



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA

**MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA
OPCIÓN EN AUTOMATIZACIÓN**

**“Identificación paramétrica de robots
manipuladores”**

T E S I S

Presentada para obtener el título de:
Maestro en Ciencias de la Electrónica Opción en Automatización

Presenta:

Ing. Emanuel Ortiz Ortiz*

Directores:

Dr. José Fernando Reyes Cortés (FCE-BUAP)

Dr. Jorge Dionisio Fierro Rojas (FCE-BUAP)

Dr. Basil M. Al-Hadithi (CAR-UPM**)

Puebla, México

Junio 2022

* Becario CONACYT

** Centro de Automática y Robótica - Universidad Politécnica de Madrid.

BUAP[®]

Agradecimientos

Agradezco a mis padres Francia Ortiz y Julio Ortiz; a mis hermanos Julian Ortiz y Anabelen Ortiz, y a toda mi familia en general, por todo su apoyo, consejos y que siempre me han brindado a lo largo de mi proceso de formación.

A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, especialmente a la Facultad de Ciencias de la Electrónica, por permitirme la oportunidad de llevar cabo mis estudios de maestría.

A mis Asesores de tesis, por brindarme la oportunidad de llevar a cabo mi proyecto de tesis. En especial al Dr. Fernando Reyes Cortés, por confiar en mí y darme la oportunidad de trabajar con él en este proyecto y de ser parte de la maestría;

A CONACYT por el apoyo económico brindado.

Emanuel Ortiz Ortiz

Índice general

Agradecimientos	III
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Motivación	4
1.3. Formulación del problema	4
1.4. Objetivo general	5
1.4.1. Objetivos particulares	5
2. Preliminares matemáticos	7
2.1. Cinemática de robots manipuladores	7
2.1.1. Cinemática directa	7
2.1.2. Matrices de rotación	8
2.1.3. Matriz de rotación alrededor del eje z_0	10
2.1.4. Matriz de rotación alrededor del eje x_0	11
2.1.5. Matriz de rotación alrededor del eje y_0	11
2.1.6. Matrices antisimétrica	11
2.1.7. Propiedades de las matrices antisimétrica	12
2.1.8. Transformaciones de traslación	13
2.1.9. Cinemática inversa	14
2.2. Dinámica de robots manipuladores en coordenadas articulares	15
2.2.1. Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange	15
2.2.2. Modelo dinámico	16
2.2.3. Modelo dinámico de robots con fricción	18
2.2.3.1. Efecto Stribeck	18
2.2.3.2. Modelo Lugre	19
2.2.4. Propiedades del modelo dinámico	19
2.2.4.1. Matriz de Inercia	19
2.2.4.2. Fuerzas centrípetas y de Coriolis	20
2.2.4.3. Par gravitacional	21
2.2.4.4. Fenómeno de fricción	22
3. Mecánica analítica	25
3.1. Péndulo robot	25
3.1.1. Cinemática directa analítica de Euler	26

3.1.2.	Cinemática diferencial	26
3.1.3.	Rapidez lineal	26
3.1.4.	Modelo de energía	27
3.1.5.	Aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange	27
3.1.6.	Modelo dinámico del robot péndulo	28
3.1.7.	Nuevas propiedades del modelo cinemático y diferencial	28
3.1.8.	Esquema de regresión paramétrica del Péndulo robot	29
3.2.	Robot de 2 grados de libertad	29
3.2.1.	Cinemática directa analítica de Euler	30
3.2.2.	Cinemática diferencial	30
3.2.3.	Rapidez lineal	31
3.2.4.	Modelo de energía	31
3.2.5.	Aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange	32
3.2.6.	Modelo dinámico del robot de 2 grados de libertad	32
3.2.7.	Nuevas propiedades del modelo dinámico del Robot de 2 grados de libertad	33
3.3.	Robot de 3 grados de libertad	34
3.3.1.	Cinemática directa analítica de Euler	35
3.3.2.	Cinemática diferencial	37
3.3.3.	Rapidez cartesiana	38
3.3.4.	Energía cinética	39
3.3.5.	Energía potencial	39
3.3.6.	Modelo dinámico del robot de 3gdl	39
4.	Plataforma experimental	43
4.1.	Robot manipulador	43
4.1.1.	Servomotores de transmisión directa	44
4.1.2.	Encoder	46
4.2.	Arduino mkr vidor 4000	47
4.3.	Interfaz electrónica	51
4.3.1.	Etapa de adquisición de datos	51
4.3.2.	Etapa de Potencia	52
4.3.3.	Conexiones del robot	54
4.4.	Interfaz gráfica	55
4.4.1.	Comunicación	56
4.4.2.	Lectura de encoders	56
4.4.3.	Control	57
4.5.	Integración	60
5.	Identificación paramétrica	61
5.1.	Algoritmo de mínimos cuadrados recursivo	61
5.2.	Señal de excitación persistente	62
5.3.	Modelo de regresión dinámico del Robot de 2 gdl	63
5.4.	Modelo de regresión de energía del Robot de 2 gdl	64
5.5.	Simulación	65
5.6.	Resultados experimentales	67

5.6.1. Método de Filtrado	67
5.6.2. Velocidad y aceleración filtrada	68
5.6.3. Estimación de parámetros	69
6. Diseño de un algoritmo de control de posición pura	73
6.1. Algoritmo de control de posición pura con compensación de gravedad	73
6.1.1. Modelo dinámico del robot	73
6.1.2. Esquema de control tipo hiperbólico	74
6.1.3. Ecuación de lazo cerrado entre el modelo dinámico y el esquema de control . .	76
6.1.4. Análisis de estabilidad asintótica del punto de equilibrio	76
6.1.5. Función estricta de Lyapunov	77
6.1.6. La derivada temporal de la función estricta de Lyapunov	78
6.1.7. Resultados experimentales	79
6.2. Algoritmo de control de posición pura con compensación de fricción	82
6.2.1. Propuesta de modelo de fricción	82
6.2.2. Resultados experimentales	86
6.3. Análisis de resultados	89
Conclusiones	91
Anexos	93

Índice de figuras

2.1.	Sistemas de referencia fijo Σ_0 y rotado Σ_1 .	8
2.2.	Rotación de un ángulo θ alrededor del eje z_0 .	10
2.3.	Transformaciones de traslación y rotación del sistema Σ_1 con respecto al sistema Σ_0 .	13
3.1.	Sistema mecánico tipo péndulo simple.	26
3.2.	Sistema mecánico tipo péndulo simple.	29
3.3.	Robot de 3 gdl.	35
3.4.	Robot de 3 gdl de libertad - Relación entre los sistemas de coordenadas móviles con respecto al sistema de coordenadas fijo.	36
4.1.	Robot Rotradi.	44
4.2.	Motor eléctrico, sensor de posición y amplificador electrónico.	45
4.3.	Señal A y B de los Encoders.	46
4.4.	Generación de la señal de referencia - ClockAB.	47
4.5.	Arduino MKR vidor 4000.	48
4.6.	Secuencia de programación de la placa Arduino MKR vidor 4000.	49
4.7.	Diagrama esquemático de un servomotor de transmisión directa	50
4.8.	Diagrama de bloques de la lógica implementada en la tarjeta MKR Vidor 4000.	50
4.9.	Etapa de adquisición de datos	52
4.10.	Etapa de Potencia - DAC	53
4.11.	Etapa de Potencia - OpAmp.	54
4.12.	Interfaz gráfica - Ventana principal	55
4.13.	Interfaz gráfica - Ventana encoder	56
4.14.	Ventana de Control	57
4.15.	Ventana de Control - Parte Configuración.	58
4.16.	Ventana de Control - Ganancias.	58
4.17.	Ventana de Control - Ganancias.	59
4.18.	Ventana de Control - Ventana de grafica externa.	59
5.1.	Par aplicado al hombro.	62
5.2.	Par aplicado al Codo.	63
5.3.	Estimación de parámetros usando el regresor dinámico.	65
5.4.	Estimación de parámetros usando el regresor de energía.	66
5.5.	Velocidad del hombro filtrada \dot{q}_1 .	68
5.6.	Velocidad del codo filtrada \dot{q}_2 .	68

5.7. Aceleración del hombro filtrada \ddot{q}_1	69
5.8. Aceleración del codo filtrada \ddot{q}_2	69
5.9. Posición articular del hombro robot 2 gdl.	70
5.10. Posición articular del codo robot 2 gdl.	71
6.1. Respuesta del esquema de control a diferentes valores de α	76
6.2. Robot Manipulador.	79
6.3. Error de posición del robot de 3 gdl.	80
6.4. Velocidades del robot de 3 gdl	81
6.5. Pares aplicados al robot de 3 gdl.	81
6.6. Modelo de fricción propuesto τ_f para diferentes valores de m	83
6.7. Modelo de fricción propuesto τ_f para diferentes valores de α	83
6.8. Fricción de Coulomb y el efecto Stribeck vs Velocidad articular del eslabón 1.	84
6.9. Modelo fricción propuesto vs Velocidad articular del eslabón 1.	85
6.10. Fricción de Coulomb y el efecto Stribeck vs Velocidad articular del eslabón 2.	85
6.11. Modelo fricción propuesto vs Velocidad articular del eslabón 2.	86
6.12. Error de posición del robot de 3 gdl.	87
6.13. Velocidades del robot de 3 gdl.	88
6.14. Pares aplicados al robot de 3 gdl.	88
6.15. Torque del robot de 3 gdl.	89
6.16. Prototipo experimental.	101
6.17. Prototipo experimental.	102
6.18. Prototipo experimental.	103

Índice de tablas

4.1. Características específicas de la placa Arduino MKR vidor 4000.	49
4.2. Conexiones del robot.	55
5.1. Resultados de identificación paramétrica del robot de 2 gdl.	66
5.2. Resultados experimentales de identificación paramétrica del robot de 2 gdl.	70
6.1. Características de los servomotores	79

Simbología

Escalares

f_m	Coefficiente de fricción del rotor con sus soportes
$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Energía cinética
$\mathcal{K}(q_i, \dot{q}_i)$	Energía cinética del i -ésimo eslabón
\hat{k}_{pi}	i -ésimo parámetro adaptable de ganancia proporcional
\hat{k}_{vi}	i -ésimo parámetro adaptable de ganancia derivativa
$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Lagrangiano
\mathcal{L}_n	Norma \mathcal{L}_n
m_i	Masa del i -ésimo eslabón
q_i	Posición de la i -ésima articulación
\dot{q}_i	Velocidad de la i -ésima articulación
$\mathcal{U}(\mathbf{q})$	Energía potencial
$\mathcal{U}_a(\mathbf{K}_p, \tilde{\mathbf{q}})$	Energía potencial articular de diseño

Matrices

$B \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz diagonal de coeficientes de fricción viscosa
$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz de Coriolis y fuerzas centrípeta
$F_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz diagonal de coeficientes de fricción de Coulomb
$M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matriz de inercias
$R_x \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	Matriz de rotación alrededor del eje x
$R_y \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	Matriz de rotación alrededor del eje y

$$R_z \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Matriz de rotación alrededor del eje z

Vectores

$$\mathbf{f}_e \in \mathbb{R}^n$$

Vector de fuerzas o pares de fricción estática

$$\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$$

Vector general de fuerzas o pares de fricción

$$\mathbf{f}_v(\mathbf{K}_v, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^n$$

Vector de amortiguamiento o freno mecánico

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$$

Vector de par gravitacional

$$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$$

Vector de posición en coordenadas articulares

$$\mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$$

Vector de posición deseada en coordenadas articulares

$$\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$$

Vector de velocidad en coordenadas articulares

$$\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$$

Vector de error de posición en coordenadas articulares

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^p$$

Vector de parámetros estimados

$$\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$$

Vector de pares o torques aplicados

$$\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^3$$

Vector de velocidad lineal del centro de masa del i -ésimo eslabón

Capítulo 1

Introducción

La robótica es una disciplina científica que su principal objetivo es enfocarse en la investigación y tratar de solucionar algunos problemas de la sociedad. Esta disciplina incorpora muchas áreas del conocimiento tales como son la electrónica, computación, física, matemática, entre otras. Por esto en el área industrial la robótica ha ganado un importante valor al convertirse en una herramienta para la reducción de costos, mejorar la calidad del producto y ser de apoyo al ser humano en algunas actividades. Entre estos robots se encuentran los robots manipuladores.

Una de las ventajas de los robots manipuladores es que se pueden analizar desde su modelo dinámico. Este modelo permite estudiar al sistema completo, ya que nos otorga buena respuesta ante la entrada de algún algoritmo de control. El modelo dinámico requiere que se formalice su estructura matemática. Esto se realiza a través de diferentes métodos como Denavit Hartenberg o la mecánica analítica de Euler partiendo desde la ecuación fundamental de la cinemática. Luego se requieren de valores numéricos que están involucrados en la dinámica del robot, los cuales son obtenidos por la identificación paramétrica.

En este trabajo de tesis se profundiza en el desarrollo de una estructura matemática para el modelo dinámico de un robot manipulador (péndulo simple, robot de 2 y 3 grados de libertad). De esta estructura se derivan nuevas propiedades matemáticas, de las cuales se obtiene regresores paramétricos. Estos regresores paramétricos nos permitirán conocer los valores numéricos que se encuentran inmersos en la dinámica del robot. Asimismo, también se proponen dos algoritmos de control de posición pura con compensación de gravedad y fricción. Estos algoritmos son implementados en una plataforma experimental, donde se desarrollo la interfaz grafica y electrónica.

1.1. Antecedentes

El problema de identificación paramétrica de robots manipuladores consiste en obtener el valor numérico de cada uno de los parámetros que se encuentran incluidos en el comportamiento dinámico del brazo robot, tales como, momentos de inercia, centros de masa, coeficientes de fricción, etc. Dicha problemática se lleva a cabo sin la necesidad de desarmar al robot, únicamente con la inyección de energía mecánica que satisfaga ciertas condiciones de excitación persistente y con medición u observación de las señales de salida del robot (posición y velocidad articular). A pesar que el modelo dinámico del brazo robot es una estructura muy compleja, tiene la ventaja de ser expresado como

un regresor lineal de observaciones compuesto por una matriz (para el caso multivariable) o vector (caso escalar) y un vector de parámetros constantes, pero desconocidos [1], [2]. Para obtener estos regresores lineales es necesario conocer el modelo dinámico de un robot manipulador, el cual se puede obtener a través de la mecánica analítica o usando el algoritmo de Denavit-Hartenberg.

La mecánica analítica como área de la física, permite obtener el modelo dinámico de un robot manipulador con n grados de libertad (gdl) usando procedimientos estrictamente analíticos (de ahí, su nombre). Esto trae ventajas, ya que durante el desarrollo de las diferentes etapas de modelado se desprenden varias propiedades interesantes para diseñar algoritmos de control, y otras también, que se aplican a regresión lineal, facilitando la aplicación de métodos de identificación enfocados a robótica (por ejemplo, mínimos cuadrados) [3], [4]. Particularmente el método de mínimos cuadrados recursivo es utilizado ampliamente en el área de optimización, ya que minimiza el error cuadrático de una función de costo, posteriormente puede ser extendido de su forma continua al caso recursivo y, por lo tanto, aplicado en tiempo real o en línea en un sistema digital o empotrado. El método de mínimos cuadrados recursivo puede ser utilizado en sistemas dinámicos lineales, no lineales, continuos y discretos. No obstante, no tienen que ser sistemas dinámico, también pueden ser ecuaciones que representen la cinemática, energía y potencia mecánica, entre otras opciones más [3]. Recientes investigaciones en identificación paramétrica siguen usando mínimos cuadrados [5], aunque al no ser la versión recursiva, realizan la identificación fuera de línea.

A mediados de los años 60 los primeros esquemas de identificación paramétrica basados en el modelo dinámico del robot, presentaban el problema de que la aceleración articular era necesaria para elaborar un regresor. Uno de los trabajos iniciales para solucionar el problema de la aceleración articular, se presentó en [6], donde se propuso el modelo de regresión dinámico filtrado. Esta propuesta ha sido utilizada en diversas investigaciones sobre la identificación de parámetros dinámicos de robots [7–9]. Durante esta época, también se presentaron investigaciones para realizar una estimación de parámetros dinámicos mediante técnicas estándar de mínimos cuadrados [10–12]. En [12], se propuso el regresor de modelo de energía, el cual no requiere la aceleración articular y conduce a un error de predicción vectorial. Este modelo presenta ventajas con respecto al modelo dinámico filtrado, el cual produce un error de predicción escalar.

En la literatura, existen varios esquemas de regresión desarrollados para realizar identificación paramétrica de robots manipuladores, citando los trabajos iniciales de [13], donde se utilizan modelos de energía mecánica (regresor escalar) en lugar del modelo dinámico (regresor multivariable), demostrando que el modelo de energía contiene los mismos parámetros a identificar que el modelo dinámico y por lo tanto, el proceso computacional se simplifica. En el trabajo desarrollado por [14] se presentó una comparación experimental entre los modelos de energía aplicada y dinámico. En [15] se realiza la comparación de tres modelos de regresión en un robot prototipo SCARA, dos de ellos utilizando el modelo dinámico del robot manipulador (con aceleración explícita y estimada) y el modelo de energía. En [16] se describe el modelo dinámico filtrado. Por otro lado en los trabajos de [17] y [18] se realizó la comparación experimental de tres esquemas de regresión (modelo dinámico filtrado y energía) con la nueva propuesta de regresión, denominada potencia filtrada, este regresor, también fue propuesto usando otro enfoque metodológico en [19].

En [20] un procedimiento experimental es propuesto para obtener la identificación paramétrica de un motor de DC representado por un sistema de segundo orden, resultados experimentales son re-

portados. La evaluación de 5 métodos de identificación paramétrica usando mínimos cuadrados es presentada en [21], se consideran los métodos de regresión del modelo dinámico, dinámico filtrado, energía aplicada, potencia y potencia aplicada: se reportan resultados experimental empleando un robot de transmisión directa de 3 gdl. Un método con base en el error de salida en lazo cerrado donde la posición articular es remplazada por la medición fuerza/torque, lo cual evita el cálculo de velocidad y aceleración para realizar la identificación paramétrica mediante experimentación de un brazo robot de 2 grados de libertad es reportado en [22].

En [23] desarrollan un procedimiento de identificación/control para estimar la cinemática desconocida y los parámetros del modelo dinámico por Newton-Euler de un robot manipulador, con condiciones de excitación persistente en la señal de entrada y usando la teoría de Lyapunov para obtener la convergencia asintótica; resultados de simulación con un robot de 7 gdl son reportados. El modelo dinámico inverso de un robot paralelo con articulaciones esféricas de 3 gdl es presentado en [24], un regresor de identificación paramétrica es implementado con la finalidad de conocer la carga y mejorar respuesta en la orientación sobre la plataforma de movimiento usando un control PID; resultados de simulación son reportados.

Una nueva desigualdad asociada los valores propios del tensor de inercia de un robot manipulador para verificar la propiedad de definida positiva es presentada en [25] y se desarrolla el regresor de identificación de la dinámica de un robot de 7 gdl, se describen experimentos. Recientemente en [26] emplean el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados para identificar los parámetros de un robot de 2 gdl con eslabón flexible sujeto a la variación de cargas, cuya influencia es directa en las ganancias del esquema de control. Se presenta análisis de estabilidad tomando en cuenta los cambios en la carga, así como resultados de simulación y validación experimental.

De acuerdo a la revisión de la literatura reciente [27–35], incluyendo sus referencias internas, con excepción de la referencia [25] no se han presentado resultados con nuevas propiedades del modelo dinámico de un robot manipulador que permitan generar algoritmos de regresión novedosas en el área de identificación paramétrica. Algunas otras investigaciones han incorporado el uso de redes neuronales, redes neuronales convolucionales, entre otras técnicas de visión computacional, con el fin de realizar identificación paramétrica en robots [36–38]. Por lo que, en esta propuesta de tesis se pretende trabajar en la formulación Euler-Lagrange, cuyo desarrollo analítico permita expresar nuevas propiedades sobre la matriz de inercia, fuerzas centrípetas y de Coriolis, así como establecer un modelo novedoso para el fenómeno disipativo de fricción. Con este desarrollo se establecen diversos esquemas de regresión aplicados directamente a la estimación paramétrica de robots manipuladores. Por lo que, en esta tesis se trabaja con la mecánica analítica, se retoma el enfoque realizado por Leonhard Euler y se utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrange, cuyo desarrollo analítico permite expresar nuevas propiedades del modelo dinámico del robot péndulo y el robot de 2 grados de libertad. Ambos modelos dinámicos, fueron expresados en matrices antisimétricas y de rotación. Asimismo, con este enfoque se establecieron diversos esquemas de regresión aplicados directamente a la estimación paramétrica de robots manipuladores, los cuales se encuentran reportadas en el capítulo 3 y 5.

En el capítulo 4, la plataforma experimental, la etapa de adquisición de datos y de potencia, correspondientes a la interfaz electrónica. También se presentan las características, la secuencia de programación y como se va utilizar la tarjeta embebida. En este caso se va utilizar Arduino MKR Vidor 4000. Las tarjetas de Arduino son bastante utilizadas como reporta en [39], donde se utilizó para

realizar la parametrización de un péndulo simple. La tarjeta seleccionada tiene la ventaja de traer un microcontrolador SAMD21 y una FPGA, lo que la hace una tarjeta ideal para esta investigación. Esto es debido a que en la FPGA se recibieran las señales del encoder y gracias a la comunicación que ya tiene la FPGA con la SAMD21 en la tarjeta, enviaremos la respuesta del decoder que se diseñara en la FPGA hacia la SAMD21 y luego seguirá un procedimiento para adaptar la salida y pueda entrar al servoamplificador del motor de corriente directa. Asimismo, se presenta una interfaz grafica realizada en Python. Diversas investigaciones han realizado interfaz graficas para diversas plataformas experimentales [40–42], o para robots manipuladores [43, 44], aunque en su mayoría suelen usar softwares comerciales.

En el capítulo 6, se presenta se presenta el diseño de un control de posición pura con compensación de gravedad y su respectiva demostración de estabilidad asintótica global del punto de equilibrio con una función estricta de Lyapunov. Asimismo, también se presenta un nuevo modelo de fricción, que busca emular el modelo de LuGre, el cual es uno de los más exactos en la actualidad, aunque presenta la desventaja que al incorporarlo con el modelo dinámico del robot genera que el número de variables de estado aumente. Por lo que en [45] se analiza que debido a la no linealidad del modelo de fricción rara vez se trata de manera unificada con regresión lineal. Por lo que se propone usar mínimos cuadrados ponderados (WLS) para los modelos de fricción no lineal, en este caso usan los modelos de fricción clásicos. La propuesta de un nuevo modelo de fricción está compuesta por funciones hiperbólicas que tratan de emular el comportamiento del modelo de fricción. Esta propuesta se incluye en el algoritmo de control con compensación de fricción.

1.2. Motivación

Una de las problemáticas más comunes que se tiene al trabajar con robots, es el no conocer el valor numérico de cada uno de los parámetros que se encuentran incluidos en el comportamiento dinámico del robot manipulador, tales como, momentos de inercia, centros de masa, coeficientes de fricción, etc. En muchos casos el usuario se ve en la necesidad de desarmar el robot para obtener dichos parámetros. Al realizar esta actividad el usuario pierde todas las garantías que obtuvo al comprar el robot.

Esta problemática de obtener los valores numéricos de todos los parámetros involucrados en el comportamiento que presenta el robot manipulador, es abordada por la identificación paramétrica. La motivación de este trabajo de investigación, pasa por obtener estos valores numéricos sin la necesidad de desarmar el robot y únicamente con la inyección de energía mecánica que satisfaga ciertas condiciones de excitación persistente y con medición u observación de las señales de salida del robot (posición y velocidad articular), poder estimar dichos valores.

1.3. Formulación del problema

El presente trabajo de investigación se enfoca en abordar el problema de identificación paramétrica de robots manipuladores, a través del de mecánica analítica de Euler se deducen nuevas propiedades del modelo dinámico del robot manipulador, dando origen a un regresor lineal de estimación paramétrica.

Hipótesis. Con la mecánica analítica de Euler, se podrá deducir nuevas propiedades del modelo dinámico del brazo robot que den origen a un regresor lineal de estimación de parámetros.

Alcances. Diseñar algoritmos de identificación paramétrica a través de la mecánica analítica de Euler. Deducir nuevas propiedades del modelo dinámico del robot manipulador y obtener los modelos dinámicos del péndulo simple, robot de 2gdl y 3gdl. Asimismo, también proponer nuevos algoritmos de control de posición pura con compensación de gravedad y fricción. Implementar una interfaz electrónica y gráfica para implementar los algoritmos propuestos.

1.4. Objetivo general

Abordar el problema de identificación paramétrica de robots manipuladores a través del diseño de un nuevo esquema de regresión paramétrica, así como el diseño de un algoritmo de control de posición.

1.4.1. Objetivos particulares

1. Estudiar el estado del arte en identificación paramétrica de robots manipuladores.
2. Diseñar un esquema de regresión paramétrica con mínimos cuadrados.
3. Proponer un nuevo modelo de fricción.
4. Diseñar un algoritmo de control de posición pura (regulador), con compensación de fricción y par gravitacional.
5. Demostración de estabilidad asintótica y global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado formada por: la dinámica del robot manipulador y el algoritmo de control.
6. Resultados de simulación y experimentos del esquema propuesto.
7. Publicación de los resultados de tesis en revista (arbitrada/indexada) y/o congreso arbitrado.

Capítulo 2

Preliminares matemáticos

En este capítulo se describen las herramientas matemáticas que se utilizarán a lo largo del presente trabajo de investigación, las cuales serán el sustento teórico. Este capítulo se divide en dos apartados: cinemática y dinámica de robots manipuladores.

2.1. Cinemática de robots manipuladores

2.1.1. Cinemática directa

La cinemática es la parte de la física que estudia el movimiento de sistemas mecánicos, sin tomar en cuenta las fuerzas que lo originan. Por lo tanto, no involucra ecuaciones diferenciales como en el caso de modelos dinámicos. Al estudio de la cinemática aplicado a los sistemas mecánicos que forman robots manipuladores se le denomina **cinemática directa**; se refiere al estudio analítico del movimiento del robot con respecto a un sistema de referencia cartesiano fijo $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ relacionando la dependencia que existe entre las coordenadas articulares o generalizada $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ con las coordenadas cartesianas $[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^3$ y la orientación $[\theta, \phi, \psi]^T \in \mathbb{R}^3$ del extremo final del robot (donde habitualmente se coloca la herramienta de trabajo). Esta dependencia se realiza por medio de una función vectorial \mathbf{f}_R continua y diferenciable en la variable de estado articular \mathbf{q} [3].

La cinemática directa es un mapeo vectorial $\mathbf{f}_R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \theta \\ \phi \\ \psi \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(l_i, \mathbf{q}) \quad (2.1)$$

donde n indica el número de grados de libertad y la dimensión del vector de coordenadas articulares \mathbf{q} , m es la dimensión conjunta de las coordenadas cartesianas y la orientación de la herramienta de trabajo.

Un robot manipulador se considera como una serie de eslabones interconectados a través de articulaciones (servomotores) rotacionales o prismáticas en forma de cadena cinemática abierta, es decir el

extremo final donde se coloca la herramienta no se encuentra conectada mecánicamente a la primera articulación (base) del robot. Desde el punto de vista topológico, la cadena cinemática se considera abierta cuando los dos extremos de la cadena no se tocan. De otra manera la cadena cinemática formaría un lazo si sus dos extremos están mecánicamente unidos [3,4].

La estructura mecánica del robot manipulador se caracteriza por tener un número de grados de libertad, los cuales determinan en forma única su configuración. Típicamente, cada grado de libertad está asociado a una articulación (variable articular \mathbf{q}).

2.1.2. Matrices de rotación

En la figura 2.1 muestra dos sistemas de referencia cartesianos, asociados a un cuerpo rígido, representados por $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ y $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$, ambos sistemas comparten el mismo origen. El sistema de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ mantiene una orientación relativa al sistema de referencia fijo $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ [4].

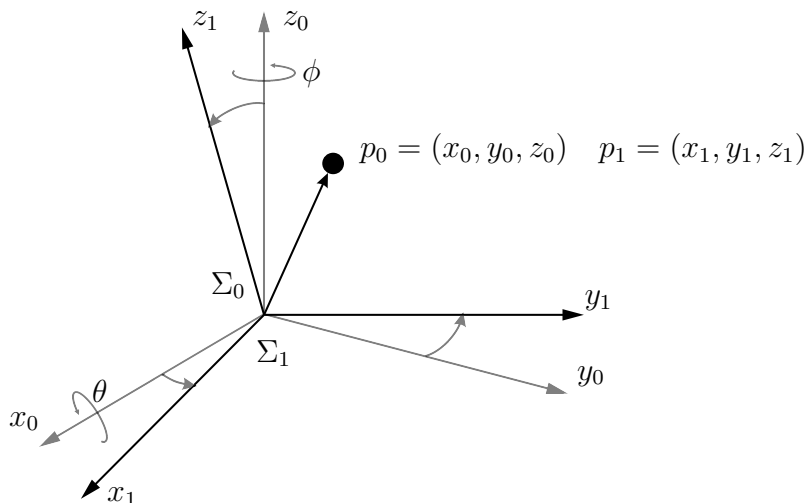


Figura 2.1: Sistemas de referencia fijo Σ_0 y rotado Σ_1 .

El vector $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ contiene las coordenadas de un punto específico del cuerpo rígido que se muestra en la figura 2.1; con respecto al sistema $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ tiene coordenadas $\mathbf{p}_0 = [x_0, y_0, z_0]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$. El mismo vector $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ con respecto al sistema de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$, adquiere una representación de $\mathbf{p}_1 = [x_1, y_1, z_1]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$. Para encontrar la relación que hay entre las coordenadas de \mathbf{p}_1 del sistema de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ con el vector \mathbf{p}_0 definido en el sistema de referencia $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$, se considera los vectores bases para cada sistema de referencia. Estos son $\{\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0\}$ vectores unitarios a lo largo de los ejes x_0, y_0, z_0 , respectivamente. Es decir, $\mathbf{i}_0 = [1, 0, 0]^T$, $\mathbf{j}_0 = [0, 1, 0]^T$, $\mathbf{k}_0 = [0, 0, 1]^T$. Similarmente para el sistema de coordenadas $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$, se definen sus vectores unitarios $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1\}$.

Un vector que va desde el origen común para ambos sistemas hasta \mathbf{p} , puede expresarse en función de una de las dos bases de vectores unitarios de la siguiente forma [4, 46]:

$$\mathbf{p}_0 = p_{0x}\mathbf{i}_0 + p_{0y}\mathbf{j}_0 + p_{0z}\mathbf{k}_0 \quad \text{con respecto al sistema } \Sigma_0 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{p}_1 = p_{1x}\mathbf{i}_1 + p_{1y}\mathbf{j}_1 + p_{1z}\mathbf{k}_1 \quad \text{con respecto al sistema } \Sigma_1 \quad (2.3)$$

Los vectores $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ representan al mismo vector $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$. Tomando en cuenta las ecuaciones (2.2) y (2.3) la relación que hay entre sus componentes adquiere la siguiente forma (proyección del vector \mathbf{p}_1 sobre cada uno de los ejes del sistema $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$):

$$p_{0x} = \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{i}_0 = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{i}_0 = p_{1x}\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_0 + p_{1y}\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_0 + p_{1z}\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_0 \quad (2.4)$$

$$p_{0y} = \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{j}_0 = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{j}_0 = p_{1x}\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_0 + p_{1y}\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_0 + p_{1z}\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_0 \quad (2.5)$$

$$p_{0z} = \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{k}_0 = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_0 = p_{1x}\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_0 + p_{1y}\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_0 + p_{1z}\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_0 \quad (2.6)$$

Estas ecuaciones pueden ser escritas de manera compacta como:

$$\mathbf{p}_0 = R_0^1 \mathbf{p}_1 \quad (2.7)$$

donde $R_0^1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ representa la siguiente matriz:

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_0 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_0 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_0 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_0 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_0 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_0 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

La matriz R_0^1 es la matriz de transformación de las coordenadas del punto \mathbf{p} del sistema de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ hacia las coordenadas del sistema $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$. Esto significa que dado un punto \mathbf{p}_1 en el sistema $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ entonces $R_0^1 \mathbf{p}_1$ representa el mismo vector expresado con respecto al sistema de referencia $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ [4].

Similarmente se puede obtener la proyección de \mathbf{p}_1 sobre el sistema $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ (es decir, el proceso inverso, \mathbf{p}_1 en función de \mathbf{p}_0). Entonces $\mathbf{p}_1 = R_0^1 \mathbf{p}_0$, donde R_0^1 es:

$$R_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}_1 & \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}_1 & \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{j}_1 & \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{k}_1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9), satisface la siguiente propiedad:

Propiedad 1. [4] *La matriz $R_0^1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ representa la matriz inversa de la transformación $R_0^1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Debido a que el producto interno de vectores unitarios cumple la propiedad conmutativa, entonces $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_1 = \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{j}_0 = \mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{i}_0$, etc., por lo que resulta :*

$$R_0^1 = (R_0^1)^{-1} = (R_0^1)^T \quad (2.10)$$

■

2.1.3. Matriz de rotación alrededor del eje z_0

En la figura 2.2 se muestra al sistema de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ el cual está rotado un ángulo θ alrededor del eje z_0 del sistema $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$. El signo del ángulo θ está dado por la regla de la mano derecha. Por convención, un ángulo positivo es aquel cuyo sentido de rotación es contrario al movimiento de las manecillas del reloj. También se observa que los ejes z_0 y z_1 son paralelos [4].

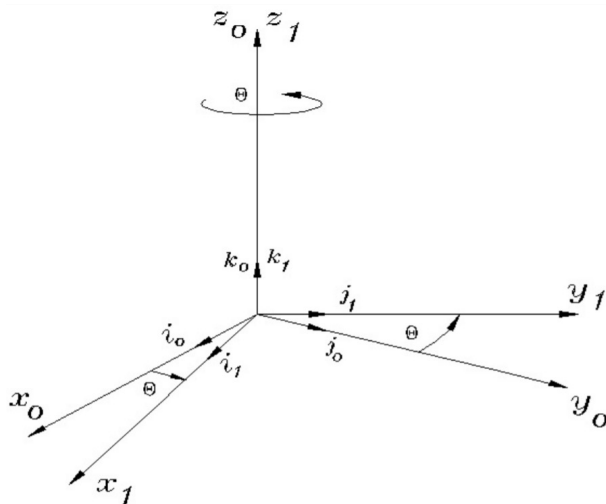


Figura 2.2: Rotación de un ángulo θ alrededor del eje z_0 .

La matriz $R_0^1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ correspondiente de rotación θ alrededor del eje z_0 se denota por $R_z(\theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ con la siguiente estructura matemática [4, 46]:

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Los ejes z_0 y z_1 coinciden entre sí, y el plano $x_1 - y_1$ se desplaza un ángulo θ de derecha a izquierda con respecto al plano $x_0 - y_0$.

La matriz de rotación $R_z(\theta)$ tiene varias propiedades importantes que a continuación se presentan:

Propiedad 2. [4] $R_z(0) = I$, $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es la matriz identidad. ■

Propiedad 3. [4] $R_z(\theta)R_z(\beta) = R_z(\beta)R_z(\theta) = R_z(\theta + \beta) = R_z(\beta + \theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. ■

Propiedad 4. [4] $R_z(\theta)^{-1} = R_z(-\theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. ■

Propiedad 5. [4] $R_z(\theta)^T = R_z(-\theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. ■

Propiedad 6. [4] $R_z(\theta)R_z(\theta)^T = R_z(\theta)^T R_z(\theta) = I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. ■

Propiedad 7. [4] $\det[R_z(\theta)] = 1$, si el sistema de referencia cartesiano $\Sigma(x, y, z)$ es seleccionado por la regla de la mano derecha, en otro caso $\det[R_z(\theta)] = -1$ ■

2.1.4. Matriz de rotación alrededor del eje x_0

Si en la figura 2.2 en lugar de tener una rotación de un ángulo θ alrededor del eje z_0 , se tiene en el eje x_0 del sistema $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$, entonces la matriz R_0^1 correspondiente de rotación θ alrededor del eje x_0 se denota por $R_x(\theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ con la siguiente estructura matemática [4, 46]:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

El ángulo de rotación θ gira alrededor del eje x_0 en sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj). Los ejes x_0 y x_1 coinciden entre sí, y el plano $z_1 - y_1$ se desplaza un ángulo θ de derecha a izquierda con respecto al plano $z_0 - y_0$. Las propiedades de la matriz de rotación $R_x(\theta)$ son las mismas para $R_z(\theta)$.

