BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

POSGRADO EN MATEMÁTICAS

CUANDO LOS MÓDULOS CÍCLICOS PROPIOS SON IMÁGENES HOMOMORFAS DE INYECTIVOS

Tesis que para obtener el título de:

Maestro en Ciencias Matemáticas

presenta:

Luis Enrique Pineda Ramírez

Director de Tesis:

Dr. César Cejudo Castilla

Puebla, Puebla. Octubre de 2022.

BUAP

“HUP, 50 años de enseñanza y salud”

DR. SEVERINO MUÑOZ AGUIRRE
SECRETARIO DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el C:

LUIS ENRIQUE PINEDA RAMÍREZ

estudiante de la Maestría en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 10 de octubre de 2022, con la tesis titulada:

Cuando los módulos cíclicos propios son imágenes homomorfas de inyectivos

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 11 de octubre de 2022

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · 1578 · FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS - SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO

DRA. PATRICIA DOMÍNGUEZ SOTO
COORDINADORA DEL POSGRADO EN MATEMÁTICAS.

Agradecimientos

En esta bella etapa de la maestría hay muchas personas a las que agradecer el poder culminarla de una manera satisfactoria. A mi familia, su apoyo incondicional es algo que jamás podré terminar de agradecer, todo lo que soy y seré se lo debo a ustedes; la vida me bendijo por tenerlos a mi lado. Mi madre es la persona que más me ha motivado a buscar siempre mi mejor versión en todo sentido, la vida no la entendería sin su enorme influencia y amor en mí. Te amo, mamá, vamos por más.

A mis profesores, agradezco su importante labor en la transmisión de un conocimiento invaluable y sembrar en mi la semilla de un espíritu que siempre busca crecer en todo sentido. En estos últimos años, su labor fue más magna que nunca.

A mis sinodales, les agradezco infinitamente su tiempo y dedicación en ayudar a este trabajo para alcanzar su mejor versión posible. Gracias, Dr. Iván Fernando Vilchis Montalvo. Gracias, Dr. Alejandro Alvarado García. Gracias, Dr. Mauricio Gabriel Medina Bárcenas. Gracias, Dr. Iván Martínez Ruiz.

A muy estimado asesor, el Dr. César Cejudo Castilla, le agradezco demasiado la guía y ejemplo que es para mí dentro del mundo del álgebra e incluso de la vida. Uno se siente afortunado de encontrar a personas así en la vida. En esta etapa fue un placer trabajar juntos.

Introducción

Es conocido que todo R-módulo izquierdo se puede sumergir en un R-módulo izquierdo inyectivo, mientras que no siempre ocurre que todo R-módulo izquierdo es imagen homomorfa (o cociente) de algún R-módulo izquierdo inyectivo. Hay clases de anillos que se pueden caracterizar por esta propiedad. Por ejemplo, los anillos R en los que todo R-módulo izquierdo es imagen homomorfa de algún R-módulo izquierdo inyectivo son precisamente los anillos cuasi-Frobenius. Una pregunta natural es qué sucede cuando esto se restringe a los R-módulos cíclicos, es decir, preguntarse qué propiedades y caracterizaciones tienen aquellos anillos que satisfacen que todo R-módulo izquierdo cíclico es imagen homomorfa de algún R-módulo izquierdo inyectivo. Esta situación se vuelve no trivial cuando el anillo (visto como módulo) es excluido de la hipótesis. Así que el objetivo de este trabajo es estudiar la estructura de anillos en los cuales todo módulo izquierdo cíclico propio (es decir, módulos cíclicos que no son isomorfos al anillo visto como módulo) es imagen homomorfa de algún módulo izquierdo inyectivo.

En 2011, Aydoğdu y López-Permouth [3] estudiaron una perspectiva alterna en el análisis de la inyectividad de un módulo, mediante un concepto al que llaman subinyectividad. Con base en resultados de este artículo, es posible ver que los módulos cíclicos propios tienen una estrecha relación con el concepto de subinyectividad. En la década de los 70, Faith [6] trabajó sobre la estructura de anillos que, en particular, cumplen la propiedad de que todo R-módulo izquierdo cíclico propio es imagen homomorfa de algún R-módulo izquierdo inyectivo, más precisamente estudió anillos-PCI, logrando una importante clasificación de los mismos. Por otro lado, en el resultado principal de [8] los autores describen la estructura de los anillos que satisfacen que sus módulos cíclicos propios son proyectivos o inyectivos, siendo un resultado clave para establecer, en el segundo capítulo de este trabajo, una relación entre anillos hereditarios y dominios-PCI. Recientemente, en 2021, se publicó un artículo de Elif Tuğçe Meriç llamado "When proper cyclics are homomorphic image of injectives" en el cual se estudian anillos R con la propiedad de que todo R-módulo izquierdo cíclico propio es imagen homomorfa de algún módulo izquierdo inyectivo, siendo este el artículo principal del cual se estudian los resultados para este trabajo. Tal propiedad tiene importantes conexiones con conceptos tratados en artículos de hace décadas, por ejemplo con el concepto de anillo $\aleph$-QF3 que se encuentra en [11] y que fue publicado por Yutaka Kawada. Con este preámbulo es evidente lo profundo e interesante que puede ser el estudio de los módulos cíclicos propios.

Respecto a la estructura del presente trabajo, se tienen cuatro capítulos. El primer capítulo consta de preliminares en los que se abordan conceptos y demostraciones básicas de anillos y teoría de módulos, los cuales serán de gran utilidad para los posteriores capítulos. En el Capítulo 2 se define la propiedad (P), misma que será central en la mayoría de resultados, y se presentan algunas primeras consecuencias de anillos que satisfacen tal propiedad. En el capítulo 3 se presentan algunas caracterizaciones de anillos que satisfacen la propiedad (P), entre ellas una que está relacionada con los anillos $\aleph$-QF3 izquierdos, además de ser de interés analizar cuando esta propiedad esta presente en los anillos artinianos. De los resultados del Capítulo 3 se podrá concluir que existen anillos que satisfacen (P) pero no son cuasi-Frobenius. Finalmente, en el Capítulo 4 se estudian K-álgebras de Artin, buscando establecer que una K-álgebra de Artin satisface la propiedad (P)

si y solo si la K-álgebra en cuestión es un anillo cuasi-Frobenius, por lo que en este caso sí se tendrá la equivalencia. Para ello, se necesitarán de forma auxiliar algunos resultados referentes a dualidades entre ciertas categorías de módulos, por lo que se dedica toda la sección 4.2 a presentar los resultados pertinentes a este tema.

Índice general

Capítulo 1

PRELIMINARES

A través del presente trabajo, R denotará a un anillo asociativo con identidad. Los R-módulos serán izquierdos, a menos que explícitamente se diga lo contrario. R-Mod (Mod-R) es la categoría de R-módulos izquierdos (derechos) y R-mod (mod-R) es la categoría de R-módulos izquierdos (derechos) finitamente generados. Si M es un R-módulo y $A, B, C \leq M$, entonces $A \leq_{\oplus} M$ denota que A es un sumando directo de M, $B \leq_{es} M$ denota que B es esencial en M y $C \ll M$ denota que C es superfluo en M. El zoclo de M es denotado por $zoc(M)$ y el radical de M es denotado por $rad(M)$, exceptuando el caso $M = R$, donde el radical es denotado por $J(R)$. Si M es de longitud finita (en el sentido de (6) de las Definiciones 3.5.1 de [10]), entonces denotamos a la longitud de M como $Le(M)$. Además, $\mathscr{L}(M)$ denotará a la retícula de submódulos de M.

Como se enfatizó en la introducción, este capítulo tiene por objetivo presentar resultados básicos sobre teoría de anillos y módulos que serán de gran relevancia para las demostraciones de los resultados en los posteriores tres capítulos.

1.1. Módulos Cerrados y Clausuras Esenciales

Definición 1.1.1. Sea M un R-módulo. Se dice que un submódulo C de M es ***cerrado*** en M si, para cada submódulo U de M, $C \leq_{es} U \leq M$ implica que $C = U$.

Ejemplo 1.1.2. Sean M un R-módulo semisimple y N un submódulo de M. Supongamos que existe $B \leq M$ tal que $N \leq_{es} B$. Entonces, como B es semisimple, existe $N' \leq B$ tal que $B = N \oplus N'$. Dado que $N \cap N' = 0$ y $N \leq_{es} B$ entonces $N' = 0$, es decir, $B = N$. Por lo tanto, N es cerrado en M.

Teorema 1.1.3. *Sean M un R-módulo y N un submódulo de M. Si $\Phi = \{A \leq M | N \leq_{es} A\}$, entonces Φ tiene un elemento máximo.*

Demostración. Nótese que Φ es no vacío ya que $N \in \Phi$. Sea $\mathscr{C}$ una cadena no vacía en Φ y consideremos $C = \bigcup_{A \in \mathscr{C}} A$. Entonces C es submódulo de M y $N \leq C$. Sea $H \leq C$ tal que $N \cap H = 0$. Si $A \in \mathscr{C}$, entonces $N \cap (H \cap A) = 0$ donde $H \cap A \leq A$. Dado que $N \leq_{es} A$, se sigue que $H \cap A = 0$. Así, $H = H \cap C = H \cap (\bigcup_{A \in \mathscr{C}} A) = \bigcup_{A \in \mathscr{C}} (H \cap A) = 0$. Entonces $N \leq_{es} C$, lo cual implica que $C \in \Phi$. Como C es cota superior de $\mathscr{C}$, entonces, por el Lema de Zorn, Φ tiene elementos máximos. ■

Definición 1.1.4. Sea N un submódulo de $_RM$. Si C es máximo en $\Phi = \{A \leq M | N \leq_{es} A\}$, entonces diremos que C es una ***clausura esencial*** de N en M.

Observación 1.1.5. *Si N es submódulo de $_RM$ y C es una clausura esencial de N en M, entonces C es cerrado en M.*

Proposición 1.1.6. *Sean I un R-módulo inyectivo y $N \leq I$. Si C es una clausura esencial de N en I, entonces C es inyectivo. Por lo tanto, en este caso, C es una cápsula inyectiva de N.*

Demostración. Sea E un R-módulo tal que $C \lneq E$ y $C \leq_{es} E$ (E no necesariamente está contenido en I o viceversa). Entonces, si consideramos a los morfismos inclusión $\iota_1 : C \longrightarrow E$ e $\iota_2 : C \longrightarrow I$, por la inyectividad de I, existe un morfismo $g : E \longrightarrow I$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\iota_2"'] & E \arrow[dl, dashed, "g"] \\ I & \end{tikzcd}$$

conmuta. Si $n \in Kerg \cap N$, entonces $0 = g(n) = g(\iota_1(n)) = \iota_2(n) = n$, lo cual implica que $Kerg \cap N = 0$. Dado que $N \leq_{es} C \leq_{es} E$, entonces $N \leq_{es} E$ y en consecuencia $Kerg = 0$. Si consideramos a $\bar{g} = g|^{Img}$, entonces $\bar{g}$ es un isomorfismo. De $N \leq_{es} E$ se sigue que $\bar{g}(N) \leq_{es} Img$, donde $\bar{g}(N) = g(N) = g(\iota_1(N)) = \iota_2(N) = N$, es decir, $N \leq_{es} Img$. Además, $\bar{g}(C) \leq Img$ donde $\bar{g}(C) = g(C) = g(\iota_1(C)) = \iota_2(C) = C$, es decir, $C \leq Img$. Como C es máximo en I con la propiedad de que $N \leq_{es} C$, se sigue que $C = Img$. Sin embargo, dado que $C \lneq E$, existe $e \in E \backslash C$ tal que $\bar{g}(e) \in Img = C$, entonces $e \in \bar{g}^{-1}(C) = \bar{g}^{-1}(\bar{g}(C)) = C$, pero esto contradice que $e \in E \backslash C$. Por lo tanto, no existe ningún R-módulo E tal que $C \lneq E$ y $C \leq_{es} E$, de ahí que C es inyectivo (cf. [13, Lema 3.28]). Como $N \leq_{es} C$ y C es inyectivo, entonces C es cápsula inyectiva de N. ■

Definición 1.1.7. Sea A un submódulo de $_RM$. Entonces $A^{\perp} \leq M$ es llamado un ***seudocomplemento*** de A en M si es máximo con la propiedad $A \cap A^{\perp} = 0$, es decir, si $C \leq M$ es tal qe $A \cap C = 0$ y $A^{\perp} \leq C$ entonces $A^{\perp} = C$.

La demostración de la existencia de seudocomplementos para un submódulo puede consultarse en el Teorema 5.2.3 de [10].

Definición 1.1.8. Sea M un R-módulo izquierdo. Se dice que la pareja (η, E) es una ***cápsula inyectiva*** de M si E es inyectivo y $\eta : M \longrightarrow E$ es un monomorfismo esencial (es decir, η es monomorfismo y se cumple que $Im\eta \leq_{es} E$).

En el Teorema 5.6.4 de [10] se puede consultar la demostración de que todo módulo tiene una cápsula inyectiva. Del Teorema 5.6.3 de [10], se puede deducir la unicidad (salvo isomorfismo) de las cápsulas inyectivas. Finalmente, si (η, E) es la cápsula inyectiva de M, entonces denotamos a E por $E(M)$ y, por el Lema 5.5.6 de [10], se puede considerar a η como el morfismo inclusión. Frecuentemente solo decimos que $E(M)$ es la cápsula inyectiva de M.

La siguiente proposición nos da una caracterización bastante útil de los submódulos cerrados, ya que involucra el concepto de ser cerrado con ser seudocomplemento y la forma que deben adoptar estos submódulos. Los cuatro incisos estarán presentes en algunas demostraciones posteriores.

Proposición 1.1.9. *Sea C un submódulo de M. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) C es cerrado en M.

(2) $C = M \cap X$, donde X es algún sumando directo de $E(M)$.

(3) C es un seudocomplemento de un submódulo de M.

(4) Si $V \leq M$ es tal que $C \leq V \leq_{es} M$, entonces $V/C \leq_{es} M/C$

Demostración. [(1) $\Rightarrow$ (2)] Dado que $C \leq M \leq E(M)$, entonces, por la Proposición 1.1.6, una clausura esencial X de C en $E(M)$ es un R-módulo inyectivo. Se sigue que X es un sumando directo de $E(M)$. Por otro lado, $C \leq_{es} X$ implica que $C \leq_{es} M \cap X$. Como C es cerrado en M, se concluye que $C = M \cap X$.

[(2) $\Rightarrow$ (3)] Sea $C = X \cap M$ con X un sumando directo de $E(M)$. Entonces existe $Y \leq E(M)$ tal que $E(M) = X \oplus Y$. Consideremos $S = M \cap Y$ y veamos que $C = S^{\perp}$ en M. Primero, obsérvese que $C \cap S = (X \cap M) \cap (M \cap Y) = X \cap Y \cap M = 0 \cap M = 0$. Ahora, sean $D \leq M$ tal que $C \lneq D$ y $d \in D \backslash C$. Entonces $d \neq 0$ y $d = x + y$ para algunos $x \in X$, $y \in Y$. Nótese que $y \neq 0$, pues en caso contrario $d = x \in X \cap D \leq X \cap M = C$, lo cual contradice la elección de d. Por lo tanto, se tiene la siguiente igualdad:

$$y = -x + d. \tag{1.1}$$

Dado que $M \leq_{es} E(M)$ y $Ry \neq 0$, se tiene que $M \cap Ry \neq 0$, así que existe $r \in R$ tal que $0 \neq ry \in M \cap Ry \leq M \cap Y = S$. Multiplicando r en (1.1) obtenemos que

$$0 \neq ry = -rx + rd. \tag{1.2}$$

Se sigue que $-rx = ry - rd \in M \cap X = C$ ($ry \in M$ y $rd \in D \leq M$). Entonces, de (1.2), se tiene que $0 \neq ry \in D \cap S$ ($ry \in S$, $-rx + rd \in C + D = D$), es decir, $D \cap S \neq 0$. Por lo tanto, C es máximo en M con la propiedad $C \cap S = 0$, o bien, $C = S^{\perp}$ en M.

[(3) $\Rightarrow$ (1)] Sea $S \leq M$ tal que $C = S^{\perp}$. Si $C \leq_{es} U \leq M$, entonces $U \cap S = 0$ ya que $C \cap (U \cap S) = (C \cap S) \cap U = 0 \cap U = 0$. Como C es máximo en M con la propiedad $C \cap S = 0$, se sigue que $C = U$. Por lo tanto, C es cerrado en M.

[(1) $\Rightarrow$ (4)] Sea $N/C \leq M/C$ tal que $(V/C) \cap (N/C) = 0$. Si $\nu : M \longrightarrow M/C$ es el epimorfismo natural, se tiene que $C = \nu^{-1}(0) = \nu^{-1}((V/C) \cap (N/C)) = \nu^{-1}(V/C) \cap \nu^{-1}(N/C) = V \cap N$. Además, de $V \leq_{es} M$ se tiene que $V \cap N \leq_{es} N$, es decir, $C \leq_{es} N$. Como C es cerrado en M se sigue que $C = N$. Entonces $N/C = 0$. Por lo tanto, $V/C \leq_{es} M/C$.

[(4) $\Rightarrow$ (1)] Sea $U \leq M$ tal que $C \leq_{es} U$. Sea $C^{\perp}$ un seudocomplemento de C en M. Entonces $C \oplus C^{\perp} \leq_{es} M$ (cf. [1, Proposición 5.21]). Ya que $C \leq C \oplus C^{\perp} \leq_{es} M$, entonces de la hipótesis se sigue que $(C \oplus C^{\perp})/C \leq_{es} M/C$. Por otro lado, $C^{\perp} \cap U = 0$ ya que $C \cap (C^{\perp} \cap U) = (C \cap C^{\perp}) \cap U = 0 \cap U = 0$ con $C \leq_{es} U$. Esto implica que $(C \oplus C^{\perp}) \cap U = C \oplus (C^{\perp} \cap U) = C$. Sea $\nu : M \longrightarrow M/C$ el epimorfismo natural. Dado que $Ker\nu = C$, $C \leq C \oplus C^{\perp}$ y $C \leq U$ entonces $0 = \nu(C) = \nu((C \oplus C^{\perp}) \cap U) = \nu(C \oplus C^{\perp}) \cap \nu(U) = ((C \oplus C^{\perp})/C) \cap (U/C)$, lo cual implica que $U/C = 0$ (ya que $(C \oplus C^{\perp})/C \leq_{es} M/C$), es decir, $U = C$. Por lo tanto, C es cerrado en M. ■

1.2. Módulos Singulares y No-Singulares

Definición 1.2.1. Sean M un R-módulo izquierdo (derecho) y X un subconjunto de M. Definimos el ***anulador izquierdo*** (***anulador derecho***) de X en R como

$$ann_\ell(X) := \{r \in R : rx = 0 \text{ para cada } x \in X\}$$

$$(ann_r := \{r \in R : rx = 0 \text{ para cada } x \in X\}).$$

Si $X = \{x\}$, entonces el anulador izquierdo (derecho) de X en R se denota por $ann_\ell(x)$ $(ann_r(x))$.

No es difícil ver que los anuladores izquierdos (derechos) son ideales izquierdos (derechos) de R.

Definición 1.2.2. Sea M un R-módulo izquierdo.

(1) Un elemento $m \in M$ se dice que es un ***elemento singular*** de M si el ideal izquierdo $ann_\ell(m)$ es esencial en $_RR$. El conjunto de todos los elementos singulares de M es denotado por $Z(M)$.

(2) Decimos que M es un módulo ***singular*** si $Z(M) = M$.

(3) Se dice que M es un módulo ***no-singular*** si $Z(M) = 0$. En particular, decimos que R es un anillo ***no-singular izquierdo*** si $Z(_RR) = 0$.

El submódulo singular es muy importante en el Capítulo 2 y el Capítulo 3, pues se hacen afirmaciones que lo involucran directamente y lo relacionan con la propiedad principal que se estará trabajando en los mencionados capítulos.

Observación 1.2.3.

(1) M es singular y no-singular, simultáneamente, si y solo si $M = 0$.

(2) En general, para un módulo $_RM$, no ser "singular" no necesariamente es lo mismo que ser "no-singular". Por ejemplo, consideremos al grupo abeliano $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$. Entonces $x = (1, [1]) \in M$ es tal que $ann_\ell(x) = 0$ y por ende $x \notin Z(M)$, de ahí que $Z(M) \neq M$. Además, $y = (0, [1]) \in M$ es tal que $ann_\ell(y) = 2\mathbb{Z} \leq_{es} \mathbb{Z}$, es decir, $0 \neq y \in Z(M)$. Por lo tanto $_\mathbb{Z}M$ no es singular y tampoco es no-singular.

Lema 1.2.4. *Sea M un R-módulo izquierdo. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

*(1) $Z(M)$ es un submódulo de M y es llamado el **submódulo singular** de M.*

(2) Si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de R-módulos, entonces $f(Z(M)) \subseteq Z(N)$.

(3) Si $L \leq M$, entonces $Z(L) = L \cap Z(M)$. En particular, $Z(Z(M)) = Z(M)$, es decir, el submódulo singular de M es un módulo singular. Además se sigue inmediatamente que submódulos de módulos singulares son singulares y submódulos de módulos no-singulares son no-singulares.

Demostración. (1) Para $0 \in M$, se tiene que $ann_\ell(0) = R \leq_{es R} R$ y por ende $0 \in Z(M)$. Sean $m_1, m_2 \in Z(M)$, entonces $ann_\ell(m_1) \cap ann_\ell(m_2) \leq ann_\ell(m_1 + m_2) \leq R$, donde $ann_\ell(m_1) \cap ann_\ell(m_2) \leq_{es R} R$. Se sigue que $ann_\ell(m_1 + m_2) \leq_{es R} R$, es decir, $m_1 + m_2 \in Z(M)$. Ahora, sean $r \in R$ y $m \in Z(M)$. Si consideramos $s \in R \backslash ann_\ell(rm)$, tenemos que $(sr)m = s(rm) \neq 0$, lo cual implica que $sr \neq 0$. Como $ann_\ell(m) \leq_{es R} R$, entonces existe $t \in R$ tal que $tsr \neq 0$ y $tsr \in ann_\ell(m)$, es decir, $(tsr)m = 0$. Entonces se tiene que $ts \neq 0$ y $ts \in ann_\ell(rm)$. Por lo tanto, para cada $s \in R \backslash \{0\}$ existe $t \in R$ tal que $ts \neq 0$ y $ts \in ann_\ell(rm)$, lo cual es equivalente a que $ann_\ell(rm) \leq_{es R} R$, o bien, es equivalente a que $rm \in Z(M)$.

(2) Sea $y \in f(Z(M))$, entonces existe $m \in Z(M)$ tal que $y = f(m)$. Si $r \in ann_\ell(m)$, entonces $rm = 0$ y $ry = rf(m) = f(rm) = f(0) = 0$, es decir, $ann_\ell(m) \leq ann_\ell(y)$. Dado que $ann_\ell(m) \leq_{es R} R$, entonces $ann_\ell(y) \leq_{es R} R$, o bien, $y \in Z(N)$.

(3) Se sigue inmediatamente de la definición de submódulo singular. ∎

Corolario 1.2.5.

(1) $Z({}_RR)$ es un ideal (bilateral) de R.

(2) Si $R \neq 0$, entonces $Z({}_RR) \neq R$.

Demostración. (1). Por (1) del Lema 1.2.4 solo resta demostrar que si $m \in Z({}_RR)$ y $r \in R$ entonces $mr \in Z({}_RR)$. Ya que $ann_\ell(m) \leq ann_\ell(mr)$ y $ann_\ell(m) \leq_{es R} R$, se sigue que $ann_\ell(mr) \leq_{es R} R$, es decir, $mr \in Z({}_RR)$.

(2) Si $R \neq 0$, entonces el ideal 0 no es esencial en ${}_RR$. Ya que $ann_\ell(1) = 0$, se sigue que $1 \notin Z({}_RR)$. Por lo tanto, $Z({}_RR) \neq R$. ∎

Similarmente a como se definió $Z({}_RR)$ se puede definir el submódulo singular $Z(R_R)$ de R_R. Aún cuando $Z(R_R)$ y $Z({}_RR)$ son ideales de R, en general no se cumple que $Z(R_R) = Z({}_RR)$ (ver (5) de los Ejemplos 7.6 de [13]).

Corolario 1.2.6. *Sean M y N R-módulos tales que $M \cong N$. Entonces se tiene lo siguiente:*

(1) Si M es singular, entonces N es singular.

(2) Si M es no-singular, entonces N es no-singular.

Demostración. Sea $f : M \longrightarrow N$ un isomorfismo. Por (2) del Lema 1.2.4 se tiene que $f(Z(M)) \leq Z(N)$ y $f^{-1}(Z(N)) \leq Z(M)$. Entonces $Z(N) = f(f^{-1}(Z(N))) \leq f(Z(M)) \leq Z(N)$, es decir, $f(Z(M)) = Z(N)$. Si M es singular, entonces $Z(N) = f(Z(M)) = f(M) = N$ y (1) está demostrado. Si M es no-singular, entonces $0 = f(0) = f(Z(M)) = Z(N)$ y (2) está demostrado. ∎

Proposición 1.2.7. *Sean M y N R-módulos isomorfos. Entonces $M/Z(M) \cong N/Z(N)$.*

Demostración. Sea $\varphi : M \longrightarrow N$ un isomorfismo de R-módulos y sea $\nu : N \longrightarrow N/Z(N)$ el epimorfismo natural. Por (2) del Lema 1.2.4 se tiene que $\varphi(Z(M)) \leq Z(N)$, así que $Z(M) \leq Ker(\nu\varphi)$. Dado que $Ker(\nu\varphi) = \varphi^{-1}(Ker(\nu)) = \varphi^{-1}(Z(N))$ y, nuevamente por (2) del Lema 1.2.4, $\varphi^{-1}(Z(N)) \leq Z(M)$, se sigue que $Ker(\nu\varphi) \leq Z(M)$. Por lo tanto, $Z(M) = Ker(\nu\varphi)$ y del primer teorema de isomorfismos se concluye que $M/Z(M) \cong N/Z(N)$. ∎

Teorema 1.2.8. *Sean R un anillo no-singular izquierdo y M un R-módulo izquierdo. Entonces $Z(M/Z(M)) = 0$, es decir, $M/Z(M)$ es no-singular.*

Demostración. Dado que $Z(M/Z(M)) \leq M/Z(M)$, entonces existe $B \leq M$ tal que B contiene a $Z(M)$ y $Z(M/Z(M)) = B/Z(M)$. Ahora veamos que $Z(M) \leq_{es} B$. Sea $C \leq B$ tal que $Z(M) \cap C = 0$. Entonces C es no-singular (pues $Z(C) = Z(M) \cap C = 0$) y $\nu\iota : C \longrightarrow B/Z(M)$ es un monomorfismo donde $\iota : C \hookrightarrow B$ es el morfismo inclusión y $\nu : B \longrightarrow B/Z(M)$ es el epimorfismo natural (en este caso, $Ker(\nu\iota) = Z(M) \cap C = 0$). Se sigue que C es singular ya que $C \cong Im(\nu\iota)$ e $Im(\nu\iota)$ es un submódulo del módulo singular $B/Z(M) = Z(M/Z(M))$. Por lo tanto, C es singular y no-singular simultáneamente, es decir, $C = 0$ y se concluye que $Z(M) \leq_{es} B$. Si $Z(M/Z(M)) \neq 0$, entonces $Z(M) \neq B$ y existe $x \in B$ tal que $x \notin Z(M)$. Dado que $x \notin Z(M)$ entonces $ann_\ell(x)$ no es esencial en ${}_RR$, de ahí que existe un ideal izquierdo no cero I de R tal que $ann_\ell(x) \cap I = 0$. Entonces el morfismo $\lambda_x : I \longrightarrow Ix$ definido por $\lambda_x(i) = ix$ es un isomorfismo, pues $Ker\lambda_x = ann_\ell(x) \cap I = 0$. Como $Z({}_RR) = 0$, entonces $Z(I) = Z({}_RR) \cap I = 0$ y, por (2) del Corolario 1.2.6, se sigue que $Z(Ix) = 0$. Obsérvese que $0 = Z(Ix) = Z(M) \cap (Ix)$ contradice que $Z(M) \leq_{es} B$. Por lo tanto, $Z(M/Z(M)) = 0$.

■

Proposición 1.2.9. *Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de R-módulos. Entonces $Z(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigoplus_{i \in I} Z(M_i)$.*

Demostración. Sea $x = (x_i)_{i \in I} \in Z(\bigoplus_{i \in I} M_i)$. Entonces, para cada $i \in I$, $ann_\ell(x) \leq ann_\ell(x_i)$ y, como $ann_\ell(x) \leq_{es} {}_RR$, se sigue que $ann_\ell(x_i) \leq_{es} {}_RR$. Por lo tanto, para cada $i \in I$, $x_i \in Z(M_i)$, de ahí que $x \in \bigoplus_{i \in I} Z(M_i)$. Ahora, sea $y = (y_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} Z(M_i)$ y sea I_0 el soporte de y. Entonces, $ann_\ell(y) = \bigcap_{i \in I_0} ann_\ell(y_i)$ y, como $ann_\ell(y_i) \leq_{es} {}_RR$ para cada $i \in I_0$ con I_0 finito, se sigue que $ann_\ell(y) \leq_{es} {}_RR$. Por lo tanto, $y \in Z(\bigoplus_{i \in I} M_i)$. ■

Proposición 1.2.10. *Si $R \neq 0$ y F es un R-módulo libre, entonces $Z(F) \neq F$.*

Demostración. Sea $x \in F$ un elemento de una base de F. Sea $r \in ann_\ell(x)$, entonces $rx = 0$, lo cual implica que $r = 0$. Por lo tanto, $ann_\ell(x) = 0$ y $x \notin Z(F)$ (ya que el ideal izquierdo 0 no es esencial en ${}_RR$). ■

Proposición 1.2.11. *Un R-módulo M es singular si y solo si existen R-módulos A y B tales que $A \leq_{es} B$ y $M \cong B/A$.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Supongamos que M es singular. Para M, existen F un R-módulo libre y $K \leq F$ tales que $M \cong F/K$. Nótese que $K \neq 0$, pues en caso contrario $F \cong M$ y en consecuencia F sería singular, lo cual contradice a la Proposición 1.2.10. Sea $\{x_i\}_{i \in I}$ una base para F y sea $x \in F$ tal que $x \neq 0$. Mostraremos que $K \leq_{es} F$ exhibiendo la existencia de un elemento $s \in R$ tal que $sx \neq 0$ y $sx \in K$. Existe un subconjunto finito $\{i_1, ..., i_n\}$ de I y existen $r_1, ..., r_n \in R$ tales que

$$x = \sum_{j=1}^{n} r_j x_{i_j}. \tag{1.3}$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $r_1 \neq 0$. Para cada $y \in F$, sea $\overline{y} = y + K \in F/K$. Como F/K es singular (por ser isomorfo a M), se tiene que $ann_\ell(\overline{x_{i_1}}) \leq_{es} {}_RR$ y $ann_\ell(\overline{x_{i_1}}) \cap Rr_1 \neq 0$.

Entonces existe $s_1 \in R$ tal que $s_1 r_1 \neq 0$ y $s_1 r_1 \in ann_\ell(\overline{x_{i_1}})$, es decir, $s_1 r_1 \overline{x_{i_1}} = \overline{s_1 r_1 x_{i_1}} = 0$, lo cual implica que $s_1 r_1 x_{i_1} \in K$. De (1.3) se sigue que

$$s_1 x = s_1 r_1 x_{i_1} + \sum_{j=2}^{n} s_1 r_j x_{i_j}. \tag{1.4}$$

Nótese que $s_1 x \neq 0$, pues en caso contrario, en (1.4), se tendría una combinación lineal de elementos en $\{x_{i_1}, ..., x_{i_n}\}$ igual a 0, lo cual implicaría que $s_1 r_j = 0$ para $j = 1, ..., n$, pero $s_1 r_1 \neq 0$. Ahora, si $s_1 r_j = 0$ para cada $j \in \{2, ..., n\}$, entonces $s_1 x = s_1 r_1 x_{i_1} \in K$ y habríamos terminado eligiendo $s = s_1$. En otro caso, si $s_1 r_j \neq 0$ para algún $j \in \{2, ..., n\}$, reordenando índices de ser necesario, podemos suponer que $s_1 r_2 \neq 0$. Repitiendo el proceso anterior, usando que F/K es singular, obtenemos $s_2 \in R$ tal que $s_2 s_1 r_2 \neq 0$ y $s_2 s_1 r_2 \in ann_\ell(\overline{x_{i_2}})$, es decir, $s_2 s_1 r_2 x_{i_2} \in K$. Entonces de (1.4) obtenemos la siguiente igualdad:

$$s_2 s_1 x = s_2 s_1 r_1 x_{i_1} + s_2 s_1 r_2 x_{i_2} + \sum_{j=3}^{n} s_2 s_1 r_j x_{i_j}. \tag{1.5}$$

Los primeros dos sumandos del lado derecho en (1.5) pertenecen a K y $s_2 s_1 x \neq 0$ pues en caso contrario, si $s_2 s_1 x = 0$, entonces en (1.5) se tendría una combinación lineal de elementos en $\{x_{i_1}, ..., x_{i_n}\}$ igual a 0, lo cual implicaría que $s_2 s_1 r_j = 0$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$, pero $s_2 s_1 r_2 \neq 0$. Si $s_2 s_1 r_j = 0$ para cada $j \in \{3, ..., n\}$, entonces $s_2 s_1 x = s_2 s_1 r_1 x_{i_1} + s_2 s_1 r_2 x_{i_2} \in K$, lo cual implicaría en este caso que si elegimos $s = s_2 s_1$ entonces $sx \neq 0$ y $sx \in K$ y habríamos terminado. De ser necesario, si continuamos el proceso, eventualmente se tendrá un entero positivo $m \in \{1, ..., n\}$ tal que si $s = s_m s_{m-1} \cdot ... \cdot s_1 \in R$, entonces $sx \neq 0$ y $sx \in K$. Tras la m-ésima repetición del proceso, se garantiza que $K \leq_{es} F$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que A y B son R-módulos tales que $A \leq_{es} B$ y $M \cong B/A$. Para cada elemento $\overline{b} = b + A \in B/A$ tenemos que mostrar que $ann_\ell(\overline{b}) \leq_{es} {}_R R$. Sea $y \in R \backslash ann_\ell(\overline{b})$. Entonces $y\overline{b} = \overline{yb} \neq 0$, es decir, $yb \notin A$. Como $A \leq_{es} B$, existe $z \in R$ tal que $zyb \neq 0$ y $zyb \in A$. Así $zy \neq 0$ y $zy \in ann_\ell(\overline{b})$, lo cual implica que $ann_\ell(\overline{b}) \leq_{es} {}_R R$. Por lo tanto B/A es singular y en consecuencia, por (1) del Corolario 1.2.6, se concluye que M es singular. ■

Corolario 1.2.12. *Sean R un anillo, I un ideal izquierdo de R y M un R-módulo izquierdo tal que $M \cong R/I$. Entonces M es singular si y solo si $I \leq_{es R} R$.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Si M es singular, entonces R/I es singular por ser isomorfo a M. Se sigue que $ann_\ell(1 + I) \leq_{es R} R$, donde $ann_\ell(1 + I) = I$.

[$\Leftarrow$] Se sigue directamente de la Proposición 1.2.11. ■

De la Proposición 1.2.11 y el Corolario 1.2.12 es evidente que el concepto de esencialidad nos provee de demasiados módulos singulares, pues basta conocer un módulo esencial en otro (por ejemplo un módulo y su cápsula inyectiva) y formar el respectivo cociente para tener un ejemplo explícito de módulo singular.

Proposición 1.2.13. *Sea R un anillo no-singular izquierdo y E un R-módulo izquierdo inyectivo. Entonces $Z(E) \leq_{\oplus} E$.*

Demostración. Sea $N \leq E$ tal que $Z(E) \leq_{es} N$. Por el Teorema 1.2.8 se tiene que $E/Z(E)$ es no-singular y en consecuencia $N/Z(E)$ es no-singular. Ahora, por la Proposición 1.2.11 se sigue que $N/Z(E)$ es singular. Entonces, $N/Z(E)$ es no-singular y singular simultáneamente, es decir,

$N/Z(E) = 0$. Por lo tanto $Z(E) = N$ y se concluye que $Z(E)$ es cerrado en E. Dado que E es inyectivo, entonces E coincide con su cápsula inyectiva y por (2) de la Proposición 1.1.9, se sigue que $Z(E)$ es sumando directo de E. ■

Proposición 1.2.14. *Un módulo ${}_RM$ es no-singular si y sólo si $Hom_R(A, M) = 0$ para cada módulo singular ${}_RA$.*

Demostración. [⇒] Si M es no-singular, A singular y $f : A \longrightarrow M$ es un morfismo de R-módulos, entonces $f(A) = f(Z(A)) \subseteq Z(M) = 0$, es decir, $f = 0$.

