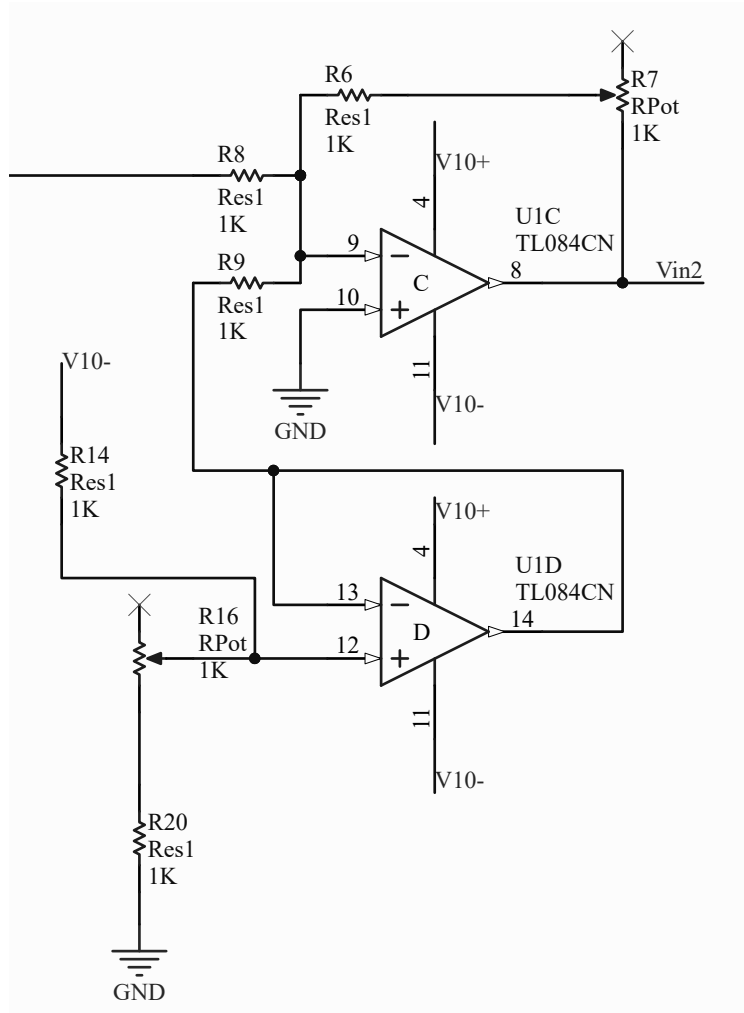


Figura 4.8: Etapa de acondicionamiento de señal.

Esto se hace debido a que el rango de voltaje de entrada de los servoamplificadores para el robot ROTRADI I está en el rango de $\pm 10V$. El esquemático completo de las conexiones entre el Arduino MKR Vidor 4000 y los DAC's; así como, la etapa de acondicionamiento de señal, se encuentra en el **Apéndice A**.

Por otro lado, un diagrama de bloques de la lógica necesaria para leer la señal de posición de los encoders y la aplicación del algoritmo de control en la tarjeta Arduino MKR Vidor 4000 se muestra en la Figura 4.9, donde se observa que en el FPGA se han implementado varios bloques de lógica. Se han implementado tres circuitos *Decoder* (base, hombro y codo) que son utilizados para leer la posición de cada uno de los servomotores. La señal de posición es utilizada como entrada de los bloques *Diferenciador*, los cuales permiten estimar la velocidad de cada articulación utilizando el método de diferenciación de Euler [1].

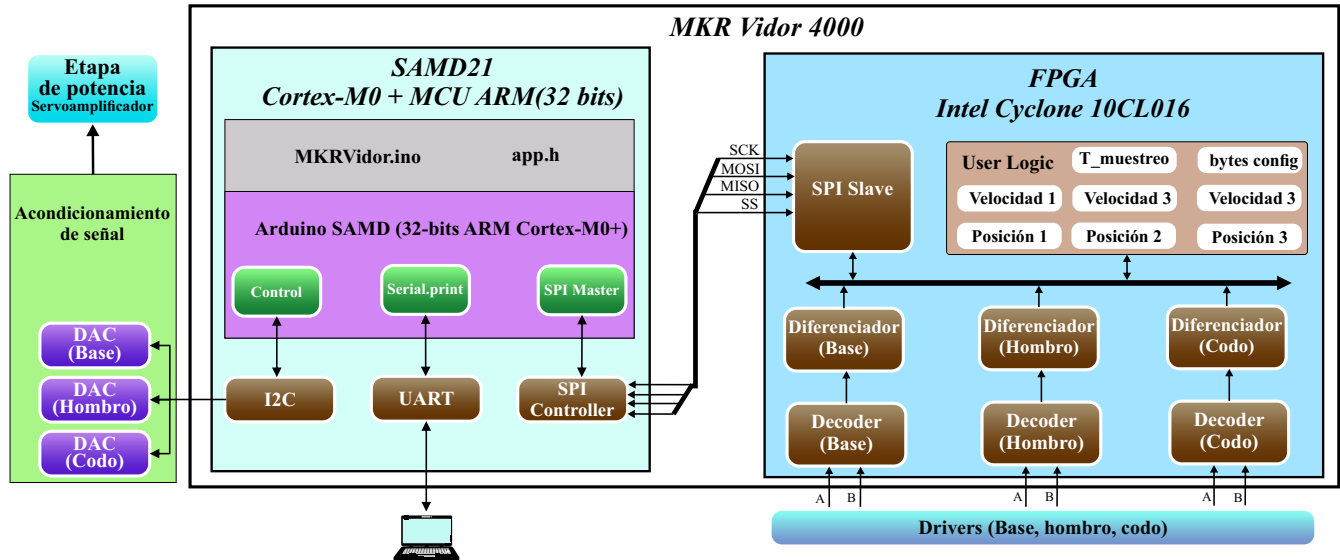


Figura 4.9: Diagrama de bloques de la lógica implementada en la tarjeta Arduino MKR Vidor 4000.

El tiempo de muestreo se puede configurar por medio de la asignación de un registro de configuración en el bloque *userlogic*. Este bloque es usado para almacenar la posición, velocidad estimada y datos de configuración en registros del FPGA. Cada uno de estos registros es de 32bits y tiene asignada una dirección accesible desde el microcontrolador SAMD21 a través de una comunicación SPI.

Se ha implementado un módulo SPI esclavo (*SPI Slave*) para establecer comunicación entre el FPGA y el microcontrolador SAMD21 de la tarjeta. La comunicación SPI es manejada desde el microcontrolador SAMD21 por medio de un módulo SPI maestro (*SPI Master*). En el microcontrolador SAMD21 se han programado funciones para establecer comunicación entre la tarjeta y una computadora (*Serial.print*), esta función es utilizada para configurar la tarjeta en tiempo real y para transmitir información de la posición, velocidad y torque durante los experimentos. El algoritmo de control es implementado en el microcontrolador SAMD21, la señal de torque es enviada a los DAC's por medio de una comunicación I2C y esta a su vez pasa por la etapa de acondicionamiento de señal antes de ingresar a los Drivers y los servomotores.

4.3.4. Prototipo de tarjeta de control

Lo presentado en las Figuras 4.9 y 4.7 se implementó exitosamente en una tarjeta perforada, tal como se muestra en la Figura 4.10. En la tarjeta perforada se encuentra la tarjeta Arduino MKR Vidor 4000, los circuitos integrados OpAmp, los DAC's y elementos adicionales. Es por medio de este prototipo que se realizaron los experimentos presentados en el capítulo de *Resultados de simulación y experimentales*.

Como se ha mencionado, se cuenta con un puerto UART que permite la comunicación de la tarjeta Arduino MKR Vidor 4000 con una computadora para la visualización de datos. Es con base en esto que se ha desarrollado una interfaz en Python que permite configurar, cambiar ganancias, almacenar datos y realizar pruebas de los algoritmos de control de manera más sencilla. Lo cual se detalla en la siguiente sección.

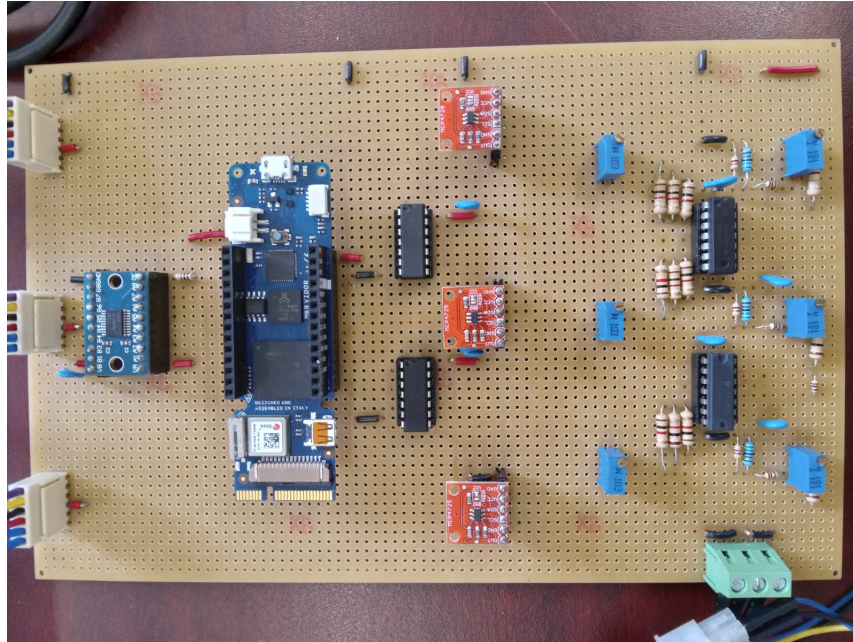


Figura 4.10: Prototipo de tarjeta de control.

4.4. Interfaz gráfica

La interfaz gráfica permite modificar los parámetros del algoritmos de control, como es el caso de las ganancias, proporcional y derivativa, el tipo de control y las posiciones deseadas. Así mismo permite obtener datos de las posiciones, velocidades, torques y otras variables de interés asociadas al control de robot manipulador. La aplicación ha sido diseñada en Lenguaje Python.



Figura 4.11: Interfaz gráfica con Python - Ventana de inicio.

Cuando se inicia la aplicación se presentan tres botones, tal como se muestra en la Figura 4.11, los cuales abren diferentes entornos gráficos. El entorno de mayor interés es el entorno de *Control*. Este entorno se muestra en la Figura 4.12 el cual está dividido en 5 secciones de interés para la manipulación del robot.

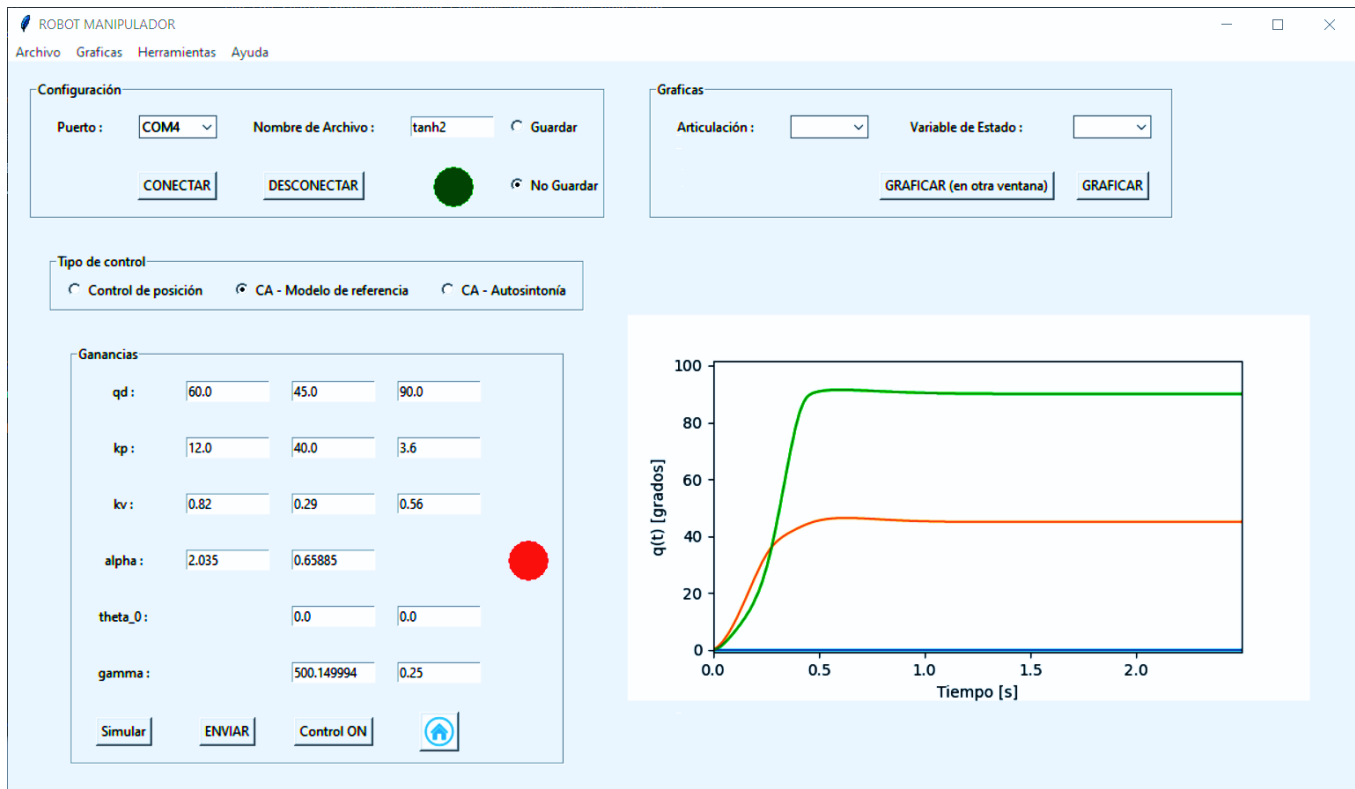


Figura 4.12: Interfaz gráfica con Python - Entorno de control.

La sección de *Configuración* permite seleccionar el puerto serial, conectar y desconectar la tarjeta, así como seleccionar si se desea guardar o no los datos enviados por la tarjeta de adquisición de datos durante la ejecución del algoritmo de control. La sección de *Tipo de control* permite seleccionar entre los 3 tipos de algoritmos de control que se han diseñado en esta tesis.

La sección de *Ganancias* permite modificar en línea los valores numéricos de cada uno de los parámetros del control; es decir, las ganancias, proporcionales k_p y derivativas k_v , posiciones deseadas q_d y ganancias adaptables γ_i . En esta sección se han incluido botones que permiten *simular* el modelo de referencia, *enviar* los parámetros numéricos del control, habilitar la inyección de energía al robot a través de un algoritmo de control (*Control ON*) y una función de *retorno a casa*.

En la sección *Gráficas* se incluyen dos opciones para graficar. La primera, usando el botón *GRAFICAR* se puede visualizar en tiempo real la posición articular de cada uno de los servomotores sin ejecutar el control realmente, lo mismo ocurre con el botón *GRAFICAR(en otra ventana)* con la única diferencia de que la visualización se realiza en una ventana individual.

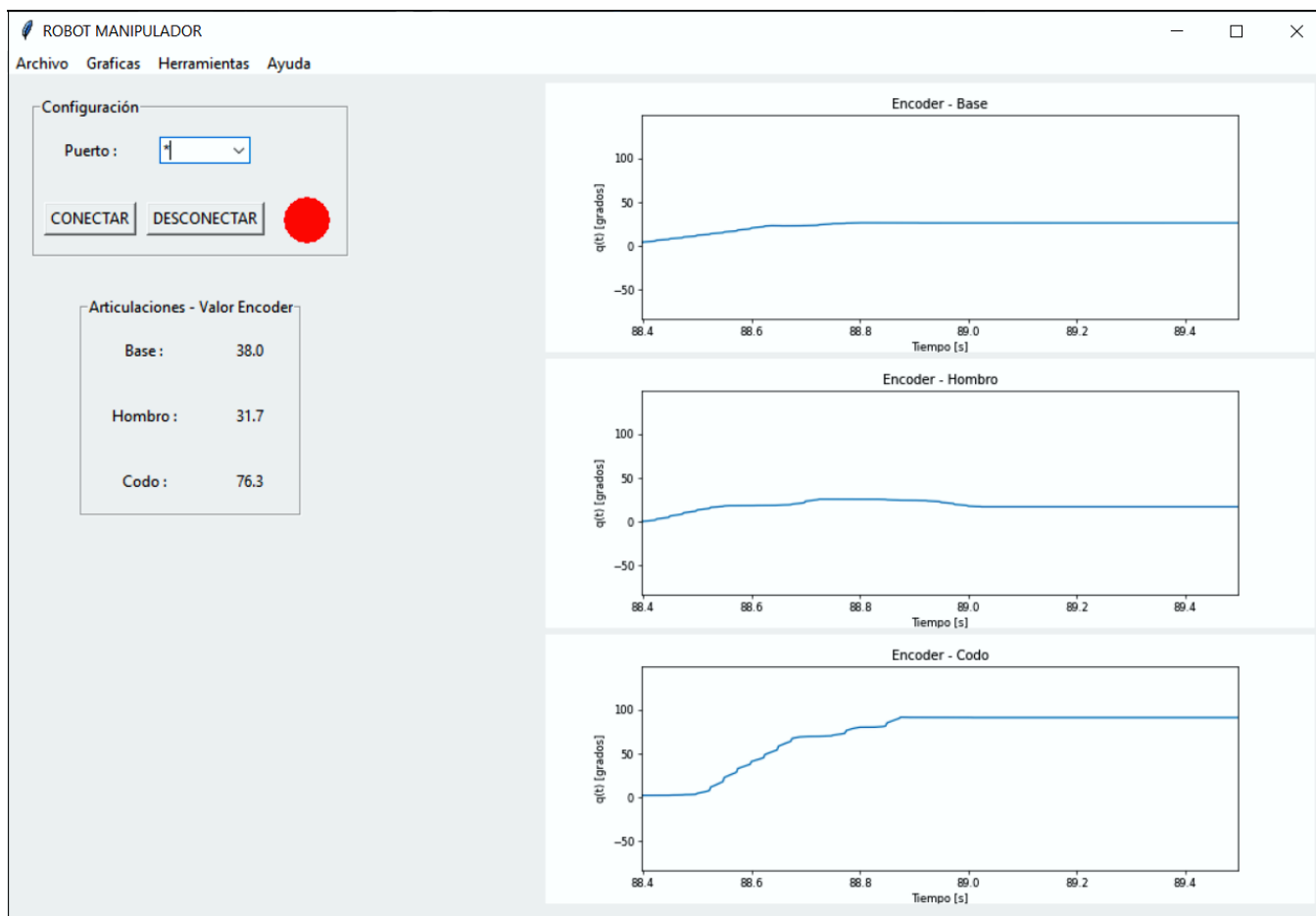


Figura 4.13: Interfaz gráfica con Python - Entorno de visualización de señales obtenidas por los encoders.

Otro entorno de interés es el de *Visualización*, el cual se muestra en la Figura 4.13. Aquí se presentan tres secciones. La primera permite conectar y desconectar la tarjeta de adquisición de datos a través de la selección de un puerto serial. En la segunda sección se puede visualizar el valor numérico de las posiciones articulares en grados. Finalmente a la derecha se muestran de manera gráfica las posiciones en el tiempo de cada uno de las articulaciones. Este entorno permite verificar el correcto funcionamiento de los sensores de posición. Así mismo, es posible verificar que no hayan falsos contactos o ruido en las señales del encoder.

Capítulo 5

Modelado dinámico

5.1. Péndulo simple

En la figura 1.1 se muestra un péndulo simple compuesto por un servomotor, el cual tiene acoplado una barra metálica de longitud l_1 y esta sometido a la acción de la gravedad.

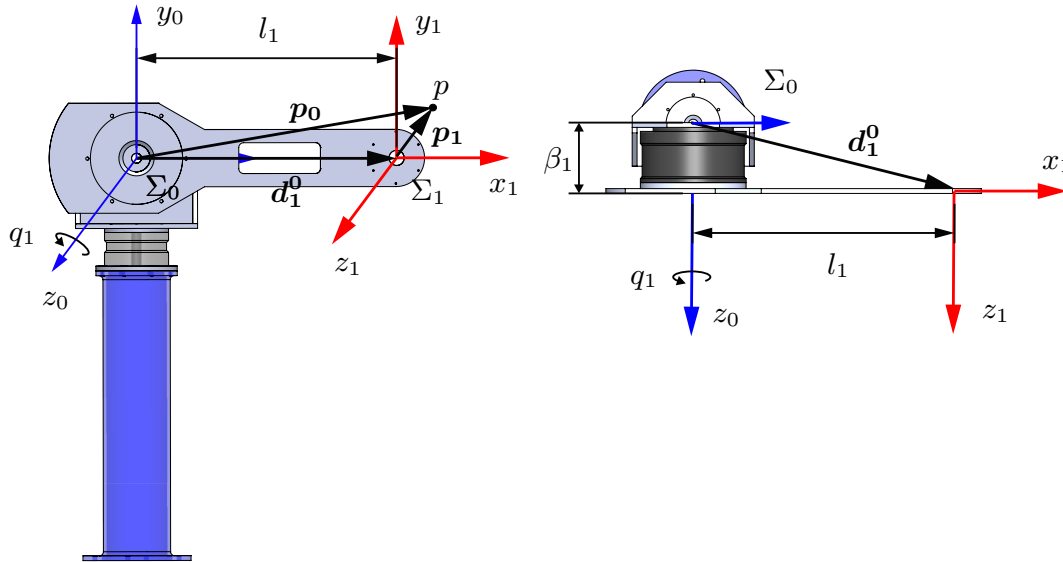


Figura 5.1: Vista lateral y vista superior del péndulo simple en $q_1 = 0$ (posición de casa).

En la figura 5.1, a la izquierda, se muestra una vista lateral del péndulo simple, el cual consiste de una base anclada al suelo, una base para el servomotor, el servomotor y una barra metálica (eslabón) anclada al rotor y al estator del servomotor para generar el movimiento rotacional (positiva en sentido contrario a las manecillas del reloj). A la derecha se tiene la vista superior del péndulo simple, donde se muestran los parámetros geométricos del péndulo, como son; el espesor del servomotor y barra metálica β_1 (donde se ubica la referencia fija al centro geométrico del estator Σ_0), la distancia l_1 la cual inicia en el centro geométrico del estator y termina en el centro geométrico del efector final (donde se ubica la referencia Σ_1 debido al efector final o extremo final) y finalmente se muestra q_1 que representa la rotación efectuada sobre el centro geométrico del estator.

5.1.1. Cinemática directa analítica de Euler

Partiendo de la ecuación fundamental de la cinemática

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + R(\phi, \theta, \psi)\mathbf{p}_1 \quad (5.1)$$

Dado que no existe ninguna herramienta asociada al extremo final del péndulo, entonces $\mathbf{p}_1 = [0 \ 0 \ 0]^T$. Por lo tanto, la cinemática directa para el péndulo queda definida cómo:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 = R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

5.1.2. Cálculo de la velocidad

La cinemática diferencial se obtiene derivando (5.2):

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d}{dt}\mathbf{p}_0 = \dot{R}_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = S(\dot{q}_1 \mathbf{k}) R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

5.1.3. Cálculo de la rapidez lineal

La rapidez se define como $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v}$, entonces:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T R_{z_0}^T(q_1) S^2(-\mathbf{k}) R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 \quad (5.4)$$

donde $S(\dot{q}_1 \mathbf{k})^T S(\dot{q}_1 \mathbf{k}) = -S^2(\dot{q}_1 \mathbf{k}) = S^2(-\dot{q}_1 \mathbf{k})$, además $S^2(\dot{q}_1 \mathbf{k}) = S^2(\mathbf{k}) \dot{q}_1^2 = \dot{q}_1^2 S^2(\mathbf{k})$.

