

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
PUEBLA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



CLASIFICACIÓN DE LAS 2-VARIEDADES
CERRADAS

Tesis para obtener el título de:
Maestra en Ciencias Matemáticas

PRESENTA

MARÍA DEL ROCÍO MACÍAS PRADO

Director de tesis:
Agustín Contreras Carreto

Julio de 2016

María del Rocío Macías Prado: *Clasificación de las 2-variedades cerradas*, Maestra en Ciencias Matemáticas, © Julio de 2016

DIRECTOR DE TESIS:
Agustín Contreras Carreto

LUGAR:
Puebla, México

FECHA DE PRESENTACIÓN:
Julio de 2016

INTRODUCCIÓN

Las superficies son unos de los espacios topológicos más simples que existen. La belleza de estos entes matemáticos no sólo reside en su simpleza. Nuestras nociones naturales sobre el espacio se adaptan de forma inmediata al estudio de las superficies, en especial el de las compactas.

Probablemente, la propiedad más agradable de las superficies compactas es que se pueden clasificar. Esto significa que podemos saber exactamente cuántos tipos de superficies compactas *diferentes* hay. Éste es precisamente el tema de esta tesis.

El estudio de las superficies compactas se remonta a mediados del siglo XIX, con los trabajos de Möbius [10] y Jordan [8], quienes ofrecieron versiones del teorema que antecieron a la afirmación que conocemos actualmente. Entre las versiones y pruebas que se dieron posteriormente destacan las de von Dick [4] y Dehn y Heegaard [3]. Tuvieron que transcurrir alrededor de 60 años para que Brahana [1] presentara finalmente una prueba rigurosa de este resultado.

Aunque el teorema de clasificación para superficies compactas no es un tema nuevo, ha motivado la aplicación de muchas herramientas modernas en distintas demostraciones del mismo. Este es el espíritu que adoptamos para nuestra presentación del resultado, guiados por *Simplicial Structures in Topology* de D.L. Ferrario y R.A. Piccinini, que estudia a los complejos simpliciales desde un punto de vista categórico. Otras aportaciones bibliográficas a nuestro trabajo fueron *Introduction to Topological Manifolds* de J.M.L. Lee e *Introduction to Knot Theory* de R.H. Crowell y R.H. Fox.

El objetivo general del este trabajo es presentar una demostración del *Teorema de clasificación para superficies compactas*, el cual afirma que cualquier superficie compacta es, esencialmente, una esfera, la suma conexa de planos proyectivos reales o la suma conexa de toros.

Detrás de la demostración de este resultado que aquí presentamos se encuentran las siguientes ideas. Cualquier superficie se puede ver como un *complejo simplicial euclidiano*, es decir, como

un conjunto de triángulos «pegados» unos con otros sobre sus lados. La *frontera* (esto es, el contorno) de un complejo simplicial euclidiano es un polígono, cuyos lados pueden etiquetarse con letras. Así, tal frontera puede identificarse con un conjunto de *palabras* formadas por la yuxtaposición de las letras que denotan a los lados del polígono. De esta manera, identificamos a cualquier superficie compacta con una palabra. La manipulación algebraica de las palabras, mediante transformaciones elementales, nos permite entonces determinar de cuál de las tres superficies mencionadas en el párrafo anterior se trata.

Desde luego, para poder presentar esta demostración es necesario dar a conocer: qué es un complejo simplicial, cómo identificaremos a las superficies con complejos simpliciales euclidianos, qué entenderemos por palabra y cómo identificaremos a las fronteras de los complejos simpliciales con palabras. Entender los conceptos anteriores y aplicarlos en la demostración del Teorema de clasificación son los objetivos particulares de este trabajo.

Para lograr lo descrito arriba, se ha organizado la tesis como sigue. El Capítulo 1 está dedicado a conceptos algebraicos. Por un lado, estudiamos el grupo libre de las palabras (cuya importancia ya se ha mencionado arriba). Por el otro, se presentan las acciones de grupos sobre espacios topológicos, lo cual nos servirá de herramienta para visualizar a las tres superficies compactas como espacios cociente de una acción (y, entre otras cosas, nos permitirá ver de inmediato que éstas son variedades topológicas).

El Capítulo 2 habla de categorías, homotopía y coproducto fibrado. La teoría de categorías servirá de marco general para el estudio de los complejos simpliciales, mientras que el concepto de coproducto fibrado será la base para la definición de suma conexa en este trabajo.

La formalización del concepto de superficie se logra a través de la noción de variedades topológicas, a las cuales dedicamos el Capítulo 3.

En el Capítulo 4 construimos los complejos simpliciales euclidianos, los complejos simpliciales abstractos, el funtor *realización geométrica* y el funtor *homología*. También presentamos la triangulación en bloques y la característica de Euler-Poincaré. Todos estos temas conforman el lenguaje natural que se requiere para traducir superficies a palabras.

Finalmente, en el Capítulo 5 presentamos las variedades triangulables. Al respecto, enunciamos un importantísimo teorema demostrado por T. Radó, que afirma que toda superficie puede ser triangulada. A continuación, exponemos la receta para identificar superficies con representaciones poligonales, lo cual nos lleva a la culminación de este trabajo con la prueba del objeto central del mismo: el Teorema de clasificación.

ÍNDICE GENERAL

1	TOPOLOGÍA ALGEBRAICA	1
1.1	Categorías	1
1.2	Diagrama de coproductos fibrados	4
2	ALGO SOBRE TEORÍA DE GRUPOS.	9
2.1	El grupo libre $F(S)$	9
2.2	Acciones de grupo	13
3	VARIEDADES	15
4	LA CATEGORÍA DE COMPLEJOS SIMPLICIALES	23
4.1	Complejos CW	23
4.2	Complejos simpliciales	27
4.3	Funciones simpliciales	30
4.4	Complejos simpliciales abstractos	31
4.4.1	Funtor realización geométrica	34
4.4.2	Complejos simpliciales e inmersiones	44
4.4.3	El funtor homología	45
4.4.4	La característica de Euler-Poincaré	53
4.5	Homología de bloques	55
5	CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES	59
5.1	Varietades triangulables	59
5.2	Superficies cerradas	60
5.3	Presentaciones poligonales de superficies	66
5.4	Teorema de clasificación	75
	BIBLIOGRAFÍA	85
	Índice alfabético	87

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1	Disco unitario cerrado.	17
Figura 2	S^2	18
Figura 3	Espacio proyectivo real 2-dimensional. . .	18
Figura 4	(a) 1-simplejo estándar, (b) 2-simplejo estándar.	29
Figura 5	(a) Complejo simplicial 2-dimensional de \mathbb{R}^2 , (b) No es complejo simplicial.	29
Figura 6	Hexágono P_6 con las seis raíces de la unidad como vértices.	30
Figura 7	Icosaedro.	30
Figura 8	Triangulación de S^1 , usando un triángulo.	43
Figura 9	Triangulación de S^1 , usando un polígono regular.	44
Figura 10	Calculando la homología del toro.	51
Figura 11	Triangulación del toro.	55
Figura 12	Triangulación del plano proyectivo real.	58
Figura 13	Triangulación de la esfera.	59
Figura 14	Suma Conexa de 2 toros.	62
Figura 15	Suma conexa con un toro y adjuntar un asa.	65
Figura 16	Toro con 3 agujeros.	66
Figura 17	Esfera con 3 asas.	66
Figura 18	Presentación de S^2	67
Figura 19	Presentación de $\mathbb{R}P^2$	67
Figura 20	Presentación del toro.	69
Figura 21	Presentación de la botella de Klein.	69
Figura 22	Reflejar.	70
Figura 23	Rotar.	70
Figura 24	Cortar-Pegar.	71
Figura 25	Doblar-Desdoblar.	71

TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

Como se mencionó anteriormente, el objetivo principal de este trabajo es dar una demostración «formal» del Teorema de Clasificación para Superficies Compactas. Unas de las herramientas más importantes para su concretación son las categorías y el diagrama de coproductos fibrados. Estos nos sirven para dar una definición muy bonita de las sumas conexas, que son fundamentales para el propósito de la tesis.

1.1 CATEGORÍAS

Definición 1.1. Una categoría \mathcal{C} es una quinteta

$$\mathcal{C} := (\mathcal{O}, \mathcal{M}, \text{dom}, \text{cod}, \circ),$$

donde \mathcal{O} es una clase cuyos elementos se llaman objetos de \mathcal{C} , \mathcal{M} es una clase cuyos elementos se llaman morfismos de \mathcal{C} , dom y cod son funciones de \mathcal{M} en \mathcal{O} y, si $D = \{(f, g) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} : \text{dom } g = \text{cod } f\}$, entonces $\circ : D \rightarrow \mathcal{M}$ es una función. Si $(f, g) \in D$, a $\circ(f, g)$ se le denotará por $g \circ f$. Además se cumplen los siguientes axiomas.