[⇐] Si $Hom_R(A, M) = 0$ para cada módulo singular A, entonces, en particular, se tiene que $Hom_R(Z(M), M) = 0$. Se sigue que el morfismo inclusión $Z(M) \hookrightarrow M$ es cero, lo cual implica que $Z(M) = 0$, es decir, M es no-singular. ■

Proposición 1.2.15. *La clase de todos los R-módulos izquierdos no-singulares es cerrada bajo productos y sumas directas.*

Demostración. Si $\{C_i\}_{i\in I}$ es una colección de módulos no-singulares y ${}_RA$ es un módulo singular, entonces, por la Proposición 1.2.14, $Hom_R(A, C_i) = 0$ para cada $i \in I$. Por lo tanto, $0 = \prod\limits_{i\in I} Hom_R(A, C_i) \cong Hom_R(A, \prod\limits_{i\in I} C_i)$, donde el isomorfismo es de grupos abelianos. Nuevamente por la Proposición 1.2.14, $\prod\limits_{i\in I} C_i$ es no-singular. Que la suma directa de módulos no-singulares es no-singular se sigue del hecho de que la suma directa es submódulo del producto directo y todo submódulo de un módulo no-singular es no-singular. ■

Proposición 1.2.16. *Sea ${}_RS$ un módulo simple. Entonces S es singular o proyectivo, pero no cumple ambas propiedades simultáneamente.*

Demostración. Basta demostrar que S no es singular si y solo si S es proyectivo. Dado que S es simple, entonces $S \cong R/\mathfrak{M}$ con $\mathfrak{M}$ un ideal izquierdo máximo de R. Si S no es singular entonces $R/\mathfrak{M}$ no es singular y, por el Corolario 1.2.12, se sigue que $\mathfrak{M}$ no es esencial en ${}_RR$, así que existe $H \leq_R R$ tal que $H \neq 0$ y $\mathfrak{M} \cap H = 0$. Como $\mathfrak{M}$ es máximo, entonces ${}_RR = \mathfrak{M} \oplus H$ y en consecuencia $S \cong R/\mathfrak{M} \cong H$, lo cual implica que S es proyectivo ya que H lo es por ser sumando directo de ${}_RR$. Recíprocamente, si S es proyectivo, entonces $R/\mathfrak{M}$ es proyectivo, lo cual implica que $\mathfrak{M}$ es sumando directo de ${}_RR$. Entonces existe $0 \neq K \leq_R R$ tal que ${}_RR = \mathfrak{M} \oplus K$. Se sigue que $\mathfrak{M}$ no es esencial en ${}_RR$, entonces $R/\mathfrak{M}$ no es singular (Corolario 1.2.12) y en consecuencia S no es singular. ■

Corolario 1.2.17. *Sea ${}_RM$ un módulo semisimple. Entonces M es no-singular si y solo si M es proyectivo.*

Demostración. Para la demostración, consideremos $M = \bigoplus\limits_{i\in I} S_i$ con S_i simple para cada $i \in I$.

[⇒] Nótese que S_i es no-singular para cada $i \in I$, pues son submódulos de M y M es no-singular, en consecuencia S_i no es singular para cada $i \in I$. Por la Proposición 1.2.16, S_i es proyectivo para cada $i \in I$, lo cual implica que M es proyectivo.

[$\Leftarrow$] Si M es proyectivo, entonces S_i es proyectivo para cada $i \in I$, lo cual implica que S_i no es singular para cada $i \in I$ (Proposición 1.2.16). Como cada S_i es simple y no es singular, se sigue que $Z(S_i) = 0$ para cada $i \in I$, es decir, S_i es no-singular para cada $i \in I$. Dado que la suma directa de no-singulares es no-singular (Proposición 1.2.15) entonces se tiene que M es no-singular. ■

Proposición 1.2.18. *Si $Z({}_RR)$ es cerrado en ${}_RR$, entonces $R/Z({}_RR)$ es un R-módulo izquierdo no-singular.*

Demostración. Sea $L \leq_R R$ tal que $Z({}_RR) \leq L$ y $Z(R/Z({}_RR)) = L/Z({}_RR)$. Veamos que $Z({}_RR) \leq_{es} L$. Para ello, sea $T \leq L$ tal que $Z({}_RR) \cap T = 0$. Entonces T es no-singular, pues $Z(T) = Z({}_RR) \cap T = 0$. Consideremos el morfismo $f = \nu\iota$, donde $\iota : T \hookrightarrow L$ es el morfismo inclusión y $\nu : L \longrightarrow L/Z({}_RR)$ es el epimorfismo natural. Nótese que $Kerf = Ker\nu\iota = \iota^{-1}(Ker\nu) = \iota^{-1}(Z({}_RR)) = Z({}_RR) \cap T = 0$, lo cual implica que f es inyectiva y en consecuencia $T \cong Imf \leq L/Z({}_RR)$. Dado que $Z(R/Z({}_RR)) = L/Z({}_RR)$ es un módulo singular, entonces Imf es singular ya que $Z(Imf) = Imf \cap Z(R/Z({}_RR)) = Imf \cap (L/Z({}_RR)) = Imf$, lo cual implica que T es singular. Como T es, simultáneamente, un módulo singular y un módulo no-singular se sigue que $T = 0$. Por lo tanto, $Z({}_RR) \leq_{es} L$. Por hipótesis, $Z({}_RR)$ es cerrado en ${}_RR$, entonces se sigue que $Z({}_RR) = L$. Por lo tanto, $Z(R/Z({}_RR)) = L/Z({}_RR) = 0$, es decir, $R/Z({}_RR)$ es un R-módulo izquierdo no-singular. ■

Proposición 1.2.19. *Sean P y M R-módulos izquierdos tales que P es semisimple no-singular y existe un epimorfismo $\varphi : P \longrightarrow M$. Entonces M es no-singular.*

Demostración. Dado que P es semisimple, entonces $Ker\varphi \leq_\oplus P$, es decir, el epimorfismo φ se escinde. Entonces existe un morfismo $\gamma : M \longrightarrow P$ tal que $\varphi\gamma = 1_M$ (cf. [10, Corolario 3.4.11]). Se sigue que $\gamma(Z(M)) \leq Z(P) = 0$, lo cual implica que $Z(M) = 1_M(Z(M)) = \varphi\gamma(Z(M)) = \varphi(0) = 0$. Por lo tanto, M es no-singular. ■

1.3. La Parte No-Singular de un Módulo Semisimple

Proposición 1.3.1. *Sea ${}_RM$ un módulo semisimple. Entonces el conjunto $\{L \leq M |\ L$ es no-singular$\}$ tiene elemento mayor.*

Demostración. Como ${}_RM$ es semisimple, entonces $Z(M) \leq_\oplus M$. Sea $N \leq M$ tal que $Z(M) \oplus N = M$. Nótese que N es no-singular, pues $Z(N) = Z(M) \cap N = 0$. Sea $L \leq M$ tal que L es no-singular. Se tiene que $Z(M) \cong M/N$ y en consecuencia, por (1) del Corolario 1.2.6, M/N es singular. Sea $\nu : M \longrightarrow M/N$ el epimorfismo natural. Dado que L es semisimple no-singular entonces, por la Proposición 1.2.19, $\nu(L)$ es no-singular. Además, $\nu(L) \leq M/N$ implica que $\nu(L)$ es singular ya que M/N es singular. Entonces, $\nu(L)$ es, simultáneamente, singular y no-singular, lo cual implica que $\nu(L) = 0$, es decir, $L \leq N$. Por lo tanto, N es el elemento mayor del conjunto $\{L \leq M | L$ es no-singular$\}$. ■

Definición 1.3.2. Sea ${}_RM$ un módulo semisimple. Se define la ***parte no-singular*** de M como el submódulo N de M tal que $M = Z(M) \oplus N$.

Observación 1.3.3. *Como se vio en la demostración de la Proposición 1.3.1, la parte no-singular de un módulo semisimple* ${}_RM$ *es un módulo no-singular y elemento mayor del conjunto* $\{L \leq M | L \text{ es no-singular}\}$*. En particular, se tiene que la parte no-singular de* M *es única respecto a la propiedad que la define.*

Vamos a demostrar que la parte no-singular de $zoc({}_RR)$ es un ideal de R. Antes veamos una definición y un resultado que nos ayudarán en tal objetivo.

Definición 1.3.4. Sea M un R-módulo izquierdo. Se dice que un submódulo U de M es ***totalmente invariante*** si $\varphi(U) \leq U$ para cada $\varphi \in End_R(M)$.

Ejemplo 1.3.5. Para todo módulo ${}_RM$, los submódulos 0, M, $zoc(M)$, $Z(M)$ y $rad(M)$ son ejemplos de submódulos totalmente invariantes.

Proposición 1.3.6. *Los ideales de* R *coinciden con los submódulos totalmente invariantes de* ${}_RR$.

Demostración. Sean U un ideal de R y $\varphi \in End_R(R)$. Entonces para cada $u \in U$ se tiene que $\varphi(u) = u\varphi(1) \in U$. Por lo tanto, U es un submódulo totalmente invariante de ${}_RR$. Recíprocamente, supongamos que B es un submódulo totalmente invariante de ${}_RR$. Sea $r \in R$ arbitrario pero fijo. Consideremos la función $\lambda_r : R \longrightarrow R$ definida por $\lambda_r(x) = xr$ para cada $x \in R$. Nótese que λ_r es un morfismo de R-módulos izquierdos, pues si $a, b, s \in R$ entonces $\lambda_r(a + sb) = (a + sb)r = ar + (sb)r = ar + s(br) = \lambda_r(a) + s\lambda_r(b)$. Como B es un submódulo totalmente invariante de ${}_RR$, se sigue que $br = \lambda_r(b) \in B$ para cada $b \in B$. Por lo tanto, B es un ideal de R. ■

Proposición 1.3.7. *Sea* N *la parte no-singular de* $zoc({}_RR)$*. Entonces* N *es un ideal de* R*.*

Demostración. En razón de la Proposición 1.3.6, para ver que N es un ideal de R se demostrará que es un submódulo totalmente invariante de ${}_RR$. Sea $\varphi \in End_R(R)$. Como N es semisimple no-singular, por la Proposición 1.2.19, $\varphi(N)$ es no-singular. Además, $\varphi(N)$ es semisimple, es decir, $\varphi(N) \leq zoc({}_RR)$. Como se hizo notar en la Observación 1.3.3, N es elemento mayor del conjunto $\{L \leq zoc({}_RR) | L \text{ es no-singular}\}$, de ahí que $\varphi(N) \leq N$. ■

Aunque se definió la parte *no-singular* de un módulo semisimple arbitrario, para los resultados de los capítulos posteriores, de mayor interés será la parte *no-singular* del R-módulo semisimple $zoc({}_RR)$.

1.4. Módulos Uniformes y Dimensión Uniforme

Definición 1.4.1. Un módulo distinto de cero ${}_RM$ es llamado ***uniforme*** si todo submódulo distinto de cero de M es esencial en M.

Observación 1.4.2. *Un módulo distinto de cero* ${}_RM$ *es uniforme si y solo si la intersección de cualesquiera dos submódulos distintos de cero de* M *es no trivial. En libros como en [10], a los módulo uniformes los llaman* ***irreducibles****, siendo estos un caso particular de lo que ahí se define como que un módulo sea irreducible sobre algún submódulo.*

Teorema 1.4.3 (del reemplazo de Steinitz)**.** *Sean $U = U_1 \oplus ... \oplus U_m$ y $V = V_1 \oplus ... \oplus V_n$ submódulos esenciales de un módulo ${}_RM$, donde los U_i's y los V_j's son módulos uniformes. Entonces, $n = m$.*

Demostración. Podemos suponer que $m \leq n$. Afirmamos que para $\widehat{U} := U_2 \oplus ... \oplus U_m$, existe algún $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $\widehat{U} \cap V_j = 0$. En caso contrario, si no existe tal j, se tendría que $0 \neq \widehat{U} \cap V_j \leq_{es} V_j$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$, pues los V_j's son módulos uniformes, lo cual implica que

$$(\widehat{U} \cap V_1) \oplus ... \oplus (\widehat{U} \cap V_n) \leq_{es} V_1 \oplus ... \oplus V_n = V$$

(cf. [10, Teorema 5.1.7]). Como $(\widehat{U} \cap V_1) \oplus ... \oplus (\widehat{U} \cap V_n) \leq \widehat{U} \cap V$, se sigue que $(\widehat{U} \cap V) \leq_{es} V$. Entonces, dado que $V \leq_{es} M$, se tiene que $\widehat{U} \cap V \leq_{es} M$ y, en consecuencia, $\widehat{U} \leq_{es} M$. Por la definición de $\widehat{U}$, se tiene que $\widehat{U} \cap U_1 = 0$, lo cual implica que $U_1 = 0$ (ya que $\widehat{U} \leq_{es} M$), pero esto contradice que $U_1 \neq 0$. Por lo tanto, etiquetando nuevamente de ser necesario, podemos suponer que $\widehat{U} \cap V_1 = 0$. Sea $U^{(1)} = \widehat{U} \oplus V_1$. Entonces $U^{(1)} \cap U_1 \neq 0$ (en caso contrario, $U_1 + U^{(1)} = U_1 \oplus U^{(1)} = U_1 \oplus \widehat{U} \oplus V_1 = U \oplus V_1$, pero $U + V_1$ no puede ser una suma directa ya que $U \leq_{es} M$ y $V_1 \neq 0$), de ahí que

$$(U^{(1)} \cap U_1) \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_m \leq_{es} U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_m = U \leq_{es} M.$$

Dado que $(U^{(1)} \cap U_1) \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_m \leq U^{(1)}$, entonces $U^{(1)} \leq_{es} M$. Obsérvese que para pasar de U a $U^{(1)}$, solo se ha reemplazado el sumando U_1 por V_1. Repitiendo el anterior proceso (etiquetando nuevamente a $V_2, ..., V_n$ de ser necesario), podemos pasar de $U^{(1)}$ a

$$U^{(2)} = V_1 \oplus V_2 \oplus U_3 \oplus ... \oplus U_m$$

y deducir que $U^{(2)} \leq_{es} M$. Después de m pasos, llegamos a que

$$U^{(m)} = V_1 \oplus ... \oplus V_m \leq_{es} M.$$

Si $n > m$ entonces $V_{m+1} \oplus ... \oplus V_n = 0$, pues se tiene la suma directa $V = U^{(m)} \oplus V_{m+1} \oplus ... \oplus V_n$ con $U^{(m)} \leq_{es} M$. Entonces $V_{m+1} = ... = V_n = 0$, lo cual contradice que todos los V_j's son distintos de cero. Por lo tanto, $n = m$. ■

Definición 1.4.4. Para un entero no negativo n, decimos que un R-módulo M tiene ***dimensión uniforme*** n, lo cual denotamos por $u.dimM = n$, si existe un submódulo V de M tal que $V \leq_{es} M$ y V es suma directa de n submódulos uniformes. Si no existe tal entero no negativo n, escribimos $u.dimM = \infty$.

Es precisamente el teorema del reemplazo de Steinitz el que garantiza la buena definición de la dimensión uniforme.

Observación 1.4.5. *Para un módulo ${}_RM$ se tiene que $u.dimM = 0$ si y solo si $M = 0$. Por otro lado, $u.dimM = 1$ si y solo si M es un módulo uniforme.*

Proposición 1.4.6. *Sea ${}_RM$ un módulo tal que $u.dimM = n < \infty$. Entonces, para toda suma directa de k submódulos de M distintos de cero, $N = N_1 \oplus ... \oplus N_k \leq M$, se cumple que $k \leq n$.*

Demostración. Sean M y N como en el enunciado de esta proposición. La demostración procederá por inducción sobre n. Si $n = 0$, entonces $M = 0$ y no hay nada que demostrar. Si $n = 1$, entonces M es uniforme y no puede suceder que $k > 1$ puesto que se llegaría a una contradicción con que todo submódulo distinto de cero de M es esencial en M. Ahora, sea $n > 1$. Como $u.dimM = n$, existe $V \leq M$ tal que $V \leq_{es} M$ y V es suma directa de n módulos uniformes. Se sigue que

$$N_i' := N_i \cap V \neq 0 \quad \text{y} \quad N_1' \oplus ... \oplus N_k' \leq V.$$

Sean $V_1, .., V_n$ módulos uniformes tales que $V = V_1 \oplus ... \oplus V_n$ y $\widehat{N} := N_2' \oplus ... \oplus N_k'$. Entonces existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $\widehat{N} \cap V_j = 0$, pues en caso contrario, si no existe tal j, entonces $0 \neq \widehat{N} \cap V_j \leq_{es} V_j$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$, lo cual implica que

$$(\widehat{N} \cap V_1) \oplus ... \oplus (\widehat{N} \cap V_n) \leq_{es} V_1 \oplus ... \oplus V_n = V$$

(cf. [10, Corolario 5.1.7]). Como $(\widehat{N} \cap V_1) \oplus ... \oplus (\widehat{N} \cap V_n) \leq \widehat{N}$, se sigue que $\widehat{N} \leq_{es} V$, lo cual contradice que $\widehat{N} \cap N_1' = 0$ con $N_1' \neq 0$. Etiquetando nuevamente de ser necesario, podemos suponer que $\widehat{N} \cap V_1 = 0$. Entonces se tiene lo siguiente:

$$\widehat{N} \cong \widehat{N}/(\widehat{N} \cap V_1) \cong ((\widehat{N} + V_1)/V_1) \leq (V/V_1) \cong V_2 \oplus ... \oplus V_n.$$

Por lo tanto, podemos sumergir a $\widehat{N}$ en $V_2 \oplus ... \oplus V_n$ donde $u.dim(V_2 \oplus ... \oplus V_n) = n - 1$. Invocando la hipótesis de inducción en este punto, se tiene que $k - 1 \leq n - 1$, es decir, $k \leq n$. ■

Proposición 1.4.7. *Sea M un R-módulo. Entonces $u.dimM < \infty$ si y solo si M no contiene una suma directa infinita de submódulos distintos de cero.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Supongamos que $u.dimM = n < \infty$. Si M contiene una suma directa infinita de submódulos distintos de cero, entonces de tal suma directa podemos obtener otra suma directa de submódulos distintos de cero con un número finito de sumandos mayor que n, lo cual, por la Proposición 1.4.6, no es posible.

[$\Leftarrow$] Si $M = 0$, entonces $u.dimM = 0 < \infty$. Supongamos que $0 \neq M$ no contiene sumas directas infinitas. Obsérvese que todo submódulo de M distinto de cero contiene un submódulo uniforme. En caso contrario, si existe $N \leq M$ tal que $N \neq 0$ y N no contiene submódulos uniformes, entonces existen submódulos A_1 y B_1 de N tales que $A_1 + B_1 = A_1 \oplus B_1$ con $A_1 \neq 0 \neq B_1$ (ya que, en particular, N no es uniforme). Como B_1 no es uniforme, entonces contiene submódulos A_2 y B_2 tales que $A_2 + B_2 = A_2 \oplus B_2$ y $A_2 \neq 0 \neq B_2$. Continuando este proceso, podemos obtener una suma directa infinita $A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus ... \leq M$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Sea V_1 un submódulo uniforme de M. Si V_1 no es esencial en M, entonces existe $V_2' \leq M$ distinto de cero tal que $V_1 + V_2' = V_1 \oplus V_2'$. Sea V_2 un submódulo uniforme contenido en V_2'. Entonces, $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$. Similarmente, si $V_1 \oplus V_2$ no es esencial en M, podemos encontrar un submódulo uniforme tal que $V_1 + V_2 + V_3 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$. Por hipótesis, este proceso no puede continuar indefinidamente, es decir, existe un entero positivo n tal que $V_1 \oplus ... \oplus V_n \leq_{es} M$, donde V_j es un módulo uniforme para cada $j \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto, $u.dimM = n < \infty$. ■

Corolario 1.4.8. *Sea M un R-módulo. Entonces $u.dimM = \infty$ si y solo si M contiene alguna suma directa infinita de submódulos distintos de cero.*

Corolario 1.4.9. *Sea M un R-módulo tal que $u.dimM < \infty$. Si $N \leq M$, entonces $u.dimN$ es finita y $u.dimN \leq u.dimM$.*

Demostración. Sea $N \leq M$ con $u.dimM < \infty$. Si $u.dimN = \infty$, entonces, por el Corolario 1.4.8, N contiene alguna suma directa infinita de submodulos distintos de cero, en consecuencia M contiene alguna suma directa infinita de submódulos distintos de cero, pero esto contradice a la Proposición 1.4.7. Por lo tanto $u.dimN < \infty$. De la Proposición 1.4.6 se concluye que $u.dimN \leq u.dimM$. ■

Corolario 1.4.10. *Si $_RM$ es artiniano o noetheriano, entonces $u.dimM < \infty$.*

Demostración. Cada condición de cadena (ascendente o descendente) impide la existencia de una suma directa infinita de submódulos distintos de cero en M. Por lo tanto, por la Proposición 1.4.7, se tiene que $u.dimM < \infty$. ■

Definición 1.4.11. Sea R un dominio (no necesariamente conmutativo). Se dice que R es un ***dominio de Ore Izquierdo*** si para cada $a, b \in R\backslash\{0\}$ se tiene que

$$Ra \cap Rb \neq 0.$$

Teorema 1.4.12 (de Goldie)**.** *Para cada dominio R las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) R es un dominio de Ore izquierdo.

(2) $u.dim(_RR) = 1$.

(3) $u.dim(_RR) < \infty$.

Demostración. [(1) $\Rightarrow$ (2)] Sean I y J ideales izquierdos de R distintos de cero. Consideremos $i \in I$ y $j \in J$ tales que $i \neq 0 \neq j$. Dado que R es un dominio de Ore izquierdo, se tiene que $0 \neq Ri \cap Rj \subseteq I \cap J$. Por lo tanto $_RR$ es uniforme, es decir, $u.dimM(_RR) = 1$.

[(2) $\Rightarrow$ (3)] Es evidente.

[(3) $\Rightarrow$ (1)] (Por contrapositiva) Supongamos que existen $a, b \in R\backslash\{0\}$ tales que $Ra \cap Rb = 0$. Veamos que $X = \{ba^i : i \geq 0\}$ es un subconjunto libre de $_RR$. Por inducción sobre n, demostremos que $\{ba^0, ..., ba^n\}$ es libre. Para $n = 0$, si $rba^0 = rb = 0$, entonces $r = 0$ ya que $b \neq 0$ y R es un dominio. Ahora, supongamos que $n > 0$ y que $\sum\limits_{i=0}^{n} r_i ba^i = 0$ para algunos $r_0, ..., r_n \in R$. Entonces $r_0 b = -\sum\limits_{i=1}^{n} r_i ba^i = -\sum\limits_{i=1}^{n} (r_i ba^{i-1})a \in Rb \cap Ra = 0$, de ahí que $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i ba^{i-1} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} r_{i+1} ba^i = 0$ y $r_0 b = 0$, lo cual implica que $r_0 = 0$ y, por hipótesis de inducción, se tiene que $r_1 = ... = r_n = 0$. Por lo tanto, para cada natural n, $\{ba^0, ..., ba^n\}$ es libre y en consecuencia X es libre. Entonces $_RR$ contiene a la suma directa infinita $\bigoplus\limits_{i \geq 0} Rba^i$, lo cual implica que $u.dim_R R = \infty$ en razón del Corolario 1.4.8. ■

1.5. Módulos Esencialmente Finitamente Generados

Definición 1.5.1. Se dice que un módulo $_RM$ es ***esencialmente finitamente generado*** si existe un submódulo N de M tal que N es finitamente generado y $N \leq_{es} M$.

Lema 1.5.2. *Un módulo $_RM$ tiene dimensión uniforme finita si y solo si cada submódulo de M es esencialmente finitamente generado.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Supongamos que $u.dimM < \infty$. Sean $N \leq M$ y $n := u.dimN$. Entonces, por el Corolario 1.4.9, $n \leq u.dimM < \infty$ y en consecuencia existen módulos uniformes $U_i \leq N$, con $i \in \{1, ..., n\}$, tales que

$$U_1 \oplus ... \oplus U_n \leq_{es} N.$$

Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, fijamos un elemento distinto de cero $u_i \in U_i$. Entonces, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $0 \neq Ru_i \leq_{es} U_i$, lo cual implica que

$$\sum_{i=1}^{n} Ru_i \leq_{es} \bigoplus_{i=1}^{n} U_i \leq_{es} N.$$

Por lo tanto, $\sum\limits_{i=1}^{n} Ru_i \leq_{es} N$ y se concluye que N es esencialmente finitamente generado.

[$\Leftarrow$] (Por contrapositiva) Supongamos que $u.dimM = \infty$. Entonces, por el Corolario 1.4.8, M contiene algún submódulo $N = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}_+} M_i$ donde $M_i \neq 0$ para cada $i \in \mathbb{Z}_+$. Ahora, cualquier submódulo finitamente generado N' de N está contenido en alguna suma directa de la forma $M_1 \oplus M_2 \oplus .... \oplus M_r$ para algún entero positivo $r > 0$. Entonces $N' \cap M_{r+1} = 0$, lo cual implica que N' no es esencial en N. Dado que N' es un submódulo arbitrario finitamente generado de N, se sigue que N no es esencialmente finitamente generado. ■

Proposición 1.5.3. *Sean R un anillo no-singular izquierdo y $_RM$ un módulo proyectivo. Entonces M es finitamente generado si y solo si es esencialmente finitamente generado.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Si M es finitamente generado, entonces M es esencialmente finitamente generado ya que $M \leq_{es} M$.

[$\Leftarrow$] Sea $N = \sum\limits_{i=1}^{n} Rb_i \leq_{es} M$. Primero, veamos que para cada $f \in Hom_R(M, R)$, si $f(N) = 0$ entonces $f = 0$. Supongamos que $f(N) = 0$, entonces podemos inducir un morfismo de R-módulos izquierdos $\bar{f} : M/N \longrightarrow R$ definido por $\bar{f}(m+N) = f(m)$ (cf. [10, Teorema 3.4.7]). Como $N \leq_{es} M$, entonces, por la Proposición 1.2.11, M/N es un módulo singular. Entonces

$$\bar{f}(M/N) = \bar{f}(Z(M/N)) \leq Z(_RR) = 0,$$

lo cual implica que $\bar{f} = 0$ y por ende $f = 0$. Ahora, dado que M es proyectivo, por el Lema de la Base Dual (cf. [10, Teorema 5.4.2]), existen familias $\{a_i | i \in I\} \subseteq M$ y $\{f_i | i \in I\} \subseteq Hom_R(M, R)$ tales que para cada $a \in M$, $f_i(a) \neq 0$ solo para un número finito de elementos $i \in I$ y $a = \sum\limits_{\substack{i \in I \\ f_i(a) \neq 0}} f_i(a)a_i$.

En particular, para cada $j \in \{1, ..., n\}$, $f_i(b_j) = 0$ salvo para un número finito de elementos $i \in I$, así que existe un subconjunto finito I_0 de I tal que $i \notin I_0$ implica que $f_i(b_j) = 0$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$. Entonces, para cada $i \notin I_0$ se tiene que $f_i(N) = 0$, lo cual implica que $f_i = 0$. Por lo tanto, para cada $a \in M$, de $a = \sum\limits_{\substack{i \in I \\ f_i(a) \neq 0}} f_i(a_i)a_i$, se tiene que $a = \sum\limits_{i \in I_0} f_i(a)a_i \in \sum\limits_{i \in I_0} Ra_i$. Por lo tanto $M = \sum\limits_{i \in I_0} Ra_i$, es decir, M es finitamente generado. ■

1.6. Anillos Hereditarios y Semihereditarios

Definición 1.6.1. Un anillo R es ***hereditario izquierdo*** (***derecho***) si cada ideal izquierdo (derecho) de R es un R-módulo izquierdo (derecho) proyectivo. Si R es hereditario izquierdo y hereditario derecho, decimos que R es ***hereditario***.

Proposición 1.6.2. *Sean R un anillo hereditario izquierdo y $g : E \longrightarrow N$ un epimorfismo de R-módulos izquierdos con E inyectivo. Entonces, N es inyectivo.*

Demostración. Sea I un ideal izquierdo de R y $f : I \longrightarrow N$ un morfismo de R-módulos izquierdos. Como I es proyectivo, entonces existe un morfismo $h : I \longrightarrow E$ tal que $gh = f$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] \\ E \arrow[r, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

conmuta. Como E es inyectivo, por el Criterio de Baer, existe un morfismo $\varphi : R \longrightarrow E$ tal que $\varphi\iota = h$ conmuta, donde $\iota : I \longrightarrow R$ es el morfismo inclusión, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "h"'] & R \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ E & \end{tikzcd}$$

conmuta. Sea $\tau = g\varphi : R \longrightarrow N$. Entonces $\tau\iota = (g\varphi)\iota = g(\varphi\iota) = gh = f$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "\tau"] \\ N & \end{tikzcd}$$

conmuta. Por el Criterio de Baer, N es inyectivo. ∎

Definición 1.6.3. Un anillo R es ***semihereditario izquierdo*** (***derecho***) si cada ideal izquierdo (derecho) finitamente generado de R es proyectivo como un R-módulo izquierdo (derecho). Si R es semihereditario izquierdo y semihereditario derecho, decimos que R es ***semihereditario***.

Proposición 1.6.4. *Un anillo R semihereditario izquierdo es no-singular izquierdo.*

Demostración. Sean $0 \neq m \in R$ y $f : R \longrightarrow Rm$ el epimorfismo definido por $f(r) = rm$. Como $m \neq 0$, se sigue que $ann_\ell(m) \neq R$ y, además, se tiene la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow ann_\ell(m) \overset{\iota}{\hookrightarrow} R \overset{f}{\twoheadrightarrow} Rm \longrightarrow 0.$$

Como Rm es proyectivo, entonces $Ker f = Im\iota = ann_\ell(m)$ es un sumando directo propio de ${}_RR$. Entonces $ann_\ell(m)$ no es esencial en ${}_RR$ y por ende $m \notin Z({}_RR)$. Por lo tanto $Z({}_RR) = 0$, es decir, R es no-singular izquierdo. ■

Teorema 1.6.5. *Sea R un anillo hereditario izquierdo. Entonces R es noetheriano izquierdo si y solo si $u.dim_R R < \infty$.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Si ${}_RR$ es noetheriano, entonces no puede contener sumas directas infinitas de submódulos distintos de cero. Por la Proposición 1.4.7, se concluye que $u.dim_R R < \infty$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $u.dim_R R < \infty$. En particular, R es semihereditario izquierdo, por lo que R es no-singular izquierdo (Proposición 1.6.4). Sea I un ideal izquierdo de R. Entonces I es proyectivo (pues R es hereditario izquierdo) y, por el Lema 1.5.2, I es esencialmente finitamente generado ya que $u.dim_R R < \infty$. Entonces, por la Proposición 1.5.3, I es finitamente generado. Como I es un ideal izquierdo arbitrario de R y es finitamente generado, se sigue que ${}_RR$ es noetheriano. ■

1.7. Algunos Tipos de Anillos

En esta sección se definirán algunos tipos específicos de anillos que aparecen en los enunciados de los resultados de los siguientes capítulos y se presentarán algunas consecuencias elementales de estas definiciones, esto con la intención de hacer lo más auto-contenido posible el presente trabajo.

Definición 1.7.1.

(1) Un ideal propio P de R es un ***ideal primo*** de R si para cada $a, b \in R$, $aRb \subseteq P$ implica que $a \in P$ o $b \in P$.

(2) Un ideal propio S de R es un ***ideal semiprimo*** de R si para cada $a \in R$, $aRa \subseteq S$ implica que $a \in S$.

(3) Se dice que R es un ***anillo primo*** si 0 es un ideal primo de R.

(4) Se dice que R es un ***anillo semiprimo*** si 0 es un ideal semiprimo.

Proposición 1.7.2. *R es un anillo semiprimo si y solo si para cada ideal izquierdo (derecho, bilateral) I de R, $I^2 = 0$ implica que $I = 0$.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Sea I un ideal izquierdo (derecho, bilateral) de R tal que $I^2 = 0$. Entonces, para cada $a \in I$, $aRa \subseteq I^2 = 0$. Dado que 0 es un ideal semiprimo de R, se sigue que $a = 0$. Por lo tanto, $I = 0$.

[$\Leftarrow$] Sea $a \in R$ tal que $aRa = 0$. Entonces $(Ra)(Ra) = 0$ y, de la hipótesis, se sigue que $Ra = 0$, es decir, $a = 0$. Por lo tanto 0 es un ideal semiprimo de R. ■

Teorema 1.7.3. *Para cada anillo R distinto de cero, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) R tiene un único ideal izquierdo máximo.

(2) R tiene un único ideal derecho máximo.

(3) $R/J(R)$ es un anillo con división, donde $J(R)$ denota al radical de Jacobson de R.

(4) $R\backslash U(R)$ es un ideal de R, donde $U(R)$ denota al grupo de las unidades de R.

(5) $R\backslash U(R)$ es un grupo bajo la suma.

(6) Para cada entero positivo n, $a_1 + ... + a_n \in U(R)$ implica que algún $a_i \in U(R)$.

(7) Si $a + b \in U(R)$, entonces $a \in U(R)$ ó $b \in U(R)$.

Demostración. [(1) $\Rightarrow$ (3)] Por hipótesis, el único ideal izquierdo máximo de R es $J(R)$. Entonces, $R/J(R)$ solo tiene dos ideales izquierdos (a saber los ideales 0 y $R/J(R)$), lo cual implica que $R/J(R)$ es un anillo con división.

[(3) $\Rightarrow$ (1)] Sea $\mathfrak{M}$ un ideal izquierdo máximo de R. Entonces $\mathfrak{M}/J(R)$ es un ideal izquierdo de $R/J(R)$, donde 0 y $R/J(R)$ son los únicos ideales izquierdos de $R/J(R)$ ya que este último es un anillo con división. Por lo tanto, $\mathfrak{M}/J(R) = 0$, es decir, $\mathfrak{M} = J(R)$.

[(2) $\Leftrightarrow$ (3)] La demostración es simétrica a la realizada en (1) $\Leftrightarrow$ (3).

[(3) $\Rightarrow$ (4)] Sea $x \in R\backslash J(R)$. Entonces $x + J(R)$ es invertible en $R/J(R)$, por lo que existe $y \in R\backslash J(R)$ tal que $xy + J(R) = yx + J(R) = 1 + J(R)$. Se sigue que $xy, yx \in 1 + J(R)$ donde $1 + J(R) \subseteq U(R)$ (cf. [10, Lema 9.3.1), lo cual implica que existen $u_0, u_1 \in U(R)$ tales que $xy = u_0$ y $yx = u_1$. Entonces en R, x tiene inverso derecho e inverso izquierdo y, por lo tanto, x tiene un inverso (el inverso izquierdo y el inverso derecho deben coincidir), es decir, $x \in U(R)$. Además, dado que $J(R) \lneq R$, es claro que si $x \in U(R)$ entonces $x \notin J(R)$. Por lo tanto, $x \notin J(R)$ si y solo si $x \in U(R)$, equivalentemente, $R\backslash U(R) = J(R)$.

[(4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (7)] Son tautologías.

[(7) $\Rightarrow$ (3)] Sea $a \in R$ tal que $a \notin J(R)$. Entonces existe un ideal máximo izquierdo $\mathfrak{M}$ tal que $a \notin \mathfrak{M}$. Entonces $\mathfrak{M} + Ra = R$, lo cual implica que $1 = m + ba$ para algunos $m \in \mathfrak{M}$ y $b \in R$. Como $m + ba \in U(R)$ y $m \notin U(R)$, (7) implica que $ba \in U(R)$. Se sigue que existe $u \in R$ tal que $(ub)a = 1$ y en consecuencia $((ub) + J(R))(a + J(R)) = 1 + J(R)$. Por lo tanto, todo elemento distinto de cero en $R/J(R)$ tiene inverso izquierdo (lo cual implica que también van a ser inversos derechos), así que $(R/J(R))\backslash\{0\}$ es un grupo con la multiplicación, o bien, $R/J(R)$ es un anillo con división. ∎

Definición 1.7.4. Un anillo R distinto de cero que satisfaga alguna de las condiciones del Teorema 1.7.3, se dirá que es un ***anillo local***

Definición 1.7.5. Se dice que R es un ***anillo semilocal*** si $R/J(R)$ es un anillo artiniano izquierdo o, equivalentemente, si $R/J(R)$ es un anillo semisimple.