2.1.5. Matriz de rotación alrededor del eje y_0

Si en la figura 2.2 en lugar de tener una rotación de un ángulo θ alrededor del eje z_0 , se tiene en el eje y_0 del sistema $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$, entonces la matriz R_0^1 correspondiente de rotación θ alrededor del eje y_0 se denota por $R_y(\theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ con la siguiente estructura matemática [4, 46]:

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Los ejes x_0 y x_1 coinciden entre sí, y el plano $z_1 - y_1$ se desplaza un ángulo θ de derecha a izquierda con respecto al plano $z_0 - y_0$. Las propiedades de la matriz de rotación $R_y(\theta)$ son las mismas para $R_z(\theta)$. El ángulo de rotación θ gira alrededor del eje y_0 en sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj).

2.1.6. Matrices antisimétrica

Una matriz antisimétrica, es una matriz cuadrada, que es representada por $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$; se define como:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & 0 & -s_{23} \\ -s_{31} & s_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

donde

- $s_{ij} \in \mathbb{R}$ $i, j = 1, 2, 3$ son los elementos de la matriz S . Todos los elementos de la diagonal son cero $s_{ij} = 0$, y fuera de la diagonal s_{ij} para $i \neq j$.
- Los nueve elementos de la matriz S , se reducen a 3 elementos independientes, que denotamos por $s_{12}, s_{13}, s_{23} \in \mathbb{R}$, los cuales son los elementos de un vector.
- La matriz antisimétrica S puede aceptar como argumento de entrada a vectores $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ con tres coordenadas de los sistemas de referencia cartesianos tridimensionales: función matriz antisimétrica $S = S(\mathbf{p})$.

2.1.7. Propiedades de las matrices antisimétrica

Propiedad 8. [47] Una matriz antisimétrica $S(\mathbf{p})$ satisface lo siguiente $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$:

$$S(\mathbf{p}) + S(\mathbf{p})^T = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_z & -p_y \\ -p_z & 0 & p_x \\ p_y & -p_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

■

Propiedad 9. [47] El producto de $S(\mathbf{p})S(\mathbf{p})^T$ es conmutativo, $S(\mathbf{p})^T S(\mathbf{p}) = -S(\mathbf{p})^2$; y el resultado es una matriz simétrica.

■

Propiedad 10. [47] El determinante del producto de matrices antisimétricas $S(\mathbf{p})S(\mathbf{p})^T = S(\mathbf{p})^T S(\mathbf{p})$ es cero. También se cumple que $\det[S(\mathbf{p})] = 0$ y $\det[S(\mathbf{p})^T] = 0$. Es decir, dada una matriz antisimétrica $S(\mathbf{p})$, no existen las siguientes matrices inversas, $S(\mathbf{p})^{-1}$, $[S(\mathbf{p})S(\mathbf{p})^T]^{-1}$ y $[S(\mathbf{p})^T S(\mathbf{p})]^{-1}$.

■

Propiedad 11. [47] Propiedad de escalamiento de $S(\mathbf{p})$: dada una matriz antisimétrica $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, el vector $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, y el escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$S(\alpha\mathbf{p}) = \alpha S(\mathbf{p}) \quad (2.16)$$

■

Propiedad 12. [47] La derivada parcial de un matriz de rotación cumple con: $\frac{\partial}{\partial \theta} R(\theta) = S(\mathbf{n})R(\theta)$, donde $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es un vector base unitario; cada matriz de rotación queda expresada de la siguiente forma:

- $\frac{\partial}{\partial \theta} R_x(\theta) = S(\theta\mathbf{i})R_x(\theta)$ donde $\mathbf{i} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es un vector base unitario $\mathbf{i} = [1, 0, 0]^T$.
- $\frac{\partial}{\partial \theta} R_y(\theta) = S(\theta\mathbf{j})R_y(\theta)$ donde $\mathbf{j} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es un vector base unitario $\mathbf{j} = [0, 1, 0]^T$.

- $\frac{\partial}{\partial \theta} R_z(\theta) = S(\theta \mathbf{k}) R_z(\theta)$ donde $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es un vector base unitario $\mathbf{i} = [0, 0, 1]^T$.

■

Propiedad 13. [47] La derivada con respecto al tiempo de un matriz de rotación cumple con: $\dot{R}(\theta) = \frac{d}{dt} R(\theta) = S(\mathbf{w}_0) R(\theta) = S(\dot{\theta} \mathbf{n}) R(\theta)$, donde $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es un vector base unitario, $\mathbf{w}_0 = \dot{\theta} \mathbf{n}$, $\theta = \theta(t)$; cada matriz de rotación queda expresada de la siguiente forma:

- $\dot{R}_x(\theta) = \frac{d}{dt} R_x(\theta) = S(\mathbf{w}_{0x}) R_x(\theta) = S(\dot{\theta} \mathbf{i}) R_x(\theta)$, donde $\mathbf{i} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es un vector base unitario $\mathbf{i} = [1, 0, 0]^T$, $\mathbf{w}_{0x} = \dot{\theta} \mathbf{i}$, $\theta = \theta(t)$.
- $\dot{R}_y(\theta) = \frac{d}{dt} R_y(\theta) = S(\mathbf{w}_{0y}) R_y(\theta) = S(\dot{\theta} \mathbf{j}) R_y(\theta)$, donde $\mathbf{j} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es un vector base unitario $\mathbf{j} = [0, 1, 0]^T$, $\mathbf{w}_{0y} = \dot{\theta} \mathbf{j}$, $\theta = \theta(t)$.
- $\dot{R}_z(\theta) = \frac{d}{dt} R_z(\theta) = S(\mathbf{w}_{0z}) R_z(\theta) = S(\dot{\theta} \mathbf{k}) R_z(\theta)$, donde $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ es un vector base unitario $\mathbf{k} = [0, 0, 1]^T$, $\mathbf{w}_{0z} = \dot{\theta} \mathbf{k}$, $\theta = \theta(t)$.

■

2.1.8. Transformaciones de traslación

Se tiene un sistema de referencia cartesiano fijo $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ y el sistema de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$, donde sus respectivos orígenes son no coincidentes. El origen del sistema de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ se encuentra desplazado una distancia $\mathbf{d}_0^1 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ con respecto al origen del sistema $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$, como se observa en la figura 2.3:

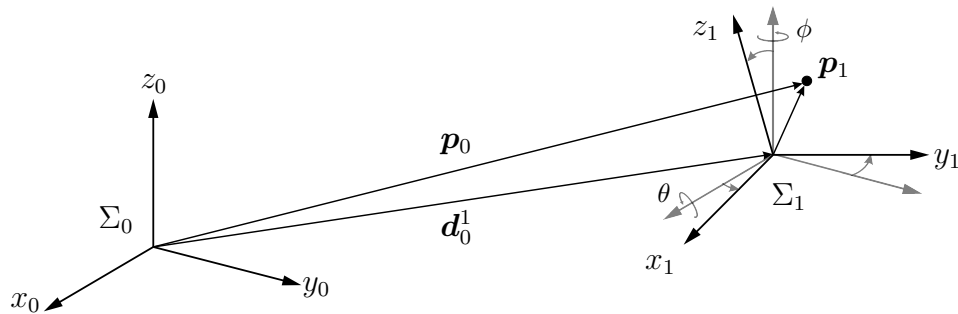


Figura 2.3: Transformaciones de traslación y rotación del sistema Σ_1 con respecto al sistema Σ_0 .

El vector \mathbf{d}_0^1 está expresado en coordenadas del sistema Σ_0 : $\mathbf{d}_0^1 = [d_{0x}^1, d_{0y}^1, d_{0z}^1]^T$, entonces cualquier punto \mathbf{p} tiene representación \mathbf{p}_0 y \mathbf{p}_1 . La relación general entre los sistemas de referencia $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ y $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ incluyendo la matriz de rotación R_0^1 y el vector de traslación \mathbf{d}_0^1 es:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + R_0^1 \mathbf{p}_1 \quad (2.17)$$

$$= \begin{bmatrix} d_{0x}^1 \\ d_{0y}^1 \\ d_{0z}^1 \end{bmatrix} + R_0^1 \begin{bmatrix} p_{0x}^1 \\ p_{0y}^1 \\ p_{0z}^1 \end{bmatrix}$$

Ahora estas transformaciones de traslación se pueden llevar para un caso general, por ejemplo si a la figura se le agrega un tercer sistema de referencia cartesiano, teniendo $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$, $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ y $\Sigma_2(x_2, y_2, z_2)$, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + R_0^1 \mathbf{p}_1 \quad (2.18)$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{d}_1^2 + R_1^2 \mathbf{p}_2 \quad (2.19)$$

Reemplazando la ecuación (2.20) en (2.18), se tiene:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + R_0^1 \mathbf{d}_1^2 + R_0^1 R_1^2 \mathbf{p}_2 \quad (2.20)$$

Por lo tanto, la regla de transformación de traslación y orientación de un punto \mathbf{p}_2 en el sistema $\Sigma_2(x_2, y_2, z_2)$ hacia un punto \mathbf{p}_0 en el sistema $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ adquiere la siguiente estructura:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^2 + R_0^2 \mathbf{p}_2 \quad (2.21)$$

donde:

$$R_0^2 = R_0^1 R_1^2 \quad (2.22)$$

$$\mathbf{d}_0^2 = \mathbf{d}_0^1 + R_0^1 \mathbf{d}_1^2 \quad (2.23)$$

La ecuación (2.17), puede ser también expresada con los ángulos de Euler $\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + R_0^1(\theta, \phi, \psi)\mathbf{p}_1$, la cual es conocida como ecuación fundamental de la cinemática [4].

2.1.9. Cinemática inversa

Dada la posición del extremo final del robot en coordenadas cartesianas $[x, y, z]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ y la orientación $[\theta, \phi, \psi]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, con respecto a un sistema de referencia fijo $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$, así como los parámetros geométricos l_i , entonces surge la pregunta natural: ¿Pueden obtenerse las coordenadas articulares del robot $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ para que el extremo final del robot se posicione en las coordenadas cartesianas solicitadas, con la orientación requerida?

El problema planteado se conoce como cinemática inversa y representa un área de la robótica de mayor complejidad que la cinemática directa. Para un robot manipulador siempre es posible encontrar el modelo de cinemática directa, mientras que en la cinemática inversa pueden haber varias soluciones

e inclusive no existir solución analítica; si este es el caso, entonces como posibles formas de solución pueden proponerse redes neuronales, métodos numéricos, iterativos, geométricos, etc [3].

La cinemática inversa es un problema no lineal que relaciona las coordenadas articulares \mathbf{q} en función de las coordenadas cartesianas y la orientación de la herramienta del extremo final del robot manipulador:

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}_R^{-1}(x, y, z, \theta, \phi, \psi) \quad (2.24)$$

donde $\mathbf{f}_R^{-1}(x, y, z, \theta, \phi, \psi)$ es función inversa de la ecuación (2.1).

2.2. Dinámica de robots manipuladores en coordenadas articulares

2.2.1. Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange

El modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad, formado con eslabones rígidos conectados por articulaciones libres de elasticidad en cadena cinemática abierta, es obtenido a partir de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange [3]. Las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador, también pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de movimiento de Newton. No obstante, la desventaja que presenta este método es que el análisis se complica notablemente cuando aumenta el número de articulaciones del robot. En estos casos, es conveniente emplear las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange [47].

La síntesis de la estructura dinámica de un robot manipulador de n gdl se realiza a través de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange. Estas ecuaciones permiten deducir el modelo dinámico de un robot con n grados de libertad :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (2.25)$$

donde

- $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de posiciones articulares o coordenadas generalizadas, $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de velocidades articulares, $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares aplicados, donde el i -ésimo par τ_i se encuentra asociado con la i -ésima coordenada generalizada q_i , y $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e)$ es el vector de fuerzas o pares de fricción que depende de la velocidad articular $\dot{\mathbf{q}}$ y de la fricción estática \mathbf{f}_e que se encuentra presente en las articulaciones del mismo [3, 47].

La metodología aplicada para el modelado dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad, a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange se reduce en 6 pasos:

P1. Obtener la cinemática directa con respecto al centro de masa de cada uno de los eslabones. Para el eslabón i -ésimo, se toman en consideración las longitudes anteriores l_{i-1} y ángulos q_i y q_{i-1} .

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \mathbf{f}_R(l_i, l_{i-1}, l_{ci}, q_{i-1}, q_i) \quad (2.26)$$

P2. Calcular la cinemática diferencial (velocidad) del i -ésimo eslabón:

$$\mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

P3. Calcular la rapidez lineal del centro de masa de cada eslabón, la cual se obtiene de aplicar la norma Euclidiana a la velocidad:

$$\|\mathbf{v}_i\|^2 = \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \quad (2.28)$$

P4. Calcular las energías:

P5. Obtener el Lagrangiano $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2.29)$$

P6. Aplicar las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange e incluir el modelo de fricción:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (2.30)$$

2.2.2. Modelo dinámico

El modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad obtenido por las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, se puede expresar de una forma más compacta. Se inicia definiendo a la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, la cual se encuentra asociada al dispositivo mecánico articulado que se relaciona con la matriz de inercias $M(\mathbf{q})$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.31)$$

En la ecuación (2.31), $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercias del manipulador y es una matriz definida positiva (por lo tanto simétrica). La energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}$ no tiene una forma específica como el caso de la energía cinética, aunque se tiene conocimiento de que tiene una dependencia del vector de posiciones articulares $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ [3].

Con esta forma del lagrangiano, las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = M(\dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.32)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] = M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.34)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.32), (2.33) y (2.34) en (2.30), se obtiene:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] + \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (2.35)$$

De forma compacta la ecuación (2.35) queda de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (2.36)$$

donde

- $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de coordenadas generalizadas o posiciones articulares, $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de velocidades articulares y $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de aceleraciones articulares.
- $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, la cual es simétrica y definida positiva. $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis.

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \quad (2.37)$$

- $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de fuerzas o pares gravitacionales obtenido como el gradiente de la energía potencial, es decir:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.38)$$

debida a la acción de la gravedad.

- $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_c) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es el vector de pares de fricción que incluye la región estática de histéresis, efecto Stribeck, la fricción viscosa y de Coulomb (f_c) de cada articulación del robot.

2.2.3. Modelo dinámico de robots con fricción

Los efectos de fricción en sistemas mecánicos son fenómenos complicados que dependen de múltiples factores como la naturaleza de los materiales en contacto, lubricación entre ellos, temperatura, etc. Por esta razón, tradicionalmente las fuerzas y pares de fricción son modelados solo de forma aproximada, aunque se reconoce que estas dependen de la velocidad relativa entre los cuerpos en contacto [47]. El fenómeno de fricción tiene el efecto físico de oponerse al movimiento del robot, su característica principal es un fenómeno disipativo en velocidades diferentes a cero y con entradas acotadas dentro del primer y tercer cuadrante, lo que permite considerar modelos tradicionales de fricción viscosa y de Coulomb, para modelarlos como una combinación lineal de fricción viscosa, Coulomb y estática. La característica disipativa de la fricción significa que convierte la energía mecánica en energía térmica [3].

$$\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_c) = B\dot{\mathbf{q}} + F_c \text{signo}(\dot{\mathbf{q}}) + \begin{bmatrix} [1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [1 - |\text{signo}(\dot{q}_2)|] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [1 - |\text{signo}(\dot{q}_n)|] \end{bmatrix} \mathbf{f}_e \quad (2.39)$$

donde $B, F_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales de coeficientes de fricción viscosa y de Coulomb, respectivamente. La fricción estática $\mathbf{f}_e \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ está representada por $\mathbf{f}_e = [f_{e1}, f_{e2}, \dots, f_{en}]^T$ que es el vector de fricción estática que contiene los coeficientes de fricción estática de cada uno de los servomotores del robot manipulador. En velocidades cero únicamente está presente la fricción estática [3].

Una característica importante de las fuerzas de fricción es que estas son disipativas. La característica disipativa de la fricción significa que convierte la energía mecánica en energía térmica. Este aspecto disipativo se traduce como desgaste y envejecimiento en las partes mecánicas del robot. Sin embargo, el fenómeno de fricción ayuda a generar la región de atracción para puntos de equilibrio estables [3, 47]:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) > 0. \quad (2.40)$$

2.2.3.1. Efecto Stribeck

La transición entre la fricción estática y de velocidad no es instantánea, existe una zona conocida como fricción de Stribeck. Un modelo estático que incluye la representación más completa del fenómeno disipativo de fricción en las articulaciones del robot es el siguiente:

$$\tau_{fi} = \sigma_0 \dot{q}_i + \text{signo}(\dot{q}_i) \left[\tau_{ci} + (\tau_{si} - \tau_{ci}) e^{-\left| \frac{\dot{q}_i}{q_{si}} \right|^\delta} \right] \quad (2.41)$$

- El primer término representa la fricción viscosa, y el segundo término es el efecto Stribeck.
- El coeficiente de fricción de Coulomb está denotado por τ_{ci} .
- τ_{si} es el coeficiente de fricción estática.
- σ_0 es el coeficiente de fricción viscosa.
- δ es un número entero positivo (generalmente $\delta = 1$ o $\delta = 2$).

2.2.3.2. Modelo Lugre

El modelo dinámico Lugre para la i -ésima articulación del robot manipulador está descrito por la siguiente ecuación diferencial [48]:

$$z_i = \dot{q}_i - \sigma_0 \frac{\dot{q}_i}{f_v(\dot{q}_i)} z_i \quad (2.42)$$

$$\tau_{fi} = \sigma_0 z_i + \sigma_1 \dot{z}_i + f_w(\dot{q}_i) \quad (2.43)$$

donde:

- \dot{q}_i es la velocidad articular del i -ésimo eslabón.
- z_i es el estado de fricción interno.
- τ_{fi} es el torque de fricción de la i -ésima articulación.
- σ_0 y σ_1 son los coeficientes de fricción viscosa para los casos macroamortiguamiento y microamortiguamiento, respectivamente.
- $f_w(\dot{q}_i)$ representa una función para macroamortiguamiento, típicamente es la fricción viscosa
- $f_v(\dot{q}_i)$ es una función que contiene la fricción de Coulomb y el efecto Stribeck:

$$f_v(\dot{q}_i) = \tau_c + [\tau_s - \tau_c] e^{-\left|\frac{\dot{q}_i}{q_{si}}\right|^2} \quad (2.44)$$

donde τ_c y τ_s son los coeficientes de fricción de Coulomb y estática, respectivamente ($\tau_s > \tau_c$); y q_{si} es la constante Stribeck (representa una baja magnitud de velocidad de movimiento del robot).

2.2.4. Propiedades del modelo dinámico

2.2.4.1. Matriz de Inercia

El efecto inercial representado por $M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$, que significa el cambio de estado de movimiento del robot manipulador. La matriz de inercia $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica definida positiva cuyos elementos son funciones solamente de \mathbf{q} . La matriz de inercia $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ satisface las siguientes propiedades:

Propiedad 14. [47] *Existe una constante real positiva α tal que:*

$$M(\mathbf{q}) \geq \alpha I, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (2.45)$$

donde $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad. La matriz $M(\mathbf{q})^{-1}$ existe y es definida positiva. ■

Propiedad 15. [47] *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $\beta > 0$ tal que:*

$$\lambda_{\max}\{M(\mathbf{q})\} \geq \beta \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (2.46)$$

una manera sencilla de calcular β es la dada por:

$$\beta \geq n \left[\max_{i,j,\mathbf{q}} |M_{ij}(\mathbf{q})| \right] \quad (2.47)$$

donde $M_{ij}(\mathbf{q})$ denota al ij -ésimo elemento de la matriz $M(\mathbf{q})$. ■

2.2.4.2. Fuerzas centrípetas y de Coriolis

La importancia de las propiedades de la matriz Fuerzas centrípetas y de Coriolis se hace presente en el estudio de estabilidad de los sistemas de control de robots. Las fuerzas centrípetas son fuerzas radiales, teniendo un signo contrario a las fuerzas centrífugas. La fuerza de Coriolis representa una desviación del movimiento de traslación debido a su componente de rotación. Las fuerzas centrípetas y de Coriolis presentan las siguientes propiedades:

Propiedad 16. [4] *La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ no es una matriz única, pero sí lo es $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$.* ■

Propiedad 17. [4] *Cuando el vector de velocidades articulares es cero, la matriz de Coriolis satisface $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})|_{\dot{\mathbf{q}}=0} = C(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ para todo $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$* ■

Propiedad 18. [4] *Para todo vector $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que:*

$$C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} = C(\mathbf{q}, \mathbf{y})\mathbf{x} \quad (2.48)$$
■

Propiedad 19. [4] *La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la derivada con respecto al tiempo de la matriz de inercia $\dot{M}(\mathbf{q})$ satisfacen:*

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \left[\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} \equiv 0 \quad \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (2.49)$$

Es decir, la matriz resultante $\left[\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right]$ es una matriz antisimétrica. ■

Propiedad 20. [4] *La derivada temporal de la matriz de inercia y la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis satisfacen:*

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.50)$$

■

Propiedad 21. [47] *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_{C_1} > 0$ tal que:*

$$\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| = k_{C_1}\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \quad (2.51)$$

para todo $\mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

■

Propiedad 22. [47] *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existen constantes $k_{C_1} > 0$ y $k_{C_2} > 0$ tales que:*

$$\|C(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{w} - C(\mathbf{y}, \mathbf{v})\mathbf{w}\| \leq k_{C_1}\|\mathbf{z} - \mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| + k_{C_2}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|\|\mathbf{w}\|\|\mathbf{z}\| \quad (2.52)$$

para todo $\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

■

2.2.4.3. Par gravitacional

El vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ depende sólo de las posiciones articulares \mathbf{q} . El vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ se encuentra acotado si \mathbf{q} lo está también. Adicionalmente, $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ tiene las siguientes propiedades:

Propiedad 23. [47] *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, el vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ es Lipschitz; es decir, existe una constante $k_g > 0$ tal que:*

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq k_g\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (2.53)$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Una forma sencilla de calcular k_g es como:

$$k_g \geq n \left[\max_{i,j,\mathbf{q}} \left| \frac{\partial \mathbf{g}_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right| \right] \quad (2.54)$$

Además, k_g satisface:

$$k_g \geq \left\| \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \geq \lambda_{\max} \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\} \quad (2.55)$$

■

Propiedad 24. [4] *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante k' tal que:*

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| \leq k' \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \quad (2.56)$$

■

Propiedad 25. [47] *El vector de pares gravitacionales $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ y el vector de velocidad $\dot{\mathbf{q}}$ satisfacen:*

$$\int_0^T \mathbf{g}^T(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} dt = \mathcal{U}(\mathbf{q}(t)) - \mathcal{U}(\mathbf{q}(0)) \quad (2.57)$$

■

2.2.4.4. Fenómeno de fricción

El efecto de fricción que se presenta en el sistema mecánico de los robots manipuladores es un fenómeno disipativo que se opone al movimiento del robot, el cual cumple con las siguientes propiedades:

Propiedad 26. [4] *La fricción viscosa satisface lo siguiente:*

$$\|B\dot{\mathbf{q}}\| \leq \|B\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \leq \lambda_B^{\max} \|\dot{\mathbf{q}}\| \quad (2.58)$$

donde λ_B^{\max} es el valor propio máximo de la matriz de coeficientes de fricción viscosa $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

■

Propiedad 27. [4] *La fricción de Coulomb satisface lo siguiente:*

$$\|F_c \text{signo}(\dot{\mathbf{q}})\| \leq \|F_c\| \sqrt{n} \leq \lambda_{F_c}^{\max} \sqrt{n} \quad (2.59)$$

donde $\lambda_{F_c}^{\max}$ es el valor propio máximo de la matriz de coeficientes de fricción de Coulomb $F_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$, n es el número de gdl del robot.

■

Propiedad 28. [4] *La fricción estática satisface lo siguiente:*

$$\|F_e [\mathbf{1} - \|\text{signo}(\dot{\mathbf{q}})\|\|] \| \leq 2 \|F_e\| \sqrt{n} \leq 2\lambda_{F_e}^{\max} \sqrt{n} \quad (2.60)$$

donde $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$, es un vector con elementos unitarios, $\lambda_{F_e}^{\max}$ es el valor propio máximo de la matriz de coeficientes de fricción estática $F_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$, n es el número de gdl del robot. ■

Capítulo 3

Mecánica analítica

La mecánica analítica es la rama de la física que permite modelar el comportamiento dinámico de un sistema robótico. En esta etapa se retoma el enfoque realizado por Leonhard Euler para deducir la formulación del comportamiento dinámico, así como sus principales propiedades matemáticas que facilitan el desarrollo de esquemas de regresión paramétrica y el diseño de algoritmos de control. La síntesis de la estructura dinámica de un robot manipulador de n grados de libertad (gdl) se realiza a través de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, las cuales permiten deducir el modelo dinámico del robot [3, 4].

En este capítulo se presenta el desarrollo del modelo dinámico para el robot péndulo y el de 2 gdl a través de la mecánica analítica, utilizando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange. Durante este desarrollo se desprendieron nuevas propiedades sobre la matriz de inercia, fuerzas centrípetas y de Coriolis, expresándolas en función de matrices antisimétricas. Con estos resultados se establecieron diversos esquemas de regresión aplicados directamente a la estimación paramétrica de robots manipuladores. Finalmente se comprueban el desempeño de los esquemas de regresión paramétrica para el robot péndulo y el de 2 gdl, haciendo uso de Matlab.

3.1. Péndulo robot

Como un caso particular del robot de 3 gdl antropomórfico, se encuentra el péndulo robot de 1 gdl formado por un servomotor que tiene acoplado mecánicamente una barra metálica de longitud l_1 y está sometido al fenómeno de gravedad. El movimiento del péndulo se encuentra en el plano vertical x_0 - y_0 como se indica en la figura 3.1.

Para realizar el análisis de cinemática de robots manipuladores es necesario establecer los sistemas de coordenadas, iniciando por el sistema de coordenadas fijo $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$. El sistema de coordenadas Σ_0 , se coloca de forma concéntrica al rotor del servomotor por medio del eje z_0 y el punto de origen se encuentra colocado en la parte final del estator, como se indica en la figura 3.1. Por lo que se genera una distancia β_1 hasta la superficie del eslabón. El sistema de coordenadas $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ se encuentra localizado en el extremo final del eslabón.

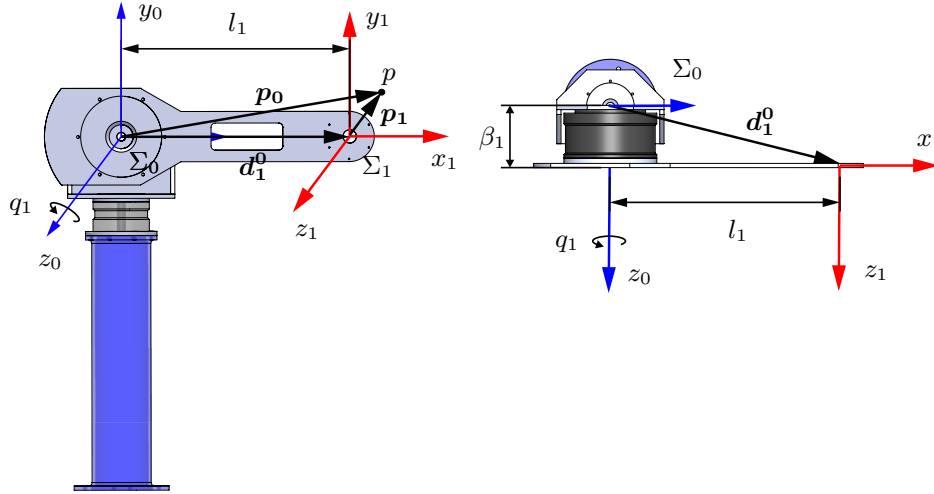


Figura 3.1: Sistema mecánico tipo péndulo simple.

3.1.1. Cinemática directa analítica de Euler

De la ecuación fundamental de la cinemática, tenemos que:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + R_0^1(\phi, \theta, \psi)\mathbf{p}_1 \quad (3.1)$$

En este caso no existe ninguna herramienta asociada al extremo final del péndulo, por lo tanto $\mathbf{p}_1 = [0 \ 0 \ 0]^T$. Entonces, la cinemática directa para el péndulo queda definida como:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 = R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

3.1.2. Cinemática diferencial

La cinemática diferencial se obtiene derivando la ecuación (3.2) y aplicando la propiedad 12 y 13:

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\mathbf{p}_0 = S(\mathbf{k})R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \quad (3.3)$$

3.1.3. Rapidez lineal

La rapidez lineal del centro de masa, se calcula de la siguiente forma:

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T R_{z_0}^T(q_1) S^2(-\mathbf{k}) R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 \quad (3.4)$$

3.1.4. Modelo de energía

El lagrangiano se define como:

$$\mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1) = \mathcal{K}(q_1, \dot{q}_1) - \mathcal{U}(q_1) \quad (3.5)$$

donde $\mathcal{K}(q_1, \dot{q}_1)$ es energía cinética y $\mathcal{U}(q_1)$ es la energía potencial. La energía cinética para el péndulo se define como:

$$\mathcal{K}(q_1, \dot{q}_1) = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 + \frac{1}{2}I_p\dot{q}_1^2 \quad (3.6)$$

Reemplazando (3.4) en (3.6):

$$\mathcal{K}(q_1, \dot{q}_1) = \frac{1}{2} \left[m \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T R_{z_0}^T(q_1) S^2(-\mathbf{k}) R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + I_p \right] \dot{q}_1^2 \quad (3.7)$$

La energía potencial en el caso del péndulo es:

$$\mathcal{U}(q_1) = ml_{c_1}g[1 - \cos(q_1)] \quad (3.8)$$

Reemplazando (3.7) y (3.8) en (3.5) se tiene:

$$\mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1) = \frac{1}{2} \left[m \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T R_{z_0}^T(q_1) S^2(-\mathbf{k}) R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + I_p \right] \dot{q}_1^2 - ml_{c_1}g[1 - \cos(q_1)] \quad (3.9)$$

3.1.5. Aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para el caso particular del robot péndulo, adquieren la forma de una ecuación escalar con la siguiente estructura:

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial q_i} + b_i \dot{q}_i + f_{ci} \text{signo}(\dot{q}_i) + f_{ei} [1 - |\text{signo}(\dot{q}_i)|] \quad (3.10)$$

Tomando en cuenta el lagrangiano del robot péndulo se tienen las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_1} = \left[m \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T R_{z_0}^T(q_1) S^2(-\mathbf{k}) R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + I_p \right] \dot{q}_1 \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_1} \right] = \left[m \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T R_{z_0}^T(q_1) S^2(-\mathbf{k}) R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + I_p \right] \ddot{q}_1 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial q_1} = -ml_{c_1}g \text{sen}(q_1) \quad (3.13)$$

3.1.6. Modelo dinámico del robot péndulo

Reemplazando las ecuaciones (3.12) y (3.13) en la ecuación (3.10), tenemos:

$$\tau = \begin{bmatrix} m \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T R_{z_0}^T(q_1) S^2(-\mathbf{k}) R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c_1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + I_p \\ + f_e [1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|] \end{bmatrix} \ddot{q}_1 + ml_{c_1} g \text{sen}(q_1) + b\dot{q}_1 + f_c \text{signo}(\dot{q}_1) \quad (3.14)$$

3.1.7. Nuevas propiedades del modelo cinemático y diferencial

A partir del análisis desarrollado para obtener el modelo dinámico del robot péndulo, a través de la mecánica analítica de Euler, obtenemos las siguientes propiedades:

Propiedad 29. *La matriz antisimétrica $S(\mathbf{k})$ puede ser expresada en relación de una matriz de rotación $R_z(\pi/2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y un vector $\mathbf{o} = [0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$:*

$$S(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} R_z\left(\frac{\pi}{2}\right) & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix}$$

■

Propiedad 30. *La multiplicación entre una matriz antisimétrica $S(\mathbf{k})$ y una matriz de rotación $R_z(q)$ puede ser expresada de la siguiente forma:*

$$R_z(q)S(\mathbf{k}) = S(\mathbf{k})R_z(q) = \begin{bmatrix} R_z\left(\frac{\pi}{2} + q\right) & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{donde } \mathbf{o} = [0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}.$$

■

Propiedad 31. *Se cumple que $[S(\mathbf{k})R_z(q)]^T S(\mathbf{k})R_z(q) = R_z^T(q)S^2(-\mathbf{k})R_z(q)$, esta relación puede ser expresada en una matriz que contiene, una matriz identidad $I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y a un vector $\mathbf{o} = [0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$:*

$$[S(\mathbf{k})R_z(q)]^T S(\mathbf{k})R_z(q) = R_z^T(q)S^2(-\mathbf{k})R_z(q) = \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix}$$

■

Propiedad 32. *A partir de la ecuación (3.3) donde se obtiene la cinemática diferencial, se puede obtener el siguiente regresor:*

$$e = v - S(\mathbf{k})R_{z_0}(q_1)\dot{q}_1 \begin{bmatrix} \hat{l}_{c_1} \\ 0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix}$$

donde $\Psi(q_1, \dot{q}_1)^T = S(\mathbf{k})R_{z_0}(q_1)\dot{q}_1$ y $\theta = [\hat{l}_{c_1} \ 0 \ \hat{\beta}_1]^T$.

■

3.1.8. Esquema de regresión paramétrica del Péndulo robot

El modelo dinámico del péndulo de la ecuación (3.14), con las nuevas propiedades esta dado por:

$$\tau = \begin{bmatrix} m \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + I_p \end{bmatrix} \ddot{q}_1 + b\dot{q}_1 + f_e \text{signo}(\dot{q}_1) + ml_{c1}g \text{sen}(q_1) + f_e [1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|] \quad (3.15)$$

El esquema de regresión del modelo dinámico es:

$$e = \tau - \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \dot{q}_1 & \text{signo}(\dot{q}_1) & \text{sen}(q_1) & [1 - |\text{signo}(\dot{q}_1)|] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{m} \begin{bmatrix} \hat{l}_{c1} \\ 0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{l}_{c1} \\ 0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} + \hat{I}_p \\ \hat{b} \\ \hat{f}_e \\ \hat{m} \hat{l}_{c1} \hat{g} \\ \hat{f}_e \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

3.2. Robot de 2 grados de libertad

Considérese un robot de 2 gdl con articulaciones rotacionales que se mueven en el plano vertical x_0 - y_0 como se muestra en la figura 3.2. El sistema de referencia $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$, se coloca en la base del robot de tal forma que el eje z_0 sea perpendicular al plano de la hoja. Los ejes x_0 y y_0 son seleccionados por la regla de la mano derecha. El eje z_1 se coloca sobre el eje de rotación del hombro, paralelo al eje z_0 , el sistema de referencia $\Sigma_2(x_2, y_2, z_2)$ se coloca en el extremo final del robot, de tal forma que el eje z_2 sea paralelo al eje z_1 . Los orígenes de los sistemas $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$ y $\Sigma_2(x_2, y_2, z_2)$ son colocados sobre las articulaciones del hombro y codo, respectivamente [3,4].

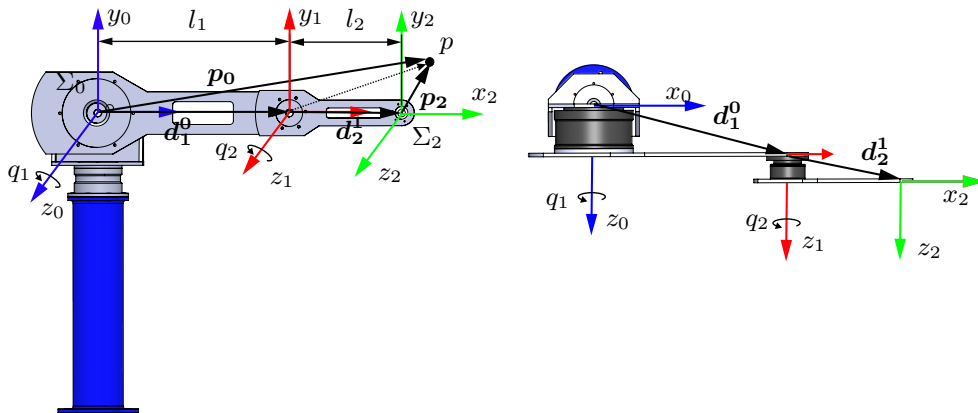


Figura 3.2: Sistema mecánico tipo péndulo simple.