C 1: Para toda pareja $(X, Y) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}$, la clase $\text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) := \{f \in \mathcal{M} : \text{dom}(f) = X \text{ y } \text{cod}(f) = Y\}$ es un conjunto.

C 2: Para cada $X \in \mathcal{O}$, existe un morfismo e_X tal que

$$\text{dom } e_X = X = \text{cod } e_X$$

y si $(f, e_X) \in D$, $e_X \circ f = f$ y si $(e_X, f) \in D$, $f \circ e_X = f$.

C 3: Si $(f, g), (g, h) \in D$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

C 4: Si $(f, g) \in D$, $\text{dom}(g \circ f) = \text{dom}(f)$ y $\text{cod}(g \circ f) = \text{cod}(g)$.

C 5: Si $(X, Y) \neq (X', Y')$, entonces

$$\text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cap \text{hom}_{\mathcal{C}}(X', Y') = \emptyset$$

Observaciones 1.2. 1. Si $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M}, \text{dom}, \text{cod}, \circ)$ es una categoría y $X \in \mathcal{O}$, el morfismo e_X del axioma **C 2**, es único y suele denotarse por id_X o por 1_X .

$$2. \mathcal{M} = \bigcup_{(X,Y) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}} \text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

Ejemplos 1.3. 1. $\text{Con} := (\mathcal{O}, \mathcal{M}, \text{dom}, \text{cod}, \circ)$ es una categoría, donde \mathcal{O} es la clase de todos los conjuntos, \mathcal{M} es la clase de todas las funciones entre conjuntos, dom y cod son las funciones usuales que asignan a cada función su dominio y codominio y \circ es la composición usual de funciones.

2. Con_* es la categoría cuya clase de objetos son los conjuntos punteados, es decir, parejas (X, x_0) , donde X es un conjunto y $x_0 \in X$. Si (X, x_0) y (Y, y_0) son objetos de Con_* , entonces un elemento de $\text{hom}_{\text{Con}_*}((X, x_0), (Y, y_0))$ es una función $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(x_0) = y_0$, dom, cod y \circ son como en Con .

3. Top es la categoría cuyos objetos son los espacios topológicos y, si (X, τ) , (Y, ω) son objetos de Top , entonces $\text{hom}_{\text{Top}}((X, \tau), (Y, \omega))$ es el conjunto de funciones continuas de (X, τ) a (Y, ω) , dom, cod y \circ son como en Con .

4. Top_* son los espacios topológicos, punteados, es decir, parejas $((X, \tau), x_0)$, donde (X, τ) es un espacio topológico y $x_0 \in X$ y si $((X, \tau), x_0)$ y $((Y, \omega), y_0)$ son objetos de Top_* , entonces un elemento de $\text{hom}_{\text{Top}_*}(((X, \tau), x_0), ((Y, \omega), y_0))$ es una función continua $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \omega)$ tal que $f(x_0) = y_0$, dom, cod y \circ son como en Top .

Definición 1.4. Si $\mathcal{C}' = (\mathcal{O}', \mathcal{M}', \text{dom}', \text{cod}', \circ)$ y $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M}, \text{dom}, \text{cod}, \circ)$ son categorías, diremos que \mathcal{C}' es subcategoría de \mathcal{C} si

a. $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$

b. $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$

c. $\text{dom}' = \text{dom}|_{\mathcal{M}'}, \text{cod}' = \text{cod}|_{\mathcal{M}'}$

d. Sean $D' = \{(f, g) \in \mathcal{M}' \times \mathcal{M}' : \text{cod}' f = \text{dom}' g\}$ y $D = \{(f, g) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} : \text{cod} f = \text{dom} g\}$. Si $(f, g) \in D' \subset D$, $g \circ f \in \mathcal{M}'$ y $\circ' = \circ|_{D'}$

Definición 1.5. Una subcategoría \mathcal{C}' de una categoría \mathcal{C} es plena si para toda pareja (A, B) de objetos de \mathcal{C}' , se tiene que $\text{hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

Ejemplos 1.6. 1. La categoría Top_2 cuyos objetos son los espacios topológicos Hausdorff y cuyos morfismos son to-

das las funciones continuas entre ellos, es una subcategoría plena de Top .

2. Sea C^r la categoría cuyos objetos son las C^r -variedades diferenciales y cuyos morfismos son las funciones C^r -derivables entre ellas. C^r es una subcategoría de Top_2 pero no es plena. Existen funciones continuas entre C^r -variedades que no son C^r -derivables. Por lo tanto,

$$\text{hom}_{C^r}((M, \mathcal{A}), (N, \mathcal{B})) \subsetneq \text{hom}_{\text{Top}_2}((M, \mathcal{A}), (N, \mathcal{B}))$$

Definición 1.7. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías. Un funtor (covariante) de \mathcal{C} a \mathcal{D} es una terna $(\mathcal{C}, F, \mathcal{D})$, donde F es una función de $M_{\mathcal{C}}$ a los morfismos de $M_{\mathcal{D}}$ ($F : M_{\mathcal{C}} \rightarrow M_{\mathcal{D}}$) tal que

1. Para todo $A \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ se tiene que $F(1_A)$ es identidad en \mathcal{D} .
2. Para cualesquiera $f, g \in M_{\mathcal{C}}$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

En general, en vez de hablar del funtor $(\mathcal{C}, F, \mathcal{D})$ se escribe $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

Definición 1.8. Sean $\mathcal{T} := \{(X_\lambda, \tau_\lambda) | \lambda \in \Lambda\}$ una familia de espacio topológicos X un conjunto y $\mathcal{F} := \{f_\lambda : X_\lambda \rightarrow X | \lambda \in \Lambda\}$ una familia de funciones con codominio común X (un pozo).

1. La topología final de X respecto a la pareja $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ es la topología $\tau := \{U \subseteq X | \forall \lambda \in \Lambda f_\lambda^{-1}(U) \in \tau_\lambda\}$,
2. Si τ es la topología final de X respecto a $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$, entonces se dice que el pozo $\mathcal{F}' := \{f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (X, \tau) | \lambda \in \Lambda\}$ es un pozo final.

Observación 1.9. Si \mathcal{F}' es como en inciso (b), entonces para cualquier $\lambda \in \Lambda$ $f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (X, \tau)$.

Ejemplos 1.10. 1. Si $(X, \tau) \in \text{Top}$ y \sim es una relación de equivalencia en X , al conjunto de clases de equivalencia de elementos de X los denotaremos por X/\sim . A la función $p : X \rightarrow X/\sim$ que le asocia a cada $x \in X$, su clase de equivalencia $[x]_\sim$, se le llama la función cociente. Y, si τ/\sim es la topología final de X/\sim respecto a $(\{X, \tau\}, \{p : X \rightarrow X/\sim\})$ entonces al espacio $(X/\sim, \tau/\sim)$ se le llama el espacio cociente de X bajo la relación \sim .

2. Si (X, τ) y (Y, σ) son espacios topológicos, entonces, si $(X', \tau') = (X, \tau) \times \{0\}$ y $(Y', \sigma') = (Y, \sigma) \times \{1\}$, entonces siguientes funciones son homeomorfismos:

$$i : (X, \tau) \rightarrow (X', \tau') \text{ tal que } i(x) = (x, 0)$$

y

$$j : (y, \sigma) \rightarrow (y', \sigma') \text{ tal que } j(y) = (y, 1).$$

Si denotemos por $X \sqcup Y$ a la unión $X' \cup Y'$, entonces la suma topológica (libre) de X, Y es el espacio $(X \sqcup Y, \eta)$, donde η es la topología final de $X \sqcup Y$ respecto a la pareja $(\{(X, \tau), (Y, \sigma)\}, \{X \xrightarrow{i} X' \hookrightarrow X \sqcup Y, Y \xrightarrow{j} Y' \hookrightarrow X \sqcup Y\})$.