Observación 1.7.6. *Todo anillo local es un anillo semilocal. Por otro lado, la equivalencia de la Definición 1.7.5, se puede consultar en (b) del Teorema 9.2.2 de [10].*

Proposición 1.7.7. *Si R tiene un número finito de ideales izquierdos máximos, entonces R es semilocal.*

Demostración. Sean $\mathfrak{M}_1, ..., \mathfrak{M}_n$ los ideales izquierdos máximos de R. Consideremos el morfismo de módulos $\varphi : R \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} R/\mathfrak{M}_i$ definido por $\varphi(r) = (r + \mathfrak{M}_1, ..., r + \mathfrak{M}_n)$. Entonces $Ker\varphi = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i = J(R)$ y $R/J(R) \cong Im\varphi \leq \bigoplus_{i=1}^{n} R/\mathfrak{M}_i$. Dado que $\bigoplus_{i=1}^{n} R/\mathfrak{M}_i$ es semisimple, entonces ${}_R(R/J(R))$ es semisimple, lo cual implica que ${}_{R/J(R)}(R/J(R))$ es semisimple (ver Corolario 1.9.7), es decir, R es semilocal. ■

La siguiente proposición nos dice que bajo ciertas condiciones un anillo semilocal tiene un número finito de ideales izquierdos máximos, siendo un tipo de recíproco de la Proposición 1.7.7. Sin embargo, para la demostración se hace uso del Teorema de Wedderburn para anillos semisimples, cuya prueba es extensa y no está en sintonía con los resultados previamente demostrados. Entonces para la siguiente proposición solo se citará su respectiva demostración.

Proposición 1.7.8. *Si R es semilocal y $R/J(R)$ es conmutativo, entonces R tiene un número finito de ideales izquierdos máximos.*

Demostración. Ver la Proposición 20.2 de [12]. ■

Corolario 1.7.9. *Si R es conmutativo, entonces R es semilocal si y solo si R tiene un número finito de ideales máximos.*

Demostración. La afirmación se sigue directamente de la Proposición 1.7.7 y de la Proposición 1.7.8. ■

Definición 1.7.10. Se dice que R es un anillo regular (en el sentido de von Neumann) si para cada $r \in R$ existe $r' \in R$ tal que $rr'r = r$.

Teorema 1.7.11. *Un anillo R es regular (en el sentido de von Neumann) si y solo si para cada $a \in R$, $Ra \leq_{\oplus R} R$.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Sea $a \in R$. Por hipótesis, existe $a' \in R$ tal que $aa'a = a$. Si $x = a'a$, entonces $Rx \leq Ra$ y $x^2 = (a'a)(a'a) = a'(aa'a) = a'a = x$, es decir, x es idempotente. Ahora, si $ra \in Ra$ para algún $r \in R$, entonces $ra = r(aa'a) = (ra)(a'a) = (ra)x \in Rx$, de ahí que $Ra = Rx$ donde Rx es un sumado directo de ${}_RR$ al ser generado por un elemento idempotente.

[$\Leftarrow$] Sea $a \in R$. Por hipótesis existe $H \leq_R R$ tal que $Ra \oplus H = R$, lo cual implica que $1 = ra + h$ para algún $r \in R$ y algún $h \in H$. Entonces, para cada $x \in Ra$, $x = x1 = x(ra + h) = xra + xh$ por lo que $x = xra \in R(ra)$ (pues $x - xra = xh \in Ra \cap H = 0$), de ahí que $Ra = R(ra)$ con $ra = (ra)(ra)$, es decir, ra es un elemento idempotente. Como $a \in Ra = R(ra)$, entonces $a = t(ra)$ para algún $t \in R$ y se tiene que $a(1 - ra) = t(ra)(1 - (ra)) = 0$ (ya que ra es idempotente), lo cual implica que $a = ara$. Por lo tanto, para cada $a \in R$ existe $r \in R$ tal que $a = ara$, es decir, R es regular (en el sentido de von Neumann). ■

En (d) de los Ejemplos 2.32 de [13], se puede ver que los anillos regulares (en el sentido de von Neumann) son hereditarios. Además, si I es un ideal izquierdo de un anillo regular (en el sentido de von Neumann) tal que $I^2 = 0$, entonces para cada $a \in I$ se tiene que existe un elemento a' en el anillo tal que $a = aa'a \in I^2 = 0$. Entonces, por la Proposición 1.7.2, se concluye que los anillos regulares (en el sentido de von Neumann) son semiprimos.

Definición 1.7.12. Un anillo R es llamado ***indescomponible*** si para cada par de anillos R_1 y R_2, $R \cong R_1 \times R_2$ implica que $R_1 = 0$ ó $R_2 = 0$.

Observación 1.7.13. *Sean R_1, R_2 y R son anillos tales que $R \cong R_1 \times R_2$ y $\varphi : R_1 \times R_2 \longrightarrow R$ un isomorfismo de anillos. Como R_1 y R_2 son ideales bilaterales de $R_1 \times R_2$ (donde $R_1 \times \{0\}$ se identifica con R_1 y $\{0\} \times R_2$ se identifica con R_2), entonces $\varphi(R_1)$ y $\varphi(R_2)$ son ideales bilaterales de R. Además, $R = \varphi(R_1) \oplus \varphi(R_2)$. Para ver esto, sea $r \in R$, entonces $r = \varphi(r_1, r_2)$ para algunos $r_1 \in R_1$ y $r_2 \in R_2$. Se sigue que $r = \varphi(r_1, 0) + \varphi(0, r_2) \in \varphi(R_1) + \varphi(R_2)$. Además, si $x \in \varphi(R_1) \cap \varphi(R_2)$, entonces $x = \varphi(r_1, 0) = \varphi(0, r_2)$ para algunos $r_1 \in R_1$ y $r_2 \in R_2$, como φ es inyectivo, entonces $(r_1, 0) = (0, r_2)$, es decir $r_1 = 0$ y $r_2 = 0$, lo cual implica que $x = 0$.*

1.8. Dominios Enteros y Módulos Libres de Torsión

Definición 1.8.1. Sean R un dominio entero y A un R-módulo.

(1) Se dice que A es un ***R-módulo de torsión***, si para cada $a \in A$ existe $r \in R$ tal que $r \neq 0$ y $ra = 0$.

(2) Se dice que A es un ***R-módulo libre de torsión***, si para cada $r \in R$ y cada $a \in A$, $ra = 0$ implica que $r = 0$ ó $a = 0$.

Ejemplo 1.8.2. (1) Todo grupo abeliano finito es un $\mathbb{Z}$-módulo de torsión.

(2) Si R es un dominio entero, R es un R-módulo libre de torsión.

Proposición 1.8.3. *Si R es un dominio entero y A es un R-módulo, entonces $tA = \{a \in A | \exists r \in R : r \neq 0 \text{ y } ra = 0\}$ es un submódulo de A y tA es un módulo de torsión.*

Demostración. Claramente $0 \in tA$. Si $a, b \in tA$ y $r \in R$, entonces existen $r_1, r_2 \in R \backslash \{0\}$ tales que $r_1 a = 0$ y $r_2 b = 0$. Entonces, $r_1 r_2 \neq 0$ y $r_1 r_2 (a + rb) = (r_1 r_2) a + (r_1 r_2)(rb) = (r_2 r_1) a + ((r_1 r_2) r) b = r_2 (r_1 a) + (r_1 r)(r_2 b) = 0$, lo cual implica que $a + rb \in tA$. Por lo tanto, $tA \leq A$ y por su definición tA es un módulo de torsión. ■

Observación 1.8.4. *Si R es un dominio entero y A es un R-módulo, entonces A es de torsión si y solo si $A = tA$. Por otro lado, A es libre de torsión si y solo si $tA = 0$.*

Definición 1.8.5. Si R es un dominio entero, entonces se dice que un R-módulo M es ***divisible*** si $rM = M$ para cada $r \in R$ con $r \neq 0$.

Proposición 1.8.6. *Supongamos que R es un dominio entero y F es su campo de fracciones. Entonces, como R-módulo, F es libre de torsión y divisible.*

Demostración. Sea $x \in F$ y supongamos que existe $r \in R\backslash\{0\}$ tal que $rx = 0$. Como F es un campo y $R \subseteq F$, se sigue que $x = 0$. Por lo tanto, el único elemento de torsión de F es el elemento 0, es decir, F es libre de torsión. Además, para cada $s \in R\backslash\{0\}$: $ss^{-1}x = x$, donde $s^{-1}x \in F$, es decir, se tiene que $sF = F$. Por lo tanto F es divisible como R-módulo. ■

Proposición 1.8.7. *Si R es un dominio entero y F es su campo de fracciones, entonces R es esencial en F.*

Demostración. Mostremos que para cada $x \in F$, con $x \neq 0$, existe $r \in R$ tal que $rx \in R$ y $rx \neq 0$. Para esto, sea $x = a/b$ con $a, b \in R\backslash\{0\}$, entonces $rx = a \in R\backslash\{0\}$ donde $r = b \in R$. Por lo tanto, $R \leq_{es} F$ (cf. [10, Lema 5.1.6]). ■

Proposición 1.8.8. *Si R es un dominio entero y M es un R-módulo libre de torsión y divisible, entonces M es inyectivo.*

Demostración. Sean I un ideal de R distinto de cero y $f : I \longrightarrow M$ un morfismo. Fijamos algún $x_0 \in I$ con $x_0 \neq 0$. Entonces por ser M divisible se tiene que $M = x_0M$, de ahí que $f(x_0) = x_0m_0$ para algún $m_0 \in M$. Ahora, para cada $a \in I$,

$$x_0f(a) = f(x_0a) = f(ax_0) = af(x_0) = ax_0m_0 = x_0am_0. \tag{1.6}$$

Como M es libre de torsión, por (1.6), se sigue que $f(a) = am_0$. Entonces

$$\begin{aligned} \bar{f}\colon R &\to M \\ a &\mapsto am_0 \end{aligned}$$

es un morfismo tal que $\bar{f}|_I = f$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ M. & \end{tikzcd}$$

Por el criterio de Baer, M es inyectivo. ■

Corolario 1.8.9. *Si R es un dominio entero y F es su campo de fracciones, entonces F es una cápsula inyectiva de R.*

Demostración. Por la Proposición 1.8.6, F es un R-módulo libre de torsión y divisible. De la Proposición 1.8.8, se sigue que F es inyectivo y la Proposición 1.8.7 implica que $R \leq_{es} F$. Por lo tanto, F es cápsula inyectiva de R. ■

Lema 1.8.10. *Si R es un dominio entero, entonces no tiene sumandos directos no triviales.*

Demostración. Sean I_1 e I_2 ideales de R tales que $R = I_1 \oplus I_2$. Entonces, $1 = i_1 + i_2$ para algunos $i_1 \in I$ e $i_2 \in I_2$. Se sigue que $i_1 = i_1 1 = i_1(i_1 + i_2) = i_1^2 + i_1i_2$, lo cual implica que $i_1(1 - i_1) = i_1i_2 \in I_1 \cap I_2 = 0$. Como R es dominio entero, entonces $i_1 = 0$ ó $i_1 = 1$. Si $i_1 = 1$, entonces $I_1 = R$ e $I_2 = 0$. En el otro caso, si $i_1 = 0$ entonces $i_2 = 1$, lo cual implica que $I_2 = R$ e $I_1 = 0$. ■

1.9. Cambios de Anillo

Existen ciertas formas naturales e importantes de que un módulo sobre un anillo herede una estructura de módulo sobre otro anillo. Por ejemplo, de una manera completamente natural, todo módulo sobre un anillo R tiene estructura de módulo sobre todo subanillo de R. En general, algunos de estos "cambios de anillo" están inducidos por morfismos de anillos.

Observación 1.9.1. *Sean $\phi : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos unitarios y M un S-módulo izquierdo. Si la estructura ${}_SM$ se obtiene del morfismo de anillos $\lambda : S \longrightarrow End(M)$, entonces*

$$\lambda\phi : R \longrightarrow End(M)$$

induce una estructura de R-módulo izquierdo en M. Aquí, la multiplicación por escalares está dada por

$$\forall r \in R, \forall x \in M : rx := ((\lambda\phi)(r))(x) = (\lambda(\phi(r)))(x) = \phi(r)x.$$

Además, si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de S-módulos izquierdos, entonces f también es morfismo de R-módulos izquierdos, ya que si $r \in R$ y $a, b \in M$ se tiene que

$$f(ra + b) = f(\phi(r)a + b) = \phi(r)f(a) + f(b) = rf(a) + f(b).$$

De la Observación 1.9.1 se tiene claramente el siguiente resultado.

Proposición 1.9.2. *Sea $\phi : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos unitarios y sea M un grupo abeliano que es simultáneamente un R-módulo izquierdo y un S-módulo izquierdo tal que para cada $r \in R$ y cada $x \in M$, $rm := \phi(r)m$. Entonces*

$$\mathscr{L}({}_SM) \leq \mathscr{L}({}_RM) = \mathscr{L}({}_{\phi(R)}M) \leq \mathscr{L}({}_{\mathbb{Z}}M).$$

Teorema 1.9.3. *Sean R, S y S' anillos, $\phi : R \longrightarrow S$ y $\phi' : R \longrightarrow S'$ morfismos de anillos unitarios con ϕ' suprayectivo, y consideremos $K := Ker\phi$ y $K' := Ker\phi'$. Si $K' \subseteq K$, entonces existe un único morfismo de anillos unitarios $\psi : S' \longrightarrow S$ tal que $\psi\phi' = \phi$, es decir, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "\phi'"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ S' \arrow[rr, dashed, "\psi"'] & & S \end{tikzcd}$$

conmuta. Además, ψ es inyectiva si y solo si $K = K'$.

Demostración. Supongamos que $K' \subseteq K$. Dado que ϕ' es suprayectiva, entonces para cada $x' \in S'$ existe $x \in R$ tal que $\phi'(x) = x'$. Entonces, definimos $\psi : S' \longrightarrow S$ como $\psi(x') = \phi(x)$ para cada $x' \in S'$, donde $x \in R$ es tal que $\phi'(x) = x'$. Obsérvese que ψ está bien definida, pues si $x_1, x_2 \in R$ son tales que $\phi'(x_1) = \phi'(x_2)$, entonces $\phi'(x_1 - x_2) = \phi'(x_1) - \phi'(x_2) = 0$, lo cual implica que $x_1 - x_2 \in K' \subseteq K$ y por ende $\phi(x_1) = \phi(x_2)$, es decir, $\psi(\phi'(x_1)) = \psi(\phi'(x_2))$. Por construcción, es claro que ψ es un morfismo de anillos unitarios tal que $\psi\phi' = \phi$. Que ψ sea el único morfismo de anillos unitarios tal que $\psi\phi' = \phi$ se debe a que ϕ' es suprayectivo y por ende un epimorfismo de anillos unitarios. Finalmente, ψ es inyectiva si y solo si $Ker\psi = 0$ donde $Ker\psi = \phi'(K)$ y $\phi'(K) = 0$ si y solo si $K \subseteq K'$.

■

Proposición 1.9.4. *Sean M un R-módulo izquierdo e I un ideal de R contenido en el anulador de M. Entonces M es un R/I-módulo izquierdo con la multiplicación por escalares definida por*

$$\forall r + I \in R/I, \forall m \in M : (r + I)m = rm.$$

Demostración. Supongamos que M es R-módulo izquierdo vía el morfismo de anillos $\lambda : R \longrightarrow End(M)$. Si $\nu : R \longrightarrow R/I$ es el epimorfismo natural de anillos, entonces $Ker\nu = I \subseteq Ker\lambda$ donde $Ker\lambda$ es el anulador de M y, por el Teorema 1.9.3, existe un único morfismo de anillos unitarios $\eta : R/I \longrightarrow End(M)$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\lambda"] & \\ R/I \arrow[rr, dashed, "\eta"'] & & End(M) \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, vía el morfismo de anillos unitarios η, M tiene estructura de R/I-módulo izquierdo, donde para cada $r + I \in R/I$ y cada $m \in M$ se tiene que

$$(r + I)m = (\eta(r + I))(m) = (\eta(\nu(r)))(m) = ((\eta\nu)(r))(m) = (\lambda(r))(m) = rm.$$

■

Definición 1.9.5. Un R-módulo izquierdo M es llamado ***fiel*** si para cada $r \in R$, $rM = 0$ implica que $r = 0$.

Observación 1.9.6. *Si M es R-módulo izquierdo vía el morfismo de anillos unitarios $\lambda : R \longrightarrow End(M)$, entonces M es fiel si y solo si $Ker\lambda = 0$.*

Por la Observación 1.9.1, la Proposición 1.9.2 y la Proposición 1.9.4 se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1.9.7. *Sea M un R-módulo izquierdo, y sea I un ideal de R contenido en el anulador de M. Entonces*

(1) un subgrupo de M es un R-submódulo si y solo si es un R/I-submódulo. Esto es, las retículas de R-submódulos y de R/I-submódulos de M coinciden.

(2) M es fiel como R/I-módulo izquierdo (es decir, el anulador de M es trivial) si y solo si I es el anulador de M.

Proposición 1.9.8. *Sean $\phi : R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos unitarios suprayectivo y M un S-módulo izquierdo. Si $_RM$ es inyectivo (considerando a M con la estructura de R-módulo izquierdo inducida por ϕ), entonces $_SM$ es inyectivo.*

Demostración. [⇒] Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow M$ morfismos de S-módulos izquierdos con f monomorfismo. Por la Observación 1.9.1, f y g son morfismos de R-módulos izquierdos donde f es inyectivo. Por hipótesis, existe $h : B \longrightarrow M$ un morfismo de R-módulos izquierdos tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\ M & \end{tikzcd} \tag{1.7}$$

conmuta. Nótese que h también es morfismo de S-módulos, pues si $s \in S$ y $b \in B$, entonces existe $r \in R$ tal que $\phi(r) = s$ y

$$h(sb) = h(\phi(r)b) = h(rb) = rh(b) = \phi(r)h(b) = sh(b).$$

Por lo tanto, de (1.7) se sigue que ${}_SM$ es inyectivo. ■

Capítulo 2

Módulos Cíclicos Propios y la Propiedad (P)

2.1. Primeras Consecuencias de la Propiedad (P)

Los módulos cíclicos propios y lo que se va a definir como la propiedad (P) serán conceptos centrales para el resto de resultados de este trabajo, así que en este capítulo se empezarán a exhibir algunas propiedades y consecuencias relativas a estos conceptos, estudiando anillos que satisfacen la propiedad (P) bajo ciertas hipótesis adicionales.

Definición 2.1.1. Se dice que un R-módulo izquierdo C es ***cíclico propio*** si C es cíclico y no es isomorfo a ${}_RR$.

De manera inmediata se tiene que para cada n, $\mathbb{Z}_n$ es un $\mathbb{Z}$-módulo cíclico propio y que cada campo $\mathbb{F}$ no tiene módulos cíclicos propios diferentes de cero.

Los anillos cuasi-Frobenius dan cierta inspiración para la propiedad principal que se estudiará en este capítulo, además de que están involucrados en los principales resultados del Capítulo 3 y del Capítulo 4, respectivamente, así que es pertinente definirlos y mencionar algunas propiedades de estos anillos tan importantes.

Definición 2.1.2. Sea R un anillo noetheriano izquierdo. Entonces, se dice que R es un anillo ***cuasi-Frobenius*** si ${}_RR$ es inyectivo.

Observación 2.1.3. *Si R es un anillo cuasi-Frobenius, entonces R es artiniano (izquierdo y derecho) y autoinyectivo (izquierdo y derecho), por ello no se hace énfasis en el lado en la Definición 2.1.2. Para ver la demostración de este hecho, consultar [10,* Teorema 13.2.1*].*

Teorema 2.1.4 (Faith-Walker)**.** *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R:*

(1) R es cuasi-Frobenius.

(2) Todo R-módulo izquierdo (derecho) proyectivo es inyectivo.

(3) Todo R-módulo izquierdo (derecho) inyectivo es proyectivo.

Demostración. Ver [10, Teorema 13.6.1]. ■

Como se hizo notar en la introducción del presente trabajo, los anillos cuasi-Frobenius pueden caracterizarse por la interesante propiedad de que cada uno de sus módulos izquierdos es cociente de algún módulo izquierdo inyectivo. El siguiente teorema muestra tal resultado, siendo prácticamente una consecuencia del Teorema de Faith-Walker.

Teorema 2.1.5. *R es cuasi-Frobenius si y solo si todo R-módulo izquierdo es cociente de algún R-módulo izquierdo inyectivo.*

Demostración. [$\Rightarrow$] Dado que todo R-módulo libre es proyectivo y todo R-módulo proyectivo es inyectivo (Teorema 2.1.4), entonces todo R-módulo es cociente de un inyectivo ya que todo R-módulo es cociente de un libre.

[$\Leftarrow$] Sea P un R-módulo proyectivo. Entonces, por hipótesis, $P \cong I/H$ con I inyectivo y $H \leq I$. Se sigue que I/H es proyectivo, lo cual implica que $H \leq_{\oplus} I$ y por ende existe $L \leq I$ tal que $H \oplus L = I$. Entonces $L \cong I/H \cong P$, de ahí que P es inyectivo ya que L lo es. Por lo tanto todo R-módulo proyectivo es inyectivo, es decir, por el Teorema 2.1.4, R es cuasi-Frobenius. ■

Ahora, respecto al Teorema 2.1.5, nos restringimos en los posteriores resultados y estudio a la clase de los R-módulos cíclicos propios mediante lo que conoceremos como la propiedad (P), es decir, será de interés conocer la estructura de aquellos anillos en los que todo módulo cíclico propio es cociente de algún inyectivo.

Definición 2.1.6. Decimos que R satisface ***la propiedad (P)*** si cada R-módulo izquierdo cíclico propio es imagen homomorfa de algún R-módulo izquierdo inyectivo.

Definición 2.1.7. Dados los R-módulos M y N, decimos que M es N-***subinyectivo*** si para cada morfismo $f : N \longrightarrow M$ existe un morfismo $\bar{f} : E(N) \longrightarrow M$ tal que $\bar{f}|_N = f$, es decir, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & E(N) \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ M & \end{tikzcd}$$

conmuta, donde ι es el morfismo inclusión.

El concepto dado en la Definición 2.1.7 será de gran utilidad, pues guarda una estrecha relación con los módulos cíclicos propios como se mostrará posteriormente en el capítulo.

Proposición 2.1.8. *Si N es proyectivo, entonces cada imagen homomorfa de un módulo N-subinyectivo es N-subinyectivo.*

Demostración. Sean M un módulo N-subinyectivo, $g : M \longrightarrow K$ un epimorfismo y $f : N \longrightarrow K$ un morfismo. Dado que N es proyectivo, existe un morfismo $h : N \longrightarrow M$ tal que $gh = f$. Tal situación la podemos visualizar en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, two heads, "g"] & K. \end{tikzcd}$$

Como M es N-subinyectivo entonces h se puede extender a un morfismo $\bar{h}: E(N) \longrightarrow M$. Entonces $g\bar{h}: E(N) \longrightarrow K$ cumple que para cada $n \in N$, $g\bar{h}(n) = g(\bar{h}(n)) = g(h(n)) = (gh)(n) = f(n)$, es decir, el triángulo

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & E(N) \arrow[dl, dashed, "g\bar{h}"] \\ K & \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, K es N-subinyectivo. ■

Lema 2.1.9. *R satisface (P) si y solo si todo R-módulo izquierdo cíclico propio es R-subinyectivo.*

Demostración. [⇒] Sea R un anillo que satisface (P) y C un R-módulo izquierdo cíclico propio. Entonces C es la imagen homomorfa de algún módulo inyectivo E. Sea $f: R \longrightarrow E$ un morfismo. Como E es inyectivo, existe $g: E(R) \longrightarrow E$ tal que $g|_R = f$, es decir, g hace conmutativo al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"] & E(R) \arrow[dl, dashed, "g"] \\ E & \end{tikzcd}$$

Entonces, E es R-subinyectivo. Ya que R es proyectivo y C es imagen homomorfa de E, entonces, por la Proposición 2.1.8, se sigue que C es R-subinyectivo.

[⇐] Supongamos que todo R-módulo izquierdo cíclico propio es R-subinyectivo. Entonces, para cada cíclico propio ${}_RC = Rc$, el epimorfismo

$$\begin{aligned} \sigma\colon R &\to C \\ r &\mapsto rc \end{aligned}$$

se puede extender a un morfismo $\bar{\sigma}: E(R) \longrightarrow C$. Dado que σ es epimorfismo, entonces $\bar{\sigma}$ también lo es y así C es imagen homomorfa de un R-módulo inyectivo. Por lo tanto R satisface (P). ■

Proposición 2.1.10. *Supongamos que R un dominio entero. Entonces R satisface (P) si y solo si R es un campo.*

Demostración. [⇒] Supongamos que R es un dominio entero que satisface (P) con campo de fracciones F. Entonces, por el Corolario 1.8.9, F es una cápsula inyectiva de R. Supongamos que existe I un ideal propio no cero de R. Obsérvese que R/I es un R-módulo cíclico y se puede ver que como R-módulo no es isomorfo a R. Para esto, supongamos que R/I y R son isomorfos como R-módulos. Entonces R/I es proyectivo y se sigue que el epimorfismo natural $\nu: R \longrightarrow R/I$ se escinde, es decir, $I = Ker\nu$ es un sumando directo de R, pero esto contradice el Lema 1.8.10 y, en consecuencia, se concluye que R/I es un R-módulo cíclico propio. Ahora, por el Lema 2.1.9, $\nu : R \longrightarrow R/I$ se puede extender a un morfismo $\bar{\nu} : F \longrightarrow R/I$ que también es epimorfismo porque ν lo es. Si $r + I \in R/I$, entonces existe $s \in F$ tal que $\bar{\nu}(s) = r + I$. Por la Proposición 1.8.6 F es divisible como R-módulo y como I es no cero existe $i_0 \in I \backslash \{0\}$ tal que $s = i_0 t$ para algún $t \in F$. Se sigue que $r + I = \bar{\nu}(s) = \bar{\nu}(i_0 t) = i_0 \bar{\nu}(t) = 0$ (la última igualdad se tiene porque $i_0 \bar{\nu}(t) \in I(R/I)$), lo cual implica que $R/I = 0$, pero esto contradice que I es un ideal propio de R. Por lo tanto R es un dominio entero simple, es decir, R un campo.

[$\Leftarrow$] Si R es campo, entonces el único R-módulo cíclico propio es 0 y este es, evidentemente, imagen homomorfa de cualquier R-módulo inyectivo. ■

Lema 2.1.11. *Si R es un anillo que satisface (P), entonces todo R-módulo izquierdo cíclico propio es suma directa de un módulo singular y un módulo inyectivo.*

Demostración. Sea C un R-módulo izquierdo cíclico propio. Dado que R satisface (P), existe un módulo inyectivo E y un epimorfismo $f : E \longrightarrow C$. Si A es una clausura esencial de $Ker f$ en E, entonces, por la Proposición 1.1.6, A es inyectivo y en consecuencia A es un sumando directo de E. Entonces existe $B \leq E$ tal que $E = A \oplus B$. Consideremos la función $\varphi : A \oplus B \longrightarrow (A/Ker f) \oplus B$ definida por $\varphi(a+b) = (a+Ker f, b)$. Si $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ y $r \in R$, entonces se tiene que $\varphi(r(a+b)+(a'+b')) = \varphi((ra+a')+(rb+b')) = ((ra+a')+Ker f, rb+b') = ((ra+Ker f)+(a'+Ker f), rb+b') = (ra+Ker f, rb)+(a'+Ker f, b') = r(a+Ker f, b)+(a'+Ker f, b') = r\varphi(a+b)+\varphi(a'+b')$, es decir, φ es un morfismo de R-módulos que evidentemente es suprayectivo. Es claro que $Ker f \leq Ker \varphi$ y si $x = a + b \in Ker \varphi$, con $a \in A$ y $b \in B$, entonces $(0 + Ker f, 0) = \varphi(x) = (a + Ker f, b)$, lo cual implica que $b = 0$ y $x = a \in Ker f$. Por lo tanto $Ker \varphi = Ker f$ y, por el primer teorema de isomorfismos, $(A \oplus B)/Ker f = (A \oplus B)/Ker \varphi \cong (A/Ker f) \oplus B$. Además, como f es epimorfismo, entonces $C \cong E/Ker f$, donde $E/Ker f = (A \oplus B)/Ker f \cong (A/Ker f) \oplus B$. Por la definición de A se tiene que $Ker f \leq_{es} A$, así que, por la Proposición 1.2.11, $A/Ker f$ es un módulo singular. Además, B es inyectivo ya que es un sumando directo de E. Por lo tanto C es suma directa de un módulo singular y un módulo inyectivo. ■

Corolario 2.1.12. *Si R es un anillo que satisface (P), entonces todo R-módulo simple proyectivo es inyectivo.*

Demostración. Sea C un R-módulo simple proyectivo. Entonces, por el Corolario 1.2.17, C es no-singular. Dado que C es simple, entonces es cíclico y se cumple alguno de los siguientes dos casos:

(1) Si C es isomorfo a ${}_R R$, entonces ${}_R R$ es simple. Se sigue que ${}_R R$ es inyectivo (todo módulo sobre un anillo semisimple es inyectivo, [10, Corolario 8.2.2]) y por lo tanto C también lo es.

(2) Si C no es isomorfo a ${}_R R$, entonces C es cíclico propio y, por el Lema 2.1.11, $C = S \oplus E$ donde S es un R-módulo singular y E es un R-módulo inyectivo. Como C es no-singular, entonces S es no-singular, lo cual implica que $S = 0$ (pues S es, simultáneamente, singular y no-singular). Entonces $C = E$ y se concluye que C es inyectivo. ■

Corolario 2.1.13. *Sea R un anillo no-singular izquierdo que satisface (P). Entonces cada ideal izquierdo simple de R es inyectivo.*

Demostración. Sea S un ideal izquierdo simple de R. Dado que ${}_R R$ es no-singular, entonces S es no-singular y, por el Corolario 1.2.17, se sigue que S es proyectivo. Por el Corolario 2.1.12 se concluye que S es inyectivo. ■

El siguiente lema será clave en varias demostraciones del siguiente capítulo, donde constantemente se tendrán descomposiciones de la forma ${}_RR = A \oplus B$.

Lema 2.1.14. *Supongamos que R satisface (P) y que no es autoinyectivo izquierdo. Si existe una descomposición ${}_RR = A \oplus B$, entonces A ó B es semisimple y el otro es isomorfo a ${}_RR$.*

Demostración. Supongamos que R satisface (P) y que no es autoinyectivo izquierdo. Además, supongamos que existe una descomposición ${}_RR = A \oplus B$. La demostración se hará en los siguientes dos pasos:

Paso 1. Vamos a demostrar que si alguno de A y B no es semisimple entonces el otro es inyectivo. Supongamos que A no es semisimple. Entonces existe un submódulo propio A' de A que no es un sumando directo de A. Nótese que R/A' no es proyectivo, ya que en caso contrario el epimorfismo natural $\nu : R \longrightarrow R/A'$ se escinde, es decir, se tendría que $Ker\nu = A' \leq_{\oplus} R$ y existiría $B' \leq_R R$ tal que $R = A' \oplus B'$, luego, por la Ley modular, $A = A \cap R = A \cap (A' \oplus B') = A' \oplus (B' \cap A)$ lo que contradice que A' no es sumando directo de A. Entonces R/A' no es isomorfo a ${}_RR$, es decir, R/A' es cíclico propio. Por el Lema 2.1.9, R/A' es R-subinyectivo y en consecuencia el epimorfismo natural $\nu : R \longrightarrow R/A'$ se puede extender a un morfismo $\bar{\nu} : E({}_RR) \longrightarrow R/A'$ que también es epimorfismo ya que ν lo es. Ahora, como $R/A' = (A \oplus B)/A' \cong (A/A') \oplus B$ (donde el isomorfismo $(A \oplus B)/A' \cong (A/A') \oplus B$ se puede demostrar de manera similar a como se demostró el isomorfismo $(A \oplus B)/Kerf \cong (A/Kerf) \oplus B$ en la demostración del Lema 2.1.11), entonces B es una imagen homomorfa de R/A'. Entonces existe un epimorfismo $\varphi : R/A' \longrightarrow B$. Se sigue que el epimorfismo $\varphi\bar{\nu} : E(R) \longrightarrow B$ se escinde ya que B es proyectivo por ser sumando directo de ${}_RR$. Entonces $E({}_RR) = Ker(\varphi\bar{\nu}) \oplus N$ para algún $N \leq E({}_RR)$. Por el primer teorema de isomorfismos, $B \cong E({}_RR)/Ker(\varphi\bar{\nu}) \cong N$. Así, B es inyectivo por ser isomorfo a N que es un sumando directo del R-módulo inyectivo $E({}_RR)$.

Paso 2. Ahora vamos a concluir que alguno de A y B es semisimple y el otro isomorfo a ${}_RR$. Nótese que alguno de A y B debe ser semisimple pues, en caso contrario, si A y B no son semisimples entonces el Paso 1 implica que A y B son inyectivos y en consecuencia ${}_RR = A \oplus B$ es inyectivo, pero esto contradice que R no es autoinyectivo izquierdo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que A es semisimple. Resta demostrar que B es isomorfo a ${}_RR$. Como $B \cong R/A$, entonces B es cíclico. Si B no es isomorfo a ${}_RR$, entonces B es cíclico propio y debe ser la imagen homomorfa de algún R-módulo inyectivo E, así que existe un epimorfismo $f : E \longrightarrow B$. Dado que B es proyectivo, entonces $E = Kerf \oplus H$ y por el primer teorema de isomorfismos, $B \cong E/Kerf \cong H$. Entonces B es inyectivo por ser isomorfo a un sumando directo de E. Nótese que A también es cíclico propio ya que $A \cong R/B$ donde R/B es cíclico y A no puede ser isomorfo a ${}_RR$ pues, en caso contrario, si $A \cong_R R$ entonces ${}_RR$ sería semisimple y en consecuencia R sería autoinyectivo izquierdo contradiciendo nuestra hipótesis sobre R. Ahora, por el Corolario 1.2.17, A es no-singular ya que es semisimple y es proyectivo (A es proyectivo por ser sumando directo de ${}_RR$). Por el Lema 2.1.11, $A = N \oplus T$ con N singular y T inyectivo. Entonces N es no-singular (por ser submódulo de un módulo no-singular) y singular simultáneamente, de ahí que $N = 0$ y en consecuencia A es inyectivo, lo cual no es posible ya que B es inyectivo y ${}_RR = A \oplus B$ sería inyectivo contradiciendo que R no es autoinyectivo izquierdo. Por lo tanto, B es isomorfo a ${}_RR$.

■

Obsérvese que en el Lema 2.1.14 se pide la hipótesis de que R no sea autoinyectivo izquierdo. Ahora, todo anillo autoinyectivo izquierdo trivialmente satisface (P), pues cada cíclico (propio ó isomorfo a ${}_RR$) es imagen homomorfa del inyectivo ${}_RR$. Entonces, para la gran mayoría de los resultados posteriores, se pedirá que cuando el anillo satisfaga (P) no sea autoinyectivo izquierdo.