5.1.4. Cálculo de las energías

5.1.4.1. Energía cinética

La energía cinética para el péndulo se define como $\mathcal{K} = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 + \frac{1}{2}I_p \dot{q}_1^2$, entonces:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \left[m \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T R_{z_0}^T(q_1) S^2(-\mathbf{k}) R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + I_p \right] \dot{q}_1^2 \quad (5.5)$$

5.1.4.2. Energía potencial

La energía potencial $\mathcal{U}(q_1)$ en el caso del péndulo es:

$$\mathcal{U}(q_1) = ml_{c_1}g[1 - \cos(q_1)] \quad (5.6)$$

5.1.5. Cálculo del Lagrangiano

El lagrangiano se define como $\mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1) = \mathcal{K}(q_1, \dot{q}_1) - \mathcal{U}(q_1)$; entonces, de (5.5) y (5.6) se tiene:

$$\mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1) = \frac{1}{2} \left[m \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T R_{z_0}^T(q_1) S^2(-\mathbf{k}) R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + I_p \right] \dot{q}_1^2 - ml_{c_1}g[1 - \cos(q_1)] \quad (5.7)$$

5.1.6. Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_1} = \left[m \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T R_{z_0}^T(q_1) S^2(-\mathbf{k}) R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + I_p \right] \dot{q}_1 \quad (5.8)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_1} \right] = + \left[m \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T R_{z_0}^T(q_1) S^2(-\mathbf{k}) R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + I_p \right] \ddot{q}_1 \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial q_1} = -ml_{c_1}g \sin(q_1) \quad (5.10)$$

5.1.7. Modelo dinámico

Por último de las ecuaciones (5.9) y (5.10) se tiene:

$$\begin{aligned} \tau = & \left[m \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T R_{z_0}^T(q_1) S^2(-\mathbf{k}) R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + I_p \right] \ddot{q}_1 + ml_{c_1}g \sin(q_1) + b\dot{q}_1 + f_c \text{signo}(\dot{q}_1) \\ & + f_e[1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|] \end{aligned} \quad (5.11)$$

5.2. Nuevas propiedades del modelo cinemático y diferencial

A partir del modelo dinámico del péndulo simple se desprenden las siguientes propiedades:

Propiedad 21. La matriz antisimétrica $S(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ cumple la siguiente equivalencia:

$$S(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} R_z(\frac{\pi}{2}) & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{donde } \mathbf{o} = [0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$$

■

Propiedad 22. Sea la matriz antisimétrica $S(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y la matriz de rotación $R_z(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, entonces :

$$S(\mathbf{k})R_z(q) = R_z(q)S(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} R_z(\frac{\pi}{2} + q) & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{o} = [0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ es un vector de ceros y $q \in \mathbb{R}$ es un ángulo expresado en radianes. ■

Propiedad 23. Sea la matriz antisimétrica $S(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y la matriz de rotación $R_z(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, entonces :

$$[S(\mathbf{k})R_z(q)]^T S(\mathbf{k})R_z(q) = R_z(q)S^2(-\mathbf{k})R_z(q) = \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{o} = [0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ es un vector de ceros, $I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es la matriz identidad y $q \in \mathbb{R}$ es un ángulo expresado en radianes. ■

5.3. Robot de 2 grados de libertad

5.3.1. Cinemática directa analítica de Euler

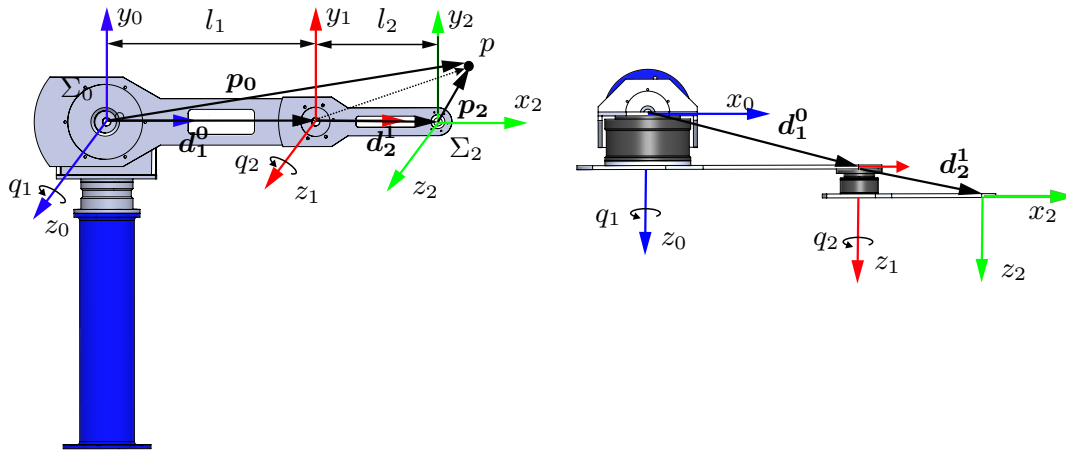


Figura 5.2: Vista lateral y vista superior del robot de 2gdl en $q_1 = q_2 = 0$ (posición de casa).

Partiendo de la ecuación fundamental de la cinemática se cumple:

- Para el **primer eslabón** se sabe que, $\mathbf{d}_0^1 = R_{z_0}[l_1 \ 0 \ \beta_1]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$. Hay una rotación de $\phi = q_1$ respecto a z_0 , no hay rotaciones respecto al eje x_0 ni al eje y_0 por lo que $\theta = \psi = 0$. Por lo tanto:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + R_0^1(\phi, 0, 0)\mathbf{p}_1 = R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \mathbf{p}_1 \quad (5.12)$$

- Dado que para el **segundo eslabón** no existe ninguna herramienta asociada al extremo final del robot, entonces $\mathbf{p}_2 = [0 \ 0 \ 0]^T$, además $\mathbf{d}_0^2 = R_{z_0}[l_2 \ 0 \ \beta_2]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$; por lo tanto:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{d}_1^2 + R_1^2(\phi, \theta, \psi)\mathbf{p}_2 = R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Reemplazando (5.12) en (5.13) se tiene:

$$\mathbf{p}_0 = R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

5.3.2. Cálculo de la velocidad

Para obtener los vectores de la velocidad articular $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ se procede a calcular la cinemática diferencial. La velocidad $\mathbf{v}_1$ se obtiene de derivar $\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + R_0^1(\phi, \theta, \psi)\mathbf{p}_1$ cuando $\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$. Es decir, cuando $\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1$

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{d}}_0^1 = S(\mathbf{k}_0)R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \quad (5.15)$$

La velocidad $\mathbf{v}_2$ se obtiene derivando $\mathbf{p}_0$ de la ecuación (5.14):

$$\mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{p}}_0 = \left[S(\mathbf{k}_0)R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + S(\mathbf{k}_0)R_{z_0}(q_1 + q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] \dot{q}_1 + S(\mathbf{k}_1)R_{z_0}(q_1 + q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \quad (5.16)$$

5.3.3. Cálculo de la rapidez lineal

La rapidez $\|\mathbf{v}_1\|^2$ se obtiene:

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 = \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 \quad (5.17)$$

La rapidez $\|\mathbf{v}_2\|^2$ se obtiene:

$$\|\mathbf{v}_2\|^2 = \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 = \left[\begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \right]^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \right] \quad (5.18)$$

5.3.4. Cálculo de las energías

5.3.4.1. Energía cinética

La energía cinética para el robot de 2gdl se obtiene reemplazando (5.16) y (5.17) y luego de resolviendo se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \frac{1}{2} \left[I_1 + I_2 + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + m_1 \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ & + \left[m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ + I_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & + \frac{1}{2} \left[m_2 \begin{bmatrix} R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ + I_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2^2 \end{aligned} \quad (5.19)$$

5.3.4.2. Energía potencial

La energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ en el caso del robot de 2gdl es:

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = m_1 g l_{c_1} [1 - \cos(q_1)] + m_2 g [l_1 + l_{c_2}] - [l_1 \cos(q_1) + l_{c_2} \cos(q_1 + q_2)] \quad (5.20)$$

5.3.5. Cálculo del Lagrangiano

El lagrangiano queda definido como $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U}$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left[I_1 + I_2 + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + m_1 \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ & + \left[m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ + I_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & + \frac{1}{2} \left[m_2 \begin{bmatrix} R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ + I_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2^2 \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$- m_1 g l_{c_1} [1 - \cos(q_1)] - m_2 g [l_1 + l_{c_2}] - [l_1 \cos(q_1) + l_{c_2} \cos(q_1 + q_2)] \quad (5.22)$$

5.3.6. Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} = & \left[I_1 + I_2 + m_1 \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] \dot{q}_1 + \left[m_2 \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + I_2 \right] \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} \right] = & \left[I_1 + I_2 + m_1 \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + m_2 \left[\begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \right. \\
& \left. \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] \ddot{q}_1 + 2m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} S(\mathbf{k}) R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} S(\mathbf{k}) R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2^2 \\
& + \left[m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + I_2 \right] \ddot{q}_2
\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} = \left[I_2 + m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] \dot{q}_2 + \left[m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + I_2 \right] \dot{q}_1 \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} \right] = & \left[I_2 + m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] \ddot{q}_2 + \left[m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + I_2 \right] \ddot{q}_1 \\
& + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} S(\mathbf{k}) R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2
\end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_1} = -m_1 g l_{c1} \sin(q_1) - m_2 g [l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)] \tag{5.27}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_2} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \tag{5.28}$$

5.3.7. Modelo dinámico del robot de 2gdl

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = & \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 + I_2 + m_1 \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} & m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ + 2m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} & + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + I_2 \\ m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + I_2 & I_2 + m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{M(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \\
& + \underbrace{\begin{bmatrix} 2m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} S(\mathbf{k}) R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2 & m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} S(\mathbf{k}) R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \\ m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} S(\mathbf{k}) R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}}_{C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\
& + \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 g l_{c1} \sin(q_1) + m_2 g [l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)] \\ m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{q})} + \underbrace{B \dot{\mathbf{q}} + F_c \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) + F_e [1 - |\text{sgn}(\dot{\mathbf{q}})|]}_{\mathbf{f}_f}
\end{aligned} \tag{5.29}$$

donde $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de posición, velocidad y aceleración en coordenadas articulares, respectivamente. $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, la cual es cuadrada, simétrica y definida positiva; $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de Coriolis y fuerzas centrípetas; $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el par gravitacional; $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de pares de fricción presente en cada articulación del robot, $B, F_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales de coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb, respectivamente. La fricción estática $\mathbf{f}_e \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ está representada por $\mathbf{f}_e = [f_{e1}, f_{e2}, \dots, f_{en}]^T$ que es el vector de fricción estática que contiene los coeficientes de fricción estática de cada uno de los servomotores del robot manipulador

5.4. Robot de 3 grados de libertad

En la Figura 5.3 se muestra una vista frontal (Izquierda) y una vista superior (Derecha) del robot de 3 gdl, el cual consiste de una base anclada al suelo de longitud l_1 , tres servomotores (uno montado sobre la base y dos más sobre los eslabones de longitud l_2 y l_3), una estructura para cada uno de los tres servomotores cuyos espesores son β_1, β_2 y β_3 . Las barras metálicas (eslabones) están ancladas al rotor y al estator de cada servomotor para generar el movimiento rotacional medido por los ángulos q_1, q_2 y q_3 (positivos en sentido contrario a las manecillas del reloj).

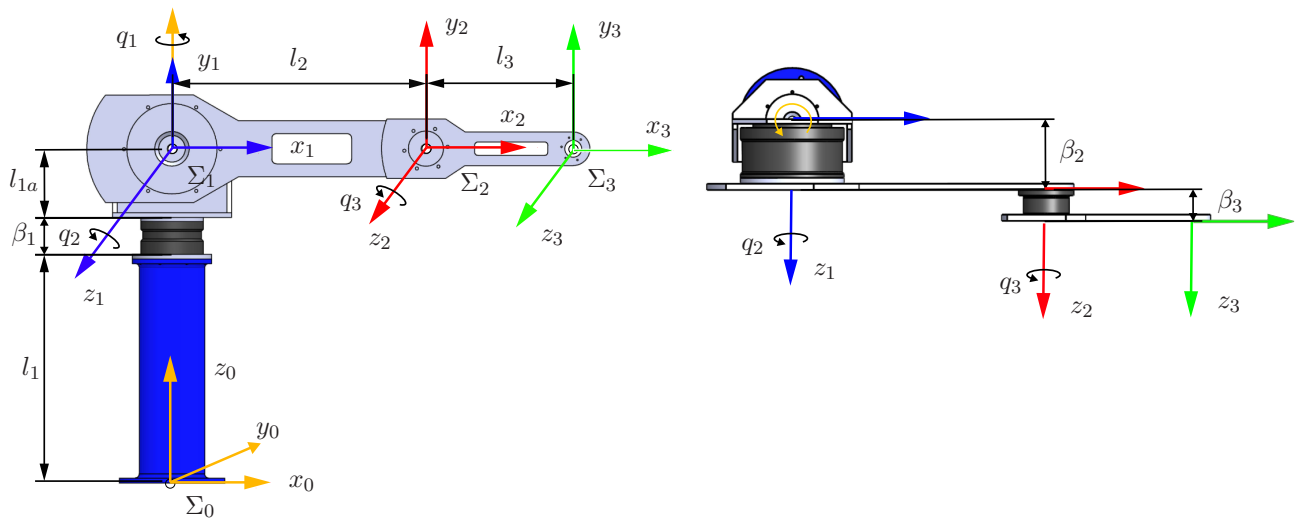


Figura 5.3: Robot de 3 gdl en la posición de casa ($q_1 = q_2 = q_3 = 0$).

El sistema de referencia $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ se ubica en la base del robot, el eje z_0 está alineado con el eje de rotación del primer servomotor y el eje x_0 apunta a la derecha. El sistema de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ se ubica sobre el segundo servomotor, el eje z_1 está alineado con el eje de rotación del segundo servomotor y el eje x_1 apunta hacia la derecha a lo largo del segundo eslabón. El sistema de referencia $\Sigma_2(x_2, y_2, z_2)$ se ubica sobre el tercer servomotor, el eje z_2 está alineado con el eje de rotación del tercer servomotor y el eje x_2 apunta hacia la derecha a lo largo del tercer eslabón. El sistema de referencia $\Sigma_3(x_3, y_3, z_3)$ se ubica en el extremo final del robot de 3gdl, el eje z_3 es paralelo al eje z_2 y el eje x_1 apunta hacia la derecha.

5.4.1. Cinemática directa analítica de Euler

Con el objetivo de obtener el modelo dinámico del robot de 3 gdl a través de la mecánica analítica de Euler se han plasmado en la Figura 5.4 los vectores $\mathbf{p}_{01}, \mathbf{p}_{02}$ y $\mathbf{p}_{03}$ que representan la relación entre los sistemas

$\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$, $\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_0$ y $\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_0$ respectivamente; así mismo, se han representado los vectores d_0^1 , d_1^2 y d_2^3 que serán utilizados más adelante.

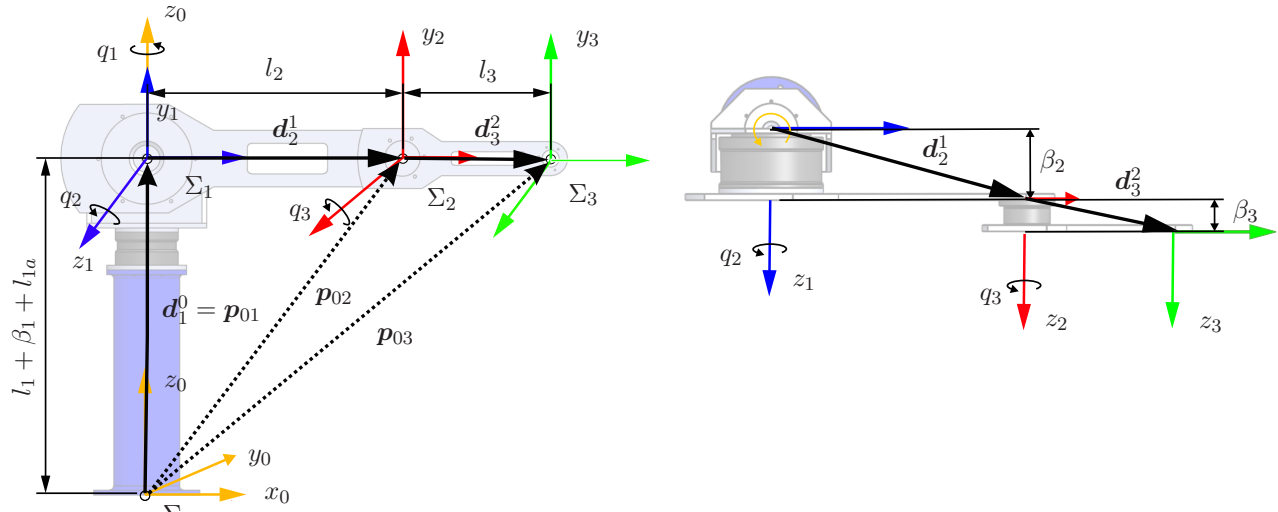


Figura 5.4: Robot de 3 gdl en la posición de casa ($q_1 = q_2 = q_3 = 0$).

Para obtener los vectores p_{01} , p_{02} , p_{03} calculamos primero p_0 , p_1 y p_2 empleando la ecuación fundamental de la cinemática [1, 2], tal que:

- Para el primer eslabón:

$$p_0 = d_0^1 + R_0^1(\phi, \theta, \psi)p_1 \quad (5.30)$$

Se sabe que, $d_0^1 = R_{z_0}(q_1)[0 \ 0 \ l_1 + \beta_1 + l_{1a}]^T \in \mathbb{R}^3$. Hay una rotación de $\phi = q_1$ respecto a z_0 , una rotación de $\theta = \frac{\pi}{2}$ respecto al eje x_0 y no hay rotación respecto al eje y_0 por lo que $\psi = 0$. Por lo tanto, se tiene:

$$p_0 = R_{z_0}(q_1) \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + \beta_1 + l_{1a} \end{bmatrix} + R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)p_1 \right] \quad (5.31)$$

- Para el segundo eslabón:

$$p_1 = d_1^2 + R_1^2(\phi, \theta, \psi)p_2 \quad (5.32)$$

Se sabe que, $d_1^2 = R_{z_1}(q_2)[l_2 \ 0 \ \beta_2]^T \in \mathbb{R}^3$. Hay una rotación de $\phi = q_2$ respecto a z_1 , no hay rotaciones respecto al eje x_1 ni al eje y_1 por lo que $\theta = \psi = 0$. Por lo tanto, de la ecuación (5.32) se tiene:

$$p_1 = R_{z_1}(q_2) \left[\begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + p_2 \right] \quad (5.33)$$

- Para el tercer eslabón:

$$p_2 = d_2^3 + R_2^3(\phi, \theta, \psi)p_3 \quad (5.34)$$

Dado que no existe ninguna herramienta asociada al extremo final del robot, entonces $\mathbf{p}_3 = [0 \ 0 \ 0]^T$; por lo tanto:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{d}_2^3 = R_{z_2}(q_3) \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Ahora ya podemos proceder a calcular los vectores $\mathbf{p}_{01}$, $\mathbf{p}_{02}$, $\mathbf{p}_{03}$. Entonces, partiendo de la ecuación fundamental de la cinemática se cumple:

- La relación entre $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$: $\mathbf{p}_{01}$ se obtiene de la ecuación (5.31) cuando $\mathbf{p}_1 = [0 \ 0 \ 0]^T$, tal que:

$$\mathbf{p}_{01} = \mathbf{d}_0^1 = R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + \beta_1 + l_{1a} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

- La relación entre $\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_0$: $\mathbf{p}_{02}$ se obtiene de las ecuaciones (5.31) y (5.33) cuando $\mathbf{p}_2 = [0 \ 0 \ 0]^T$, tal que:

$$\mathbf{p}_{02} = R_{z_0}(q_1) \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + \beta_1 + l_{1a} \end{bmatrix} + R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] \quad (5.37)$$

- La relación entre $\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_0$: $\mathbf{p}_{03}$ se obtiene de las ecuaciones (5.31) y (5.35), tal que:

$$\mathbf{p}_{03} = R_{z_0}(q_1) \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + \beta_1 + l_{1a} \end{bmatrix} + R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \left[\begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + R_{z_2}(q_3) \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \right] \right] \quad (5.38)$$

5.4.2. Cinemática diferencial

La velocidad $\mathbf{v}_1$ se obtiene de derivar la ecuación (5.36):

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{p}}_{01} = S(\mathbf{k}_0) R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + \beta_1 + l_{1a} \end{bmatrix} \dot{q}_1 = \mathbf{0} \quad (5.39)$$

La velocidad $\mathbf{v}_2$ se obtiene derivando $\mathbf{p}_{02}$ de la ecuación (5.37):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{p}}_{02} &= S(\mathbf{k}_0 \dot{q}_1) R_{z_0}(q_1) \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + \beta_1 + l_{1a} \end{bmatrix} + R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] + R_{z_0}(q_1) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) S(\dot{q}_2 \mathbf{k}) R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ &= \left[S(\dot{q}_1 \mathbf{k}_0 + R_{z_0}(q_1) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) \dot{q}_2 \mathbf{k}_1) \right] R_{z_0}(q_1) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.40)$$

La velocidad $\mathbf{v}_3$ se obtiene derivando $\mathbf{p}_{03}$ de la ecuación (5.38):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 = \dot{\mathbf{p}}_{03} = & S(\dot{q}_1 \mathbf{k}) R_{z_0}(q_1) \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + \beta_1 + l_{1a} \end{bmatrix} + R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \left[\begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + R_{z_2}(q_3) \begin{bmatrix} l_{c3} \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \right] \right] \\ & + R_{z_0}(q_1) \left[R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) S(\dot{q}_2 \mathbf{k}_1) R_{z_1}(q_2) \left[\begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + R_{z_2}(q_3) \begin{bmatrix} l_{c3} \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \right] \right] \\ & + R_{z_0}(q_1) \left[R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) S(\dot{q}_3 \mathbf{k}_2) R_{z_2}(q_3) \begin{bmatrix} l_{c3} \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} = & S\left(\dot{q}_1 \mathbf{k}_0 + R_{z_0}(q_1) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) \dot{q}_2 \mathbf{k}_1\right) R_{z_0}(q_1) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ & + S\left(\dot{q}_1 \mathbf{k}_0 + R_{z_0}(q_1) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \mathbf{k}_1\right) R_{z_0}(q_1) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \begin{bmatrix} l_{c3} \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.42)$$

5.4.3. Rapidez cartesiana

La rapidez $\|\dot{\mathbf{p}}_{01}\|^2$ se obtiene:

$$\|\dot{\mathbf{p}}_{01}\|^2 = \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 = 0 \quad (5.43)$$

La rapidez $\|\dot{\mathbf{p}}_{02}\|^2$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{p}}_{02}\|^2 = & \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 \\ = & \dot{q}_1^2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T R_{z_1}(q_2)^T R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)^T R_{z_0}(q_1)^T \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_0^T R_{z_0}(q_1) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ & - \dot{q}_2^2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T R_{z_1}(q_2)^T \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1^T R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ & + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T R_{z_1}(q_2)^T \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_0^T R_{z_0}(q_1) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.44)$$

La rapidez $\|\dot{\mathbf{p}}_{03}\|^2$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\|\dot{\mathbf{p}}_{03}\|^2 = & \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \left[I - R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \right] \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \left[I - \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T \right] \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2^2 \\
& - \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}(q_2) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1) + \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T \right] \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
& + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}^T(q_1) \left[I - \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T \right] + I - R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\
& + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}^T(q_1) R_{z_1}^T(q_2) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}^T(q_1) \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\
& - \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}^T(q_1) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1) + R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1) \right. \\
& \left. + \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \left[I - \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_2^2 + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}(q_2) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\
& + \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}^T(q_2 + q_3) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}^T(q_1)^T \left[I - R_{z_0}(q_1) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \right] \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_3^2 \\
& + \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T \left[I - \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T - R_{z_0}(q_1) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1)^T \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\
& + \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T \left[I - R_{z_0}(q_1) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1)^T \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_2^2 \\
& + \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}^T(q_2 + q_3) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}^T(q_1)^T \left[I - R_{z_0}(q_1) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1)^T \right] \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\
& + \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}(q_2 + q_3)^T R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1)^T \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1)^T \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_3 \\
& + \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}(q_2 + q_3)^T R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1)^T \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1)^T \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2
\end{aligned} \tag{5.45}$$

5.4.4. Energía potencial

La energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ en el caso del robot de 3gdl es:

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = m_1 g l_{c_1} + m_2 g l_{c_2} \sin(q_2) + m_3 g [l_2 \sin(q_2) + l_{c_3} \sin(q_2 + q_3)] \quad (5.46)$$

5.4.5. Energía cinética

La energía cinética $\mathcal{K}$ en el caso del robot de 3gdl es:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} m_1 \|\dot{\mathbf{p}}_{01}\|^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \|\dot{\mathbf{p}}_{02}\|^2 + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 + \frac{1}{2} m_3 \|\dot{\mathbf{p}}_{03}\|^2 + \frac{1}{2} I_3 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3]^2 \quad (5.47)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}}_{M(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}, \quad (5.48)$$

donde los elementos de la la matriz de inercia $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quedan definidos por:

$$\begin{aligned} m_{11} = & \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}^T(q_1) \left[I - \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T \right] + I - R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T \left[I - \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T - R_{z_0}(q_1) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1)^T \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \left[I - R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \right] \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T R_{z_1}(q_2)^T R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)^T R_{z_0}(q_1)^T \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_0^T R_{z_0}(q_1) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} m_{12} = m_{21} = & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}(q_2) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1) + \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T \right] \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1) + R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1) \right. \\ & \left. + \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}(q_2 + q_3)^T R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1)^T \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1)^T \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \\ & + 2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T R_{z_1}(q_2)^T \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_0^T R_{z_0}(q_1) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned}
m_{22} = & \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \left[I - \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T \right] \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \left[I - \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T R_{z_1}(q_2)^T \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1^T R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T \left[I - R_{z_0}(q_1) R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1)^T \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad (5.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{23} = m_{32} = & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1) R_{z_1}^T(q_2) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}^T(q_1) \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}^T(q_2 + q_3) R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1)^T \left[I - R_{z_0}(q_1) R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1)^T \right] \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \\
m_{31} = m_{13} = & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}(q_2 + q_3)^T R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1)^T \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1)^T \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad (5.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}(q_2) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \\
m_{33} = & \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}^T(q_2 + q_3) R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1)^T \left[I - R_{z_0}(q_1) R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_1}(q_2) \right] \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad (5.53)
\end{aligned}$$

5.4.6. Modelo dinámico del robot de 3gdl

El modelo dinámico del robot de 3gdl se puede escribir de manera compacta de la siguiente manera [1, 44]:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (5.54)$$

donde $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de posición, velocidad y aceleración en coordenadas articulares, respectivamente.