1.2 DIAGRAMA DE COPRODUCTOS FIBRADOS

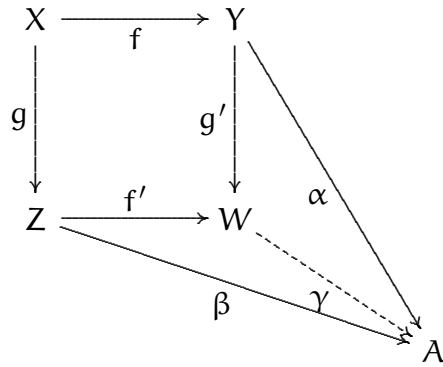
Sea \mathcal{C} una categoría. Un cuadrado conmutativo en \mathcal{C} ,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ Z & \xrightarrow{f'} & W \end{array}$$

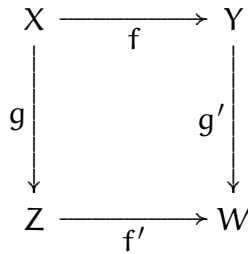
es cocartesiano (diagrama de *push-out*, coproducto fibrado o suma fibrada) si se cumple la **Propiedad universal del coproducto fibrado** : para cualesquiera \mathcal{C} -morfismos $\alpha : Y \rightarrow A$ y $\beta : Z \rightarrow A$ tales que el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \downarrow \alpha \\ Z & \xrightarrow{\beta} & A \end{array}$$

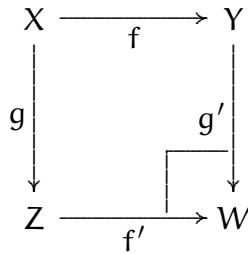
existe un único \mathcal{C} morfismo, $\gamma : W \rightarrow A$ que hace conmutativo el nuevo diagrama.



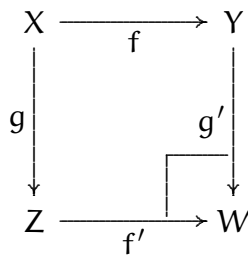
La proposición «el cuadrado conmutativo en \mathcal{C}



es cocartesiano», se denotará por



Si tenemos en \mathcal{C}



se dice que el \mathcal{C} -pozo $\{f' : Z \rightarrow W, g' : Y \rightarrow W\}$ se llama el coproducto cartesiano de la \mathcal{C} -fuente $\{f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Z\}$ o de la pareja (f, g) .

Una categoría es cerrada bajo coproductos fibrados si todo par de \mathcal{C} morfismos, $f : A \rightarrow B$ y $g : A \rightarrow C$ tiene un coproducto fibrado.

Observaciones 1.11. Probaremos que Top es una categoría cerrada bajo cuadrados cocartesianos. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : X \rightarrow Z$ continuas y $W := Z \sqcup Y / \sim$ donde \sim es la relación de equivalencia en $Z \sqcup Y$ generada por $z \sim y$ si y solo si existe $x \in X$ tal que $f(x) = z$ y $g(x) = y$. Si $p : Z \sqcup Y \rightarrow W$ es la función cociente, $i : Y \hookrightarrow Z \sqcup Y$ y $j : Z \hookrightarrow Z \sqcup Y$ son las inclusiones y $f' : p \circ j, g' := p \circ i$, entonces

1. $\{f' : Z \rightarrow W, g' : Y \rightarrow W\}$ es pozo final.
2. El cuadrado

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow g & & \downarrow g' \\ Z & \xrightarrow{f'} & W \end{array}$$

es cocartesiano.

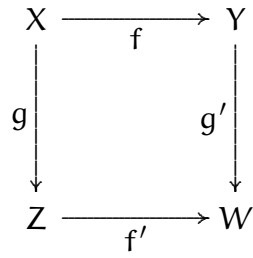
3. Si

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow g & & \downarrow g'' \\ Z & \xrightarrow{f''} & W' \end{array}$$

entonces existe un homomorfismo $h : W \rightarrow W'$ tal que $h \circ f' = f''$ y $h \circ g' = g''$.

Demostración. 1. Sea $\ell : W \rightarrow L$ una función tal que $\ell \circ f' : Z \rightarrow L$ y $\ell \circ g' : Y \rightarrow L$ son continuas. Por lo tanto $\ell \circ p \circ j$ y $\ell \circ p \circ i$ son continuas. Pero $\{i : Y \rightarrow Z \sqcup Y, j : Z \rightarrow Z \sqcup Y\}$ es pozo final. Por lo tanto $\ell \circ p$ es continua. Como p es identificación ℓ es continua. Así $\{f' : Z \rightarrow W, g' : Y \rightarrow W\}$ es pozo final.

2. Primero veamos que conmuta el siguiente diagrama.



Note que $g' \circ f = (p \circ i) \circ f = p \circ (i \circ f)$. Además si $x \in X$ se tiene que $i \circ f(x) \in Y \subseteq Z \sqcup Y$ y $j \circ g(x) \in Z \subseteq Z \sqcup Y$ luego $i \circ f(x) \sim j \circ g(x)$. Por lo tanto $p(i \circ f(x)) = p(j \circ g(x))$. Entonces $p \circ i \circ f = p \circ j \circ g$.

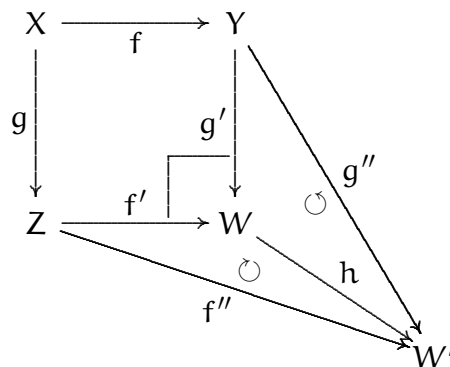
Ahora supongamos que $\alpha : X \rightarrow L$ y $\beta : Z \rightarrow L$ son funciones continuas tales que $\alpha \circ f = \beta \circ g$. Si $z \in Z$ y $w = [z]_{\sim}$, sea $\ell(w) = \beta(z)$. Si $y \in Y$ y $w = [y]_{\sim}$, sea $\ell(w) = \alpha(y)$.

Veamos que ℓ está bien definida. Si $z, z' \in Z$ y $[z]_{\sim} = [z']_{\sim}$ entonces $z = z'$. Luego $\ell([z]_{\sim}) = \ell([z']_{\sim})$. Si $y, y' \in Y$ y $[y]_{\sim} = [y']_{\sim}$ entonces $y = y'$. Así $\ell([y]_{\sim}) = \ell([y']_{\sim})$.

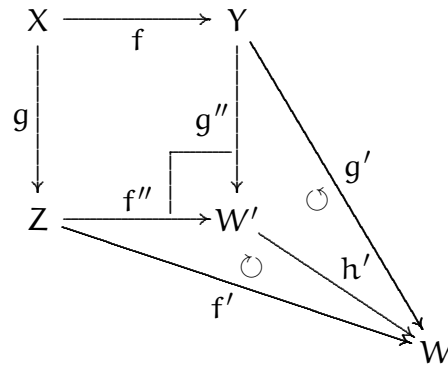
Si $z \in Z, y \in Y$ y $[z]_{\sim} = [y]_{\sim}$ entonces existe $x \in X$ tal que $z = g(x)$ y $y = f(x)$. Luego $\beta(z) = \beta(g(x)) = \alpha(f(x)) = \alpha(y) = \ell([z]_{\sim}) = \ell([y]_{\sim})$. Obsérvese que $\ell \circ g' = \alpha$ y $\ell \circ f' = \beta$. En efecto, si $y \in Y, g'(y) = p \circ i(y) = [y]_{\sim}$. Por lo tanto $\ell \circ g'(y) = \ell([y]_{\sim}) = \alpha(y)$. Si $z \in Z, f'(z) = p \circ j(z) = [z]_{\sim}$. Luego $\ell \circ f'(z) = \ell([z]_{\sim}) = \beta(z)$. Veamos ahora que ℓ es continua. Dado que $\ell \circ f' = \beta$ y $\ell \circ g' = \alpha$ son continuas, y $\{f', g'\}$ es un pozo final se sigue que ℓ es continua.

Note que si $\ell' : W \rightarrow L$ fuera tal que $\ell' \circ g' = \alpha'$ y $\ell' \circ f' = \beta$ entonces para cualquier $z \in Z, y \in Y$ se tiene que $\ell'([z]_{\sim}) = \ell'(f'(z)) = \beta(z) = \ell([z]_{\sim})$ y $\ell'([y]_{\sim}) = \ell'(g'(y)) = \alpha(y) = \ell([y]_{\sim})$.