Corolario 2.1.15. *Si R satisface (P) y no es autoinyectivo izquierdo, entonces todo ideal izquierdo inyectivo de R es semisimple.*

Demostración. Supongamos que R no es autoinyectivo izquierdo y que satisface (P). Sea I un ideal izquierdo inyectivo de R. Entonces, de la inyectividad de I se sigue que existe un ideal izquierdo J tal que ${}_RR = I \oplus J$. El Lema 2.1.14 implica que I es semisimple o isomorfo a ${}_RR$. Como R no es autoinyectivo izquierdo, I no es isomorfo a ${}_RR$. Por lo tanto, I es semisimple. ■

Proposición 2.1.16. *Sea R un anillo que satisface (P) pero que no es autoinyectivo izquierdo. Si ${}_RR$ no es inescindible, entonces N no es finitamente generado, donde N es la parte no-singular de de $zoc({}_RR)$.*

Demostración. (Por contradicción) Supongamos que ${}_RR$ no es inescindible y que N es finitamente generado. Como N es semisimple finitamente generado, entonces N es artiniano y noetheriano. Por el Corolario 1.4.10 se tiene que $n := u.dimN < \infty$. Sean A_0 y B_0 ideales izquierdos propios de R tales que $R = A_0 \oplus B_0$. Por el Lema 2.1.14, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A_0 \cong_R R$ y que B_0 es semisimple. Como $A_0 \cong_R R$ tenemos que existen A_1 y B_1 submódulos propios de A_0 tales que $A_0 = A_1 \oplus B_1$ y $A_1 \cong A_0$, $B_1 \cong B_0$. Entonces $B_0 + B_1 = B_0 \oplus B_1$ y, como $A_1 \cong A_0 \cong_R R$, se sigue que existen A_2 y B_2 submódulos propios de A_1 tales que $A_1 = A_2 \oplus B_2$ con $A_2 \cong A_0$ y $B_2 \cong B_0$. Se sigue que $B_0 + B_1 + B_2 = B_0 \oplus B_1 \oplus B_2$. Continuando de esta manera n veces, se tiene que $B := \bigoplus_{i=0}^{n} B_i$ es semisimple proyectivo (pues para cada i, $B_i \cong B_0$ donde B_0 es semisimple proyectivo). Por el Corolario 1.2.17, B es semisimple no-singular, de ahí que $B \leq N$, pues N es el mayor submódulo no-singular de $zoc({}_RR)$ (ver Observación 1.3.3), pero esto contradice a la Proposición 1.4.6. ■

Lema 2.1.17. *Supongamos que R satisface (P). Para cada ideal izquierdo cerrado C de R, se tiene que C es un sumando directo de ${}_RR$ ó R/C es un R-módulo inyectivo.*

Demostración. Sea C un ideal izquierdo cerrado de R. Supongamos que C no es un sumando directo de ${}_RR$ y mostremos que R/C es un R-módulo inyectivo. Sea A un seudocomplemento de C en ${}_RR$. Nótese que R/C es cíclico y no es proyectivo (en caso contrario, C sería un sumando directo de ${}_RR$), por lo que R/C no puede ser isomorfo a ${}_RR$. Se sigue que R/C es un R-módulo izquierdo cíclico propio y, por el Lema 2.1.9, el epimorfismo natural $\nu : R \longrightarrow R/C$ se puede extender a un morfismo $\bar{\nu} : E({}_RR) \longrightarrow R/C$. Veamos que R/C es un sumando directo de $E({}_RR)/C$. Consideremos $\iota : R/C \hookrightarrow E({}_RR)/C$ el morfismo inclusión y $\alpha : E({}_RR)/C \longrightarrow R/C$ definido por $\alpha(x+C) = \bar{\nu}(x)$. Obsérvese que α está bien definida, pues si $x_1, x_2 \in E({}_RR)$ son tales que $x_1 + C = x_2 + C$, entonces $x_1 - x_2 \in C$ y, dado que $\bar{\nu}$ extiende a ν, entonces $0 + C = \nu(x_1 - x_2) = \bar{\nu}(x_1 - x_2) = \bar{\nu}(x_1) - \bar{\nu}(x_2)$ lo cual implica que $\bar{\nu}(x_1) = \bar{\nu}(x_2)$. Es claro, por su definición, que α es morfismo. Además, para cada $r + C \in R/C$, $(\alpha\iota)(r + C) = \alpha(r + C) = \bar{\nu}(r) = \nu(r) = r + C$. Por lo tanto, como ι es monomorfismo y tiene inverso izquierdo, se tiene que ι es un monomorfismo que se escinde (cf. [10, Corolario 3.4.11]), es decir, $R/C = Im(\iota)$ es un sumando directo de $E({}_RR)/C$. Entonces existe $D \leq E({}_RR)$ tal que

$$E({}_RR) = R + D \text{ y } R \cap D = C. \tag{2.1}$$

Sean $\bar{A}$ y $\bar{D}$ clausuras esenciales de A y D en $E({}_RR)$, respectivamente. Ahora, veamos que $E({}_RR) = \bar{A} \oplus \bar{D}$. Sea $y \in \bar{A} \cap \bar{D}$ y supongamos que $y \neq 0$. Se sigue que, en particular, $0 \neq y \in \bar{A}$ y existe $r_1 \in R$ tal que $0 \neq r_1 y \in A$, pues $A \leq_{es} \bar{A}$. Ahora, como $0 \neq y \in \bar{D}$ entonces $0 \neq r_1 y \in \bar{D}$ y existe $r_2 \in R$ tal que $0 \neq r_2 r_1 y \in D$, pues $D \leq_{es} \bar{D}$. Entonces, como $r_1 y \in A$ se tiene que $0 \neq r_2 r_1 y \in A \cap D = (A \cap R) \cap D = A \cap (R \cap D) = A \cap C = 0$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $\bar{A} + \bar{D} = \bar{A} \oplus \bar{D}$. Como $\bar{A}$ y $\bar{D}$ son clausuras esenciales en $E({}_RR)$, por la Proposición

1.1.6, se sigue que ambos son inyectivos y en consecuencia $\bar{A} \oplus \bar{D}$ es inyectivo. Entonces $\bar{A} \oplus \bar{D}$ es un sumando directo de $E({}_RR)$, lo cual implica que $\bar{A} \oplus \bar{D}$ es cerrado en $E({}_RR)$ (Proposición 1.1.9). Como A es seudocomplemento de C en ${}_RR$ se sigue que $A \oplus C \leq_{es} R \leq_{es} E({}_RR)$, entonces $A \oplus C \leq_{es} E({}_RR)$. Dado que $A \oplus C \leq \bar{A} \oplus \bar{D} \leq E({}_RR)$ (pues $C \leq D$ por (2.1)) y $A \oplus C \leq_{es} E({}_RR)$, entonces $\bar{A} \oplus \bar{D} \leq_{es} E({}_RR)$, lo cual implica que $\bar{A} \oplus \bar{D} = E({}_RR)$ pues $\bar{A} \oplus \bar{D}$ es cerrado en $E({}_RR)$. Consideremos la proyección canónica $\pi : \bar{A} \oplus \bar{D} \longrightarrow \bar{A}$. Obsérvese que se tienen las siguientes igualdades:

$$E({}_RR) = \bar{A} \oplus \bar{D} = R + D = R + \bar{D} \overset{*}{=} \pi(R) \oplus \bar{D}, \tag{2.2}$$

donde la igualdad señalada con * aún se tiene que verificar. Sea $\bar{r} \in E({}_RR)$, entonces de las igualdades en (2.2), existen $r \in R$ y $\bar{d_0} \in \bar{D}$ tales que $\bar{r} = r + \bar{d_0}$. Ahora, para $r \in R \leq E({}_RR)$, existen $\bar{a} \in \bar{A}$ y $\bar{d_1} \in \bar{D}$ tales que $r = \bar{a} + \bar{d_1}$, lo cual implica que $\bar{r} = (\bar{a} + \bar{d_1}) + \bar{d_0} = \bar{a} + (\bar{d_1} + \bar{d_0}) = \pi(r) + (\bar{d_1} + \bar{d_0}) \in \pi(R) + \bar{D}$, es decir, $E({}_RR) \leq \pi(R) + \bar{D}$. La otra contención es evidente. Por lo tanto, se han demostrado ya todas las igualdades de (2.2). Ahora veamos que $\pi(R) = \bar{A}$. Si $\bar{a} \in \bar{A} \leq E({}_RR)$ entonces, por (2.2), $\bar{a} = r + \bar{d}$ para algunos $r \in \pi(R)$ y $\bar{d} \in \bar{D}$. Se sigue que $\bar{a} - r = \bar{d} \in \bar{A} \cap \bar{D} = 0$, lo cual implica que $\bar{a} = r \in \pi(R)$, es decir, $\bar{A} \leq \pi(R)$. La otra contención es inmediata por la definición de π. Nótese que $C = R \cap \bar{D}$, pues de $D \leq_{es} \bar{D}$ y ${}_RR \leq_{es} {}_RR$ podemos implicar que $C = R \cap D \leq_{es} R \cap \bar{D}$ (si $H \leq R \cap \bar{D}$ es tal que $R \cap D \cap H = 0$, entonces $R \cap H = 0$ pues $R \cap H \leq H \leq R \cap \bar{D} \leq \bar{D}$ y $D \leq_{es} \bar{D}$; de $R \cap H = 0$ se sigue que $H = 0$, pues $H \leq R \cap \bar{D} \leq R$). Como C es cerrado en ${}_RR$, entonces $C = R \cap \bar{D}$. Finalmente, tenemos que $\pi(R) = \bar{A} \cong E(R)/\bar{D} \overset{**}{=} (R + \bar{D})/\bar{D} \cong R/(R \cap \bar{D}) = R/C$, donde la igualdad señalada con ** se debe a (2.2). Por lo tanto, R/C es inyectivo por ser isomorfo a $\pi(R)$ que, como se ve en (2.2), es un sumando directo de $E({}_RR)$. ∎

Lema 2.1.18. *Si R satisface (P) y no es autoinyectivo izquierdo, entonces es indescomponible.*

Demostración. Supongamos que R satisface (P) y que no es autoinyectivo izquierdo. Ahora, supongamos que existen anillos no cero R_1 y R_2 tales que $R \cong R_1 \times R_2$, es decir, se está suponiendo que R no es indescomponible. Sea $\varphi : R_1 \times R_2 \longrightarrow R$ un isomorfismo de anillos. Por la Observación 1.7.13, $S := \varphi(R_1)$ y $T := \varphi(R_2)$ son ideales bilaterales de R tales que $R = S \oplus T$. En particular, S y T son ideales izquierdos, así que por el Lema 2.1.14, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que ${}_RS$ es semisimple y ${}_RT \cong {}_RR$. Sea I_1 un submódulo simple de ${}_RS$. Como ${}_RT \cong {}_RR$, entonces ${}_RS$ se puede sumergir en ${}_RT$ y en consecuencia existe un submódulo simple I_2 de ${}_RT$ tal que $I_1 \cong I_2$. Sea $f : I_1 \longrightarrow I_2$ un isomorfismo de R-módulos izquierdos. Entonces, como S y T son ideales bilaterales de R, para cada $x \in I_1$ con $x \neq 0$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{gathered} I_2 = Rf(x) = (S + T)f(x) = Sf(x) + Tf(x) = Sf(x) + f(Tx) \subseteq S \cap I_2 + f(S \cap T) \subseteq \\ S \cap T + f(S \cap T) = 0 + f(0) = 0, \end{gathered}$$

pero esto es una contradicción al hecho de que I_2 es simple. Por lo tanto, si R satisface (P) y no es autoinyectivo izquierdo, entonces R es indescomponible. ∎

2.2. Anillos-PCI

Definición 2.2.1. Se dice que R es un ***anillo-PCI izquierdo*** si todo R-módulo izquierdo cíclico propio es inyectivo. Simétricamente se define ***anillo-PCI derecho***. Además, se dice que R es un ***anillo-PCI*** si R es PCI-izquierdo y PCI-derecho.

Es claro que los anillos semisimples son anillos-PCI, por lo que la clase de los anillos-PCI tiene a muchos anillos muy familiares.

Observación 2.2.2. *Si R es un anillo-PCI izquierdo, entonces R satisface (P). Además, por [6], se tiene una clasificación para estos anillos, pues son semisimples ó son dominios simples de Ore izquierdos.*

Una pregunta inmediata es qué condiciones se le pueden pedir a un anillo que satisface la propiedad (P) para que sea un anillo-PCI izquierdo. La siguiente proposición nos da una respuesta parcial.

Proposición 2.2.3. *Si R es hereditario izquierdo, noetheriano derecho y no es autoinyectivo izquierdo, entonces R satisface (P) si y solo si R es un dominio-PCI.*

Demostración. Sea R un anillo hereditario izquierdo que no es autoinyectivo izquierdo.

[$\Rightarrow$] Supongamos que R satisface (P). Por la Proposición 1.6.2 toda imagen homomorfa de un R-módulo izquierdo inyectivo es inyectivo, entonces de la hipótesis se sigue que todo R-módulo cíclico propio es inyectivo. Así, cada R-módulo cíclico es proyectivo (si es isomorfo a ${}_RR$) o inyectivo (si no es isomorfo a ${}_RR$). Por [8], existe una descomposición de anillos $R = S \times T$ tal que S es un anillo semisimple y T es un dominio de Ore izquierdo simple y semihereditario izquierdo cuyos módulos izquierdos cíclicos propios son inyectivos. Por el Lema 2.1.18 R es indescomponible, así que $S = 0$ (en caso contrario, $R = S$ es semisimple y, en consecuencia, R es autoinyectivo izquierdo). Entonces R es un dominio de Ore izquierdo, lo cual implica que ${}_RR$ tiene dimensión uniforme finita (ver Teorema 1.4.12). Por otro lado, R es noetheriano izquierdo ya que es un anillo hereditario izquierdo con dimensión uniforme izquierda finita (Teorema 1.6.5) y se sigue que R es noetheriano (izquierdo y derecho). Como R es un dominio-PCI izquierdo noetheriano, entonces R es un dominio-PCI (cf. [5]).

[$\Leftarrow$] Es inmediato. ■

Nótese que en la Proposición 2.2.3 la hipótesis de que R no sea autoinyectivo izquierdo es necesaria, pues $\mathbb{Z}_6$ es hereditario, noetheriano, autoinyectivo y por ende satisface (P), pero no es un dominio.

Una pregunta interesante y aún por resolver es respecto a la simetría en el lado de los anillos-PCI, es decir, ¿todo anillo-PCI izquierdo es anillo-PCI derecho y viceversa? Bajo ciertas condiciones, como en [5], dan una respuesta parcial a la pregunta, sin embargo aún permanece como un problema abierto. Tal pregunta también podría inspirar a cuestionarse cuándo un anillo que satisface la propiedad (P) por la izquierda también la satisface por la derecha, incluso cuándo, si es posible, un anillo que satisface la propiedad (P) por ambos lados es un anillo-PCI (por ambos lados).

Capítulo 3

Caracterizaciones de la Propiedad (P)

Este capítulo tiene por objetivo describir la estructura de los anillos que satisfacen la propiedad (P). De gran interés será exhibir las propiedades que satisfacen los anillos artinianos izquierdos que satisfacen (P) y que no son anillos cuasi-Frobenius, lo cual posibilita el encontrar ejemplos no triviales de anillos que satisfacen la propiedad en cuestión. Bajo ciertas hipótesis se verá que los anillos que satisfacen (P) tienen una relación cercana con los anillos $\aleph$-QF3, mismos que han sido tratados en trabajos como en [11].

3.1. (P), el Submódulo Singular y la Parte No-Singular del Zoclo

Lema 3.1.1. *Supongamos que R satisface (P) y que no es autoinyectivo izquierdo. Si R tiene un elemento idempotente no trivial, entonces $N \neq 0$ y $N \oplus Z({}_RR) \leq_{es} {}_RR$, donde N es la parte no-singular de $zoc({}_RR)$. Además, si $Z({}_RR) \neq 0$ entonces $Z({}_RR)$ y N son seudocomplentos uno del otro en ${}_RR$.*

Demostración. Supongamos que R satisface (P), que no es autoinyectivo izquierdo y que existe $e \in R$ un elemento idempotente no trivial. Dado que $e \in R$ es idempotente, entonces ${}_RR = Re \oplus R(1-e)$; el Lema 2.1.14 implica que alguno de Re y $R(1-e)$ es semisimple y el otro es isomorfo a ${}_RR$. Como e y $1-e$ son idempotentes no triviales, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que Re es semisimple. La demostración se dividirá en tres partes:

Parte 1. Mostremos que $N \neq 0$. Dado que Re es semisimple, entonces $e \in zoc({}_RR)$. Nótese que si $x \in ann_\ell(e) \cap Re$, entonces $x = re$ para algún $r \in R$ y $xe = 0$, donde $xe = (re)e = re^2 = re = x$. Entonces $ann_\ell(e) \cap Re = 0$ con $Re \neq 0$, lo cual implica que $ann_\ell(e)$ no es esencial en ${}_RR$ y en consecuencia $e \notin Z(zoc({}_RR))$. Por la definición de N (ver Definición 1.3.2) se tiene que $zoc({}_RR) = Z(zoc({}_RR)) \oplus N$, donde $Z(zoc({}_RR)) \lneq zoc({}_RR)$, lo cual implica que $N \neq 0$.

Parte 2. Mostremos que $N \oplus Z({}_RR) \leq_{es} {}_RR$. Primero, obsérvese que $N \cap Z({}_RR) = (N \cap zoc({}_RR)) \cap Z({}_RR) = N \cap (zoc({}_RR) \cap Z({}_RR)) = N \cap Z(zoc({}_RR)) = 0$ por lo que, efectivamente, la suma de N y $Z({}_RR)$ es directa. Ahora, supongamos que $N \oplus Z({}_RR)$ no es esencial en ${}_RR$. Entonces existe $0 \neq I \leq {}_RR$ tal que $I \cap (N \oplus Z({}_RR)) = 0$. Si $x \in I$ es un elemento distinto de cero, entonces $Z(Rx) = Rx \cap Z({}_RR) \leq I \cap (N \oplus Z({}_RR)) = 0$, es decir, Rx es no-singular. Ahora $Rx \ncong {}_RR$ pues, en caso contrario, si Rx y ${}_RR$ son isomorfos, entonces Rx tiene un submódulo semisimple distinto de cero (la imagen de Re bajo algún isomorfismo entre ${}_RR$ y Rx), lo cual implica que

$$0 \neq Rx \cap zoc({}_RR) = Rx \cap (N \oplus Z(zoc({}_RR))) \leq Rx \cap (N \oplus Z({}_RR)) \leq I \cap (N \oplus Z({}_RR)) = 0, \quad (3.1)$$

siendo esto un absurdo. Por lo tanto Rx es cíclico propio y es, además, no-singular. Por el Lema 2.1.11, Rx debe ser inyectivo y entonces el Corolario 2.1.15 nos dice que Rx debe ser semisimple, lo cual no es posible pues se tendría lo mismo que en (3.1). Por lo tanto, $N \oplus Z({}_RR) \leq_{es} {}_RR$.

Parte 3. Mostraremos que si $Z({}_RR) \neq 0$ entonces $Z({}_RR)$ y N son seudocomplementos uno del otro en ${}_RR$.
(i) Veamos que $Z({}_RR)$ es un seudocomplemento de N en ${}_RR$. Dado que $N \cap Z({}_RR) = 0$, entonces existe C un seudocomplemento de N en ${}_RR$ tal que $0 \neq Z({}_RR) \leq C$ (cf. [10, Lema 5.2.3]). Sea $y \in C$ con $y \neq 0$ arbitrario pero fijo. Entonces se tiene que $Ry \cap N = 0$. Si $Ry \cong {}_RR$, entonces Ry contiene algún submódulo semisimple S distinto de cero y proyectivo (S puede ser la imagen de Re bajo algún isomorfismo entre ${}_RR$ y Ry). Entonces

$$S \leq zoc({}_RR) = Z(zoc({}_RR)) \oplus N \leq Z({}_RR) \oplus N, \quad (3.2)$$

donde S es no-singular por el Corolario 1.2.17. Sea $s \in S$ con $s \neq 0$, entonces por (3.2) existen $z \in Z({}_RR)$ y $n \in N$ tales que $s = z + n$. Dado que $S \leq Ry \leq C$, $Z({}_RR) \leq C$ y C es seudocomplemento de N en ${}_RR$ entonces $s - z = n \in C \cap N = 0$, de ahí que $0 \neq s = z \in S \cap Z({}_RR) = Z(S) = 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto Ry no es isomorfo a ${}_RR$, es decir, Ry es un R-módulo cíclico propio. Por el Lema 2.1.11, $Ry = E \oplus B$ donde E es inyectivo y B es singular. Entonces por el Corolario 2.1.15, se tiene que E es semisimple. Entonces $E \leq zoc({}_RR) = N \oplus Z(zoc({}_RR)) \leq N \oplus Z({}_RR)$ y en consecuencia si $m \in E$ existen $n \in N$ y $z \in Z({}_RR)$ tales que $m = n + z$, lo cual implica que $m - z = n \in C \cap N = 0$ (pues $m \in E \leq Ry \leq C$ y $z \in Z({}_RR) \leq C$). Así, $m = z \in Z({}_RR)$ y por ende $E \leq Z({}_RR)$. Por lo tanto, $Ry = E \oplus B \leq Z({}_RR)$. Como $y \in C$ era arbitrario, entonces $C \leq Z({}_RR) \leq C$, es decir, $C = Z({}_RR)$.

(ii) Finalmente, mostremos que N es seudocomplemento de $Z({}_RR)$ en ${}_RR$. Sea D un seudocomplemento de $Z({}_RR)$ en ${}_RR$ tal que $N \leq D$ (cf. [10, Lema 5.2.3]). Sea $k \in D$ con $k \neq 0$, entonces $Z(Rk) = Rk \cap Z({}_RR) \leq D \cap Z({}_RR) = 0$, lo cual implica que Rk es no-singular. Se sigue que $Rk \ncong {}_RR$ (pues Rk es no-singular y $Z({}_RR) \neq 0$), es decir, Rk es cíclico propio. Dado que Rk es no-singular, entonces, por el Lema 2.1.11, Rk es inyectivo; el Corolario 2.1.15 implica que Rk es semisimple. Entonces $k \in zoc({}_RR) = Z(zoc({}_RR)) \oplus N \leq Z({}_RR) \oplus N$, de ahí que $k = z + n$ para algún $z \in Z({}_RR)$ y algún $n \in N$, así que $k - n = z \in D \cap Z({}_RR) = 0$ y en consecuencia $k = n \in N$. Por lo tanto $D \leq N$ y se concluye que $N = D$. ■

Lema 3.1.2. *Supongamos que R satisface (P) y que no es autoinyectivo izquierdo. Si R tiene algún elemento idempotente no trivial y $Z({}_RR) \neq 0$, entonces $R/Z({}_RR)$ es un anillo autoinyectivo izquierdo regular (en el sentido de von Neumann) con zoclo izquierdo esencial.*

Demostración. Por el Corolario 1.2.5, $Z({}_RR)$ es un ideal de R y por ende $R/Z({}_RR)$ es un anillo. Supongamos que R satisface (P), que no es autoinyectivo izquierdo, que tiene un elemento idempotente no trivial y que $Z({}_RR) \neq 0$. Por el Lema 3.1.1, $Z({}_RR)$ es cerrado en ${}_RR$ ya que es el seudocomplemento de un submódulo de ${}_RR$. Veamos que $Z({}_RR)$ no es sumando directo de ${}_RR$. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que existe $H \leq {}_RR$ tal que $Z({}_RR) \oplus H = {}_RR$. Entonces, por el Lema 2.1.14, se tienen los siguientes dos casos posibles:

Caso 1: $Z({}_RR)$ es semisimple y $H \cong {}_RR$. Como $Z({}_RR)$ es proyectivo (por ser sumando directo de ${}_RR$), entonces el Corolario 1.2.17 implica que $Z({}_RR)$ es no-singular, lo cual implica que $Z({}_RR) = 0$ pues es, simultáneamente, singular y no-singular, pero esto contradice la hipótesis de que $Z({}_RR) \neq 0$.

Caso 2: $Z({}_RR) \cong {}_RR$ y H semisimple. Como $Z({}_RR)$ es singular, entonces el Corolario 1.2.5 implica que ${}_RR$ es singular, de ahí que $Z({}_RR) = {}_RR$, pero esto no es posible de acuerdo a (2) del Corolario 1.2.4.

En ambos casos se llega a una contradicción, mismas que surgen de suponer que $Z({}_RR)$ es sumando directo de ${}_RR$, por lo que se concluye que no lo es. Por el Lema 2.1.17, $R/Z({}_RR)$ es inyectivo como R-módulo izquierdo, así que, por la Proposición 1.9.8, $R/Z({}_RR)$ es un anillo autoinyectivo izquierdo.

Como $Z({}_RR)$ es cerrado en ${}_RR$, por la Proposición 1.2.18, se tiene que $R/Z({}_RR)$ es no-singular. Sea $\bar{x} = x + Z({}_RR) \in R/Z({}_RR)$ con $\bar{x} \neq 0$. Entonces $R\bar{x}$ es no-singular (por ser submódulo de un módulo no-singular) y $R\bar{x}$ no es isomorfo a ${}_RR$ pues $Z({}_RR) \neq 0$. Por el Lema 2.1.11, $R\bar{x}$ es inyectivo. Entonces el morfismo inclusión de $R\bar{x}$ en $R/Z({}_RR)$ se escinde, es decir, $R\bar{x} \leq_{\oplus} R/Z({}_RR)$. Por lo tanto, todo ideal principal izquierdo de $R/Z({}_RR)$ es un sumando directo lo cual implica, por el Teorema 1.7.11, que $R/Z({}_RR)$ es regular (en el sentido de von Neumann). Finalmente, sea N la parte no-singular de $zoc({}_RR)$. Entonces, por el Lema 3.1.1, N y $Z({}_RR)$ son seudocomplementos uno del otro en ${}_RR$. Se sigue que $N \oplus Z({}_RR) \leq_{es} {}_RR$ y dado que $Z({}_RR) \leq Z({}_RR) \oplus N$ con $Z({}_RR)$ cerrado en ${}_RR$, entonces, por la Proposición 1.1.9,

$$(Z({}_RR) \oplus N)/Z({}_RR) \leq_{es} {}_R(R/Z({}_RR)), \tag{3.3}$$

lo cual implica que $zoc({}_R(R/Z({}_RR))) \leq (Z({}_RR) \oplus N)/Z({}_RR)$. Por otro lado, consideremos a $\nu : R \longrightarrow R/Z({}_RR)$ como el epimorfismo natural de R-módulos, entonces $\nu(zoc({}_RR)) \leq zoc({}_R(R/Z({}_RR)))$, donde $\nu(zoc({}_RR)) = \nu(Z(zoc({}_RR)) \oplus N) = (N \oplus Z(zoc({}_RR)) + Z({}_RR))/Z({}_RR) = (N \oplus Z({}_RR))/Z({}_RR)$. Entonces $(N \oplus Z({}_RR))/Z({}_RR)$ es semisimple (por ser imagen homomorfa de $zoc({}_RR)$) y en consecuencia $(N \oplus Z({}_RR))/Z({}_RR) \leq zoc({}_R(R/Z({}_RR)))$ lo cual implica que

$$(N \oplus Z({}_RR))/Z({}_RR) = zoc({}_R(R/Z({}_RR))). \tag{3.4}$$

Por lo tanto, de (3.3) y (3.4), se sigue que ${}_R(R/Z({}_RR))$ tiene zoclo izquierdo esencial, lo cual implica que ${}_{R/Z({}_RR)}(R/Z({}_RR))$ también tiene zoclo izquierdo esencial (pues las retículas de R-submódulos y $R/Z({}_RR)$-submódulos de $R/Z({}_RR)$ coinciden [ver Corolario 1.9.7]). ■

Proposición 3.1.3. *Supongamos que R no es autoinyectivo izquierdo, que tiene elementos idempotentes no triviales y que $Z({}_RR) \neq 0$. Entonces R satisface (P) si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:*

(i) Todo R-módulo cíclico propio es subinyectivo relativo a cada R-módulo semisimple proyectivo.

(ii) R/N es un anillo autoinyectivo izquierdo e inyectivo como R-módulo izquierdo, donde N es la parte no-singular de $zoc({}_RR)$ y $R/Z({}_RR)$ es un anillo autoinyectivo izquierdo regular (en el sentido de von Neumann) con zoclo izquierdo esencial.

Demostración. [$\Rightarrow$] Supongamos que R no es autoinyectivo izquierdo, que tiene elementos idempotentes no triviales, que $Z({}_RR) \neq 0$ y que satisface (P). Sean C un R-módulo cíclico propio, P un R-módulo semisimple proyectivo y $f : P \longrightarrow C$ un morfismo. Por el Lema 2.1.11, existen $E, B \leq C$ tales que $C = E \oplus B$ donde E es inyectivo y B es singular. Sean $\pi_E : E \oplus B \longrightarrow E$ y $\pi_B : E \oplus B \longrightarrow B$ las proyecciones canónicas. Dado que P es proyectivo y semisimple, entonces, por el Corolario 1.2.17, se sigue que P es no-singular. Sea $x \in f(P) \leq C = E \oplus B$. Entonces $x = e + b$ para algún $e \in E$ y algún $b \in B$, así que

$$x = \pi_E(x) + \pi_B(x) \in \pi_E(f(P)) \oplus \pi_B(f(P)) \tag{3.5}$$

donde, por la Proposición 1.2.19, $\pi_B(f(P))$ es no-singular además de ser singular por ser submódulo de B. Se sigue que $\pi_B(f(P)) = 0$, lo cual implica, por (3.5), que $f(P) \leq \pi_E(f(P)) \leq E$. Sea

$\varphi = \iota_1 \circ f|^{f(P)}$ donde $\iota_1 : f(P) \hookrightarrow E$ es el morfismo inclusión. Como E es inyectivo, existe $\lambda : E(P) \longrightarrow E$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, hook, "\iota_0"] \arrow[d, "\varphi"] & E(P) \arrow[dl, dashed, "\lambda"] \\ E & \end{tikzcd}$$

conmuta, donde ι_0 es el morfismo inclusión. Sea $g = \iota_2\lambda : E(P) \longrightarrow C$ donde $\iota_2 : E \hookrightarrow C$ es el morfismo inclusión. Entonces si $p \in P$ se tiene lo siguiente:

$$f(p) = f|^{f(P)}(p) = \iota_1 f^{f(P)}(p) = \varphi(p) = \lambda\iota_0(p) = \lambda(p) = \iota_2\lambda(p) = g(p). \tag{3.6}$$

Así, (3.6) implica que el triángulo

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, hook, "\iota_0"] \arrow[d, "f"] & E(P) \arrow[dl, dashed, "g"] \\ C & \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto C es P-subinyectivo. Por el Lema 3.1.1, N es cerrado en ${}_RR$ por ser seudocomplemento de un ideal izquierdo de R y, por la Proposición 2.1.16, N no es finitamente generado, lo cual implica que N no es sumando directo de ${}_RR$ (pues los sumandos directos de ${}_RR$ son finitamente generados). Por el Lema 2.1.17, R/N es inyectivo como R-módulo, lo cual implica que R/N es un anillo autoinyectivo izquierdo (ver Proposición 1.9.8). Que $R/Z({}_RR)$ es un anillo autoinyectivo izquierdo regular (en el sentido de von Neumann) con zoclo izquierdo esencial es conocido por el Lema 3.1.2.

[$\Leftarrow$] Supongamos que R tiene un elemento idempotente no trivial, $Z({}_RR) \neq 0$ y las condiciones (i) y (ii) se satisfacen. Sean C un R-módulo cíclico propio y A la suma de todos los submódulos simples proyectivos de C. Entonces A es semisimple proyectivo y, por hipótesis, existe un morfismo $f : E(A) \longrightarrow C$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\iota_0"] \arrow[d, hook, "\iota_1"'] & E(A) \arrow[dl, dashed, "f"] \\ C & \end{tikzcd}$$

donde ι_0 y ι_1 son los respectivos morfismos inclusión. Como ι_1 es monomorfismo, entonces $Im\iota_0 \cap Kerf = 0$, es decir, $A \cap Kerf = 0$. Dado que $A \leq_{es} E(A)$, se tiene que $Kerf = 0$, lo cual implica que $E(A) \cong f(E(A))$. Entonces $f(E(A))$ es inyectivo, lo cual implica que $C = f(E(A)) \oplus B$ para algún $B \leq C$. Nótese que $A \leq f(E(A))$ pues $A \leq E(A)$ implica que $f(A) \leq f(E(A))$, donde $f(A) = f(\iota_0(A)) = \iota_1(A) = A$. Entonces por la definición de A, B no contiene ningún submódulo simple proyectivo de C. Dado que C es cíclico, entonces $C = Rx$ para algún $x \in C$ y tenemos el epimorfismo $\gamma : R \longrightarrow C$ definido por $\gamma(r) = rx$. Sea $\pi_B : C = f(E(A)) \oplus B \longrightarrow B$ la proyección canónica. Entonces $\pi_B\gamma : R \longrightarrow B$ es epimorfismo. Como N es semisimple, entonces $\gamma(N)$ es semisimple y dado que N es no-singular se sigue, por la Proposición 1.2.19, que $\gamma(N)$ es no-singular; el Corolario 1.2.17 implica que $\gamma(N)$ es semisimple proyectivo, de ahí que $\gamma(N) \leq A$. Se sigue que $\pi_B\gamma(N) = 0$. Entonces $N \leq K$ donde $K := Ker(\pi_B\gamma)$ y, por el 3er y 1er teoremas de isomorfismos,

$$(R/N)/(K/N) \cong R/K \cong B. \tag{3.7}$$

De (3.7) y del epimorfismo natural $\nu : R/N \longrightarrow (R/N)/(K/N)$ podemos obtener un epimorfismo $g : R/N \longrightarrow B$. Entonces $f|^{Imf} \oplus g : E(A) \oplus (R/N) \longrightarrow C = f(E(A)) \oplus B$ definido como $(f \oplus g)(x, b) = (f(x), g(b))$ es un epimorfismo. Por hipótesis R/N es inyectivo, así que C es imagen homomorfa del módulo inyectivo $E(A) \oplus (R/N)$. Por lo tanto, R satisface (P). ■

Proposición 3.1.4. *Supongamos que R satisface (P) y no que es autoinyectivo izquierdo. Si R no tiene elementos idempotentes no triviales, entonces $R/Z(_RR)$ es un dominio.*

Demostración. Supongamos que R satisface (P), que no es autoinyectivo izquierdo y que $_RR$ es inescindible (siendo esto último equivalente a que R no tenga idempotentes no triviales). La demostración se divide en dos casos.

Caso 1: $Z(_RR) = 0$. Para cada $x \in R\backslash\{0\}$ se tiene que $Rx \cong _RR$, pues en caso contrario, si existiera $x_0 \in R\backslash\{0\}$ tal que $Rx_0 \not\cong _RR$ entonces, por el Lema 2.1.11, $Rx_0 = E \oplus S$ con E inyectivo y S singular, pero $Z(_RR) = 0$ implica que $S = 0$, de ahí que Rx_0 es inyectivo y por ende un sumando directo de $_RR$. Como $_RR$ es inescindible, entonces $Rx_0 = 0$ ó $Rx_0 = R$ lo cual no es posible ya que $x_0 \neq 0$ y $Rx_0 \not\cong_R R$. Sea $x \in R$ con $x \neq 0$ y $\varphi : R \longrightarrow Rx$ el epimorfismo definido por $\varphi(r) = rx$. Entonces, $R/ann_\ell(x) \cong Rx$, donde Rx es proyectivo por ser isomorfo a $_RR$. Se sigue que $ann_\ell(x) \leq_{\oplus R}R$, de ahí que $ann_\ell(x) = 0$. Por lo tanto, R es un dominio cuando $Z(_RR) = 0$.

Caso 2: $Z(_RR) \neq 0$. Consideremos $x \in R\backslash Z(_RR)$. Entonces $Rx \cong _RR$ pues en caso contrario, si Rx es cíclico propio, por el Lema 2.1.11 se tiene que $Rx = S \oplus E$ con S singular y E inyectivo, lo cual implica que $E = 0$ (pues E es sumando directo de $_RR$, donde $_RR$ es inescindible y no es autoinyectivo izquierdo), de ahí que $x \in Rx = S \leq Z(_RR)$, siendo esto una contradicción. Como se hizo en el Caso 1, se tiene $ann_\ell(x) = 0$. Supongamos que $(y+Z(_RR))(x+Z(_RR)) = 0+Z(_RR)$ para algún $y \in R$. Como $yx \in Z(_RR)$, entonces $ann_\ell(yx) \leq_{es\,R}R$. Nótese que $ann_\ell(yx) \leq ann_\ell(y)$ (pues $ann_\ell(x) = 0$), lo cual implica que $ann_\ell(y) \leq_{es\,R}R$, es decir, $y \in Z(_RR)$. Por lo tanto, $R/Z(_RR)$ es un dominio. ■

3.2. Anillos $\aleph$-QF3

Definición 3.2.1. Se dice que un elemento $e \in R$ es ***idempotente local*** si e es idempotente y eRe es un anillo local.

Definición 3.2.2. Se dice que los R-módulos izquierdos M y N son ***ortogonales***, lo cual se denota por $M \perp N$, si no tienen submódulos isomorfos distintos de cero.

Es claro que si G es un grupo abeliano finito, entonces $_\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ y G son ortogonales, pues todo submódulo no trivial de $_\mathbb{Z}\mathbb{Z}$ no es finito.

Definición 3.2.3. Sea R un anillo.

(1) R es llamado ***QF3*** **izquierdo** si existe un módulo fiel mínimo $_RU$, en el sentido de que todo R-módulo izquierdo fiel contiene un sumando directo que es isomorfo a U.

(2) R es llamado **$\aleph$-*QF3 izquierdo*** si existe una familia $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de elementos de R idempotentes locales, ortogonales por pares y no isomorfos por pares (en el sentido de que $Re_\lambda \not\cong Re_\mu$ siempre que $\lambda \neq \mu$) tal que cumple lo siguiente:

a) Cada Re_λ es la cápsula inyectiva de un ideal izquierdo simple.

b) El ideal izquierdo ${}_RW = \sum_{\lambda\in\Lambda} Re_\lambda$ es fiel.

Aquí, $\aleph$ representa la cardinalidad del conjunto Λ.

El siguiente teorema, aunque no es necesario para el resultado principal de esta sección (Teorema 3.2.8), permite ver que un anillo $QF3$ izquierdo no es otra cosa que un anillo $\aleph$-QF3 izquierdo, donde $\aleph$ es un cardinal finito. La prueba se omite pero los comentarios sobre la misma se pueden encontrar en [4].