La matriz de Coriolis y fuerzas centrípetas $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se puede obtener mediante (5.55):

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \quad (5.55)$$

El par gravitacional $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ se define como:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (5.56)$$

Y el vector de pares de fricción:

$$\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) = B\dot{\mathbf{q}} + F_c \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) + F_e [1 - |\text{sgn}(\dot{\mathbf{q}})|] \quad (5.57)$$

Capítulo 6

Control para robots manipuladores

A continuación se presenta el desarrollo de un esquema de control adaptable con base a modelo de referencia

6.1. Algoritmo de control de posición puro

El diseño de nuevos esquemas de control implica grandes retos teóricos que mejoran sustancialmente problemas de origen práctico. Su estudio resulta indispensable en aplicaciones que no pueden ser llevadas a cabo por medio de algoritmos de control tradicionales. De ahí que el diseño de controladores sigue siendo un problema de gran interés [1].

El problema de control de posición también se conoce como regulación: consiste en mover el extremo final de] robot manipulador independientemente de su posición inicial $\mathbf{q}(0)$ hacia una posición deseada constante $\mathbf{q}_d$. La importancia de esta problemática radica en proponer estrategias de control que no sólo cumplan con el objetivo de control de posición $\lim_{t \rightarrow \infty} [\tilde{\mathbf{q}}^T \ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T]^T = [\mathbf{0}^T \ \mathbf{0}^T]^T \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$, sino también que el desempeño práctico sea alto. El desempeño de un algoritmo de control se refiere a realizar de manera correcta y exacta la tarea programada al robot, lo que lo habilita a llevar a cabo diversas aplicaciones de control punto a punto [1] . Bajo esta filosofía es que se propone el siguiente esquema de control:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}}) - K_v \mathbf{f}_v(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (6.1)$$

donde, K_p y $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales definidas positivas de las ganancias proporcional y derivativa respectivamente. Los vectores asociados a la acción de control proporcional $\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y derivativa $\mathbf{f}_v(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ están conformados por componentes hiperbólicos y se definen como:

$$\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}}) = \left[\frac{\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}}) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}})}{\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}}) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}}) + 1} \right] [\coth(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}}) + \tanh(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}})] \quad (6.2)$$

$$\mathbf{f}_v(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = \left[\frac{\cosh^{2m}(\alpha_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \sinh^{2m}(\alpha_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})}{\cosh^{2m}(\alpha_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \sinh^{2m}(\alpha_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + 1} \right] [\coth(\alpha_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) + \tanh(\alpha_2 \dot{\tilde{\mathbf{q}}})] \quad (6.3)$$

donde $m \in \mathbb{N}$ es un número entero positivo; $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ son parámetros del algoritmo de control. En conjunto conforman una familia de controladores saturados cuya respuesta se muestra en las figuras 6.1 y 6.2.

En la Figura 6.1 se observa la respuesta de la acción de control $f_p(\tilde{q})$ en función de distintos valores de m . Tenga en cuenta que para valores de $m > 1$ existe una zona al rededor del origen donde la respuesta de la acción de control es casi nula. recomendamos usar valores de $m = 1$ para fines de control.

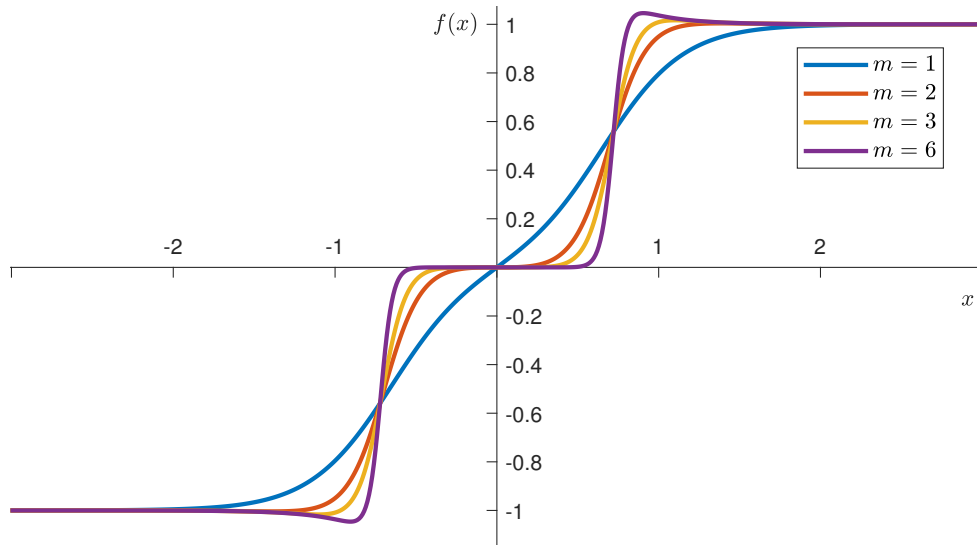


Figura 6.1: Familia de funciones hiperbólicas saturadas $f(x)$ para $\alpha_1 = 1$.

En la Figura 6.2 se observa la respuesta de la acción de control $f_p(\tilde{q})$ en función de distintos valores de α_1 . Tenga en cuenta que aumenta la sensibilidad de la acción de control conforme el valor numérico de α_1 aumenta. La selección adecuada del parámetro α_1 dependerá de cada aplicación.

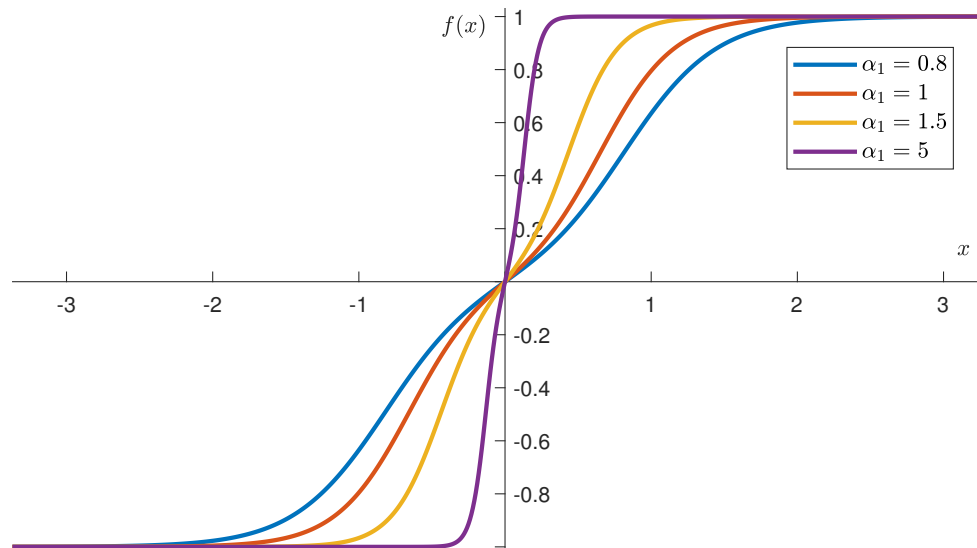


Figura 6.2: Familia de funciones hiperbólicas saturadas $f(x)$ para $m = 1$.

Tenga en cuenta que la función $f_p(\tilde{q})$ va de $[-2, 2]$ en el eje y del plano cartesiano por lo que se debe dividir la ganancia deseada entre 2 para evitar saturar los servomotores.

6.1.1. Ecuación en Lazo cerrado

Sea el modelo dinámico del robot manipulador;

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + B\dot{q} \quad (6.4)$$

y el esquema de control propuesto en (6.1), tal que, al igualar (6.1) y (6.2) se obtiene la ecuación en lazo cerrado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ M^{-1}(q) \left[K_p \frac{\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q})}{\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}) + 1} [\coth(\alpha_1 \tilde{q}) + \tanh(\alpha_1 \tilde{q})] \right. \\ \left. - K_v \frac{\cosh^{2m}(\alpha_2 \dot{\tilde{q}}) \sinh^{2m}(\alpha_2 \dot{\tilde{q}})}{\cosh^{2m}(\alpha_2 \dot{\tilde{q}}) \sinh^{2m}(\alpha_2 \dot{\tilde{q}}) + 1} [\coth(\alpha_2 \dot{\tilde{q}}) + \tanh(\alpha_2 \dot{\tilde{q}})] - C(q, \dot{q})\dot{q} - B\dot{q} \right] \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

6.2. Análisis de estabilidad asintótica global

6.2.1. Análisis del punto de equilibrio

Para este propósito, se evalúan las condiciones que hacen a la ecuación (6.5) igual a cero, es decir:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \ddot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ M^{-1}(q) \left[K_p \frac{\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q})}{\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}) + 1} [\coth(\alpha_1 \tilde{q}) + \tanh(\alpha_1 \tilde{q})] \right. \\ \left. - K_v \frac{\cosh^{2m}(\alpha_2 \dot{\tilde{q}}) \sinh^{2m}(\alpha_2 \dot{\tilde{q}})}{\cosh^{2m}(\alpha_2 \dot{\tilde{q}}) \sinh^{2m}(\alpha_2 \dot{\tilde{q}}) + 1} [\coth(\alpha_2 \dot{\tilde{q}}) + \tanh(\alpha_2 \dot{\tilde{q}})] - C(q, \dot{q})\dot{q} - B\dot{q} \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto se cumple si:

i) $-\dot{\tilde{q}} = -I\dot{\tilde{q}} = 0 \Leftrightarrow \dot{\tilde{q}} = 0 \rightarrow \text{Si } \dot{\tilde{q}} = 0 \Rightarrow q(t) = \text{Constante}$

ii) $M(q) > 0 \Leftrightarrow M^{-1}(q) > 0$, además, $C(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})|_{\dot{q}=0} = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, también, $B\dot{q} = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0, B > 0$.

iii) Así mismo:

$$K_p \frac{\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q})}{\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}) + 1} [\coth(\alpha_1 \tilde{q}) + \tanh(\alpha_1 \tilde{q})] = 0 \Leftrightarrow \tilde{q} = 0, K_p > 0$$

$$K_v \frac{\cosh^{2m}(\alpha_2 \dot{\tilde{q}}) \sinh^{2m}(\alpha_2 \dot{\tilde{q}})}{\cosh^{2m}(\alpha_2 \dot{\tilde{q}}) \sinh^{2m}(\alpha_2 \dot{\tilde{q}}) + 1} [\coth(\alpha_2 \dot{\tilde{q}}) + \tanh(\alpha_2 \dot{\tilde{q}})] = 0 \Leftrightarrow \dot{\tilde{q}} = 0, K_v > 0$$

Si $\tilde{q} = 0 \Rightarrow q(t) = q_d$

Por lo tanto: **el punto de equilibrio existe y es único**

6.2.2. Propuesta de la función candidata de Lyapunov

La propuesta de función candidata de Lyapunov se diseña siguiendo la filosofía de [49] y viene dada por la siguiente expresión:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2m\alpha_1} \sqrt{\ln(\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}}) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}}) + 1)}^T K_p \sqrt{\ln(\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}}) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}}) + 1)} \\ - \frac{1}{m\alpha_1} \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \sqrt{\ln(\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}}) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}}) + 1)}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (6.6)$$

donde $\sqrt{\ln(\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}}) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}}) + 1)}$ se define como:

$$\sqrt{\ln(\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}}) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}}) + 1)} = \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_1) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_1) + 1)} \\ \sqrt{\ln(\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_2) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_2) + 1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_n) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_n) + 1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Se cumple:

$$\checkmark V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}; M(\mathbf{q}) > 0; K_p > 0$$

$$\checkmark V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) > 0 \text{ para todo } \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}; \text{ si y sólo si:}$$

$$0 < \epsilon_0 < \sqrt{\frac{m\alpha_1 \lambda_{K_p}^{min}}{\beta}} [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|] \quad (6.7)$$

donde $\beta = \lambda_M^{max} \in \mathbb{R}_+$ es el valor propio máximo de la matriz de masas e inercias $M(\mathbf{q})$.

6.2.3. Derivada de la función candidata de Lyapunov

Derivando la ecuación (6.6) y acotando se tiene:

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq - \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}; \quad Q > 0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (6.8)$$

donde:

$$a = \frac{\epsilon_0}{m\alpha_1[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} \lambda_{K_p}^{min} \gamma_m \gamma_p \sqrt{n} \\ b = c = -\frac{1}{2} \left[\frac{\epsilon_0}{m\alpha_1[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} \lambda_{K_v}^{max} \gamma_m \gamma_v \sqrt{n} - \frac{\epsilon_0}{m\alpha_1[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} K_{c1} \gamma_m + \frac{\epsilon_0}{m\alpha_1[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} \lambda_B^{max} \gamma_m \right] \\ d = \lambda_{K_v}^{min} \gamma_v \sqrt{n} + \lambda_B^{min} - \frac{\epsilon_0}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} \lambda_B^{max} \sqrt{n} - \frac{\epsilon_0}{m\alpha_1} \gamma_m \beta$$

- Dado que el punto de equilibrio existe y es único. La función candidata de Lyapunov $V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) > 0$ es definida positiva y su derivada $\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) < 0$ es definida negativa, entonces se concluye que *el punto de equilibrio tiene estabilidad asintótica global*.

6.3. Algoritmo de control versión adaptable

Debido a la conocida propiedad de parametrización lineal de la dinámica del robot en términos de un conjunto adecuado de parámetros de robot y carga útil, podemos expresar el vector de pares gravitacionales $g(q)$ como [50]:

$$g(q) = g_0(q) + \Phi(q)\hat{\theta} \quad (6.9)$$

donde $\Phi(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz conocida, $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de parámetros adaptables y $g_0(q)$ es el vector de pares gravitacionales independiente de $\hat{\theta}$. Entonces la versión adaptable del control 6.1 queda definida cómo:

$$\tau = K_p f_p(\tilde{q}) - K_v f_v(\dot{q}) + g_0(q) + \Phi(q)\hat{\theta} \quad (6.10)$$

donde, K_p y $K_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales definidas positivas de las ganancias proporcional y derivativa respectivamente. Los vectores asociados a la acción de control proporcional $f_p(\tilde{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y derivativa $f_v(\dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ están conformados por componentes hiperbólicos y se definen en 6.2 y 6.3.

6.4. Ley de adaptación

Hemos propuesto la ley de adaptación (6.11) tomando como referencia el trabajo de [50], sin embargo la diferencia más importante radica en que se ha agregado una no linealidad $\sinh(\tilde{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ tal como se observa a continuación.

$$\hat{\theta} = \Gamma \int_0^t \Phi^T(q) \frac{\sinh(\tilde{q})}{1 + \|\dot{q}\|^2} d\sigma + \hat{\theta}_0 \quad (6.11)$$

donde $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de parámetros estimados en el instante $t = 0$ y $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica definida positiva de las ganancias de adaptación.

Esta ley de adaptación se utilizará en los esquemas de control adaptable que veremos en las secciones posteriores; sin embargo, usaremos subíndices para diferenciar los parámetros usados en el esquema de control MRAC y el esquema de control adaptable con autosintonía.

6.5. Control MRAC con compensación adaptable de gravedad

El modelo de control adaptable MRAC propuesto es el que se muestra en la Figura 6.3, el cual está formado por el robot manipulador con dinámica desconocida (par gravitacional), un modelo de referencia con especificaciones de la respuesta deseada del sistema de control q_r , una ley de control τ con ajuste de parámetros del par gravitacional $\theta_g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y el algoritmo de adaptación, tal que se obtenga la respuesta deseada en el robot; es decir, que el error de adaptación $\tilde{q}_a \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ converja a cero conforme $t \rightarrow \infty$, donde $\tilde{q}_a = q_r - q$.

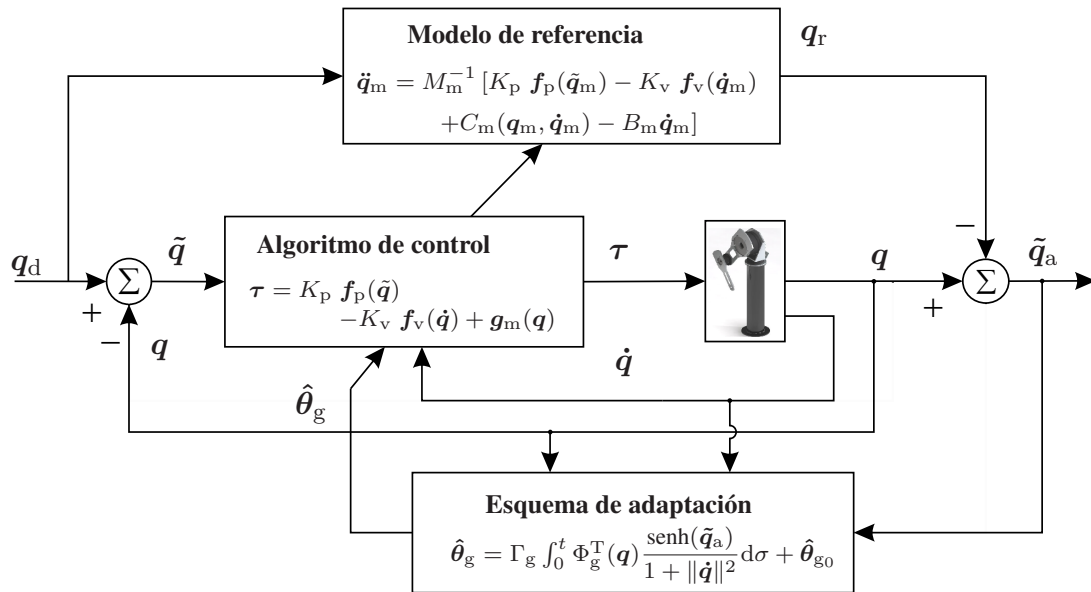


Figura 6.3: Control MRAC con compensación adaptable de gravedad.

El esquema de adaptación se emplea para calcular el parámetro $\hat{\theta}_g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ que representa la ganancia empleada en la compensación del par gravitacional con una condición inicial $\hat{\theta}_{g0} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz de lecturas, tal que $g_m(q) = g_{m0}(q) + \Phi \hat{\theta}_g \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un modelo del par gravitacional que eventualmente converge al valor real $g(q)$, el vector $g_{m0}(q)$ es el modelo del par gravitacional de referencia, la matriz $\Gamma_g \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica definida positiva de las ganancias de adaptación y $\dot{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es la velocidad articular.

A lo largo de este análisis se considera que es conocida toda la dinámica del robot, tanto sus parámetros como la forma matemática del modelo dinámico, sin embargo, se desconoce completamente el efecto de par gravitacional.

6.5.1. Control MRAC con compensación adaptable de gravedad para el péndulo simple

El algoritmo de control en el caso del péndulo toma la forma de:

$$\tau = k_p f_p(\tilde{q}) - k_v f_v(\dot{q}) + g_m(q) \quad (6.12)$$

donde $\hat{\theta}_g \in \mathbb{R}_+$ es el parámetro adaptable, $g_m(q) = g_{m0}(q) + \phi_g(q)\hat{\theta}_g$, además $g_{m0}(q) = m_{m0}g_{m0}l_{c_{m0}} \sin(q)$ y $\phi_g(q) = \sin(q) \in \mathbb{R}_+$. Por otro lado, la ley de adaptación para el péndulo simple toma la forma:

$$\hat{\theta}_g = \gamma_g \int_0^t \sin(q) \frac{\sinh(\tilde{q}_a)}{1 + \dot{q}^2} d\sigma + \hat{\theta}_{g0} \quad (6.13)$$

donde $\gamma_g \in \mathbb{R}_+$ es la ganancia de adaptación, $\hat{\theta}_g$ es el parámetro de adaptación y $\hat{\theta}_{g0}$ es una condición inicial.

6.5.2. Control MRAC con compensación adaptable de gravedad para el robot de 2 gdl

En el caso del robot de 2gdl utilizamos el algoritmo de control (6.14), el cual es una variante del algoritmo de control en su versión adaptable (6.10).

$$\tau = K_p f_p(\tilde{q}) - K_v f_v(\dot{q}) + g_m(q) \quad (6.14)$$

donde el término $g_m(q) = g_{m0}(q) + \Phi_g(q)\hat{\theta}_g$, el vector independiente $g_{m0}(q) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ y la matriz de lecturas $\Phi_g(q) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ se definen como:

$$g_{m0}(q) = g \begin{bmatrix} g_{10} \sin(q_1) + g_{20} \sin(q_1 + q_2) \\ g_{20} \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

$$\Phi_g(q) = \begin{bmatrix} \sin(q_1) & \sin(q_1 + q_2) \\ 0 & \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

donde g_{10} y $g_{20} \in \mathbb{R}_+$ representan valores numéricos aproximados a los parámetros del par gravitacional real, cabe resaltar que los valores reales se consideran desconocidos pero constantes. La ley de adaptación utilizada es:

$$\hat{\theta}_g = \Gamma_g \int_0^t \Phi_g^T(q) \frac{\sinh(\tilde{q}_a)}{1 + \|\dot{q}\|^2} d\sigma + \hat{\theta}_{g0} \quad (6.17)$$

6.6. Control con autosintonía y compensación adaptable de gravedad

El modelo de control adaptable con autosintonía propuesto es el que se muestra en la Figura 6.4, el cual está formado por el robot manipulador con dinámica desconocida (par gravitacional), un algoritmo de control τ con ajuste de parámetros del par gravitacional $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y la ley de adaptación, tal que se obtenga la respuesta deseada en el robot; es decir, que el error de posición $\tilde{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ converja a cero conforme $t \rightarrow \infty$, donde $\tilde{q} = q_d - q$.

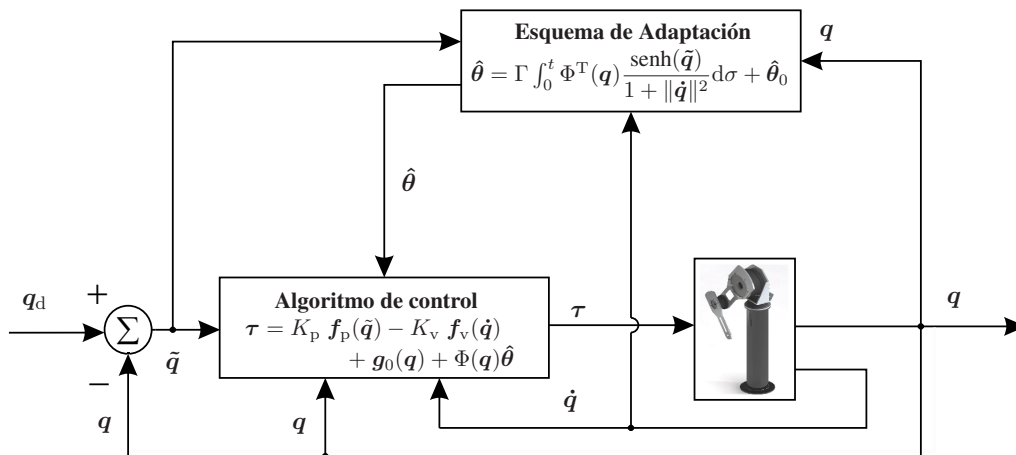


Figura 6.4: Control con autosintonía y compensación adaptable de gravedad.

El esquema de adaptación se emplea para calcular el parámetro de adaptación $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ con una condición inicial $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\phi \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un vector de lecturas, tal que $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{g}_0(\mathbf{q}) + \Phi(\mathbf{q})\hat{\theta} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el modelo del par gravitacional representado como una combinación de parámetros del robot y carga útil. $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz simétrica definida positiva de las ganancias de adaptación y $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es la velocidad articular.

6.6.1. Péndulo simple

El algoritmo de control 6.10 queda representado en el caso del péndulo por:

$$\tau = k_p f_p(\tilde{q}) - k_v f_v(\dot{q}) + g_0(q) + \phi(q)\hat{\theta} \quad (6.18)$$

donde $\hat{\theta} \in \mathbb{R}_+$ es el parámetro adaptable, además $g_0(q)$ y $\phi(q) \in \mathbb{R}_+$ se definen como :

$$g_0(q) = m_0 g_0 l_{c_0} \sin(q) \quad (6.19)$$

$$\phi(q) = \sin(q) \quad (6.20)$$

La ley de adaptación (6.11) para el péndulo simple toma la forma:

$$\hat{\theta} = \gamma \int_0^t \sin(q) \frac{\sinh(\tilde{q})}{1 + \dot{q}^2} d\sigma + \hat{\theta}_0 \quad (6.21)$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}_+$ es la ganancia de adaptación, $\hat{\theta}$ es el parámetro de adaptación y $\hat{\theta}_0$ es una condición inicial.