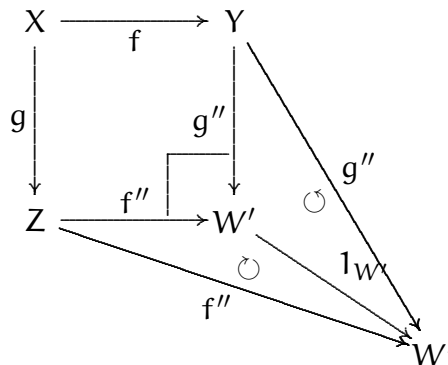
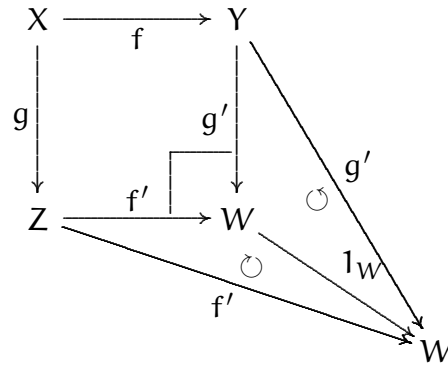
3. Como conmuta



existe una única $h : W \rightarrow W'$ tal que $h \circ g' = g''$ y $h \circ f' = f''$. También, como conmuta



existe una única $h' : W' \rightarrow W$ tal que $h' \circ f'' = f'$ y $h' \circ g'' = g'$. Por otro lado, 1_W y $1_{W'}$ son las únicas funciones continuas tales que conmutan los siguientes diagramas.



Pero $h' \circ h : W \rightarrow W$ es tal que $(h' \circ h) \circ g' = h' \circ (h \circ g') = h' \circ g'' = g'$ y $(h' \circ h) \circ f' = h' \circ (h \circ f') = h' \circ f'' = f'$. Luego $h' \circ h = 1_W$ y análogamente $h \circ h' = 1_{W'}$.

□

Un caso particular es cuando X es cerrado en Z y $g : X \hookrightarrow Z$ es la inclusión, entonces el espacio $Y \sqcup_f Z$ es el coproducto fibrado (f, i) y se llama el espacio de adjunción de Z a Y .

ALGO SOBRE TEORÍA DE GRUPOS.

2.1 EL GRUPO LIBRE $F(S)$

Otra de las herramientas esenciales para la demostración del objetivo principal de la tesis es el uso de las palabras, que en el último capítulo relacionaremos con las superficies.

Definición 2.1. Sea S un conjunto. A los elementos de S los llamaremos letras.

1. Una sílaba es un símbolo s^n donde s es una letra de S y el exponente n es un entero.
2. Una palabra definida por elementos de S es un símbolo:

$$w = s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$$

donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{s_1, \dots, s_n\}$ es un conjunto de sílabas de S y para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}$. No se excluye el caso en que $s_i = s_j$, aunque $i \neq j$.

3. Cualquier sílaba por sí misma es una palabra.
4. Si $n = 0$, decimos que w es la palabra vacía y la denotaremos por 1.
5. Las sílabas en una palabra se cuentan de izquierda a derecha.
6. Podremos escribir a^1 simplemente como a .

Definición 2.2. W_S es el conjunto de todas las palabras definidas por los elementos de S .

Definición 2.3. 1. Si una palabra u de W_S es de la forma $W_1 a^0 W_2$, donde W_1 y W_2 son palabras, decimos que $v = W_1 W_2$ se obtiene de u por una contracción elemental de tipo I o que u se obtiene de v por una expansión elemental de tipo I. Si a^0 es la n -ésima sílaba de la palabra u , la contracción ocurre en la n -ésima sílaba.

2. Si una palabra u es de la forma $W_1 a^p a^q W_2$, donde W_1 y W_2 son palabras, decimos que la palabra $v = W_1 a^{p+q} W_2$ se obtiene de u por una contracción elemental de tipo II

o que u se obtiene de v por una expansión elemental de tipo II. La contracción ocurre en la n -ésima sílaba si a^q es la n -ésima sílaba.

3. Las palabras u y v son equivalentes (y se escribe uEv) si una se obtiene de la otra por una sucesión finita de expansiones y contracciones.

Observación 2.4. La relación E es de equivalencia en W_S .

Definición 2.5. $F(S) = W_S/E$ es el conjunto de clases de equivalencia. Denotaremos la clase de equivalencia de una palabra W por $[W]$. Cuando S es finito, digamos $S = \{s_1, \dots, s_\ell\}$, a $F(S)$ lo denotaremos por $\langle s_1, \dots, s_\ell \rangle$.

Notación 2.6. Es útil escribir los elementos de $F(S)$ sin los corchetes.

Más aún,

Lema 2.7. $F(S)$ con la operación yuxtaposición, es un grupo.

Demostración. Claramente la yuxtaposición es asociativa. La identidad es la clase de la palabra vacía a la que denotaremos por 1 y la palabra inversa de una palabra $[w] = [s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \cdots s_n^{\varepsilon_n}]$ es $[w]^{-1} = [s_n^{-\varepsilon_n} s_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}} \cdots s_1^{\varepsilon_1}]$ \square

Definición 2.8. Una palabra en W_S , $w = s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$, es reducida si no es posible aplicarle una contracción elemental; es decir, si ninguna sílaba de w tiene exponente cero o no tiene sílabas consecutivas con la misma letra.

Observación 2.9. Dado que las contracciones elementales siempre reducen el número de sílabas, cada clase de equivalencia de palabras contiene al menos una palabra que es reducida. De hecho, sólo hay una en el siguiente sentido: para cada $U \in W_S$, existe U_* tal que U_*EU y U_* es reducida. Se puede probar el siguiente teorema. (Ver [2])

Teorema 2.10. $u \sim v$ si y sólo si $u_* = v_*$.

De las observaciones anteriores y del Teorema 2.10 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.11. Cada clase de equivalencia de palabras contiene una y sólo una palabra reducida. Además toda sucesión de contracciones elementales de una palabra u debe llegar a la misma palabra reducida u_*

Entonces tenemos un algoritmo finito para determinar si dos palabras u y v representan o no el mismo elemento en $F(S)$: uno tiene que llegar a u_* y v_* y comparar éstas por sílabas.

Definición 2.12. Sea $R \subset F(S)$. Si \bar{R} es la intersección de todos los subgrupos normales de $F(S)$ que contienen a R , denotaremos por $F(S; R)$ al grupo cociente $F(S)/\bar{R}$ y se llama el grupo generado por el conjunto S con las relaciones R en $F(S)$.

Observación 2.13. Los elementos de $F(S; R)$ son las clases laterales (módulo R) de elementos de $F(S)$. Si $w \in F(S)$, wR denota su clase módulo R . En la práctica, para construir $F(S; R)$, tomamos solamente palabras reducidas de W_S y les quitamos todas las subpalabras de R .

Notación 2.14. Si $S = \{s_1, \dots, s_\ell\}$ y $R = \{w_1, \dots, w_r\}$, se suele escribir $\langle s_1, \dots, s_\ell | w_1 = w_2 = \dots = w_r = 1 \rangle = F(S, R)$.

Ejemplos 2.15. 1. $S = \{s\}$, $F(S) = \langle S \rangle \simeq \mathbb{Z}$. En efecto, la función tal que

$$\begin{aligned} F(S) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [s^{\varepsilon_1} s^{\varepsilon_2} \dots s^{\varepsilon_n}] &= [s^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n}] \mapsto \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n, \end{aligned}$$

es isomorfismo en Gr. Este grupo también se puede describir como $S = \{s, t\}$, $R = \{t\}$ con $\langle s, t | t = 1 \rangle = F(S; R) \simeq \mathbb{Z}$.

2. Sea $S = \{s\}$, $R = \{s^2\}$. $F(S, R) = \langle s | s^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$

$$\begin{aligned} F(S, R) &\rightarrow \mathbb{Z}_2 \\ [s^\varepsilon] &\mapsto \varepsilon \pmod{2}, \end{aligned}$$

con $\varepsilon \in \mathbb{Z}$ tal que $\varepsilon = 2n + k$, donde $k \in \{0, 1\}$.

Note que $[s^\varepsilon] = [s^{2n} s^k] = [s^k]$ y $[s^0] = 1$.

3. $S = \{s, t\}$, $R = \{sts^{-1}t^{-1}\}$ Note que para todo st se tiene que $sts^{-1}t^{-1}ts = ts$, es decir, hace que conmute st si se multiplica por $s^{-1}t^{-1}ts$. Por lo tanto podemos separar las s 's y las t 's de tal forma que

$$\langle s, t | sts^{-1}t^{-1} = 1 \rangle \simeq \langle s \rangle \times \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

4. Sea G un grupo cualquiera. Sean $S = G$ y

$$R_G = \{(st)^{-1}t^{-1}s^{-1} | s, t \in G\}.$$

Entonces $G \simeq F(G; R_G)$.

Definición 2.16. Se dice que $F(S, R)$ es una presentación poligonal \mathcal{P} si las palabras tienen longitud mayor o igual que 3 y cada letra de S aparece al menos una vez en alguna palabra.