3.2.1. Cinemática directa analítica de Euler

Partiendo de la ecuación fundamental de la cinemática se cumple:

- Primer eslabón:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + R_0^1(\phi, \theta, \psi)\mathbf{p}_1 \quad (3.17)$$

Se sabe que, $\mathbf{d}_0^1 = R_{z_0}[l_1 \ 0 \ \beta_1]^T \in \mathbb{R}^3$. Se tiene una rotación de $\phi = q_1$ respecto a z_0 , no hay rotaciones respecto al eje x_0 ni al eje y_0 por lo que $\theta = \psi = 0$. Por lo tanto, de (3.17) se tiene:

$$\mathbf{p}_0 = R_{z_0}(q_1) \left[\begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \mathbf{p}_1 \right] \quad (3.18)$$

- Segundo eslabón:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{d}_1^2 + R_0^1(\phi, \theta, \psi)\mathbf{p}_2 \quad (3.19)$$

Dado que no existe ninguna herramienta asociada al extremo final del robot, entonces $\mathbf{p}_2 = [0 \ 0 \ 0]^T$; por lo tanto:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{d}_1^2 = R_{z_0}(q_1) \left[\begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] \quad (3.20)$$

3.2.2. Cinemática diferencial

Para obtener los vectores de la velocidad articular \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 se procede a calcular la cinemática diferencial. La velocidad \mathbf{v}_1 se obtiene de derivar $\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + R_0^1(\phi, \theta, \psi)\mathbf{p}_1$ cuando $\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$. Es decir, cuando $\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1$:

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{d}}_0^1 = S(\mathbf{k}_0)R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \quad (3.21)$$

La velocidad \mathbf{v}_2 se obtiene derivando \mathbf{p}_0 de la ecuación (3.19):

$$\mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{p}}_0 = \left[S(\mathbf{k}_0)R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + S(\mathbf{k}_0)R_{z_0}(q_1 + q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] \dot{q}_1 + S(\mathbf{k}_1)R_{z_0}(q_1 + q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \quad (3.22)$$

3.2.3. Rapidez lineal

La rapidez $\|\mathbf{v}_1\|^2$ se obtiene:

$$\|\mathbf{v}_1\|^2 = \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 \quad (3.23)$$

La rapidez $\|\mathbf{v}_2\|^2$ se obtiene:

$$\|\mathbf{v}_2\|^2 = \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + R_{z_0}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + R_{z_0}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \\ \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + R_{z_0}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 + R_{z_0}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

3.2.4. Modelo de energía

La energía cinética para el robot de 2 grados de libertad se define como:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \frac{1}{2} \left[I_1 + I_2 + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + m_1 \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ & + \left[m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ + I_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & + \frac{1}{2} \left[m_2 \begin{bmatrix} R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right]^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ + I_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2^2 \quad (3.25) \end{aligned}$$

La energía potencial en el caso del péndulo es:

$$\mathcal{U}(q) = ml_{c1}g[1 - \cos(q_1)] + gm_2 [[l_1 + l_{c2}] - [l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)]] \quad (3.26)$$

3.2.5. Aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} = & \left[I_1 + I_2 + m_1 \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] \dot{q}_1 + \left[m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + I_2 \right] \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_1} \right] = & \left[I_1 + I_2 + m_1 \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] \ddot{q}_1 + 2m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} S(\mathbf{k}) R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\ & m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} S(\mathbf{k}) R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2^2 + \left[m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + I_2 \right] \ddot{q}_2 \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_1} = -gm_1 l_{c1} \sin(q_1) - m_2 g [l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2)] \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} = \left[I_2 + m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] \dot{q}_2 + \left[m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + I_2 \right] \dot{q}_1 \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{q}_2} \right] = & \left[I_2 + m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] \ddot{q}_2 + \left[m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + I_2 \right] \ddot{q}_1 \\ & + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} S(\mathbf{k}) R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_2} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \quad (3.32)$$

3.2.6. Modelo dinámico del robot de 2 grados de libertad

Reemplazando las ecuaciones (3.28), (3.29), (3.31) y (3.32) en la ecuación (3.10), tenemos:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} I_1 + I_2 + m_1 \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} & m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + I_2 \\ + 2m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} & + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + I_2 & I_2 + m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} 2m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} S(\mathbf{k})R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2 & m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} S(\mathbf{k})R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \\ -m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} S(\mathbf{k})R_z(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} m_1 g \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} S(\mathbf{k})R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + m_2 g \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} S(\mathbf{k})R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ m_2 g \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} R_{z_0}(q_1)R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + B\dot{\mathbf{q}} + F_c \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \quad (3.33)
\end{aligned}$$

3.2.7. Nuevas propiedades del modelo dinámico del Robot de 2 grados de libertad

Propiedad 33. *A partir de la energía cinética para el robot de 2 grados de libertad de la ecuación (2.25), puede expresarse como una estructura cuadrática :*

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \begin{bmatrix} I_1 + I_2 + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + m_1 \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \\
m_{12} &= \begin{bmatrix} m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + I_2 \\
m_{21} &= \begin{bmatrix} m_2 \begin{bmatrix} R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + I_2
\end{aligned}$$

■

Propiedad 34. *A partir de las ecuaciones (2.25) y (2.26), se puede obtener el modelo de de la energía para el robot de 2 grados de libertad*

$$\int_0^t \boldsymbol{\tau}^T(\sigma) \dot{\mathbf{q}}(\sigma) d\sigma = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{U}(\mathbf{q}) + \int_0^t B \dot{\mathbf{q}}^2(\sigma) d\sigma + \int_0^t F_c \text{signo}(\dot{\mathbf{q}}) d\sigma$$

De este modelo se obtiene el siguiente regresor:

$$e = \tau - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 & \frac{\cos(q_2)}{2} \dot{q}_1^2 & \dot{q}_2 \left(\frac{\dot{q}_2}{2} + \dot{q}_1 \right) & \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 & 1 - \cos(q_1) & 1 - \cos(q_1 + q_2) & \int_0^t \dot{q}_1 & \int_0^t \dot{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{bmatrix}$$

donde :

$$\alpha_1 = I_1 + I_2 + m_1 \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_2 = 2m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_3 = m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + I_2$$

$$\alpha_4 = m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_5 = m_1 g l_{c1} + m_2 g l_1$$

$$\alpha_6 = m_2 g l_{c2}$$

$$\alpha_7 = b_1$$

$$\alpha_8 = b_2$$

■

3.3. Robot de 3 grados de libertad

Los robots manipuladores que tienen la configuración antropomórfica tienen una mayor destreza en su espacio de trabajo, ya que sus eslabones están unidos por tres articulaciones rotacionales. Por similitud con el brazo humano, la segunda articulación se conoce como **hombro** y la tercera articulación se conoce como **codo**. El sistema de referencia cartesiano fijo $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$ se encuentra sobre la base del robot, donde el eje z_0 coincide con el eje de rotación de la articulación de la base z_1 . El eje z_0 es ortogonal a los ejes de rotación z_2 y z_3 del hombro y codo, respectivamente. Estos sistemas de referencia se muestran en la figura 3.3.

En la figura 3.3 se muestra un robot manipulador de 3 gdl, donde se estableció que el sistema de coordenadas fijo es $\Sigma_0(x_0, y_0, z_0)$, el cual se encuentra en la base del robot. Los siguientes sistemas de referencia $\Sigma_1(x_1, y_1, z_1)$, $\Sigma_2(x_2, y_2, z_2)$, $\Sigma_3(x_3, y_3, z_3)$ están seleccionados de tal forma que sus ejes z_1 , z_2 y z_3 coincidan con sus respectivos ejes de rotación de cada articulación. De esta manera el eje z_1 , z_2 y z_3 son paralelos entre sí.

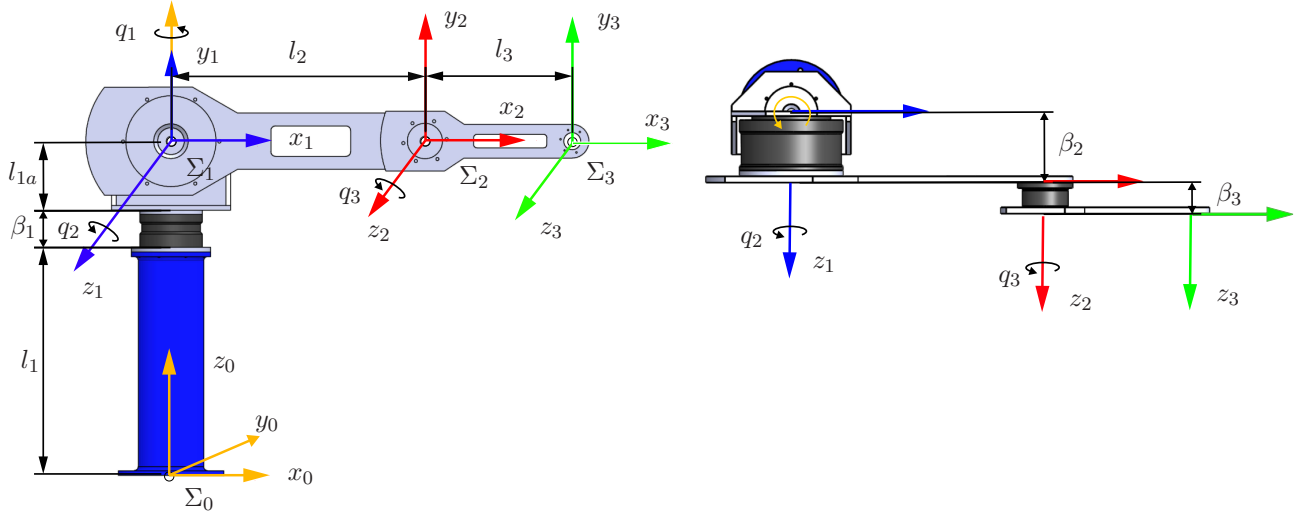


Figura 3.3: Robot de 3 gdl.

3.3.1. Cinemática directa analítica de Euler

De la ecuación fundamental de la cinemática, tenemos que:

- Primer eslabón:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d}_0^1 + R_0^1(\phi, \theta, \psi)\mathbf{p}_1 \quad (3.34)$$

Se sabe que, $\mathbf{d}_0^1 = R_{z_0}(q_1)[0 \ 0 \ l_1 + \beta_1 + l_{1a}]^T \in \mathbb{R}^3$. Hay una rotación de $\phi = q_1$ respecto a z_0 , una rotación de $\theta = \frac{\pi}{2}$ respecto al eje x_0 y no hay rotación respecto al eje y_0 por lo que $\psi = 0$. Por lo tanto, se tiene:

$$\mathbf{p}_0 = R_{z_0}(q_1) \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + \beta_1 + l_{1a} \end{bmatrix} + R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{p}_1 \right] \quad (3.35)$$

- Segundo eslabón:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{d}_1^2 + R_1^2(\phi, \theta, \psi)\mathbf{p}_2 \quad (3.36)$$

Se sabe que, $\mathbf{d}_1^2 = R_{z_1}(q_2)[l_2 \ 0 \ \beta_2]^T \in \mathbb{R}^3$. Hay una rotación de $\phi = q_2$ respecto a z_1 , no hay rotaciones respecto al eje x_1 ni al eje y_1 por lo que $\theta = \psi = 0$. Por lo tanto, de (3.36) se tiene:

$$\mathbf{p}_1 = R_{z_1}(q_2) \left[\begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \mathbf{p}_2 \right] \quad (3.37)$$

- Tercer eslabón:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{d}_2^3 + R_{z_2}^3(\phi, \theta, \psi)\mathbf{p}_3 \quad (3.38)$$

Dado que no existe ninguna herramienta asociada al extremo final del robot, entonces $\mathbf{p}_3 = [0 \ 0 \ 0]^T$; por lo tanto:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{d}_2^3 = R_{z_2}(q_3) \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

A partir de la ecuación fundamental de la cinemática se estableció \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 . Ahora se debe establecer la relación que existe entre los sistemas de coordenada Σ_1 , Σ_2 y Σ_3 con respecto al sistema de coordenadas fijo Σ_0 . En la figura se muestra la representación grafica de estas relaciones, las cuales se representaran por \mathbf{p}_{01} , \mathbf{p}_{02} y \mathbf{p}_{03} .

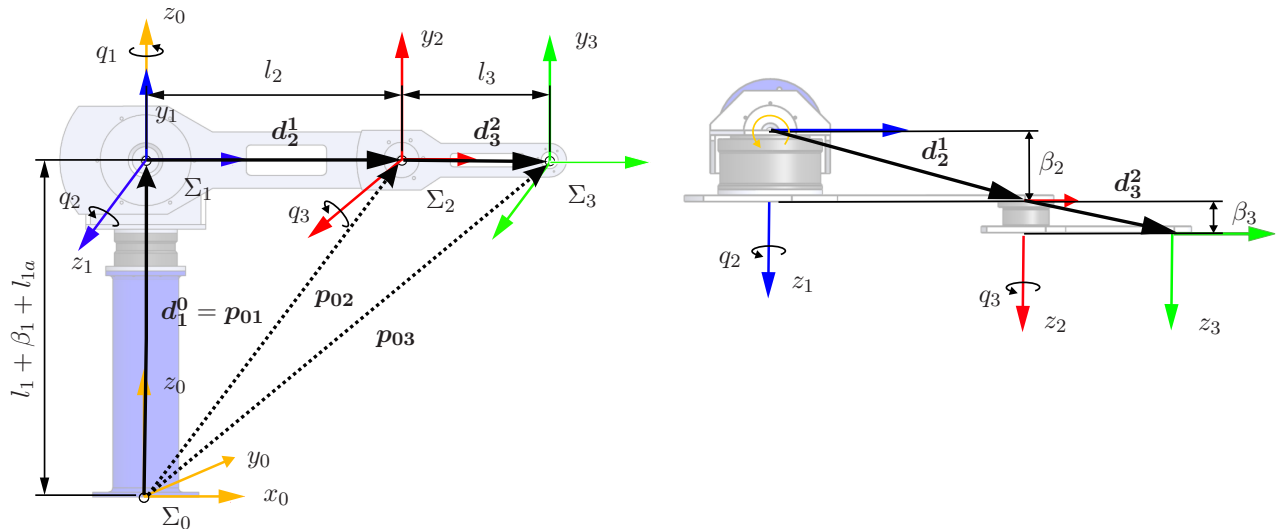


Figura 3.4: Robot de 3 gdl de libertad - Relación entre los sistemas de coordenadas móviles con respecto al sistema de coordenadas fijo. .

- De la relación entre $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$ tenemos \mathbf{p}_{01} cuando $\mathbf{p}_1 = [0 \ 0 \ 0]^T$, tal que:

$$\mathbf{p}_{01} = \mathbf{d}_0^1 = R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + \beta_1 + l_{1a} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

- De la relación entre $\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_0$ tenemos \mathbf{p}_{02} cuando $\mathbf{p}_2 = [0 \ 0 \ 0]^T$, tal que:

$$\mathbf{p}_{02} = R_{z_0}(q_1) \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + \beta_1 + l_{1a} \end{bmatrix} + R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] \quad (3.41)$$

- De la relación entre $\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_0$ tenemos \mathbf{p}_{03} cuando $\mathbf{p}_3 = [0 \ 0 \ 0]^T$, tal que:

$$\mathbf{p}_{03} = R_{z_0}(q_1) \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + \beta_1 + l_{1a} \end{bmatrix} + R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)R_{z_1}(q_2) \left[\begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + R_{z_2}(q_3) \left[\begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \right] \right] \right] \quad (3.42)$$

3.3.2. Cinemática diferencial

La velocidad \mathbf{v}_1 se obtiene de derivar la ecuación (3.40):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{p}}_{01} &= S(\mathbf{k}_0)R_{z_0}(q_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + \beta_1 + l_{1a} \end{bmatrix} \dot{q}_1 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

La velocidad \mathbf{v}_2 se obtiene derivando \mathbf{p}_{02} de la ecuación (3.41):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{p}}_{02} &= S(\dot{q}_1 \mathbf{k}_0)R_{z_0}(q_1) \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + \beta_1 + l_{1a} \end{bmatrix} + R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] + R_{z_0}(q_1)R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)S(\dot{q}_2 \mathbf{k})R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ &= \left[S(\dot{q}_1 \mathbf{k}_0 + R_{z_0}(q_1)R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)\dot{q}_2 \mathbf{k}_1) \right] R_{z_0}(q_1)R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c_2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.44)$$

La velocidad \mathbf{v}_3 se obtiene derivando \mathbf{p}_{03} de la ecuación (3.42):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 = \dot{\mathbf{p}}_{03} &= S(\dot{q}_1 \mathbf{k})R_{z_0}(q_1) \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 + \beta_1 + l_{1a} \end{bmatrix} + R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)R_{z_1}(q_2) \left[\begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + R_{z_2}(q_3) \begin{bmatrix} l_{c_3} \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \right] \right] \\ &\quad + R_{z_0}(q_1) \left[R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)S(\dot{q}_2 \mathbf{k}_1)R_{z_1}(q_2) \left[\begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + R_{z_2}(q_3) \begin{bmatrix} l_{c_3} \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \right] \right] \\ &\quad + R_{z_0}(q_1) \left[R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)R_{z_1}(q_2)S(\dot{q}_3 \mathbf{k}_2)R_{z_2}(q_3) \begin{bmatrix} l_{c_3} \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \right] \\ &= S\left(\dot{q}_1 \mathbf{k}_0 + R_{z_0}(q_1)R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)\dot{q}_2 \mathbf{k}_1\right)R_{z_0}(q_1)R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ &\quad + S\left(\dot{q}_1 \mathbf{k}_0 + R_{z_0}(q_1)R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)\mathbf{k}_1\right)R_{z_0}(q_1)R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)R_{z_1}(q_2)(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \begin{bmatrix} l_{c_3} \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.3.3. Rapidez cartesiana

La rapidez $\|\dot{\mathbf{p}}_{01}\|^2$ se obtiene:

$$\|\dot{\mathbf{p}}_{01}\|^2 = \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 = 0 \quad (3.46)$$

La rapidez $\|\dot{\mathbf{p}}_{02}\|^2$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{p}}_{02}\|^2 &= \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 \\ &= \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T R_{z_1}(q_2)^T R_{x_0}(\frac{\pi}{2})^T R_{z_0}(q_1)^T \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_0^T R_{z_0}(q_1) R_{x_0}(\frac{\pi}{2}) R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ &\quad - \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T R_{z_1}(q_2)^T \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1^T R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2^2 + 2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T R_{z_1}(q_2)^T \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_0^T R_{z_0}(q_1) R_{x_0}(\frac{\pi}{2}) R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (3.47)$$

La rapidez $\|\dot{\mathbf{p}}_{03}\|^2$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{p}}_{03}\|^2 &= \mathbf{v}_3^T \mathbf{v}_3 \\ &= \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T [I - R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}(\frac{\pi}{2}) R_{z_1}(q_2)] \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T [I - \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T] \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_2^2 \\ &\quad - \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T [R_{z_1}(q_2) R_{x_0}(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1) + \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T] \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ &\quad + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T [R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}^T(q_1) [I - \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T] + I - R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}(\frac{\pi}{2}) R_{z_1}(q_2)] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ &\quad + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T [R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1) R_{z_1}^T(q_2) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}^T(q_1)] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\ &\quad - \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T [R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1) + R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1)] \\ &\quad + \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T) \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T [I - \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_2^2 + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T [R_{z_1}(q_2) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_1 \dot{q}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T [R_{z_1}^T(q_2 + q_3)R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2})R_{z_0}(q_1)^T [I - R_{z_0}(q_1)R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2})R_{z_1}(q_2)]] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_3^2 \\
& + \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T [I - \mathbf{k}_0\mathbf{k}_1^T - R_{z_0}(q_1)R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2})\mathbf{k}_0\mathbf{k}_1^TR_{x_0}^T(\frac{\pi}{2})R_{z_0}(q_1)^T] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\
& + \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T [I - R_{z_0}(q_1)R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2})\mathbf{k}_0\mathbf{k}_1^TR_{x_0}^T(\frac{\pi}{2})R_{z_0}(q_1)^T] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_2^2 \\
& + \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T [R_{z_1}^T(q_2 + q_3)R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2})R_{z_0}(q_1)^T [I - R_{z_0}(q_1)R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2})\mathbf{k}_0\mathbf{k}_1^TR_{x_0}^T(\frac{\pi}{2})R_{z_0}(q_1)^T]] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_2\dot{q}_3 \\
& + \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T [R_{z_1}(q_2 + q_3)^TR_{x_0}^T(\frac{\pi}{2})R_{z_0}(q_1)^T\mathbf{k}_0\mathbf{k}_1^TR_{x_0}^T(\frac{\pi}{2})R_{z_0}(q_1)^T] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_1\dot{q}_3 \\
& \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T [R_{z_1}(q_2 + q_3)^TR_{x_0}^T(\frac{\pi}{2})R_{z_0}(q_1)^T\mathbf{k}_0\mathbf{k}_1^TR_{x_0}^T(\frac{\pi}{2})R_{z_0}(q_1)^T] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \dot{q}_1\dot{q}_2 \tag{3.48}
\end{aligned}$$

3.3.4. Energía cinética

La energía cinética $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ en el caso del robot de 3gdl es:

$$\mathcal{U}(\mathbf{q}) = m_1gl_{c_1} + m_2gl_{c_2}\sin(q_2) + m_3g[l_2\sin(q_2) + l_{c_3}\sin(q_2 + q_3)] \tag{3.49}$$

3.3.5. Energía potencial

Energía Potencial $\mathcal{K}(\mathbf{q})$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \frac{1}{2}m_1\|\dot{\mathbf{p}}_{01}\|^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\|\dot{\mathbf{p}}_{02}\|^2 + \frac{1}{2}I_2[\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 + \frac{1}{2}m_3\|\dot{\mathbf{p}}_{03}\|^2 + \frac{1}{2}I_3[\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3]^2 \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}}_{M(\mathbf{q})} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \tag{3.50}
\end{aligned}$$

3.3.6. Modelo dinámico del robot de 3gdl

El modelo dinámico del robot de 3gdl se puede escribir de manera compacta de la siguiente manera [47]:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau} \quad (3.51)$$

donde $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de posición, velocidad y aceleración en coordenadas articulares, respectivamente.

La matriz de matriz de inercia $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ queda definida por:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

donde:

$$\begin{aligned} m_{11} = & \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}^T(q_1) \left[I - \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T \right] + I - R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T \left[I - \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T - R_{z_0}(q_1) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1) \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \left[I - R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \right] \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T R_{z_1}(q_2)^T R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right)^T R_{z_0}(q_1)^T \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_0^T R_{z_0}(q_1) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} m_{12} = m_{21} = & \frac{1}{2} \left[\begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}(q_2) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1) + \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T \right] \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right. \\ & + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1) + R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1) \right. \\ & \left. \left. + \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T \left[R_{z_1}(q_2 + q_3)^T R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1)^T \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}^T\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_0}(q_1) \right] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \right. \\ & \left. \left. + 2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T R_{z_1}(q_2)^T \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_0^T R_{z_0}(q_1) R_{x_0}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \right] \right. \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$m_{22} = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T [I - \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T] \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T [I - \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T R_{z_1}(q_2)^T \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_1^T R_{z_1}(q_2) \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$+ \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T [I - R_{z_0}(q_1) R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1)^T] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$m_{23} = m_{32} = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T [R_{z_1}^T(q_2) R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1) R_{z_1}^T(q_2) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}^T(q_1)] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T [R_{z_1}^T(q_2 + q_3) R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1)^T [I - R_{z_0}(q_1) R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1)^T]] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$m_{31} = m_{13} = \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T [R_{z_1}(q_2 + q_3)^T R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1)^T \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1)^T] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T [R_{z_1}(q_2) \mathbf{k}_0 \mathbf{k}_1^T] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$m_{33} = \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix}^T [R_{z_1}^T(q_2 + q_3) R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_0}(q_1)^T [I - R_{z_0}(q_1) R_{x_0}^T(\frac{\pi}{2}) R_{z_1}(q_2)]] \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

La matriz de Coriolis y fuerzas centrípetas $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se puede obtener mediante (3.60):

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \right] \quad (3.60)$$

el par gravitacional $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ se define como:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{U}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.61)$$

y el vector de pares de fricción:

$$\mathbf{f}_f = \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_c \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_e [1 - |\text{sgn}(\dot{\mathbf{q}})|] \quad (3.62)$$

Capítulo 4

Plataforma experimental

En este capítulo se describirá el robot manipulador Rotradi, el cual se usa como plataforma experimental. La ventaja que tiene usar este robot de transmisión directa con 3 gdl, es que una arquitectura abierta. Esto implica que se pueden realizar modificaciones en el software (interfaz gráfica) y en el hardware, por el usuario. Para la interfaz gráfica se usa la librería de Python, Tkinter. Esta interfaz cuenta dos bloques: Control y lectura de encoders. Los cuales reciben los datos de la interfaz electrónica, donde se utiliza un sistema empotrado.

Los sistemas empotrados o también conocidos como embebidos, son los que constituyen un sistema que deriva de la combinación de hardware y software. Se les denomina empotrados debido a que regularmente forman parte de un sistema completo o con funcionalidades más generales. En este trabajo de investigación se usa como una tarjeta de adquisición de datos, la cual actúa como la conexión entre la interfaz de usuario con el sistema físico. En este capítulo se describe al sistema empotrado Arduino MKR Vidor 4000. Se muestra las características que tiene la placa describiendo la FPGA y ARM que tienen incorporado. También se muestra un diagrama de flujo, donde se explica como se programa esta placa y otro diagrama donde se muestra como se usa junto a la plataforma experimental.

4.1. Robot manipulador

El término manipulador en el ámbito de la robótica industrial, se refiere a mecanismos creados para llevar a cabo tareas específicas como sostener o mover algún objeto. Esto conlleva a que los robots manipuladores sean multifuncionales. Este robot está inspirado en el brazo humano y son manejados por dispositivos externos. La plataforma experimental donde se probaron los algoritmos de identificación paramétrica, control de posición con compensación de gravedad y fricción, es un robot manipulador de transmisión directa con 3 gdl (base, hombro y codo) que se mueve en un espacio tridimensional. El robot consta de eslabones rígidos fabricados de aluminio 6061, los cuales están unidos mediante articulaciones de tipo rotacional con servomotores de transmisión directa, para esto, es necesario 3 manejadores o servoamplificadores, uno por cada servomotor y estos son los que realizan una función de interfaz del robot con el sistema de control [49]. Este robot se encuentra en el Laboratorio de Control y Robótica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla y tiene por nombre Rotradi.



Figura 4.1: Robot Rotradi.

4.1.1. Servomotores de transmisión directa

Un transductor es un dispositivo que convierte un tipo de energía (es decir, energía de entrada o variable de medición) a otro tipo de energía medible (energía de salida, por lo común energía eléctrica en milivolts). Los servomotores son considerados un tipo particular de transductores. Los Servomotores son sistemas electromecánicos que pertenecen a una clase particular de actuadores eléctricos encargados de transmitir energía para producir el movimiento del robot, y son los que forman las uniones o articulaciones del robot mediante las cuales éste se mueve, motivo por el cual al movimiento del robot se le denomina desplazamiento articular. Cuando a un servomotor se le acondiciona mecánicamente una barra metálica para formar un péndulo o eslabón, al sistema resultante se le denomina servomecanismo. Un servomotor está compuesto principalmente por tres elementos:

- Motor eléctrico de corriente directa.
- Sensor de posición para medir el desplazamiento articular (rotacional o lineal).
- Amplificador electrónico (electronic driver), o servoamplificador.

Las ecuaciones de Maxwell permiten deducir una ley fundamental para servomotores que determina la relación entre el campo electromagnético y el par (torque) aplicado. En general la generación de movimiento rotacional con respecto a su eje de giro es producido por el par aplicado, esta simple ley es la base del desarrollo de la robótica y está planteada en la siguiente ecuación:

$$\tau = kv \tag{4.1}$$

donde τ representa el par aplicado al servomotor y sus unidades de medición son Nm, k es una constante que representa la ganancia del amplificador electrónico y tiene unidades de Nm/v y la variable v es el voltaje que proviene de la computadora que representa el comando o ley de control que programa el usuario para que el robot lleve a cabo una aplicación específica. No todos los motores eléctricos cumplen con la ecuación(4.1).

En la figura 4.2 se muestran los componentes básicos de un servomotor: motor eléctrico, sensor de posición que proporciona información del desplazamiento articular, el cual está fabricado por un

disco codificado y un ensamble de dispositivos emisores de luz y fotodetectores para generar una señal de salida proporcional al movimiento (rotacional o lineal) del motor, y el amplificador electrónico encargado de realizar el funcionamiento correcto del servomotor.

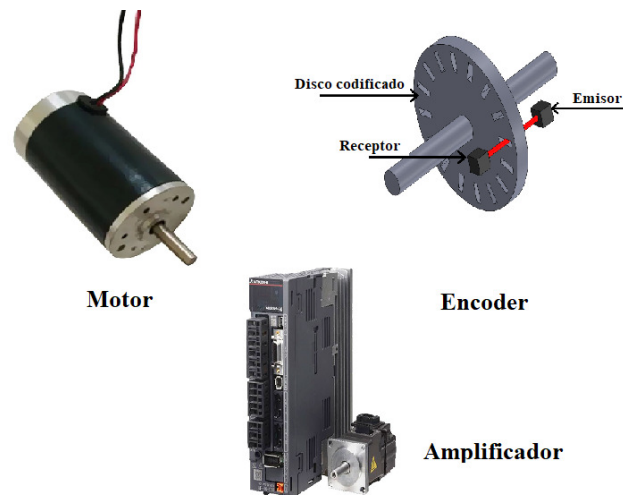


Figura 4.2: Motor eléctrico, sensor de posición y amplificador electrónico.

Los servomotores tienen tres modos de operación: Posición, Velocidad y Par (torque). El modo de operación par, es una configuración ampliamente usada en robots industriales y sus principales características son:

- Arquitectura abierta hace posible evaluar experimentalmente el desempeño y robustez de cualquier estrategia de control. De esta forma, las aplicaciones en robótica se incrementan.
- Permite la interacción dinámica con el sistema mecánico del robot, por lo que es posible compensar los efectos dinámicos del robot y en consecuencia controlar la posición o desplazamiento articular.
- Control de la trayectoria y aplicaciones más complicadas como el control de impedancia, visual-servoing, teleoperación y control de fuerza.

Un tipo especial de servomotores es el denominado de transmisión directa (direct drive) representa la nueva tecnología de la robótica. Algunas ventajas sobre el sistema de engranes:

- El concepto de transmisión directa fue establecido por Haruhiko Asada en 1980; y consiste en que el rotor del motor funciona como una fuente de par.
- El sistema de engranes tradicional está completamente eliminado, por lo que desaparece el cascabeleo o falta de movimiento y reduce significativamente el fenómeno de fricción.
- La construcción mecánica es más simple y la exactitud en el posicionamiento de robots manipuladores es mejorada.

- Se elimina la flecha, no requiere del sistema de engranes para disminuir la velocidad de giro y amplificar el par.
- Las principales características de los servomotores de transmisión directa son las siguientes:
 - Arquitectura abierta para la evaluación experimental de cualquier algoritmo de control.
 - No hay pérdidas en la transmisión de energía.
 - Reducción del fenómeno de fricción y juego mecánico.
 - No es necesario acoplamiento de engranes.
 - No requieren calibración.

4.1.2. Encoder

En robótica los sensores de posición más utilizados son los potenciómetros, tacómetros, resolvers y encoders. La naturaleza analógica de los potenciómetros, así como problemas de temperatura, precisión y no linealidad los hacen poco atractivos e inconvenientes. El tacómetro y el resolver no son viables por su tamaño y peso. El tacómetro proporciona información de la velocidad, y es posible obtener la posición por medios de integración numérica.

El robot cuenta con encoders ópticos incrementales por cada articulación, estos consisten en una fuente de luz que se encuentra frente a un disco giratorio con ranuras y en la parte posterior se encuentran celdas sensibles a la luz, de esta forma se genera un pulso cada vez que la luz pasa por una ranura, la luz es detectada produciendo un tren de pulsos que indican el ángulo que se movió la articulación [43]. Los encoders incrementales de cuadratura tienen como salida cuatro señales A, -A, B y -B las cuales están desfasadas 90 grados, lo cual permite definir el sentido del giro. Los encoders cuentan con Z y -Z, los cuales indican cuando se ha realizado una vuelta completa, sin embargo, las señales -A, -B, Z y -Z no serán tomadas en cuenta. En la figura 4.3 muestran las señales del encoder.

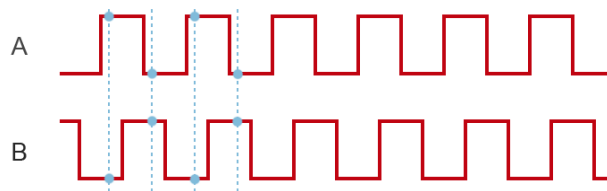


Figura 4.3: Señal A y B de los Encoders.

Uno de los problemas que se presentan en los encoders, es como leer las señales A y B. Esto se debe a que una señal digital no se puede leer de cualquier forma. Cuando se tienen estas señales por sí mismas no se pueden interpretar. Entonces para poder leer estas señales se necesita una referencia, por lo cual se requiere establecer como se van a leer estas señales. Esto se soluciona mediante una

señal de reloj generada por las señales A y B. Esta señal de reloj va marcar la secuencia de lectura. Esta metodología ya viene reportada en [44, 50]. En la figura 4.4 se muestra la generación de la señal de reloj.

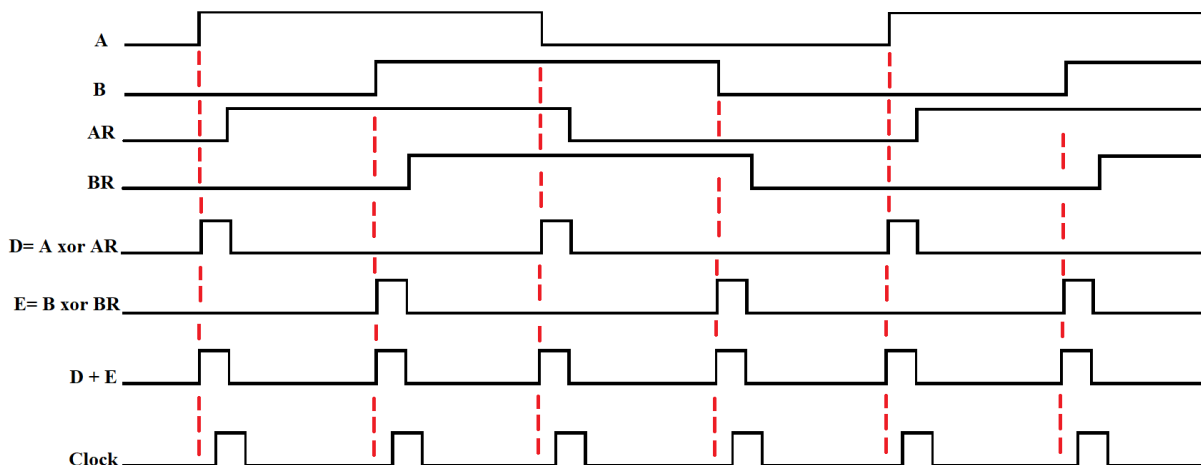


Figura 4.4: Generación de la señal de referencia - ClockAB.

Como se ve en la figura, primero defesamos un δt a las señales A y B, entonces obtenemos AR y BR. Luego a las señales A y AR se les aplica un XOR y a las señales B y BR, de igual forma. Luego a estos resultados se les aplica un OR. Entonces obtenemos una señal de reloj. Para que esta señal sea útil debemos desfasarla un t . Esto se hace para que los picos de la señal clock, no coincidan con el pico de las señales A y B.

4.2. Arduino mkr vidor 4000

Arduino es una plataforma electrónica de código abierto basada en hardware y software fáciles de usar. Las placas Arduino pueden leer entradas y convertirlas en una salida, activando un motor, encendiendo un LED, publicando algo en línea. Para hacerlo, utiliza el lenguaje de programación Arduino (basado en Wiring) y el Software Arduino (IDE) , basado en Processing. El Arduino MKR Vidor 400 trae incorporado un Microchip SAMD21 que está acompañado de un Intel Cyclone 10 FPGA. El significado de FPGA es arreglo de compuertas programables, y es un dispositivo que tiene la característica de que puede ser configurado mediante un lenguaje de descripción de hardware Debido a su versatilidad, velocidad de procesamiento y la propiedad de poder ejecutar diferentes procesos en paralelo han ido ganando importancia en el desarrollo de tecnología [51, 52]. También trae un u-blox NINA-2102, el cual es un módulo inalámbrico basado en ESP32. Las características de la placa, se mencionan a continuación:

- Fuente de alimentación de la placa: (USB/VIN) 5V
- Voltaje de operación en los pines: 3.3V.
- 22 pines compartidos (SAMD21 y Cyclone FPGA).

- Puerto USB B micro.
- Conector micro HDMI.
- Conector de cámara MIPI.
- Miniconector PCI Express con hasta 25 pines programables por el usuario.
- Conector para baterías LiPo de 3.7 V.
- Modulo Wi-Fi y BLE (Bluetooth Low Energy).