6.6.2. Robot de 2gdl

En el caso del robot de 2gdl utilizamos el algoritmo de control (6.10), donde el término independiente $\mathbf{g}_0(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ y la matriz de lecturas $\Phi(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ se definen como:

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{q}) = g \begin{bmatrix} g_{1_0} \sin(q_1) + g_{2_0} \sin(q_1 + q_2) \\ g_{2_0} \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

$$\Phi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin(q_1) & \sin(q_1 + q_2) \\ 0 & \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

donde g_{1_0} y $g_{2_0} \in \mathbb{R}_+$ representan valores numéricos aproximados a los parámetros del par gravitacional real, cabe resaltar que los valores reales se consideran desconocidos pero constantes. La ley de adaptación utilizada es la de la ecuación 6.11.

Capítulo 7

Resultados de simulación y experimentales

En este capítulo se evalúa el desempeño del esquema de control adaptable con base en el modelo de referencia y el esquema de control adaptable con autosintonía utilizando simulaciones y experimentos con el robot ROTRADI I.

7.1. Resultados de simulación

7.1.1. Robot tipo péndulo simple

Para propósitos de simulación se han definido algunos parámetros numéricos. Para el algoritmo de control (6.12) y (6.18) definimos $k_p = 150 \times 0.8/2$, $k_v = 0.69 \times kp1$, $\alpha_1 = 1.335$, $\alpha_2 = 0.1885$, $m_{m0} = m_0 = 0.5\text{kg}$, $l_{cm0} = l_{c0} = 0.001\text{m}$, $g = 9.81\text{m/s}^2$ y para la ley de control (6.13) y (6.21) definimos $\gamma = 270$, $\gamma_g = 455$ y $\hat{\theta}_{g0} = \hat{\theta}_0 = 0\text{Nm}$. La simulación se hizo correr 2s. En cada una de las siguientes graficas se observan líneas diferentes.

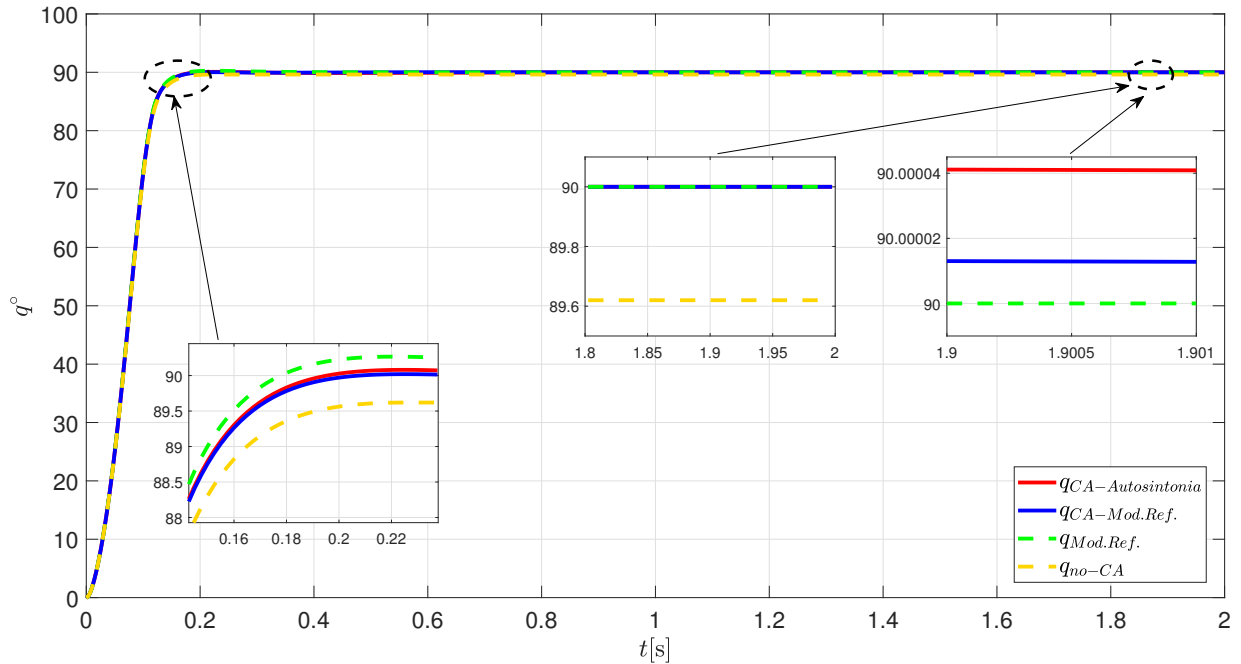


Figura 7.1: Posición del robot.

La línea entrecortada en color **amarillo** corresponde al comportamiento del robot *sin control adaptable*, mientras que la línea entrecortada en color **verde** corresponde al *modelo referencia* usado en el control adaptable MRAC. Las líneas sólidas en color **azul** y **rojo** corresponden al comportamiento que presenta el robot cuando se usa *control adaptable MRAC* y *control adaptable con autosintonía* respectivamente. En la Figura 7.1 se observan cuatro curvas correspondientes a la posición del robot. Se observa que el robot con control adaptable MRAC y con autosintonía se posicionan en $q = 90^\circ$ en un tiempo de $t = 0.2s$ aproximadamente, alcanzando en el estacionario un error del orden de 10^{-5} .

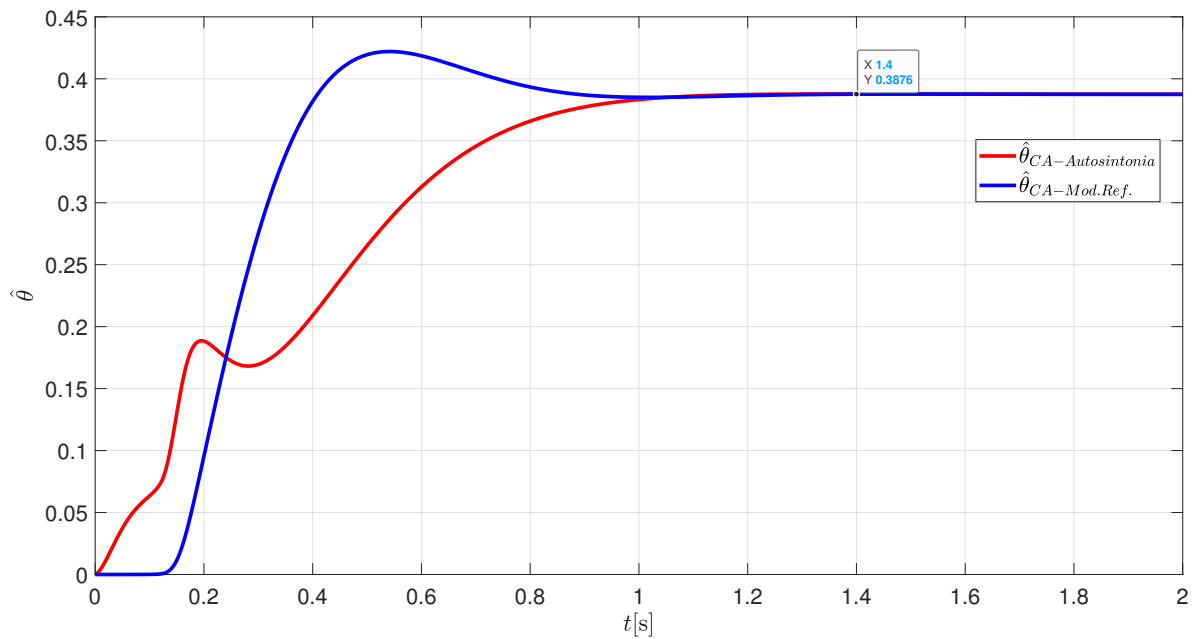


Figura 7.2: Valor numérico de $\hat{\theta}$.

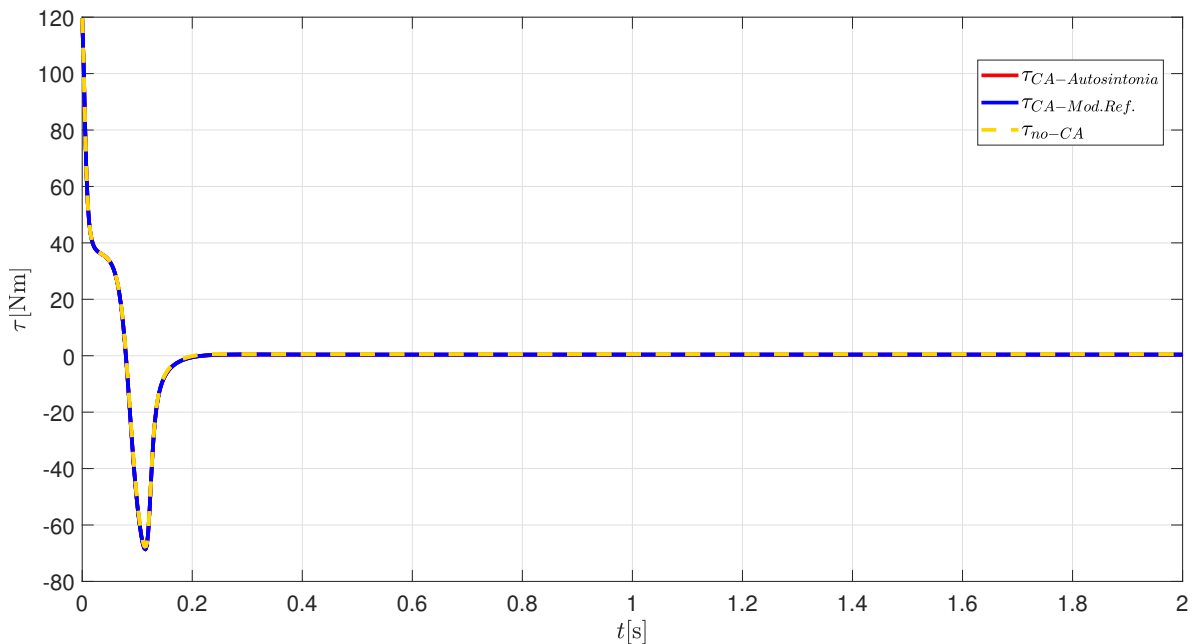


Figura 7.3: Par solicitado al servomotor.

En la Figura 7.2 se observa la evolución en el tiempo de $\hat{\theta}$, se aprecia que con ambos algoritmos de control (Control Adaptable MRAC y con autosintonía) el parámetro $\hat{\theta}$ converge en un valor cercano a $\hat{\theta} \approx 0.3875$. Y en la Figura 7.3 se muestra el par solicitado por el algoritmo de control al servomotor. El par máximo solicitado no supera el 80 % de $\tau_{\text{máx}}$ es decir 120Nm en ninguno de los algoritmos analizados.

7.1.2. Robot de 2gdl

Para propósitos de simulación se han definido algunos parámetros numéricos. Para el algoritmo de control (6.14) y (6.10) definimos $k_{p1} = (150 \times 0.8)/2$, $k_{p2} = (15 \times 0.8)/2$, $k_{v1} = 0.9653 \times k_{p1}$, $k_{v2} = 0.9466 \times k_{p2}$, $\alpha_1 = 2.9$, $\alpha_2 = 0.5$, $g_{10} = 2.5$, $g_{20} = 0.008$, $g = 9.81\text{m/s}^2$ y para la ley de control (6.17) y (6.11) definimos la matriz de ganancias de adaptación para el control MRAC $\Gamma_g = \text{diag}[157.5; 8.55]$, la matriz de ganancias de control con autosintonía $\Gamma = \text{diag}[435; 26.25]$ y $\hat{\theta}_{g0} = \text{diag}[16; 2]\text{Nm}$, $\hat{\theta}_0 = \text{diag}[14; 1]\text{Nm}$. La simulación se hizo correr 10s.

En cada una de las siguientes graficas se observan líneas diferentes. La línea entrecortada en color **amarillo** corresponde al comportamiento del robot *sin control adaptable*, mientras que la línea entrecortada en color **cíán** corresponde al *modelo referencia* usado en el control adaptable MRAC. Las líneas sólidas en color **negro** y **verde** corresponden al comportamiento que presenta el robot cuando se usa *control adaptable MRAC*, mientras que las líneas sólidas en color **azul** y **rojo** corresponden al *control adaptable con autosintonía*.

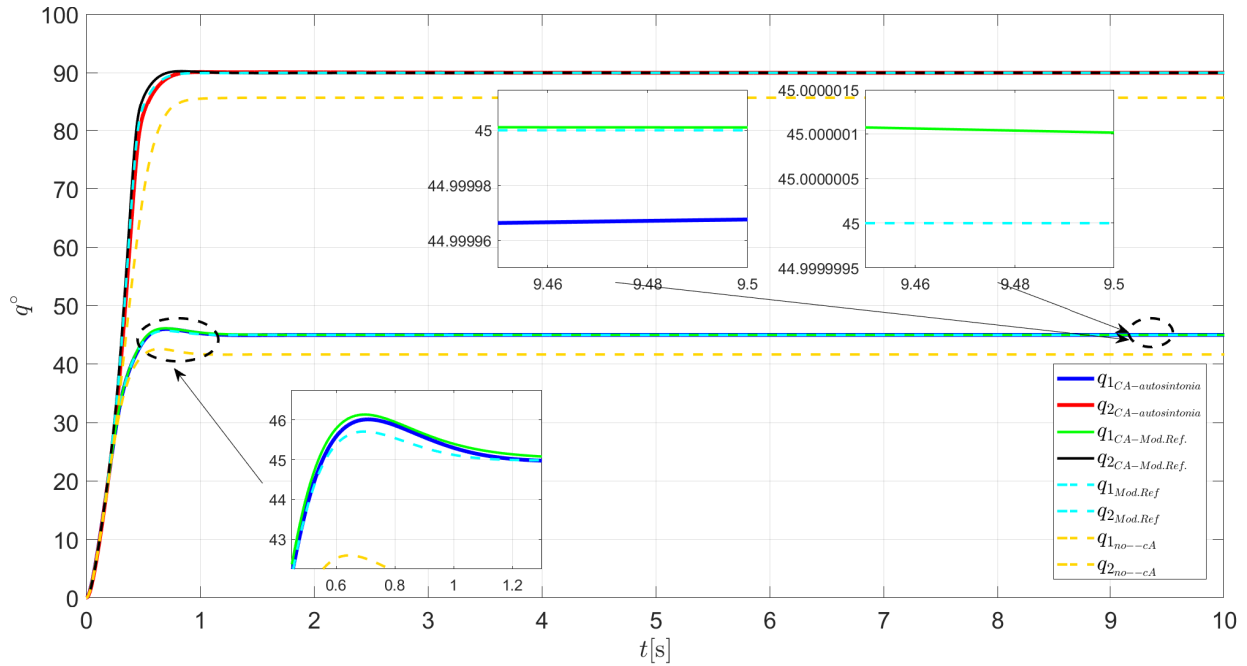


Figura 7.4: Posición del robot.

En la Figura 7.4 y 7.5 se observa la posición del robot. Se observa que el robot con control adaptable MRAC y con autosintonía se posiciona en $\mathbf{q} = \mathbf{q}_r = [45^\circ, 90^\circ]^T$ en un tiempo de $t = 0.8\text{s}$ aproximadamente con un ligero sobre impulso en la articulación q_2 . En el estacionario se alcanza un error del orden de 10^{-5} y 10^{-6} .

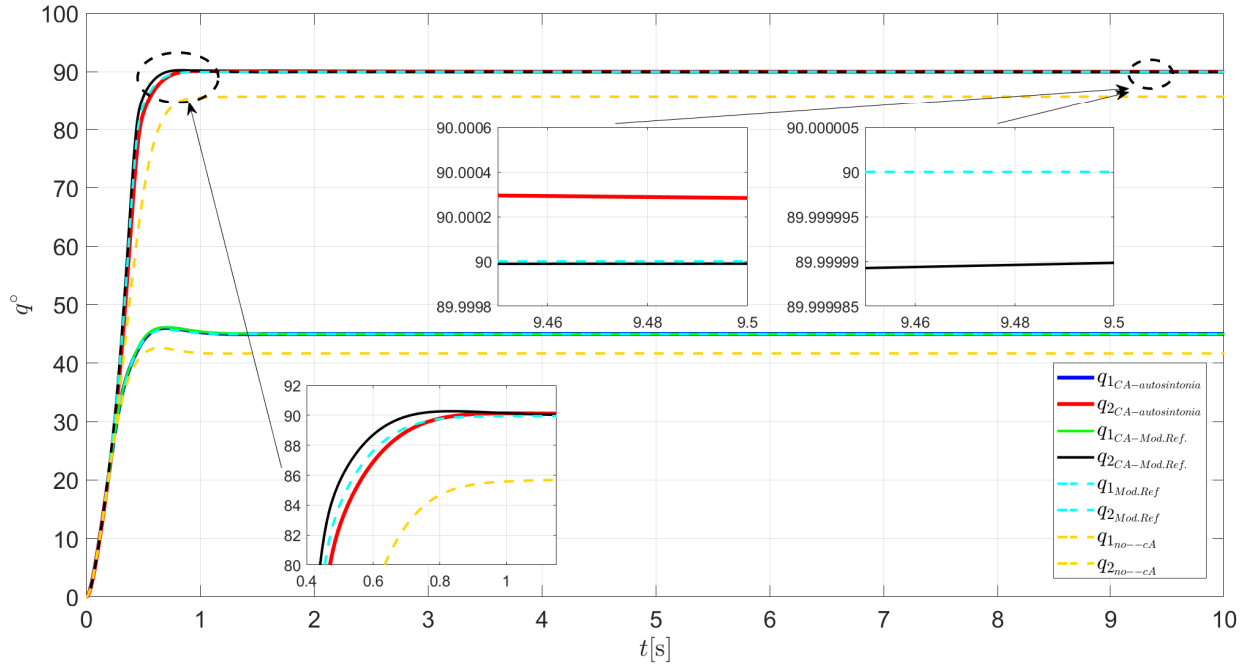
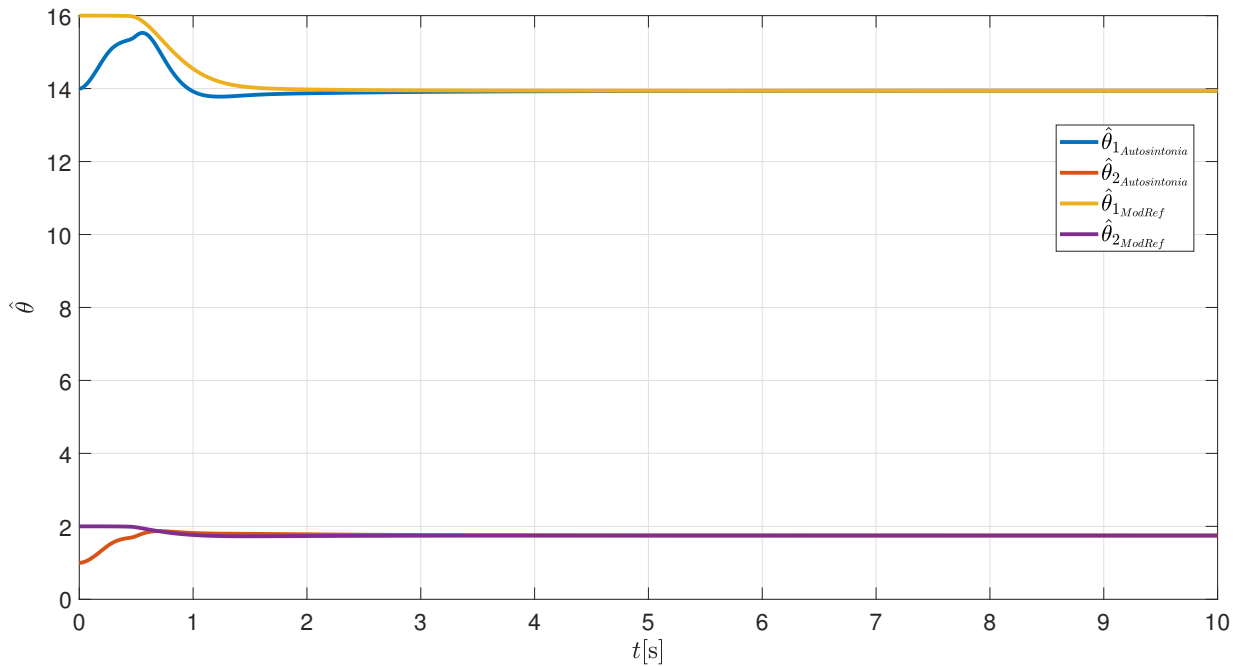


Figura 7.5: Posición del robot

En la Figura 7.6 se observa la evolución en el tiempo de $\hat{\theta}$, se aprecia que con ambos algoritmos de control (Control Adaptable MRAC y con autosintonía) el parámetro $\hat{\theta} \approx \hat{\theta}_g$ converge a un valor cercano a $\hat{\theta} \approx [13.94, 1.748]^T$.

Figura 7.6: Valor numérico de $\hat{\theta}$

En la Figura 7.7 se muestra el par solicitado por el algoritmo de control a los servomotores. El par máximo solicitado no supera el 80 % de $\tau_{\text{máx}}$ es decir 120Nm y 12Nm en ninguno de los algoritmos analizados.

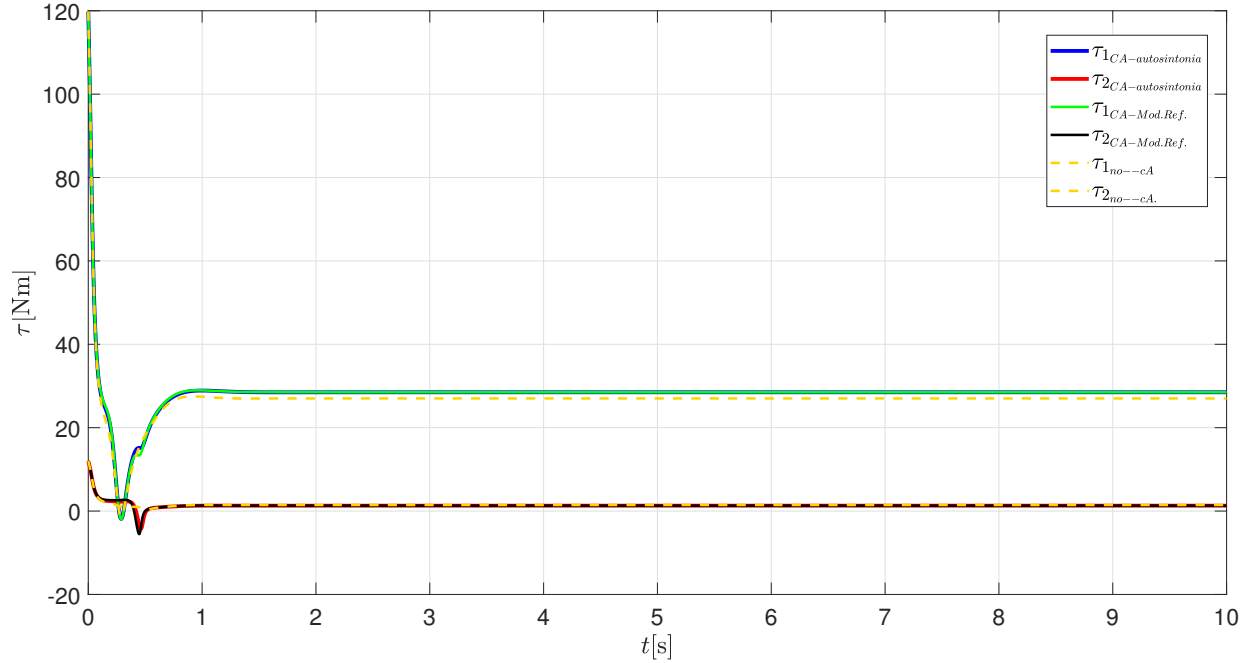


Figura 7.7: Par solicitado a los servomotores

7.1.3. Medida del desempeño

Para este análisis se ha empleado una variante de la norma $\mathcal{L}_2[\mathbf{f}]$, también conocida como $rms[\mathbf{f}]$. La norma $\mathcal{L}[\mathbf{f}]$ se define como:

$$\mathcal{L}[\mathbf{f}] = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{f}^T(\varphi) \mathbf{f}(\varphi) d\varphi} = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t \|\mathbf{f}(\varphi)\|^2 d\varphi} < \infty \quad (7.1)$$

donde $\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{q}}$ es una medida del error de posición, medido para $\varphi = 0$ hasta $\varphi = t$. Teniendo en cuenta además que la norma $\mathcal{L}_2[\mathbf{f}]$ es inversamente proporcional al desempeño del esquema a evaluar.