Observación 2.17. Se permitirán como casos especiales, las presentaciones en las S tiene un elemento y hay una sola palabra de longitud 2. A excepción de cambiar el nombre de los símbolos, sólo hay cuatro presentaciones distintas: $\langle a|aa \rangle$, $\langle a|a^{-1}a^{-1} \rangle$, $\langle a|aa^{-1} \rangle$ y $\langle a|a^{-1}a \rangle$.

Lema 2.18. Dado un grupo G un elemento unitario 1_G , un grupo $F(S; R)$ y una función $\Theta : S \rightarrow G$ tal que para todo $w \in R$, $\Theta(w) = 1_G$, entonces existe un único homomorfismo de grupos $\bar{\Theta} : F(S; R) \rightarrow G$ tal que $\bar{\Theta}(s) = \Theta(s)$, para toda $s \in S$. $\bar{\Theta}([s]) = \Theta(s)$.

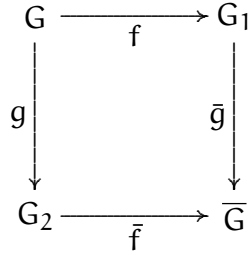
Demostración. Sea $\bar{\Theta} : F(S; R) \rightarrow G$ tal que si $s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \in W_S$, es reducida, entonces $\bar{\Theta}([s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \cdots s_n^{\varepsilon_n}]) = \Theta(s_1^{\varepsilon_1}) \cdots \Theta(s_n^{\varepsilon_n})$. Note que $\bar{\Theta}$ está bien definida ya que si $w \in R'$, $w = \{s_k^{\varepsilon_k} \cdots s_r^{\varepsilon_r}\}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} & \bar{\Theta}([s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \cdots s_\ell^{\varepsilon_\ell} w s_{\ell+1}^{\varepsilon_{\ell+1}} \cdots s_n^{\varepsilon_n}]) \\ &= \Theta(s_1)^{\varepsilon_1} \Theta(s_2)^{\varepsilon_2} \cdots \Theta(s_\ell)^{\varepsilon_\ell} \Theta(w) \Theta(s_{\ell+1})^{\varepsilon_{\ell+1}} \cdots \Theta(s_n)^{\varepsilon_n} \\ &= \Theta(s_1)^{\varepsilon_1} \Theta(s_2)^{\varepsilon_2} \cdots \Theta(s_\ell)^{\varepsilon_\ell} 1_G \Theta(s_{\ell+1})^{\varepsilon_{\ell+1}} \cdots \Theta(s_n)^{\varepsilon_n} \\ &= \Theta(s_1)^{\varepsilon_1} \Theta(s_2)^{\varepsilon_2} \cdots \Theta(s_\ell)^{\varepsilon_\ell} \Theta(s_{\ell+1})^{\varepsilon_{\ell+1}} \cdots \Theta(s_n)^{\varepsilon_n} \end{aligned}$$

Por lo tanto es homomorfismo de grupos. Además, si $s \in S'$ entonces $[s] = [s']$ y $\bar{\Theta}[s] = \Theta(s)$. \square

Teorema 2.19. La categoría Gr es cerrada bajo coproductos fibrados.

Demostración. Sean $f : G \rightarrow G_1$ y $g : G \rightarrow G_2$ dos homomorfismos. Veamos a los grupos G_1, G_2 como $G_i := (G_i; R_{G_i})$, donde $R_{G_i} = \{(x, y)^1 y^{-1} x^{-1} | x, y \in G_i\}$. Ahora consideremos el conjunto $R_{f,g} := \{f(x)g(x)^{-1} | x \in G\}$. Definamos el grupo $\bar{G}_1 : F(G_1 \cup G_2; R_{G_1} \cup R_{G_2} \cup R_{f,g})$ y los homomorfismos canónicos $\bar{f} : G_2 \rightarrow \bar{G}$, $\bar{g} : G_1 \rightarrow \bar{G}$. Como $f(x)g(x)^{-1}$ es una relación en $F(G_1 \cup G_2)$, entonces, para todo $x \in G$, el cuadrado siguiente es conmutativo.



Para toda $x \in G$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 \bar{g} \circ f(x) &= \bar{g}(f(x)) = \bar{g}(g(x)) = [g(x)] \\
 \bar{f} \circ g(x) &= \bar{f}(g(x)) = \bar{f}(f(x)) = [f(x)]
 \end{aligned}$$

Como $[f(x)g(x)^{-1}] = \text{Id}$ se tiene que $\bar{g} \circ f(x) = \bar{f}(g(x))$. Así conmuta el diagrama.

Ahora probaremos la propiedad universal. Dados dos homomorfismos de grupos $h_i : G_i \rightarrow H$, con $i = \{1, 2\}$ tales que $h_1 \circ f = h_2 \circ g$, la función $\Theta : G_1 \cup G_2 \rightarrow H$, tal que para todo $x \in G_i, \Theta(x) = h_i(x)$ satisface para todo $x \in G$ la igualdad $\Theta(f(x)g(x)^{-1}) = 1_H$. Pues $\Theta(f(x)) = h_1(f(x))$ y $\Theta(g(x)^{-1}) = h_2(g(x)^{-1}) = (h_1 \circ f(x))^{-1}$, luego $h_2(g(x))^{-1} = h_1(f(x)) = \text{Id}$. Así $\Theta(f(x))\Theta(g(x))^{-1} = 1_H$. Por el lema anterior, existe un único homomorfismo $\bar{\Theta} : \bar{G} \rightarrow H$ que extiende la función Θ y tal que $\bar{\Theta}\bar{f} = h_2, \bar{\Theta}\bar{g} = h_1$.

2.2 ACCIONES DE GRUPO

Definición 2.20. Un grupo topológico es un grupo (G, \cdot) con una topología τ , tal que las funciones,

$$\begin{aligned}
 \cdot : G \times G &\rightarrow G \\
 (g, g') &\mapsto g \cdot g',
 \end{aligned}$$

donde $G \times G$ tiene la topología del producto, y

$$\begin{aligned}
 G &\rightarrow G \\
 g &\mapsto g^{-1},
 \end{aligned}$$

son funciones continuas.

Definición 2.21. Sea G un grupo topológico con elemento neutro 1_G y X un espacio topológico. Una acción (por la izquierda) de G sobre X es una función continua.

$$\phi : G \times X \rightarrow X$$

tal que

1. Para todo $x \in X$, $\phi(1_G, x) = x$.
2. Para cualquier $x \in X$ y para todo $g, g' \in G$ se tiene que

$$\phi(g', \phi(g, x)) = \phi(gg', x).$$

Decimos que G actúa por la izquierda de X a través de la acción ϕ . Para simplificar escribiremos $\phi(x, y) = xy$. De manera análoga podemos definir la acción por la derecha.

Observación 2.22. Una acción ϕ da lugar a una relación de equivalencia \equiv_ϕ en X (una partición de X en G -órbitas):

$$x \equiv_\phi x' \text{ si y sólo si } \exists g \in G : x' = gx$$

La clase de equivalencia $[x]$ del elemento $x \in X$ es la órbita de X , también denotada por Gx (o xG si la acción es por la derecha.) Denotaremos por X/G al conjunto X/\equiv_ϕ de las órbitas de X . El conjunto X/G con la topología cociente dada por la función suprayectiva

$$\begin{aligned} q : X &\rightarrow X/G \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

se llama el espacio de X bajo la acción de G .

Definición 2.23. Sea G un grupo topológico y X un espacio topológico.

1. G actúa libremente sobre X si para cualquier $x \in X$ y para toda $g \in G$ tal que $g \neq 1_G$ se tiene que $xg \neq x$.
2. G actúa transitivamente sobre X si para todo $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $xg = y$.

VARIETADES TOPOLÓGICAS

Recordar que el objetivo de la tesis es dar una demostración del Teorema de Clasificación de Superficies. Éstas son variedades topológicas así que en este capítulo, nos dedicaremos a definir a éste ente que es muy importante en las matemáticas así como algunas de sus propiedades.

Definición 3.1. Sean M espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$ diremos que M es una variedad topológica de dimensión n o una n -variedad si se cumplen las siguientes propiedades:

1. M es un espacio de Hausdorff (o espacio T_2).
2. M es segundo numerable.
3. M es localmente euclidiano de dimensión n .

Observación 3.2. La propiedad de ser un espacio localmente euclidiano de dimensión n significa que, para cada $p \in M$, existen un conjunto abierto U de M tal que $p \in U$, un conjunto abierto \hat{U} de \mathbb{R}^n y un homomorfismo $\varphi : U \rightarrow \hat{U}$.