En la figura 4.5 se señalan los componentes más resaltantes de la placa. En esta figura se muestra la FPGA, la memoria de la FPGA, el microcontrolador SAMD21, el microHDMI, entre otros.

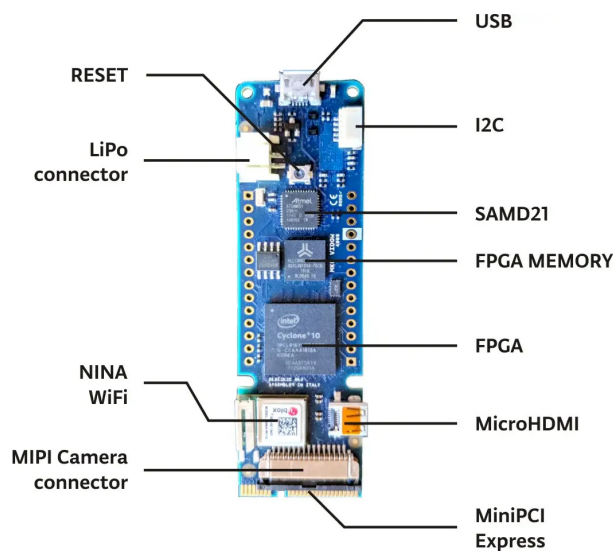


Figura 4.5: Arduino MKR vidor 4000.

En la tabla 4.1, se muestran las características específicas del microcontrolador SAMD21, el cual está basado en el ARM Cortex-M0 + de 32 bits. En la tabla también se señalan la cantidad de pines digitales, DAC, ADC, interrupciones hasta la frecuencia del reloj. Como se muestra en la tabla solo se tiene un DAC, lo cual implica que se deben tener dos DAC externos a la placa ya que se está trabajando con un robot de 3 gdl. Los protocolos de comunicación SPI e I2C, son utilizados tanto para la comunicación entre el ARM y la FPGA, como para enviar datos a los DAC externos. De igual forma se mencionan las características específicas de la FPGA. Este caso se tiene que la FPGA es de Intel y es un Cyclone 10CL016. Un dato importante es la cantidad de multiplicadores, ya que estos se usan para los cálculos de punto flotante. Asimismo, se da el valor mínimo y máximo de la frecuencia.

SAMD21	FPGA
<ul style="list-style-type: none"> - SAMD21 Cortex-M0 + MCU ARM - u-blox NINA-W102 - 8 pines digitales - 1 DAC de 10 bits - 7 ADC 8/10/12 bits - 10 interrupciones - 1 UART / 1 SPI / 1 I2C - 32,768 kHz (RTC), 48 MHz 	<ul style="list-style-type: none"> - Intel Cyclone 10CL016 - 16K E/L - 504Kbit de RAM - 56 multiplicadores - Puerto Mini PCI Express - Conector de cámara: MIPI - 48 MHz - hasta 200 MHz

Tabla 4.1: Características específicas de la placa Arduino MKR vidor 4000.

En la figura 4.6, se muestra la secuencia de programación que se debe seguir para programar la placa MKR Vidor 4000. Primero nos enfocamos en el Firmware, donde el diseño del hardware se hace por medio de un lenguaje de descripción de hardware. Se puede usar AHDL, VHDL, Verilog o alguno otro lenguaje que sea de descripción de hardware. Los ejemplos que proporciona Arduino están en Verilog pero no hay problemas si se combinan diferentes módulos de hardware que hayan sido desarrollados en algún otro lenguaje. Arduino también proporciona un programa donde vienen la declaración de todos los pines que se intercomunican entre la FPGA y el SAMD21. Es recomendable no modificar nada de este programa. Luego nuestro diseño se incluye en ese programa principal y se compila todo el programa. Esto nos genera varios archivos, pero el que nos interesa es el punto .tff que donde se encuentra el bitstream. Este archivo se convierte a .h para que Arduino pueda leerlo. Ya como segunda parte se desarrolla un programa en el IDE de Arduino, donde se incluye el programa creado para la FPGA. Cuando todo esta listo, se sube el programa a la placa. Es importante recalcar que el software para la FPGA es Quartus Prime y se debe usar la versión 18.1 o una mayor.

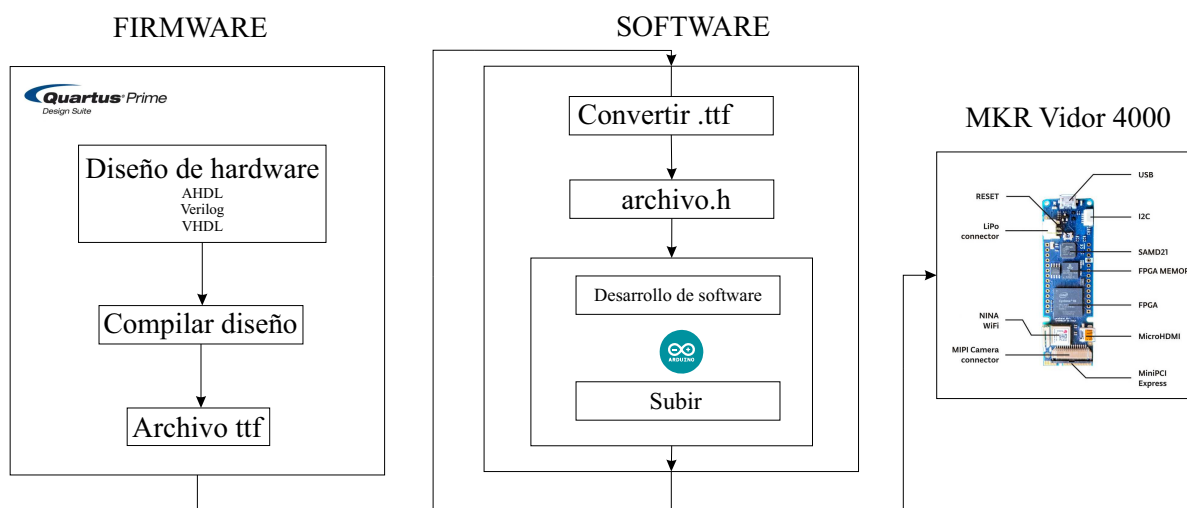


Figura 4.6: Secuencia de programación de la placa Arduino MKR vidor 4000.

En la figura 4.7 se muestra el diagrama esquemático de un motor de corriente directa en aplicaciones

de control. En este sistema, la tarjeta embebida manda la señal de voltaje al servoamplificador o driver por medio de convertidores digitales/analógico (DAC), pasando previamente por amplificador de voltaje antes de entrar al servoamplificador. De esta manera el servoamplificador transforma la energía eléctrica en par aplicado o energía mecánica. Luego los encoder envían la información de la posición angular al Arduino MKR Vidor 4000, en el cual se tiene un decoder. Con esto se llega a tener un lazo de retroalimentación.

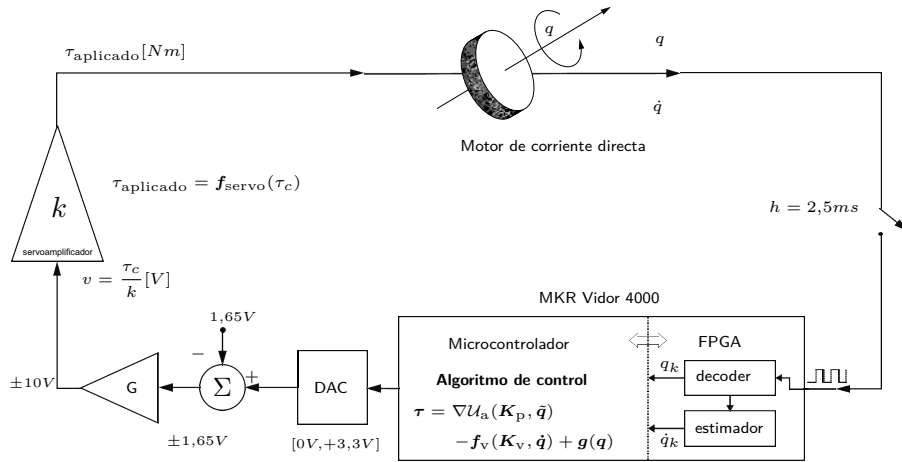


Figura 4.7: Diagrama esquemático de un servomotor de transmisión directa

La tarjeta MKR Vidor 4000 presenta características interesantes para el propósito de la tesis, ya que cuenta con una FPGA y un microcontrolador ARM incorporado. Además, esta tarjeta mantiene la simplicidad que proporciona las tarjetas Arduino cuando se requiere exportar información hacia una computadora y de esta forma visualizar los resultados.

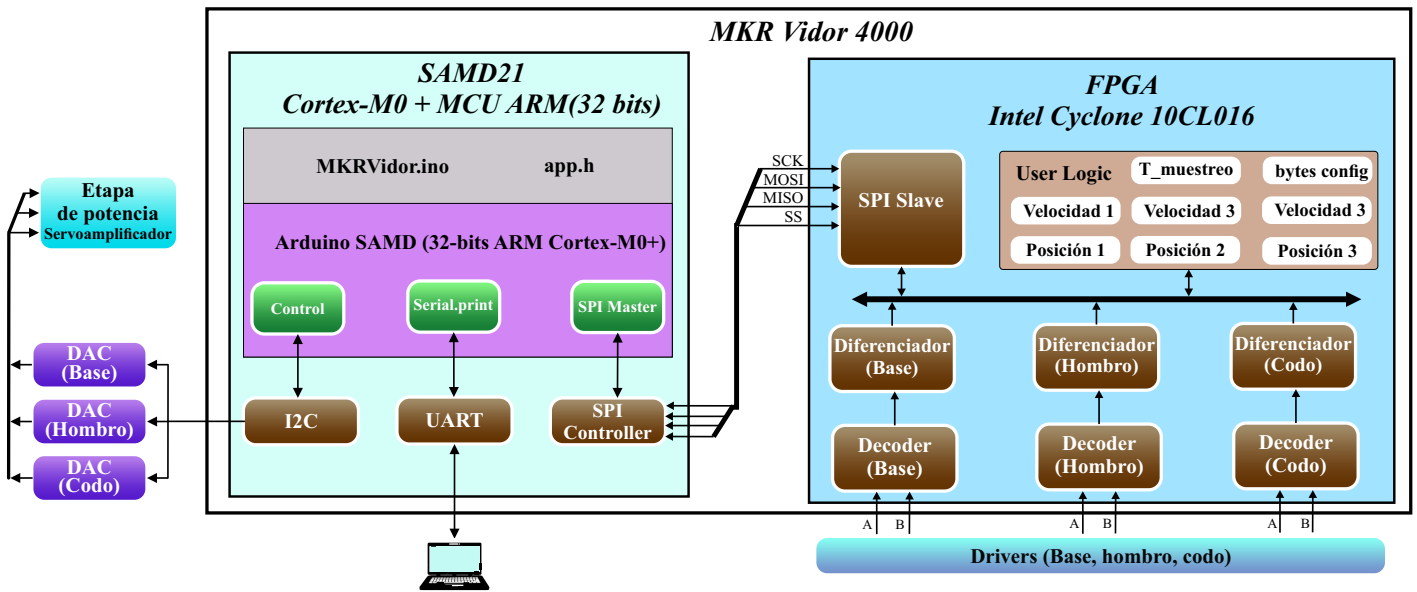


Figura 4.8: Diagrama de bloques de la lógica implementada en la tarjeta MKR Vidor 4000.

Para enviar un bit desde la FPGA hacia el ARM se puede hacer a través de los pines que comparten. Ahora si en el decoder que se diseña en la FPGA el contador se declara como una variable de 32 bits, entonces se requiere 32 pines que comparten entre la FPGA y el ARM. Si a esto le sumamos que no solo se tiene un encoder, si no que se cuentan con tres debido a que se trabaja con un robot de 3 gdl, el cual por cada servomotor cuenta con un encoder, entonces se tiene un problema ya que la placa no cuenta con mas de 96 pines. Para solucionar este problema se decidió usar el protocolo SPI, el cual solo requiere 4 pines (SCK, MOSI, MISO, SS) para establecer la comunicación y enviar datos entre la FPGA y el ARM. En este caso se decidió que el tamaño de los datos siempre seria de 32 bits. Usando VHDL se describió el hardware para el SPI Slave dentro de la FPGA, como se ve en la figura 4.8. En el ARM, como se programa usando el IDE de Arduino, se hizo uso de la librería SPI. En el ARM se establece el SPI Master como se observa en la figura 4.8.

En la figura 4.8 se observa que en la FPGA se describen tres bloques de hardware, donde el bloque decoder es el que recibe las señales del encoder y como salida nos retorna el valor del contador. Este valor se almacena en unos registros del bloque User Logic. La comunicación entre estos dos bloques es direccional, es decir del bloque Decoder solo se envía una señal al bloque User Logic pero de este último no se envían señales al bloque Decoder. En el caso del Bloque SPI Slave, si se comunica de forma bidireccional con el bloque User logic ya que envía un dato pidiendo la información del contador, la cual se encuentra almacenada en un registro. Este dato va hacia el bloque SPI Slave para luego ser enviado hacia el microcontrolador SAMD21. En este microcontrolador se va implementar una función para la señal de control, la cual va pasar por un DAC y luego ira a una etapa de potencia. Esta etapa de potencia se muestra en a figura 4.7.

4.3. Interfaz electrónica

La interfaz electrónica se encarga de la comunicación entre el robot y la interfaz de usuario, y así poder aplicar los algoritmos de control propuestos. La forma en la que el robot se comunica, es a través de sus encoders, de los cuales podemos obtener la posición de cada eslabón. Es importante tener en cuenta las características y restricciones electrónicas de cada elemento involucrado.

4.3.1. Etapa de adquisición de datos

El robot manipulador de 3 gdl brinda tres datos a partir de los encoders. Estos datos se convierten en información correspondiente a la posición de cada eslabón. Esta información viene en una señal de 5v. Esto genera una problemática debido que el Arduino MKR VIDOR 4000 trabaja con entradas y salidas de 3.3v. La solución que se encontró fue usar el módulo TXS0108E, el cual es un adaptador o conversor de 8 canales de niveles lógicos, ya sea de 5v a 3.3v o de 3.3v a 5v [53].

El módulo TXS0108E funciona con señales digitales y no funciona con señales analógicas, no cumple la función de conversor de voltaje como fuente de alimentación. Debe ser alimentado por los dos voltajes a convertir. No es necesario configurar cada canal como entrada o salida. Cuando el pin Output Enable (OE) está conectado a GND, las salidas del conversor serán del tipo Alta Impedancia (Hi-Z, si es otro tipo de comunicación se debe conectar a V_{ccA} y adicionalmente una resistencia pulldown [53]. En este caso, OE se conecta a V_{ccA} (3.3v) con se muestra en la figura 4.9:

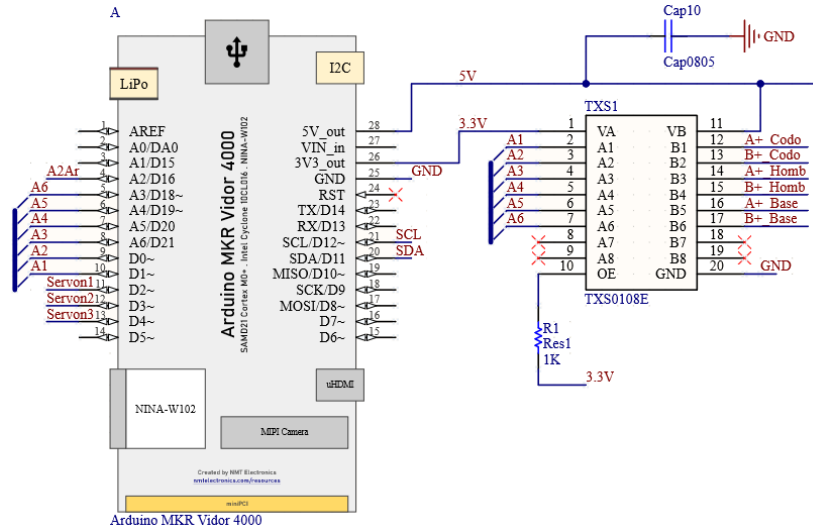


Figura 4.9: Etapa de adquisición de datos

En el módulo TXS0108E los pines B son usados como entradas. A estos pines se conectan las señales A y B, de la base, el hombro y el codo, correspondientemente. Como la señal de entrada es de 5v, V_B se conecta a los 5v del Arduino MKR VIDOR 4000. Los pines de las señales A se conectan al Arduino MKR VIDOR 4000, donde se utilizan los pines desde A3 hasta A6, y también los pines D0 y D1. Estos datos que entran son procesados por un decoder implementado en la FPGA usando como señal de referencia un clock generado por A y B, como se mostró en la figura 4.4.

4.3.2. Etapa de Potencia

La interfaz electrónica cumple con la función de obtener datos del robot, procesarlos y enviarlos a la interfaz de usuario, como se describió anteriormente. La interfaz electrónica también cumple con la función de enviar datos desde la interfaz de usuario al robot. Esto con la finalidad de que el robot cumpla con una tarea específica. Para llevar esto a cabo es necesario convertir las señales digitales del Arduino MKR VIDOR 4000 a señales analógicas. Esto se soluciona con usando un convertor Digital a Analógico (DAC) pero el Arduino MKR VIDOR 4000 solo cuenta con 1 DAC, como se mostró en la 4.1. La solución que se propuso fue usar 3 módulos DAC externos de 12 bits.

Un DAC permite generar una señal analógica a partir de una señal digital, lo opuesto a un ADC. Con este módulo se controla el integrado MCP2725 vía I2C para generar un voltaje analógico desde un sistema digital. Una de las ventajas de este módulo es que es capaz de operar a 3.3V o 5V, el rango del voltaje de salida depende del voltaje de alimentación: Si es alimentado con 5v el voltaje de salida será de 0 a 5v y de la misma forma para 3.3v. El pin de dirección I2C del módulo DAC es accesible para cambiar el bit ADDR/A0 de la dirección del módulo en el bus I2C y así poder usar hasta 2 DACs en un mismo bus I2C [54]. Al solo poder trabajar con 2 DACs se genera un problema, ya que se necesita controlar 3 servomotores.

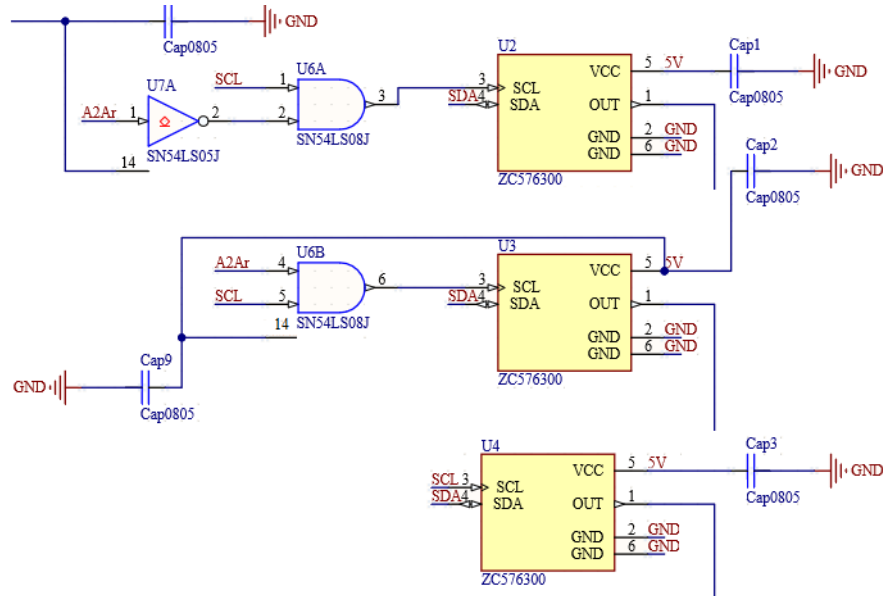


Figura 4.10: Etapa de Potencia - DAC

El Arduino MKR Vidor 4000, solo cuenta con 1 DAC y 1 I2C. Como el módulo MCP2725 solo puede tener dos direcciones, entonces a uno de los módulos se le da una dirección ($0x60$) y los otros dos módulos comparten la misma dirección ($0x61$). Para poder diferenciar la información que se les envía a los módulos que tiene la misma dirección, se utiliza el pin A2 del Arduino MKR Vidor 4000, denominado A2Ar, el cual cumple la función de activación. Para el primer DAC, la señal A2Ar va negada por la compuerta NOT (SN54LS05J) [55] y junto a la señal SCL entran a una compuerta AND (SN54LS08J) [56]. De igual forma se hace para otro módulo, solo que en este caso la señal A2AR va sin ser negada, como se muestra en la figura 4.10. Esto se hace para diferencia la información que se le envía a los DACs.

Como la salida de los DACs se regula al valor de VCC (5v, en este caso), es necesario amplificar este valor para poder mover los servomotores del robot. Para lograr este propósito se utilizan OpAmp, en específico el TL084CN. Este integrado está diseñado para ser usado como amplificador operacional de entrada JET en un encapsulado DIP de 14 pines. Este dispositivo ofrece velocidades de respuesta elevadas, baja polarización de entrada, bajas corrientes de desviación y bajo coeficiente de temperatura de voltaje de desviación. Dentro de este integrado se cuenta con 4 OpAmp [57]. Para el propósito de mover los servomotores, se requieren 2 ophams por cada servomotor. Por lo que al requiere 6 ophams, se decidió usar 2 integrados TL084CN.

La función del primer opham es ser un sumador inversor. Donde las señales de entrada son el V_{DAC} y el V_{OFF} . Estas dos señales de voltaje pasan por una resistencia de $1k\Omega$. La realimentación viene dada desde la salida que pasa por un potenciómetro de precisión (trimpot) que se encuentra conectado en serie con una resistencia de $1k\Omega$, como se muestra en la figura 4.11. Esto se hace para tener mayor precisión al momento de configurar el 0, que está asociada a $2.5v$. Cuando hablamos del cero nos referimos a cuando el robot no se mueve. Los valores mayores a $2.5v$ hacen que el robot se mueva en antihorario y los valores menores, que se mueva en sentido horario.

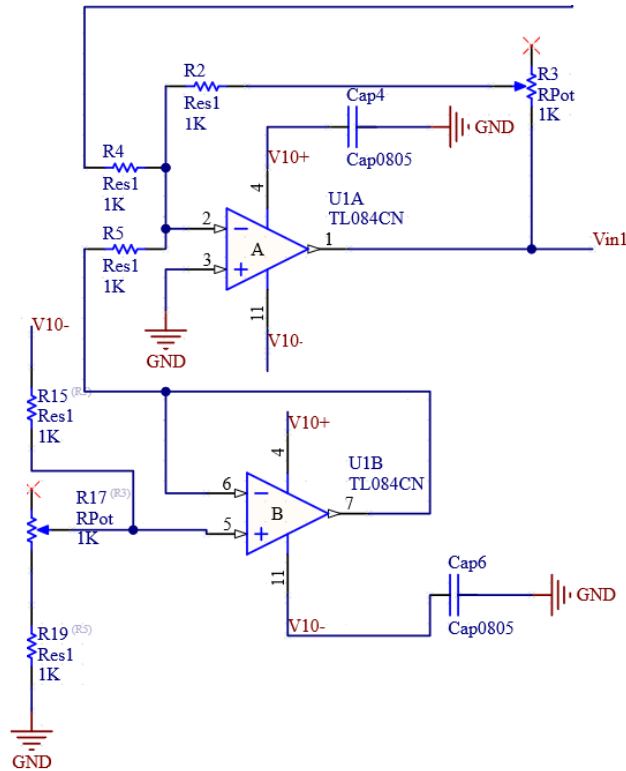


Figura 4.11: Etapa de Potencia - OpAmp.

La ecuación para V_{in} (voltaje de entrada al robot) viene dada por:

$$V_{in} = -(R_{3Pot} + R_2) \left(\frac{V_{DAC}}{R_4} + \frac{V_{OFF}}{R_5} \right) \quad (4.2)$$

donde $R_2, R_4, R_5 = 1k\Omega$ y $R_{3Pot} = 10k\Omega$.

La etapa del V_{OFF} es un OpAmp en configuración seguidor de voltaje. La entrada viene dada por un voltaje negativo, el cual se obtiene de una fuente de voltaje simétrica. Esta entrada tiene la configuración de divisor de voltaje, por lo tanto, el V_{OFF} viene dado por la siguiente ecuación:

$$V_{OFF} = V_{10} \left(\frac{R_{17Pot} + R_{19}}{R_{15} + R_{17Pot} + R_{19}} \right) \quad (4.3)$$

donde $R_{19} = 2.6k\Omega$, $R_{15} = 10k\Omega$ y $R_{17Pot} = 1k\Omega$. Para obtener el valor de la resistencia R_{19} , se usó una resistencia de $5.6k\Omega$ y $4.7k\Omega$ en paralelo.

4.3.3. Conexiones del robot

En la siguiente tabla se especificarán las señales que se usan del servoamplificador. Entre estas Señales están los datos del encordar (A y B), la señal de activación de los servoamplificadores, AGND, entre otros.

Señales	Definición
- A	Señal de encoder A.
- B	Señal de encoder B.
- $5v$	Voltaje de referencia para los encoders.
- AGND	Señal de GND.
- Servon	Activación de los servomotores.
- V_{in}	Voltaje de entrada para los servomotores.

Tabla 4.2: Conexiones del robot.

4.4. Interfaz gráfica

Para propósitos de investigación, la plataforma experimental no solo debe estar compuesta del robot manipulador y de la interfaz electrónica, si no también por un ambiente de programación que brinde al usuario las herramientas necesarias para la implementación de los algoritmos de control. Esta interfaz de usuario, incluye una barra de menú, botones, controles, indicadores, ventana de gráficas, entre otras cosas, que hagan más amigables la interacción del usuario con la plataforma experimental. En diversos trabajos presentados donde se usa un robot manipulador y se implementa una interfaz de usuario, en su mayoría la interfaz de usuario es implementada usando un software comercial, tal como LabVIEW o Matlab [43, 44]. En este trabajo se presenta una propuesta usando el lenguaje de programación Python junto a la librería Tkinter. En esta interfaz de usuario se analizan los datos obtenidos, como la posición, la velocidad y el torque de cada articulación. El tiempo de cada experimento es de 5 segundos.

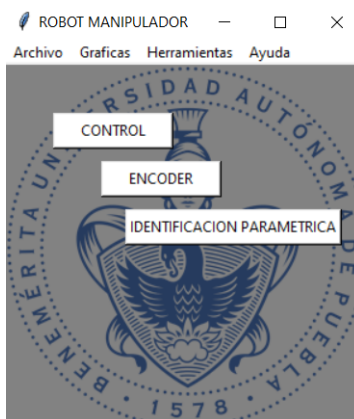


Figura 4.12: Interfaz gráfica - Ventana principal

En la figura 4.12 se muestra la ventana principal de la interfaz de usuario, donde en la barra de herramientas tenemos 4 opciones. La primera es Archivo, donde podremos guardar las imágenes de la posición, velocidad o torque. En Grafica, podemos seleccionar la gráfica que se desea visualizar. En herramientas, tenemos las opciones de configurar el puerto y finalmente en Ayuda se tiene información de los motores y de las conexiones del robot. Tenemos también otras opciones, como son los botones de control y encoder.

4.4.1. Comunicación

La comunicación que se establece entre la interfaz grafica y la interfaz electrónica, es a través del puerto serial. En Python se usa la librería serial. Esta nos permite establecer el puerto de comunicación, los baudios, entre otros elementos necesarios para una buena comunicación. Desde la interfaz electrónica, podemos enviar la información usando `serial.print()` o usando `serial.read()` y `serial.write()`. Para enviar los datos de la posición, velocidad y torque se utiliza la opción de `serial.write()` ya que es más rápida y nos permite enviar valores de punto flotante.

El tiempo de muestreo es de 2.5 ms, entonces para trabajar en tiempo real es necesario que los datos que se envíen de una interfaz a otra, no sean mayores a este tiempo. Por este motivo se decidió que mientras este en operación el robot, solo se envíen los datos de la posición y los del torque se almacenen en la memoria del Arm que tiene la tarjeta MKR VIDOR 4000. La velocidad es estima en la interfaz de usuario, a partir de los datos de la posición.

4.4.2. Lectura de encoders

En la figura 4.13 se muestra la ventana de lectura de encoders, que aparece cuando le damos click al botón de encoder en la ventana principal.

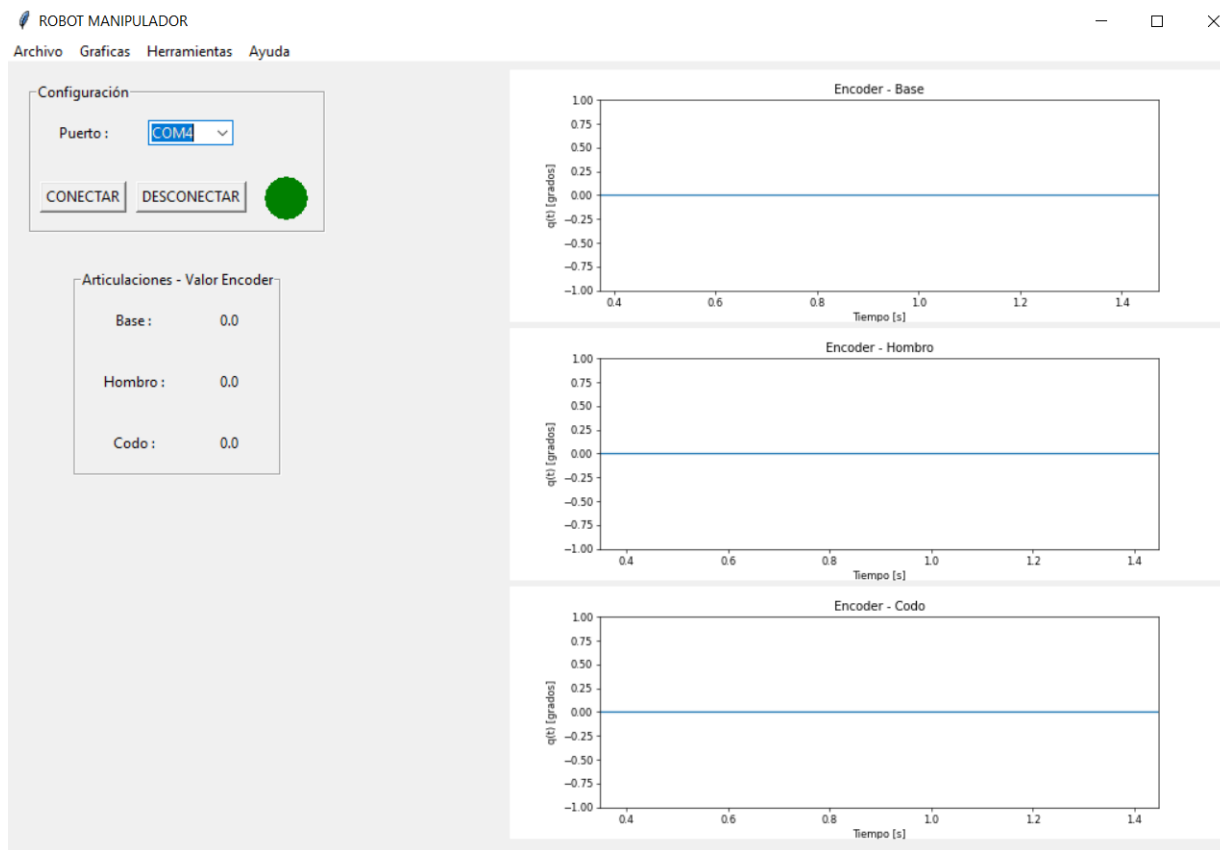


Figura 4.13: Interfaz gráfica - Ventana encoder

La funcionalidad de esta ventana es poder probar que los encoders estén retornando el valor correspondiente a la posición en la que están. Esto se debe hacer antes de ir a la ventana de control. En esta ventana, a través de la comunicación entre las interfaces, se envía un comando para que los motores no estén activados y de esta forma el usuario pueda acercarse al robot y mover los eslabones de forma manual. En esta ventana tenemos 3 partes, siendo la primera la de configuración donde podemos seleccionar el puerto de comunicación. Esta etapa tiene dos botones para conectar y desconectar la comunicación entre las interfaces. Cuando presiona el botón conectar se encenderá un indicador de color verde y cuando se le da desconectar, este indicador se pondrá de color rojo. Finalmente, las otras dos partes nos muestra la posición de las articulaciones de forma grafica y numérica.

4.4.3. Control

En la ventana de control es donde ya se implementa los algoritmos de control y se sintonizan. El algoritmo de control que vaya a probar debe estar implementado directamente en la tarjeta, ya que en esta interfaz nada mas se tiene acceso a las ganancias. Una ventaja de esta interfaz es que solo se debe reprogramar la tarjeta cuando se quiera cambiar el control y no cuando se quiera cambiar algún valor de la sintonización.

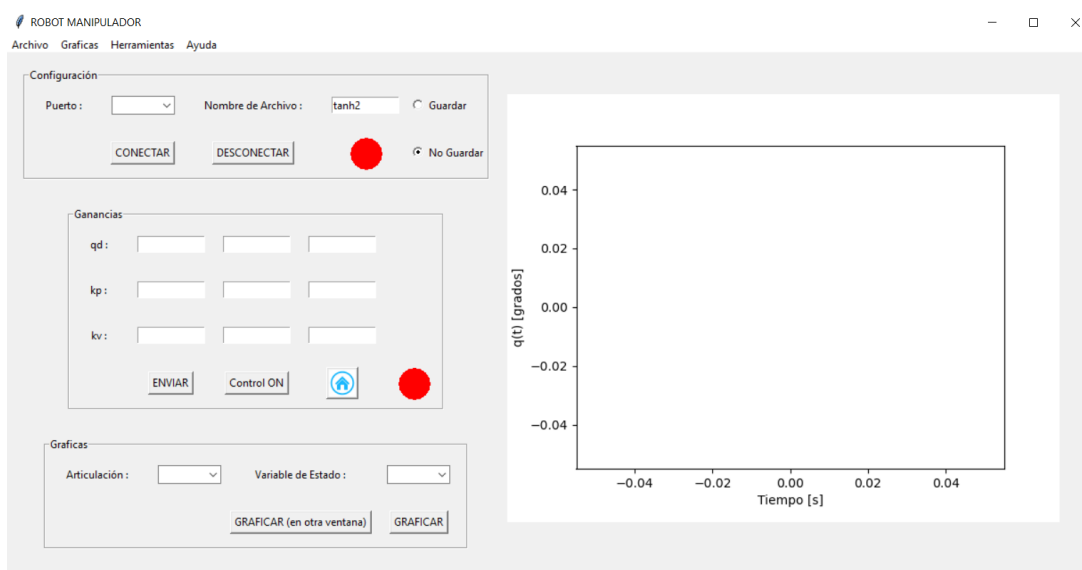


Figura 4.14: Ventana de Control

En la figura 4.14, se muestra la ventana de control donde se tiene 4 partes. La primera es de configuración, donde se selecciona el puerto, se coloca el nombre del archivo que va almacenar los datos obtenidos durante el experimento y tenemos la opción de decidir si se va almacenar o no estos datos. La parte de ganancias, es la que nos permite modificar la posición deseada, la ganancia proporcional y derivativa sin la necesidad de reprogramar la tarjeta. El botón enviar, cumple la función de actualizar los datos en la tarjeta. El botón control on y el botón Home, son los que nos permiten llevar al robot a la posición deseada o retornarlo a casa. Las siguientes etapas cumplen con la función de graficar los datos. Aquí se puede seleccionar la articulación y la variable de estado que se desea visualizar. Si no se seleccionan, por defecto nos mostrará la posición de las 3 articulaciones.

En la figura 4.15, se observa como la interfaz reconoce el puerto y luego de presionar el botón conectar el indicador cambia de color rojo a verde. También se puede observar que ahora en la parte de Ganancias, los bloques ya tienen un valor a diferencia de lo que se mostró en la figura 4.14. Esto se debe a que cuando le damos conectar la tarjeta nos envían unos valores por defecto.