Teorema 3.2.4. *R es $QF3$ si y solo si contiene un ideal izquierdo fiel de la forma $E(S_1) \oplus ... \oplus E(S_n)$, donde cada $E(S_i)$ es la cápsula inyectiva de un simple S_i, y los S_i's no son isomorfos dos a dos.*

Para demostrar el Teorema 3.2.8 es necesario el siguiente resultado:

Teorema 3.2.5. *Sean $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de representantes de todos los R-módulos izquierdos simples proyectivos y $\aleph$ un número cardinal distinto de cero. Entonces R es un anillo semiprimo, $\aleph$-$QF3$ izquierdo si y solo si es un anillo semiprimo, con zoclo izquierdo esencial, $Car(\Lambda) = \aleph$ y cada R-módulo izquierdo simple proyectivo es inyectivo.*

Demostración. Ver [4, Teorema 10]. ■

A continuación se da una definición y un teorema sobre módulos directamente finitos y puramente infinitos, los cuales son tratados más profundamente en el libro *Continuous and Discrete Modules* de S.H. Mohamed y Bruno J. Muller [15].

Definición 3.2.6.

(1) Un módulo ${}_RD$ es llamado *directamente finito* si ${}_RD$ no es isomorfo a un sumando directo propio de sí mismo.

(2) Un módulo ${}_RP$ es llamado *puramente infinito* si $P \cong P \oplus P$.

Teorema 3.2.7. *Todo módulo inyectivo E tiene una descomposición $E = D \oplus P$, donde D es directamente finito, P es puramente infinito y $D \perp P$.*

Demostración. Ver [15, Teorema 1.3.5]. ■

Teorema 3.2.8. *Supongamos que R es no-singular izquierdo con elementos idempotentes no triviales, que $\aleph$ es la cardinalidad del conjunto de representantes de todos los R-módulos izquierdos simples proyectivos y que R no es autoinyectivo izquierdo. Entonces R satisface (P) si y solo si satisface las siguientes condiciones:*

(i) *los R-módulos izquierdos cíclicos propios son subinyectivos relativos a cada módulo semisimple proyectivo.*

(ii) *R es semiprimo $\aleph$-$QF3$ izquierdo tal que $E({}_RR) \cong R/K$, donde K es un ideal izquierdo semisimple de R infinitamente generado.*

Demostración. $[\Rightarrow]$ Supongamos que R satisface (P). Que cada R-módulo izquierdo cíclico propio es subinyectivo relativo a todos los R-módulos izquierdos semisimples proyectivos puede demostrarse como en la demostración de (i) de la Proposición 3.1.3 (para tal objetivo específico, en la Proposición 3.1.3, no son necesarias hipótesis sobre $Z({}_RR)$).

Dado que $zoc({}_RR)$ es no-singular (pues ${}_RR$ es no-singular), el Lema 3.1.1 implica que $zoc({}_RR) \leq_{es} {}_RR$. Sea I un ideal izquierdo de R tal que $I^2 = 0$. Entonces $(I \cap zoc({}_RR))^2 = 0$. Supongamos que $I \cap zoc({}_RR) \neq 0$. Entonces existe J un ideal izquierdo simple de R tal que $J \leq (I \cap zoc({}_RR))$. Por el Corolario 2.1.13 se tiene que J es inyectivo y en consecuencia existe $H \leq_R R$ tal que ${}_RR = J \oplus H$. Entonces $1 = j + h$ para algún $j \in J$ y algún $h \in H$ con $j \neq 0 \neq h$ (ya que $0 \neq J \lneq {}_RR$). Se sigue que $0 \neq j = j1 = j(j + h) = jj + jh$, lo cual implica que $j - jj = jh \in J \cap H = 0$ y por ende $0 \neq j = jj \in J^2$ donde $J^2 \leq (I \cap zoc({}_RR))^2 = 0$, siendo esto un absurdo. Por lo tanto, $I \cap zoc({}_RR) = 0$. Como $zoc({}_RR) \leq_{es R} R$ entonces $I = 0$ y se sigue que R es un anillo semiprimo (Proposición 1.7.2). Además, por el Corolario 2.1.2, todo R-módulo simple proyectivo es inyectivo. Entonces, por el Teorema 3.2.5, R es un anillo semiprimo $\aleph$-QF3 izquierdo.

Ahora, por el Teorema 3.2.7, existen submódulos D y P de $E({}_RR)$ tales que

$$E({}_RR) = D \oplus P, \tag{3.8}$$

donde D es directamente finito, P es puramente infinito y $D \perp P$. Veamos que $E({}_RR)$ es puramente infinito mostrando que $D = 0$. Sea $K \leq_R R$ simple. Por el Corolario 2.1.13, se tiene que K es inyectivo y por ende existe $L \leq_R R$ tal que $K \oplus L =_R R$ donde, por el Lema 2.1.14, $L \cong_R R$. Ya que $L \leq E({}_RR)$, entonces una clausura esencial de L en $E({}_RR)$ es cápsula inyectiva de L (Proposición 1.1.6), de ahí que $L \leq_{es} E(L) \leq E({}_RR)$. Nótese que $E(L) \neq E({}_RR)$, ya que en caso contrario se tendría que $L \leq_{es} E({}_RR)$, y esto implica que $L \leq_{es R} R$, pero esto no es posible ya que $L \neq 0$ es un sumando directo propio de ${}_RR$. Por lo tanto, como $E(L)$ es inyectivo, se sigue que $E(L)$ es un sumando directo propio de $E({}_RR)$. Además, $E(L) \cong E({}_RR)$ pues $L \cong_R R$. Por lo tanto, $E({}_RR)$ no es directamente finito y de (3.8) se sigue que $P \neq 0$. Ahora, supongamos que $D \neq 0$. Para cada $S \leq_R R$ simple, sea C_S la componente homogénea de $zoc({}_RR)$ que contiene a S (ver [10, Definición 8.1.7]). Obsérvese que se tiene lo siguiente:

$$zoc({}_RR) = zoc(E({}_RR)) = zoc(D \oplus P) = zoc(D) \oplus zoc(P). \tag{3.9}$$

Sea $S \leq zoc(D)$ simple y sea $S_0 \leq zoc({}_RR)$ simple tal que $S_0 \cong S$. Entonces, $S_0 \cap zoc(D) = 0$ ó $S_0 \cap zoc(D) = S_0$. Si $S_0 \cap zoc(D) = 0$, entonces $S_0 + zoc(D) = S_0 \oplus zoc(D)$. Además, como $zoc(E({}_RR))$ es semisimple, existe $M \leq zoc(E({}_RR))$ tal que

$$zoc(E({}_RR)) = S_0 \oplus zoc(D) \oplus M \tag{3.10}$$

De (3.9) y (3.10) se sigue que $S_0 \oplus M \cong zoc(P)$, lo cual implica que existe $S_1 \leq zoc(P)$ talque $S_1 \cong S_0 \cong S$, siendo esto una contradicción al hecho de que D y P son ortogonales. Entonces, $S_0 \cap zoc(D) = S_0$, es decir, $S_0 \leq zoc(D)$. Por lo tanto, $C_S \leq zoc(D)$ para cada simple $S \leq zoc(D)$. Consideremos las descomposiciones

$$C_{S'} = S' \oplus C \quad \text{ y } \quad zoc(D) = C_{S'} \oplus A \tag{3.11}$$

para algún simple $S' \leq zoc(D)$ (tales descomposiciones son posibles porque $C_{S'}$ y $zoc(D)$ son módulos semisimples). Dado que S' es simple no-singular (pues ${}_RR$ es no-singular) entonces es simple proyectivo (Corolario 1.2.17) y, por el Corolario 2.1.13, S' es inyectivo y por ende existe $T \leq_R R$ tal que

$$S' \oplus T = {}_RR, \tag{3.12}$$

donde el Lema 2.1.14 implica que $T \cong_R R$. Veamos que $C \cong C_{S'}$. Dado que $S' \leq C_{s'}$, entonces de (3.12) se tiene que

$$C_{S'} = C_{S'} \cap {}_RR = C_{S'} \cap (S' \oplus T) = S' \oplus (C_{S'} \cap T). \tag{3.13}$$

De (3.11) y (3.13) sigue que $C \cong C_{S'} \cap T$. Sea $\varphi : {}_RR \longrightarrow T$ un isomorfismo de R-módulos. Ya que $C_{S'} = \sum_{U \in \Omega_{S'}} U$, donde $\Omega_{S'}$ es la clase de isomorfismo en $zoc({}_RR)$ que tiene a S' como elemento, entonces $\varphi(C_{S'}) \leq T$ y $\varphi(U) \cong U \cong S'$ para cada $U \in \Omega_{S'}$, de ahí que $\varphi(C_{S'}) = \sum_{U \in \Omega_{S'}} \varphi(U) \leq C_{S'}$ y en consecuencia

$$\varphi(C_{S'}) \leq T \cap C_{S'}. \tag{3.14}$$

Ahora, $T \cap C_{S'} \leq C_{S'}$ implica que $T \cap C_{S'}$ es semisimple y por ende $T \cap C_{S'} = \sum_{i \in I} A_i$ con A_i simple y $A_i \cong S'$ para cada $i \in I$ (ver [10, Lema 8.1.8]). Entonces, $\varphi^{-1}(T \cap C_{S'}) = \sum_{i \in I} \varphi^{-1}(A_i)$, donde $\varphi^{-1}(A_i) \cong A_i \cong S'$ para cada $i \in I$, de ahí que

$$\varphi^{-1}(T \cap C_{S'}) \leq C_{S'}. \tag{3.15}$$

Entonces, de (3.14) y (3.15), se sigue que $C_{S'} = \varphi^{-1}(\varphi(C_{S'})) \leq \varphi^{-1}(T \cap C_{S'}) \leq C_{S'}$ y en consecuencia $\varphi^{-1}(T \cap C_{S'}) = C_{S'}$ donde $\varphi^{-1}(T \cap C_{S'}) \cong T \cap C_{S'} \cong C$. Por lo tanto, $C \cong C_S$. Entonces de la descomposición $zoc(D) = C_{S'} \oplus A$ se tiene que

$$C \oplus A \cong zoc(D). \tag{3.16}$$

Como $zoc({}_RR) \leq_{es} {}_RR$, entonces $zoc(D) \leq_{es} D$ (si $H \leq D$ es tal que $zoc(D) \cap H = 0$, entonces $zoc({}_RR) \cap D \cap H = 0$, lo cual implica que $D \cap H = 0$, donde $D \cap H = H$). Dado que D es inyectivo por ser sumando directo de $E({}_RR)$ se tiene que $D = E(zoc(D))$, donde $E(zoc(D)) = E(C_{S'} \oplus A) = E((S' \oplus C) \oplus A)) = E(S' \oplus (C \oplus A)) \cong E(S') \oplus E(C \oplus A) = S' \oplus E(C \oplus A)$ y (3.16) implica que $S' \oplus E(C \oplus A) \cong S' \oplus E(zoc(D)) = S' \oplus D$. Entonces $D \cong S' \oplus D$, pero esto contradice que D es directamente finito. Por lo tanto, $D = 0$ y (3.8) implica que $E({}_RR)$ es puramente infinito.

Como $E({}_RR)$ es puramente infinito entonces $E({}_RR) \cong E({}_RR) \oplus E({}_RR)$ y en consecuencia $zoc({}_RR) = zoc(E({}_RR)) \cong zoc(E({}_RR) \oplus E({}_RR)) = zoc(E({}_RR)) \oplus zoc(E({}_RR)) = zoc({}_RR) \oplus zoc({}_RR)$, lo cual implica que existen ideales izquierdos A y B de R tales que $A \cong B \cong zoc({}_RR)$ y $zoc({}_RR) = A \oplus B$. Supongamos que $R/A \cong {}_RR$. Entonces R/A es proyectivo y en consecuencia A es un sumando directo de ${}_RR$, de ahí que A es finitamente generado además de ser semisimple, lo cual implica que A es una suma directa finita de simples. Como cada ideal izquierdo simple de R es inyectivo (Corolario 2.1.13), entonces A es una suma directa finita de inyectivos y por ende A es inyectivo. Dado que $A \cong zoc({}_RR)$, entonces $zoc({}_RR)$ es inyectivo y se sigue que $zoc({}_RR)$ es un sumando directo propio de ${}_RR$ ($zoc({}_RR)$ es propio porque ${}_RR$ no es inyectivo), lo cual no es posible ya que $zoc({}_RR) \leq_{es} {}_RR$. Por lo tanto, R/A es cíclico propio. Por el Lema 2.1.11, existen módulos X e Y tales que X es singular, Y es inyectivo y

$$R/A = X \oplus Y. \tag{3.17}$$

Dado que Y es inyectivo, entonces, por la Proposición 1.2.13, existe $W \leq Y$ tal que

$$Y = Z(Y) \oplus W. \tag{3.18}$$

De (3.17) y (3.18) se tiene que $R/A = X \oplus Z(Y) \oplus W$, donde $X \oplus Z(Y) = Z(X) \oplus Z(Y) = Z(X \oplus Y) = Z(R/A)$, es decir, $R/A = Z(R/A) \oplus W$ con W inyectivo. Sea $I \leq {}_RR$ tal que $W = I/A$. Entonces

$$R/A = Z(R/A) \oplus (I/A), \tag{3.19}$$

con I/A inyectivo no-singular. Sea $K \leq I$ tal que $A \leq_{es} K$. Entonces, por la Proposición 1.2.11, K/A es singular, pero también es no-singular ya que I/A es no-singular. Entonces $K/A = 0$, es decir, $A = K$. Por lo tanto, A es cerrado en I. De (3.19) se sigue que $(R/A)/(I/A) \cong Z(R/A)$, entonces $(R/A)/(I/A)$ es singular. Como $zoc({}_RR) = A \oplus B$ con $A \cong B \cong zoc({}_RR)$, entonces $zoc({}_RR)/A \cong B \cong zoc({}_RR)$ donde $zoc({}_RR)$ es semisimple no-singular, lo cual implica, por el Corolario 1.2.6, que $zoc(_RR)/A$ es semisimple no-singular. Si $\nu : R/A \longrightarrow (R/A)/(I/A)$ es el epimorfismo natural, entonces $\nu(zoc(_RR)/A)$ es no singular, por ser imagen homomorfa de un semisimple no-singular (Proposición 1.2.19), y también es singular por ser submódulo de $(R/A)/(I/A)$ el cual es singular, de ahí que $\nu(zoc(_RR)/A) = 0$, es decir, $zoc(_RR)/A \leq I/A$. Entonces $zoc(_RR) \leq I$ y en consecuencia $A, B \leq I$. Sea $A^{\perp}$ un seudocomplemento de A en I tal que $B \leq A^{\perp}$ (ver [10, Lema 5.2.3]). Veamos que $B \leq_{es} A^{\perp}$. Sea $J \leq A^{\perp}$ tal que $B \cap J = 0$ y sea $x \in (A \oplus B) \cap J$. Entonces $x = a + b = j$ para algunos $a \in A$, $b \in B$ y $j \in J$ y se sigue que $a = j - b \in A \cap A^{\perp} = 0$, lo cual implica que $b = j \in B \cap J = 0$. Entonces $(A \oplus B) \cap J = 0$ y dado que $A \oplus B = zoc(_RR) \leq_{es} {_RR}$, entonces $J = 0$. Por lo tanto, $B \leq_{es} A^{\perp}$. Por otro lado, como $A \leq A \oplus A^{\perp} \leq_{es} I$ y A es cerrado en I, de la Proposición 1.1.9 se tiene que $(A^{\perp} \oplus A)/A \leq_{es} I/A$ y por ende $E((A^{\perp} \oplus A)/A) = I/A$ (pues I/A es inyectivo). Entonces, como $(A^{\perp} \oplus A)/A \cong A^{\perp}$, se sigue que $E(A^{\perp}) \cong E((A^{\perp} \oplus A)/A) = I/A$. Además, $B \leq_{es} A^{\perp} \leq_{es} E(A^{\perp})$ implica que $E(B) = E(A^{\perp})$. Por lo tanto, $E(B) \cong I/A$. Ahora, nótese que I/A es cíclico ya que de (3.19) se tiene que $I/A \cong (R/A)/Z(R/A)$, así que $I = Rx_0 + A$ para algún $x_0 \in R$. Supongamos que $x_0 \in zoc(_RR)$. Entonces $I = zoc(_RR)$ (pues $Rx_0 + A \leq zoc(_RR)$ y $zoc(_RR) = A \oplus B \leq I$) y se tiene que $I/A = zoc(_RR)/A = (A \oplus B)/B \cong B \cong zoc(_RR)$. Se sigue que $zoc(_RR)$ es inyectivo y en consecuencia existe $Q \leq {_RR}$ tal que $zoc(_RR) \oplus Q = {_RR}$. Como $zoc(_RR) \leq_{es} {_RR}$, entonces $Q = 0$ y $zoc(_RR) = {_RR}$, lo cual contradice que R no es autoinyectivo izquierdo. Por lo tanto, $x_0 \notin zoc(_RR)$. Todo ideal principal izquierdo de R es cíclico propio ó isomorfo a $_RR$; los ideales izquierdos cíclicos propios son no-singulares (ya que $_RR$ es no-singular) y, por el Lema 2.1.11, son inyectivos. Por lo tanto, todo ideal principal izquierdo de R es inyectivo ó isomorfo a $_RR$, cumpliendo solo una de estas dos condiciones dependiendo de si tal ideal principal es ó no es isomorfo a $_RR$. Entonces Rx_0 no es inyectivo pues en caso contrario, por el Corolario 2.1.15, Rx_0 sería semisimple y así $x_0 \in zoc(_RR)$, lo cual se ha demostrado que no es posible, así que $Rx_0 \cong {_RR}$. Ahora, como $zoc(_RR) \leq_{es} {_RR}$ entonces $E(_RR) = E(zoc(_RR))$, donde $E(zoc(_RR)) \cong E(B) \cong I/A = (Rx_0 + A)/A \cong Rx_0/(Rx_0 \cap A)$, de ahí que $E(_RR) \cong Rx_0/(Rx_0 \cap A)$. Sean $\varphi : {_RR} \longrightarrow Rx_0$ un isomorfismo y $\nu : Rx_0 \longrightarrow Rx_0/(Rx_0 \cap A)$ el epimorfismo natural. Entonces $K := Ker(\nu\varphi) = \varphi^{-1}(Ker\nu) = \varphi^{-1}(Rx_0 \cap A)$, lo cual implica que K es semisimple (pues $Rx_0 \cap A \leq A \leq zoc(_RR)$) y, por el primer teorema de isomorfismos, $R/K \cong Rx_0/(Rx_0 \cap A)$. Entonces, como $Rx_0/(Rx_0 \cap A) \cong E(_RR)$, se tiene que $R/K \cong E(_RR)$. Veamos que K es infinitamente generado. Supongamos que K es finitamente generado. Como K es semisimple, entonces $K = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i$ con S_i simple. Ya que para cada $i = 1, ..., n$, S_i es inyectivo por el Corolario 2.1.13, entonces K es una suma directa finita de inyectivos, lo cual implica que K es inyectivo y por ende existe $K' \leq {_RR}$ tal que $K \oplus K' = {_RR}$. Por el Lema 2.1.14, $K' \cong {_RR}$, pero $K' \cong R/K \cong Rx_0/(Rx_0 \cap A) \cong E(_RR)$, lo cual es una contradicción a la hipótesis de que $_RR$ no es inyectivo. Por lo tanto, K es semisimple infinitamente generado y $R/K \cong E(_RR)$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que R satisface (i) y (ii). Sean C un R-módulo izquierdo cíclico propio y N la parte no-singular de $zoc(C)$. Como N es semisimple no-singular, entonces, por el Corolario 1.2.17, N es semisimple proyectivo. Por (i), el morfismo inclusión $\iota : N \hookrightarrow C$ se extiende a algún morfismo $\bar{\iota} : E(N) \longrightarrow C$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook, "\iota"'] & E(N) \arrow[dl, dashed, "\bar{\iota}"] \\ C & \end{tikzcd} \tag{3.20}$$

conmuta, donde i es el morfismo inclusión. Entonces $0 = Ker\iota = Ker(\bar{\iota}i) = i^{-1}(Ker\bar{\iota}) = N \cap Ker\bar{\iota}$ y, como $N \leq_{es} E(N)$, se sigue que $Ker\bar{\iota} = 0$, es decir, $\bar{\iota}$ es monomorfismo. Por lo tanto, $Im\bar{\iota}$ es inyectivo y en consecuencia existe $B \leq C$ tal que $C = Im\bar{\iota} \oplus B$. De (3.20) se tiene que $N \leq Im\bar{\iota}$, entonces $B \cap N = 0$. Si $S \leq B$ es simple proyectivo entonces, por el Corolario 1.2.17, S es simple no-singular y se sigue que $S \leq N$, ya que por definición N es el mayor submódulo no-singular contenido en $zoc(C)$, pero esto contradice que $B \cap N = 0$. Por lo tanto, B no contiene simples proyectivos. Como C es cíclico, $C = Rx$ para algún $x \in C$. Entonces $\varphi : {}_RR \longrightarrow C$ definido por $\varphi(r) = rx$ es un epimorfismo. Si $\pi : C = Im\bar{\iota} \oplus B \longrightarrow B$ es la proyección canónica sobre B, se tiene que $\pi\varphi : {}_RR \longrightarrow B$ es un epimorfismo. Dado que ${}_RR$ es no-singular, entonces $zoc({}_RR)$ es semisimple no-singular y $\varphi(zoc({}_RR))$ es semisimple no-singular por la Proposición 1.2.19, de ahí que $\varphi(zoc({}_RR)) \leq N \leq Im\bar{\iota}$ y consecuentemente $\pi\varphi(zoc({}_RR)) = 0$. Se sigue que $zoc({}_RR) \leq Ker\pi\varphi$ y, por el 1er y 3er teoremas de isomorfismos, se tiene que

$$B \cong R/Ker(\pi\varphi) \cong (R/zoc({}_RR))/(Ker(\pi\varphi)/zoc({}_RR)). \tag{3.21}$$

Del epimorfismo natural $R/zoc({}_RR) \twoheadrightarrow (R/zoc({}_RR))/(Ker(\pi\varphi)/zoc({}_RR))$ y de (3.21) se obtiene un epimorfismo $\lambda_1 : R/zoc({}_RR) \longrightarrow B$. Por hipótesis K es semisimple y R/K es inyectivo, entonces, en particular, $K \leq zoc({}_RR)$. Por el 3er teorema de isomorfismos se tiene que

$$(R/K)/(zoc({}_RR)/K) \cong R/zoc({}_RR). \tag{3.22}$$

De (3.22) y del epimorfismo natural $R/K \twoheadrightarrow (R/K)/(zoc({}_RR)/K)$ podemos obtener un epimorfismo $\lambda_2 : R/K \longrightarrow R/zoc({}_RR)$. Sea $\lambda := \lambda_1\lambda_2$. Si $id : Im\bar{\iota} \longrightarrow Im\bar{\iota}$ es el morfismo identidad, entonces $id \oplus \lambda : Im\bar{\iota} \oplus R/K \longrightarrow Im\bar{\iota} \oplus B = C$ es un epimorfismo (pues id y λ son epimorfismos), donde $Im\bar{\iota} \oplus R/K$ es inyectivo. Por lo tanto, R satisface (P). ■

3.3. (P) en Anillos Artinianos

Ahora se analizará la estructura de anillos artinianos izquierdos que satisfacen la propiedad (P).

Teorema 3.3.1. *Supongamos que R es artiniano izquierdo. R satisface (P) si y solo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

(i) R es un anillo cuasi-Frobenius.

(ii) R es un anillo local tal que $J(R) = Z({}_RR)$ y

(a) $zoc({}_RR)$ es simple y $R/zoc({}_RR)$ es un sumando directo de $E({}_RR)/zoc({}_RR)$, ó

(b) $zoc({}_RR)$ es suma directa de dos módulos simples, y para cada ideal izquierdo simple $S \leq_R R$ se tiene que R/S es inyectivo.

Demostración. $[\Rightarrow]$ Supongamos que R satisface (P) y que es artiniano izquierdo. Si R es autoinyectivo izquierdo, entonces es cuasi-Frobenius. Supongamos que R no es autoinyectivo izquierdo. Si R contiene un elemento idempotente no trivial e, entonces $R = Re \oplus R(1-e)$. Por el Lema 2.1.14, Re o $R(1-e)$ es isomorfo a ${}_RR$, pero esto no es posible ya que ${}_RR$ es artiniano (un módulo artiniano no puede ser isomorfo a un submódulo propio). Por lo tanto, R no contiene idempotentes no triviales. Como R es artiniano y no tiene idempotentes no triviales, entonces R es local (cf. [12, Corolario 19.19). Nótese que R, por ser artiniano izquierdo, contiene un ideal izquierdo mínimo, así que $zoc({}_RR) \neq 0$. Por el Corolario 2.1.12 cada R-módulo izquierdo simple no-singular es inyectivo (pues todo R-módulo simple S no-singular es proyectivo por el Corolario 1.2.17). Sea N la parte no-singular de $zoc({}_RR)$. Si $N \neq 0$, entonces N es inyectivo por ser una suma directa finita (porque ${}_RR$ es artiniano) de ideales izquierdos simples no-singulares de R, lo cual implica que N es un sumando directo de ${}_RR$, pero eso no es posible ya que ${}_RR$ es inescindible por no tener elementos idempotentes no triviales y no es semisimple. Por lo tanto $N = 0$ y en consecuencia $zoc({}_RR)$ es singular. Sea $x \in R \backslash Z({}_RR)$. Si $Rx \ncong {}_RR$, entonces, por el Lema 2.1.11, $Rx = A \oplus B$ para algunos $A, B \leq_R R$ con A inyectivo y B singular. Como ${}_RR$ no es inyectivo y es inescindible se sigue que $A = 0$. Entonces, $x \in Rx = B \leq Z({}_RR)$, lo cual contradice que $x \notin Z({}_RR)$. Por lo tanto, $Rx \cong {}_RR$

y por ende $Rx =_R R$ ya que $_RR$ al ser artiniano no puede ser isomorfo a un submódulo propio. Veamos que $J(R) = Z(_RR)$. Si $I \leq_R R$ cumple que $Z(_RR) + I =_R R$, entonces $I \neq Z(_RR)$ (pues $Z(_RR) \neq R$ por el Corolario 1.2.5) y en consecuencia existe $x_0 \in I$ tal que $x_0 \notin Z(_RR)$. Entonces, como se mostró previamente para $x \in R \backslash zoc(_RR)$, se tiene que $Rx_0 =_R R$, lo cual implica que $I =_R R$. Por lo tanto, $Z(_RR) \ll_R R$ y se sigue que $Z(_RR) \leq J(R)$. Ahora, sea $x' \in R \backslash Z(_RR)$. Entonces $Rx' =_R R$, lo cual implica que Rx' no es superfluo en $_RR$ y en consecuencia $x' \in R \backslash J(R)$ (cf. [10, Corolario 9.1.3]). Por lo tanto $J(R) \leq Z(_RR)$ y así $J(R) = Z(_RR)$.

Como $_RR$ es artiniano entonces, por el Corolario 1.4.10, $_RR$ tiene dimensión uniforme finita. Obsérvese que $zoc(_RR) \neq 0$ ya que $_RR$ contiene al menos un ideal izquierdo simple por ser artiniano. Además, $zoc(_RR)$ es finitamente generado ya que $_RR$ es artiniano y por lo tanto noetheriano, lo cual implica que $zoc(_RR)$ es una suma directa finita de ideales izquierdos simples de $_RR$. Si $u.dim(_RR) = 1$, entonces $_RR$ es uniforme y, por la Proposición 1.4.6, $zoc(_RR)$ es simple además de ser esencial en $_RR$. Nótese que $R/zoc(_RR)$ es cíclico propio, pues en caso contrario, $R/zoc(_RR) \cong_R R$ implica que $R/zoc(_RR)$ es proyectivo y en consecuencia se tiene que $zoc(_RR)$ es un sumando directo propio de $_RR$ ($zoc(_RR)$ es propio ya que $_RR$ no es semisimple por no ser autoinyectivo izquierdo), pero esto contradice que $zoc(_RR) \leq_{es\,R} R$. Por el Lema 2.1.9, el epimorfismo natural $\nu : R \longrightarrow R/zoc(_RR)$ se extiende a algún epimorfismo $\gamma : E(_RR) \longrightarrow R/zoc(_RR)$. Entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\nu"'] & E(_RR) \arrow[dl, dashed, "\gamma"] \\ R/zoc(_RR). & \end{tikzcd} \tag{3.23}$$

Como ν es un epimorfismo, de (3.23) se sigue que $E(_RR) = Im(\iota) + Ker(\gamma) = R + Ker(\gamma)$. De (3.23) se tiene que $zoc(_RR) \leq Ker(\gamma)$, entonces $zoc(_RR) \leq R \cap Ker(\gamma)$. Si $x \in R \cap Ker(\gamma)$, entonces $x + zoc(_RR) = \nu(x) = \gamma\iota(x) = \gamma(x) = 0 + zoc(_RR)$, de ahí que $x \in zoc(_RR)$ y en consecuencia $R \cap Ker(\gamma) = zoc(_RR)$. Entonces, dado que $R + Ker\gamma = E(_RR)$ y $R \cap Ker\gamma = zoc(_RR)$, se sigue que $E(_RR)/zoc(_RR) = (R/zoc(_RR)) \oplus (Ker(\gamma)/zoc(_RR))$. Entonces se concluye $R/zoc(_RR) \leq_\oplus E(_RR)/zoc(_RR)$. Por lo tanto, si $u.dim(_RR) = 1$ entonces se cumple (ii)-(a).

Ahora, supongamos que $u.dim(_RR) = n$ para algún $n > 1$. Entonces existe $V = U_1 \oplus ... \oplus U_n \leq_{es\,R} R$ tal que cada U_i es uniforme. Entonces $E(_RR) = E(V) = E(U_1 \oplus ... \oplus U_n) \cong E(U_1) \oplus ... \oplus E(U_n)$. Como cada $E(U_i)$ es la cápsula inyectiva de un módulo uniforme, entonces cada $E(U_i)$ es inescindible (cf. [10, Teorema 6.6.2]). Dado que $_RR$ es artiniano, entonces para cada $i = 1, ..., n$ se tiene que existe un simple $S_i \leq E(U_i)$ tal que $E(U_i) = E(S_i)$ (cf. [10, Corolario 6.6.3]). Entonces, $\bigoplus_{i=1}^{n} S_i \leq zoc(E(_RR)) = zoc(_RR)$ y por ende existe $K \leq zoc(_RR)$ tal que $\bigoplus_{i=1}^{n} S_i \oplus K = zoc(_RR)$. Obsérvese que $K \neq 0$ contradice a la Proposición 1.4.6, pues $u.dim(_RR) = n$, entonces se debe cumplir que

$$zoc(_RR) = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i. \tag{3.24}$$

Como S_1 es simple, entonces $S_1 = Rx_1$ para algún $x_1 \in S_1$. Si $x_1 \notin Z(_RR)$, entonces, como se vio antes en la demostración para los elementos que no pertenecen a $Z(_RR)$, $S_1 = Rx_1 =_R R$ lo cual no es posible pues R no es autoinyectivo izquierdo. Por lo tanto, $x_1 \in Z(_RR)$ y así S_1 es singular. R/S_1 es cíclico propio pues en caso contrario, R/S_1 sería proyectivo y en consecuencia $S_1 \leq_{\oplus\,R} R$; se sigue que S_1 es proyectivo y, por el Corolario 1.2.17, es no-singular lo cual implica que S_1 es singular y no-singular, es decir, $S_1 = 0$ siendo esto una contradicción a que S_1 es simple. Por el Lema 2.1.9, el epimorfismo natural $\sigma : R \longrightarrow R/S_1$ puede extenderse a algún epimorfismo

$\beta : E({}_RR) \longrightarrow R/S_1$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\sigma"'] & E({}_RR) \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\ R/S_1. & \end{tikzcd} \tag{3.25}$$

Como σ es epimorfismo, de (3.25) se tiene que $E({}_RR) = R + Ker\beta$. Además, $0 = \sigma(S_1) = \beta(\iota(S_1)) = \beta(S_1)$, lo cual implica que $S_1 \leq R \cap Ker\beta$, así que si $x \in R \cap Ker\beta$ entonces $x + S_1 = \sigma(x) = \beta(\iota(x)) = \beta(x) = 0 + S_1$, es decir, $x \in S_1$. Se sigue que $R \cap Ker\beta = S_1$ y en consecuencia $E({}_RR)/S_1 = (R/S_1) \oplus (Ker\beta/S_1)$. Entonces se tiene lo siguiente:

$$(R/S_1) \oplus (Ker\beta/S_1) = E({}_RR)/S_1 \cong (E_1/S_1) \oplus (E_2 \oplus ... \oplus E_n),$$

donde $E_i := E(U_i)$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Es claro que $\sigma(Z({}_RR)) = Z({}_RR)/S_1 \leq Z(R/S_1)$. Por otro lado, se tiene que $ann_\ell(1 + S_1) = S_1$ y S_1 no es esencial en ${}_RR$ (por ejemplo, $S_1 \cap S_2 = 0$ y $S_2 \neq 0$ por ser simple), así que $1 + S_1 \notin Z({}_RR/S_1)$ y en consecuencia $Z(R/S_1) \neq R/S_1$. Obsérvese que $Z({}_RR)/S_1$ es máximo en R/S_1, pues si $Z({}_RR)/S_1 \lneq H/S_1 \leq R/S_1$, entonces $Z({}_RR) \lneq H \leq_R R$, lo cual implica que existe $h \in H$ tal que $h \notin Z({}_RR)$. Entonces, como $h \notin zoc({}_RR)$, $Rh =_R R$, así que $H =_R R$ y por ende $H/S_1 = R/S_1$; esto nos dice que, efectivamente, $Z({}_RR)/S_1$ es máximo en R/S_1. Por lo tanto, $R/Z({}_RR)$ es simple ya que $R/Z({}_RR) \cong (R/S_1)/(Z({}_RR)/S_1)$. De $Z({}_RR)/S_1 \leq Z(R/S_1) \neq R/S_1$ se sigue que $Z({}_RR)/S_1 = Z(R/S_1)$. Nótese que $Ker\beta/S_1$ es singular, pues $Ker\beta/S_1 \cong (E({}_RR)/S_1)/(R/S_1) \cong E({}_RR)/{}_RR$, donde $E({}_RR)/{}_RR$ es singular por la Proposición 1.2.11. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{R}{Z({}_RR)} &\cong \frac{R/S_1}{Z({}_RR)/S_1} \oplus \frac{Ker\beta/S_1}{Ker\beta/S_1} \\
&\cong \frac{(R/S_1)\oplus(Ker\beta/S_1)}{(Z({}_RR)/S_1)\oplus(Ker\beta/S_1)} \\
&= \frac{(R/S_1)\oplus(Ker\beta/S_1)}{Z(R/S_1)\oplus Z(Ker\beta/S_1)} \\
&= \frac{(R/S_1)\oplus(Ker\beta/S_1)}{Z((R/S_1)\oplus(Ker\beta/S_1))} \\
&= \frac{E({}_RR)/S_1}{Z(E({}_RR)/S_1)} \\
&= \frac{(E_1\oplus...\oplus E_n)/S_1}{Z((E_1\oplus...\oplus E_n)/S_1)} \\
&\overset{*}{\cong} \frac{(E_1/S_1)\oplus(E_2\oplus...\oplus E_n)}{Z((E_1/S_1)\oplus(E_2\oplus...\oplus E_n))} \\
&= \frac{(E_1/S_1)\oplus(E_2\oplus...\oplus E_n)}{Z(E_1/S_1)\oplus Z(E_2\oplus...\oplus E_n)} \\
&= \frac{(E_1/S_1)\oplus(E_2\oplus...E_n)}{(E_1/S_1)\oplus Z(E_2\oplus....\oplus E_n)} \\
&\cong \frac{E_2\oplus...\oplus E_n}{Z(E_2\oplus...\oplus E_n)} \\
&= \frac{E_2\oplus...E_n}{Z(E_2)\oplus...\oplus Z(E_n)} \\
&\cong \frac{E_2}{Z(E_2)} \oplus ... \oplus \frac{E_n}{Z(E_n)},
\end{aligned}$$

donde el isomorfismo señalado con * de debe a la Proposición 1.2.7. Como $R/Z({}_RR)$ es simple, entonces $n = 2$. De (3.24) se sigue que $zoc({}_RR) = S_1 \oplus S_2$ con S_1 y S_2 ideales izquierdos simples de ${}_RR$.

Sea S un ideal izquierdo simple de R. Vamos a demostrar que R/S es inyectivo. Para $1+S \in R/S$, $ann_\ell(1+S_i) = S_i$ no es esencial en ${}_RR$, de ahí que R/S no es singular. Se puede ver, como se hizo antes para R/S_1, que R/S es cíclico propio. Por el Lema 2.1.11, $R/S = C \oplus D$ con C singular y D inyectivo. Ahora, como R es local, entonces R/S es inescindible, pues si $R/S = (A/S) \oplus (B/S)$ entonces ${}_RR = A + B$ lo cual implica que $1 = a + b$ para algunos $a \in A$ y $b \in B$; se sigue que a es unidad ó b es unidad, ya que en caso contrario, como R es local, se tendría que 1 no es unidad, de ahí que ${}_RR = A$ ó ${}_RR = B$. Entonces, al ser R/S inescindible se tiene que $R/S = D$, pues si ocurre que $R/S = C$, entonces R/S es singular y, por el Corolario 1.2.12, S debe ser esencial en ${}_RR$, lo cual no es posible (pues si S' es otro ideal izquierdo simple de R, entonces $S \cap S' = 0$ y $S' \neq 0$). Entonces R/S es inyectivo. Por lo tanto, si $u.dim({}_RR) = n > 1$ entonces se cumple (ii)-(b).