Definición 3.3. 1. Sea M localmente euclidiano de dimensión n . Si $U \subseteq M$ es un subconjunto abierto que es homeomorfo a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , entonces U se llama dominio coordinado.

2. Cualquier homeomorfismo φ de U a un subconjunto de \mathbb{R}^n se llama función coordenada.
3. Un dominio coordinado que es homeomorfo a una bola en \mathbb{R}^n se llama bola coordenada.

Definición 3.4. Si M es una n -variedad topológica, a n le llamaremos la dimensión de M y la denotaremos por $\dim M$.

Ejemplos 3.5. a. \mathbb{R}^n con la topología usual de las bolas abiertas es una n -variedad topológica.

b. Si M es una n -variedad topológica y $A \subset M$ es un abierto en M , entonces A , con la topología de subespacio de M , es también una n -variedad topológica.

c. \emptyset es una n -variedad topológica para toda $n \in \mathbb{N}$.

Definición 3.6. Sea M una n -variedad topológica.

1. Una carta coordenada sobre M es una pareja (U, φ) , donde $U \subset M$ es un conjunto abierto y $\varphi : U \rightarrow \hat{U}$ es un homeomorfismo de U sobre un subconjunto abierto \hat{U} de \mathbb{R}^n .
2. Si (U, φ) es una carta coordenada sobre M , a U se le llama una vecindad coordenada de cada uno de sus puntos y se dirá que U es una bola coordenada si $\varphi(U)$ es una bola abierta en \mathbb{R}^n .
3. La función φ se llama una parametrización local de cada uno de los puntos de U en M .
4. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sean $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ las proyecciones canónicas, definidas por $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$. Si (U, φ) es una carta n -dimensional en M podemos escribir $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, donde $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$. Las funciones $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ son llamadas las coordenadas de φ o simplemente las coordenadas de U .

Ejemplos 3.7. a. $M = \mathbb{R}^n$ y $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi = \text{Id}$. (\mathbb{R}^n, φ) es una carta n -dimensional en \mathbb{R}^n .

b. Gráficas de funciones continuas. Sean U un abierto en \mathbb{R}^n y $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ una función continua. La gráfica de F es el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$:

$$\Gamma(F) = \{(x, F(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : x \in U\}$$

Si dotamos a $\Gamma(F)$ de la topología que hereda como subespacio de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, entonces $\Gamma(F)$ es una n -variedad topológica. En efecto: Si $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la proyección al primer factor, entonces π_1 es continua, así que $\varphi = \pi_1|_{\Gamma(F)} : \Gamma(F) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua. Como $\varphi(\Gamma(F)) = \{\varphi(x, F(x)) : x \in U\} = \{x : x \in U\} = U$, entonces $\varphi : \Gamma(F) \rightarrow U$ es suprayectiva. La función $\psi : U \rightarrow \Gamma(F)$ tal que para todo $x \in U$ se tiene que $\psi(x) = (x, F(x))$ es continua y es la inversa de φ , pues $\varphi \circ \psi(x) = \varphi(x, F(x)) = x$ y $\psi \circ \varphi(x, F(x)) = \psi(x) = (x, F(x))$. Por lo tanto $\varphi \circ \psi = \text{Id}_U$ y $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{\Gamma(F)}$. Así $(\Gamma(F), \varphi)$ es una carta coordenada.

c. Sea $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ la esfera unitaria n -dimensional en \mathbb{R}^{n+1} . En S^n consideremos la topología inducida por la topología usual de \mathbb{R}^{n+1} . Para cada

$i \in \{1, \dots, n + 1\}$, sean los conjuntos $U_i^+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_i > 0\}$ y $U_i^- = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_i < 0\}$. Es claro que esos conjuntos son abiertos en S^n y que $S^n = \cup_{i=1}^{n+1} (U_i^+ \cup U_i^-)$. Denotemos por $D^n \subset \mathbb{R}^n$ el disco unitario abierto $D^n = \{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n y_i^2 < 1\}$ y definamos las aplicaciones $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow D^n$ por $\varphi_i^\pm(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$, donde \hat{x}_i significa que omitimos esa coordenada. Es claro que para cada $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n$ se tiene que $\varphi_i^\pm(x) \in D^n$, pues $\sum_{j=1}^n x_j^2 = 1$; por lo tanto $\sum_{j=1, j \neq i}^{n+1} x_j^2 < 1$. Las aplicaciones inversas de φ_i^\pm son dadas por $(\varphi_i^\pm)^{-1} : D^n \rightarrow U_i^\pm$, donde

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n y_i^2}, y_i, \dots, y_n).$$

Note que las aplicaciones φ_i^\pm son homeomorfismos. De lo anterior, tenemos que $A = \{(U_i^\pm, \varphi_i^\pm) : i \in \{1, \dots, n + 1\}\}$ es un conjunto de $2(n + 1)$ cartas n dimensionales en S^n .

Definición 3.8. 1. La bola unitaria cerrada de dimensión n es el subconjunto $\overline{B}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ que consiste en los vectores de longitud a lo más 1.

$$\overline{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}.$$

También llamamos a \overline{B}^2 el disco unitario cerrado. (Ver Figura 1.)

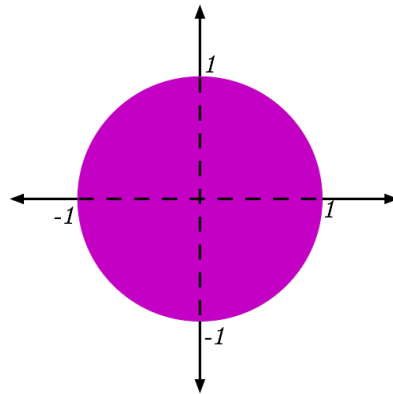
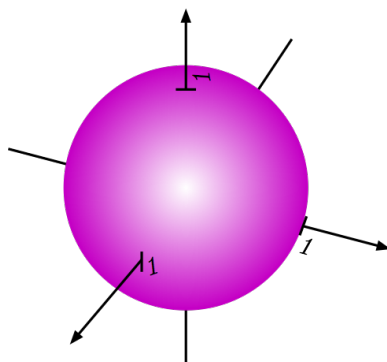


Figura 1: Disco unitario cerrado.

2. La n -esfera unitaria es el subconjunto $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que consiste en los vectores unitarios en \mathbb{R}^{n+1} :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

Figura 2: S^2 .

A continuación definiremos dos espacios, además de la esfera, que forman parte vital del Teorema de Clasificación de Superficies Compactas.

Después veremos algunas equivalencias de estos tres espacios, para probar que en realidad son variedades.

Definición 3.9. Definimos $\mathbb{R}P^n$, al espacio proyectivo real de dimensión n , como el conjunto cuyos elementos son los subespacios vectoriales de dimensión 1 de \mathbb{R}^{n+1} (las líneas que pasan por el origen).

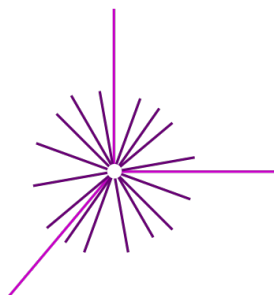


Figura 3: Espacio proyectivo real 2-dimensional.

Definición 3.10. Definimos a T^n como el producto $S^1 \times \cdots \times S^1$ de n copias de S^1 , que es un espacio n -dimensional llamado n -toro. En particular, el 2-toro usualmente se llama toro.

Primero necesitaremos el siguiente resultado que es de suma importancia, para poder probar las equivalencias.

Lema 3.11 (Lema del Mapeo Cerrado.). [9, Lemma 4.50] Supongamos que F es una función continua de un espacio compacto a un espacio Hausdorff.

1. F es una función cerrada.
2. Si F es sobreyectiva, es una función cociente.
3. Si F es inyectiva, es un encaje topológico.
4. Si F es biyectiva, es un homeomorfismo.