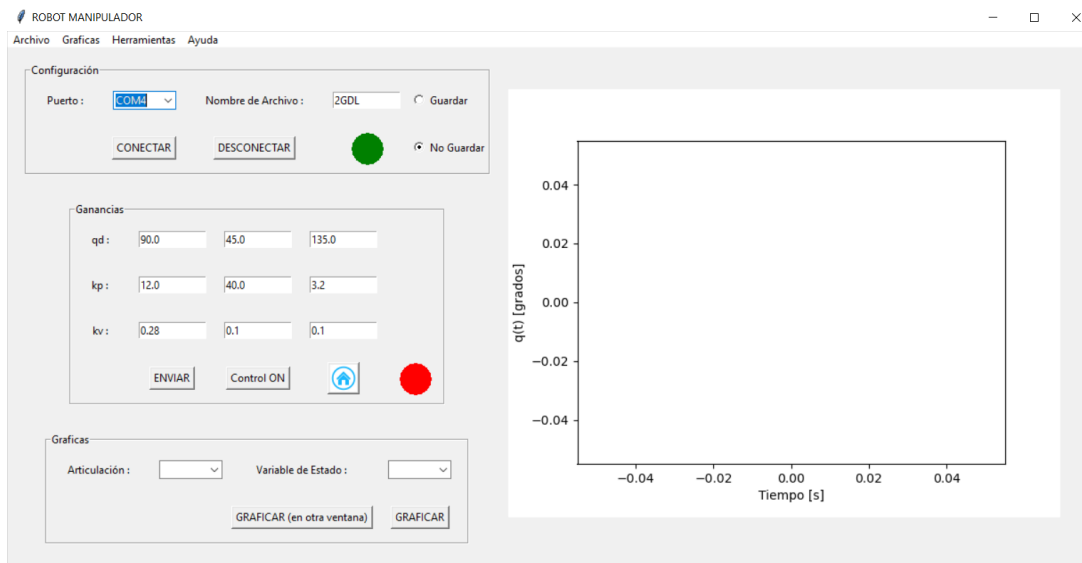


Figura 4.15: Ventana de Control - Parte Configuración.

En la figura 4.16, se observa que el indicador de la parte de Ganancias paso de color rojo a verde. Esto se debió a que cuando el usuario presiona el botón de control on, el robot entra en funcionamiento, entonces el indicador cambia su color para informar al usuario que en estos momentos está controlando al robot.

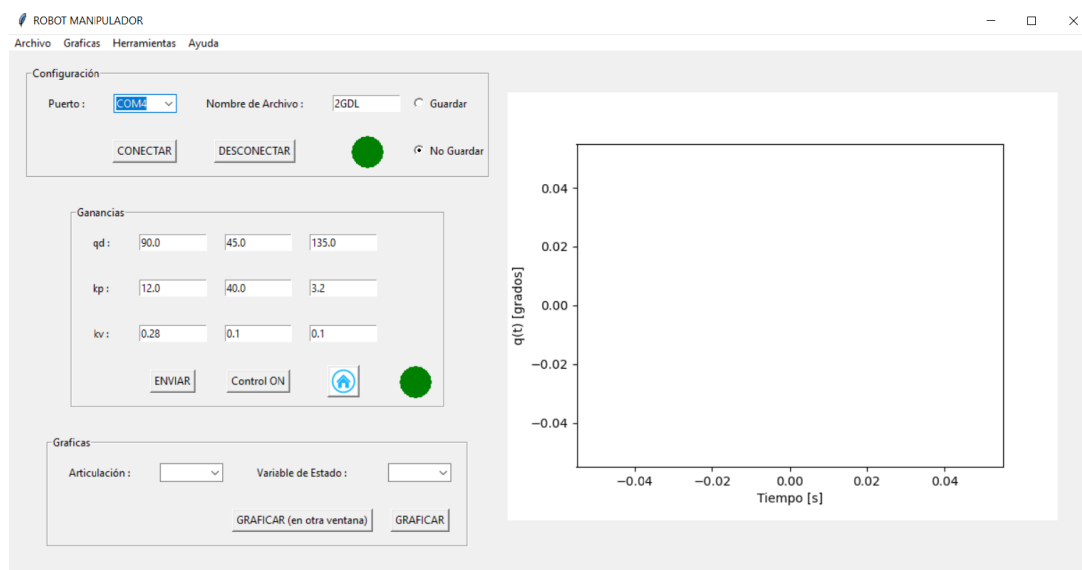


Figura 4.16: Ventana de Control - Ganancias.

Como se observa en la figura 4.17, el indicador paso de verde a rojo. Esto significa que ya pasaron 5s

y que los datos fueron almacenados.

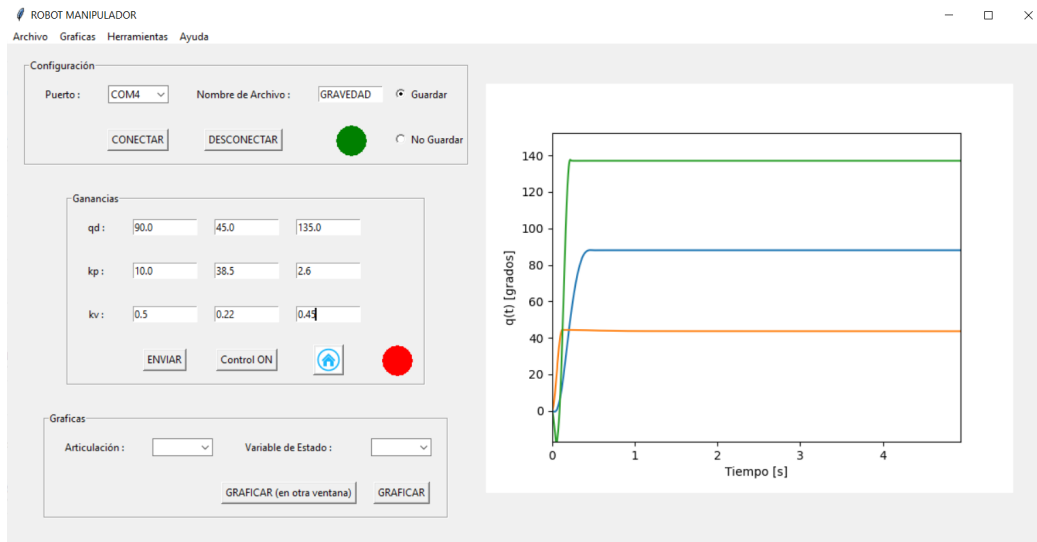


Figura 4.17: Ventana de Control - Ganancias.

Finalmente, si queremos manipular las gráficas que se han obtenido debemos presionar el botón Graficar en otra ventana. Aquí se podrá aplicar un zoom o mover la gráfica. Esto no se puede realizar en la grafica que aparece en la ventana de control.

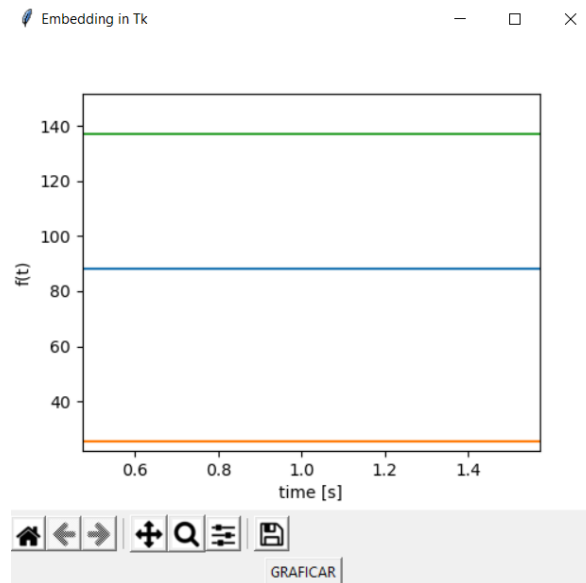


Figura 4.18: Ventana de Control - Ventana de grafica externa.

4.5. Integración

La integración de la interfaz electrónica (etapa adquisición de datos y potencia) junto a la interfaz gráfica y la plataforma experimental, siguen el siguiente proceso general:

1. El usuario selecciona el puerto para conectar la interfaz gráfica con los demás componentes y decide si el experimento va ser almacenado en un archivo .txt . Si decide guardarlo, debe colocar el nombre con el que sea que se almacene.
2. Al estar conectado todos los componentes, el usuario debe configurar la posición deseada de cada articulación y las ganancias proporcionales y de derivativas de cada articulación. Luego de esto debe presionar el botón control on para iniciar con las pruebas experimentales.
3. Luego de la configuración inicial, el procedimiento es que la FPGA de la tarjeta MKR VIDOR 4000 obtengan los datos de los encoders de cada articulación y pasen por el bloque Decoder, para obtener la cuenta ascendente o descendente.
4. A través del protocolo SPI, los datos obtenidos del bloque Decoder son enviados al ARM. En el ARM se estima la velocidad y se calcula el torque. Estos datos son enviados desde el ARM hacia la interfaz gráfica.
5. Durante los próximos 5 segundos, los pasos desde 3 hasta el 5 se repetirán. Luego de 5 segundos, en la interfaz gráfica se podrá visualizar los resultados.
6. Cuando termine la etapa de control, si no se va cambiar en tipo de controlador usado, el proceso regresa al paso 2.

Capítulo 5

Identificación paramétrica

El modelo dinámico de robot manipuladores contiene en su estructura matemática parámetros tales como: centros de gravedad, masas de los eslabones, momentos de inercia y coeficientes de fricción. Estos parámetros generalmente son desconocidos; tal y como es el caso de la mayoría de los robots comerciales donde el fabricante no proporciona sus valores nominales [3, 4, 49]. Si bien existen herramientas de la teoría de control como esquemas adaptables y controladores robustos que permiten tolerar errores en los parámetros dinámicos, el conocimiento de éstos es crucial para la mayoría de los esquemas basados en el modelo dinámico del robot manipulador. En este capítulo se presenta la simulación del modelo de regresión dinámico y de energía del robot manipulador de 2 gdl. Asimismo, también se presenta el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo y la señal de excitación persistente.

5.1. Algoritmo de mínimos cuadrados recursivo

El método de mínimos cuadrados es un esquema estándar que aproxima la solución del sistema sobre la optimización de una función de costo. Por ejemplo, cuando hay más variables incógnitas que ecuaciones, mínimos cuadrados minimiza la suma de cuadrados de los errores. Se define el error de estimación como la diferencia entre un valor observado y el valor proporcionado por el modelo matemático (robot) [4]. El algoritmo de mínimos cuadrados para el regresor dinámico es el caso vectorial. Este caso tiene la siguiente forma:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + P(k-1)\Psi(k) [I + \Psi(k)^T P(k-1)\Psi(k)]^{-1} \mathbf{e}(k) \quad (5.1)$$

$$P(k) = P(k-1) - P(k-1)\Psi(k) [I + \Psi(k)^T P(k-1)\Psi(k)]^{-1} \Psi(k)^T P(k-1) \quad (5.2)$$

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{y}(k) - \Psi(k)^T \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) \quad (5.3)$$

donde $P(k) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ es la matriz de covarianza, la cual es una matriz definida positiva, $\mathbf{e}(k) \in \mathbb{R}^n$ es el error de predicción, $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$ es el vector de parámetros estimados, $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad, $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^n$ es un vector de mediciones (entradas o salidas) del sistema y $\Psi(k) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ es la matriz de regresión compuesta por observaciones de funciones conocidas..

Para el regresor de energía se usa el algoritmo de mínimos cuadrados escalar, el cual tiene la siguiente

forma:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \frac{P(k-1)\Psi(k)\mathbf{e}(k)}{1 + \Psi(k)^T P(k-1)\Psi(k)} \quad (5.4)$$

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P(k-1)\Psi(k)\Psi(k)^T P(k-1)}{1 + \Psi(k)^T P(k-1)\Psi(k)} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{y}(k) - \Psi(k)^T \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) \quad (5.6)$$

El algoritmo de mínimos cuadrados puede identificar los parámetros de cualquier modelo matemático lineal, no lineal, dinámico, estático, continuo o discreto (no depende del periodo de muestreo, inclusive puede ser aperiódico). La estructura matemática del modelo debe cumplir con la condición de linealidad en los parámetros, es decir que pueda ser expresado como un regresor lineal manteniendo la estructura de una matriz de observaciones o mediciones y un vector de parámetros.

5.2. Señal de excitación persistente

El propósito de utilizar señales de excitación persistente es exhibir todos los modos dinámicos del sistema a identificar, tal que se registre información relevante sobre la dinámica del proceso. Una señal de excitación persistente es un tipo de señal de entrada con determinadas características impuestas, para que los parámetros del sistema puedan ser identificados. Para el diseño de la trayectoria de excitación persistente se usa superposición de funciones senoidales de forma que el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos satisfaga ciertas condiciones de excitación persistente, como los siguientes pares aplicados propuestos:

$$\tau_1 = 4.0[1 - e^{-0.8t}] + 12.5 \sin(5.0853\pi t + 0.1) + 9 \sin(2.3555\pi t + 0.15) \quad (5.7)$$

$$\tau_2 = 0.55[1 - e^{-1.8t}] + 1.35 \sin(8.2684\pi t + 0.1) + 0.25 \sin(4.5837\pi t + 0.15) \quad (5.8)$$

La forma que tiene la ecuación (5.7) correspondiente a τ_1 :

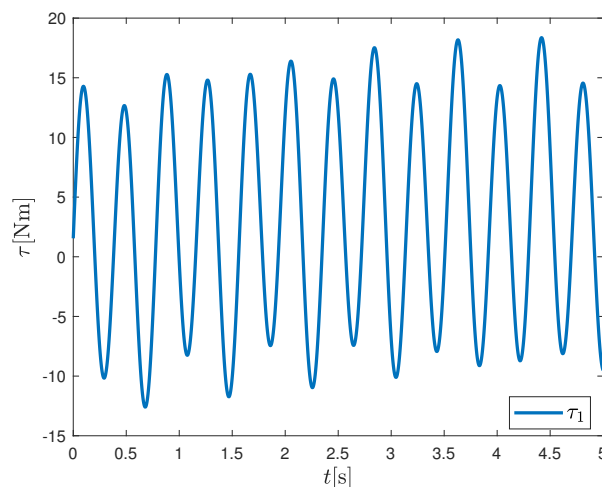


Figura 5.1: Par aplicado al hombro.

La forma que tiene la ecuación (5.8) correspondiente a τ_2 :

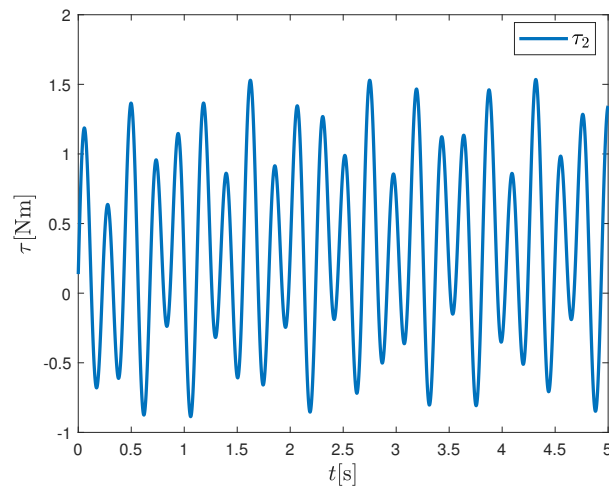


Figura 5.2: Par aplicado al Codo.

5.3. Modelo de regresión dinámico del Robot de 2 gdl

A partir de la ecuación (3.33) se obtiene el modelo de regresión dinámico del Robot de 2 gdl, el cual es:

$$e = \tau - \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \cos(\theta)\ddot{q}_1 & \ddot{q}_2 & \cos(\theta)\ddot{q}_2 & -\text{sen}(\theta)\dot{q}_2\dot{q}_1 & -\text{sen}(\theta)\dot{q}_2^2 & \text{sen}(q_1) & \text{sen}(q_1 + q_2) & \dot{q}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & \cos(\theta)\ddot{q}_1 & 0 & \text{sen}(\theta)\dot{q}_1^2 & 0 & \text{sen}(q_1 + q_2) & 0 & \dot{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_3 \\ \hat{\alpha}_4 \\ \hat{\alpha}_5 \\ \hat{\alpha}_6 \\ \hat{\alpha}_7 \\ \hat{\alpha}_8 \\ \hat{\alpha}_9 \\ \hat{\alpha}_{10} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1 &= I_1 + I_2 + m_1 \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ \hat{\alpha}_2 &= 2m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ \hat{\alpha}_3 &= m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + I_2 \\ \hat{\alpha}_4 &= m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\hat{\alpha}_5 = 2m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$\hat{\alpha}_6 = m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$\hat{\alpha}_7 = m_1 g l_{c1} + m_2 g l_1 \quad (5.12)$$

$$\hat{\alpha}_8 = m_2 g l_{c2} \quad (5.13)$$

$$\hat{\alpha}_9 = b_1 \quad (5.14)$$

$$\hat{\alpha}_{10} = b_2 \quad (5.15)$$

5.4. Modelo de regresión de energía del Robot de 2 gdl

El modelo de regresión de energía que se obtiene a partir del modelo de energía del robot de 2 gdl:

$$e = \tau - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 & \frac{\cos(q_2)}{2} \dot{q}_1^2 & \dot{q}_2 \left(\frac{\dot{q}_2}{2} + \dot{q}_1 \right) & \cos(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 & 1 - \cos(q_1) & 1 - \cos(q_1 + q_2) & \int_0^t \dot{q}_1 & \int_0^t \dot{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\alpha}_3 \\ \hat{\alpha}_4 \\ \hat{\alpha}_5 \\ \hat{\alpha}_6 \\ \hat{\alpha}_7 \\ \hat{\alpha}_8 \end{bmatrix}$$

donde :

$$\hat{\alpha}_1 = I_1 + I_2 + m_1 \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha}_2 = 2m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha}_3 = m_2 \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + I_2$$

$$\hat{\alpha}_4 = m_2 \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{c2} \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha}_5 = m_1 g l_{c1} + m_2 g l_1$$

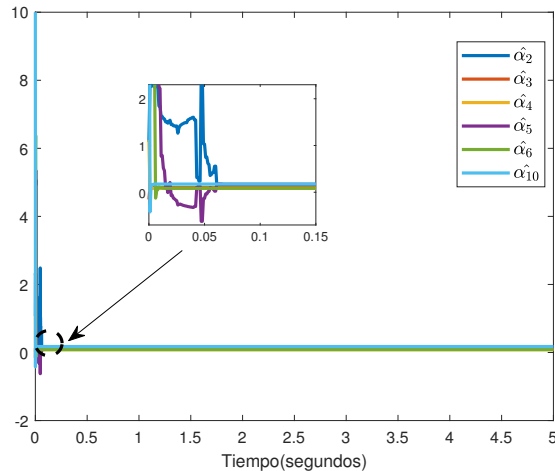
$$\hat{\alpha}_6 = m_2 g l_{c2}$$

$$\hat{\alpha}_7 = b_1$$

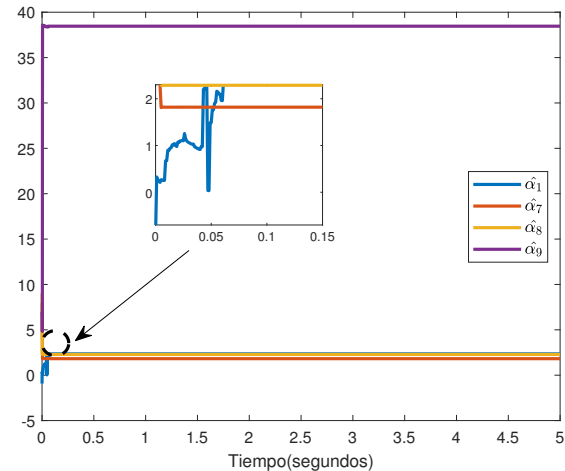
$$\hat{\alpha}_8 = b_2$$

5.5. Simulación

El propósito de esta simulación es verificar cual de los dos algoritmos propuestos es el que tiene mejor desempeño. Por ese motivo solo para la simulación se usarán los datos paramétricos de otro robot, de forma que podamos verificar el desempeño de los algoritmos propuestos con estos datos. Para propósitos de simulación, el tiempo está definido en un intervalo de 0 a 5 segundos, con incrementos de un milisegundo. Debido a que el sistema a identificar es dinámico, se usó la función `ode45()` para llevar a cabo el proceso de integración numérica. En el caso de las integrales que se presentan en el regresor de energía, se usó el método de Euler para realizar la integración numérica. Esta simulación se llevó a cabo en Matlab. En la figura 5.3b y 5.3a se muestra el comportamiento que tiene los parámetros estimados cuando se usa el regresor dinámico y el algoritmo de mínimos cuadrados en el caso vectorial. Se decidió mostrar en diferentes graficas el comportamiento de los parámetros estimados, debido a que se cuentan con parámetros que tienen valores pequeños como 0.084 o valores muy grandes como 38.46. En la figura 5.3b se hace un zoom, el cual se muestra como un cuadro dentro de la figura. Este cuadro nos muestra que los 6 parámetros estimados convergen al valor deseado en un tiempo menor a 0.1 segundos, aproximadamente. De igual forma en la figura 5.3a se muestra el mismo comportamiento.



(a) Estimación de parámetros $\hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4, \hat{\alpha}_5, \hat{\alpha}_6, \hat{\alpha}_{10}$.



(b) Estimación de parámetros $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_7, \hat{\alpha}_8, \hat{\alpha}_9$.

Figura 5.3: Estimación de parámetros usando el regresor dinámico.

En la siguiente figura se muestra el comportamiento que tiene el regresor de energía, cuando estima los parámetros. Al igual que en el regresor dinámico se dividió en dos gráficas el comportamiento de los parámetros. En la figura 5.4a se observa que el comportamiento de los parámetros presenta muchas oscilaciones durante los primeros 2 segundos, aproximadamente. A pesar de este comportamiento, el algoritmo de mínimos cuadrados es capaz de hacer que lleguen a converger al valor deseado. De esta misma forma ocurre en la figura 5.4b, donde aunque le toma mas tiempo que al regresor dinámico, los parámetros llegan a converger.

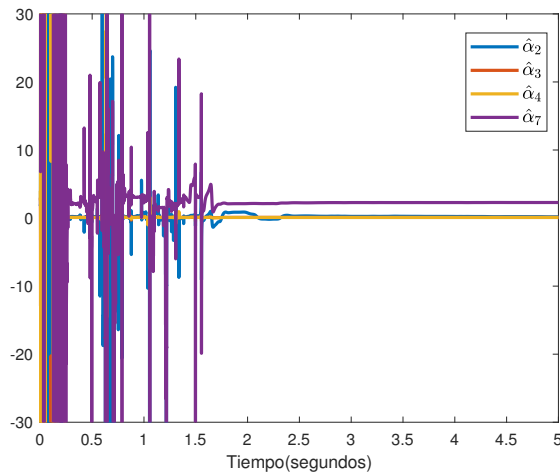
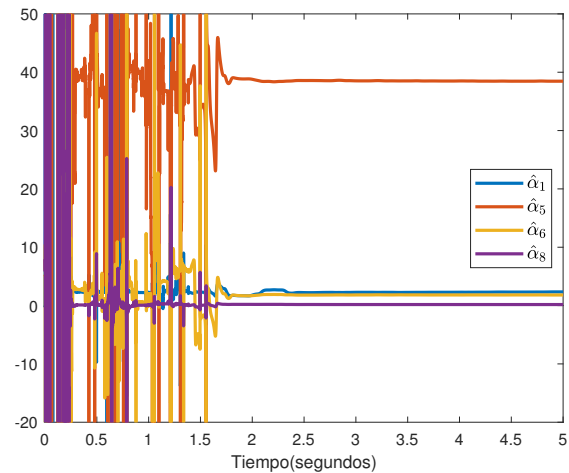
(a) Estimación de parámetros $\hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_7$.(b) Estimación de parámetros $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_5, \hat{\alpha}_6, \hat{\alpha}_8$.

Figura 5.4: Estimación de parámetros usando el regresor de energía.

La tabla 3.1 muestra los resultados de identificación paramétrica obtenidos a través de los esquemas de regresión dinámico y energía para el robot manipulador de 2 gdl.

Parámetro	Valor real	Dinámico	Energía
$\hat{\alpha}_1$	2.351	2.351	2.3412
$\hat{\alpha}_2$	0.168	0.168	0.17699
$\hat{\alpha}_3$	0.102	0.102	0.10183
$\hat{\alpha}_4$	0.084	0.084	0.083803
$\hat{\alpha}_5$	0.168	0.168	—
$\hat{\alpha}_6$	0.084	0.084	—
$\hat{\alpha}_7$	38.46	38.46	38.462
$\hat{\alpha}_8$	1.820	1.820	1.8125
$\hat{\alpha}_9$	2.288	2.288	2.287
$\hat{\alpha}_{10}$	0.175	0.175	0.1752

Tabla 5.1: Resultados de identificación paramétrica del robot de 2 gdl.

De acuerdo a los resultados, el regresor dinámico es el que mejor estimación realiza. Por otro lado, el regresor de energía realiza la identificación con mayor margen de error. En el regresor de energía, se debe tomar en cuenta que se usó un método de integración numérica y también influye el espaciamiento que existe entre las muestras ($h = 0.001$). Una ventaja que tiene el regresor de energía es que no requiere de la medición de la aceleración articular, y además se convierte en un modelo de regresión escalar.

Para medir el desempeño de ambos regresores se usó la norma \mathcal{L}_2 . En la ecuación (5.16) y (5.17) se muestran los resultados, donde se observa que el regresor de dinámico tiene un mejor desempeño que el de energía. Asimismo, también estos resultados nos muestran que el regresor dinámico identifica

de forma exacta los parámetros del robot.

$$\text{error}_D = \left| \boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_D \right| = 5.6842 \times 10^{-13} \quad (5.16)$$

$$\text{error}_E = \left| \boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_E \right| = 0.015463 \quad (5.17)$$

donde $\hat{\boldsymbol{\theta}}_D$ es el vector de parámetros estimados usando el regresor dinámico, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_E$ es el vector de parámetros estimados usando el regresor energía.

5.6. Resultados experimentales

En esta sección se usa el regresor dinámico para obtener los valores numéricos que involucran la dinámica del robot. Se usa este regresor ya que obtuvo el mejor desempeño en la simulación. Para los experimentos se usó la plataforma experimental que se describió en el capítulo 4 y se muestra en los Anexos. Para estos experimentos se utilizará la señal de excitación de la ecuación (5.7) y (5.8). Toda esta identificación será fuera de línea por lo que de la plataforma experimental obtendremos el torque y la posición. La velocidad y aceleración serán estimadas usando el método de filtrado.

5.6.1. Método de Filtrado

Para la estimación de la velocidad y aceleración se utilizará el Método de filtrado, con el cual se puede obtener una aproximación suficientemente buena de la velocidad y aceleración para fines de la identificación paramétrica. La señal filtrada de la entrada se obtiene mediante la siguiente ecuación:

$$F_u(t_k) = e^{-\lambda h} F_u(t_{k-1}) + (1 - e^{-\lambda h}) u(t_{k-1}) \quad (5.18)$$

,
donde:

- λ , es la frecuencia de corte.
- $u(t)$, es la entrada.
- F_u , es el estado del filtro y representa la señal filtrada de $u(t)$.

La derivada de la señal filtrada está dada por:

$$F_p(t_k) = \lambda F_u(t_k) + \lambda u(t_k) \quad (5.19)$$

Se debe tener en cuenta que existe un desfase entre la señal de salida y entrada y está relacionado a la frecuencia de muestreo y la naturaleza recursiva del algoritmo, ya que la señal filtrada $F_u(t_k)$ depende de los valores $u(t_{k-1})$ es decir, el valor de la señal filtrada se obtiene en base a sus valores anteriores, por ello cuando el algoritmo empieza a funcionar se produce un retraso de tiempo durante el cual la señal filtrada se debe estabilizar utilizando los valores anteriores de la entrada, sin embargo luego de un tiempo, la señal filtrada empieza a seguir de forma constante la señal de entrada $u(t_k)$ constante el desfase o corrimiento en el tiempo

5.6.2. Velocidad y aceleración filtrada

En la figura 5.5 se muestra la velocidad del primer eslabón estimada mediante el método de filtrado.

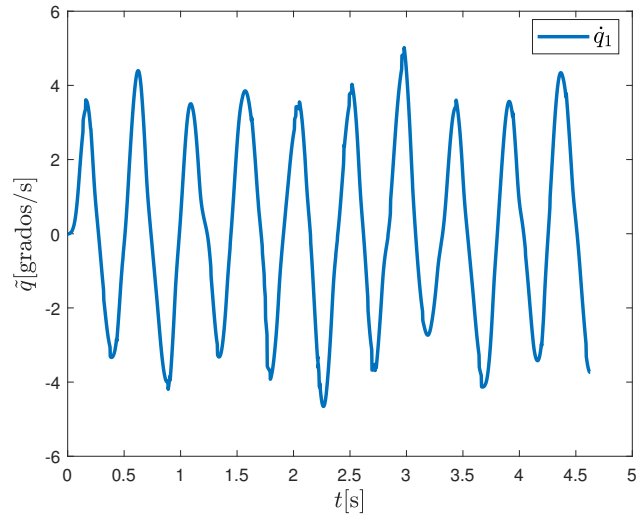


Figura 5.5: Velocidad del hombro filtrada \dot{q}_1 .

En la figura 5.6 se muestra la velocidad del primer segundo estimada mediante el método de filtrado.

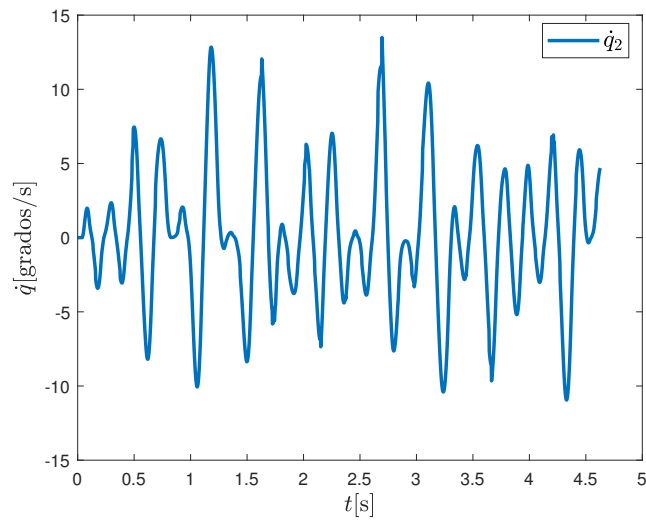


Figura 5.6: Velocidad del codo filtrada \dot{q}_2 .

En la figura 5.7 se muestra la aceleración del primer eslabón estimada mediante el método de filtrado.

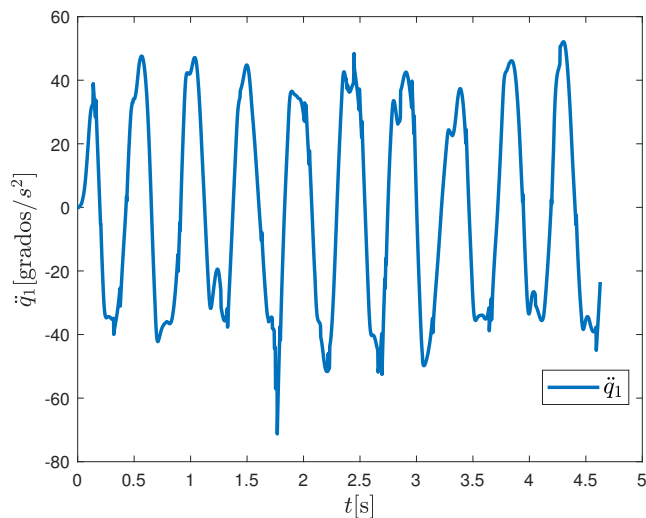


Figura 5.7: Aceleración del hombro filtrada \ddot{q}_1 .

En la figura 5.8 se muestra la aceleración del segundo eslabón estimada mediante el método de filtrado.

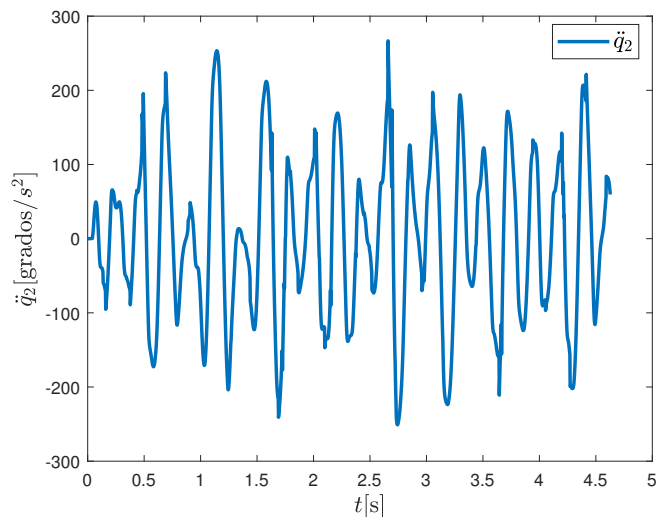


Figura 5.8: Aceleración del codo filtrada \ddot{q}_2 .

5.6.3. Estimación de parámetros

En la tabla 5.2 se muestran los resultados obtenidos al usar el algoritmo de mínimos cuadrados recursivo con los datos obtenidos experimentalmente del robot, tales como posición, velocidad (estimada), aceleración (estimada) y torque.

Parámetro	Dinámico
$\hat{\alpha}_1$	0.20837
$\hat{\alpha}_2$	0.011986
$\hat{\alpha}_3$	0.0019736
$\hat{\alpha}_4$	0.0059929
$\hat{\alpha}_5$	0.011986
$\hat{\alpha}_6$	0.0059929
$\hat{\alpha}_7$	7.9794
$\hat{\alpha}_8$	0.44792
$\hat{\alpha}_9$	1.927
$\hat{\alpha}_{10}$	0.19821

Tabla 5.2: Resultados experimentales de identificación paramétrica del robot de 2 gdl.

Una forma de verificar si los parámetros obtenidos son los correctos o los mas cercanos a los valores reales, es realizar una simulación donde ingresemos estos parámetros y la señal de excitación se usó en los experimentos. Esta simulación nos debe retornar la posición de cada articulación y esta respuesta se compara con la posición obtenida experimentalmente.

En la figura 5.9 se muestra la respuesta de la posición de hombro. El color azul representa la posición simulada y el color rojo la experimental. Como se observa el hombro tienen forma y magnitud similar a la respuesta simulada. La diferencia viene en el desfase que se debe a las variables de estado estimadas.

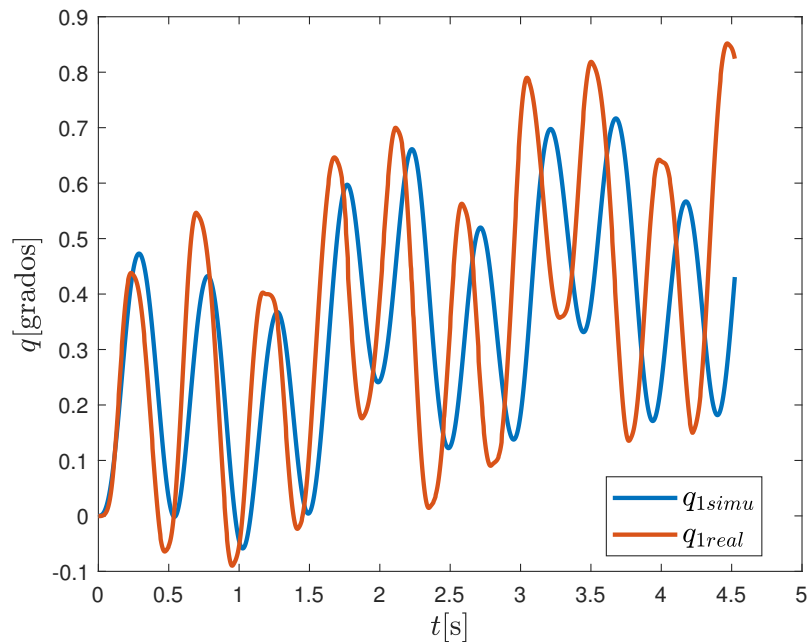


Figura 5.9: Posición articular del hombro robot 2 gdl.

En la figura 5.10 se muestra el comportamiento en la posición del codo y se nota que el error esta acotado. Igual que en la figura 5.9 se tiene un desfase.

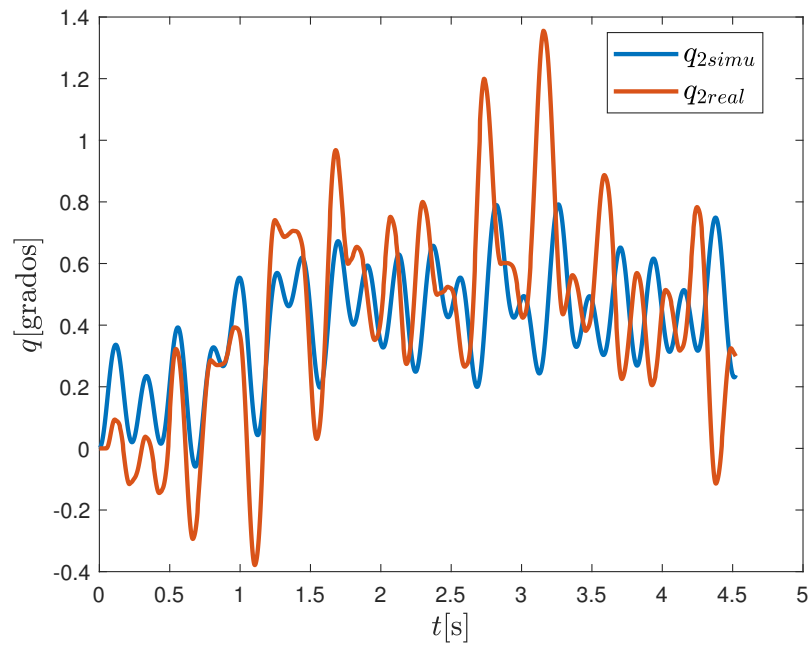


Figura 5.10: Posición articular del codo robot 2 gdl.