[$\Leftarrow$] Como los anillos cuasi-Frobenius son autoinyectivos izquierdos, entonces satisfacen (P). Supongamos que R es un anillo artiniano izquierdo que satisface la condición (ii)-(a). Consideremos R/I un R-módulo izquierdo cíclico propio. Como $I \neq 0$ y ${}_RR$ es artiniano, entonces I contiene un ideal izquierdo simple; como $zoc({}_RR)$ es simple, se sigue que $zoc({}_RR) \leq I$. Por lo tanto, $R/I \cong (R/zoc({}_RR))/(I/zoc({}_RR))$. Se sigue que existe un epimorfismo $f : R/zoc({}_RR) \longrightarrow R/I$. Sea $\pi : E({}_RR)/zoc({}_RR) \longrightarrow R/zoc({}_RR)$ la proyección canónica y $\sigma : E({}_RR) \longrightarrow E({}_RR)/zoc({}_RR)$ el epimorfismo natural. Entonces $f \circ \pi \circ \sigma : E({}_RR) \longrightarrow R/I$ es un epimorfismo.

Sean ${}_RR$ artiniano izquierdo que satisface la condición (ii)-(b) y R/I un R-módulo izquierdo cíclico propio. Como $I \neq 0$ y ${}_RR$ es artiniano, entonces existe $S \leq_R R$ simple tal que $S \leq I$. Entonces $R/I \cong (R/S)/(I/S)$, lo cual implica que R/I es imagen homomorfa del inyectivo R/S. ■

El siguiente ejemplo exhibe a un anillo que satisface (P) pero que no es cuasi-Frobenius, lo cual inspira la pregunta de en qué posibles situaciones se tiene la equivalencia.

Ejemplo 3.3.2. Supongamos que $R \neq 0$ es artiniano izquierdo de cadena izquierdo y que no es artiniano derecho tal que $zoc({}_RR) = J(R) = Z({}_RR)$. Nótese que $zoc({}_RR) \neq 0$ ya que R es artiniano izquierdo, además, por el Corolario 1.2.5, se tiene que $Z({}_RR) \lneq_R R$. De las hipótesis sobre R se sigue que este tiene exactamente tres ideales izquierdos, a saber, 0, $J(R)$ y R. Obsérvese que R no es autoinyectivo izquierdo, pues si lo fuera sería cuasi-Frobenius y en consecuencia sería artiniano derecho. Ahora, un anillo R se dice que es MAX izquierdo si todo R-módulo izquierdo distinto de cero tiene un submódulo máximo. Por el Teorema 28.4 de [1] R es MAX izquierdo, pues R es perfecto izquierdo por ser artiniano izquierdo. Supongamos que R es superfluo en $E({}_RR)$. Para cada $x \in E({}_RR)\backslash R$, consideremos el morfismo $f : R \longrightarrow E({}_RR)$ definido por $f_x(r) = rx$. Como $E({}_RR)$ es inyectivo, existe $\bar{f} : E({}_RR) \longrightarrow E({}_RR)$ tal que el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & E({}_RR) \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\
E({}_RR).
\end{tikzcd}$$

Dado que R es superfluo en $E({}_RR)$, entonces $Rx = f(R) = \bar{f}(\iota(R)) = \bar{f}(R)$ es superfluo en $E({}_RR)$ y se obtiene que $rad(E({}_RR)) = \sum\limits_{A<<E({}_RR)} A = E({}_RR)$, pero como R es MAX izquierdo entonces $E({}_RR)$ tiene un submódulo máximo, lo cual implica que $rad(E({}_RR)) \lneq E({}_RR)$ llegando así a una contradicción. Por lo tanto R no es superfluo en $E({}_RR)$. Entonces existe $D \lneq E({}_RR)$ tal que $D \neq 0$ y $R + D = E({}_RR)$, donde $R \cap D \neq 0$ ya que $R \leq_{es} E({}_RR)$. Se sigue que $R \cap D = zoc({}_RR)$ y en consecuencia $(E({}_RR)/zoc({}_RR)) = (R/zoc({}_RR)) \oplus (D/zoc({}_RR))$. Por lo tanto, R satisface la propiedad (P) por (ii)-(a) del Teorema 3.3.1.

En el Ejemplo 3.3.2 se pide que R sea artiniano izquierdo, de cadena izquierdo, que no sea artiniano derecho y que $zoc({}_RR) = J(R) = Z({}_RR)$. Veamos que tales anillos existen.

Ejemplo 3.3.3. Sea K un campo con un subcampo L tal que $dim_L K = \infty$ y que existe un isomorfismo de campos $\varphi : K \longrightarrow L$ (por ejemplo $K = \mathbb{Q}(x_1, x_2, ...)$ y $L = \mathbb{Q}(x_2, x_3, ...)$). Definimos un anillo $R = K \times K$ con las operaciones

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ y } (x, y)(x', y') = (\varphi(y')x + x'y, yy').$$

Entonces R es un anillo con neutros $(0, 0)$ y $(0, 1)$ para la suma y el producto, respectivamente. Ahora veamos que R tiene exactamente tres ideales izquierdos. Sea $0 \neq (x_0, y_0) \in R$. Entonces tenemos los siguientes dos casos:

Caso 1: $y_0 \neq 0$. Se sigue que existen inversos multiplicativos y_0^{-1} y $\varphi(y_0)^{-1}$ en K de y_0 y $\varphi(y_0)$, respectivamente. Entonces $(-\varphi(y_0)^{-1}x_0y_0^{-1}, y_0^{-1})(x_0, y_0) = (0, 1)$. Por lo tanto, $R(x_0, y_0) = {}_RR$ donde $R(x_0, y_0)$ es el R-módulo izquierdo generado por (x_0, y_0).

Caso 2: $y_0 = 0$. Se sigue que $x_0 \neq 0$ y si $(x, y) \in R$, entonces $(x, y)(x_0, y_0) = (x_0y, 0) \in K \times \{0\} \leq_R R$. Así, $R(x_0, y_0) \leq K \times \{0\}$. A la inversa, si $(x, 0) \in K \times \{0\}$, entonces $(x, x_0^{-1}x)(x_0, y_0) = (x, 0)$. Entonces $(x, 0) \in R(x_0, y_0)$. Por lo tanto $K \times \{0\} = R(x_0, y_0)$.

Por lo tanto, de los Casos 1 y 2 se sigue que los únicos ideales izquierdos de R son 0, $K \times \{0\}$ y R. Veamos que $K \times \{0\} = zoc({}_RR) = J(R) = Z({}_RR)$. Como R tiene exactamente tres ideales izquierdos es claro que $K \times \{0\} = J(R) = zoc({}_RR)$. Como $R \neq 0$, entonces, por el Corolario 1.2.5, $Z({}_RR) \lneq_R R$. Si $a = (1, 0) \in K \times \{0\}$, entonces $a^2 = (0, 0)$, así que $a \in ann_\ell(a)$. Como $a \neq 0$, entonces $ann_\ell(a) \neq 0$ y $ann_\ell(a) \lneq_R R$, es decir, $ann_\ell(a) = K \times \{0\}$, donde $K \times \{0\} \leq_{es\,R} R$. Por lo tanto, $0 \neq a \in Z({}_RR)$ y así, $K \times \{0\} = J(R) = zoc({}_RR) = Z({}_RR)$. Entonces, hemos demostrado que R es artiniano izquierdo, de cadena izquierdo y $zoc({}_RR) = J(R) = Z({}_RR)$. Finalmente mostremos que R no es artiniano derecho. Sea $(x, y) \in R$. Entonces $(x, y) \in ann_r(a) = ann_r((1, 0)) \Leftrightarrow (1, 0)(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (\varphi(y)1 + x0, 0y) = (\varphi(y), 0) = (0, 0) \Leftrightarrow \varphi(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Así $K \times \{0\} = ann_r(a)$. Para cada $z \in K$, $(z, 0)R = \{(z, 0)(x, y) | (x, y) \in R\} = \{(z\varphi(y), 0) | y \in K\} = \{(zl, 0) | l \in L\}$. Entonces como L-módulos se tiene que $(z, 0)R \cong zL$. Si $ann_r(a)$ es finitamente generado como R-módulo derecho, entonces $ann_r(a) = (z_1, 0)R + ... + (z_n, 0)R$, con $z_i \neq 0$. Por lo anterior, existen isomorfismos de L-módulos $\lambda_i : z_iL \longrightarrow (z_i, 0)R$ lo cual implica que existe un epimorfismo de L-módulos $\lambda : \bigoplus_{i=1}^{n} z_iL \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} (z_i, 0)R = ann_r(a)$ definido por $\lambda((z_il_i)_{i=1}^n) = \sum \lambda_i(z_il_i)$. Entonces tenemos un epimorfismo de L-módulos $L^n \longrightarrow ann_r(a)$ lo cual implica que $ann_r(a) = K \times \{0\}$ es finitamente generado como L-módulo. Pero $K \cong K \times \{0\}$ como L-módulos, entonces K es finitamente generado como L-módulo, pero esto contradice que $dim_L K = \infty$. Por lo tanto, $ann_r(a)$ no es finitamente generado como R-módulo derecho, lo cual implica que R no es noetheriano derecho y en consecuencia no es artiniano derecho.

Capítulo 4

K-Álgebras de Artin y la Propiedad (P)

En el Capítulo 3 se vio que existen anillos que satisfacen (P) pero no son cuasi-Frobenius, sin embargo, hay situaciones en las que sí se tiene la equivalencia. Entonces el objetivo principal de este capítulo es mostrar que una K-álgebra de Artin satisface (P) si y solo si es un anillo cuasi-Frobenius. A través de las secciones de este capítulo se presentan las definiciones y resultados pertinentes que posibilitarán la prueba de tal resultado.

4.1. Primeros Conceptos

Definición 4.1.1. Sea K un anillo conmutativo con identidad. El anillo R, junto con un morfismo de anillos unitarios $\varphi : K \longrightarrow R$, es una K**-álgebra** si el subanillo $\varphi(K)$ de R está contenido en el centro de R.

Proposición 4.1.2. *Sea R una K-álgebra junto con el morfismo de anillos unitarios $\varphi : K \longrightarrow R$. Entonces todo R-módulo izquierdo (respectivamente derecho) M es también un K-módulo, con la multiplicación por elementos de K definida de la siguiente manera:*

$$\forall k \in K,\ \forall m \in M\text{: } km := \varphi(k)m \text{ (respectivamente para el caso derecho, } km := m\varphi(k)\text{).}$$

En consecuencia, todo morfismo de R-módulos izquierdos o derechos es también morfismo de K-módulos.

Demostración. Sean $k, k' \in K$ y $m, m' \in M$, donde M es un R-módulo izquierdo (respectivamente derecho). Entonces se cumple lo siguiente:

- $(kk')m = \varphi(kk')m = (\varphi(k)\varphi(k'))m = \varphi(k)(\varphi(k')m) = k(k'm)$ (respectivamente en el caso derecho, $(kk')m = m\varphi(kk') = m\varphi(k'k) = m(\varphi(k')\varphi(k)) = (m\varphi(k'))\varphi(k) = k(k'm)$).
- $1_K m = \varphi(1_K)m = 1_R m = m$ (respectivamente en el caso derecho, $1_k m = m\varphi(1_K) = m1_R = m$).
- $(k+k')m = \varphi(k+k')m = (\varphi(k)+\varphi(k'))m = \varphi(k)m+\varphi(k')m = km+k'm$ (respectivamente en el caso derecho, $(k+k')m = m\varphi(k+k') = m(\varphi(k)+\varphi(k')) = m\varphi(k)+m\varphi(k') = km+k'm$).

- $k(m+m') = \varphi(k)(m+m') = \varphi(k)m + \varphi(k)m' = km + k'm$ (respectivamente en el caso derecho, $k(m+m') = (m+m')\varphi(k) = m\varphi(k) + m'\varphi(k) = km + km'$).

Por lo tanto, M es un K-módulo. ■

Nótese que en la Proposición 4.1.2 no es necesaria la hipótesis de que $\varphi(K)$ esté contenido en el centro de R.

Definición 4.1.3. Sea R, junto con el morfismo de anillos unitarios $\varphi : K \longrightarrow R$, una K-álgebra. Consideremos a R como K-módulo como en la Proposición 4.1.2. Entonces, se dice que R es una **K-álgebra de Artin** si K es un anillo artiniano y R es un K-módulo finitamente generado.

Proposición 4.1.4. *Si R es una K-álgebra de Artin, entonces R es artiniano.*

Demostración. Dado que R es finitamente generado como K-módulo con K artiniano, entonces R es artiniano como K-módulo. Por la Proposición 4.1.2, todo ideal izquierdo y todo ideal derecho de R es un K-módulo, así que cualquier cadena ascendente de ideales izquierdos o de ideales derechos de R es, a su vez, una cadena ascendente de K-submódulos de R que se estaciona por ser R un K-módulo artiniano. Por lo tanto, R es artiniano izquierdo y artiniano derecho, es decir, R es artiniano. ■

4.1.5. Si K es un anillo conmutativo artiniano, entonces $K/J(K)$ es un anillo artiniano, así que K es semilocal (ver Definición 1.7.5). Como K es conmutativo, entonces tiene un número finito de ideales máximos (Corolario 1.7.9). Entonces solo hay un número finito de clases de isomorfismo de K-módulos simples, pues todo K-módulo simple es isomorfo a $K/\mathfrak{M}$ con $\mathfrak{M}$ un ideal máximo de K. Sea $\{T_1, ..., T_n\}$ un conjunto de representantes de las clases de isomorfismo de los K-módulos simples. Como K es artiniano, todo K-módulo no cero inyectivo e inescindible es la cápsula inyectiva de un K-módulo simple y no puede contener más de un K-módulo simple (cf. [10, Corolario 6.6.3]). Se sigue que hay un número finito de clases de isomorfismos de K-módulos no cero inyectivos e inescindibles, donde un conjunto de representantes de tales clases de isomorfismo es $\{E(T_1), ..., E(T_n)\}$. Entonces se tiene el siguiente K-módulo inyectivo:

$$E_K := \bigoplus_{i=1}^{n} E(T_i).$$

Nota 4.1.6. A partir de ahora y en el resto de la actual sección, K denotará a un anillo artiniano conmutativo con identidad y R a una K-álgebra de Artin. Además, por el resto del capítulo, se trabajará constantemente con la notación de 4.1.5.

4.1.7. Dado que K es conmutativo, entonces para cada par de K-módulos M y N se tiene que

$$Hom_K(M, N)$$

es un K-módulo, donde $(kf)(m) := f(km)$ para cada $k \in K$, cada $f \in Hom_K(M, N)$ y cada $m \in M$. Sea A un K-módulo. Entonces podemos definir el funtor

$$Hom_K(A, \_) : K\text{-}Mod \longrightarrow K\text{-}Mod$$

de la siguiente manera:

- En objetos. Para cada K-módulo B, $Hom_K(A, \_)(B) := Hom_K(A, B)$.
- En morfismos. Para cada morfismo de K-módulos $f : B \longrightarrow C$ se define el K-morfismo

$$\begin{aligned} Hom_K(A, \_)(f) : Hom_K(A, B) &\to Hom_K(A, C) \\ h &\mapsto fh. \end{aligned}$$

También se puede definir el funtor contravariante

$$Hom_K(\_, A) : K\text{-}Mod \longrightarrow K\text{-}Mod$$

de la siguiente manera:

- En objetos. Para cada K-módulo B, $Hom_K(\_, A)(B) := Hom_K(B, A)$.
- En morfismos. Para cada morfismo de K-módulos $f : B \longrightarrow C$ se define el K-morfismo

$$\begin{aligned} Hom_K(\_, A)(f) : Hom_K(C, A) &\to Hom_K(B, A) \\ h &\mapsto hf. \end{aligned}$$

Para cualquier anillo podemos definir tales funtores, pero si no es conmutativo posiblemente el codominio no sería la categoría de módulos sobre el anillo en cuestión sino la categoría de grupos abelianos. Para los siguientes resultados, será de particular interés y utilidad el funtor contravariante $Hom_K(\_, E_K)$ (que hará posible tener una dualidad entre las categorías R-mod y mod-R) y ocasionalmente el funtor $Hom_R(M, \_)$ ó el funtor $Hom_R(\_, M)$ para algún R-módulo M.

Teorema 4.1.8. *Sea X un K-módulo finitamente generado. Entonces se cumple lo siguiente:*

(a) *$Hom_K(X, E_K)$ es de longitud finita y $Le(Hom_K(X, E_K)) = Le(X)$.*

(b) *La función $\phi : X \longrightarrow Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K)$ definida por $\phi(a) = \phi_a$ para cada $a \in X$, donde $\phi_a(f) = f(a)$ para cada $f \in Hom_K(X, E_K)$, es un isomorfismo de K-módulos.*

Demostración. (a) Como X es un K-módulo finitamente generado y K es artiniano, entonces X es artiniano y noetheriano, lo cual es equivalente a que X es de longitud finita. Por lo tanto, la demostración de este inciso se hará por inducción sobre $Le(X)$. Si $X = 0$ no hay nada que demostrar. Si $Le(X) = 1$, entonces X es simple y $X \cong T_w$ para algún $w \in \{1, ..., n\}$. Nótese que si $i, j \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$, entonces $Hom_K(Tj, E(T_i)) = 0$, ya que si $\varphi \in Hom_R(T_j, E(T_i))$ y $\varphi \neq 0$, entonces φ es monomorfismo (pues T_j es simple), lo cual implica que $T_j \cong \varphi(T_j)$, pero $E(T_i)$ contiene a un único simple (cf. [10, Corolario 6.6.3]), así que $T_i = \varphi(T_j) \cong T_j$, siendo esto una contradicción. Por lo tanto, $Hom_K(T_j, E(T_i)) = 0$ para cada par de índices $i, j \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$. Además, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $T_i = Kt_i$ para algún $t_i \in T_i$ y $t_i \neq 0$ (pues cada T_i es simple). Entonces, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $\varphi_i : Hom_K(T_i, E(T_i)) \longrightarrow T_i$ definida por $\varphi_i(f) = f(t_i)$ para cada $f \in Hom(T_i, E(T_i))$, es un isomorfismo de K-módulos. Obsérvese que el codominio de cada φ_i está bien definido, pues para cada $f \in Hom_K(T_i, E(T_i))$ con $f \neq 0$ se tiene que f es monomorfismo, ya que T_i es simple, luego $f(T_i) \cong T_i$ y se sigue que $f(T_i)$ es simple, pero $E(T_i)$ solo contiene un simple (cf. [10, Corolario 6.6.3]), de ahí que $f(T_i) = T_i$ y por ende $\varphi_i(f) = f(t_i) \in T_i$. Es claro que φ_i es morfismo de K-módulos y es inyectivo ya que $\varphi_i(f) = \varphi_i(g)$ implica $f(t_i) = g(t_i)$ y por ende $f = g$ (pues f y g coinciden en el elemento generador de su dominio). Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, como T_i es simple y φ_i es un monomorfismo, entonces φ_i es isomorfismo de K-módulos. Se sigue que

$$Hom_K(X, E_K) \cong Hom_K(T_w, E_K) = Hom_K(T_w, \bigoplus_{i=1}^{n} E(T_i)) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} Hom_K(T_w, E(T_i)) \cong$$
$$Hom_K(T_w, E(T_w)) \cong T_w.$$

Así, $Hom_K(X, E_K)$ es simple y en consecuencia $Le(Hom_K(X, E_K)) = 1 = Le(X)$. Ahora, supongamos que $Le(X) > 1$ y que la afirmación es cierta para cada Y en K-mod tal que $Le(Y) < Le(X)$. Dado que X es un K-módulo finitamente generado, entonces contiene algún submódulo máximo U. De la sucesión exacta corta

$$0 \to U \overset{\iota}{\hookrightarrow} X \overset{\nu}{\to} X/U \to 0,$$

donde ι es el morfismo inclusión y ν es el epimorfismo natural, se sigue que

$$0 \to Hom_K(X/U, E_K) \xrightarrow{Hom_K(\_, E_K)(\nu)} Hom_K(X, E_K) \xrightarrow{Hom_K(\_, E_k)(\iota)} Hom_K(U, E_K) \to 0 \quad (4.1)$$

es también una sucesión exacta corta, ya que E_K es inyectivo (cf. [16, Proposición 3.25]). Entonces, como $Le(U) + Le(X/U) = Le(X)$, se tiene que $Le(U), Le(X/U) < Le(X)$. Por hipótesis de inducción, $Hom_K(U, E_K)$ y $Hom_K(X/U, E_K)$ son de longitud finita y se cumple que $Le(Hom_K(U, E_K)) = Le(U)$ y $Le(Hom_K(X/U, E_K)) = Le(X/U)$. Entonces de (4.1) se sigue que

$$Le(Hom_K(X, E_K)) = Le(Hom_K(X/U, E_K)) + Le(Hom_K(U, E_K)) = Le(X/U) + Le(U) = Le(X).$$

(b) Veamos que la función $\phi : X \longrightarrow Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K)$ definida por $\phi(a) = \phi_a$ para cada $a \in X$, donde $\phi_a(f) = f(a)$ para cada $f \in Hom_K(X, E_K)$, es un isomorfismo de K-módulos. El caso $X = 0$ es trivial, así que para el resto de la demostración se supondrá que $X \neq 0$. Si $f_1, f_2 \in Hom_K(X, E_K)$ y $k \in K$, entonces $\phi_a(kf + g) = (kf + g)(a) = (kf)(a) + g(a) = kf(a) + g(a) = k\phi_a(f) + \phi_a(g)$, de ahí que $\phi_a \in Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K)$ para cada $a \in X$, es decir, ϕ tiene bien definido su codominio. Para mostrar que ϕ es morfismo consideramos $a, b \in X$ y $k \in K$. Para cada $f \in Hom_K(X, E_K)$ se tiene lo siguiente:

$$\phi_{ka+b}(f) = f(ka + b) = kf(a) + f(b) = k\phi_a(f) + \phi_b(f) = (k\phi_a + \phi_b)(f),$$

lo cual implica que $\phi_{ka+b} = k\phi_a + \phi_b$, es decir, $\phi(ka + b) = k\phi(a) + \phi(b)$. Por el inciso (a), $Hom_K(X, E_K)$ es de longitud finita, lo cual implica que $Hom_K(X, E_K)$ es artiniano y noetheriano y en consecuencia es finitamente generado. Aplicando dos veces el inciso (a) tenemos que $Le(X) = Le(Hom_K(X, E_K)) = Le(Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K))$, así que para mostrar que ϕ es isomorfismo basta mostrar que es monomorfismo (pues si ϕ es monomorfismo, entonces $Le(Im\phi) = Le(X) = Le(Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K)) = Le(Cod\phi)$ y se sabe que $Le(Cod\phi) = Le(Im\phi) + Le(Cod\phi/Im\phi)$ (ver [10, Corolario 3.5.5]), lo cual implica que $Le(Cod\phi/Im\phi) = 0$, es decir, $Cod\phi = Im\phi$, donde $Cod\phi$ es el codominio de ϕ). Para ver que ϕ es monomorfismo, consideremos $a \in X$ con $a \neq 0$ y mostremos la existencia de $f \in Hom_K(X, E_K)$ tal que $\phi_a(f) \neq 0$, con lo que se concluiría que $\phi(a) = \phi_a \neq 0$ para cada $a \in X$ con $a \neq 0$, es decir, se concluiría que $Ker\phi = 0$. Como Ka es finitamente generado, entonces por el Lema de Nakayama (cf. [10, Teorema 9.2.1]) se tiene que $J(K)Ka$ es superfluo en Ka, de ahí que $J(K)Ka \neq Ka$. Dado que $K/J(K)$ es un anillo semisimple (ya que K es artiniano), entonces $rad(Ka) = J(K)Ka$ (cf. [10, Teorema 9.3.5]). Entonces $Ka/rad(Ka) \neq 0$ y es semisimple ya que Ka es artiniano (cf. [10, Corolario 9.2.3]). Se sigue que existe un morfismo no cero $\varphi : Ka/rad(Ka) \longrightarrow E_K$ (tal morfismo puede ser $\varphi = \iota_i \eta_S \pi_S$, donde $\pi_S : Ka/rad(Ka) \longrightarrow S$ es la proyección sobre algún simple $S \leq Ka/rad(Ka)$, η_S es un monomorfismo de S a algún $E(T_i)$, pues todo simple tiene cápsula inyectiva isomorfa a algún $E(T_i)$ con $i \in \{1, ..., n\}$, y el morfismo ι_i es la inclusión de $E(T_i)$ en E_K), así que $\varphi\nu \neq 0$ donde $\nu : Ka \longrightarrow Ka/rad(Ka)$ es el epimorfismo natural. Como E_K es inyectivo, existe un morfismo $f : X \longrightarrow E_K$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} Ka \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\varphi\nu"'] & X \arrow[dl, dashed, "f"] \\ E_K & \end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces, $0 \neq \varphi\nu(a) = f\iota(a) = f(a) = \phi_a(f)$. Por lo tanto, ϕ es monomorfismo y por ende es isomorfismo.

■

Lema 4.1.9. *Sea M un R-módulo izquierdo (respectivamente derecho) y supongamos que el morfismo de anillos unitarios $\varphi : K \longrightarrow R$ es el que hace a R una K-álgebra de Artin. Si consideramos a M como un K-módulo con la multiplicación por elementos de K definida como en la Proposición 4.1.2, entonces M es finitamente generado como R-módulo izquierdo (respectivamente derecho) si y solo si M es finitamente generado como K-módulo.*

Demostración. Primero, notemos que como R es finitamente generado como K-módulo entonces $R = \sum_{j=1}^{t} Kr_j$ para algunos $r_1, ..., r_j \in R$. Se demostrará el caso cuando M es un R-módulo izquierdo; la demostración es similar en el caso en el que M es un R-módulo derecho.

[⇒] Supongamos que $M = \sum_{i=1}^{n} Rm_i$ para algunos $m_1, ..., m_n \in M$. Si $m \in M$, entonces existen $\lambda_1, ..., \lambda_n \in R$ tales que

$$m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i. \tag{4.1}$$

Se sigue que para cada λ_i, con $i \in \{1, ..., n\}$, existen $k_{i,1}, ..., k_{i,t} \in K$ tales que

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{t} k_{i,j} r_j = \sum_{j=1}^{t} \varphi(k_{i,j}) r_j. \tag{4.2}$$

De (4.1) y (4.2) se tiene que $m = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{t} \varphi(k_{i,j}) r_j) m_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{t} (\varphi(k_{i,j}) r_j) m_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{t} \varphi(k_{i,j})(r_j m_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{t} k_{i,j}(r_j m_i)$. Por lo tanto, M como K-módulo está generado por el conjunto $\{r_j m_i | i = 1, ..., n; \ j = 1, ..., t\}$.

[⇐] Supongamos que $M = \sum_{i=1}^{n} Km_i$ para algunos $m_1, ..., m_n \in M$. Si $m \in M$, entonces existen $k_1, ..., k_n \in K$ tales que $m = \sum_{i=1}^{n} k_i m_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi(k_i) m_i \in \sum_{i=1}^{n} Rm_i$. Por lo tanto $M = \sum_{i=1}^{n} Rm_i$, es decir, M es finitamente generado como R-módulo. ■

La siguiente proposición será clave para obtener uno de los resultados principales de la Sección 4.2, que es una dualidad entre R-mod y mod-R vía el funtor contravariante $Hom_K(\_, E_K)$.

Proposición 4.1.10. *Sea X un R-módulo izquierdo finitamente generado. Entonces $Hom_K(X, E_K)$ es un R-módulo derecho finitamente generado con la multiplicación por elementos de R definida por:*

$$\forall r \in R, \forall f \in Hom_K(X, E_K) \colon fr \colon X \to E_K$$
$$a \mapsto f(ra).$$

Demostración. Sean $f \in Hom_K(X, E_K)$ y $r \in R$. Veamos que $fr \in Hom_K(X, E_K)$. Si $a, b \in X$ y $k \in K$, entonces se tiene lo siguiente:

- $(fr)(a+b) = f(r(a+b)) = f(ra+rb) = f(ra)+f(rb) = (fr)(a)+(fr)(b)$.
- $(fr)(ka) = f(r(ka)) = f(r(\varphi(k)a)) = f((r\varphi(k))a) = f((\varphi(k)r)a) = f(\varphi(k)(ra)) = f(k(ra)) = kf(ra) = k(fr)(a)$.

Por lo tanto, $fr \in Hom_K(X, E_K)$. Ahora veamos que, con la multiplicación por elementos de R propuesta, $Hom_R(X, E_K)$ es un R-módulo derecho. Sean $f, g \in Hom_K(X, E_K)$ y $r, s \in R$. Entonces para cada $a \in X$ se cumple lo siguiente:

- $((fr)s)(a) = (fr)(sa) = f(r(sa)) = f((rs)a) = (f(rs))(a)$.
- $(f1_R)(a) = f(1_R a) = f(a)$.
- $(f(r+s))(a) = f((r+s)a) = f(ra+sa) = f(ra)+f(sa) = (fr)(a)+(fs)(a) = (fr+fs)(a)$.
- $((f+g)r)(a) = (f+g)(ra) = f(ra)+g(ra) = (fr)(a)+(gr)(a) = (fr+gr)(a)$.

Por lo tanto $(fr)s = f(rs)$, $f1_R = f$, $f(r+s) = fr+fs$ y $(f+g)r = fr+gr$, así que $Hom_R(X, E_K)$ es un R-módulo derecho. Finalmente, mostremos que $Hom_K(X, E_K)$ es finitamente generado como R-módulo derecho. Dado que, por hipótesis, X es un R-módulo izquierdo finitamente generado, entonces X es finitamente generado como K-módulo (Lema 4.1.9). Claramente, como K es conmutativo, $Hom_K(X, E_K)$ tiene una estructura "natural" de K-módulo (si $k \in K$, $f \in Hom_K(X, E_K)$, entonces kf se define por $(kf)(a) = f(ka)$ para cada $a \in X$). Por el Teorema 4.1.8, $Hom_K(X, E_K)$ con su estructura natural de K-módulo es de longitud finita, lo cual implica que, en particular, $Hom_K(X, E_K)$ es noetheriano (como K-módulo), de ahí que $Hom_K(X, E_K)$ con su estructura natural de K-módulo es finitamente generado. Sin embargo, como hemos demostrado hasta este punto, $Hom_K(X, E_K)$ tiene estructura de R-módulo derecho, así que por la Proposición 4.1.2, $Hom_K(X, E_K)$ tiene una estructura de K-módulo que es inducida por el morfismo de anillos unitarios $\varphi : K \longrightarrow R$. Obsérvese que para $Hom_K(X, E_K)$ su estructura natural de K-módulo y su estructura de K-módulo inducida por φ coinciden, pues si $f \in Hom_K(X, E_K)$, $k \in K$ y $a \in X$ entonces se tiene lo siguiente:

- En la estructura natural de K-módulo de $Hom_K(X, E_K)$ se tiene que $(kf)(a) = f(ka) = f(\varphi(k)a)$.
- En la estructura de K-módulo de $Hom_K(X, E_K)$ inducida por φ, considerando a $Hom_K(X, E_K)$ como R-módulo derecho con la operación propuesta en el enunciado de esta proposición, se tiene que $(kf)(a) = (f\varphi(k))(a) = f(\varphi(k)a)$.

Por lo tanto, para $Hom_K(X, E_K)$ se tiene que su estructura natural de K-módulo y su estructura de K-módulo inducida por φ coinciden. Dado que $Hom_K(X, E_K)$ en su estructura natural de K-módulo es finitamente generado, entonces $Hom_K(X, K)$ con su estructura de K-módulo inducida por φ es finitamente generado; el Lema 4.1.9 garantiza que $Hom_K(X, E_K)$ es finitamente generado como R-módulo derecho. ■

También se tiene un resultado simétrico al de la Proposición 4.1.10.

Proposición 4.1.11. *Sea X un R-módulo derecho finitamente generado. Entonces $Hom_K(X, E_K)$ es un R-módulo izquierdo finitamente generado con la multiplicación por elementos de R definida por:*

$$\forall r \in R, \forall f \in Hom_K(X, E_K) \colon rf \colon X \to E_K$$
$$a \mapsto f(ar).$$

Antes de analizar dualidades en la Sección 4.2, es pertinente definir y proveer notación para el concepto de *transformación natural*, pues será clave en el resto del capítulo.

Definición 4.1.12. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías y $F, G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ funtores.

(1) Una **transformación natural** de F a G es una terna (F, η, G), usualmente denotada por $\eta : F \longrightarrow G$, donde $\eta : Ob(\mathcal{A}) \longrightarrow Mor(\mathcal{B})$ es una función que satisface las siguientes condiciones:

  a) Para cada $\mathcal{A}$-objeto A, $\eta(A)$ es un $\mathcal{B}$-morfismo $\eta_A : F(A) \longrightarrow G(A)$.

  b) Para cada $\mathcal{A}$-morfismo $f : A \longrightarrow A'$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(A') \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & G(A') \end{tikzcd}$$

  conmuta.

(2) Una transformación natural (F, η, G) es llamada un **isomorfismo natural** si, para cada $\mathcal{A}$-objeto A, η_A es un $\mathcal{B}$-isomorfismo.

(3) Se dice que F y G son **naturalmente isomorfos** (lo cual es denotado por $F \cong G$) si y solo si existe un isomorfismo natural de F a G.

Definición 4.1.13. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías y $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ funtores contravariantes. Se dice que el par (F, G) es una **dualidad** entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ si $GF \cong 1_{\mathcal{A}}$ y $FG \cong 1_B$.

En la Proposición 4.1.15 se tiene un ejemplo explícito de una dualidad en el contexto de la teoría de este capítulo. En la Sección 13 de [9] se pueden encontrar más ejemplos de transformaciones naturales y más profundidad del concepto, mientras que en el Capítulo 6 de [1] se puede encontrar más información de dualidades entre categorías de módulos.

Observación 4.1.14. *Se puede restringir al funtor contravariante $Hom_K(\_, E_K) : K\text{-}Mod \longrightarrow K\text{-}Mod$ en su dominio y codominio a la subcategoría K-mod, pues, por (a) del Teorema 4.1.8, $Hom_K(X, E_K)$ es un K-módulo finitamente generado siempre que X es un K-módulo finitamente generado (pues al ser $Hom_K(X, E_K)$ un K-módulo de longitud finita, entonces, en particular, es un K-módulo noetheriano y en consecuencia un K-módulo finitamente generado).*

Proposición 4.1.15. *Consideremos al funtor contravariante $Hom_K(\_, E_K) : K\text{-mod} \longrightarrow K\text{-mod}$. Entonces el par $(Hom_K(\_, E_K), Hom_K(\_, E_K))$ es una dualidad entre K-mod y K-mod.*

Demostración. Veamos que $1_{K\text{-}mod} \cong Hom_K(\_, E_K)^2$, donde

$$Hom_K(\_, E_K)^2 = Hom_K(\_, E_K) \circ Hom(\_, E_K).$$

Definamos la transformación natural $\eta : 1_{K\text{-}mod} \longrightarrow Hom_K(\_, E_K)^2$ como $\eta(A) = \eta_A$ para cada $A \in Ob(K\text{-}mod)$, donde $\eta_A : A \longrightarrow Hom_K(Hom_K(A, E_K), E_K)$ se define para cada $a \in A$ y para cada $h \in Hom_K(A, E_K)$ como $\eta_A(a)(h) = h(a)$. Mostremos que, en efecto, η es una transformación natural comprobando que para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en K-mod el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & Hom_K(Hom_K(A,E_K),E_K) \arrow[d, "Hom_K(\_,E_K)^2(f)"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"'] & Hom_K(Hom_K(B,E_K),E_K) \end{tikzcd}$$

conmuta. Sea $a \in A$. Entonces $\eta_A(a) \in Hom_K(Hom_K(A,E_K),E_K)$ y

$$Hom_K(\_,E_K)^2(f)(\eta_A(a)) : Hom_K(B,E_K) \longrightarrow E_K$$

está definido por $Hom_K(\_,E_K)^2(f)(\eta_A(a))(g) = \eta_A(a)(gf) = (gf)(a) = g(f(a))$ para cada $g \in Hom_K(B,E_K)$. Por otro lado, $f(a) \in B$ y el morfismo $\eta_B(f(a)) : Hom_K(B,E_K) \longrightarrow E_K$ está definido por $\eta_B(f(a))(g) = g(f(a))$ para cada $g \in Hom_K(B,E_K)$. Entonces $\eta_B(f(a)) = Hom_K(\_,E_K)^2(f)(\eta_A(a))$ y, como esto es cierto para cada $a \in A$, se sigue que $\eta_B f = Hom_K(\_,E_K)^2(f)\eta_A$. Además, η es isomorfismo natural por (b) del Teorema 4.1.8. Por lo tanto, $Hom_K(\_,E_K)^2 \cong 1_{K\text{-}mod}$.