Proposición 3.12. *La esfera S^2 es homeomorfa al disco cerrado unitario contenido en \mathbb{R}^2 módulo la relación de equivalencia generada por $(x, y) \sim (-x, y)$ para $(x, y) \in \partial\overline{\mathbb{B}^2}$.*

Demostración. Para ver que cada uno de estos espacios son homeomorfos a la esfera, necesitamos solamente exhibir una función cociente del espacio dado a la esfera que hace las mismas identificaciones, y luego apelara a la unicidad de los espacios cocientes. Definamos un mapeo de el disco a la esfera envolviendo cada segmento de línea horizontal sobre una latitud circular. Formalmente, $\pi : \overline{\mathbb{B}^2} \rightarrow S^2$ está dada por

$$\pi(x, y) = \begin{cases} \left(-\sqrt{1-y^2} \cos \frac{\pi x}{\sqrt{1-y^2}}, -\sqrt{1-y^2} \sin \frac{\pi x}{\sqrt{1-y^2}}, y \right), & \text{si } y \neq \pm 1; \\ (0, 0, y), & \text{si } y = \pm 1. \end{cases}$$

Note que π es continua y hace exactamente las mismas identificaciones como las que se dan por la relación de equivalencia. Luego, es una función cociente. \square

Proposición 3.13. *El plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ es homeomorfo a los siguientes espacios cocientes:*

1. El cociente de la esfera con los puntos antipodales identificados.
2. El disco cerrado $\overline{\mathbb{B}^2}$ módulo la relación de equivalencia generada por $(x, y) \sim (-x, -y)$ para cada $(x, y) \in \partial\overline{\mathbb{B}^2}$.

Demostración. 1. Sea \sim la relación de equivalencia en S^2 generada por $x \sim -x$ para cada $x \in S^2$. Para ver que S^2/\sim es homeomorfo a $\mathbb{R}P^2$, sea $p : S^2 \rightarrow S^2/\sim$ denota la función cociente. Consideremos también la función composición

$$S^2 \xrightarrow{i} \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \xrightarrow{q} \mathbb{R}P^n$$

donde i es la inclusión y q es la función cociente que define a $\mathbb{R}P^2$. Note que $q \circ i$ es una función cociente. Esta función hace exactamente las mismas identificaciones que p , por la unidad de los espacios cocientes $\mathbb{R}P^2$ es homeomorfo a S^2/\sim .

2. Sea $p : S \rightarrow \mathbb{R}P^2$ la función cociente que representa a $\mathbb{R}P^2$ como un espacio cociente de la esfera con los puntos antipodales identificados. Si $F : \overline{\mathbb{B}^2} \rightarrow S^2$ es la función envía el disco al hemisferio superior dada por $F(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, entonces $p \circ F : \overline{\mathbb{B}^2} \rightarrow S^2 / \sim$ es sobreyectiva y así es una función cociente. Ésta, identifica los puntos $(x, y) \in \partial \overline{\mathbb{B}^2}$ con $(-x, -y) \in \partial \overline{\mathbb{B}^2}$, así $\mathbb{R}P^2$ es homeomorfo al espacio cociente resultante. \square

Proposición 3.14. *El toro es homeomorfo al espacio obtenido de pegar el segmento de frontera del cuadrado de arriba con el de abajo y forman un cilindro, y luego pega la frontera circular del lado derecho con la del lado izquierdo.*

Demostración. Definamos una relación de equivalencia en el cuadrado $I \times I$ donde $(x, 0) \sim (x, 1)$ para toda $x \in I$, y $(0, y) \sim (1, y)$ para toda $y \in I$. Sea $p : I \times I \rightarrow I \times I / \sim$ la proyección natural que envía cada elemento de $I \times I$ a su clase de equivalencia. Construyamos el mapeo, $q : I \times I \rightarrow \mathbb{T}^2$ con $q(u, v) = (e^{2\pi i u}, e^{2\pi i v})$. Es una función cociente. Dado que q hace las mismas identificaciones que p , por unicidad de espacios cociente el cociente original de $I \times I$ debe ser homeomorfo al toro. \square

A continuación mostraremos unos resultados que nos ayudarán a ver que los espacios antes mencionados en realidad son variedades.

Lema 3.15. *El producto cartesiano de una n -variedad X por una m -variedad Y es una $(n + m)$ -variedad.*

Demostración. Si $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Como $x_0 \in X$, existe una carta coordenada (U, φ) de X en x_0 , y como $y_0 \in Y$, existe una carta coordenada (V, ψ) de Y en y_0 . Luego $U \times V$ es abierto en $X \times Y$ y $(x_0, y_0) \in U \times V$. Además $\varphi(U) \times \psi(V)$ es abierto en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^{n+m}$ y la función

$$\begin{aligned} \varphi \times \psi : U \times V &\rightarrow \varphi(U) \times \psi(V) \\ (x, y) &\mapsto (\varphi(x), \psi(y)) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

Así dado que S^1 es una 1-variedad, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.16. $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ es una 2-variedad.

Teorema 3.17. *Sea X una n -variedad compacta y sea G un grupo topológico finito actuando libremente sobre X es decir, para todo $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $y = xg$. Entonces el espacio cociente $X/G := X/\sim$ es una n -variedad ($x \sim y \leftrightarrow \exists g \in G, yg = x$)*

Demostración. Supongamos que $G = \{g_1 := 1_G, g_2, \dots, g_p\}$. Entonces la órbita de cada $x \in X$ es el conjunto

$$o(x) = \{x = xg_1, xg_2, \dots, xg_p\}$$

Observemos que los elementos de $o(x)$ son distintos entre sí, porque la acción de G sobre X es libre. Por cada pareja (x, xg_i) , con $i \in \{2, \dots, p\}$, existe una pareja (u_i, v_i) de abiertos de X tales que $x \in u_i, xg_i \in v_i$ y $u_i \cap v_i = \emptyset$.

Para todo $i \in \{2, \dots, p\}, xg_i \in v_i$. Luego, existe $v_i \in v_i$ tal que $xg_i = v_i$ entonces $x = v_i g_i^{-1} \in v_i g_i^{-1}$ y $v_i g_i^{-1}$ es abierto en X . (Note que si G actúa sobre X , para cada $g \in G$, la función $X \rightarrow X; x \mapsto xg$ es homeomorfismo.)

Por lo tanto $U = \bigcap_{i=2}^p u_i \cap v_i g_i^{-1}$ es un abierto en X que contiene a x y para todo $j \in \{2, \dots, p\}$,

$$\begin{aligned} U \cup v_j &\subset (u_j \cap v_j g_j^{-1}) \cap v_j \\ &= (u_j \cap v_j) \cap v_j g_j^{-1} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Así $U \cap v_j = \emptyset$.

Sea $q : X \rightarrow X/G$ la función cociente. Entonces

$$q|_U : U \rightarrow q(U) \subset X/G \text{ es una biyección.}$$

Veamos que es inyectiva. Sean $x', y' \in U$ tales que $q|_U(x') = q|_U(y')$ entonces, existe $j \in \{1, \dots, p\}$ tal que $y' = x'g_j$. Pero para toda $i \in \{2, \dots, p\}$ se tiene que $x', y' \in u_i \cap v_i g_i^{-1}$. Si $j \in \{2, \dots, p\}$ se tiene que $y' \in v_j g_j^{-1}$. Entonces $x' \in y' g_j \in v_j \cap U$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $j = 1$. Así $y' = x'g_1 = x'$.

Además, dado que G es finito, $q(U)$ es abierto y cerrado, es un homeomorfismo. Como U es abierto de X , es una variedad.

Sea $[x] \in X/G$ la clase de equivalencia de $x \in X$. Existe un abierto U en X tal que $q|_U : U \rightarrow q(U)$ es homeomorfismo y que $q(U)$ es abierto en X/G . Luego $q|_U^{-1} : q(U) \rightarrow U; [x] \mapsto x$.

Como $x \in U$ y U es una n -variedad existe una carta (V, Φ) de U en x con $\Phi : V \rightarrow \Phi(V)$ homeomorfismo y $\Phi(V)$ abierto en \mathbb{R}^n , $q|_U(V)$ es abierto en $q(U)$.

Dado que $q(U)$ es biyectiva y cerrada con U Hausdorff, X/G es de Hausdorff. \square

Por lo tanto podemos concluir que los dos espacios restantes, usando sus equivalencias (ver Proposición 3.12 y 3.13) también son variedades.

Corolario 3.18. *Los esfera S^2 y el plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$ son variedades de dimensión 2.*

Definición 3.19. Sea M una n -variedad. Se dice que una bola coordinada $B \subseteq M$ es una bola coordinada regular si existe una vecindad B' de \bar{B} y un homeomorfismo $\varphi : B' \rightarrow B_{r'}(x) \subseteq \mathbb{R}^n$ que toma B a $B_r(x)$ y \bar{B} a $\bar{B}_r(x)$ para algún $r' > r > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.20 (Adjuntando Variedades sobre sus Fronteras). [9, Theorem 3.79] Sean N, M variedades de dimensión n con fronteras no vacías tales que ∂M y ∂N son homomorfas. Sea $h : \partial N \rightarrow \partial M$ un homeomorfismo y $M \sqcup_h N$ una n -variedad (sin frontera). Existen encajamientos topológicos $e : M \rightarrow M \sqcup_h N$ y $f : N \rightarrow M \sqcup_h N$ cuyas imágenes son subconjuntos cerrados de $M \sqcup_h N$ que satisfacen

$$\begin{aligned} e(M) \cup f(N) &= M \sqcup_h N \\ e(M) \cap f(N) &= e(\partial M) = f(\partial N). \end{aligned}$$

LA CATEGORÍA DE COMPLEJOS SIMPLICIALES

En este capítulo, estudiaremos los complejos celulares que son más interesantes para nuestro objetivo se llaman complejos CW, que son complejos celulares con dos requerimientos técnicos adicionales para asegurar que sus propiedades topológicas están estrechamente relacionadas con sus estructuras celulares. Los complejos CW los inventaron topólogos algebraicos para la construcción de espacios topológicos y agiliza los cálculos para sus invariantes topológicos.