Capítulo 6

Diseño de un algoritmo de control de posición pura

Para que el robot manipulador de n gdl realice una tarea específica, es necesario resolver el problema de la regulación en el espacio articular. Este problema de regulación o control de posición de robots manipuladores consiste en colocar el extremo final del robot en una posición deseada \mathbf{q}_d (constante en el tiempo) para cualquier condición inicial $[\mathbf{q}(0) \quad \dot{\mathbf{q}}(0)]^T \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$. Matemáticamente el problema se describe como diseñar un controlador $\boldsymbol{\tau}$ tal que la velocidad de movimiento $\dot{\mathbf{q}}(t)$ y el error de posición $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ convergen asintóticamente a cero (al punto de equilibrio) $\forall t \geq 0$, sin importar las condiciones iniciales $\tilde{\mathbf{q}}(0)$ y $\dot{\mathbf{q}}(0)$, [3]. No obstante, los servomotores del robot no tienen una fuente ilimitada de torque generando una mecánica no modelada. Esta problemática es tratada proponiendo controladores saturados [58].

Moldeo de energía es una de las técnicas más utilizadas para diseñar algoritmos de control de movimiento de robots [3, 47, 58, 59]. Por lo tanto, en este capítulo se propone un nuevo diseño de esquema de control (posición pura) con compensación de gravedad, usando la metodología de moldeo de energía y por medio de una función estricta de Lyapunov se demuestra estabilidad asintótica global del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado. Para el análisis de estabilidad, primero se establece la ecuación de lazo cerrado que se encuentra combinando el modelo dinámico del robot manipulador y la estructura matemática del esquema de control por moldeo de energía. Luego se demuestra la existencia y unicidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado. Finalmente se demuestra la estabilidad asintótica a través de la propuesta de una función estricta de Lyapunov. Este esquema de control propuesto está compuesto por funciones hiperbólicas. Asimismo, también se propone un algoritmo de control de posición pura con compensación de fricción.

6.1. Algoritmo de control de posición pura con compensación de gravedad

6.1.1. Modelo dinámico del robot

El modelo dinámico de un robot manipulador de n gdl, formado con eslabones rígidos conectados por articulaciones libres de elasticidad en cadena cinemática abierta, consideración la fricción viscosa, se

puede escribir como [3, 47]:

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + B\dot{\mathbf{q}} \quad (6.1)$$

donde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de coordenadas generalizadas o posiciones articulares, $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de velocidades articulares, $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de aceleraciones articulares; $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, la cual es simétrica y definida positiva, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de fuerzas o pares gravitacionales obtenido como el gradiente de la energía potencial, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz diagonal definida positiva para el par de fricción viscoso y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de pares aplicados. El modelo dinámico del robot manipulador presenta las siguientes propiedades:

Propiedad 35. *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante positiva $\beta_M > 0$ tal que, $\|M(\mathbf{q})\| \leq \lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max} \leq \beta_M$, $\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$; donde $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{\max}$ representa el valor propio máximo de la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$.*

Propiedad 36. *Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_{C_1} > 0$ tal que: $\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| = k_{C_1}\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$, $\forall \mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.*

Propiedad 37. *La fricción viscosa satisface lo siguiente: $\lambda_B^{\min}\|\dot{\mathbf{q}}\| \leq \|B\dot{\mathbf{q}}\| \leq \lambda_B^{\max}\|\dot{\mathbf{q}}\|$; donde λ_B^{\max} y λ_B^{\min} son el valor propio máximo y mínimo de la matriz de coeficientes de fricción viscosa B , respectivamente.*

Propiedad 38. *La derivada temporal de la matriz de inercia y la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis satisfacen: $\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.*

Propiedad 39. *La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la derivada con respecto al tiempo de la matriz de inercia $\dot{M}(\mathbf{q})$ satisfacen: $\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \left[\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \dot{\mathbf{q}} \equiv 0$, $\forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Es decir, la matriz resultante $\left[\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right]$ es una matriz antisimétrica.*

6.1.2. Esquema de control tipo hiperbólico

Se presenta el siguiente esquema de control tipo hiperbólico, que depende del error de posición y de la velocidad de movimiento del robot manipulador. Se agregó una compensación por gravedad, lo cual representa una gran ventaja para el análisis de estabilidad de Lyapunov y el rendimiento en los robots manipuladores:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p\boldsymbol{\delta} - K_v\boldsymbol{\omega} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (6.2)$$

donde $K_v, K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales definidas positivas de las ganancias proporcional y derivativa respectivamente; los vectores asociados a la acción de control proporcional $\boldsymbol{\delta}$ y $\boldsymbol{\omega}$ derivativa están conformados por componentes hiperbólicos y se definen como:

$$\delta = \frac{2\sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})^{2m-1} \cosh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})}{(1 + \tanh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})^2)(1 + \sinh(\alpha\tilde{\mathbf{q}})^{2m})} = \begin{bmatrix} \frac{2\sinh(\alpha\tilde{q}_1)^{2m-1} \cosh(\alpha\tilde{q}_1)}{(1 + \tanh(\alpha\tilde{q}_1)^2)(1 + \sinh(\alpha\tilde{q}_1)^{2m})} \\ \vdots \\ \frac{2\sinh(\alpha\tilde{q}_n)^{2m-1} \cosh(\alpha\tilde{q}_n)}{(1 + \tanh(\alpha\tilde{q}_n)^2)(1 + \sinh(\alpha\tilde{q}_n)^{2m})} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (6.3)$$

$$\omega = \frac{2\sinh(\beta\dot{\mathbf{q}})^{2m-1} \cosh(\beta\dot{\mathbf{q}})}{(1 + \tanh(\beta\dot{\mathbf{q}})^2)(1 + \sinh(\beta\dot{\mathbf{q}})^{2m})} = \begin{bmatrix} \frac{2\sinh(\beta\dot{q}_1)^{2m-1} \cosh(\beta\dot{q}_1)}{(1 + \tanh(\beta\dot{q}_1)^2)(1 + \sinh(\beta\dot{q}_1)^{2m})} \\ \vdots \\ \frac{2\sinh(\beta\dot{q}_n)^{2m-1} \cosh(\beta\dot{q}_n)}{(1 + \tanh(\beta\dot{q}_n)^2)(1 + \sinh(\beta\dot{q}_n)^{2m})} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (6.4)$$

donde $m \in \mathbb{N}$ es un número entero positivo, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ son parámetros del algoritmo de control.

Las ecuaciones (6.3) y (6.4), satisfacen la siguiente relación:

$$\delta \leq \begin{cases} \sqrt{n}\gamma_1, & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \sqrt{n}\gamma_1 \|x\| & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (6.5)$$

$$\omega \leq \begin{cases} \sqrt{n}\gamma_2, & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \sqrt{n}\gamma_2 \|x\| & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (6.6)$$

donde las constantes $\gamma_1 > 0$ y $\gamma_2 > 0$.

En la figura 6.1 se muestra la respuesta que tiene el control a diferentes valores de α . Asimismo, se le asigna el valor de 1 a la variable m . Este será el valor de m que se utilizará al momento de realizar el análisis numérico.

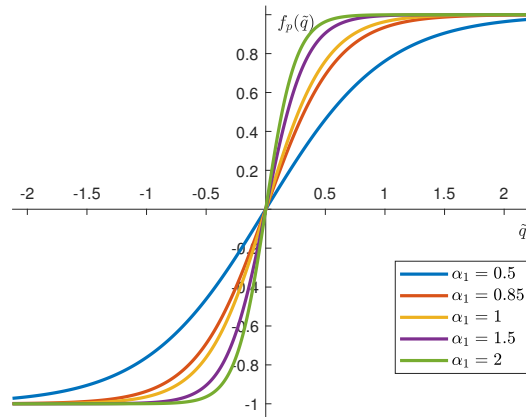


Figura 6.1: Respuesta del esquema de control a diferentes valores de α .

6.1.3. Ecuación de lazo cerrado entre el modelo dinámico y el esquema de control

Se establece la ecuación de lazo cerrado entre el modelo dinámico y el esquema de control, igualando las ecuaciones (6.1) y (6.2). Se expresa el resultado como variables de estado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \boldsymbol{\delta} - K_v \boldsymbol{\omega} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - B \dot{\mathbf{q}}] \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Se tiene la siguiente consideración para las variables de estado $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$. Para demostrar la existencia y unicidad del punto de equilibrio $[\tilde{\mathbf{q}} \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^T = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0}]^T$, de la ecuación en lazo cerrado (6.7) se toman las siguientes consideraciones:

- $-\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -I \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \iff \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$. Si $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \implies \mathbf{q}(t) = \text{constante}$.
- $M(\mathbf{q}) > 0$ y $M(\mathbf{q})^{-1}$, además $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. También $B \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, si $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$.
- Por diseño, las ganancias proporcional K_p y derivativa K_v son matrices definidas positivas. La función propuesta ($\boldsymbol{\delta}$ y $\boldsymbol{\omega}$) de hipérbolas se hace cero cuando $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ o $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$.

Por lo tanto, $[\tilde{\mathbf{q}} \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}]^T = [\mathbf{0} \quad \mathbf{0}]^T$ el punto de equilibrio existe y es único.

6.1.4. Análisis de estabilidad asintótica del punto de equilibrio

Para el análisis de estabilidad por Lyapunov es necesario proponer una función estricta de Lyapunov, la cual sea definida positiva y su derivada definida negativa. La propuesta de una función estricta Lyapunov se realiza siguiendo la filosofía de diseño de [59].

6.1.5. Función estricta de Lyapunov

Ahora se procede a proponer una función estricta de Lyapunov, de la siguiente forma [59]:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{U}(K_p, \tilde{\mathbf{q}}) - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \quad (6.8)$$

A partir de la ecuación (6.8) se propone la siguiente función estricta de Lyapunov:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}^T K_p \boldsymbol{\varphi} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \quad (6.9)$$

donde

$$\boldsymbol{\varphi} = \sqrt{\frac{\cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^3 \ln(\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha \tilde{\mathbf{q}}) \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}) \ln(\sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}))}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\cosh(\alpha \tilde{q}_1)^3 \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}_1)^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha \tilde{q}_1) \sinh(\alpha \tilde{q}_1) \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}_1))}} \\ \vdots \\ \sqrt{\frac{\cosh(\alpha \tilde{q}_n)^3 \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}_n)^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha \tilde{q}_n) \sinh(\alpha \tilde{q}_n) \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}_n))}} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

La ecuación (6.10) satisface la siguiente relación:

$$\boldsymbol{\varphi} \leq \begin{cases} \sqrt{n} \rho, & \forall x \in \mathbb{R}^{n \times 1} \\ \sqrt{n} \rho \|x\| & \forall x \in \mathbb{R}^{n \times 1} \end{cases} \quad (6.11)$$

En la ecuación (6.9) ϵ_0 es cualquier número positivo. Es importante tener en cuenta que ϵ_0 solo se requiere para fines de análisis y, por lo tanto, no es necesario conocer su valor numérico. Solo se necesita para demostrar que existe [59].

Por otro lado, la función estricta de Lyapunov es una función definida positiva y su derivada temporal produce una función definida negativa. Por lo tanto, a través del método directo de Lyapunov se puede concluir la estabilidad asintótica global. La ecuación (6.9) puede ser reescribir de la siguiente manera:

$$V(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \left[\dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \right]^T M(\mathbf{q}) \left[\dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \right] + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}^T K_p \boldsymbol{\varphi} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0^2 \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}}{[1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \quad (6.12)$$

Para el análisis de estabilidad por Lyapunov, primero se demuestra que la función estricta de Lyapunov es definida positiva. El primer término de la ecuación (6.12), tiene una forma cuadrática y se sabe que $M(\mathbf{q})$ es definida positiva, por lo tanto este termino es definido positivo. De manera similar para el segundo término, también es definido positivo debido a que K_p es una matriz diagonal definida positiva. ϵ_0 es una constante positiva tal que satisface (6.13); por lo tanto, la función candidata de Lyapunov (6.12) es una función definida positiva.

$$0 < \epsilon_0 < \sqrt{\frac{\lambda_{K_p}^{\min} \rho}{\beta}} \quad (6.13)$$

6.1.6. La derivada temporal de la función estricta de Lyapunov

Ahora, se realiza la derivada temporal de la función estricta de Lyapunov propuesta, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \delta K_p \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \\ &\quad - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \end{aligned} \quad (6.14)$$

En la ecuación (6.14), reemplazamos el valor de $\ddot{\mathbf{q}}$ y usamos las propiedades (4) y (5), obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &= -\dot{\mathbf{q}}^T K_v \boldsymbol{\omega} - \dot{\mathbf{q}}^T B \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} K_p \boldsymbol{\delta} + \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} K_v \boldsymbol{\omega} + \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} B \dot{\mathbf{q}} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \\ &\quad + \frac{\epsilon_0 \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \frac{\epsilon_0 \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \tilde{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}}{\|\tilde{\mathbf{q}}\| [1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|]^2} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Ahora procedemos a obtener las cotas superiores de todos los términos de la función de Lyapunov haciendo uso de las propiedades (1), (2), (3) y de la relación de las funciones hiperbólicas (6.5) y (6.6):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &\leq -\lambda_{K_v}^{\min} \rho_1 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \lambda_B^{\min} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - \frac{\epsilon_0 \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p}^{\min} + \frac{\epsilon_0 \|\tilde{\mathbf{q}}\| \rho_2 \|\dot{\mathbf{q}}\|}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\epsilon_0 \|\tilde{\mathbf{q}}\| \lambda_B^{\max} \|\dot{\mathbf{q}}\|}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} - \epsilon_0 K_c \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \\ &\quad - \beta \epsilon_0 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \frac{\epsilon_0 \beta}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Después de realizar agrupaciones algebraicas y reducción de términos, la ecuación (6.16) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) &\leq - \left[\lambda_{K_v}^{\min} \rho_1 + \lambda_B^{\min} + \epsilon_0 K_c - \frac{\epsilon_0 \beta}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \beta \epsilon_0 \right] \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + \left[\frac{\epsilon_0 \rho_2}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\epsilon_0 \lambda_B^{\max}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \right] \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| \\ &\quad - \frac{\epsilon_0 \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p}^{\min} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Le damos forma de una estructura cuadrática a la ecuación (6.17):

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \leq - \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}; \quad Q > 0 \quad (6.18)$$

Los elementos de la matriz Q están definidos por:

$$q_{11} = \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \lambda_{K_p}^{\min} \quad (6.19)$$

$$q_{22} = \lambda_{K_v}^{\min} \rho_1 + \lambda_B^{\min} + \epsilon_0 K_c - \frac{\epsilon_0 \beta}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \beta \epsilon_0 \quad (6.20)$$

$$q_{21} = q_{12} = \frac{\epsilon_0 \rho_2}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} + \frac{\epsilon_0 \lambda_B^{\max}}{1 + \|\tilde{\mathbf{q}}\|} \quad (6.21)$$

Como la ecuación (6.18) es definida negativa, por lo tanto se demuestra estabilidad asintótica. Con esto se logra que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 1} \quad \forall t \geq 0 \quad (6.22)$$

6.1.7. Resultados experimentales

En esta sección se describe los resultados obtenidos del esquema de control tipo hiperbólico con compensación de gravedad, implementado en un robot manipulador de 3 gdl de transmisión directa, que se muestra en la figura 6.2. Aquí se utilizó la plataforma experimental comentada en el capítulo 4. Esto se hace para avalar la eficacia, rendimiento y resultados teóricos del esquema de control propuesto.



Figura 6.2: Robot Manipulador.

La actividad que se llevó a cabo, consiste en posicionar a las articulaciones de la base, el hombro y el codo del robot manipulador que se encuentran en posición de casa $[0 \ 0 \ 0]^T$ grados, hacia una posición deseada $[90 \ 45 \ 135]^T$ grados.

Articulación	Modelo	Par máx	Resolución
Base.	DM-1015	15[Nm]	655360
Hombro.	DM-1050	50[Nm]	1024000s
Codo.	DM-1004	4 [Nm]	655360

Tabla 6.1: Características de los servomotores

En la tabla 1, se muestran las características de los servomotores. Con estos datos se propone la siguiente regla de sintonía para K_p en ambas articulaciones:

$$k_{p1} = 15 \times 0.66 \quad (6.23)$$

$$k_{p2} = 50 \times 0.77 \quad (6.24)$$

$$k_{p3} = 4 \times 0.65 \quad (6.25)$$

La variable k_{p1} corresponde al primer eslabón (base), k_{p2} corresponde al segundo eslabón (hombro) y k_{p3} corresponde al último eslabón (codo). Para las ganancias derivativas se tiene la siguiente regla de sintonía:

$$k_{v1} = 0.5 \times k_{p1} \quad (6.26)$$

$$k_{v2} = 1.22 \times k_{p2} \quad (6.27)$$

$$k_{v3} = 1.45 \times k_{p3} \quad (6.28)$$

Las variables α , β y ϕ , son las que permiten que la respuesta de la función hiperbólica se establezca más rápido, fueron sintonizadas con los siguientes valores:

$$\alpha = 0.25 \quad (6.29)$$

$$\beta = 0.95 \quad (6.30)$$

$$\phi = 0.60 \quad (6.31)$$

En la figura 6.3, se muestra el error de posición del robot manipulador de 3 gdl para las tres articulaciones, respectivamente. Por medio del control tipo hiperbólico, se puede observar que los errores de posición llegan asintóticamente a cero. También debe tener en cuenta que cada posición converge asintóticamente a cero sin generar sobre impulsos en régimen transitorio y de forma suave y rápida llega al estado estacionario, en un tiempo menor a 1 segundo. En otras palabras, el esquema de control tipo hiperbólico cumple con el objetivo de llevar al robot manipulador a la posición deseada.

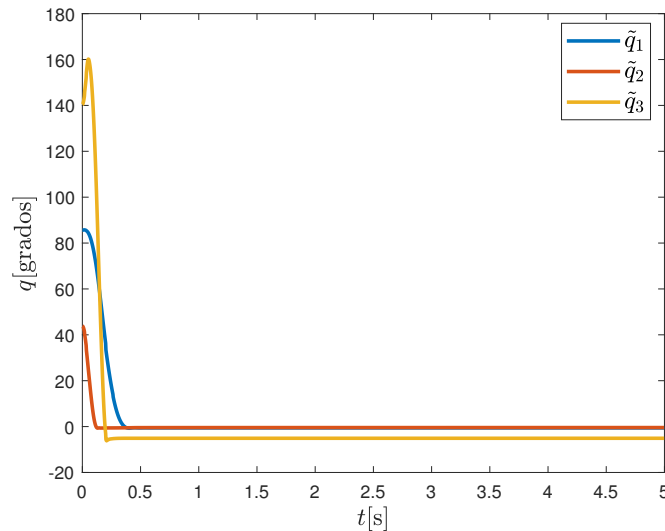


Figura 6.3: Error de posición del robot de 3 gdl.

De igual forma, en la figura 6.4 se muestra las velocidades de las articulaciones del robot manipulador. Se puede observar que de igual forma que en el error de posición, las velocidades de movimiento llegan asintóticamente a cero.

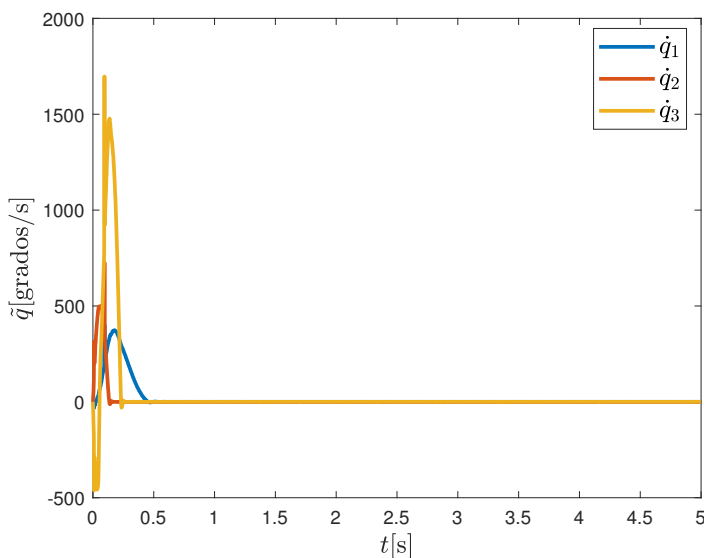


Figura 6.4: Velocidades del robot de 3 gdl

Por lo tanto, de forma cualitativa a través de estos experimentos, se ha podido mostrar que el robot manipulador llega al punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado de forma asintótica. Con las figuras 6.4 y 6.3, se demuestra que el esquema de control propuesto tiene un buen desempeño. En la figura 6.5, se puede observar que la energía que se le suministra al robot manipulador, no sobrepasa los límites físicos permitidos, los cuales se muestran en la tabla 1. Esto se debe a la correcta sintonización de las ganancias constantes y a la regla de sintonía que implemento.

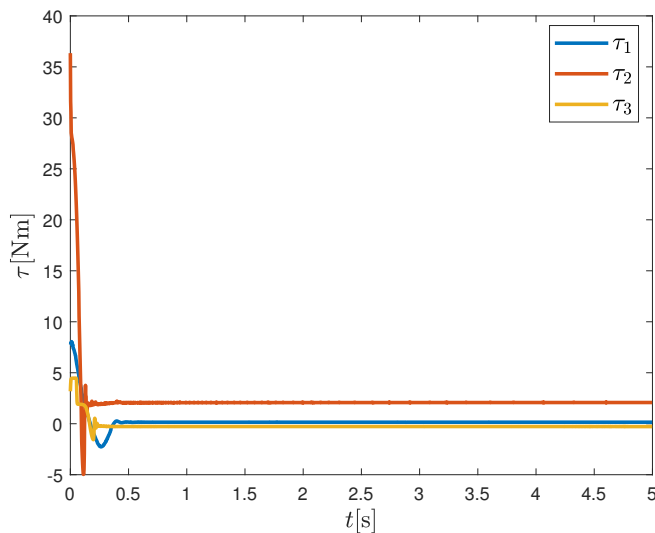


Figura 6.5: Pares aplicados al robot de 3 gdl.

6.2. Algoritmo de control de posición pura con compensación de fricción

Regularmente cuando se trabaja con robots manipuladores, la fricción se representa por la fricción de Coulomb y fricción viscosa. Estas 2 componentes ha sido suficientes para lograr la representación del comportamiento de la fuerza de fricción que se da sobre los actuadores del robot. Aunque con los avances en esta área se encontró un modelo estático que incluye la representación más completa del fenómeno disipativo de fricción en las articulaciones del robot, al cual se le conoce como el efecto Stribeck. Entre de los modelos de fricción propuestos, al modelo de LuGre [48] se le considera uno de los más completos ya que es del tipo dinámico debido a la naturaleza dinámica que se presenta en el fenómeno de fricción. En este modelo se consideran una estructura clásica de fricción, con la adicción de la curva generada por el efecto Stribeck. También en el modelo se considera una región de histéresis. Aun cuando el modelo de LuGre es uno de los mas completos, tiene una desventaja al igual que otros modelos fricción dinámicos, es que cuando se incorporan a al modelo dinámico del robot, se incrementan las variables de estado del sistema.

El efecto de fricción que se presenta en el sistema mecánico de los robots manipuladores es un fenómeno disipativo que se opone al movimiento del robot. En este capítulo se presenta la propuesta de un nuevo modelo de fricción para robots manipuladores. Esta propuesta está compuesta por funciones hiperbólicas, las cuales pretenden emular el comportamiento que presenta el modelo de Lugre [48], donde se incluyen los fenómenos de fricción estática, efecto Stribeck, viscosa y de Coulomb.

6.2.1. Propuesta de modelo de fricción

Se propone un modelo de ficción basado en funciones hiperbólicas que representan de manera apropiada el fenómeno de fricción en robots manipuladores, incluyendo aspectos de los modelos de fricción dinámicos como el modelo de LuGre, sin incrementar el número de variables de estado del sistema:

$$\boldsymbol{\tau}_f = \gamma \frac{2\sinh(\alpha\dot{\boldsymbol{q}})^{2m-1}\cosh(\alpha\dot{\boldsymbol{q}})}{(1 + \tanh(\alpha\dot{\boldsymbol{q}})^2)(1 + \sinh(\alpha\dot{\boldsymbol{q}})^{2m})} \quad (6.32)$$

En la ecuación (6.32) $m, \alpha \in \mathbb{N}$, son números positivos y $\dot{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, es el vector de velocidad. Cuando se varia los valores de m y α el comportamiento del modelo de fricción cambia. Como se observa en la figura 6.6, que mientras más grande es el valor del exponente m , se genera un pico en la curvatura. Este pico representa el efecto Stribeck. También se observa que mientras más grande sea el valor de m , en la gráfica se genera el efecto de histéresis.

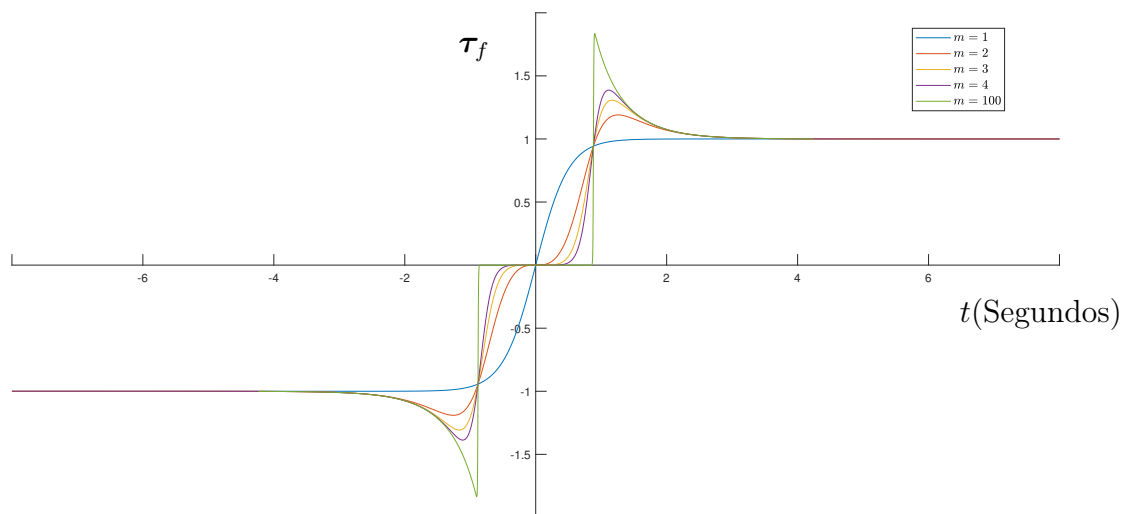


Figura 6.6: Modelo de fricción propuesto τ_f para diferentes valores de m .

La pendiente que se tiene en la grafica es por la variación de α . Si se usa un valor de α mayor, esa pendiente se va haciendo mas vertical, como se observa en la figura 6.7:

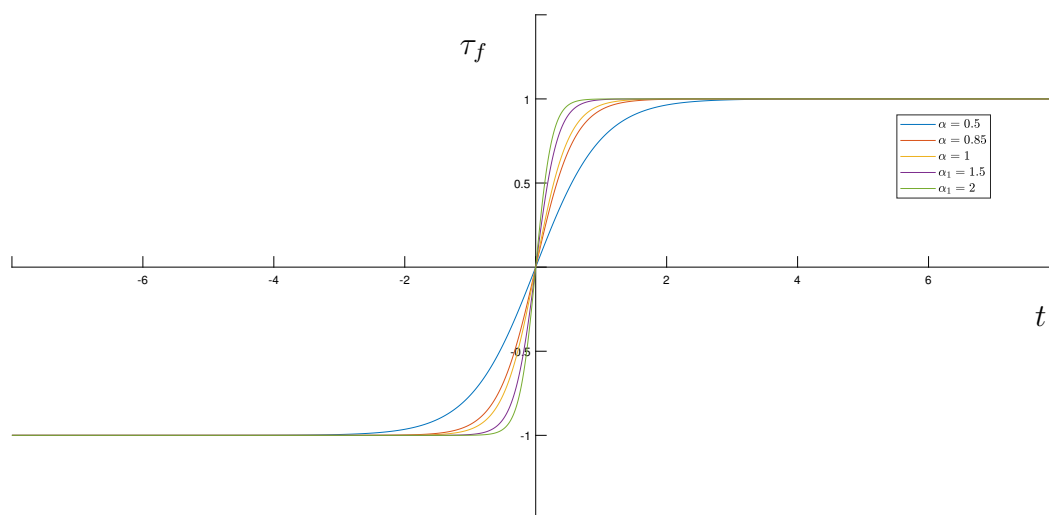


Figura 6.7: Modelo de fricción propuesto τ_f para diferentes valores de α .

Para observar el comportamiento que tiene el modelo de fricción propuesto, se simuló el modelo dinámico numérico de un del robot manipulador prototipo de 2 grados de libertad, reportado en [3, 4, 47]. En esta simulación se consideró el efecto disipativo de fricción (Stribeck + Coulomb + viscosa). En este caso la simulación se realiza en lazo abierto por lo tanto no se tiene una señal de control como entrada. En su lugar, se usa una señal exponencial para sacar al robot del estado estacionario. También se incorpora el modelo de LuGre [48], para simular la fricción en el robot.

La función que se trata de emular con el modelo de fricción propuesto es $f_v(\dot{q}_i)$, la cual contiene la fricción de Coulomb y el efecto Stribeck :

$$f_v(\dot{q}_i) = \tau_c + [\tau_s - \tau_c] e^{-\left|\frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_{si}}\right|^2} \quad (6.33)$$

donde τ_c y τ_s son los coeficientes de fricción de Coulomb y estática, respectivamente ($\tau_s > \tau_c$); y \dot{q}_{si} es la constante Stribeck (representa una baja magnitud de velocidad de movimiento del robot).

Luego de realizar la simulación utilizando ODE45, obtenemos el valor de la velocidad \dot{q} , el cual utilizamos para graficar la ecuación (6.32) y (6.33). En la figura 6.8, tenemos la fricción de Coulomb y el efecto Stribeck con respecto a la velocidad articular del eslabón 1. Como se puede apreciar el comportamiento que presenta es muy similar al de una *tanh*, con la diferencia que en esta gráfica en el eje *y* tenemos la zona de histéresis. De aquí parte la idea del uso de funciones hiperbólicas. En la figura también se observa que la respuesta de $f_v(\dot{q}_1)$ se encuentra acotada y luego de llegar a su máximo valor, comienza a descender formando una curvatura hasta llegar a un valor estable.

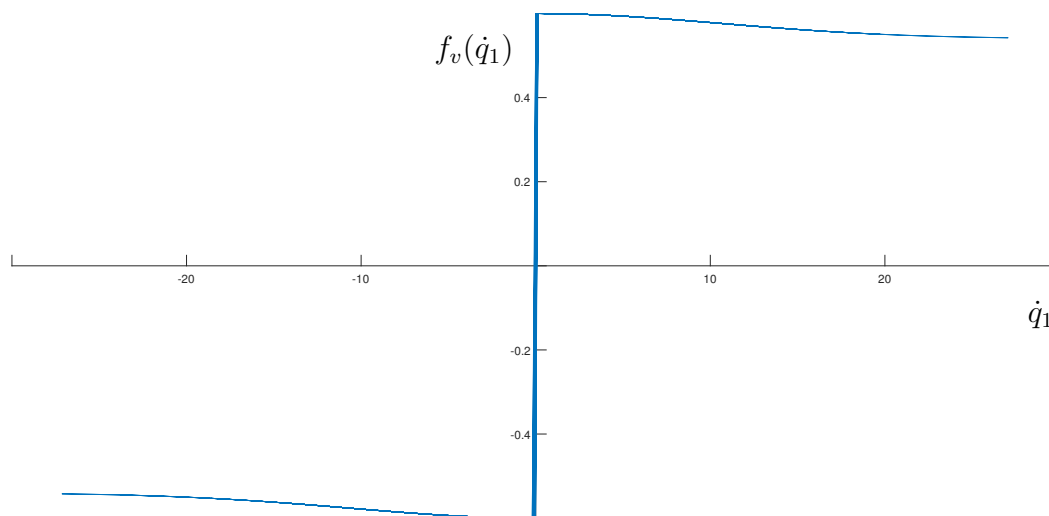


Figura 6.8: Fricción de Coulomb y el efecto Stribeck vs Velocidad articular del eslabón 1.

En la figura 6.9, se muestra el comportamiento del modelo de fricción propuesto. La respuesta que se obtiene es muy similar a la que se observa en la figura 6.8. El valor pico en ambos es el mismo, por lo que los márgenes de la gráfica son similares. En la figura 6.9, se observa mejor la curvatura en el pico y como esta se llega a estabilizar. También tenemos que la zona de histéresis está en el eje *x*. Como se explicó anteriormente si queremos que la pendiente sea más vertical se debe modificar α y si se quiere que la curvatura en el pico sea menor o mayor se debe variar m .

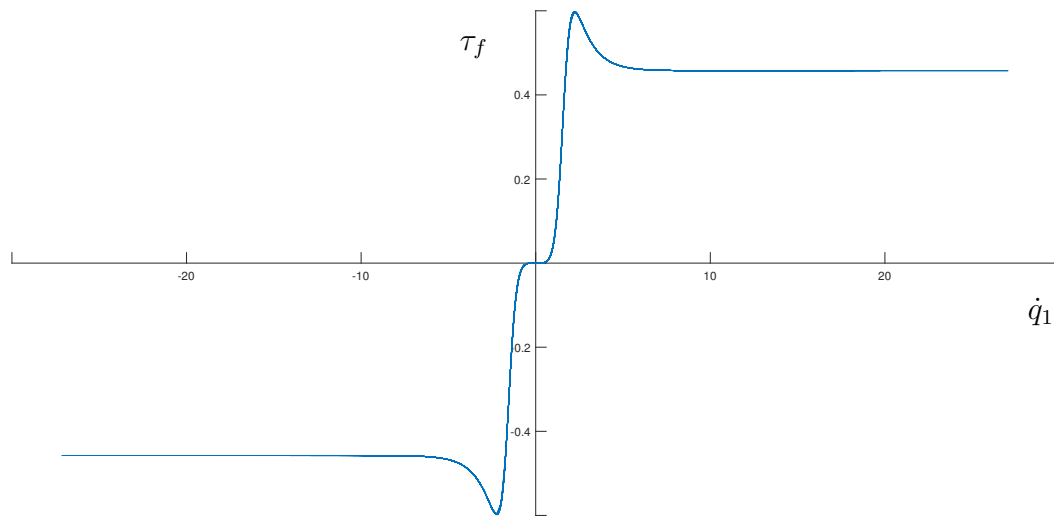


Figura 6.9: Modelo fricción propuesto vs Velocidad articular del eslabón 1.

Al igual que en la figura 6.8, el comportamiento que se presenta en la figura 6.10 es muy similar. La diferencia está en los márgenes como en y donde son más pequeños o en x donde los márgenes son mayores. Con esto se puede visualizar el comportamiento de para ambos eslabones es muy similar, con la diferencia de valores que presentan en sus márgenes.

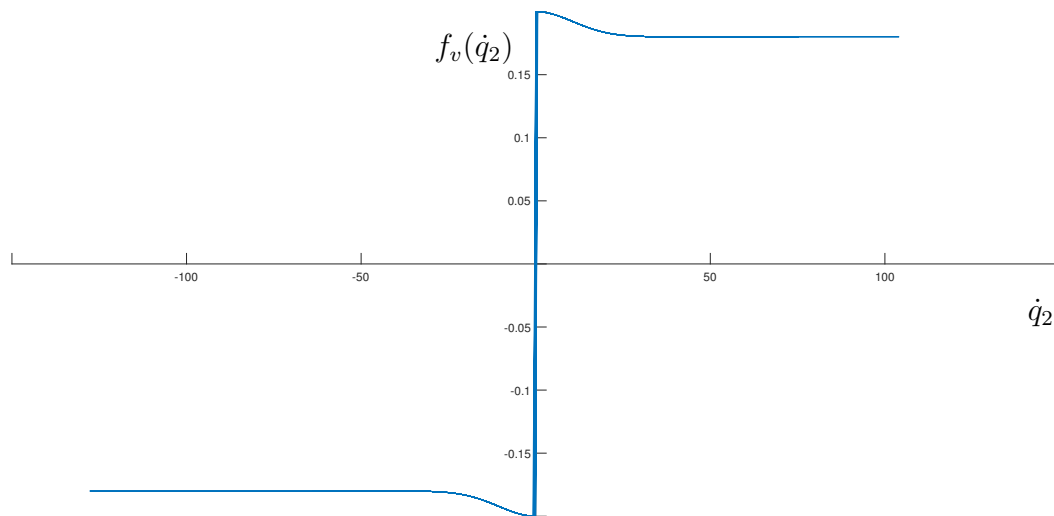


Figura 6.10: Fricción de Coulomb y el efecto Stribeck vs Velocidad articular del eslabón 2.