El valor numérico de $rms[\tilde{\mathbf{q}}]$ obtenido con los esquemas de control evaluados durante la simulación se muestra en la tabla 7.1:

Robot	Esquema de control	Duración del experimento	$\mathcal{L}[\tilde{\mathbf{q}}]$
Péndulo simple	Control MRAC	2 s	0.36432
	Control adaptable con autosintonía		0.36431
	Control sin compensación de gravedad		0.36524
Robot de 2gdl	Control MRAC	2 s	0.25603
	Control adaptable con autosintonía		0.25953
	Control sin compensación de gravedad		0.28493

Tabla 7.1: Rendimiento durante simulación del algoritmo de control adaptable MRAC.

En la Figura 7.8 y 7.9 se muestra el desempeño de los esquemas de control evaluados durante las simulaciones. En la Figura 7.8 se observa que para el caso del péndulo simple, los métodos de control adaptable MRAC y con autosintonía presentan mejor desempeño que el obtenido mediante el algoritmo de control de posición puro sin compensación adaptable de gravedad.

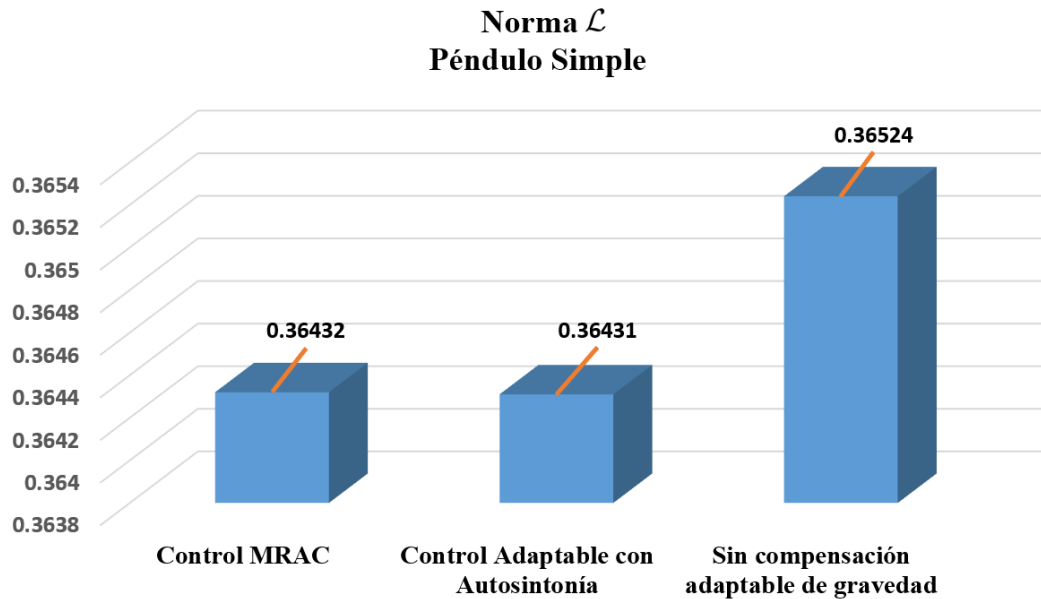


Figura 7.8: Desempeño del esquema de control para el péndulo simple.

En la Figura 7.9 se muestra el resultado obtenido luego de evaluar el desempeño utilizando la Norma $\mathcal{L}$ en el robot de 2 gdl. De igual manera que con el péndulo simple, los métodos de control adaptable MRAC y con autosintonía tienen el mejor desempeño; sin embargo, el control MRAC muestra el mejor desempeño [51].

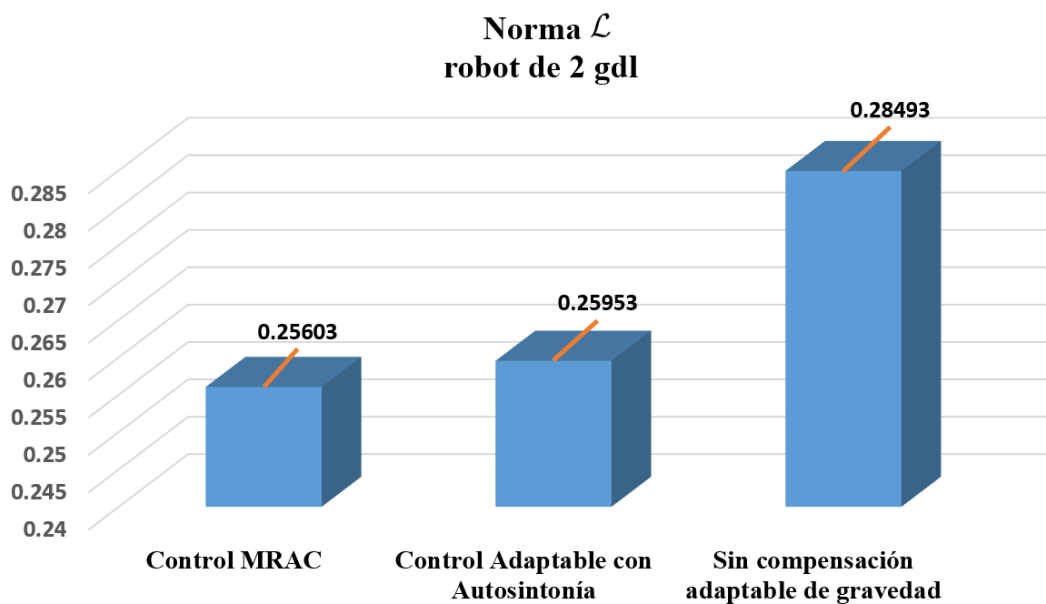


Figura 7.9: Desempeño del esquema de control para el robot de 2gdl.

7.2. Resultados experimentales: Robot de 3gdl

Para propósitos de experimentación se han definido algunos parámetros numéricos. Para el algoritmo de control (6.14) y (6.10) definimos $k_{p1} = (15 \times 0.8)/2$, $k_{p2} = (50 \times 0.8)/2$, $k_{p3} = (4 \times 0.8)/2$, $k_{v1} = 0.98 \times k_{p1}$, $k_{v2} = 0.29 \times k_{p2}$, $k_{v3} = 0.455 \times k_{p3}$, $\alpha_1 = 1.3235$, $\alpha_2 = 0.27085$, $g_{20} = 0.6511$, $g_{30} = 0.045$, $g = 9.81 \text{m/s}^2$ y para la ley de control (6.17) y (6.11) definimos la matriz de ganancias de adaptación, $\Gamma_g = \text{diag}[112.5; 1.83]$ para el control MRAC y $\Gamma = \text{diag}[0.20; 0.081]$ para el control con autosintonía. Así mismo, se definen las condiciones iniciales para los parámetros adaptables $\hat{\theta}_{g0} = \text{diag}[-0.07; -0.07] \text{Nm}$, $\hat{\theta}_0 = \text{diag}[-0.07; -0.07] \text{Nm}$. Se realizó compensación adaptable de gravedad a la segunda y tercera articulación, lo que corresponde al hombro y al codo. En el caso de la base se realizó únicamente control de posición pura debido a que esta articulación no se ve afectada por la gravedad. El experimento se hizo correr se hizo correr 5s.

7.2.1. Control de posición para el robot de 3gdl

En la Figura 7.10 se muestra la posición del robot. Se observa que el robot con control de posición pura llega a la posición deseada $\mathbf{q}_d = [60^\circ, 45^\circ, 90^\circ]^T$ en un tiempo de $t = 0.4 \text{s}$ aproximadamente con un ligero sobre impulso en la articulación q_3 . En el estacionario, el robot de 3gdl alcanza la posición $\mathbf{q} = [61.495^\circ, 45.243^\circ, 91.178^\circ]^T$, lo que representa un error de posicionamiento $\pm 1.5^\circ$ aproximadamente, esto es causado por la incertidumbre que existe en el par gravitacional.

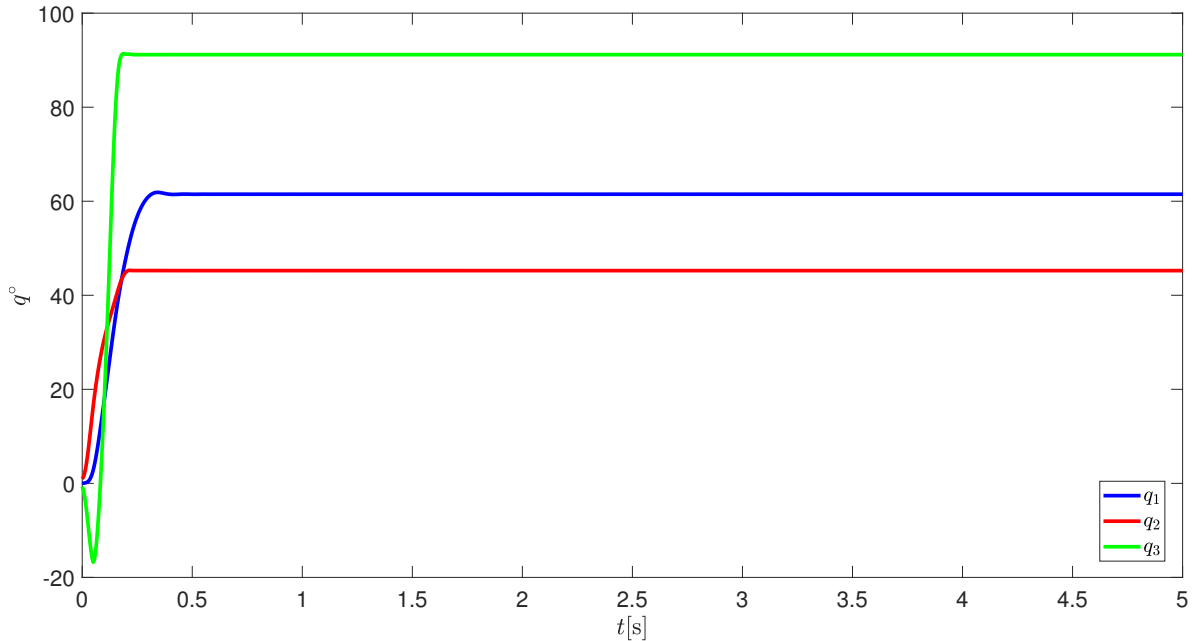


Figura 7.10: Posición del robot de 3gdl.

En la Figura 7.11 se muestra el par solicitado por el algoritmo de control a los servomotores. El par máximo solicitado no supera el 80 % de $\tau_{\text{máx}}$, es decir $\tau_1 \leq 0.8 \times 15 \text{Nm}$, $\tau_2 \leq 0.8 \times 50 \text{Nm}$ y $\tau_3 \leq 0.8 \times 4 \text{Nm}$. Se observa que el torque presenta variaciones en el transitorio, pero luego de 0.4 segundos entra al estado estacionario donde se estabiliza en ciertos valores.

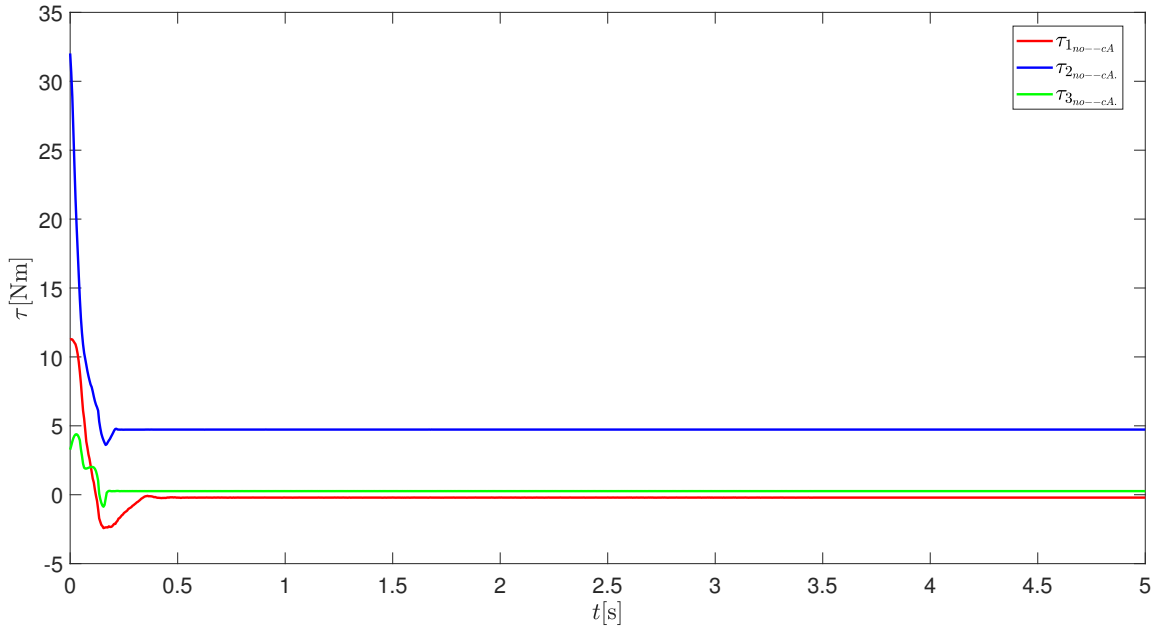


Figura 7.11: Torque solicitado a los servomotores del robot de 3gdl.

7.2.2. Control adaptable para el robot de 3gdl

En cada una de las siguientes graficas se observan diferentes líneas. La línea entrecortada en color **amarillo** corresponde al comportamiento del robot *sin control adaptable*; es decir, con el control de posición pura (6.1). Las líneas sólidas en color **rojo**, **azul** y **verde** corresponden al comportamiento que presenta el robot cuando se usa *control adaptable con autosintonía*, mientras que las líneas sólidas en color **cíjan**, **rosa** y **negro** corresponden al *control adaptable con base en el modelo de referencia*.

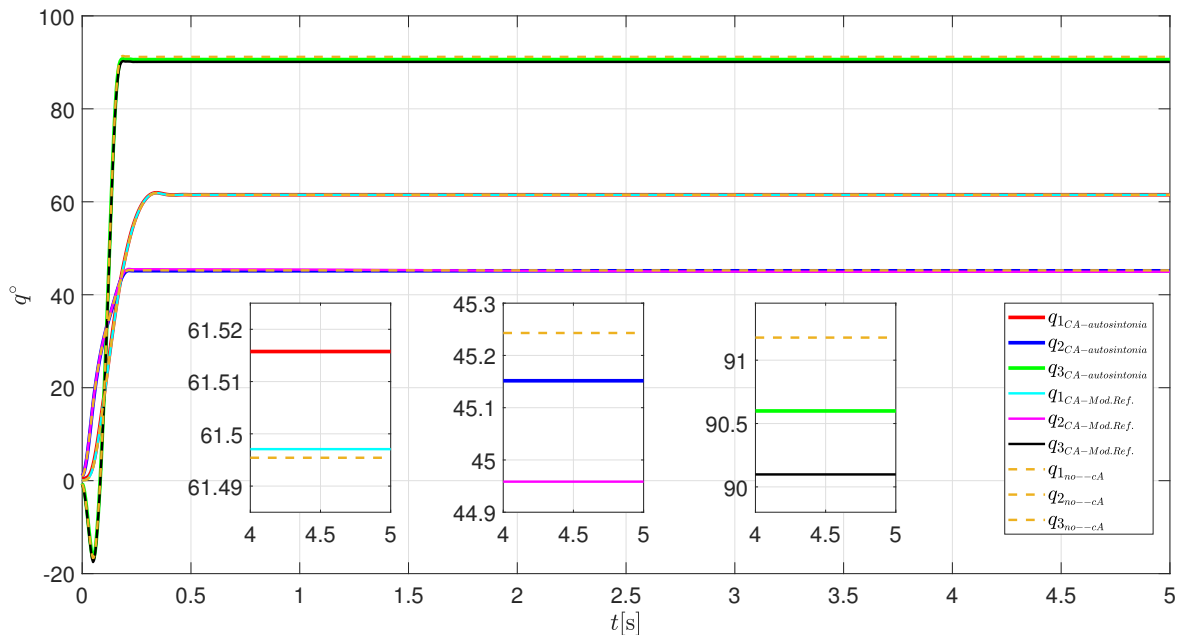


Figura 7.12: Posición del robot de 3gdl.

Tal como se observa en la Figura 7.12, el robot llega a la posición deseada $\mathbf{q}_d = [60^\circ, 45^\circ, 90^\circ]^T$ en un tiempo de $t = 0.4s$ aproximadamente con un ligero sobre impulso en la articulación q_1 en los tres casos. Para el algoritmo de *control de posición pura*, en el estacionario, se observa un error de $\pm 1.5^\circ$, esto es causado por la incertidumbre que existe en el par gravitacional.

Al evaluar el comportamiento del robot con los esquemas de control adaptables, se observa que el robot de 3gdl con *control adaptable con autosintonía* alcanza la posición $[61.516^\circ, 45.152^\circ, 90.599^\circ]$ en el estacionario, lo que representa un error de posicionamiento de $\pm 0.6^\circ$ para la segunda y tercera articulación aproximadamente. Mientras que con el *control adaptable MRAC*, el robot de 3gdl alcanza la posición $[61.497^\circ, 44.959^\circ, 90.098^\circ]$, lo que representa un error de posicionamiento de $\pm 0.04^\circ$ para la segunda y tercera articulación, siendo más pequeño que el observado en el *control adaptable con autosintonía*. La reducción del error en el estado estacionario es debido a que la incertidumbre en el par gravitacional y los errores de posicionamiento están siendo compensadas mediante la ley de adaptación. Es importante mencionar que en el caso de la base no se ha aplicado compensación adaptable del par gravitacional pues éste no está sujeto a los efectos de la gravedad.

En la Figura 7.13 se observa la evolución en el tiempo de los parámetros adaptables $\hat{\theta}$. Se aprecia que los parámetros adaptables usados en los esquemas de control adaptable MRAC convergen a los valores $\hat{\theta}_g \approx [-3.705, -0.16662]$, mientras que los parámetros adaptables usados en el control con autosintonía alcanzan un valor de $\hat{\theta} \approx [-0.073746, -0.071235]^T$, estos últimos valores continúan evolucionando aún luego de terminado el experimento lo que implica que aún se puede mejorar la sincronización de este parámetro con el objetivo de mejorar la respuesta del robot.

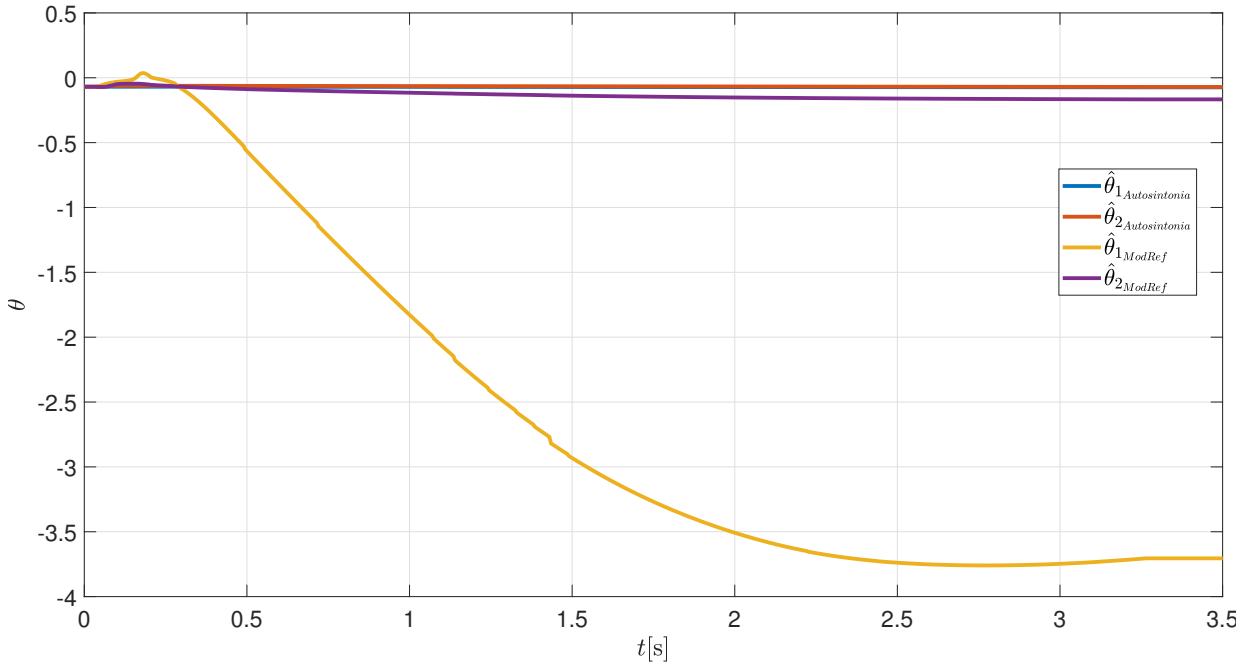


Figura 7.13: Valor numérico de $\hat{\theta}$.

En la Figura 7.11 se muestra el par solicitado por los algoritmos de control a los servomotores. El par máximo solicitado no supera el 80 % de $\tau_{\text{máx}}$, es decir $\tau_1 \leq 0.8 * 15\text{Nm}$, $\tau_2 \leq 0.8 * 50\text{Nm}$ y $\tau_3 \leq 0.8 * 4\text{Nm}$ en ninguno de los casos. Se observa que el torque presenta variaciones en el transitorio, pero luego de 0.4 segundos se estabiliza al alcanzar el estacionario.

Algo de interés es que el par solicitado al servomotor de la segunda articulación por el *control adaptable MRAC* presenta una caída suave y constante durante el estacionario. Esto es debido a que la Ley de adaptación realiza correcciones en el par solicitado a las servomotores por medio de la actualización de los parámetros adaptables con la finalidad de ir reduciendo el error de posición hasta lograr la convergencia asintótica a la posición deseada.

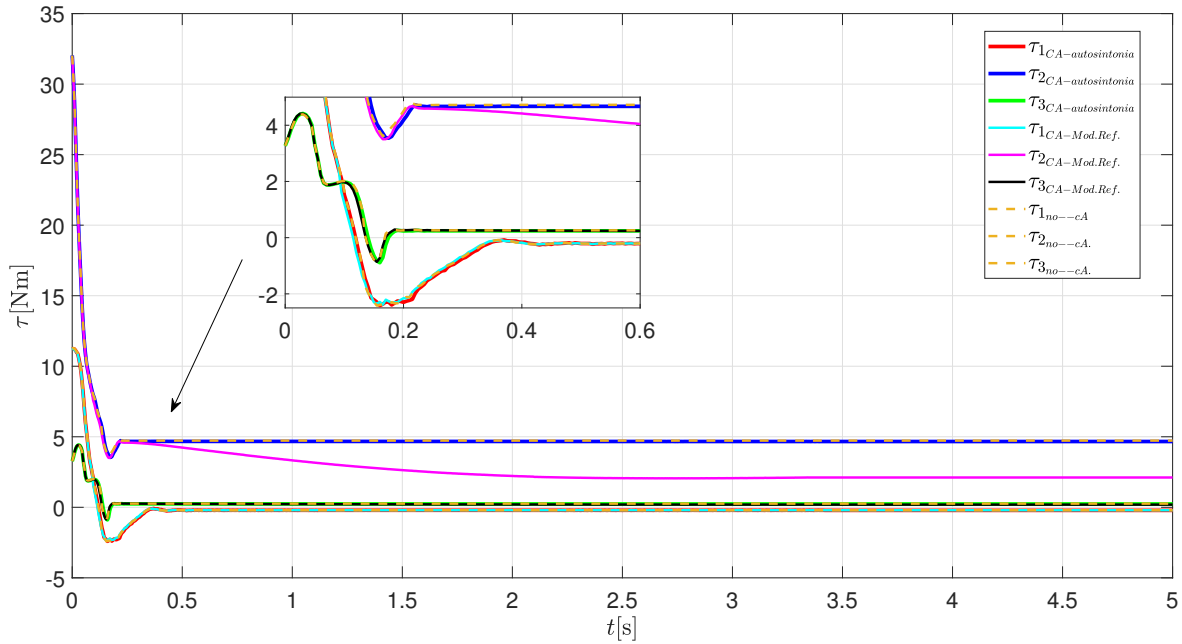


Figura 7.14: Torque solicitado a los servomotores del robot de 3gdl.

7.2.3. Medida del desempeño

Para este análisis se ha empleado una variante de la norma $\mathcal{L}_2[\mathbf{f}]$, también conocida como $rms[\mathbf{f}]$. La norma $\mathcal{L}[\mathbf{f}]$ se definió en (7.1). El valor numérico de $rms[\tilde{\mathbf{q}}]$ obtenido con los esquemas de control evaluados durante la experimentación se muestra en la tabla 7.2:

Robot	Esquema de control	Duración del experimento	$\mathcal{L}[\tilde{\mathbf{q}}]$
Robot de 3gdl	Control adaptable con autosintonía	5s	17.64
	Control adaptable MRAC		17.758
	Control sin compensación de gravedad		17.72

Tabla 7.2: Rendimiento de los algoritmos de control observado en los experimentos con el robot de 3gdl.