■

4.2. Dualidades

Esta sección es auxiliar para la demostración del resultado principal de esta capítulo (Teorema 4.3.2), teniendo como prioridad establecer que las dualidades, bajo ciertas hipótesis, entre subcategorías plenas de R-Mod y Mod-S (con R y S anillos asociativos arbitrarios con unidad) preservan módulos inescindibles (esto mediante la exhibición de un anti-isomorfismo de retículas entre un módulo de la subcategoría plena y su imagen bajo el respectivo funtor de la dualidad) y que llevan módulos inyectivos a proyectivos y viceversa. Lo inmediato anterior se aterriza de manera concreta con una dualidad explícita entre la subcategoría plena de R-módulos izquierdos finitamente generados y la subcategoría plena de R-módulos derechos finitamente generados cuando R es una K-álgebra de Artin.

Definición 4.2.1. Una subcategoría $\mathcal{A}$ de una categoría $\mathcal{B}$ se dice que es una **subcategoría plena** si para cada $M, N \in Ob(\mathcal{A})$, se cumple que

$$hom_{\mathcal{A}}(M,N) = hom_{\mathcal{B}}(M,N).$$

Definición 4.2.2. Sean ${}_{R_1}\mathcal{C}$ y ${}_{R_2}\mathcal{D}$ subcategorías plenas de R_1-Mod y R_2-Mod, respectivamente. Se dice que el funtor covariante o contravariante $T :{}_{R_1}\mathcal{C} \longrightarrow{}_{R_2}\mathcal{D}$ es **aditivo** si para cada $M, N \in Ob({}_{R_1}\mathcal{C})$, y para cada par de morfismos $f, g : M \longrightarrow N$ se cumple que

$$T(f+g) = T(f) + T(g).$$

La definición de funtor aditivo es más general, sin embargo los funtores aditivos que se considerarán en la sección son solo como en la Definición 4.2.2.

Ejemplo 4.2.3. Sea A un anillo conmutativo. Entonces para cada A-módulo M, se tiene que que el funtor $Hom_A(\_,M) : A\text{-}Mod \longrightarrow A\text{-}Mod$ es un funtor contravariante aditivo, pues si $f, g : X \longrightarrow Y$ son morfismos de A-módulos, entonces para cada $h \in Hom_A(Y,M)$ se tiene que

$$Hom_A(\_,M)(f+g)(h) = h(f+g) = hf + hg = Hom_A(\_,M)(f)(h) + Hom_A(\_,M)(g)(h),$$

es decir, $Hom_A(\_, M)(f+g) = Hom_A(\_, M)(f) + Hom_A(\_, M)(g)$.

4.2.4. Sean ${}_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$ subcategorías plenas de R-Mod y Mod-S, respectivamente. Supongamos que tenemos un par de funtores contravariantes aditivos

$$F :_R \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}_S,\ G : \mathcal{D}_S \longrightarrow_R \mathcal{C} \tag{4.3}$$

tales que son una dualidad entre ${}_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$. Entonces

$$GF \cong 1_{{}_R\mathcal{C}} \qquad \text{y} \qquad FG \cong 1_{\mathcal{D}_S},$$

esto es, existen isomorfismos naturales

$$\eta : GF \longrightarrow 1_{{}_R\mathcal{C}} \qquad \text{y} \qquad \epsilon : FG \longrightarrow 1_{\mathcal{D}_S}. \tag{4.4}$$

Dado que G es aditivo, entonces para cada $M \in Ob({}_R\mathcal{C})$ y $N \in Ob(D_S)$ existen morfismos de grupos abelianos

$$\begin{aligned} \alpha_{M,N} &: Hom_S(N, F(M)) \longrightarrow Hom_R(M, G(N)) \\ \beta_{M,N} &: Hom_S(F(M), N) \longrightarrow Hom_R(G(N), M) \end{aligned} \tag{4.5}$$

definidos como

$$\alpha_{M,N}(\gamma) = G(\gamma)\eta_M^{-1}$$
$$\beta_{M,N}(\delta) = \eta_M G(\delta)$$

para cada $\gamma \in Hom_S(N, F(M))$ y $\delta \in Hom_S(F(M), N)$.

En el resto de la sección se utilizará constantemente la notación dada en 4.2.4.

Proposición 4.2.5. *Sean $F : {}_R\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}_S$ y $G : \mathcal{D}_S \longrightarrow_R \mathcal{C}$ funtores contravariantes aditivos tales que son una dualidad entre las respectivas subcategorías plenas ${}_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$ de R-Mod y Mod-S. Entonces para cada $M_1, M_2 \in Ob({}_R\mathcal{C})$ y cada $N_1, N_2 \in Ob(\mathcal{D}_S)$,*

$$\begin{aligned} F_{M_1,M_2} : Hom_R(M_1, M_2) &\to Hom_S(F(M_2), F(M_1)) \\ f &\mapsto F(f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{N_1,N_2} : Hom_R(N_1, N_2) &\to Hom_S(G(N_2), G(N_1)) \\ g &\mapsto G(g) \end{aligned}$$

son isomorfismos de grupos abelianos. Además, $F(f)$ es un monomorfismo (epimorfismo) en $\mathcal{D}_S$ si y solo si f es epimorfismo (monomorfismo) en ${}_R\mathcal{C}$. Análogamente, $G(g)$ es monomorfismo (epimorfismo) en ${}_R\mathcal{C}$ si y solo si g es epimorfismo (monomorfismo) en $\mathcal{D}_S$.

Demostración. Sean $M_1, M_2 \in Ob({}_R\mathcal{C})$ y $N_1, N_2 \in Ob(\mathcal{D}_S)$. Dado que F y G son aditivos, entonces F_{M_1,M_2} y G_{N_1,N_2} son morfismos de grupos abelianos. Para el resto de la demostración se adoptará la notación de 4.2.4. Entonces, como G es aditivo, se tiene el morfismo de grupos abelianos

$$\begin{aligned} \bar{F}_{M_1,M_2} : Hom_S(F(M_2), F(M_1)) &\to Hom_R(M_1, M_2) \\ g &\mapsto \eta_{M_2} G(g) \eta_{M_1}^{-1}. \end{aligned}$$

Si $g \in Hom_S(F(M_2), F(M_1))$, entonces de la naturalidad de ϵ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} FGF(M_2) \arrow[r, "\epsilon_{F(M_1)}"] \arrow[d, "FG(g)"'] & F(M_2) \arrow[d, "g"] \\ FGF(M_1) \arrow[r, "\epsilon_{F(M_1)}"'] & F(M_1). \end{tikzcd} \tag{4.6}$$

Si $\bar{F}_{M_1,M_2}(g) = 0$ entonces $\eta_{M_2} G(g) \eta_{M_1}^{-1} = 0$, lo cual implica que $G(g) = 0$ (ya que η_{M_2} y $\eta_{M_1}^{-1}$ son isomorfismos). De (4.6) se sigue que $g = \epsilon_{F(M_1)} FG(g) \epsilon_{F(M_2)}^{-1} = 0$ y por ende $\bar{F}_{M_1,M_2}$ es monomorfismo de grupos abelianos. Ahora, para cada $f \in Hom_R(M_1, M_2)$, por la naturalidad de η, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} GF(M_1) \arrow[r, "\eta_{M_1}"] \arrow[d, "GF(f)"'] & M_1 \arrow[d, "f"] \\ GF(M_2) \arrow[r, "\eta_{M_2}"'] & M_2. \end{tikzcd} \tag{4.7}$$

De (4.7) se sigue que $f = \eta_{M_2} GF(f) \eta_{M_1}^{-1}$, entonces por la definición de $\bar{F}_{M_1,M_2}$,

$$\bar{F}_{M_1,M_2}(F_{M_1,M_2}(f)) = \bar{F}_{M_1,M_2}(F(f)) = f. \tag{4.8}$$

De (4.8) se concluye que $\bar{F}_{M_1,M_2}$ es un epimorfismo de grupos abelianos y por ende un isomorfismo. Nuevamente, de (4.8) se sigue que F_{M_1,M_2} es inverso de $\bar{F}_{M_1,M_2}$, así que F_{M_1,M_2} es isomorfismo de grupos abelianos. Similarmente se puede mostrar que G_{N_1,N_2} es isomorfismo de grupos abelianos mostrando que

$$\begin{aligned} \bar{G}_{N_1,N_2} \colon Hom_R(G(N_2), G(N_1)) &\to Hom_S(N_1, N_2) \\ f &\mapsto \epsilon_{N_2} F(f) \epsilon_{N_1}^{-1}. \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos abelianos y su inverso es G_{N_1,N_2}.

Sea $f \in Hom_R(M_1, M_2)$. Supongamos que $F(f)$ es monomorfismo en $\mathcal{D}_S$ y que $h_1, h_2 : M_2 \longrightarrow M_0$ son morfismos en ${}_R\mathcal{C}$ tales que

$$h_1 f = h_2 f. \tag{4.9}$$

Aplicando F a (4.9) se tiene que $F(f)F(h_1) = F(f)F(h_2)$, lo cual implica que $F(h_1) = F(h_2)$ pues $F(f)$ es monomorfismo en $\mathcal{D}_S$. Como F_{M_2,M_1} es isomorfismo de grupos abelianos, entonces $h_1 = h_2$ y por ende f es epimorfismo en ${}_R\mathcal{C}$. A la inversa, si f es epimorfismo en ${}_R\mathcal{C}$ entonces por (4.7) se sigue que $GF(f)$ es epimorfismo en ${}_R\mathcal{C}$. Sean $g_1, g_2 : N_0 \longrightarrow F(M_2)$ morfismos en $\mathcal{D}_S$ tales que

$$F(f)g_1 = F(f)g_2. \tag{4.10}$$

Entonces por (4.10) se tiene que $G(g_1)GF(f) = G(g_2)GF(f)$ y en consecuencia $G(g_1) = G(g_2)$, donde $G_{N_0,F(M_2)}$ al ser isomorfismo de grupos abelianos implica que $g_1 = g_2$, así que $F(f)$ es monomorfismo en $\mathcal{D}_S$. Por lo tanto, f es epimorfismo en ${}_R\mathcal{C}$ si y solo si $F(f)$ es monomorfismo en $\mathcal{D}_S$. Finalmente, se mostrará que f es monomorfismo en ${}_R\mathcal{C}$ si y solo si $F(f)$ es epimorfismo en $\mathcal{D}_S$. Si $F(f)$ es epimorfismo en $\mathcal{D}_S$ y $h_1, h_2 : M_0 \longrightarrow M_1$ son morfismos en ${}_R\mathcal{C}$ tales que $fh_1 = fh_2$, entonces $F(h_1)F(f) = F(h_2)F(f)$ y se sigue que $F(h_1) = F(h_2)$. Como F_{M_0,M_1} es isomorfismo de grupos abelianos, se concluye que $h_1 = h_2$ y en consecuencia f es monomorfismo en ${}_R\mathcal{C}$. A la inversa, si f es monomorfismo en ${}_R\mathcal{C}$ entonces, por (4.7), $GF(f)$ es monomorfismo en ${}_R\mathcal{C}$, así que $g_1F(f) = g_2F(f)$ con $g_1, g_2 : F(M_1) \longrightarrow N_0$ morfismos en $\mathcal{D}_S$ implica que $GF(f)G(g_1) = GF(f)G(g_2)$ y por ende $G(g_1) = G(g_2)$. Como $G_{F(M_1),N_0}$ es isomorfismo de grupos abelianos, entonces $g_1 = g_2$, de ahí que $F(f)$ es epimorfismo en $\mathcal{D}_S$. ■

Lema 4.2.6. *Sean $F : {}_R\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}_S$ y $G : \mathcal{D}_S \longrightarrow_R \mathcal{C}$ funtores contravariantes aditivos tales que son una dualidad entre las subcategorías plenas ${}_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$ de R-Mod y Mod-S, respectivamente. Entonces con la notación de 4.2.4, los morfismos*

$$\alpha_{M,N} : Hom_S(N, F(M)) \longrightarrow Hom_R(M, G(N))$$

$$\beta_{M,N} : Hom_S(F(M), N) \longrightarrow Hom_R(G(N), M)$$

son isomorfismos de grupos abelianos. Además, si $M_1, M_2 \in Ob({}_R\mathcal{C})$ y $N_1, N_2 \in Ob(\mathcal{D}_S)$, entonces para cada

$$\gamma \in Hom_S(N_1, F(M_1)),\ \delta \in Hom_S(F(M_2), N_2)$$

$$\bar{\gamma} \in Hom_R(M_1, G(N_1)),\ \bar{\delta} \in Hom_R(G(N_2), M_2)$$

$$f \in Hom_R(M_2, M_1),\ g \in Hom_S(N_2, N_1)$$

se cumplen las siguientes identidades:

(1) $\alpha_{M_2,N_2}(F(f)\gamma g) = G(g)\alpha_{M_1,N_1}(\gamma)f$.

(2) $\beta_{M_1,N_1}(g\delta F(f)) = f\beta_{M_2,N_2}(\delta)G(g)$.

(3) $\alpha^{-1}_{M_2,N_2}(G(g)\bar{\gamma}f) = F(f)\alpha^{-1}_{M_1,N_1}(\bar{\gamma})g$.

(4) $\beta^{-1}_{M_1,N_1}(f\bar{\delta}G(g)) = g\beta^{-1}_{M_2,N_2}(\bar{\delta})F(f)$.

Finalmente, $\alpha_{M_1,N_1}(\gamma)$ es monomorfismo (epimorfismo) en ${}_R\mathcal{C}$ si y solo si γ es epimorfismo (monomorfismo) en $\mathcal{D}_S$ y $\beta_{M_2,N_2}(\delta)$ es monomorfismo (epimorfismo) en ${}_R\mathcal{C}$ si y solo si δ es epimorfismo (monomorfismo) en $\mathcal{D}_S$.

Demostración. Dado que G es aditivo, entonces $\alpha_{M,N}$ y $\beta_{M,N}$ son morfismos de grupos abelianos. Para cada $\sigma \in Hom_S(N, F(M))$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}(Hom_R(\_, G(N))(\eta_M^{-1}) \circ G_{N,F(M)})(\sigma) &= Hom_R(\_, G(N))(\eta_M^{-1})(G_{N,F(M)}(\sigma))\\ &= Hom_R(\_, G(N))(\eta_M^{-1})(G(\sigma))\\ &= G(\sigma)\eta_M^{-1}\\ &= \alpha_{M,N}(\sigma).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\alpha_{M,N} = Hom_R(\_, G(N))(\eta_M^{-1}) \circ G_{N,F(M)}$, donde $G_{N,F(M)}$ es isomorfismo de grupos abelianos (Proposición 4.2.5) y $Hom_R(\_, G(N))(\eta_M^{-1})$ es un isomorfismo de grupos abelianos (ya que η_M^{-1} es isomorfismo y $Hom_R(\_, G(N))$ es funtor), de ahí que $\alpha_{M,N}$ es isomorfismo de grupos abelianos. Similarmente, para cada $\rho \in Hom_S(F(M), N)$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}(Hom_R(G(N), \_)(\eta_M) \circ G_{F(M),N})(\rho) &= Hom_R(G(N), \_)(\eta_M)(G_{F(M),N}(\rho))\\ &= Hom_R(G(N), \_)(\eta_M)(G(\rho))\\ &= \eta_M G(\rho)\end{aligned}$$

$$= \beta_{M,N}(\rho).$$

Por lo tanto, $\beta_{M,N} = Hom_R(G(N), \_)(\eta_M) \circ G_{F(M),N}$, donde $G_{F(M),N}$ es isomorfismo de grupos abelianos (Proposición 4.2.5) y $Hom_R(G(N), \_)(\eta_M)$ es isomorfismo de grupos abelianos (ya que η_M es isomorfismo y $Hom_R(G(N), \_)$ es funtor), de ahí que $\beta_{M,N}$ es isomorfismo de grupos abelianos. Ahora, se demostrarán las identidades (1), (2), (3) y (4).

Identidad (1). De la naturalidad de η se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} GF(M_2) \arrow[r, "\eta_{M_2}"] \arrow[d, "GF(f)"'] & M_2 \arrow[d, "f"] \\ GF(M_1) \arrow[r, "\eta_{M_1}"'] & M_1. \end{tikzcd}$$

Entonces $f = \eta_{M_1} GF(f)\eta_{M_2}^{-1}$ y, como $\alpha_{M_1,N_1}(\gamma) = G(\gamma)\eta_{M_1}^{-1}$, se sigue que

$$\begin{aligned} \alpha_{M_2,N_2}(F(f)\gamma g) &= G(F(f)\gamma g)\eta_{M_2}^{-1} \\ &= G(g)G(\gamma)GF(f)\eta_{M_2}^{-1} \\ &= G(g)G(\gamma)\eta_{M_1}^{-1}\eta_{M_1}GF(f)\eta_{M_2}^{-1} \\ &= G(g)(G(\gamma)\eta_{M_1}^{-1})(\eta_{M_1}GF(f)\eta_{M_2}^{-1}) \\ &= G(g)\alpha_{M_1,N_1}(\gamma)f. \end{aligned}$$

Identidad (2). Como se vio en la identidad (1), $f = \eta_{M_1} GF(f)\eta_{M_2}^{-1}$ y, dado que $\beta_{M_2,N_2}(\delta) = \eta_{M_2}G(\delta)$, entonces

$$\begin{aligned} \beta_{M_1,N_1}(g\delta F(f)) &= \eta_{M_1}G(g\delta F(f)) \\ &= \eta_{M_1}GF(f)G(\delta)G(g) \\ &= \eta_{M_1}GF(f)\eta_{M_2}^{-1}\eta_{M_2}G(\delta)G(g) \\ &= (\eta_{M_1}GF(f)\eta_{M_2}^{-1})(\eta_{M_2}G(\delta))G(g) \\ &= f\beta_{M_2,N_2}(\delta)G(g). \end{aligned}$$

Identidad (3). Por la identidad (1) se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha_{M_2,N_2}(F(f)\alpha_{M_1,N_1}^{-1}(\bar{\gamma})g) &= G(g)\alpha_{M_1,N_1}(\alpha_{M_1,N_1}^{-1}(\bar{\gamma}))f \\ &= G(g)\bar{\gamma}f, \end{aligned}$$

lo cual implica que $F(f)\alpha_{M_1,N_1}^{-1}(\bar{\gamma})g = \alpha_{M_2,N_2}^{-1}(G(g)\bar{\gamma}f)$.

Identidad (4). Por la identidad (2) se tiene que

$$\begin{aligned} \beta_{M_1,N_1}(g\beta_{M_2,N_2}^{-1}(\bar{\delta})F(f)) &= f\beta_{M_2,N_2}(\beta_{M_2,N_2}^{-1}(\bar{\delta}))G(g) \\ &= f\bar{\delta}G(g), \end{aligned}$$

lo cual implica que $g\beta_{M_2,N_2}^{-1}(\bar{\delta})F(f) = \beta_{M_1,N_1}^{-1}(f\bar{\delta}G(g))$.

Finalmente, por como está definido $\alpha_{M_1,N_1}(\gamma)$, se tiene que $\alpha_{M_1,N_1}(\gamma)$ es monomorfismo (epimorfismo) en ${}_R\mathcal{C}$ si y solo si $G(\gamma)$ es monomorfismo (epimorfismo) en ${}_R\mathcal{C}$ y, por la Proposición 4.2.5, esto ocurre si y solo si γ es epimorfismo (monomorfismo) en $\mathcal{D}_S$. Similarmente, $\beta_{M_2,N_2}(\delta)$ es monomorfismo (epimorfismo) en ${}_R\mathcal{C}$ si y solo si $G(\delta)$ es monomorfismo (epimorfismo) en ${}_R\mathcal{C}$ y, por la Proposición 4.2.5 , esto ocurre si y solo si δ es epimorfismo (monomorfismo) en $\mathcal{D}_S$. ■

Notación 4.2.7. Sean M y N módulos tales que $N \leq M$. En los siguientes resultados del capítulo frecuentemente se usará la siguiente notación:

- $\nu_{M/N}$ denotará al epimorfismo natural $M \twoheadrightarrow M/N$.
- $\iota_{N\leq M}$ denotará al morfismo inclusión $N \hookrightarrow M$.

Proposición 4.2.8. *Sea (F,G) una dualidad entre las subcategorías plenas ${}_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$ de R-Mod y Mod-S, respectivamente, con F y G aditivos, donde las clases $Ob({}_R\mathcal{C})$ y $Ob(\mathcal{D}_S)$ son cerradas bajo submódulos, los monomorfismos y epimorfismos en ${}_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$ son también monomorfismos y epimorfismos, respectivamente, en R-Mod y Mod-S. Ahora, supongamos que $M_1, M_2, M_3 \in Ob({}_R\mathcal{C})$. Entonces una sucesión*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

es exacta si y solo si la sucesión

$$0 \longrightarrow F(M_3) \xrightarrow{F(g)} F(M_2) \xrightarrow{F(f)} F(M_1) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Para la demostración se tomará la notación de 4.2.4.

[⇒] Supongamos que $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta. Por la Proposición 4.2.5, $F(f)$ es epimorfismo en $\mathcal{D}_S$ y $F(g)$ es monomorfismo en $\mathcal{D}_S$, así que de la hipótesis se sigue que $F(f)$ es suprayectivo y $F(g)$ inyectivo. Resta demostrar en esta implicación que $KerF(f) = ImF(g)$. Obsérvese que $0 = F(0) = F(gf) = F(f)F(g)$ (donde $F(0) = 0$ es consecuencia de que F es aditivo), entonces $ImF(g) \leq KerF(f)$. Ahora, sea $N = KerF(f)$. Entonces $0 = F(f)\iota_{N\leq F(M_2)}$, de ahí que

$$\alpha_{M_1,N}(F(f)\iota_{N\leq F(M_2)}) = \alpha_{M_1,N}(0) = G(0)\eta_{M_1}^{-1} = 0\eta_{M_1}^{-1} = 0 \tag{4.10}$$

y, por la identidad (1) del Lema 4.2.6,

$$\begin{aligned}\alpha_{M_1,N}(F(f)\iota_{N\leq F(M_2)}) &= \alpha_{M_1,N}(F(f)\iota_{N\leq F(M_2)}1_N)\\ &= G(1_N)\alpha_{M_2,N}(\iota_{N\leq F(M_2)})f\\ &= 1_{G(N)}\alpha_{M_2,N}(\iota_{N\leq F(M_2)})f\\ &= \alpha_{M_2,N}(\iota_{N\leq F(M_2)})f.\end{aligned} \tag{4.11}$$

De (4.10) y (4.11) se sigue que $\alpha_{M_2,N}(\iota_{N\leq F(M_2)})f = 0$ y por ende

$$Kerg = Imf \leq Ker(\alpha_{M_2,N}(\iota_{N\leq F(M_2)})). \tag{4.12}$$

Por hipótesis g es suprayectiva, así que existe un morfismo $h : M_3 \longrightarrow G(N)$ tal que el siguiente triángulo

$$\begin{tikzcd} M_2 \arrow[r, "\alpha_{M_2,N}(\iota_{N\leq F(M_2)})"] \arrow[d, "g"'] & G(N) \\ M_3 \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta (cf. [10, Teorema 3.4.7]). Entonces $\alpha_{M_2,N}(\iota_{N\leq F(M_2)}) = hg$ implica

$$\begin{aligned} \iota_{N\leq F(M_2)} &= \alpha^{-1}_{M_2,N}(hg) \\ &= \alpha^{-1}_{M_2,N}(1_{G(N)}hg) \\ &= \alpha^{-1}_{M_2,N}(G(1_N)hg) \\ &= F(g)\alpha^{-1}_{M_3,N}(h)1_N \text{ (Lema 4.2.6, identidad (3))} \\ &= F(g)\alpha^{-1}_{M_3,N}(h). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Entonces, de (4.13) se tiene que

$$KerF(f) = N = Im(\iota_{N\leq F(M_2)}) = Im(F(g)\alpha^{-1}_{M_3,N}(h)) \leq ImF(g).$$

[$\Leftarrow$] Supongamos que la sucesión

$$0 \to F(M_3) \xrightarrow{F(g)} F(M_2) \xrightarrow{F(f)} F(M_1) \to 0 \tag{4.14}$$

es exacta. De manera similar a lo realizado en "[$\Rightarrow$]", al suponer que la sucesión en (4.14) es exacta entonces se tiene que la sucesión

$$0 \to GF(M_1) \xrightarrow{GF(f)} GF(M_2) \xrightarrow{GF(g)} GF(M_3) \to 0$$

es exacta. De la naturalidad de η se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & GF(M_1) \arrow[r, "GF(f)"] \arrow[d, "\eta_{M_1}"'] & GF(M_2) \arrow[r, "GF(g)"] \arrow[d, "\eta_{M_2}"] & GF(M_3) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{M_3}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f"'] & M_2 \arrow[r, "g"'] & M_3 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{4.15}$$

Dado que la fila superior de (4.15) es exacta y η_{M_i} con i=1,2,3 son isomorfismos, entonces la fila inferior de (4.15) es exacta, es decir, la sucesión

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$$

es exacta. ■

Ahora recordemos las siguientes definiciones acerca de funciones entre retículas:

Definición 4.2.9. Sean $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}'$ retículas.

- Se dice que una función $f : \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{L}'$ invierte el orden si, para cada $x, y \in \mathscr{L}$, $x \leq y$ implica que $f(y) \leq f(x)$.
- Se dice que $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}'$ son anti-isomorfas si existe una biyección $f : \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{L}'$ que invierte el orden tal que f^{-1} también invierte el orden. En tal caso, la función f es llamada un anti-isomorfismo de retículas.

El siguiente lema y el corolario posterior son los resultados más importante de esta sección auxiliar, pues son los que sustentan varios pasos clave en la demostración del Teorema 4.3.2.

Lema 4.2.10. *Sean ${}_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$ subcategorías plenas de R-Mod y Mod-S, respectivamente, tales que las clases $Ob({}_R\mathcal{C})$ y $Ob(\mathcal{D}_S)$ son cerradas bajo submódulos, cerradas bajo cocientes y los monomorfismos y epimorfismos en ${}_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$ son también monomorfismos y epimorfismo en R-Mod y Mod-S, respectivamente. Si (F, G) es una dualidad entre ${}_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$ con F y G aditivos, entonces para cada $M \in Ob({}_R\mathcal{C})$, la retícula de submódulos de M y la retícula de submódulos de $F(M)$ son anti-isomorfas. De manera análoga, se tiene que para cada $N \in Ob(\mathcal{D}_S)$, la retícula de submódulos de N y la retícula de submódulos de $G(N)$ son anti-isomorfas.*

Demostración. Para la demostración se adoptarán las notaciones de 4.2.4, de la Proposición 4.2.5 y del Lema 4.2.6. Sea $M \in Ob({}_R\mathcal{C})$. Recordar que $\mathscr{L}({}_RM)$ y $\mathscr{L}(F(M)_S)$ denotan a las retículas de M y de $F(M)$, respectivamente. Definimos la función

$$\begin{aligned}\Lambda_M \colon \mathscr{L}({}_RM) &\to \mathscr{L}(F(M)_S)\\ X &\mapsto Ker(F(\iota_{X\leq M})).\end{aligned}$$

Sean $X_1, X_2 \leq M$ tales que $X_2 \leq X_1$. Entonces

$$\begin{aligned}\Lambda_M(X_1) &= KerF(\iota_{X_1\leq M})\\ &\leq Ker(F(\iota_{X_2\leq X_1})F(\iota_{X_1\leq M}))\\ &= KerF(\iota_{X_1\leq M}\iota_{X_2\leq X_1})\\ &= KerF(\iota_{X_2\leq M})\\ &= \Lambda_M(X_2).\end{aligned}$$

Por lo tanto Λ_M invierte orden. Ahora, definimos la función

$$\begin{aligned}\Gamma_M \colon \mathscr{L}(F(M)_S) &\to \mathscr{L}({}_RM)\\ N &\mapsto Ker(\alpha_{M,N}(\iota_{N\leq F(M)})).\end{aligned}$$

Sean $N_1, N_2 \leq F(M)$ tales que $N_2 \leq N_1$. Entonces

$$\begin{aligned}\Gamma_M(N_1) &= Ker(\alpha_{M,N_1}(\iota_{N_1\leq F(M)}))\\ &\leq Ker(G(\iota_{N_2\leq N_1})\alpha_{M,N_1}(\iota_{N_1\leq F(M)}))\\ &= Ker(G(\iota_{N_2\leq N_1})\alpha_{M,N_1}(\iota_{N_1\leq F(M)})1_M)\\ &\stackrel{*}{=} Ker(\alpha_{M,N_2}(F(1_M)\iota_{N_1\leq F(M)}\iota_{N_2\leq N_1}))\\ &= Ker(\alpha_{M,N_2}(1_{F(M)}\iota_{N_1\leq F(M)}\iota_{N_2\leq N_1}))\\ &= Ker(\alpha_{M,N_2}(\iota_{N_1\leq F(M)}\iota_{N_2\leq N_1}))\\ &= Ker(\alpha_{M,N_2}(\iota_{N_2\leq F(M)}))\\ &= \Gamma_M(N_2),\end{aligned}$$

donde la igualdad señalada con * se debe a la identidad (1) del Lema 4.2.6. Por lo tanto, Γ_M invierte orden. Sean $X \leq M$ y $N := \Lambda_M(X)$. Dado que $\nu_{M/X}$ es epimorfismo en ${}_R\mathcal{C}$, entonces $F(\nu_{M/X})$ es monomorfismo en $\mathcal{D}_S$ (Proposición 4.2.5) y en consecuencia es monomorfismo en Mod-S, así que si $h = F(\nu_{M/X})|^{ImF(\nu_{M/X})}$ entonces h es isomorfismo y el triángulo

$$\begin{tikzcd} F(M/X) \arrow[r, "F(\nu_{M/X})"] \arrow[dr, "h"'] & F(M) \\ & ImF(\nu_{M/X}) \arrow[u, "\iota_{ImF(\nu_{M/X})\leq F(M)}"'] \end{tikzcd} \tag{4.16}$$

conmuta. Dado que $0 \to X \xrightarrow{\iota_{X\leq M}} M \xrightarrow{\nu_{M/X}} M/X \to 0$ es una sucesión exacta en ${}_R\mathcal{C}$, entonces, por la Proposición 4.2.8, la sucesión $0 \to F(M/X) \xrightarrow{F(\nu_{M/X})} F(M) \xrightarrow{F(\iota_{X\leq M})} F(X) \to 0$ es exacta, de ahí que $ImF(\nu_{M/X}) = KerF(\iota_{X\leq M}) = N$ y el diagrama (4.16) se puede ver como

$$\begin{tikzcd} F(M/X) \arrow[r, "F(\nu_{M/X})"] \arrow[dr, "h"'] & F(M) \\ & N. \arrow[u, "\iota_{N\leq F(M)}"'] \end{tikzcd} \tag{4.17}$$

Ahora, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} G(h)\alpha_{M,N}(\iota_{N\leq F(M)}) &= G(h)\alpha_{M,N}(\iota_{N\leq F(M)})1_M \\ &\overset{*}{=} \alpha_{M,F(M/X)}(F(1_M)\iota_{N\leq F(M)}h) \\ &= \alpha_{M,F(M/X)}(1_{F(M)}\iota_{N\leq F(M)}h) \\ &= \alpha_{M,F(M/X)}(\iota_{N\leq F(M)}h) \\ &\overset{**}{=} \alpha_{M,F(M/X)}(F(\nu_{M/X})) \\ &= \alpha_{M,F(M/X)}(F(\nu_{M/X})1_{F(M/X)}1_{F(M/X)}) \\ &\overset{*}{=} G(1_{M/X})\alpha_{M/X,F(M/X)}(1_{F(M/X)})\nu_{M/X} \\ &= 1_{G(M/X)}\alpha_{M/X,F(M/X)}(1_{F(M/X)})\nu_{M/X} \\ &= \alpha_{M/X,F(M/X)}(1_{F(M/X)})\nu_{M/X}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

donde las igualdades señaladas con * se deben a la identidad (1) del Lema 4.2.6 y la igualdad señalada con ** se debe al triángulo conmutativo de (4.17). Dado que h es isomorfismo entonces $G(h)$ es isomorfismo en ${}_R\mathcal{C}$ (y por tanto es isomorfismo en R-Mod). Por el Lema 4.2.6, $\alpha_{M/X,F(M/X)}(1_{F(M/X)})$ es bimorfismo en ${}_R\mathcal{C}$ ya que $1_{F(M/X)}$ es monomorfismo y epimorfismo en $\mathcal{D}_S$, entonces la hipótesis implica que $\alpha_{M/X,F(M/X)}(1_{F(M/X)})$ es bimorfismo en R-Mod, es decir, es isomorfismo en R-Mod (y por ende también en ${}_R\mathcal{C}$). Entonces de (4.18) se sigue que $Ker(\alpha_{M,N}(\iota_{N\leq F(M)})) = Ker\nu_{M/X} = X$, es decir,

$$\Gamma_M\Lambda_M(X) = \Gamma_M(N) = Ker(\alpha_{M,N}(\iota_{N\leq F(M)})) = X. \tag{4.19}$$

Ahora, sean $N \leq F(M)$ y $X := \Gamma_M(N)$. Dado que $\iota_{N\leq F(M)}$ es monomorfismo en $\mathcal{D}_S$, entonces $\alpha_{M,N}(\iota_{N\leq F(M)})$ es epimorfismo en ${}_R\mathcal{C}$ (Lema 4.2.6) y por hipótesis es epimorfismo en R-Mod. Por el primer teorema de isomorfismos, existe un isomorfismo $\gamma : M/X \longrightarrow G(N)$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha_{M,N}(\iota_{N\leq F(M)})"] \arrow[d, "\nu_{M/X}"'] & G(N) \\ M/X \arrow[ur, dashed, "\gamma"'] & \end{tikzcd} \tag{4.20}$$

conmuta. Entonces, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \iota_{N\leq F(M)} &\overset{*}{=} \alpha^{-1}_{M,N}(\gamma\nu_{M/X}) \\ &= \alpha^{-1}_{M,N}(1_{G(N)}\gamma\nu_{M/X}) \\ &= \alpha^{-1}_{M,N}(G(1_N)\gamma\nu_{M/X}) \\ &\overset{**}{=} F(\nu_{M/X})\alpha^{-1}_{M/X,N}(\gamma)1_N \\ &= F(\nu_{M/X})\alpha^{-1}_{M/X,N}(\gamma), \end{aligned} \tag{4.21}$$

donde la igualdad señalada con * se debe a (4.20) y la igualdad señalada con ** se debe a la identidad (3) del Lema 4.2.6. Como $\gamma = \alpha_{M/X,N}(\alpha^{-1}_{M/X,N}(\gamma))$ con γ isomorfismo, entonces el Lema 4.2.6 implica que $\alpha^{-1}_{M/X,N}(\gamma)$ es bimorfismo en ${}_R\mathcal{C}$ y entonces por hipótesis es isomorfismo en R-Mod (y por ende también en ${}_R\mathcal{C}$), entonces de (4.21) se sigue que $Im(\iota_{N\leq F(M)}) = ImF(\nu_{M/X})$. Por la Proposición 4.2.8,

$$0 \to F(M/X) \xrightarrow{F(\nu_{M/X})} F(M) \xrightarrow{F(\iota_{X\leq M})} F(X) \to 0$$

es una sucesión exacta, así que $KerF(\iota_{X\leq M}) = ImF(\nu_{M/X})$. Entonces

$$\begin{aligned} \Lambda_M\Gamma_M(N) &= \Lambda_M(X) \\ &= KerF(\iota_{X\leq M}) \\ &= ImF(\nu_{M/X}) \\ &= Im(\iota_{N\leq F(M)}) \\ &= N. \end{aligned} \tag{4.22}$$

De (4.19) y (4.22) se sigue que Λ_M es biyectiva y su inversa es Γ_M. Como Λ_M y Γ_M invierten orden, se concluye que Λ_M es un anti-isomorfismo de retículas. ■

Corolario 4.2.11. *Supongamos que tenemos las hipótesis del Lema 4.2.10. Entonces, para cada $M \in Ob({}_R\mathcal{C})$, M es de longitud finita si y solo $F(M)$ es de longitud finita. Además $Le(M) = Le(F(M))$. Por otro lado, M es inescindible si y solo si $F(M)$ es inescindible. Tales afirmaciones son válidas si consideramos a $N \in Ob(\mathcal{D}_S)$ en lugar de M y a G en lugar de F.*

Demostración. Sea $M \in Ob({}_R\mathcal{C})$. Dado que $\mathscr{L}({}_RM)$ y $\mathscr{L}(F(M)_S)$ son anti-isomorfas, entonces

$$0 = M_0 \leq M_1 \leq ... \leq M_n = M$$

es una serie de composición en M si y solo si, bajo la notación del Lema 4.2.10,

$$0 = \Lambda_M(M) = \Lambda_M(M_n) \leq \Lambda_M(M_{n-1}) \leq ... \leq \Lambda_M(M_0) = \Lambda_M(0) = F(M)$$

es una serie de composición en $F(M)$, de ahí que M es de longitud finita si y solo si $F(M)$ es de longitud finita y se cumple que $Le(M) = Le(F(M))$. Por otro lado, M no es inescindible si y solo si $\mathscr{L}({}_RM)$ tiene una subretícula de la forma

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ M_1 \arrow[dr, dash] & & M_2 \arrow[dl, dash] \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

y esto ocurre si y solo si

$$\begin{tikzcd} & F(M) = \Lambda_M(0) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \Lambda_M(M_1) \arrow[dr, dash] & & \Lambda_M(M_2) \arrow[dl, dash] \\ & 0 = \Lambda_M(M) & \end{tikzcd}$$

es una subretícula de $\mathscr{L}(F(M)_S)$, es decir, $F(M)$ no es inescindible. ■

Proposición 4.2.12. *Sean ${}_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$ subcategorías plenas de R-Mod y Mod-S. Si (F, G) es una dualidad entre ${}_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$ con F y G aditivos, entonces M es inyectivo (resp. proyectivo) en ${}_R\mathcal{C}$ si y solo si $F(M)$ es proyectivo (resp. inyectivo) en $\mathcal{D}_S$. Similarmente, N es inyectivo (resp. proyectivo) en $\mathcal{D}_S$ si y solo si $G(N)$ es proyectivo (resp. inyectivo) en ${}_R\mathcal{C}$.*

Demostración. Se mostrará que M es inyectivo en ${}_R\mathcal{C}$ si y solo si $F(M)$ es proyectivo en $\mathcal{D}_S$; la afirmación dual se prueba de manera similar. La demostración hará uso de la notación de 4.2.4.