En la figura 6.11, se muestra que el modelo de fricción propuesto tiene una respuesta muy similar a la figura. Con esto se demuestra que la propuesta puede desenvolver un buen desempeño como modelo de fricción. Para mejorar esta respuesta se debe hacer una identificación paramétrica de

los parámetros envueltos en la fricción de forma que la respuesta del modelo propuesto sea lo más próximo a la fricción presente en los robots.

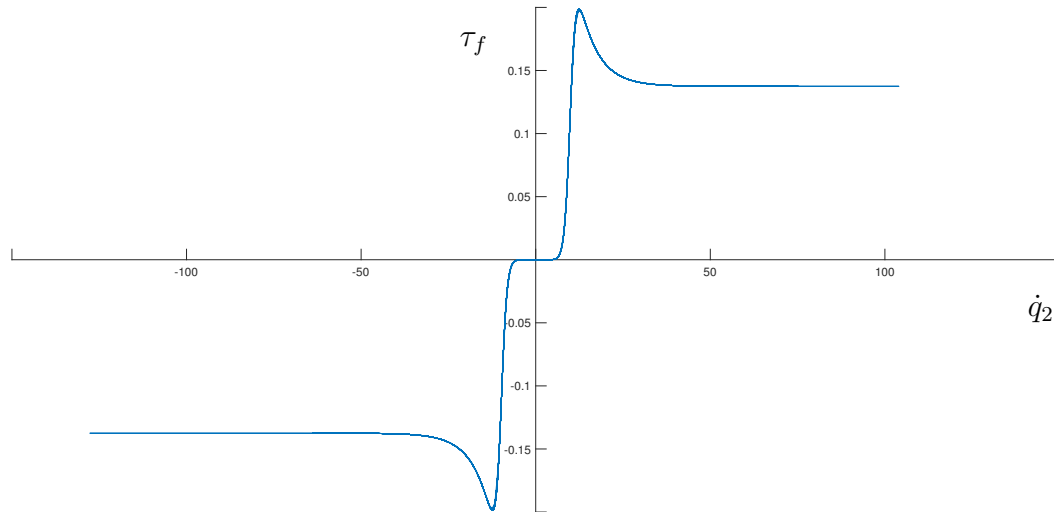


Figura 6.11: Modelo fricción propuesto vs Velocidad articular del eslabón 2.

6.2.2. Resultados experimentales

En esta sección se describe los resultados obtenidos del esquema de control tipo hiperbólico con compensación de fricción, implementado en un robot manipulador de 3 gdl de transmisión directa, que se muestra en la figura 6.2. Aquí se utilizó la plataforma experimental comentada en el capítulo 4. Esto se hace para avalar la eficacia, rendimiento y resultados teóricos del esquema de control propuesto. La actividad que se llevó a cabo, consiste en posicionar a las articulaciones de la base, el hombro y el codo del robot manipulador que se encuentran en posición de casa $[0 \ 0 \ 0]^T$ grados, hacia una posición deseada $[90 \ 45 \ 135]^T$ grados, como se hizo con el algoritmo de control con compensación de gravedad.

En la tabla 1, se muestran las características de los servomotores. Con estos datos se propone la siguiente regla de sintonía para K_p en ambas articulaciones:

$$k_{p1} = 15 \times 0.66 \quad (6.34)$$

$$k_{p2} = 50 \times 0.77 \quad (6.35)$$

$$k_{p3} = 4 \times 0.65 \quad (6.36)$$

La variable k_{p1} corresponde al primer eslabón (base), k_{p2} corresponde al segundo eslabón (hombro) y k_{p3} corresponde al último eslabón (codo). Para las ganancias derivativas se tiene la siguiente regla de sintonía:

$$k_{v1} = 0.5 \times kp1 \quad (6.37)$$

$$k_{v2} = 1.22 \times kp2 \quad (6.38)$$

$$k_{v3} = 1.45 \times kp3 \quad (6.39)$$

Las variables α , β y ϕ , son las que permiten que la respuesta de la función hiperbólica se establezca más rápido, fueron sintonizadas con los siguientes valores:

$$\alpha = 0.25 \quad (6.40)$$

$$\beta = 0.95 \quad (6.41)$$

$$\phi = 0.60 \quad (6.42)$$

También se sintoniza, con los siguientes valores:

$$\gamma_1 = 0.80 \quad (6.43)$$

$$\gamma_2 = 0.60 \quad (6.44)$$

$$\gamma_3 = 0.25 \quad (6.45)$$

En la figura 6.12, se muestra el error de posición del robot manipulador de 3 gdl. Por medio del control tipo hiperbólico con compensación de fricción, se puede observar que los errores de posición llegan asintóticamente a cero.

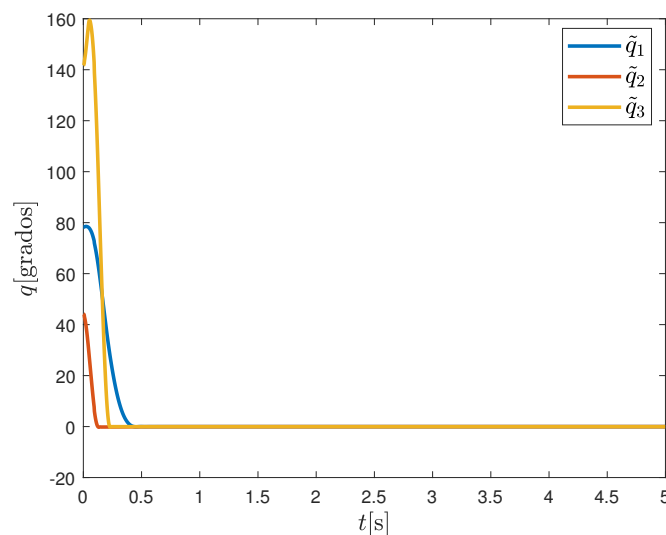


Figura 6.12: Error de posición del robot de 3 gdl.

De igual forma, en la figura 6.12 se muestra las velocidades de las articulaciones del robot manipulador. Se puede observar que de igual forma que en el error de posición, las velocidades de movimiento llegan asintóticamente a cero.

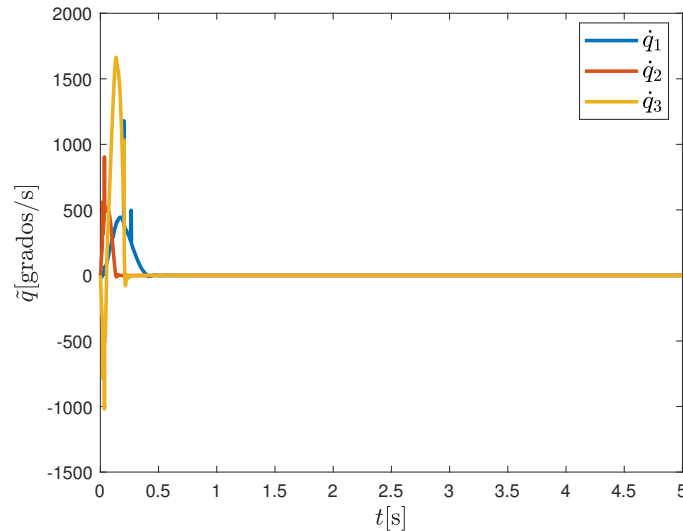


Figura 6.13: Velocidades del robot de 3 gdl.

De forma cualitativa a través de estos experimentos, se ha demostrado que el robot manipulador llega al punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado de forma asintótica. Se debe tener en cuenta que cada posición converge asintóticamente a cero sin generar sobreimpulsos en régimen transitorio y de forma suave y rápida llega al estado estacionario, en un tiempo menor a 1 segundo. En la figura 6.14, se puede observar que la energía que se le suministra al robot manipulador, no sobrepasa los límites físicos permitidos, los cuales se muestran en la tabla 1.

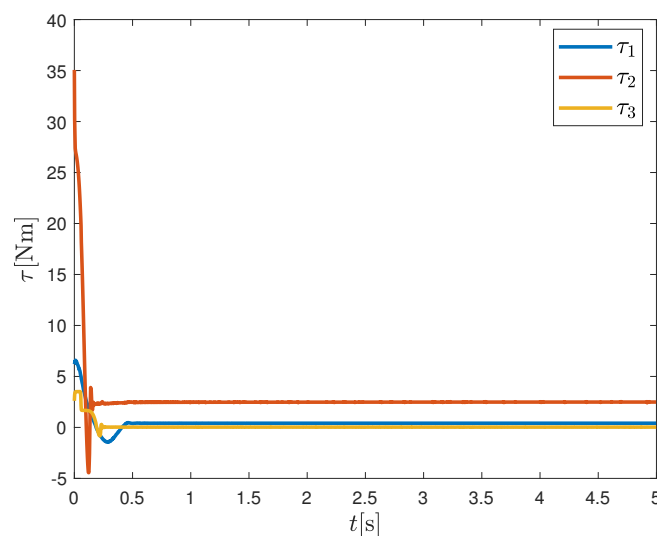


Figura 6.14: Pares aplicados al robot de 3 gdl.

6.3. Análisis de resultados

Para el análisis comparativo entre los esquemas de control con compensación de gravedad y fricción, se hace uso de una variante de la norma $\mathcal{L}_2[\mathbf{f}]$, conocida como $rms[\mathbf{f}]$, para obtener un valor numérico que sirva como herramienta para cuantificar el desempeño del algoritmo de control punto a punto propuesto. El $rms[\mathbf{f}]$ se define como:

$$rms[\mathbf{f}] = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{f}^T(\varphi) \mathbf{f}(\varphi) d\varphi} = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t \|\mathbf{f}(\varphi)\|^2 d\varphi} < \infty \quad (6.46)$$

donde $\mathbf{f} = \mathbf{e} = [x_d, y_d]^T - [x_r, y_r]^T$ es el error de posición en coordenadas cartesianas \mathbf{e} medido por la diferencia entre la posición deseada $[x_d, y_d]^T$ y la posición seguida por robot $[x_r, y_r]^T$. Teniendo en cuenta además que la norma $\mathcal{L}_2[\mathbf{f}]$ es inversamente proporcional al desempeño del esquema a evaluar.

En la figura 6.15 se muestra el desempeño que tuvieron los algoritmos propuestos. Los 3 bloques que se encuentran en la parte izquierda de la gráfica, corresponden al algoritmo de control con compensación de gravedad; siendo el primer bloque correspondiente a la base, el siguiente al hombro y el ultimo al codo. Los 3 bloques que se encuentran al lado derecho corresponden al algoritmo de control con compensación de fricción. El orden de los bloques es igual que los del lado izquierdo. Se observa que el control con compensación de fricción es ligeramente mejor en su respuesta en referencia a los 3 eslabones

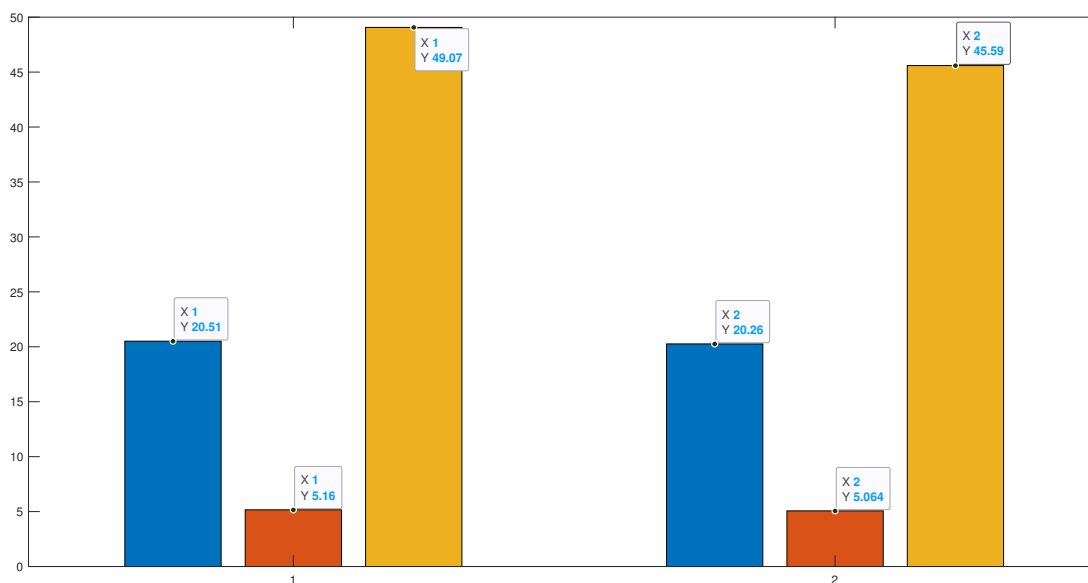


Figura 6.15: Análisis de resultados - Cuadro comparativo.

- El resultado para el control con compensación de gravedad:

$$rms[\mathbf{f}_{Base}] = 20.51 \quad (6.47)$$

$$rms[\mathbf{f}_{Hombro}] = 5.16 \quad (6.48)$$

$$rms[\mathbf{f}_{Codo}] = 49.07 \quad (6.49)$$

- El resultado para el control con compensación de fricción :

$$rms[\mathbf{f}_{Base}] = 20.26 \quad (6.50)$$

$$rms[\mathbf{f}_{Hombro}] = 5.064 \quad (6.51)$$

$$rms[\mathbf{f}_{Codo}] = 45.59 \quad (6.52)$$

Como se observó de forma gráfica el control con compensación de fricción propuesto tiene una mejor respuesta que el control con compensación de gravedad, aunque la diferencia no es muy grande. Ahora no solo se puede afirmar de forma gráfica, sí no que a través de la norma \mathcal{L}_2 se puede comprobar.

Conclusiones

- A partir del enfoque realizado con la mecánica analítica, utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange se logró modelar el comportamiento dinámico del robot péndulo, el robot de 2 gdl y 3 gdl. De este desarrollo, también se consiguió deducir varias propiedades matemáticas nuevas para el modelo dinámico de las tres configuraciones de robots manipuladores analizadas y se establecieron diversos esquemas de regresión paramétrica. Se obtuvo un regresor dinámico y de energía para el robot de 2gdl, siendo el regresor dinámico el que obtuvo mejor respuesta. Este regresor fue implementado en una plataforma experimental llegando a estimar los valores numéricos de los parámetros que están incluidos en la dinámica del robot.
- Cuando la plataforma experimental se encuentra en operación y el usuario puede modificar el tipo de control que desea implementar en el robot, modificando solo la línea de código referente al control. También se desarrolló una interfaz gráfica en Python, donde el usuario tiene la posibilidad de previo a sus experimentos, verificar si está recibiendo los datos del encoder y si se encuentran en posición de casa $[0\ 0\ 0]^T$ grados. Asimismo, la interfaz gráfica brinda la posibilidad de modificar la posición deseada, las ganancias proporcionales y derivativas, sin la necesidad de reprogramar el Arduino MKR Vidor 4000. Por último, se implementó la opción de guardar los datos de los experimentos en 3 diferentes archivos (posición, velocidad y torque).
- Se ha presentado un nuevo esquema de control tipo hiperbólico para resolver el problema de control de posición de los robots manipuladores en el espacio articular. Según el método directo de Lyapunov, este esquema está respaldado por un riguroso análisis de estabilidad asintótica global en el sentido de Lyapunov. Para esto se propuso una función estricta de Lyapunov, la cual cumple con ser una función definida positiva y su derivada temporal produce una función definida negativa, lo cual permite establecer condiciones que garanticen la estabilidad asintótica y global. El rendimiento del esquema de control propuesto, tiene una buena respuesta transitoria y pequeños errores de posición de estado estable. Asimismo, los experimentos realizados nos permite tener un respaldo del análisis teórico presentado.
- Por último, se presentó un nuevo modelo de fricción propuesto con funciones hiperbólicas, el cual mostró un gran desempeño al emular el fenómeno de fricción de los robots manipuladores. Este modelo de fricción se uso para proponer un nuevo algoritmo de control con compensación de fricción. El cual presento una mejor respuesta que el control con compensación de gravedad, aunque esta diferencia es mínima. Esto no solo se puede visualizar en la gráfica, sino que también se presentó un análisis con una variante de la norma $\mathcal{L}_2[\mathbf{f}]$, conocida como $rms[\mathbf{f}]$, con la cual se obtuvo un valor numérico que sirve como herramienta para cuantificar el desempeño del algoritmo de control propuesto; siendo el control por compensación de fricción el que obtuvo

mejor desempeño.

Anexos

A. Constancia de presentación en congreso ELECTRO 2021



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA



TECNOLÓGICO
NACIONAL DE MÉXICO

**EL TECNOLÓGICO NACIONAL DE MÉXICO
A TRAVÉS DEL INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHIHUAHUA**

OTORGA LA PRESENTE

CONSTANCIA

A

Emanuel Ortiz Ortiz

POR IMPARTIR LA CONFERENCIA

**CONTROL TIPO HIPERBÓLICO CON ESTABILIDAD ASINTÓTICA PARA
ROBOTS MANIPULADORES**

EN EL **CONGRESO INTERNACIONAL DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA ELECTRO 2021**,
REALIZADO DEL 13 AL 15 DE OCTUBRE DEL PRESENTE AÑO.



CHIHUAHUA, CHIH., A OCTUBRE DE 2021.

ROGELIO ENRIQUE BARAY ARANA
COORDINADOR GENERAL

93



INSTITUTO TECNOLÓGICO
DE CHIHUAHUA



B. Publicación de un artículo científico

Congr. Int. en Ing. Electrónica. Mem. ELECTRO, Vol. 43 pp.162 - 167, Oct 2021, Chihuahua, Chih. México
<http://electro.itchihuahua.edu.mx/revista>
 ISSN 1405-2172

CONTROL TIPO HIPERBÓLICO CON ESTABILIDAD ASINTÓTICA PARA ROBOTS MANIPULADORES

Emanuel Ortiz-Ortiz^a, Juan Carlos Sernaque-Julca^a, Fernando Reyes-Cortés^a,
 Pablo Sánchez-Sánchez^a, Jorge Fierro-Roja^a, Basil M. Al-Hadithi^b.

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla^a, Universidad Politécnica de Madrid^b.

Maestría en Ciencias de la Electrónica, Opción en Automatización Facultad de Ciencias de la Electrónica^a,

Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, Automática y Física Aplicada,

Escuela Superior de Ingeniería y Diseño Industrial^b,

Prolongación 24 Sur, Ciudad Universitaria, C.P. 72570, Puebla, Pue, México.

Tel. (222)2295500 ext 7410.

e-mail: juan.sernaque@alumno.buap.mx

RESUMEN.

En el siguiente trabajo se presenta un esquema control tipo hiperbólico con el análisis de estabilidad asintótica para robots manipuladores. El esquema de control propuesto está compuesto por funciones hiperbólicas, como el \sinh , \cosh y \tanh . Para el análisis de estabilidad, primero se estableció la ecuación de lazo cerrado que se encuentra combinando el modelo dinámico del robot manipulador y la estructura matemática del esquema de control por moldeo de energía. Luego se demuestra la existencia y unicidad del punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado. Finalmente se demuestra la estabilidad asintótica a través de la propuesta de una función estricta de Lyapunov.

Palabras Clave: Robot Manipulador, Estabilidad de Lyapunov, Esquema de Control.

ABSTRACT.

In the present work, a hyperbolic type control scheme is presented with the asymptotic stability analysis for robot manipulator. The proposed control scheme is composed of hyperbolic functions, such as \sinh , \cosh and \tanh . For the stability analysis, the closed-loop equation was first established, which is found by combining the dynamic model of the robot manipulator and the mathematical structure of the energy molding control scheme. Then the existence and uniqueness of the equilibrium point of the closed-loop equation is demonstrated. Finally, the asymptotic stability is demonstrated through the proposal of a strict Lyapunov function.

Keywords: Robot Manipulator, Lyapunov Stability, Control Scheme.

1. INTRODUCCIÓN

Para que el robot manipulador de n grados de libertad realice una tarea específica, es necesario resolver el problema de la regulación en el espacio articular. Este problema de regulación o control de posición de robots manipuladores consiste en colocar el extremo final del robot en una posición deseada \mathbf{q}_d (constante en el tiempo) para cualquier condición inicial $[\mathbf{q}(0) \ \dot{\mathbf{q}}(0)]^T \in \mathbb{R}^{2n \times 1}$. Matemáticamente el problema se describe como diseñar un controlador $\boldsymbol{\tau}$ tal que la velocidad de movimiento $\dot{\mathbf{q}}(t)$ y el error de posición $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ convergen

asintóticamente a cero (al punto de equilibrio) $\forall t \geq 0$, sin importar las condiciones iniciales $\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{0})$ y $\dot{\mathbf{q}}(0)$, [1].

No obstante, los servomotores del robot manipulador no tienen una fuente ilimitada de torque generando una mecánica no modelada en el manipulador del robot. Esta problemática es tratada proponiendo controladores saturados [2].

Los esquemas de control se han modificado de forma que evitan esta problemática desde diferentes perspectivas. Una forma de tratar esta problemática ha sido usar funciones hiperbólicas, como en [3] donde se presenta una familia de controladores tipo hiperbólico y en [4] se utiliza un regulador tipo arcoseno hiperbólico. En ambas investigaciones se analiza la estabilidad asintótica global.

En [5], se propone un esquema de control difuso con pares acotados y se demuestra estabilidad asintótica global a través de la teoría de Lyapunov con una evaluación experimental. Otros trabajos que también proponen esquemas de control, han realizado un análisis de estabilidad de Lyapunov [6], [7], pero en otras ocasiones este análisis no es considerado [8], [9], [10].

La demostración asintótica global del punto de equilibrio de lazo cerrado, que se forma por la dinámica del robot y el esquema de control tipo hiperbólico propuesto, a través de una función estricta de Lyapunov, es una contribución importante de este trabajo. Se propone una función estricta de Lyapunov que satisfice ser una función definida positiva y su derivada, una función definida negativa.

2. MODELO DINÁMICO DEL ROBOT

El modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad, formado con eslabones rígidos conectados por articulaciones libres de elasticidad en cadena cinemática abierta, consideración la fricción viscosa, se puede escribir como [1], [11].

$$\boldsymbol{\tau} = M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + B\dot{\mathbf{q}} \quad (1)$$

donde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de coordenadas generalizadas o posiciones articulares, $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de velocidades articulares, $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de aceleraciones articulares; $M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, la cual es simétrica y definida positiva, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de fuerzas o pares gravitacionales obtenido como el gradiente de la energía potencial, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz diagonal definida positiva para el par de fricción viscoso y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de pares aplicados.

El modelo dinámico del robot manipulador presenta las siguientes propiedades:

Propiedad 1: Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante positiva $\beta_M > 0$ tal que, $\|M(\mathbf{q})\| \leq \lambda_{M(\mathbf{q})}^{max} \leq \beta_M, \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$; donde $\lambda_{M(\mathbf{q})}^{max}$ representa el valor propio máximo de la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$.

Propiedad 2: Para el caso de robots provistos únicamente de articulaciones rotacionales, existe una constante $k_{c_1} > 0$, tal que: $\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| = k_{c_1} \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|, \forall \mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Propiedad 3: La fricción viscosa satisface lo siguiente: $\lambda_B^{min} \|\dot{\mathbf{q}}\| \leq \|B\dot{\mathbf{q}}\| \leq \lambda_B^{max} \|\dot{\mathbf{q}}\|$; donde λ_B^{max} y λ_B^{min} son el valor propio máximo y mínimo de la matriz de coeficientes de fricción viscosa B , respectivamente.

Propiedad 4: La derivada temporal de la matriz de inercia y la matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis satisfacen: $\dot{M}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

Propiedad 5: La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la derivada con respecto al tiempo de la matriz de inercia $\dot{M}(\mathbf{q})$ satisfacen: $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T [\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \dot{\mathbf{q}} \equiv 0, \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Es decir, la matriz resultante $[\dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]$ es una matriz antisimétrica.

3. ESQUEMA DE CONTROL TIPO HIPERBÓLICO.

Se presenta el siguiente esquema de control tipo hiperbólico, que depende del error de posición y de la velocidad de movimiento del robot manipulador. Se agrego una compensación por gravedad, lo cual representa una gran ventaja para el análisis de estabilidad de Lyapunov y el rendimiento en los robots manipuladores:

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \frac{2 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^{2m-1} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{(1 + \tanh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^2)(1 + \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^{2m})} - K_v \frac{2 \sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}})^{2m-1} \cosh(\alpha \dot{\mathbf{q}})}{(1 + \tanh(\alpha \dot{\mathbf{q}})^2)(1 + \sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}})^{2m})} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (2)$$

donde $m \in \mathbb{N}$, es un número entero positivo, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, son números positivos, $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, es el vector de posición de error, $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, es el vector de velocidad y $K_v, K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$, son matrices diagonales definidas positivas. ||

Los términos del esquema de control serán representados de la siguiente forma:

$$\delta = \frac{2 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^{2m-1} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})}{(1 + \tanh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^2)(1 + \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}})^{2m})} \quad (3)$$

$$\omega = \frac{2 \sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}})^{2m-1} \cosh(\alpha \dot{\mathbf{q}})}{(1 + \tanh(\alpha \dot{\mathbf{q}})^2)(1 + \sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}})^{2m})} \quad (4)$$

donde:

$$\delta = \left[\begin{array}{c} \frac{2 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}_1)^{2m-1} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}_1)}{(1 + \tanh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}_1)^2)(1 + \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}_1)^{2m})} \\ \vdots \\ \frac{2 \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}_n)^{2m-1} \cosh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}_n)}{(1 + \tanh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}_n)^2)(1 + \sinh(\alpha \tilde{\mathbf{q}}_n)^{2m})} \end{array} \right] \quad (5)$$

$$\omega = \left[\begin{array}{c} \frac{2 \sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}}_1)^{2m-1} \cosh(\alpha \dot{\mathbf{q}}_1)}{(1 + \tanh(\alpha \dot{\mathbf{q}}_1)^2)(1 + \sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}}_1)^{2m})} \\ \vdots \\ \frac{2 \sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}}_n)^{2m-1} \cosh(\alpha \dot{\mathbf{q}}_n)}{(1 + \tanh(\alpha \dot{\mathbf{q}}_n)^2)(1 + \sinh(\alpha \dot{\mathbf{q}}_n)^{2m})} \end{array} \right] \quad (6)$$

Las ecuaciones (3) y (4), satisfacen la siguiente relación:

$$\delta \leq \begin{cases} \sqrt{n} \gamma_1, & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \sqrt{n} \gamma_1 \|x\|, & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (7)$$

$$\omega \leq \begin{cases} \sqrt{n} \gamma_2, & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \sqrt{n} \gamma_2 \|x\|, & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (8)$$

donde el número γ_1 y γ_2 , representan el límite superior (este es el valor máximo que depende del valor de m).

En la figura 1, se muestra la respuesta que tiene el control a diferentes valores de α . Asimismo, se le asigna el valor de 1 a la variable m . Este será el valor de m que se utilizará al momento de obtener los resultados.

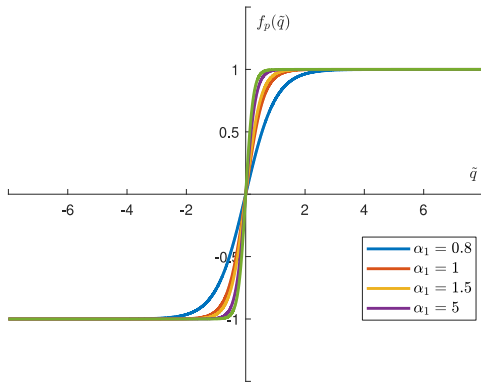


Figura 1: Respuesta del esquema de control a diferentes valores de α .

4. ECUACIÓN DE LAZO CERRADO ENTRE EL MODELO DINÁMICO Y EL ESQUEMA DE CONTROL

Se establece la ecuación de lazo cerrado entre el modelo dinámico y el esquema de control, igualando las ecuaciones (1) y (2). Se expresa el resultado como variables de estado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ M(\mathbf{q})^{-1} [K_p \delta - K_v \omega - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{q}} - B \dot{\tilde{q}}] \end{bmatrix} \quad (9)$$

Se tiene la siguiente consideración para las variables de estado $\tilde{q} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$. Para demostrar la existencia y unicidad del punto de equilibrio $[\tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T = [\mathbf{0} \ \mathbf{0}]^T$ de la ecuación en lazo cerrado (9), se toman las siguientes consideraciones:

- La primera componente de la ecuación en lazo cerrado, $-\dot{\tilde{q}} = -I\dot{\tilde{q}} \Leftrightarrow \dot{\tilde{q}} = \mathbf{0}$, ya que la matriz identidad $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva. Si $\dot{\tilde{q}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{q}(t) = \text{constante}$.
- La segunda componente, es la matriz de inercia $M(\mathbf{q})$, la cual es definida positiva y su matriz inversa existe $M(\mathbf{q})^{-1}$ y también es definida positiva.
- La matriz de fuerzas centrípetas y de Coriolis $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si $\dot{\tilde{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.
- En el caso de la fricción viscosa, se cumple que $B\dot{\tilde{q}} = \mathbf{0}$, si $\dot{\tilde{q}} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.
- Por diseño, la ganancia proporcional K_p y derivativa K_v son matrices definidas positivas.
- La función propuesta (δ y ω) de hipérbolas, se hace cero cuando $\dot{\tilde{q}} = \mathbf{0}$ o $\tilde{q} = \mathbf{0}$.

Por lo tanto, $[\tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}]^T = [\mathbf{0} \ \mathbf{0}]^T$ el punto de equilibrio existe y es único.

5. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD ASINTÓTICA DEL PUNTO DE EQUILIBRIO

5.1. Función estricta de Lyapunov

Ahora se procede a proponer una función estricta de Lyapunov, de la siguiente forma [4]:

$$V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{q}} + \mathcal{U}(K_p, \tilde{q}) - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{q}}}{1 + \|\tilde{q}\|} \quad (10)$$

A partir de la ecuación (10) se propone la siguiente función estricta de Lyapunov:

$$\begin{aligned} V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) &= \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{q}} \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\cosh(\alpha \tilde{q})^3 \ln(\sinh(\alpha \tilde{q})^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha \tilde{q}) \sinh(\alpha \tilde{q}) \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}))} \right]^T K_I \\ &\times \left[\frac{\cosh(\alpha \tilde{q})^3 \ln(\sinh(\alpha \tilde{q})^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha \tilde{q}) \sinh(\alpha \tilde{q}) \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}))} \right] \\ &- \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{q}}}{1 + \|\tilde{q}\|} \end{aligned} \quad (11)$$

donde ϵ_0 es cualquier número positivo. Es importante tener en cuenta que ϵ_0 solo se requiere para fines de análisis y, por lo tanto, no es necesario conocer su valor numérico. Solo se necesita para demostrar que existe [4].

Por otro lado, la función de Lyapunov estricta es una función definida positiva y su derivada temporal produce una función definida negativa. Por lo tanto, a través del método directo de Lyapunov se puede concluir la estabilidad asintótica global. La ecuación (11) puede ser reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) &= \left[\dot{\tilde{q}} - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T}{1 + \|\tilde{q}\|} \right]^T M(\mathbf{q}) \left[\dot{\tilde{q}} - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T}{1 + \|\tilde{q}\|} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\cosh(\alpha \tilde{q})^3 \ln(\sinh(\alpha \tilde{q})^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha \tilde{q}) \sinh(\alpha \tilde{q}) \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}))} \right]^T K_I \\ &\times \left[\frac{\cosh(\alpha \tilde{q})^3 \ln(\sinh(\alpha \tilde{q})^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha \tilde{q}) \sinh(\alpha \tilde{q}) \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}))} \right] \\ &- \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0^2 \tilde{q}^T M(\mathbf{q}) \dot{\tilde{q}}}{[1 + \|\tilde{q}\|]^2} \end{aligned} \quad (12)$$

Por simplicidad el término que contiene las funciones hiperbólicas de la ecuación (12), se va expresar de la siguiente forma:

$$\varphi = \left[\frac{\cosh(\alpha \tilde{q})^3 \ln(\sinh(\alpha \tilde{q})^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha \tilde{q}) \sinh(\alpha \tilde{q}) \ln(\sinh(\alpha \tilde{q}))} \right] \quad (13)$$

donde:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\cosh(\alpha\tilde{q}_1)^3 \ln(\sinh(\alpha\tilde{q}_1)^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha\tilde{q}_1) \sinh(\alpha\tilde{q}_1) \ln(\sinh(\alpha\tilde{q}_1))}} \\ \vdots \\ \sqrt{\frac{\cosh(\alpha\tilde{q}_n)^3 \ln(\sinh(\alpha\tilde{q}_n)^{2m} + 1)}{\cosh(2\alpha\tilde{q}_n) \sinh(\alpha\tilde{q}_n) \ln(\sinh(\alpha\tilde{q}_n))}} \end{bmatrix} \quad (14)$$

La ecuación (3) satisface la siguiente relación:

$$\delta \leq \begin{cases} \sqrt{n}\rho, & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \sqrt{n}\rho\|x\|, & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (15)$$

Para el análisis de estabilidad por Lyapunov, primero se demuestra que la función estricta de Lyapunov es definida positiva. El primer término de la ecuación (12), tiene una forma cuadrática y se sabe que $M(q)$ es definida positiva, por lo tanto, este término es definido positivo. De manera similar para el segundo término, también es definido positivo debido a que K_p es una matriz diagonal definida positiva. ϵ_0 es una constante positiva tal que satisface (16); por lo tanto, la función candidata de Lyapunov (12) es una función definida positiva.

$$0 < \epsilon_0 < \sqrt{\frac{\lambda_{K_p}^{min} \rho}{\beta}} \quad (16)$$

5.2. La derivada temporal de la función estricta de Lyapunov

Ahora, se realiza la derivada temporal de la función estricta de Lyapunov propuesta, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - \delta K_p q \\ &- \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T M(q) \dot{q}}{1 + \|\tilde{q}\|} - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T M(q) \dot{q}}{1 + \|\tilde{q}\|} + \frac{\epsilon_0 \dot{q}^T M(q) \dot{q}}{1 + \|\tilde{q}\|} \\ &- \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T \dot{q} \tilde{q}^T M(q) \dot{q}}{\|\tilde{q}\| [1 + \|\tilde{q}\|]^2} \end{aligned} \quad (17)$$

En la ecuación (17), reemplazamos el valor de \dot{q} y usamos las propiedades (4) y (5), obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &= -\dot{q}^T K_v \omega - \dot{q}^T B \dot{q} - \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T}{1 + \|\tilde{q}\|} K_p \delta \\ &+ \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T}{1 + \|\tilde{q}\|} K_v \omega + \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T}{1 + \|\tilde{q}\|} B \dot{q} \\ &- \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T C(q, \dot{q}) \dot{q}}{1 + \|\tilde{q}\|} + \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T M(q) \dot{q}}{1 + \|\tilde{q}\|} \\ &- \frac{\epsilon_0 \tilde{q}^T \dot{q} \tilde{q}^T M(q) \dot{q}}{\|\tilde{q}\| [1 + \|\tilde{q}\|]^2} \end{aligned} \quad (18)$$

Ahora, procedemos a obtener las cotas superiores de todos los términos de la función de Lyapunov haciendo uso de las propiedades (1), (2), (3) y de la relación de las funciones hiperbólicas (7) y (8):

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &\leq -\lambda_{K_p}^{min} \rho_1 \|\dot{q}\|^2 - \lambda_B^{min} \|\dot{q}\|^2 - \frac{\epsilon_0 \|\tilde{q}\|^2}{1 + \|\tilde{q}\|} \lambda_{K_p}^{min} \\ &+ \frac{\epsilon_0 \|\tilde{q}\| \rho_2 \|\dot{q}\|}{1 + \|\tilde{q}\|} + \frac{\epsilon_0 \|\tilde{q}\| \lambda_B^{max} \|\dot{q}\|}{1 + \|\tilde{q}\|} \\ &- \epsilon_0 K_c \|\dot{q}\|^2 + \frac{\epsilon_0 \beta}{1 + \|\tilde{q}\|} \|\dot{q}\|^2 \\ &- \beta \epsilon_0 \|\dot{q}\|^2 \end{aligned} \quad (19)$$

Después de realizar agrupaciones algebraicas y reducción de términos, la ecuación (19) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) &\leq - \left[\lambda_{K_p}^{min} \rho_1 + \lambda_B^{min} - \frac{\epsilon_0 \beta}{1 + \|\tilde{q}\|} + \beta \epsilon_0 \right] \|\dot{q}\|^2 \\ &+ \left[\frac{\epsilon_0 \rho_2}{1 + \|\tilde{q}\|} + \frac{\epsilon_0 \lambda_B^{max}}{1 + \|\tilde{q}\|} \right] \|\tilde{q}\| \|\dot{q}\| \\ &- \frac{\epsilon_0 \|\tilde{q}\|^2}{1 + \|\tilde{q}\|} \lambda_{K_p}^{min} \end{aligned} \quad (20)$$

Le damos forma de una estructura cuadrática a la ecuación (20):

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) \leq - \begin{bmatrix} \|\tilde{q}\| \\ \|\dot{q}\| \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \|\tilde{q}\| \\ \|\dot{q}\| \end{bmatrix} \quad (21)$$

donde:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Los elementos de la matriz Q esta definidos por:

$$q_{11} = \frac{\epsilon_0}{1 + \|\tilde{q}\|} \lambda_{K_p}^{min} \quad (23)$$

$$q_{22} = \lambda_{K_p}^{min} \rho_1 + \lambda_B^{min} - \frac{\epsilon_0 \beta}{1 + \|\tilde{q}\|} + \beta \epsilon_0 \quad (24)$$

$$q_{12} = q_{21} = \frac{\epsilon_0 \rho_2}{1 + \|\tilde{q}\|} + \frac{\epsilon_0 \lambda_B^{max}}{1 + \|\tilde{q}\|} \quad (25)$$

Como la ecuación (21), es definida negativa por lo tanto se demuestra estabilidad asintótica. Con esto se logra que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{q}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 1} \forall t \geq \mathbf{0}$$

6. RESULTADOS

En esta sección se describe los resultados obtenidos de la simulación del esquema de control tipo hiperbólico, implementado en un robot manipulador antropomórfico de 2 grados de libertad de transmisión directa, que se muestra en la figura 1. Esto se hace para avalar la eficacia, rendimiento y resultados teóricos del esquema de control propuesto. La simulación se llevó a cabo en el software MATLAB. Este enfoque permite evaluar los fenómenos físicos del robot manipulador, sin la necesidad de tenerlo físicamente.