Aunque pareciera que el desempeño del algoritmo de control adaptable MRAC parece ser más bajo en comparación al control de posición pura y al de autosintonía, esto podría resultar engañoso a primera vista. Por ello, es importante observar que la ventaja del algoritmo de control adaptable con autosintonía y MRAC sobre el *control de posición pura* es que en el estacionario la posición alcanzada es mucho más cercana a la posición deseada.

Conclusiones

- Se ha realizado el modelado de un robot tipo péndulo, un robot manipulador de 2gdl y un robot manipulador de 3gdl empleando la mecánica analítica con el enfoque de Leonard Euler obteniendo nuevas propiedades del modelo dinámico que son de gran importancia en la reducción del álgebra. El uso de esta metodología ha permitido obtener una nueva representación del modelo dinámico de los robots manipuladores antes mencionados, lo cual permite visualizar con mayor facilidad la manera en que los parámetros geométricos influyen en la forma final del modelo matemático y por ende en el comportamiento del robot.
- Se ha diseñado un regulador de posición pura y se ha hecho el análisis de estabilidad asintótica y global con una función estricta de Lyapunov demostrando que el algoritmo de control cumple con el objetivo de regulación. Este algoritmo ha demostrado tener un muy buen desempeño tanto en las simulaciones como en los experimentos realizados. El desempeño de los algoritmos se ha medido utilizando las normas RMS y $\mathcal{L}_2$. Se han diseñado dos algoritmo de control adaptable, uno con base en modelo de referencia y otro con autosintonía, los cuales en simulación y experimentación han demostrado ser capaces de mantener el desempeño aún en presencia de incertidumbres paramétricas. La mayor ventaja de estos algoritmos se observa en el estado estacionario donde ayudan a reducir el error de posicionamiento.
- Para la realización de los experimentos se han implementado los esquemas de control desarrollados en el trabajo de tesis utilizando una tarjeta Arduino MKR Vidor 4000, la cual cuenta con un FPGA Cyclone 10CL016 y un microcontrolador SAMD21 Cortex-M0. En el FPGA se han implementado los decoders para obtener la posición articular de cada una de las articulaciones por medio de la señal de un encoder y un módulo SPI Slave que permite establecer comunicación entre el FPGA y el microcontrolador de la tarjeta. Los algoritmos de control se han implementado en el microcontrolador SAMD21 Cortex-M0, las señales de control se envían a los servomotores utilizando DAC'S y OpAmp's para la etapa de acondicionamiento de señal cerrando así el lazo de control. La modificación de las posiciones deseadas, las ganancias asociadas a los algoritmos de control y la captura de datos se realizaron mediante una interfaz desarrollada en Python.
- Como resultados adicionales de la realización de este trabajo de tesis, se produjeron diversos artículos científicos, los que se pueden ser consultados en el Apéndice B. Prueba de ello son los artículos presentados *Congreso internacional de ingeniería electrónica ELECTRO 2021*, el primero titulado *Control saturado para robots manipuladores con estabilidad asintótica global* y el segundo *Control tipo hiperbólico con estabilidad asintótica para robots manipuladores*, siendo publicados ambos en las memorias de dicho congreso.

Bibliografía

- [1] F. Reyes Cortés, *Control de Robots Manipuladores*. México DF, México: Grupo Editorial Alfaomega, 2011.
- [2] F. Reyes Cortés, *Matlab aplicado Robótica y Mecatrónica*. México DF, México: Grupo Editorial Alfaomega, 2012.
- [3] F. Csáki, *Modern Control Theories: Nonlinear, Optimal, and Adaptive Systems*. Budapest, Hungría: Akadémiai Kiadó, 1972.
- [4] S. N. Kumpati and M. A. Anuradha, *Stable Adaptive Systems*. New York, USA.: Prentice Hall, 1989.
- [5] C. Chen, *Linear Systems Theory and Design*. New York, USA.: Oxford University Press, third edition ed., 1999.
- [6] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Adaptive control*. Lund, Sweden: Addison-Wesley, 1989.
- [7] S. G. Tzafestas, “Adaptive and robust methods,” in *Introduction to Mobile Robot Control* (S. G. Tzafestas, ed.), pp. 237–268, Oxford: Elsevier, 2014.
- [8] J. J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. New Jersey, USA.: Prentice Hall, 1991.
- [9] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*. New Jersey, USA.: Prentice Hall, 1993.
- [10] S. Sastry, *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*. New York, USA.: Springer Verlag, 1999.
- [11] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. New Jersey, USA.: Prentice Hall, third edition ed., 2002.
- [12] W. M. Haddad and V. Chellaboina, *Nonlinear Dynamical Systems and Control*. New Jersey, USA.: Princeton University Press, 2008.
- [13] K. J. Åström, “Adaptive control around 1960,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 16, pp. 44–49, Junio 1996.
- [14] J. Seltine, A. Mancini, and C. Sarture, “A survey of adaptive control systems,” *IRE Transactions on Automatic Control*, vol. 6, pp. 102–108, 1958.
- [15] K. Narendra and D. Streeter, “An adaptive procedure for controlling undefined linear processes,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 9, pp. 545–548, 1964.

- [16] A. Koivo and T. Guo, "Control of robotic manipulator with adaptive controller," *1981 20th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes*, pp. 271–276, 1981.
- [17] A. Koivo and T. Guo, "Adaptive linear controller for robotic manipulators," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 28, pp. 162–171, 1983.
- [18] Z. Ma and C. G. Lee, "Adaptive perturbation control with compensation for disturbances for robot manipulators," *1985 24th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1510–1515, 1985.
- [19] S. Singh, "Adaptive model following control of nonlinear robotic systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 30, pp. 1099–1100, 1985.
- [20] R. A. Al-Ashoor, K. Khorasani, R. V. Patel, and A. Al-Khalili, "Trajectory following robust adaptive control of flexible joint manipulators," *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 354–360 vol.1, 1991.
- [21] A. J. Koivo and N. Houshangi, "Real-time vision feedback for servoing robotic manipulator with self-tuning controller," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 21, no. 1, pp. 134–142, 1991.
- [22] S. K. Singh, "Adaptive control of manipulator interaction with environment: theory and experiments," *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1001–1006 vol.1, 1993.
- [23] T. Naniwa, S. Arimoto, and V. Vega, "A model-based adaptive control scheme for coordinated control of multiple manipulators," *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'94)*, vol. 1, pp. 695–702 vol.1, 1994.
- [24] P. R. Pagilla and M. Tomizuka, "Adaptive control of two robot arms carrying an unknown object," *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 1, pp. 597–602 vol.1, 1995.
- [25] E. Y. Sidi, P. Sicard, D. Massicotte, and S. Lesueur, "Adaptive high precision position control for a flexible joint with friction and parameter uncertainties using neural networks," *Conference Proceedings. IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (Cat. No.98TH8341)*, vol. 1, pp. 325–328 vol.1, 1998.
- [26] C. Y. W, E. S. Kim, K. C. Lee, and M. , "Tracking control of a robot manipulator using a direct model reference adaptive fuzzy control," *Proceedings 1999 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Human and Environment Friendly Robots with High Intelligence and Emotional Quotients (Cat. No.99CH36289)*, vol. 1, pp. 100–105 vol.1, 1999.
- [27] P. Tomei, "Robust adaptive friction compensation for tracking control of robot manipulators," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 11, pp. 2164–2169, 2000.
- [28] Y. Gao and M. Joo, "Online adaptive fuzzy neural identification and control of a class of mimo nonlinear systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 11, no. 4, pp. 462–477, 2003.

- [29] A. Ghobakhloo, M. Eghtesad, and M. Azadi, “Adaptive-robust control of the stewart-gough platform as a six dof parallel robot,” *2006 World Automation Congress*, pp. 1–6, 2006.
- [30] Z. Li, P. Y. Tao, S. S. Ge, M. Adams, and W. S. Wijesoma, “Robust adaptive control of cooperating mobile manipulators with relative motion,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, vol. 39, no. 1, pp. 103–116, 2009.
- [31] J. L. Meza, V. Santibáñez, R. Soto, and M. A. Llama, “Fuzzy self-tuning pid semiglobal regulator for robot manipulators,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 59, no. 6, pp. 2709–2717, 2012.
- [32] G. Chen, W. Zhang, X. Li, and B. Yu, “Adaptive speed control method for electromagnetic direct drive vehicle robot driver based on fuzzy logic,” *Measurement and Control*, vol. 52, pp. 1344–1353, October 2019.
- [33] M. H. Khamsehei Fadaei, S. Ghasem, A. Zalaghi, and Z. Torkani, “Design of model reference adaptive control for a 4-dof serial manipulator,” *5th Conference on Knowledge Based Engineering and Innovation (KBEI)*, pp. 108–112, 2019.
- [34] H. Cao, Y. He, X. Chen, and X. Zhao, “Smooth adaptive hybrid impedance control for robotic contact force tracking in dynamic environments,” vol. 47, pp. 231–242, February 2020.
- [35] Y. Cao and Y. D. Song, “Adaptive pid-like fault-tolerant control for robot manipulators with given performance specifications,” *International Journal of Control*, vol. 93, no. 3, pp. 377–386, 2020.
- [36] A. Izadbakhsh and S. Khorashadizadeh, “Robust adaptive control of robot manipulators using bernstein polynomials as universal approximator,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 30, pp. 2719–2735, 2020.
- [37] H. Ventura-Hinostroza and A. Rojas-Moreno, “Real-time model reference adaptive fuzzy control of a 3dof robot arm,” *IEEE XXVII International Conference on Electronics, Electrical Engineering and Computing (INTERCON)*, pp. 1–4, 2020.
- [38] W. M. Elawady, Y. Boutera, and A. Elmogy, “An adaptive second order sliding mode inverse kinematics approach for serial kinematic chain robot manipulators,” *Robotics*, vol. 9, p. 4, 2020.
- [39] Y. T., L. Z., and G. Wang, “Adaptive sliding mode control of robot based on fuzzy neural network,” *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, pp. 1–13, 2020.
- [40] G. I. Zamora-Gómez, A. Zavala-Río, E. Vázquez-Ramírez, F. Reyes, and V. Santibáñez, “A robustness study of a finite-time/exponential tracking continuous control scheme for constrained-input mechanical systems: Analysis and experiments,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 30, pp. 3923–3944, 2020.
- [41] T. L. V., S. Huang, Y. V. T., and P. Cuong, “Adaptive trajectory neural network tracking control for industrial robot manipulators with deadzone robust compensator,” *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 18, pp. 2423–2434, 2020.

- [42] T. Salloom, X. Yu, W. He, and O. Kaynak, “Adaptive neural network control of underwater robotic manipulators tuned by a genetic algorithm,” *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 97, pp. 657–672, 2020.
- [43] J. G. Cebada-Reyes, P. Wiederhold, P. Sánchez-Sánchez, and I. L. López-Cruz, “Visual control law tuning using the jade algorithm applied to leaf detection and cutting,” *IEEE Latin America Transactions*, vol. 18, no. 07, pp. 1255–1263, 2020.
- [44] R. Kelly and V. Santibáñez, *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Madrid, España: Pearson Educación, S. A., 2003.
- [45] K. J. Åström, “Theory and applications of adaptive control—a survey,” *Automatica*, vol. 19, no. 5, pp. 471–486, 1983.
- [46] B. Thomas, *Comparative Analysis of Adaptive Control Techniques for Improved Robust Performance*. PhD thesis, Universidad Técnica de Munich, Munich, 2013.
- [47] Merriam-Webster, “Adaptable,” in *Merriam-Webster.com dictionary*, n.d. Accedido el 8 de May. del 2021.
- [48] Arduino.cc, “Mkr vidor 4000,” in *Arduino Documentation*, n.d. Accedido el 6 de May. del 2022.
- [49] F. Reyes-Cortes and B. M. Al-Hadithi, “An asinh-type regulator for robot manipulators with global asymptotic stability,” *Automatika*, vol. 61, no. 4, pp. 574–586, 2020.
- [50] R. Kelly, V. Santiañez, and F. Reyes, “On saturated?proportional derivative feedback with adaptive gravity compensation of robot manipulators,” *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 10, no. 4-5, pp. 465–479, 1996.
- [51] C. S. Díaz-Baca, *Manipulación cooperativa robot–robot y humano–robot. Aplicación a sistemas flexibles de desensamblado automático*. PhD thesis, Universidad de Alicante, Alicante, 2007.

Anexos

Apéndice A

Esquemático de tarjeta de control prototipo

La tarjeta de control prototipo de la Figura 7.15 desarrollada para el robot ROTRADI I consiste de una tarjeta Arduino MKR Vidor 4000 usada para la lectura de los encoders, la ejecución de los algoritmos de control y la comunicación con una computadora. Adicionalmente se tiene una fuente de alimentación de $\pm 12v$.

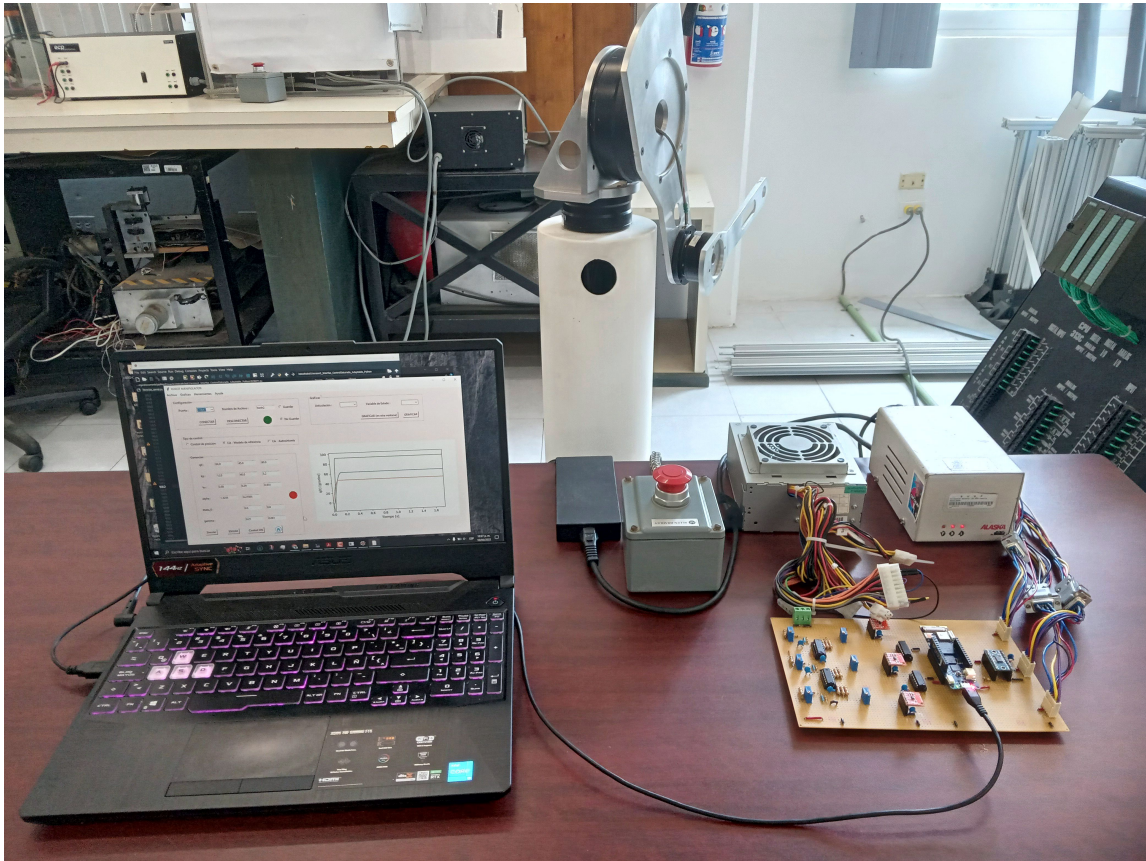


Figura 7.15: Prototipo de tarjeta de control.

El esquemático de la tarjeta de control prototipo de la Figura 7.15 se presenta a continuación.

Apéndice B

Participación en eventos científicos y artículos realizados

En este apéndice se presentan los diferentes resultados alcanzados durante la realización del trabajo de tesis, en materia de participación en eventos científicos y artículos realizados. Estos artículos fueron presentados al *Congreso internacional de ingeniería electrónica ELECTRO 2021*. El primero se titula *Control saturado para robots manipuladores con estabilidad asintótica global* y el segundo *Control tipo hiperbólico con estabilidad asintótica para robots manipuladores*, siendo publicados ambos en las memorias de dicho congreso.



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO®

**EL TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
A TRAVÉS DEL INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHIHUAHUA**

OTORGA LA PRESENTE

CONSTANCIA

A

Juan Carlos Sernaque Julca

POR IMPARTIR LA CONFERENCIA

**CONTROL SATURADO PARA ROBOTS MANIPULADORES CON ESTABILIDAD
ASINTÓTICA GLOBAL**

EN EL **CONGRESO INTERNACIONAL DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA ELECTRO 2021**,
REALIZADO DEL 13 AL 15 DE OCTUBRE DEL PRESENTE AÑO.



CHIHUAHUA, CHIH., A OCTUBRE DE 2021.

ROGELIO ENRIQUE BARAY ARANA
COORDINADOR GENERAL



CONTROL TIPO HIPERBÓLICO CON ESTABILIDAD ASINTÓTICA PARA ROBOTS MANIPULADORES

Emanuel Ortiz-Ortiz^a, Juan Carlos Sernaque-Julca^a, Fernando Reyes-Cortés^a,

Pablo Sánchez-Sánchez^a, Jorge Fierro-Roja^a, Basil M. Al-Hadithi^b.

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla^a, Universidad Politécnica de Madrid^b.

Maestría en Ciencias de la Electrónica, Opción en Automatización Facultad de Ciencias de la Electrónica^a,

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, Automática y Física Aplicada,

Escuela Superior de Ingeniería y Diseño Industrial^b,

Prolongación 24 Sur, Ciudad Universitaria, C.P. 72570, Puebla, Pue, México.

Tel. (222)2295500 ext 7410.

e-mail: juan.sernaque@alumno.buap.mx

RESUMEN.

En el siguiente trabajo se presenta un esquema control tipo hiperbólico con el análisis de estabilidad asintótica para robots manipuladores. El esquema de control propuesto está compuesto por funciones hiperbólicas, como el $\sinh$, $\cosh$ y $\tanh$. Para el análisis de estabilidad, primero se estableció la ecuación de lazo cerrado que se encuentra combinando el modelo dinámico del robot manipulador y la estructura matemática del esquema de control por moldeo de energía. Luego se demuestra la existencia y unicidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado. Finalmente se demuestra la estabilidad asintótica a través de la propuesta de una función estricta de Lyapunov.

Palabras Clave: Robot Manipulador, Estabilidad de Lyapunov, Esquema de Control.

ABSTRACT.

In the present work, a hyperbolic type control scheme is presented with the asymptotic stability analysis for robot manipulator. The proposed control scheme is composed of hyperbolic functions, such as $\sinh$, $\cosh$ and $\tanh$. For the stability analysis, the closed-loop equation was first established, which is found by combining the dynamic model of the robot manipulator and the mathematical structure of the energy molding control scheme. Then the existence and uniqueness of the equilibrium point of the closed-loop equation is demonstrated. Finally, the asymptotic stability is demonstrated through the proposal of a strict Lyapunov function. Keywords: Robot Manipulator, Lyapunov Stability, Control Scheme.

1. INTRODUCCIÓN

Para que el robot manipulador de n grados de libertad realice una tarea específica, es necesario resolver el problema de la regulación en el espacio articular. Este problema de regulación o control de posición de robots manipuladores consiste en colocar el extremo final del robot en una posición deseada q_d (constante en el tiempo) para cualquier condición inicial $[q(0) \ \dot{q}(0)]^T \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$. Matemáticamente el problema se describe como diseñar un controlador τ tal que la velocidad de movimiento $\dot{q}(t)$ y el error de posición $\tilde{q}(t)$ convergen

asintóticamente a cero (al punto de equilibrio) $\forall t \geq 0$, sin importar las condiciones iniciales $\tilde{q}(0)$ y $\dot{q}(0)$, [1].

No obstante, los servomotores del robot manipulador no tienen una fuente ilimitada de torque generando una mecánica no modelada en el manipulador del robot. Esta problemática es tratada proponiendo controladores saturados [2].

Los esquemas de control se han modificado de forma que evitan esta problemática desde diferentes perspectivas. Una forma de tratar esta problemática ha sido usar funciones hiperbólicas, como en [3] donde se presenta una familia de controladores tipo hiperbólico y en [4] se utiliza un regulador tipo arcoseno hiperbólico. En ambas investigaciones se analiza la estabilidad asintótica global.

En [5], se propone un esquema de control difuso con pares acotados y se demuestra estabilidad asintótica global a través de la teoría de Lyapunov con una evaluación experimental. Otros trabajos que también proponen esquemas de control, han realizado un análisis de estabilidad de Lyapunov [6], [7], pero en otras ocasiones este análisis no es considerado [8], [9], [10].

La demostración asintótica global del punto de equilibrio de lazo cerrado, que se forma por la dinámica del robot y el esquema de control tipo hiperbólico propuesto, a través de una función estricta de Lyapunov, es una contribución importante de este trabajo. Se propone una función estricta de Lyapunov que satisface ser una función definida positiva y su derivada, una función definida negativa.

2. MODELO DINÁMICO DEL ROBOT

El modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad, formado con eslabones rígidos conectados por articulaciones libres de elasticidad en cadena cinemática abierta, consideración la fricción viscosa, se puede escribir como [1], [11].

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + B\dot{q} \quad (1)$$

donde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de coordenadas generalizadas o posiciones articulares, $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de velocidades articulares, $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de aceleraciones articulares; $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, la cual es simétrica y definida positiva, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de fuerzas o pares gravitacionales obtenido como el gradiente de la energía potencial, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz diagonal definida positiva para el par de fricción viscoso y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de pares aplicados.

El modelo dinámico del robot manipulador presenta las siguientes propiedades:

Propiedad 1: Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante positiva $\beta_M > 0$ tal que, $\|\mathbf{M}(\mathbf{q})\| \leq \lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} \leq \beta_M, \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$; donde $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{max}$ representa el valor propio máximo de la matriz de inercial $\mathbf{M}(\mathbf{q})$.

Propiedad 2: Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_{c_1} > 0$, tal que: $\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| = k_{c_1}\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Propiedad 3: La fricción viscosa satisface lo siguiente: $\lambda_B^{min}\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq \|\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}\| \leq \lambda_B^{max}\|\dot{\mathbf{q}}\|$; donde λ_B^{max} y λ_B^{min} son el valor propio máximo y mínimo de la matriz de coeficientes de fricción viscosa $\mathbf{B}$, respectivamente.

Propiedad 4: La derivada temporal de la matriz de inercia y la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis satisfacen: $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

Propiedad 5: La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la derivada con respecto al tiempo de la matriz de inercia $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$ satisfacen: $\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T[\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]\dot{\mathbf{q}} \equiv 0, \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Es decir, la matriz resultante $[\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]$ es una matriz antisimétrica.

3. ESQUEMA DE CONTROL TIPO HIPERBÓLICO.

Se presenta el siguiente esquema de control tipo hiperbólico, que depende del error de posición y de la velocidad de movimiento del robot manipulador. Se agrego una compensación por gravedad, lo cual representa una gran ventaja para el análisis de estabilidad de Lyapunov y el rendimiento en los robots manipuladores:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \frac{2 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^{2m-1} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{(1 + \tanh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^2)(1 + \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^{2m})} - K_v \frac{2 \sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}})^{2m-1} \cosh(\alpha \dot{\mathbf{q}})}{(1 + \tanh(\alpha \dot{\mathbf{q}})^2)(1 + \sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}})^{2m})} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (2)$$

donde $m \in \mathbb{N}$, es un número entero positivo, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, son números positivos, $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, es el vector de posición de error, $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, es el vector de velocidad y $K_v, K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$, son matrices diagonales definidas positivas.