[$\Rightarrow$] Supongamos que M es inyectivo en ${}_R\mathcal{C}$. Cabe señalar que M no necesariamente es inyectivo en R-Mod. Sean $\lambda : F(M) \longrightarrow N_2$ un morfismo en $\mathcal{D}_S$ y $\alpha : N_1 \longrightarrow N_2$ un epimorfismo en $\mathcal{D}_S$. Por la Proposición 4.2.5 se tiene que $G(\alpha)$ es un monomorfismo en ${}_R\mathcal{C}$, así que como M es inyectivo en ${}_R\mathcal{C}$ entonces existe un morfismo $\gamma : G(N_1) \longrightarrow M$ tal que el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{tikzcd} G(N_2) \arrow[r, "G(\alpha)"] \arrow[d, "G(\lambda)"'] & G(N_1) \arrow[ddl, dashed, "\gamma"] \\ GF(M) \arrow[d, "\eta_M"'] & \\ M & \end{tikzcd} \tag{4.23}$$

donde η_M es un isomorfismo ya que $\eta : GF \longrightarrow 1_{{}_R\mathcal{C}}$ es un isomorfismo natural. Ahora definimos $\rho : G(N_1) \longrightarrow GF(M)$ como $\rho := \eta_M^{-1}\gamma$. De (4.23) obtenemos el siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G(N_2) \arrow[r, "G(\alpha)"] \arrow[d, "G(\lambda)"'] & G(N_1) \arrow[dl, "\rho"] \\ GF(M). & \end{tikzcd} \tag{4.24}$$

Aplicando F a (4.24) se obtiene el siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & FGF(M) \arrow[dl, "F(\rho)"'] \arrow[d, "FG(\lambda)"] \\ FG(N_1) \arrow[r, "FG(\alpha)"'] & FG(N_2). \end{tikzcd} \tag{4.25}$$

Dado que $\epsilon : FG \longrightarrow 1_{\mathcal{D}_S}$ es un isomorfismo natural, se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} FGF(M) \arrow[r, "\epsilon_{F(M)}"] \arrow[d, "FG(\lambda)"'] & F(M) \arrow[d, "\lambda"] \\ FG(N_2) \arrow[r, "\epsilon_{N_2}"'] & N_2 \end{tikzcd} \tag{4.26}$$

$$\begin{tikzcd} FG(N_1) \arrow[r, "\epsilon_{N_1}"] \arrow[d, "FG(\alpha)"'] & N_1 \arrow[d, "\alpha"] \\ FG(N_2) \arrow[r, "\epsilon_{N_2}"] & N_2. \end{tikzcd} \tag{4.27}$$

Sea $\beta : F(M) \longrightarrow N_1$ definido como $\beta := \epsilon_{N_1} F(\rho)\epsilon^{-1}_{F(M)}$. Entonces de (4.25), (4.26) y (4.27) se sigue que $\alpha\beta = \alpha\epsilon_{N_1} F(\rho)\epsilon^{-1}_{F(M)} = (\alpha\epsilon_{N_1})F(\rho)\epsilon^{-1}_{F(M)} = (\epsilon_{N_2} FG(\alpha))F(\rho)\epsilon^{-1}_{F(M)} = \epsilon_{N_2}(FG(\alpha)F(\rho))\epsilon^{-1}_{F(M)} = \epsilon_{N_2} FG(\lambda)\epsilon^{-1}_{F(M)} = (\epsilon_{N_2} FG(\lambda))\epsilon^{-1}_{F(M)} = (\lambda\epsilon_{F(M)})\epsilon^{-1}_{F(M)} = \lambda$, es decir, se tiene el siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & F(M) \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \arrow[d, "\lambda"] \\ N_1 \arrow[r, "\alpha"'] & N_2. \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $F(M)$ es proyectivo en $\mathcal{D}_S$.

[$\Leftarrow$] Ahora supongamos que $F(M)$ es proyectivo en $\mathcal{D}_S$. Sean $\theta : M_1 \longrightarrow M$ un morfismo en ${}_R\mathcal{C}$ y $\mu : M_1 \longrightarrow M_2$ un monomorfismo en ${}_R\mathcal{C}$. Por la Proposición 4.2.5 se tiene que $F(\mu)$ es epimorfismo en $\mathcal{D}_S$, así que como $F(M)$ es proyectivo en $\mathcal{D}_S$ se sigue que existe un morfismo $\sigma : F(M) \longrightarrow F(M_2)$ tal que el triángulo

$$\begin{tikzcd} & F(M) \arrow[dl, dashed, "\sigma"'] \arrow[d, "F(\theta)"] \\ F(M_2) \arrow[r, "F(\mu)"'] & F(M_1) \end{tikzcd} \tag{4.28}$$

conmuta. Aplicando G a (4.28) se tiene el siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd} GF(M_1) \arrow[r, "GF(\mu)"] \arrow[d, "GF(\theta)"'] & GF(M_2) \arrow[dl, "G(\sigma)"] \\ GF(M). & \end{tikzcd} \tag{4.29}$$

Dado que $\eta : GF \longrightarrow 1_{{}_R\mathcal{C}}$ es un isomorfismo natural, entonces tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} GF(M_1) \arrow[r, "\eta_{M_1}"] \arrow[d, "GF(\theta)"'] & M_1 \arrow[d, "\theta"] \\ GF(M) \arrow[r, "\eta_M"] & M \end{tikzcd} \tag{4.30}$$

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\eta^{-1}_{M_1}"] \arrow[d, "\mu"'] & GF(M_1) \arrow[d, "GF(\mu)"] \\ M_2 \arrow[r, "\eta^{-1}_{M_2}"] & GF(M_2) \end{tikzcd} \tag{4.31}$$

Sea $\delta : M_2 \longrightarrow M$ definido como $\delta := \eta_M G(\sigma)\eta^{-1}_{M_2}$. Entonces de (4.29), (4.30) y (4.31) se sigue que $\delta\mu = (\eta_M G(\sigma)\eta^{-1}_{M_2})\mu = \eta_M G(\sigma)(\eta^{-1}_{M_2}\mu) = \eta_M G(\sigma)(GF(\mu)\eta^{-1}_{M_1}) = \eta_M (G(\sigma)GF(\mu))\eta^{-1}_{M_1} = \eta_M GF(\theta)\eta^{-1}_{M_1} = (\eta_M GF(\theta))\eta^{-1}_{M_1} = (\theta\eta_{M_1})\eta^{-1}_{M_1} = \theta$, es decir, se tiene el siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\theta"'] & M_2 \arrow[dl, dashed, "\delta"] \\ M. & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, M es inyectivo en ${}_R\mathcal{C}$. ■

Todo lo que se ha visto hasta el momento en la sección ha sido en abstracto para subcategorías plenas de R-Mod y Mod-S. Sin embargo, para la demostración del Teorema 4.3.2 se requieren estos resultados de manera más concreta para una dualidad entre la subcategoría plena de R-módulos izquierdos finitamente generados y la subcategoría plena de R-módulos derechos finitamente generados, donde R es una K-álgebra de Artin, por lo que vamos a ver que las hipótesis de resultados como el Lema 4.2.10 se satisfacen para nuestro caso particular. Nuevamente, como se hizo en la sección inmediata anterior, a partir de ahora y en el resto de la actual sección, K denotará a un anillo artiniano conmutativo y R denotará a una K-álgebra de Artin.

Proposición 4.2.13. *La categoría R-mod (respectivamente mod-R) es cerrada bajo submódulos y cerrada bajo cocientes. Además, los monomorfismo en R-mod (respectivamente en mod-R) son inyectivos y los epimorfismos en R-mod (respectivamente en mod-R) son suprayectivos.*

Demostración. Sea M un R-módulo izquierdo finitamente generado y $N \leq M$. Por la Proposición 4.1.4, R es artiniano y consecuencia es noetheriano, así que M es noetheriano y N es finitamente generado. Es claro que cocientes de módulos finitamente generados son finitamente generados. Ahora, sea $f : M_1 \longrightarrow M_2$ un morfismo de R-módulos izquierdos con M_1 y M_2 finitamente generados. Supongamos que f es monomorfismo en R-mod y que $f(x) = f(y)$ con $x, y \in M_1$. Consideremos los morfismos $g_1, g_2 : R(x-y) \longrightarrow M_1$, donde g_1 es el morfismo inclusión y g_2 es el morfismo cero. Entonces, para cada $r \in R$, se tiene que

$$f(g_1(r(x-y))) = f(r(x-y)) = rf(x-y) = r0 = 0 = f(0) = f(g_2(r(x-y))),$$

es decir, $fg_1 = fg_2$, lo cual implica que $g_1 = g_2$. Se sigue que $x - y = g_1(x-y) = g_2(x-y) = 0$, es decir, $x = y$. Ahora supongamos que f es epimorfismo en R-mod. Sean $\nu : M_2 \longrightarrow M_2/Imf$ el epimorfismo natural y $\gamma : M_2 \longrightarrow M_2/Imf$ el morfismo cero. Entonces ν y γ son morfismos en R-mod tales que $\nu f = 0 = \gamma f$. Por la hipótesis se sigue que $\nu = \gamma$, es decir, $M_2 = Imf$. ■

Observación 4.2.14. *Sea M un módulo inyectivo en R-mod. Como R es artiniano por ser K-álgebra de Artin, entonces todo ideal izquierdo no cero I de R es finitamente generado. Entonces para cada morfismo $f : I \longrightarrow M$, donde I es un ideal izquierdo de R, la inyectividad de M en R-mod implica que existe un morfismo $h :_R R \longrightarrow M$ tal que el siguiente triángulo conmuta:*

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & {}_R R \arrow[dl, dashed, "h"] \\ M. & \end{tikzcd}$$

Por el criterio de Baer, M también es inyectivo en R-Mod. Similarmente se tiene que si un módulo es inyectivo en mod-R entonces también es inyectivo en Mod-R.

4.2.15. Se define el siguiente funtor contravariante aditivo:

D_ℓ : *R-mod* $\longrightarrow$ *mod-R.*

- En objetos: $D_\ell(X) = Hom_K(X, E_K)$ para cada $X \in Ob(R\text{-}mod)$, donde $Hom_K(X, E_K)$ es R-módulo derecho finitamente generado como en la Proposición 4.1.10.
- En morfismos: Si $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo en R-mod, entonces $D_\ell(f)$ es el morfismo en mod-R definido de la siguiente manera:

$$D_\ell(f) \colon Hom_K(Y, E_K) \to Hom_K(X, E_K)$$
$$h \mapsto hf.$$

Veamos que en efecto $D_\ell(f)$ es un morfismo en *mod-R*. Sean $r \in R$ y $h \in Hom_K(Y, E_K)$. Entonces $D_\ell(f)(hr) = (hr)f$ y $(D_\ell(f)(h))r = (hf)r$. Ahora, para cada $x \in X$, $((hr)f)(x) = (hr)(f(x)) = h(rf(x)) = h(f(rx)) = (hf)(rx) = ((hf)r)(x)$. Por lo tanto, $D_\ell(f)(hr) = (D_\ell(f)(h))r$.

De manera similar a lo anterior, definimos el siguiente funtor contravariante aditivo:

D_r : *mod-R* $\longrightarrow$ *R-mod.*

- En objetos: $D_r(X) = Hom_K(X, E_K)$ para cada $X \in Ob(mod\text{-}R)$, donde $Hom_K(X, E_K)$ es R-módulo izquierdo finitamente generado como en la Proposición 4.1.11.

- En morfismos: Si $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo en *mod*-R, entonces

$$\begin{aligned} D_r \colon Hom_K(Y, E_K) &\to Hom_K(X, E_K) \\ h &\mapsto hf. \end{aligned}$$

Simétricamente a lo realizado con $D_\ell(f)$ se puede mostrar que $D_r(f)$ es un morfismo en R-*mod*.

Los funtores D_ℓ y D_r nos dan una dualidad entre las categorías R-*mod* y *mod*-R (la cual aparecerá en la prueba del Teorema 4.3.2), tal como se muestra en la siguiente proposición:

Proposición 4.2.16. *El par de funtores contravariantes (D_ℓ, D_r) es una dualidad entre las categorías R-mod y mod-R.*

Demostración. Veamos que $1_{R\text{-}mod} \cong D_r D_\ell$. Observemos que $D_r D_\ell : R\text{-}mod \longrightarrow R\text{-}mod$ asigna lo siguiente:

- En objetos: $D_r D_\ell(X) = Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K)$.
- En morfismos: Si $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo en R-*mod*, entonces $D_r D_\ell(f)$ está definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} D_r D_\ell(f) \colon Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K) &\to Hom_K(Hom_K(Y, E_K), E_K) \\ g &\mapsto \bar{g} \end{aligned}$$

  donde

$$\begin{aligned} \bar{g} \colon Hom_K(Y, E_K) &\to E_K \\ h &\mapsto g(hf). \end{aligned}$$

Definimos la transformación natural $\eta : 1_{R\text{-}mod} \longrightarrow D_r D_\ell$ como $\eta(X) = \eta_{_X}$ para cada $X \in Ob(R\text{-}mod)$, donde

$$\begin{aligned} \eta_{_X} : X &\to Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K) \\ a &\mapsto \eta_{_X}(a) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \eta_{_X}(a) \colon Hom_K(X, E_K) &\to E_K \\ f &\mapsto f(a). \end{aligned}$$

Mostremos que, en efecto, $\eta_{_X}$ es morfismo en R-*mod*. Por (b) del Teorema 4.1.8 se tiene que $\eta_{_X}$ es isomorfismo de K-módulos, así que para ver que $\eta_{_X}$ es morfismo en R-*mod* resta demostrar que para cada $a \in X$ y cada $r \in R$ se cumple que $\eta_{_X}(ra) = r\eta_{_X}(a)$. Como X es un R-módulo izquierdo finitamente generado entonces, por la Proposición 4.1.10, $Hom_K(X, E_K)$ es un R-módulo derecho finitamente generado tal que si $r \in R$ y $f \in Hom_K(X, E_K)$ entonces el morfismo de K-módulos $fr : X \longrightarrow E_K$ está definido por $(fr)(a) = f(ra)$ para cada $a \in X$. Por la Proposición 4.1.11, $Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K)$ es un R-módulo izquierdo finitamente generado tal que si $\alpha \in Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K)$ y $r \in R$ entonces $r\alpha : Hom_X(X, E_K) \longrightarrow E_K$ está definido por $(r\alpha)(f) = \alpha(fr)$ para cada $f \in Hom_K(X, E_K)$. Ahora si $a \in X$ y $r \in R$ entonces $\eta_{_X}(ra), r\eta_{_X}(a) \in Hom_K(Hom_K(X, E_k), E_K)$ y para cada $f \in Hom_K(X, E_K)$ se cumple que $\eta_{_X}(ra)(f) = f(ra) = (fr)(a) = \eta_{_X}(a)(fr) = (r\eta_{_X}(a))(f)$; se sigue que $\eta_{_X}(ra) = r\eta_{_X}(a)$ y en consecuencia $\eta_{_X}$ es morfismo en R-*mod*. Como $\eta_{_X}$ es isomorfismo de K-módulos entonces es biyectivo, lo cual implica que η_X es isomorfismo de R-módulos. Finalmente, mostremos la naturalidad de η comprobando que para cada morfismo $f : X \longrightarrow Y$ en R-*mod* se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K) \arrow[d, "D_r D_\ell(f)"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & Hom_K(Hom_K(Y, E_K), E_K). \end{tikzcd} \tag{4.32}$$

Sea $a \in X$. Entonces el morfismo $\eta_X(a) : Hom_K(X, E_K) \longrightarrow E_K$ en K-mod está definido por $\eta_X(a)(g) = g(a)$ para cada $g \in Hom_K(X, E_K)$. Luego, $D_r D_\ell(f)(\eta_X(a)) : Hom_K(Y, E_K) \longrightarrow E_K$ está definido por $(D_r D_\ell(f)(\eta_X(a)))(h) = \eta_X(a)(hf) = (hf)(a)$ para cada $h \in Hom_K(Y, E_K)$. Por otro lado, $f(a) \in Y$, así que $\eta_Y(f(a)) : Hom_K(Y, E_K) \longrightarrow E_K$ está definido por $\eta_Y(f(a))(h) = h(f(a))$. Por lo tanto, para cada $a \in X$ se tiene que $D_r D_\ell(f)(\eta_X(a)) = \eta_Y(f(a))$, es decir, el diagrama en (4.23) conmuta. Por lo tanto, η es un isomorfismo natural y se concluye que $1_{R\text{-}mod} \cong D_r D_\ell$.

Ahora, definimos la transformación natural $\epsilon : 1_{mod\text{-}R} \longrightarrow D_\ell D_r$ como $\epsilon(X) = \epsilon_X$ para cada $X \in mod\text{-}R$, donde

$$\begin{aligned} \epsilon_X : X &\to Hom_K(Hom_K(X, E_K), E_K) \\ a &\mapsto \epsilon_X(a) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \epsilon_X(a) \colon Hom_K(X, E_K) &\to E_K \\ f &\mapsto f(a). \end{aligned}$$

Similarmente a lo que se hizo con η, con un argumento simétrico se tiene que ϵ es un isomorfismo natural, lo cual implica que $1_{mod\text{-}R} \cong D_\ell D_r$. Por lo tanto, el par de funtores contravariantes (D_ℓ, D_r) es una dualidad entre las categorías R-*mod* y *mod*-R. ■

Resumiendo, el Lema 4.2.10 y Corolario 4.2.11 son los resultados más importantes obtenidos en la sección, donde su aplicación a la dualidad de la Proposición 4.2.16 es una de las claves dentro de la prueba del Teorema 4.3.2.

4.3. Conexión entre la Propiedad (P) y las K-Álgebras de Artin

Para está sección, se trabajará con la notación de 4.2.15.

Lema 4.3.1. *Sea R una K-álgebra de Artin y supongamos que R no es cuasi-Frobenius. Si R satisface (P) entonces $zoc({}_RR)$ es simple o $zoc(R_R)$ es simple.*

Demostración. Sea R una K-álgebra de Artin tal que no es un anillo cuasi-Frobenius pero satisface (P). Supongamos que $zoc({}_RR)$ no es simple y mostremos que $zoc(R_R)$ es simple. Por el Teorema 3.3.1, R es local y existen S_1 y S_2 ideales izquierdos simples tales que $zoc({}_RR) = S_1 \oplus S_2$ y R/S_1 es un R-módulo izquierdo inyectivo. Si $R/S_1 = (A/S_1) \oplus (B/S_1)$ para algunos $A, B \leq_R R$, entonces $A + B = R$ y por ende $1 = a + b$ para algún $a \in A$ y algún $b \in B$, lo cual implica que a ó b es unidad de R (R es local). Así $A = R$ ó $B = R$, de ahí que R/S_1 es un R-módulo izquierdo inescindible. Dado que R/S_1 es inyectivo e inescindible no cero, entonces R/S_1 es cápsula inyectiva de su submódulo $(S_1 \oplus S_2)/S_1$ (cf. [10, Teorema 6.6.2]), donde $(S_1 \oplus S_2)/S_1 \cong S_2$. Ahora, supongamos que $I \neq 0$ es un R-módulo izquierdo inyectivo inescindible en R-mod. Por la Observación 4.2.14 se tiene que I es también inyectivo en R-Mod, así que como ${}_RR$ es artiniano, I es la cápsula inyectiva de algún R-módulo izquierdo simple S (cf. [10, Corolario 6.6.3]). Como R es local, entonces todos los R-módulos izquierdos simples son isomorfos entre sí (ya que todos los R-módulos izquierdos simples son isomorfos a ${}_R(R/J(R))$), de ahí que $S \cong (S_1 \oplus S_2)/S_1$ y en consecuencia $I \cong R/S_1$. Por lo tanto, R/S_1 es el único inyectivo inescindible no cero (salvo isomorfismo) en R-*mod*. Ahora, ${}_RR$ es proyectivo y, por ser local, es inescindible. Sea P proyectivo e inescindible no cero en R-*mod*. Dado que R es local y P es proyectivo, entonces P es libre (cf. [1, Corolario 26.7]), lo cual implica que $P \cong R^n$ para algún entero positivo n (pues P es libre finitamente generado). Como P es inescindible se sigue que $n = 1$, es decir, $P \cong {}_RR$. Por lo tanto, ${}_RR$ es el único proyectivo inescindible no cero (salvo isomorfismo) en R-*mod*. Obsérvese que $D_\ell({}_RR) \neq 0$ pues, en caso contrario, si $D_\ell({}_RR) = 0$ entonces $D_rD_\ell({}_RR) = D_r(0)$, donde $D_r(0) = 0$ por ser un funtor aditivo y $D_rD_\ell({}_RR) \cong {}_RR$ ya que $D_rD_\ell \cong 1_{R\text{-}mod}$, es decir, se tendría que ${}_RR \cong 0$, lo cual no es posible. En general, similarmente se puede mostrar que $D_\ell(M) = 0$ si y solo si $M = 0$ para cada $M \in Ob(R\text{-}mod)$; además $D_r(N) = 0$ si y solo si $N = 0$, para cada $N \in Ob(mod\text{-}R)$. Por la Proposición 4.2.13, la dualidad (D_ℓ, D_r) entre R-mod y mod-R satisface las hipótesis del Lema 4.2.10 y por ende el Corolario 4.2.11 implica que $D_\ell({}_RR)$ es inescindible y, por la Proposición 4.2.12, es inyectivo en mod-R. Nótese que $D_\ell({}_RR)$ es el único (salvo isomorfismo) inyectivo inescindible no cero en *mod*-R ya que si H es inyectivo inescindible no cero en *mod*-R entonces, por el Corolario 4.2.11 y por la Proposición 4.1.12, $D_r(H)$ es proyectivo inescindible no cero en R-mod, lo cual implica que $D_r(H) \cong {}_RR$ y por ende

$$D_l({}_RR) \cong D_\ell D_r(H) \cong H,$$

donde $D_\ell D_r(H) \cong H$ se debe a que $D_\ell D_r \cong 1_{mod\text{-}R}$. Dado que $0 \neq D_\ell({}_RR)$ es inyectivo inescindible en mod-R entonces, por la Observación 4.2.14, es inyectivo inescindible en Mod-R. Dado que R_R es artiniano, entonces $D_\ell({}_RR)$ es la cápsula inyectiva de algún R-módulo derecho simple (cf. [10, Corolario 6.6.3]) y como todos los R-módulos derechos simples son isomorfos a $(R/J(R))_R$ (ya que R es local), entonces $D_\ell({}_RR) \cong E((R/J(R))_R)$. Por otro lado, por el Corolario 4.2.11 y por la Proposición 4.2.12, $D_\ell(R/S_1)$ es proyectivo inescindible no cero en *mod*-R y es único (salvo isomorfismo) con esta propiedad en *mod*-R, pues si L es proyectivo inescindible no cero en *mod*-R entonces, nuevamente por el Corolario 4.2.11 y por la Proposición 4.2.12, $D_r(L)$ es inyectivo inescindible no cero en R-*mod* y por ende $D_r(L) \cong R/S_1$, así que

$$D_\ell(R/S_1) \cong D_\ell D_r(L) \cong L,$$

donde el segundo isomorfismo se sigue de que $D_\ell D_r \cong 1_{mod\text{-}R}$. Entonces, como R_R es proyectivo inescindible en mod-R, se tiene que $D_\ell(R/S_1) \cong R_R$. Si $\nu : {}_RR \longrightarrow R/S_1$ es el epimorfismo natural, entonces, por la Proposición 4.2.5, $D_\ell(\nu) : D_\ell(R/S_1) \longrightarrow D_\ell({}_RR)$ es un monomorfismo en mod-R y es inyectivo por la Proposición 4.2.13. De $D_\ell(R/S_1) \cong R_R$, $D_\ell({}_RR) \cong E((R/J(R))_R)$ y del morfismo inyectivo $D_\ell(\nu) : D_\ell(R/S_1) \longrightarrow D_\ell({}_RR)$ se tiene que existe un morfismo inyectivo de R-módulos derechos $\alpha : R_R \longrightarrow E((R/J(R))_R)$. Además, $zoc(E((R/J(R))_R)) = zoc((R/J(R))_R) = (R/J(R))_R$, donde $(R/J(R))_R$ es simple por ser R local. Dado que $\alpha(zoc(R_R)) \leq zoc(E((R/J(R))_R)) = (R/J(R))_R$ se sigue que $\alpha(zoc(R_R)) = 0$ o bien $\alpha(zoc(R_R)) = (R/J(R))_R$. Ya que α es morfismo inyectivo, $\alpha(zoc(R_R)) = 0$ implica que $zoc(R_R) = 0$, lo cual no es posible (ya que, por ser artiniano, R tiene un ideal derecho simple). Entonces debe ocurrir que $zoc(R_R) = (R/J(R))_R$, es decir, $zoc(R_R)$ es simple. ■

Finalmente, se tiene el resultado principal de todo el Capítulo 4:

Teorema 4.3.2. *Una K-álgebra de Artin R satisface (P) si y solo si R es cuasi-Frobenius.*

Demostración. $[\Leftarrow]$ Si R es cuasi-Frobenius entonces, en particular, R es autoinyectivo izquierdo y en consecuencia satisface (P).

$[\Rightarrow]$ (Por contradicción.) Sea R, junto con el morfismo de anillos unitarios $\varphi : K \longrightarrow R$, una K-álgebra de Artin que satisface (P) pero que no es cuasi-Frobenius. Como R es artiniano, entonces R no es autoinyectivo izquierdo ni autoinyectivo derecho (en caso contrario R sería cuasi-Frobenius). Por el Lema 4.3.1, $zoc(R_R)$ es simple ó $zoc({}_RR)$ es simple. Supongamos que $zoc(R_R)$ es un R-módulo derecho simple. Como R es artiniano, todos los ideales derechos no cero de R contienen un ideal simple, de ahí que $zoc(R_R)$ está contenido en todos los ideales derechos no cero de R y en consecuencia $zoc(R_R) \leq_{es} R_R$. Entonces $E(zoc(R_R)) = E(R_R)$, lo cual implica que $E(R_R)$ es inescindible (cf. [10, Corolario 6.6.3]). Por el Teorema 3.3.1 se tiene que R es local, entonces ${}_RR$ es proyectivo inescindible y, por el Corolario 4.2.11 y por la Proposición 4.2.12, $D_\ell({}_RR)$ es inyectivo inescindible no cero en mod-R y en consecuencia, por la Observación 4.2.14, también es inyectivo inescindible en Mod-R. Como R es local, todos los R-módulos derechos simples son isomorfos entre sí (ya que todo R-módulo derecho simple es isomorfo a $(R/J(R))_R$) y, como R es artiniano, cada R-módulo derecho inyectivo inescindible no cero es cápsula inyectiva de algún R-módulo derecho simple (cf. [10, Corolario 6.6.3]), así que todos los R-módulos derechos inyectivos inescindibles no cero son isomorfos entre sí. Así, $D_\ell({}_RR) \cong E({}_RR)$ ya que ambos R-módulos derechos son no cero inyectivos e inescindibles. Entonces existe un monomorfismo esencial de R-módulos derechos $f : R \longrightarrow D_\ell({}_RR)$. También se tiene que f es monomorfismo de K-módulos, pues si $k \in K$ y $a \in R$ entonces se tiene lo siguiente:

$$f(ka) = f(\varphi(k)a) = \varphi(k)f(a) = kf(a).$$

Como K-módulos, por (a) del Teorema 4.1.8, $Le(R) = Le(D_\ell({}_RR))$ lo cual implica que f es isomorfismo de K-módulos y por ende también isomorfismo de R-módulos derechos. Entonces $R_R \cong D_\ell({}_RR) \cong E({}_RR)$, pero esto contradice que R no es autoinyectivo derecho. Simétricamente se llega a una contradicción si $zoc({}_RR)$ es simple. ■

Ejemplo 4.3.3. Sea K un campo. Consideremos a la K-álgebra de Artin $R := K[x,y]/\langle x^2, y^2\rangle$, donde $\langle x^2, y^2\rangle$ es el ideal de $K[x,y]$ generado por $\{x^2, y^2\}$. Entonces una base para ${}_KR$ es $\beta = \{\bar{1}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{x}\bar{y}\}$ y en consecuencia $dim_K R = 4$. Sea $H := K + K\bar{x} + K\bar{y}$ el K-subespacio vectorial de dimensión 3 (equivalentemente de codimensión 1) de ${}_KR$. Sea $\alpha = k_0 + k_1\bar{x} + k_2\bar{y} \in H$ tal que $R\alpha \subseteq H$. Entonces $\alpha\bar{x}\bar{y} \in H$, donde $\alpha\bar{x}\bar{y} = k_0\bar{x}\bar{y} + k_1\bar{x^2}\bar{y} + k_2\bar{x}\bar{y^2} = k_0\bar{x}\bar{y}$, lo cual implica que $k_0 = 0$ (pues β es K-linealmente independiente por ser base de ${}_KR$). Entonces $\alpha = k_1\bar{x} + k_2\bar{y}$. Se sigue que $\alpha\bar{x} \in H$, donde $\alpha\bar{x} = k_1\bar{x^2} + k_2\bar{x}\bar{y} = k_2\bar{x}\bar{y}$, lo cual implica que $k_2 = 0$. Similarmente, $\alpha\bar{y} \in H$ y esto implica que $k_1 = 0$. Por lo tanto, $\alpha = 0$ y H no contiene ideales no cero de R. Por el Teorema 3.15 de [13] se sigue que R es una K-álgebra de Frobenius (ver [10, Definición 13.5.4]) y, en particular, R es cuasi-Frobenius (pues R es un anillo de Frobenius por ser K-álgebra de Frobenius [10, Teorema 13.5.7]). Se sigue que R es autoinyectivo y por ende satisface (P).

Ahora consideremos a la K-álgebra de Artin $\bar{R} = K[x,y]/\langle x^2, xy, y^2\rangle$ (nótese que $dim_K\bar{R} = 3$, pues $\bar{\beta} = \{\bar{1}, \bar{x}, \bar{y}\}$ es una base). Para los ideales $A = K\bar{x}$ y $B = K\bar{y}$ de $\bar{R}$, se tiene el $\bar{R}$-isomorfismo $f : A \longrightarrow B$ dado por $f(\bar{x}) = \bar{y}$. Consideremos el $\bar{R}$-morfismo $\iota_1 f : \bar{R} \longrightarrow \bar{R}$, donde $\iota_1 : B \hookrightarrow \bar{R}$ es el morfismo inclusión. Supongamos que existe $\varphi : \bar{R} \longrightarrow \bar{R}$ un $\bar{R}$-morfismo tal que el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & \bar{R} \arrow[ddl, "\varphi"] \\ B \arrow[d, hook, "\iota_1"'] & \\ \bar{R}. & \end{tikzcd}$$

Entonces $\bar{y} = f(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}) = \bar{x}\varphi(1) \in K\bar{x}$ (pues $K\bar{x}$ es un ideal de $\bar{R}$), lo cual no es posible pues $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ es K-linealmente independiente. Por lo tanto, no puede existir tal φ, es decir, por el criterio de Baer, $\bar{R}$ no es autoinyectivo y se concluye que $\bar{R}$ no es cuasi-Frobenius. Por el Teorema 4.3.2, $\bar{R}$ no satisface (P). Además, nótese que si consideramos al ideal $I = \langle x^2, xy, y^2\rangle / \langle x^2, y^2\rangle$ de R, entonces $\bar{R} \cong R/I$ y se sigue que un cociente de un anillo cuasi-Frobenius no necesariamente vuelve a ser cuasi-Frobenius.

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo de este trabajo se estudiaron algunas consecuencias de que un anillo R satisfaga la propiedad de que todo R-módulo izquierdo cíclico propio es imagen homomorfa de algún R-módulo izquierdo inyectivo, lo cual abreviamos diciendo que R satisface la propiedad (P). Como caso particular de anillos que satisfacen la propiedad (P) se mencionó brevemente a los anillos-PCI al final del Capítulo 2, los cuales inspiran a realizar preguntas sobre la simetría de la propiedad (P) y bajo qué condiciones un anillo que satisface (P) es un anillo-PCI izquierdo, siendo la búsqueda de las respectivas respuestas un posible trabajo futuro. En el Capítulo 3 se estudió el importante casó de la caracterización de un anillo semiprimo que satisface (P) y su relación con los anillos $\aleph$-QF3, además de analizar la estructura de los anillos artinianos que satisfacen (P). Finalmente, en el Capítulo 4 se estableció que una K-álgebra de Artin satisface (P) si y solo si la K-álgebra en cuestión es un anillo cuasi-Frobenius, donde para posibilitar la demostración de tal resultado, en la Sección 4.2, se desglosaron resultados importantes sobre dualidades entre ciertas categorías de módulos. Una vez más se logra visualizar lo interesante que resulta el estudio de la teoría de anillos y módulos, donde un 'simple' concepto puede involucrar a muchos otros y resultados sin una conexión aparente.

Bibliografía

[1] Anderson, F., Fuller, K. (1992). *Rings and Categories of Modules (2nd ed)*. New York : Springer.

[2] Auslander, M., Reiten, I., Smalø, S. O. (1995). *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

[3] Aydoğdu, P., Lopez-Permouth, S. (2011). *An alternative perspective on injectivity of modules*. J. Algebra 338(1):207–219. DOI:10.1016/j.jalgebra.2011.04.021.

[4] Baccella, G. (1985). *Semiprime ℵ-QF3 rings*. Pacific J. Math. 120(2):269–278. DOI:10.2140/pjm.1985.120. 269.

[5] Boyle, A. K., Goodearl, K. R. (1975). *Rings over which certain modules are injective*. Pacific J. Math. 58(1): 43–53. DOI: 10.2140/pjm.1975.58.43.

[6] Faith, C. (1973). *When are proper cyclics injective?* Pacific J. Math. 45(1):97–112. DOI: 10.2140/pjm.1973. 45.97.

[7] Goodearl, K. (1976). *Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules*. New York and Basel: Marcel Dekker, Inc.

[8] Goel, S., Jain, S., Singh, S. (1975). *Rings whose cyclic modules are injective or projective*. Proc. AMS. 53(1):16–18. DOI: 10.1090/S0002-9939-1975-0382349-X.

[9] Herrlich, H., Strecker, G. (2007). *Cateogory Theory (3rd ed.)*. Bremmen; Manhattan: Herlderman Verlag.

[10] Kasch, F. (1982). *Modules and Rings*. New York: Academic Press.

[11] Kawada, Y. (1979). *On dominant modules and dominant rings*. J. Algebra 56(2):409–435. DOI:10.1016/0021-8693(79)90347-8.

[12] Lam, T. (1991). *A First Course in Noncommutative Rings* New York: Springer-Verlag.

[13] Lam, T. (1999). *Lectures on Modules and Rings*. New York: Springer.

[14] Meriç, Tuğçe. (2021). *When proper cyclics are homomorphic image of injectives*. Communications in Algebra, 49:1, 151-161, DOI: 10.1080/00927872.2020.1797067

[15] Mohamed, S. H., Muller, B. J. (1990). *Continuous and Discrete Modules*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

[16] Rotman, J. (2009). *An Introduction to Homological Algebra*. New York: Springer.