Figura 2: Robot Manipulador.

La actividad que se llevó a cabo en la simulación, consiste en posicionar a las articulaciones del hombro y el codo del robot manipulador que se encuentran en posición de casa $[0 \ 0]^T$ grados, hacia una posición deseada $[45 \ 90]^T$ grados. Los parámetros numéricos del robot de dos grados de libertad han sido obtenidos a través de identificación paramétrica, los cuales son presentados en [1].

Articulación	Modelo	Par máx	Resolución
Hombro	DM-1150	150 [Nm]	1024.0
Codo	DM-1050	15 [Nm]	1024.0

Tabla 1 Características de los servomotores

En la tabla 1, se muestran las características de los servomotores. Con estos datos se propone la siguiente regla de sintonía para K_p en ambas articulaciones:

$$K_{p1} = 150 \times 0.95 \quad (26)$$

$$K_{p2} = 15 \times 0.805 \quad (27)$$

La variable K_{p1} corresponde al primer eslabón y K_{p2} corresponde al segundo eslabón. Para las ganancias derivativas se tiene la siguiente regla de sintonía:

$$K_{v1} = 0.95 \times K_{p1} \quad (28)$$

$$K_{v2} = 1.055 \times K_{p2} \quad (29)$$

Las variables α y β , son las que permiten que la respuesta de la función hiperbólica se estabilice más rápido, fueron sintonizadas con los siguientes valores:

$$\alpha = 0.645 \quad (30)$$

$$\beta = 1.1085 \quad (31)$$

En la figura 3, se muestra el error de posición del robot manipulador de 2 grados de libertad para ambas articulaciones, respectivamente. Por medio del control tipo hiperbólico, se puede observar que los errores de posición llegan asintóticamente a cero. También se tiene en cuenta que cada posición converge asintóticamente a cero sin generar sobre impulsos en régimen transitorio y de forma suave y rápida llega al estado estacionario, en un tiempo menor a 1 segundo. En otras palabras, el esquema de control tipo hiperbólico cumple con el objetivo de llevar al robot manipulador a la posición deseada.

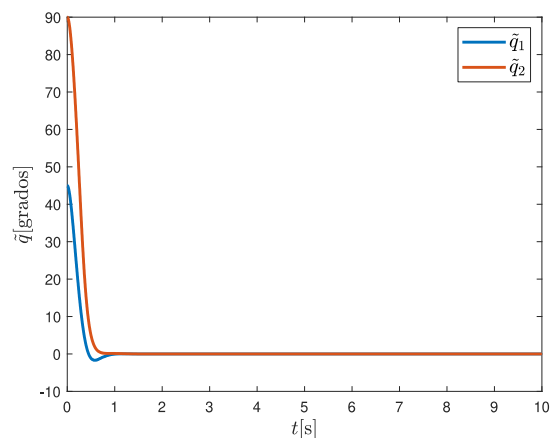


Figura 3: Error de posición.

De igual forma, en la figura 4 se muestra las velocidades de las articulaciones del robot manipulador. Se puede observar que de igual forma, el error de posición y las velocidades de movimiento llegan asintóticamente a cero.

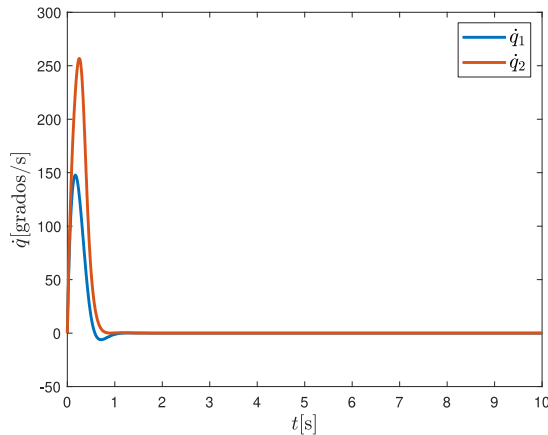


Figura 4: Velocidad del robot.

Por lo tanto, de forma cualitativa a través de la simulación se ha podido mostrar que el robot manipulador llega al punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado de forma asintótica. Con las figuras 3 y 4, se demuestra que el esquema de control propuesto tiene un buen desempeño.

En la figura 5, se puede observar que la energía que se le suministra al robot manipulador, no sobrepasa los límites físicos permitidos, los cuales se muestran en la tabla 1. Esto se debe a la correcta sintonización de las ganancias constantes y a la regla de sintonía implementada.

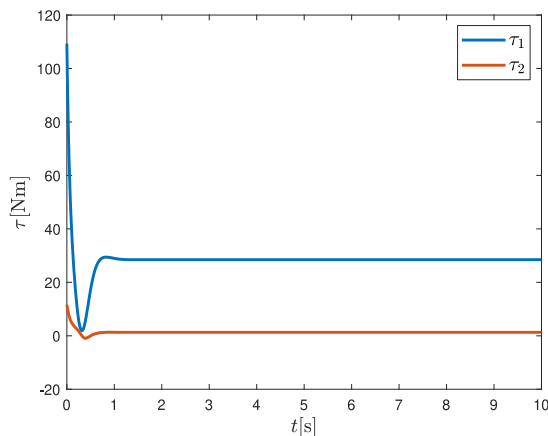


Figura 5: Pares aplicados.

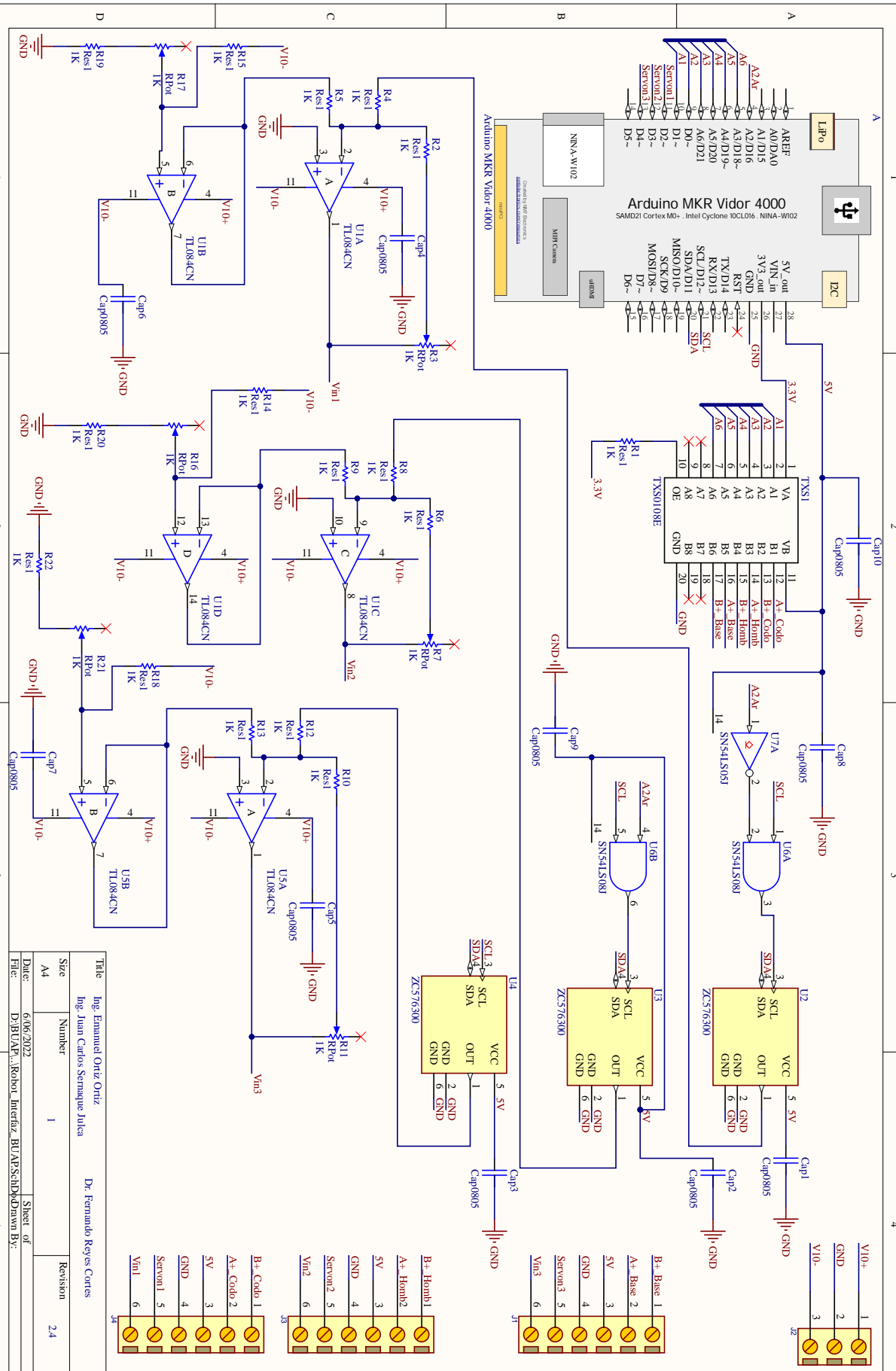
7. CONCLUSIÓN

En este trabajo se ha presentado un nuevo esquema de control tipo hiperbólico para resolver el problema de control de posición de los robots manipuladores en el espacio articular. Según el método directo de Lyapunov, este esquema está respaldado por un riguroso análisis de estabilidad asintótica global en el sentido de Lyapunov. Para esto se propuso una función estricta de Lyapunov, la cual cumple con ser una función definida positiva y su derivada temporal produce una función definida negativa, lo cual permite establecer condiciones que garanticen la estabilidad asintótica y global. El rendimiento del esquema de control propuesto, tiene una buena respuesta transitoria y pequeños errores de posición de estado estable. Asimismo, la simulación nos permite tener un respaldar del análisis teórico presentado.

REFERENCIAS

- [1] F. Reyes Cortés, Control de Robots Manipuladores. México DF, México: Grupo Editorial Alfaomega, 2011.
- [2] B. Sanchez García, F. Reyes Cortés, B. Al-Hadithi, and O. Felix, "Global saturated regulator with variable gains for robot manipulators," *Journal of Robotics and Control (JRC)*, vol. 2, no. 6, pp. 571–581, 2021.
- [3] F. Reyes-Cortes, O. Felix, J. Cid, and G. Alonso-Aruffo, "A family of hyperbolic-type control schemes for robot manipulators," *Kybernetika*, vol. 55, no. 3, pp. 561–585, 2019.
- [4] F. Reyes-Cortes and B. M. Al-Hadithi, "An asinh-type regulator for robot manipulators with global asymptotic stability," *Automatika*, vol. 61, no. 4, pp. 574–586, 2020.
- [5] V. Santibáñez, R. Kelly, and M. Llama, "A novel global asymptotic stable set-point fuzzy controller with bounded torques for robot manipulators," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 13, no. 3, pp. 362–372, 2005.
- [6] Y. Tianchi, L. Zhongbao, and W. Guiping, "Adaptive sliding mode control of robot based on fuzzy neural network," *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, vol. 12, pp. 1–13, 2020.
- [7] M. Jafari, G. Márquez, J. Selberg, M. Jia, H. Dechiraju, P. Pansodtee, M. Teodorescu, M. Rolandi, and M. Gomez, "Feedback control of bioelectronic devices using machine learning," *IEEE Control Systems Letters*, vol. 5, no. 4, pp. 1133–1138, October 2021.
- [8] Y. Cao and Y. D. Song, "Adaptive pid-like fault-tolerant control for robot manipulators with given performance specifications," *International Journal of Control*, vol. 93, no. 3, pp. 377–386, 2020.
- [9] Q. Zhang, G. Yin, and L. Y. Wang, "A deep filtering approach for control of partially observed systems," *IEEE Control Systems Letters*, vol. 5, no. 4, pp. 1189–1194, October 2021.
- [10] H. Tsukamoto, S.-J. Chung, and J.-J. E. Slotine, "Neural stochastic contraction metrics for learning-based control and estimation," *IEEE Control Systems Letters*, vol. 5, no. 5, pp. 1825–1830, November 2021.
- [11] R. Kelly, V. Davila, and A. Loria, *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. London, United Kingdom: Springer-Verlag, 2005.

c. Esquemático de la interfaz gráfica



Title	Ing. Emmanuel Ortiz Ortiz		
Author	Ing. Juan Carlos Serrague Julia		
Date	6/06/2022	Number	1
Size	A4	Revision	2.4
File	D:\BU\AV\...Robot_Interfaces_BU\AR\SchD\Drawn By:		

E. Prototipo experimental - Parte 1

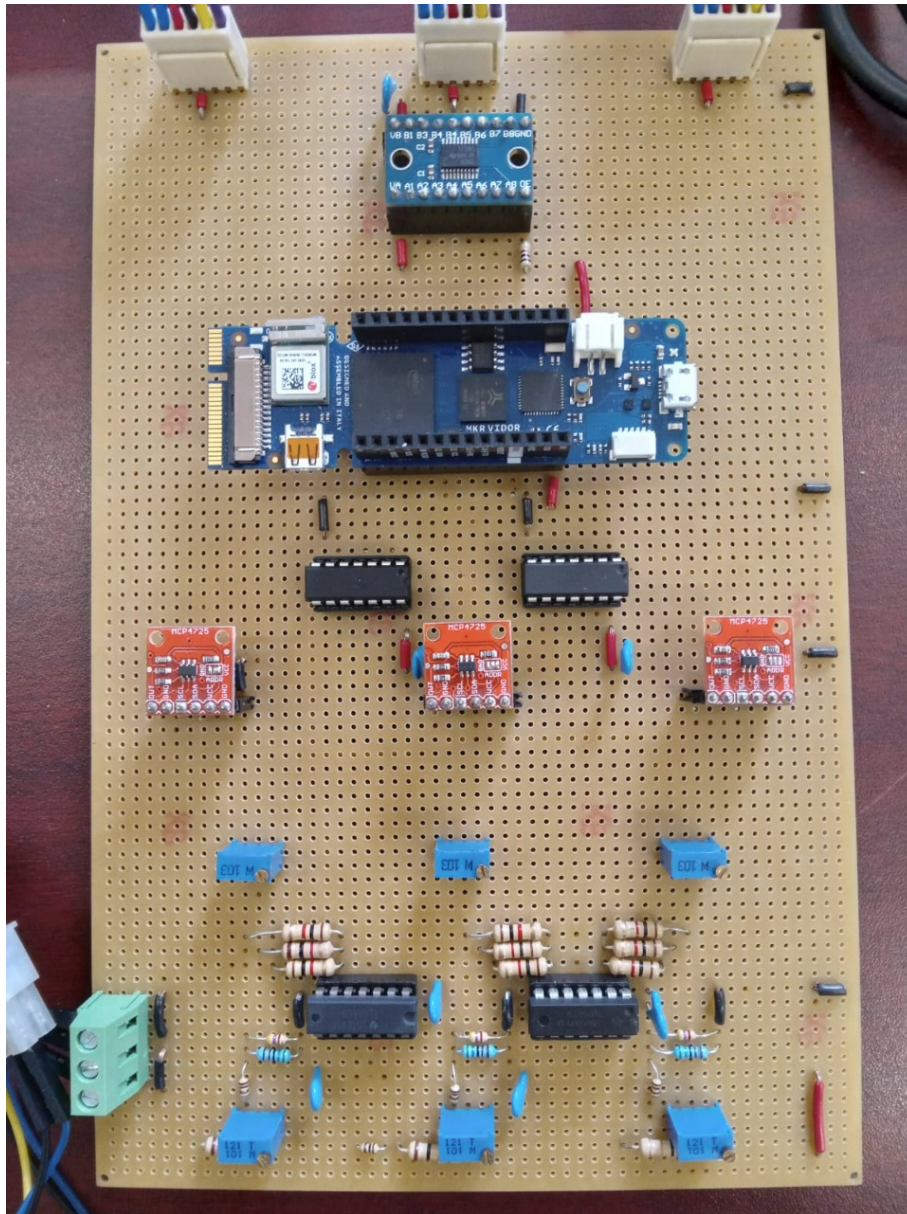


Figura 6.16: Prototipo experimental.

D. Prototipo experimental - Parte 2

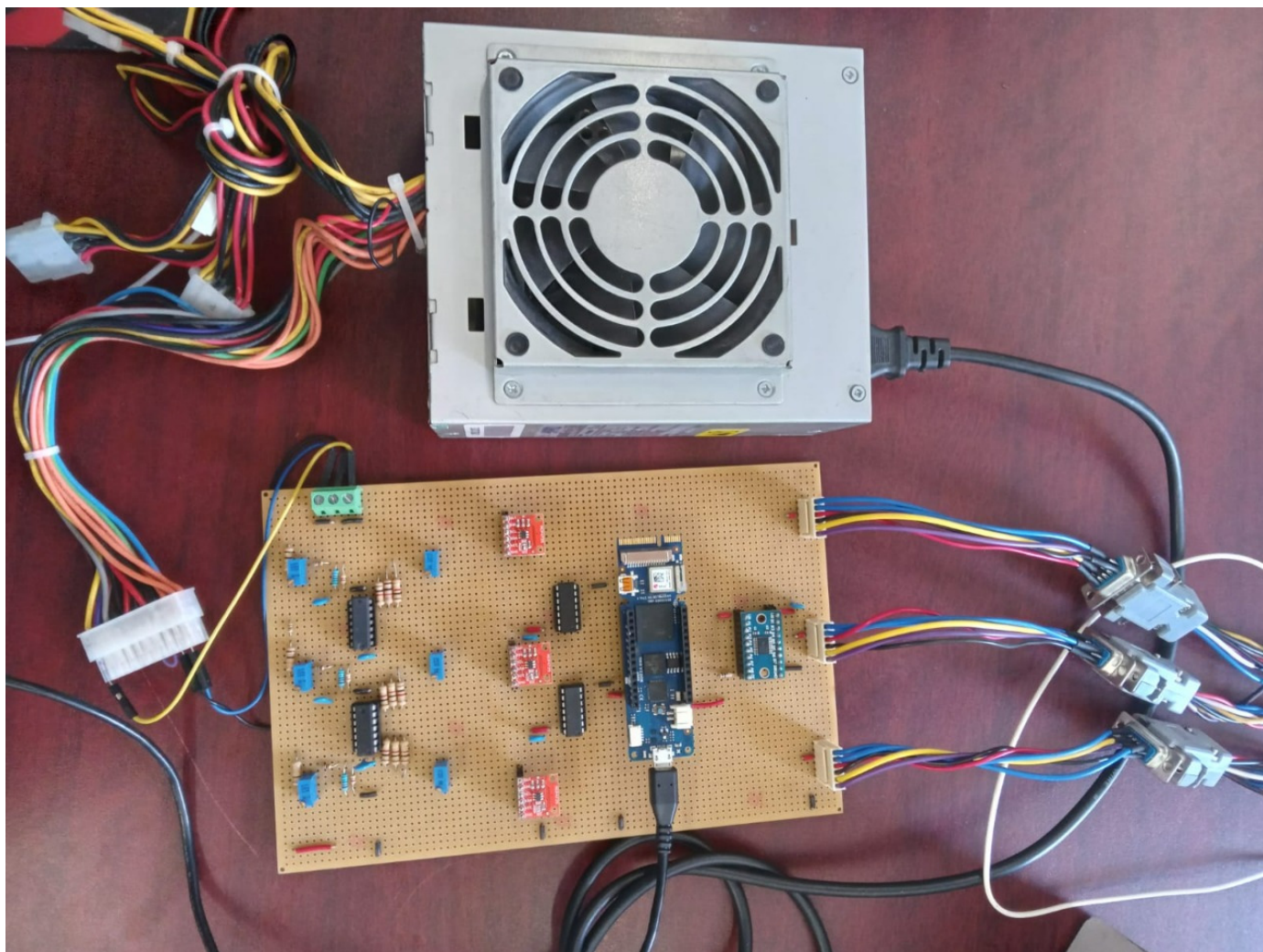


Figura 6.17: Prototipo experimental.

D. Prototipo experimental - Parte 3

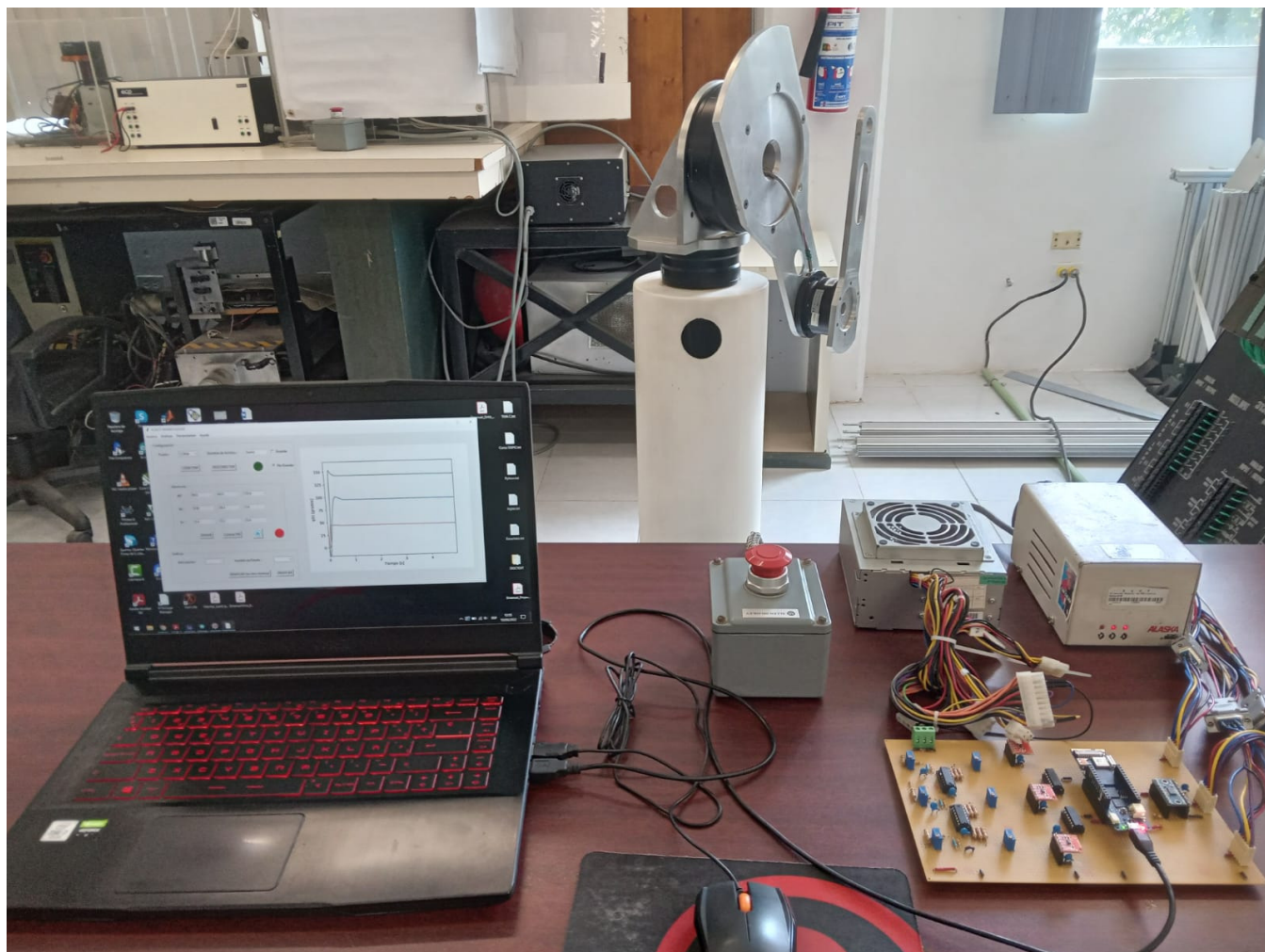


Figura 6.18: Prototipo experimental.

Bibliografía

- [1] K. Kozłowski, *Modelling and Identification in Robotics*. London, England: Springer-Verlag, 2008.
- [2] R. Isermann and M. Münchhof, *Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications*. Berlin - Heidelberg, Germany: Springer, 2011.
- [3] F. R. Cortés, *Robótica : Control de Robots Manipuladores*. México DF, México: Grupo Editorial Alfaomega, 2011.
- [4] F. R. Cortés, *Matlab aplicado Robótica y Mecatrónica*. México DF, México: Grupo Editorial Alfaomega, 2012.
- [5] R. A. Boby and A. Klimchik, “Combination of geometric and parametric approaches for kinematic identification of an industrial robot,” *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 71, p. 102142, October 2021.
- [6] P. Hsu, M. Bodson, S. Sastry, and B. Paden, “Adaptive identification and control for manipulators without using joint accelerations,” *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 4, pp. 1210–1215, April 1987.
- [7] C. C. de Wit and A. Aubin, “Parameters identification of robots manipulators via sequential hybrid estimation algorithms,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 23, pp. 163–168, October 1990.
- [8] Z. Lu, K. B. Shimoga, and A. A. Goldenberg, “Experimental determination of dynamic parameters of robotic arms,” *Journal of Robotic Systems*, vol. 10, pp. 1009–1029, December 1993.
- [9] M. Gautier, W. Khalil, and P. Restrepo, “Identification of the dynamic parameters of a closed loop robot,” *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and, Automation*, vol. 3, pp. 3045–3050, August 1995.
- [10] P. K. Khosla and T. Kanade, “Parameter identification of robot dynamics,” *Proceedings of 24th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1754–1760, December 1985.
- [11] C. G. Atkeson, C. H. An, and J. M. Hollerbach, “Estimation of inertial parameters of manipulator loads and links,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 5, pp. 101–119, December 1986.
- [12] M. Gautier and W. Khalil, “On the identification of the inertial parameters of robots,” *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2264–2269, December 1988.

- [13] M. Gautier and W. Khalil, “Exciting trajectories for the identification of base inertial parameters of robots,” *The International Journal of Robotics Research*, vol. 11, pp. 362–375, August 1992.
- [14] C. S. M. Prüfer and F. Wahl, “Identification of robot dynamics with differential and integral models: A comparison,” *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 1, pp. 340–345, May 1994.
- [15] M. Gautier, “A comparison of filtered models for dynamic identification of robots,” *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control. Kobe, Japan*, pp. 875–880, December 1996.
- [16] W. Khalil and P. P. Restrepo, “An efficient algorithm for the calculation of the filtered dynamic model of robots,” *Proceedings of the 1996 International Conference on Robotics and Automation. Minneapolis, Minnesota*, pp. 323–328, April 1996.
- [17] F. Reyes and R. Kelly, “Experimental evaluation of identification schemes on a direct drive robot,” *Robotica. Cambridge University Press*, vol. 15, pp. 563–571, September 1997.
- [18] F. Reyes and R. Kelly, “On parameter identification of robot manipulators,” *Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Albuquerque. New Mexico*, pp. 1910–1915, April 1997.
- [19] F. Reyes and R. Kelly, “Dynamic identification of robots with power model,” *Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Albuquerque. New Mexico*, vol. 15, pp. 1922–1927, April 1997.
- [20] J. C. Basilio and M. V. Moreira, “State-space parameter identification in a second control laboratory,” *IEEE Transactions on Education*, vol. 47, pp. 204–210, May 2004.
- [21] C. Chávez-Olivares, F. R. Cortés, E. González-Galván, M. Mendoza-Gutierrez, and I. Bonilla-Gutierrez, “Experimental evaluation of parameter identification schemes on a direct-drive robot,” *Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 226, pp. 1419–1431, May 2012.
- [22] P. O. V. M. Gautier, A. Janot, “A new class-loop output error method for parameter identification of robot dynamics,” *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, vol. 21, pp. 428–444, March 2013.
- [23] C. Yang, Y. Jiang, W. He, J. Na, Z. Li, and B. Xu, “Adaptive parameter estimation and control design for robot manipulators with finite-time convergence,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 65, pp. 8112–8123, October 2018.
- [24] N. C. Ruiz-Hidalgo, A. B. Ortega, A. A. Pliego, J. Colin-Ocampo, and W. M. A. Rosado, “Dynamic analysis and control of a three-revolute-prismatic-spherical parallel robot by algebraic parameters identification,” *International Journal of Advanced Robotic Systems*, pp. 1–12, May 2019.
- [25] D. C. Sousa and R. Cortesão, “Inertia tensor properties in robot dynamics identification: A linear matrix inequality approach,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 24, pp. 406–411, February 2019.

- [26] S. K. Pradhan and B. Subudhi, “Position control of a flexible using a new nonlinear self-tuning pid controller,” *IEEE/CAA Journal of Automatica SINICA*, vol. 7, pp. 136–149, January 2020.
- [27] M. Jafari, G. Marquez, J. Selberg, M. Jia, H. Dechiraju, P. Pansodtee, M. Teodorescu, M. Rolandi, and M. Gomez, “Feedback control of bioelectronic devices using machine learning,” *IEEE Control Systems Letters*, vol. 5, pp. 1133–1138, October 2021.
- [28] Q. Zhang, G. Yin, and L. Y. Wang, “A deep filtering approach for control of partially observed systems,” *IEEE Control Systems Letters*, vol. 5, pp. 1189–1194, October 2021.
- [29] H. Tsukamoto, S.-J. Chung, and J.-J. E. Slotine, “Neural stochastic contraction metrics for learning-based control and estimation,” *IEEE Control Systems Letters*, vol. 5, pp. 1825–1830, November 2021.
- [30] G. Luo, L. Zou, Z. Wang, C. Lv, J. Ou, and Y. Huang, “A novel kinematic parameters calibration method for industrial robot based on levenberg-marquardt and differential evolution hybrid algorithm,” *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 71, p. 102165, October 2021.
- [31] Y. Li, D. Wang, S. Zhou, and X. Wang, “Intelligent parameter identification for robot servo controller based on improved integration method,” *Sensors*, vol. 21, June 2021.
- [32] G. Gao, G. Sun, J. Na, Y. Guo, and X. Wu, “Structural parameter identification for 6 dof industrial robots,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 113, pp. 145–155, December 2018.
- [33] M. Brunot, A. Janot, P. Young, and F. Carrillo, “An improved instrumental variable method for industrial robot model identification,” *Control Engineering Practice*, vol. 74, pp. 107–117, May 2018.
- [34] J. Smith and M. Mistry, “Online simultaneous semi-parametric dynamics model learning,” *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 5, pp. 2039–2046, February 2020.
- [35] S. Liao, Q. Zeng, K. F. Ehmann, and J. Cao, “Parameter identification and nonparametric calibration of the tri-pyramid robot,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 25, pp. 2309–2317, June 2020.
- [36] R. A. Boby, “Kinematic identification of industrial robot using end-effector mounted monocular camera bypassing measurement of 3-d pose,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 2021, pp. 383–394, March 2021.
- [37] G. Zhao, P. Zhang, G. Ma, and W. Xiao, “System identification of the nonlinear residual errors of an industrial robot using massive measurements,” *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 59, pp. 104–114, October 2019.
- [38] C. L. Carreón, S. Vergara, and M. A. Vargas, “Parameter identification of a robot arm manipulator based on a convolutional neural network,” *IEEE Access*, vol. 10, pp. 55002–55019, May 2022.

- [39] I. Ponce, “Parametrización de un péndulo simple con una plataforma basada en arduino,” *UTCJ Theorema Revista Científica*, vol. 1, pp. 150–155, Enero 2021.
- [40] D. C. Barreda, “Exoesqueleto para codo,” Master’s thesis, BUAP, México, 2021.
- [41] J. M. R. Rodríguez, “Modelado y control de un sistema subactuado de 4 grados de libertad,” Master’s thesis, BUAP, México, 2018.
- [42] E. G. C. Méndez, “Modelado y control de un sistema levitador magnético,” Master’s thesis, BUAP, México, 2018.
- [43] A. L. R. Zurita, “Control de posición de un robot manipulador de tres grados de libertad,” Master’s thesis, BUAP, México, 2019.
- [44] J. D. J. M. Mora, “Tarjeta para controlar 3 grados de libertad de robots vía wifi,” Master’s thesis, BUAP, México, 2017.
- [45] Y. Han, J. Wu, C. Liu, and Z. Xiong, “An iterative approach for accurate dynamic model identification of industrial robots,” *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 36, pp. 1577–1594, October 2020.
- [46] R. N. Jazar, *Theory of applied robotics: Kinematics, dynamics, and control (2nd Edition)*. New York, US: Springer, 2010.
- [47] R. Kelly and V. Santibáñez, *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*. Madrid, España: Pearson Prentice–Hall, 2003.
- [48] K. J. Åström and C. Canudas de Wit, “Revisiting the lugre friction model,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 28, pp. 101–114, December 2008.
- [49] R. Kelly, V. Davila, and A. Loria, *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. London, United Kingdom: Springer-Verlag, 2005.
- [50] C. J. Martínez, “Implementación de un cnc con 3 grados de libertad aplicado a impresión 3d,” Master’s thesis, BUAP, México, 2017.
- [51] S. Brown and Z. Vranesic, *Fundamentos de lógica digital con diseño VHDL*. Distrito Federal, México: McGraw–Hill Interamericana, 2007.
- [52] T. FLOYD, *Fundamentos de los sistemas digitales. 9th ed.* Madrid, España: Pearson Educación S.A., 2006.
- [53] T. instruments, *TXS0108E 8-Bit Bi-directional, Level-Shifting, Voltage Translator for Open-Drain and Push-Pull Applications*, 2020.
- [54] Microchip, *12-Bit Digital to Analog Converter with EEPROM Memory in SOT-23-6*, 2009.
- [55] T. instruments, *SN5408, SN54LS08, SN54S08 SN7408, SN74LS08, SN74S08 QUADRUPLE 2-INPUT POSITIVE-AND GATES*, 1988.

- [56] T. instruments, *SN54LS05, SN54S05, SN7405, SN74LS05, SN74S05 HEX INVERTERS WITH OPEN-COLLECTOR OUTPUTS*, 2003.
- [57] T. instruments, *TL08xx FET-Input Operational Amplifiers*, 2021.
- [58] B. Sanchez García, F. Reyes Cortés, B. Al-Hadithi, and O. Felix, “Global saturated regulator with variable gains for robot manipulators,” *Journal of Robotics and Control (JRC)*, vol. 2, no. 6, pp. 571–581, 2021.
- [59] F. Reyes-Cortes and B. M. Al-Hadithi, “An asinh-type regulator for robot manipulators with global asymptotic stability,” *Automatika*, vol. 61, no. 4, pp. 574–586, 2020.