Los términos del esquema de control serán representados de la siguiente forma:

$$\delta = \frac{2 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^{2m-1} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{(1 + \tanh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^2)(1 + \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^{2m})} \quad (3)$$

$$\omega = \frac{2 \sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}})^{2m-1} \cosh(\alpha \dot{\mathbf{q}})}{(1 + \tanh(\alpha \dot{\mathbf{q}})^2)(1 + \sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}})^{2m})} \quad (4)$$

donde:

$$\delta = \begin{bmatrix} \frac{2 \sinh(\alpha \tilde{q}_1)^{2m-1} \cosh(\alpha \tilde{q}_1)}{(1 + \tanh(\alpha \tilde{q}_1)^2)(1 + \sinh(\alpha \tilde{q}_1)^{2m})} \\ \vdots \\ \frac{2 \sinh(\alpha \tilde{q}_n)^{2m-1} \cosh(\alpha \tilde{q}_n)}{(1 + \tanh(\alpha \tilde{q}_n)^2)(1 + \sinh(\alpha \tilde{q}_n)^{2m})} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\omega = \begin{bmatrix} \frac{2 \sinh(\alpha \dot{q}_1)^{2m-1} \cosh(\alpha \dot{q}_1)}{(1 + \tanh(\alpha \dot{q}_1)^2)(1 + \sinh(\alpha \dot{q}_1)^{2m})} \\ \vdots \\ \frac{2 \sinh(\alpha \dot{q}_n)^{2m-1} \cosh(\alpha \dot{q}_n)}{(1 + \tanh(\alpha \dot{q}_n)^2)(1 + \sinh(\alpha \dot{q}_n)^{2m})} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Las ecuaciones (3) y (4), satisfacen la siguiente relación:

$$\delta \leq \begin{cases} \sqrt{n}\gamma_1, & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \sqrt{n}\gamma_1\|x\|, & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (7)$$

$$\omega \leq \begin{cases} \sqrt{n}\gamma_2, & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \sqrt{n}\gamma_2\|x\|, & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (8)$$

donde el número γ_1 y γ_2 , representan el límite superior (este es el valor máximo que depende del valor de m).

En la figura 1, se muestra la respuesta que tiene el control a diferentes valores de α . Asimismo, se le asigna el valor de 1 a la variable m . Este será el valor de m que se utilizará al momento de obtener los resultados.

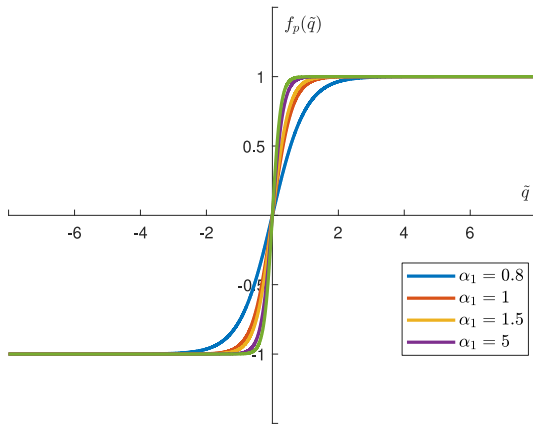


Figura 1: Respuesta del esquema de control a diferentes valores de α .

4. ECUACIÓN DE LAZO CERRADO ENTRE EL MODELO DINÁMICO Y EL ESQUEMA DE CONTROL

Se establece la ecuación de lazo cerrado entre el modelo dinámico y el esquema de control, igualando las ecuaciones (1) y (2). Se expresa el resultado como variables de estado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ M(q)^{-1} [K_p \delta - K_v \omega - C(q, \dot{q}) \dot{q} - B \dot{q}] \end{bmatrix} \quad (9)$$

Se tiene la siguiente consideración para las variables de estado $\tilde{q} = q_d - q$. Para demostrar la existencia y unicidad del punto de equilibrio $[\tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T = [0 \ 0]^T$ de la ecuación en lazo cerrado (9), se toman las siguientes consideraciones:

- La primera componente de la ecuación en lazo cerrado, $-\dot{q} = -I\dot{q} \Leftrightarrow \dot{q} = 0$, ya que la matriz identidad $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva. Si $\dot{q} = 0 \Rightarrow q(t) = \text{constante}$.
- La segunda componente, es la matriz de inercia $M(q)$, la cual es definida positiva y su matriz inversa existe $M(q)^{-1}$ y también es definida positiva.
- La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(q, \dot{q})\dot{q} = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si $\dot{q} = 0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.
- En el caso de la fricción viscosa, se cumple que $B\dot{q} = 0$, si $\dot{q} = 0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.
- Por diseño, la ganancia proporcional K_p y derivativa K_v son matrices definidas positivas.
- La función propuesta (δ y ω) de hipérbolas, se hace cero cuando $\dot{q} = 0$ o $\tilde{q} = 0$.

Por lo tanto, $[\tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T = [0 \ 0]^T$ el punto de equilibrio existe y es único.

5. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD ASINTÓTICA DEL PUNTO DE EQUILIBRIO

5.1. Función estricta de Lyapunov

Ahora se procede a proponer una función estricta de Lyapunov, de la siguiente forma [4]:

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} + \mathcal{U}(K_p, \tilde{q}) - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T M(q) \dot{\tilde{q}}}{1 + \|\tilde{q}\|} \quad (10)$$

A partir de la ecuación (10) se propone la siguiente función estricta de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = & \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(q) \dot{\tilde{q}} \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\cosh(\alpha \tilde{q})^3 \ln(\sinh(\alpha \tilde{q})^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha \tilde{q}) \sinh(\alpha \tilde{q}) \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}))} \right]^T K_I \\ & \times \left[\frac{\cosh(\alpha \tilde{q})^3 \ln(\sinh(\alpha \tilde{q})^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha \tilde{q}) \sinh(\alpha \tilde{q}) \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}))} \right] \\ & - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T M(q) \dot{\tilde{q}}}{1 + \|\tilde{q}\|} \end{aligned} \quad (11)$$

donde ϵ_0 es cualquier número positivo. Es importante tener en cuenta que ϵ_0 solo se requiere para fines de análisis y, por lo tanto, no es necesario conocer su valor numérico. Solo se necesita para demostrar que existe [4].

Por otro lado, la función de Lyapunov estricta es una función definida positiva y su derivada temporal produce una función definida negativa. Por lo tanto, a través del método directo de Lyapunov se puede concluir la estabilidad asintótica global. La ecuación (11) puede ser reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = & \left[\dot{\tilde{q}} - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T}{1 + \|\tilde{q}\|} \right]^T M(q) \left[\dot{\tilde{q}} - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T}{1 + \|\tilde{q}\|} \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\cosh(\alpha \tilde{q})^3 \ln(\sinh(\alpha \tilde{q})^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha \tilde{q}) \sinh(\alpha \tilde{q}) \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}))} \right]^T K_I \\ & \times \left[\frac{\cosh(\alpha \tilde{q})^3 \ln(\sinh(\alpha \tilde{q})^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha \tilde{q}) \sinh(\alpha \tilde{q}) \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}))} \right] \\ & - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0^2 \tilde{q}^T M(q) \dot{\tilde{q}}}{[1 + \|\tilde{q}\|]^2} \end{aligned} \quad (12)$$

Por simplicidad el término que contiene las funciones hiperbólicas de la ecuación (12), se va expresar de la siguiente forma:

$$\varphi = \left[\frac{\cosh(\alpha \tilde{q})^3 \ln(\sinh(\alpha \tilde{q})^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha \tilde{q}) \sinh(\alpha \tilde{q}) \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}))} \right] \quad (13)$$

donde:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\cosh(\alpha \tilde{q}_1)^3 \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}_1)^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha \tilde{q}_1) \sinh(\alpha \tilde{q}_1) \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}_1))}} \\ \vdots \\ \sqrt{\frac{\cosh(\alpha \tilde{q}_n)^3 \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}_n)^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha \tilde{q}_n) \sinh(\alpha \tilde{q}_n) \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}_n))}} \end{bmatrix} \quad (14)$$

La ecuación (3) satisface la siguiente relación:

$$\delta \leq \begin{cases} \sqrt{n}\rho, & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \sqrt{n}\rho\|x\|, & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (15)$$

Para el análisis de estabilidad por Lyapunov, primero se demuestra que la función estricta de Lyapunov es definida positiva. El primer término de la ecuación (12), tiene una forma cuadrática y se sabe que $M(q)$ es definida positiva, por lo tanto, este término es definido positivo. De manera similar para el segundo término, también es definido positivo debido a que K_p es una matriz diagonal definida positiva. ϵ_0 es una constante positiva tal que satisface (16); por lo tanto, la función candidata de Lyapunov (12) es una función definida positiva.

$$0 < \epsilon_0 < \sqrt{\frac{\lambda_{K_p}^{min} \rho}{\beta}} \quad (16)$$

5.2. La derivada temporal de la función estricta de Lyapunov

Ahora, se realiza la derivada temporal de la función estricta de Lyapunov propuesta, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = & \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - \delta K_p q \\ & - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T M(q) \dot{q}}{1 + \|\tilde{q}\|} - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T \dot{M}(q) \dot{q}}{1 + \|\tilde{q}\|} + \frac{\epsilon_0 \dot{q}^T M(q) \dot{q}}{1 + \|\tilde{q}\|} \\ & - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T \dot{q} \tilde{q}^T M(q) \dot{q}}{\|\tilde{q}\| [1 + \|\tilde{q}\|]^2} \end{aligned} \quad (17)$$

En la ecuación (17), reemplazamos el valor de $\dot{q}$ y usamos las propiedades (4) y (5), obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = & -\dot{q}^T K_v \omega - \dot{q}^T B \dot{q} - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T}{1 + \|\tilde{q}\|} K_p \delta \\ & + \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T}{1 + \|\tilde{q}\|} K_v \omega + \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T}{1 + \|\tilde{q}\|} B \dot{q} \\ & - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q}}{1 + \|\tilde{q}\|} + \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T M(q) \dot{q}}{1 + \|\tilde{q}\|} \\ & - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T \dot{q} \tilde{q}^T M(q) \dot{q}}{\|\tilde{q}\| [1 + \|\tilde{q}\|]^2} \end{aligned} \quad (18)$$

Ahora, procedemos a obtener las cotas superiores de todos los términos de la función de Lyapunov haciendo uso de las propiedades (1), (2), (3) y de la relación de las funciones hiperbólicas (7) y (8):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) \leq & -\lambda_{K_p}^{min} \rho_1 \|\dot{q}\|^2 - \lambda_B^{min} \|\dot{q}\|^2 - \frac{\epsilon_0 \|\tilde{q}\|^2}{1 + \|\tilde{q}\|} \lambda_{K_p}^{min} \\ & + \frac{\epsilon_0 \|\tilde{q}\| \rho_2 \|\dot{q}\|}{1 + \|\tilde{q}\|} + \frac{\epsilon_0 \|\tilde{q}\| \lambda_B^{max} \|\dot{q}\|}{1 + \|\tilde{q}\|} \\ & - \epsilon_0 K_c \|\dot{q}\|^2 + \frac{\epsilon_0 \beta}{1 + \|\tilde{q}\|} \|\dot{q}\|^2 \\ & - \beta \epsilon_0 \|\dot{q}\|^2 \end{aligned} \quad (19)$$

Después de realizar agrupaciones algebraicas y reducción de términos, la ecuación (19) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) \leq & -\left[\lambda_{K_p}^{min} \rho_1 + \lambda_B^{min} - \frac{\epsilon_0 \beta}{1 + \|\tilde{q}\|} + \beta \epsilon_0 \right] \|\dot{q}\|^2 \\ & + \left[\frac{\epsilon_0 \rho_2}{1 + \|\tilde{q}\|} + \frac{\epsilon_0 \lambda_B^{max}}{1 + \|\tilde{q}\|} \right] \|\tilde{q}\| \|\dot{q}\| \\ & - \frac{\epsilon_0 \|\tilde{q}\|^2}{1 + \|\tilde{q}\|} \lambda_{K_p}^{min} \end{aligned} \quad (20)$$

Le damos forma de una estructura cuadrática a la ecuación (20):

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) \leq - \begin{bmatrix} \|\tilde{q}\| \\ \|\dot{q}\| \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \|\tilde{q}\| \\ \|\dot{q}\| \end{bmatrix} \quad (21)$$

donde:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Los elementos de la matriz Q esta definidos por:

$$q_{11} = \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \lambda_{K_p}^{min} \quad (23)$$

$$q_{22} = \lambda_{K_p}^{min} \rho_1 + \lambda_B^{min} - \frac{\epsilon_0 \beta}{1 + \|\tilde{q}\|} + \beta \epsilon_0 \quad (24)$$

$$q_{12} = q_{21} = \frac{\epsilon_0 \rho_2}{1 + \|\tilde{q}\|} + \frac{\epsilon_0 \lambda_B^{max}}{1 + \|\tilde{q}\|} \quad (25)$$

Como la ecuación (21), es definida negativa por lo tanto se demuestra estabilidad asintótica. Con esto se logra que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{q}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 1} \forall t \geq 0$$

6. RESULTADOS

En esta sección se describe los resultados obtenidos de la simulación del esquema de control tipo hiperbólico, implementado en un robot manipulador antropomórfico de 2 grados de libertad de transmisión directa, que se muestra en la figura 1. Esto se hace para avalar la eficacia, rendimiento y resultados teóricos del esquema de control propuesto. La simulación se llevó a cabo en el software MATLAB. Este enfoque permite evaluar los fenómenos físicos del robot manipulador, sin la necesidad de tenerlo físicamente.



Figura 2: Robot Manipulador.

La actividad que se llevó a cabo en la simulación, consiste en posicionar a las articulaciones del hombro y el codo del robot manipulador que se encuentran en posición de casa $[0 \ 0]^T$ grados, hacia una posición deseada $[45 \ 90]^T$ grados.

Los parámetros numéricos del robot de dos grados de libertad han sido obtenidos a través de identificación paramétrica, los cuales son presentados en [1].

Articulación	Modelo	Par máx	Resolución
Hombro	DM-1150	150 [Nm]	1024.0
Codo	DM-1050	15 [Nm]	1024.0

Tabla 1 Características de los servomotores

En la tabla 1, se muestran las características de los servomotores. Con estos datos se propone la siguiente regla de sintonía para K_p en ambas articulaciones:

$$K_{p1} = 150 \times 0.95 \quad (26)$$

$$K_{p2} = 15 \times 0.805 \quad (27)$$

La variable K_{p1} corresponde al primer eslabón y K_{p2} corresponde al segundo eslabón. Para las ganancias derivativas se tiene la siguiente regla de sintonía:

$$K_{v1} = 0.95 \times K_{p1} \quad (28)$$

$$K_{v2} = 1.055 \times K_{p2} \quad (29)$$

Las variables α y β , son las que permiten que la respuesta de la función hiperbólica se establezca más rápido, fueron sintonizadas con los siguientes valores:

$$\alpha = 0.645 \quad (30)$$

$$\beta = 1.1085 \quad (31)$$

En la figura 3, se muestra el error de posición del robot manipulador de 2 grados de libertad para ambas articulaciones, respectivamente. Por medio del control tipo hiperbólico, se puede observar que los errores de posición llegan asintóticamente a cero. También se tiene en cuenta que cada posición converge asintóticamente a cero sin generar sobre impulsos en régimen transitorio y de forma suave y rápida llega al estado estacionario, en un tiempo menor a 1 segundo. En otras palabras, el esquema de control tipo hiperbólico cumple con el objetivo de llevar al robot manipulador a la posición deseada.

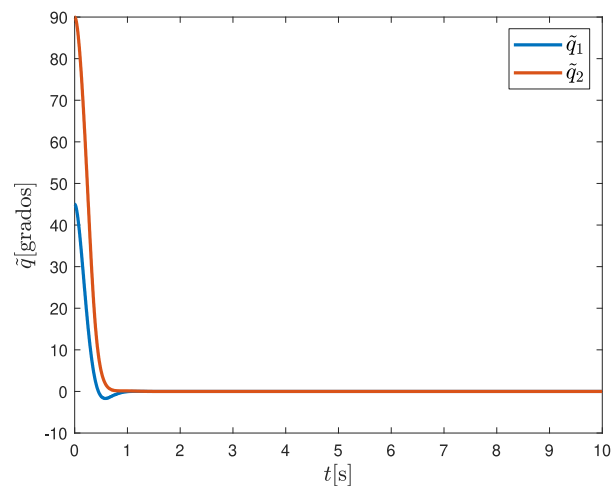


Figura 3:Error de posición.

De igual forma, en la figura 4 se muestra las velocidades de las articulaciones del robot manipulador. Se puede observar que de igual forma, el error de posición y las velocidades de movimiento llegan asintóticamente a cero.

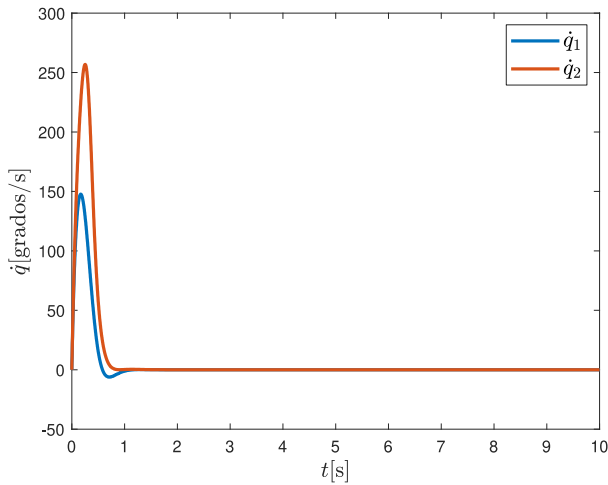


Figura 4: Velocidad del robot.

Por lo tanto, de forma cualitativa a través de la simulación se ha podido mostrar que el robot manipulador llega al punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado de forma asintótica. Con las figuras 3 y 4, se demuestra que el esquema de control propuesto tiene un buen desempeño.

En la figura 5, se puede observar que la energía que se le suministra al robot manipulador, no sobrepasa los límites físicos permitidos, los cuales se muestran en la tabla 1. Esto se debe a la correcta sintonización de las ganancias constantes y a la regla de sintonía implementada.

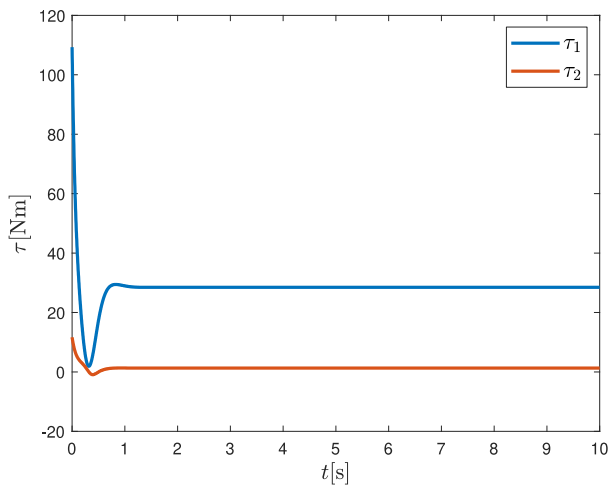


Figura 5: Pares aplicados.

7. CONCLUSIÓN

En este trabajo se ha presentado un nuevo esquema de control tipo hiperbólico para resolver el problema de control de posición de los robots manipuladores en el espacio articular. Según el método directo de Lyapunov, este esquema está respaldado por un riguroso análisis de estabilidad asintótica global en el sentido de Lyapunov. Para esto se propuso una función estricta de Lyapunov, la cual cumple con ser una función definida positiva y su derivada temporal produce una función definida negativa, lo cual permite establecer condiciones que garantizan la estabilidad asintótica y global. El rendimiento del esquema de control propuesto, tiene una buena respuesta transitoria y pequeños errores de posición de estado estable. Asimismo, la simulación nos permite tener un respaldar del análisis teórico presentado.

REFERENCIAS

- [1] F. Reyes Cortés, Control de Robots Manipuladores. México DF, México: Grupo Editorial Alfaomega, 2011.
- [2] B. Sanchez García, F. Reyes Cortés, B. Al-Hadithi, and O. Felix, "Global saturated regulator with variable gains for robot manipulators," *Journal of Robotics and Control (JRC)*, vol. 2, no. 6, pp. 571–581, 2021.
- [3] F. Reyes-Cortés, O. Felix, J. Cid, and G. Alonso-Aruffo, "A family of hyperbolic-type control schemes for robot manipulators," *Kybernetika*, vol. 55, no. 3, pp. 561–585, 2019.
- [4] F. Reyes-Cortés and B. M. Al-Hadithi, "An asinh-type regulator for robot manipulators with global asymptotic stability," *Automatika*, vol. 61, no. 4, pp. 574–586, 2020.
- [5] V. Santibáñez, R. Kelly, and M. Llama, "A novel global asymptotic stable set-point fuzzy controller with bounded torques for robot manipulators," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 13, no. 3, pp. 362–372, 2005.
- [6] Y. Tianchi, L. Zhongbao, and W. Guiping, "Adaptive sliding mode control of robot based on fuzzy neural network," *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, vol. 12, pp. 1–13, 2020.
- [7] M. Jafari, G. Márquez, J. Selberg, M. Jia, H. Dechiraju, P. Pansodtee, M. Teodorescu, M. Rolandi, and M. Gomez, "Feedback control of bioelectronic devices using machine learning," *IEEE Control Systems Letters*, vol. 5, no. 4, pp. 1133–1138, October 2021.
- [8] Y. Cao and Y. D. Song, "Adaptive pid-like fault-tolerant control for robot manipulators with given performance specifications," *International Journal of Control*, vol. 93, no. 3, pp. 377–386, 2020.
- [9] Q. Zhang, G. Yin, and L. Y. Wang, "A deep filtering approach for control of partially observed systems," *IEEE Control Systems Letters*, vol. 5, no. 4, pp. 1189–1194, October 2021.
- [10] H. Tsukamoto, S.-J. Chung, and J.-J. E. Slotine, "Neural stochastic contraction metrics for learning-based control and estimation," *IEEE Control Systems Letters*, vol. 5, no. 5, pp. 1825–1830, November 2021.
- [11] R. Kelly, V. Davila, and A. Loria, *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. London, United Kingdom: Springer-Verlag, 2005.

CONTROL SATURADO PARA ROBOTS MANIPULADORES CON ESTABILIDAD ASINTÓTICA GLOBAL

Juan Carlos Sernaque-Julca^a, Emanuel Ortiz-Ortiz^a, Fernando Reyes-Cortés^a,

Pablo Sánchez-Sánchez^a, Basil M. Al-Hadithi^b.

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla^a, Universidad Politécnica de Madrid^b.

Maestría en Ciencias de la Electrónica, Opción en Automatización Facultad de Ciencias de la Electrónica^a,
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, Automática y Física Aplicada,

Escuela Superior de Ingeniería y Diseño Industrial^b,

Prolongación 24 Sur, Ciudad Universitaria, C.P. 72570, Puebla, Pue, México.

Tel. (222)2295500 ext 7410.

e-mail: juan.sernaque@alumno.buap.mx

RESUMEN.

En el presente trabajo se propone y evalúa el desempeño de un nuevo algoritmo de control de posición pura para robots manipuladores. Se sigue la técnica de moldeo de energía para el diseño de la propuesta realizada. Se presenta el análisis de existencia y unicidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado conformada por el modelo dinámico del robot y el algoritmo de control. También se demuestra estabilidad asintótica y global por medio de una función estricta de Lyapunov. Finalmente se evalúa el desempeño de la nueva propuesta en un caso particular y se incluyen los resultados de simulación.

Palabras Clave: robots manipuladores, control de posición, estabilidad de Lyapunov.

ABSTRACT.

In this paper, the performance of a new position control algorithm for robot manipulators is proposed and evaluated. The energy molding technique is followed for the design of the submitted proposal. The existence and uniqueness's analysis of the equilibrium point of the closed-loop equation formed by the dynamic model of the robot and the control algorithm is performed. Asymptotic and global stability is also demonstrated by means of a strict Lyapunov function. Finally, the performance of the new proposal in a particular case is evaluated and the simulation results are included.

Keywords: manipulator robots, position control, Lyapunov stability.

1. INTRODUCCIÓN

Los robots manipuladores se han vuelto indispensables hoy en día, su uso va desde las aplicaciones tradicionales de tomar y trasladar objetos hasta aplicaciones espaciales o en medicina. Estas aplicaciones requieren de un alto rendimiento en el control del robot manipulador, ya que esto garantiza que la precisión y la productividad aumenten, siendo este uno de los objetivos de todo fabricante [1].

El diseño de algoritmos de control con alto rendimiento para robots manipuladores es un área de investigación que está en constante crecimiento y sigue siendo un problema abierto [2].

Diversos autores utilizan la técnica de moldeo de energía para este propósito [3, 4]. El algoritmo de control proporcional-derivado (PD) es uno de los reguladores más simples y además garantiza globalmente el objetivo de regulación [5].

Recientemente, se han propuesto una serie de reguladores con distintos enfoques. Por ejemplo, en [6] se propone un método adaptable PID con lógica difusa. En [7] se presenta el diseño y análisis de estabilidad de un control adaptativo para un robot manipulador de 4 grados de libertad (GDL). En [8] es presentado un compensador robusto de zona muerta con red neuronal adaptable de seguimiento para robots manipuladores industriales y en [2] se propone una familia de esquemas de control tipo hiperbólico con estabilidad asintótica global.

Un número amplio de publicaciones utiliza redes neuronales, lógica difusa, control adaptable, entre otros enfoques. Sin embargo, el análisis de estabilidad a veces queda relajado. El objetivo de este trabajo es probar formalmente la estabilidad asintótica y global de la ecuación en lazo cerrado, lo cual se logra mediante la técnica de moldeo de energía y una función estricta de Lyapunov.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera. En la sección 2 se estudia la dinámica del robot manipulador y sus propiedades. En la sección 3 se presenta un nuevo algoritmo de control saturado y su respectivo análisis de estabilidad asintótica y global, el cual constituye nuestro principal aporte. En la sección 4 se incluyen los resultados de simulación.

2. MODELO DINÁMICO DEL ROBOT

El modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad, formado con eslabones rígidos conectados por articulaciones libres de elasticidad en cadena cinemática abierta se define como [9, 10]:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + f_f(\dot{q}) + g(q) \quad (1)$$

donde $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de posición, velocidad y aceleración en coordenadas articulares, respectivamente

$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, la cual es cuadrada, simétrica y definida positiva; $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de Coriolis y fuerzas centrípetas; $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el par gravitacional; $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de pares de fricción presente en cada articulación del robot.

Para fines de análisis y simulación sólo son considerados los efectos de la fricción viscosa; por lo tanto, $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}$; donde $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonal de coeficientes de fricción viscosa.

El modelo dinámico del robot manipulador cumple con las siguientes propiedades:

Propiedad 1: La matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ está relacionada con la matriz de inercia $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ por la expresión:

$$\mathbf{x}^T \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (2)$$

donde $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es una matriz antisimétrica.

Propiedad 2: La derivada de la matriz de inercia $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})$ es una matriz simétrica y satisface:

$$\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3)$$

Propiedad 3: Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_{c_1} > 0$, tal que:

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq k_{c_1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad (4)$$

para todo $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Propiedad 4: Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $\beta > 0$, tal que:

$$\lambda_{\max}\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} \geq \beta \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (5)$$

Propiedad 5: Si $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, entonces la matriz de fuerzas centrípetas y de coriolis $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ satisface que $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

3. ALGORITMO DE CONTROL DE POSICIÓN.

El problema de control de posición también se conoce como regulación: consiste en mover el extremo final del robot manipulador independientemente de su posición inicial $\mathbf{q}(0) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ hacia una posición deseada constante $\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ [10]. En este trabajo se propone el siguiente esquema de control:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_p \mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}}) - \mathbf{K}_v \mathbf{f}_v(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (6)$$

donde, $\mathbf{K}_p$ y $\mathbf{K}_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales definidas positivas de las ganancias proporcional y derivativa

respectivamente; los vectores asociados a la acción de control proporcional $\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})$ y derivativa $\mathbf{f}_v(\dot{\mathbf{q}})$ están conformados por componentes hiperbólicos y se definen como:

$$\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}}) = \left[\frac{\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}}) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}})}{\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}}) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}}) + 1} \right] \times [\coth(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}}) + \tanh(\alpha_1 \tilde{\mathbf{q}})] \quad (7)$$

$$\mathbf{f}_v(\dot{\mathbf{q}}) = \left[\frac{\cosh^{2m}(\alpha_2 \dot{\mathbf{q}}) \sinh^{2m}(\alpha_2 \dot{\mathbf{q}})}{\cosh^{2m}(\alpha_2 \dot{\mathbf{q}}) \sinh^{2m}(\alpha_2 \dot{\mathbf{q}}) + 1} \right] \times [\coth(\alpha_2 \dot{\mathbf{q}}) + \tanh(\alpha_2 \dot{\mathbf{q}})] \quad (8)$$

donde $m \in \mathbb{N}$ es un número entero positivo, α_1 y $\alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ son parámetros del algoritmo de control. Es importante observar que se cumple la siguiente propiedad:

Propiedad 6: Para los vectores $\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})$ y $\mathbf{f}_v(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ existen las constantes $\gamma_p > 0$ y $\gamma_v > 0$; tal que, se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\|\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})\| < \begin{cases} \gamma_p \sqrt{n} \\ \gamma_p \sqrt{n} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \end{cases} \quad (9)$$

$$\|\mathbf{f}_v(\dot{\mathbf{q}})\| < \begin{cases} \gamma_v \sqrt{n} \\ \gamma_v \sqrt{n} \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{cases} \quad (10)$$

Luego (6), (7) y (8) en conjunto conforman una familia de controladores saturados cuya respuesta se muestra en las Figuras 1 y 2.

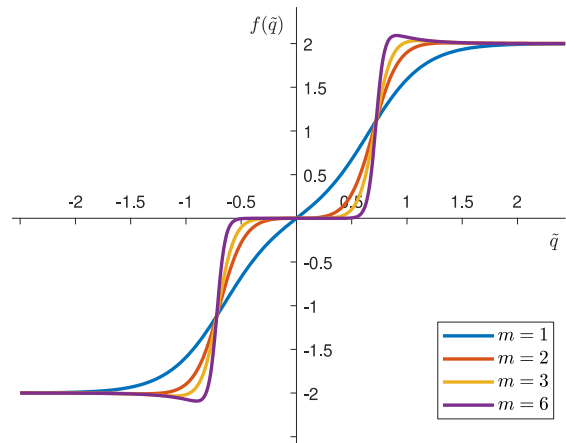


Figura 1. Familia de funciones hiperbólicas saturadas $\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})$ para $\alpha_1 = 1$

En la Figura 1 se observa la respuesta de la acción de control $\mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}})$ en función de distintos valores de m . Tenga en cuenta que para valores de $m > 1$ existe una zona al rededor del

origen donde la respuesta de la acción de control es casi nula. Recomendamos usar valores de $m = 1$ para fines de control.

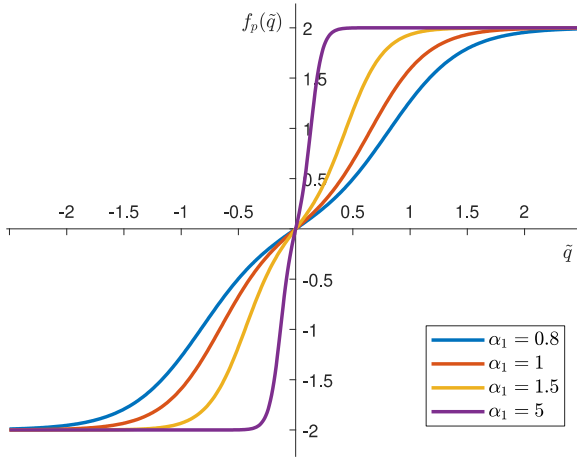


Figura 2 Familia de funciones hiperbólicas saturadas $f_p(\tilde{q})$ para $m = 1$

En la Figura 2 se observa la respuesta de la acción de control $f_p(\tilde{q})$ en función de distintos valores de α_1 . Tenga en cuenta que aumenta la sensibilidad de la acción de control conforme el valor numérico de α_1 aumenta. La selección adecuada del parámetro α_1 dependerá de cada aplicación.

Tenga en cuenta que la función $f_p(\tilde{q})$ va de $[-2, 2]$ en el eje y del plano cartesiano por lo que se debe dividir la ganancia $V(\tilde{q}, \dot{q})$ entre 2 para evitar saturar los servomotores.

3.1. Ecuación en lazo cerrado

A partir del modelo dinámico (1) y el control saturado (6) se obtiene la ecuación en lazo cerrado (11):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) [\mathbf{K}_p f_p(\tilde{q}) - \mathbf{K}_v f_v(\dot{q}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{q})\dot{q} - \mathbf{B}\dot{q}] \end{bmatrix} \quad (11)$$

Tenga en cuenta que: $-\dot{q} = -I\dot{q} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{q} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{q}$ es constante. Además $\mathbf{M}(\mathbf{q}) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) > 0$; también, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{q}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{q})|_{\dot{q}=0} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{B}\dot{q} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{q} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B} > 0$. La acción de control derivativa $\mathbf{K}_v f_v(\dot{q}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{q} = \mathbf{0}$ y la acción de control proporcional $\mathbf{K}_p f_p(\tilde{q}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \tilde{q} = \mathbf{0}$. Entonces (11) es cero solo en $\tilde{q} = \mathbf{0}$ y $\dot{q} = \mathbf{0}$; por lo tanto, queda demostrado que el punto de equilibrio existe y es único.

3.2. Función estricta de Lyapunov

La propuesta de función la candidata de Lyapunov se realiza siguiendo la filosofía de diseño de [11] y viene dada por la siguiente expresión:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{q} + \frac{1}{2m\alpha_1} [\zeta(\alpha_1, \tilde{q})]^T \mathbf{K}_p [\zeta(\alpha_1, \tilde{q})] - \frac{1}{m\alpha_1} \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} [\zeta(\alpha_1, \tilde{q})]^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{q} \quad (12)$$

Por definición

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha_1, \tilde{q}) &= \begin{bmatrix} \sqrt{\ln(\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_1) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_1) + 1)} \\ \vdots \\ \sqrt{\ln(\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_n) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_n) + 1)} \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{\ln(\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}) + 1)} \end{aligned} \quad (13)$$

Observe que $\zeta(\alpha_1, \tilde{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ cumple con la siguiente propiedad:

Propiedad 7: Dada la norma euclidiana $\|\zeta(\alpha_1, \tilde{q})\|$, existe un $\gamma_m > 0$ tal que:

$$\|\zeta(\alpha_1, \tilde{q})\| \geq \gamma_m \|\tilde{q}\|^2 \quad (14)$$

La función candidata se puede reescribir como:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} \left[\dot{q} - \frac{\epsilon_0 [\zeta(\alpha_1, \tilde{q})]}{m\alpha_1(1 + \|\tilde{q}\|)} \right]^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \left[\dot{q} - \frac{\epsilon_0 [\zeta(\alpha_1, \tilde{q})]}{m\alpha_1(1 + \|\tilde{q}\|)} \right] - \frac{1}{2m\alpha_1} [\zeta(\alpha_1, \tilde{q})]^T \left[\mathbf{K}_p - \frac{\epsilon_0^2 \mathbf{M}(\mathbf{q})}{m\alpha_1(1 + \|\tilde{q}\|)^2} \right] [\zeta(\alpha_1, \tilde{q})] \quad (15)$$

tal que $\epsilon_0 \in \mathbb{R}_+$ está acotado por:

$$0 < \epsilon_0 < \sqrt{\frac{m\alpha_1 \lambda_{K_p}^{\min}}{\beta}} [1 + \|\tilde{q}\|] \quad (16)$$

Observe que la condición (16) es suficiente para que la función estricta de Lyapunov (12) sea definida positiva.

3.3. Derivada temporal de la función de Lyapunov

Derivando la función candidata de Lyapunov (12) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{q}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{q} \\ &+ \frac{1}{m\alpha_1} [\zeta(\alpha_1, \tilde{q})]^T \mathbf{K}_p [\dot{\zeta}(\alpha_1, \tilde{q})] \\ &- \frac{\epsilon_0 [\zeta(\alpha_1, \tilde{q})]^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{q}}{m\alpha_1 [1 + \|\tilde{q}\|]} - \frac{\epsilon_0 [\zeta(\alpha_1, \tilde{q})]^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{q}}{m\alpha_1 [1 + \|\tilde{q}\|]} \end{aligned} \quad (17)$$

$$+ \frac{\epsilon_0 [\dot{\zeta}(\alpha_1, \tilde{q})]^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{m\alpha_1 [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} + \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} [\dot{\zeta}(\alpha_1, \tilde{q})]^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{m\alpha_1 \|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2}$$

donde $\dot{V} = \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ y la derivada $\dot{\zeta}(\alpha_1, \tilde{q})$ se define como:

$$\dot{\zeta}(\alpha_1, \tilde{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_1) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_1)}{\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_1) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_1) + 1} \\ \frac{[\coth(\alpha_1 \tilde{q}_1) + \tanh(\alpha_1 \tilde{q}_1)] \dot{q}_1}{\sqrt{\ln(\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_1) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_1) + 1)}} \\ \vdots \\ \frac{\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_n) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_n)}{\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_n) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_n) + 1} \\ \frac{[\coth(\alpha_1 \tilde{q}_n) + \tanh(\alpha_1 \tilde{q}_n)] \dot{q}_n}{\sqrt{\ln(\cosh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_n) \sinh^{2m}(\alpha_1 \tilde{q}_n) + 1)}} \end{bmatrix} \quad (18)$$

tenga en cuenta que $\dot{\zeta}(\alpha_1, \tilde{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ cumple con la siguiente propiedad:

Propiedad 8: La norma euclidiana $\|\dot{\zeta}(\alpha_1, \tilde{q})\|$ satisface que:

$$\|\dot{\zeta}(\alpha_1, \tilde{q})\| \geq \sqrt{n} \|\dot{\mathbf{q}}\| \quad (19)$$

Resolviendo (20) y usando la Propiedad 1 (de antisimetría) y Propiedad 2, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_v [\mathbf{f}_v(\dot{\mathbf{q}})] - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} \\ & - \frac{\epsilon_0}{m\alpha_1 [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} [\dot{\zeta}(\alpha_1, \tilde{q})]^T \mathbf{K}_p \mathbf{f}_p(\tilde{\mathbf{q}}) \\ & + \frac{\epsilon_0}{m\alpha_1 [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} [\dot{\zeta}(\alpha_1, \tilde{q})]^T \mathbf{K}_v \mathbf{f}_v(\dot{\mathbf{q}}) \\ & - \frac{\epsilon_0}{m\alpha_1 [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} [\dot{\zeta}(\alpha_1, \tilde{q})]^T \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \\ & + \frac{\epsilon_0}{m\alpha_1 [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} [\dot{\zeta}(\alpha_1, \tilde{q})]^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} \\ & + \frac{\epsilon_0}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} [\dot{\zeta}(\alpha_1, \tilde{q})]^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ & + \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}}}{m\alpha_1 \|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} [\dot{\zeta}(\alpha_1, \tilde{q})]^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (20)$$

luego, empleando las Propiedades 4, 6, 7 y 8 obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\lambda_{K_v}^{min} \gamma_v \sqrt{n} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \lambda_B^{min} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \\ & - \frac{\epsilon_0}{m\alpha_1 [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} \lambda_{K_p}^{min} \gamma_m \gamma_p \sqrt{n} \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \\ & + \frac{\epsilon_0}{m\alpha_1 [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} \lambda_{K_v}^{max} \gamma_m \gamma_v \sqrt{n} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \\ & - \frac{\epsilon_0}{m\alpha_1 [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} k_{c_1} \gamma_m \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \\ & + \frac{\epsilon_0}{m\alpha_1 [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} \lambda_B^{max} \gamma_m \sqrt{n} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{aligned} \quad (21)$$

observe que (16) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \dot{V} & \leq - \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} \\ & = - \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q} > 0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \end{aligned} \quad (22)$$

donde:

$$a = \frac{\epsilon_0}{m\alpha_1 [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} \lambda_{K_p}^{min} \gamma_m \gamma_p \sqrt{n} \quad (23)$$

$$b = c = -\frac{1}{2} \left[\frac{\epsilon_0}{m\alpha_1 [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} \lambda_{K_v}^{max} \gamma_m \gamma_v \sqrt{n} - \frac{\epsilon_0}{m\alpha_1 [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} k_{c_1} \gamma_m + \frac{\epsilon_0}{m\alpha_1 [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} \lambda_B^{max} \gamma_m \sqrt{n} \right] \quad (24)$$

$$d = \lambda_{K_v}^{min} \gamma_v \sqrt{n} + \lambda_B^{min} - \frac{\epsilon_0}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]} \beta \sqrt{n} - \frac{\epsilon_0}{m\alpha_1} \gamma_m \beta \quad (25)$$

La elección de ϵ_0 está en función de satisfacer (16) y además $\det(\mathbf{Q}) > 0$ de manera simultánea, obtener su valor numérico no es necesario para la familia de algoritmos de control saturado y sólo es necesario para propósitos de la demostración de estabilidad asintótica del punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado en el espacio de estados. Por lo tanto, se concluye que el punto de equilibrio tiene estabilidad asintótica y global, es decir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n \times 1} \quad (26)$$

4. RESULTADOS

Con la finalidad de evaluar el desempeño del algoritmo de control (5) se han realizado simulaciones en **MATLAB** considerando un caso particular. El análisis consiste en implementar el modelo dinámico numérico, disponible en [10], del robot manipulador de 2 grados de libertad (ver Figura 3) y el algoritmo de control (6) en **MATLAB**. Luego, empleando (5) se procede a mover el robot desde la posición de casa $[0^\circ, 0^\circ]^T$ a una posición deseada $[45^\circ, 90^\circ]^T$. Finalmente se ejecuta la simulación empleando *ode45*() y se evalúa la respuesta.



Figura 3 Robot direct drive BUAP

Articulación	Modelo	Par máx	Resolución
Hombro	DM-1150	150 [Nm]	1024.0
Codo	DM-1050	15 [Nm]	1024.0

Tabla 1 Características de los servomotores

Hay que tener en cuenta que el modelo dinámico numérico [10] utilizado en la simulación corresponde a un robot real, el cual tiene algunas especificaciones importantes como los que se observan en la Tabla 1. Los parámetros del controlador saturado propuesto en este trabajo han sido configurados con los siguientes valores numéricos:

$$K_p = \begin{bmatrix} k_{p_1} & 0 \\ 0 & k_{p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{150 \times 0.8}{2} & 0 \\ 0 & \frac{15 \times 0.8}{2} \end{bmatrix}$$

$$K_v = \begin{bmatrix} 0.653k_{p_1} & 0 \\ 0 & 0.866k_{p_2} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = 2.5$$

$$\alpha_2 = 1.0$$

$$m = 1$$

El algoritmo de control propuesto permite configurar la rapidez con la que el algoritmo responde a los cambios en el error y la velocidad articular mediante los parámetros α_1 y α_2 representando una ventaja.

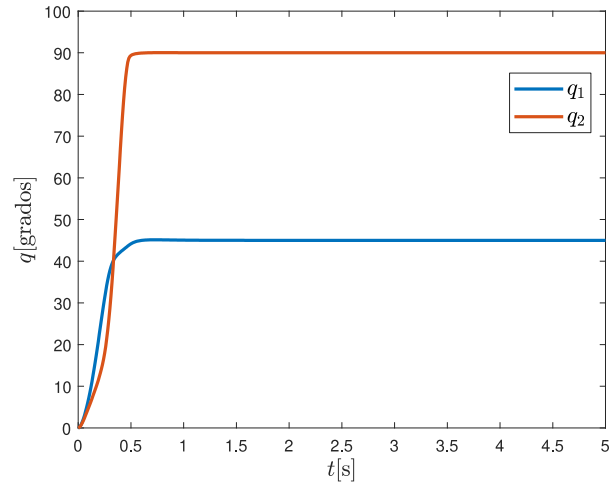


Figura 4. Posición articular del robot.

En la Figura 4, se muestran los errores de posición presentes en el robot manipulador de 2 grados de libertad. No se observan sobre impulsos y ambos servomotores alcanzan una posición estable aproximadamente a los 0.6s con valores de $q_1 = 45.03^\circ$ y $q_2 = 89.95^\circ$. Tenga en cuenta que luego de $t = 0.75s$ se llega asintóticamente a las posiciones deseadas $q = [45^\circ, 90^\circ]^T$.

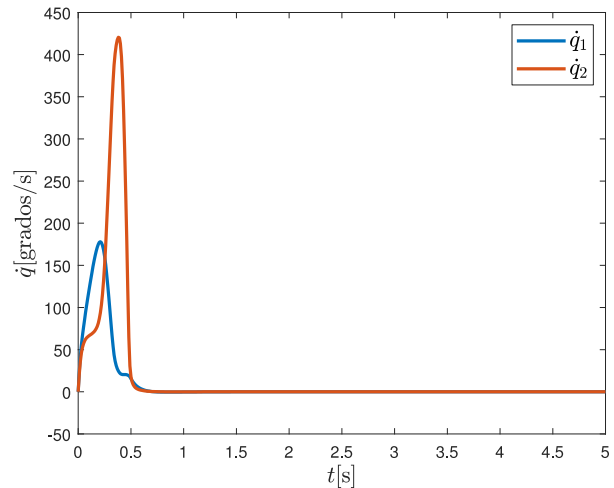


Figura 5. Velocidad articular del robot.

La Figura 5 muestra como la velocidad en el primer eslabón alcanza un valor máximo en aproximadamente $t = 0.3s$ y luego decrece hasta entrar al estado estacionario. Se observa que luego de $t = 0.6s$ las velocidades $\dot{q}_1$ y $\dot{q}_2$ son prácticamente cero.

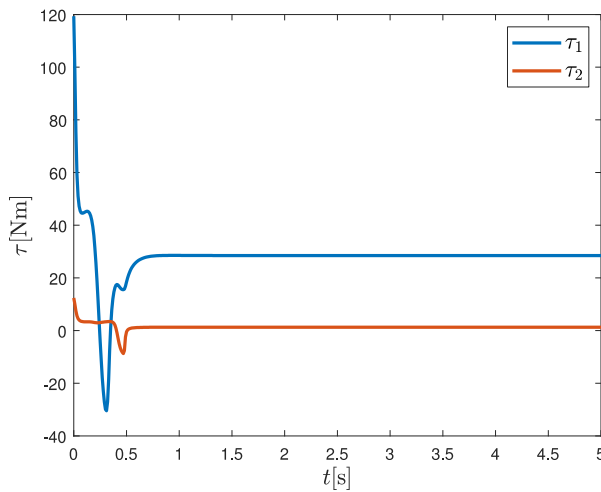


Figura 6. Pares aplicados a los servomotores del robot.

La Figura 6 muestra la energía suministrada al robot manipulador. El valor máximo del par ocurre al inicio, en $t = 0s$, con un valor de $120[Nm]$ y $12[Nm]$ para la primera y segunda articulación respectivamente; es importante observar que esto corresponde al 80% del valor máximo del torque permitido. Es importante observar que los límites físicos no son superados, esto se debe a una correcta sintonía de las ganancias de manera empírica; es decir no está sustentada bajo ningún método científico.

5. CONCLUSIONES

En este artículo, hemos presentado un nuevo de algoritmo de control saturado, conformado por funciones hiperbólicas, aplicado al control de posición. En las simulaciones se observa que cuando los parámetros α_1 y α_2 aumentan, el controlador tiene un estado transitorio más corto y error en estado estacionario de cero, esta característica se debe a las componentes hiperbólicas presentes en la estructura del control saturado. Nuestra propuesta está respaldada por un riguroso

análisis de estabilidad mediante la propuesta de una función estricta de Lyapunov que permite establecer las condiciones para asegurar estabilidad asintótica y global del punto de equilibrio. El no realizar la sintonía de las ganancias mediante algún método científico puede afectar el desempeño del algoritmo de control; sin embargo, se han obtenidos resultados positivos en las simulaciones mostrando convergencia asintótica.

REFERENCIAS

- [1] B. Siciliano and O. Khatib, "Robotics and the handbook," in Springer Handbook of Robotics (B. Siciliano and O. Khatib, eds.), pp. 1–6, Cham: Springer International Publishing, 2016.
- [2] F. Reyes-Cortés, O. Felix, J. Cid, and G. Alonso-Aruffo, "A family of hyperbolic-type control schemes for robot manipulators," *Kybernetika*, vol. 55, no. 3, pp. 561–585, 2019.
- [3] R. F., "A family of hyperbolic-type explicit force regulators with active velocity damping for robot manipulators," *J Robot*, vol. 2018, p. 1, 2018.
- [4] B. Sanchez García, F. Reyes Cortés, B. Al-Hadithi, and O. Felix, "Global saturated regulator with variable gains for robot manipulators," *Journal of Robotics and Control (JRC)*, vol. 2, no. 6, pp. 571–581, 2021.
- [5] M. Takegaki and S. Arimoto, "A new feedback method for dynamic control of manipulators," *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control transactions of The Asme*, vol. 103, pp. 119–125, 1981.
- [6] G. Chen, W. Zhang, X. Li, and B. Yu, "Adaptive speed control method for electromagnetic direct drive vehicle robot driver based on fuzzy logic," *Measurement and Control*, vol. 52, pp. 1344–1353, October 2019.
- [7] M. H. Khamsehei Fadaei, S. Ghasem, A. Zalahi, and Z. Torkani, "Design of model reference adaptive control for a 4-dof serial manipulator," *5th Conference on Knowledge Based Engineering and Innovation (KBEI)*, pp. 108–112, 2019.
- [8] T. L. V., S. Huang, Y. V. T., and P. Cuong, "Adaptive trajectory neural network tracking control for industrial robot manipulators with deadzone robust compensator," *International Journal of Control, Automation and Systems*, vol. 18, pp. 2423–2434, 2020.
- [9] R. Kelly and V. Santibáñez, *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Madrid, España: Pearson Educación, S. A., 2003.
- [10] F. Reyes Cortés, *Control de Robots Manipuladores*. México DF, México: Grupo Editorial Alfaomega, 2011.
- [11] F. Reyes-Cortés and B. M. Al-Hadithi, "An asinh-type regulator for robot manipulators with global asymptotic stability," *Automatika*, vol. 61, no. 4, pp. 574–586, 2020.