También introduciremos un tipo de complejos más especial, llamado complejo simplicial. La gran ventaja de los complejos simpliciales es que su topología está codificada en una manera puramente combinatoria, y se puede usar para reducir muchos problemas topológicos a problemas combinatorios.

4.1 COMPLEJOS CW

Definición 4.1. 1. Una n -celda abierta es cualquier espacio topológico que es homeomorfo a la bola unitaria abierta \mathbb{B}^n .

2. Una n -celda cerrada es cualquier espacio homeomorfo a $\overline{\mathbb{B}^n}$.

Observación 4.2. Toda bola abierta o cerrada en \mathbb{R}^n es una celda abierta o cerrada.

Proposición 4.3. [9, Proposition 5.1] Si $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto convexo y compacto con interior no vacío, entonces D es una n -celda cerrada y su interior es una n -celda abierta. De hecho, dado cualquier punto $p \in \text{int } D$, existe un homeomorfismo $F : \overline{\mathbb{B}^n} \rightarrow D$ que manda 0 a p , \mathbb{B}^n al $\text{int } D$ y S^{n-1} a ∂D .

Ejemplos 4.4. 1. Cualquier intervalo en \mathbb{R} es una 1-celda cerrada.

2. Cualquier región compacta en el plano acotada por un polígono regular es una 2-celda cerrada.
3. Un tetraedro sólido y un cubo sólido son 3-celdas cerradas.

Observación 4.5. Sea D una n -celda cerrada. Note que D es una variedad con frontera.

Notación 4.6. Denotaremos por ∂D e $\text{int } D$ a las imágenes de S^{n-1} y \mathbb{B}^n , respectivamente bajo algún homeomorfismo $F : \overline{\mathbb{B}^n} \rightarrow D$.

Definición 4.7. Sean X un espacio topológico no vacío, $\{D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una colección indexada de n -celdas cerradas para alguna $n \geq 1$ fija. Para cada α , damos una función continua $\varphi_\alpha : \partial D_\alpha \rightarrow X$. Si $\varphi : \sqcup_\alpha \partial D_\alpha \rightarrow X$ es la función cuya restricción en cada ∂D_α es φ_α , podemos formar el espacio de adjunción $X \cup_\varphi (\sqcup_\alpha D_\alpha)$. Cualquier espacio homeomorfo a tal espacio de adjunción se dice que se obtiene de X adjuntando n -celdas a X .

Observación 4.8. Si Y se obtiene de X apuntando n -celdas, por las propiedades de Espacios de Adjunción [9, Proposition 3.77] se puede ver a X como un subespacio cerrado de Y , y como un conjunto, Y es la unión ajena de X y una colección de n -celdas abiertas ajenas, una para cada α .

Definición 4.9. Si X es un espacio topológico no vacío, una descomposición celular de X es una partición \mathcal{E} de X en subespacios que son celdas abiertas de varias dimensiones, tal que se satisfacen la siguientes condición:

Para cada celda $e \in \mathcal{E}$ de dimensión $n \geq 1$, existe una función inyectiva, continua Φ de alguna n -celda cerrada D a X (llamada la función característica para e) que se restringe a un homeomorfismo del $\text{int } D$ al e y marea la ∂D a la unión de todas las celdas de \mathcal{E} de dimensiones estrictamente menores a n de manera inyectiva.

Definición 4.10. Una celda compleja es un espacio Hausdorff X junto con una específica descomposición celular de X .

Definición 4.11. Sean X un espacio topológico y \mathcal{B} es cualquier familia de subespacios de X cuya unión es X . La topología de X es coherente con \mathcal{B} quiere decir que un subconjunto $U \subseteq X$ es abierto en X si y sólo si su intersección con cada $B \in \mathcal{B}$ es abierto en B .

Observaciones 4.12. Usando complementos se tiene que la definición anterior es equivalente al requerimiento de que U es cerrada en X sí y sólo sí $U \cap B$ es cerrada en B , para cada $B \in \mathcal{B}$.

Proposición 4.13. *Sea X un espacio topológico cuya topología es coherente con una familia \mathcal{B} de subespacios .*

1. *Si Y es otro espacio topológico, entonces una función $f : X \rightarrow Y$ es continua sí y sólo sí $f|_B$ es continua para cada $B \in \mathcal{B}$.*
2. *El mapeo $\sqcup_{B \in \mathcal{B}} B \rightarrow X$ inducida por la inclusión de cada conjunto $B \hookrightarrow X$ es una función cociente.*

Definición 4.14. Un complejo CW es una celda compleja (X, \mathcal{E}) que adicionalmente satisface las siguientes condiciones

- c La clausura de cada celda está contenida en una unión de un número finito de celdas.
- w La topología de X es coherente con la familia de subespacios cerrados $\{\bar{e} : e \in \mathcal{E}\}$.

Definición 4.15. Una descomposición celular de un espacio X que satisface (C) y (W) se llama descomposición CW de X .

Las letras C y W provienen de los nombres dados originalmente para estas dos condiciones por el inventor de los complejos CW, J. H. C. Whitehead: la condición (C) se llama suele llamarse clausura finita, y la topología coherente descrita en la condición (W) se le llama topología débil. asociada con los subespacios $\{\bar{e} : e \in \mathcal{E}\}$.

Para complejos localmente finitos (y así todos los finitos), las condiciones (C) y (W) son automáticas como muestran los siguientes resultados.

Proposición 4.16. [9, Proposition 5.4] *Sea X un espacio Hausdorff y sea \mathcal{E} una descomposición celular de X . Si \mathcal{E} es localmente finito, entonces es una descomposición CW.*

- Definición 4.17.**
1. Sea X un complejo CW. Si existe un entero n tal que todas las celdas de X tienen a lo más dimensión n se dice que X es de dimensión finita. De otra forma, X es de dimensión infinita.
 2. Si X es de dimensión finita, la dimensión de X es la n más grande tal que X contiene al menos una n -celda.

Proposición 4.18. [9, Proposition 5.5] Sea X un complejo CW de dimensión n . Cualquier n -celda de X es una subconjunto abierto de X .

Definición 4.19. Un subcomplejo de X un complejo CW, es un subespacio $Y \subseteq X$ que es la unión de celdas de X , tal que si Y contiene una celda, también contiene su clausura.

Observación 4.20. La unión y la intersección de cualquier colección de subcomplejos son subcomplejos de ellos mismos.

Definición 4.21. Para cada entero no negativo n , definimos el n -esqueleto de X como el subespacio $X_n \subseteq X$ que consiste en la unión de todas las celdas de dimensiones menores o iguales que n . X_n es un subcomplejo de X , n -dimensional.

Definición 4.22. Una celda abierta $e \subseteq X$ se llama celda regular si admite una función característica que es homeomorfismo sobre \bar{e} .

Ejemplos 4.23. 1. La Proposición 4.3 muestra que el interior de un subconjunto convexo compacto de \mathbb{R}^n (si no es vacío) es una n -celda regular en \mathbb{R}^n .

2. Si M es una n -variedad, cualquier bola regular coordinada es una n -celda regular en M .

Definición 4.24. Cualquier 0-celda es una celda regular.

Observación 4.25. Para una celda regular, siempre podemos tomar el mapeo inclusión $\bar{e} \hookrightarrow X$ como función característica.

Definición 4.26. Un complejo CW se llama complejo CW regular o complejo celular regular si cada una de sus celdas es regular, y la clausura de cada celda es un subcomplejo finito.

Teorema 4.27 (Teorema de Construcción CW). [9, Theorem 5.20] Sean $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_{n-1} \subseteq \cdots$ es una sucesión de espacios topológicos que satisfacen las siguientes condiciones:

1. X_0 es un espacio discreto no vacío.
2. Para cada $n \geq 1$, X_n se obtiene de X_{n-1} adjuntando una colección (posiblemente vacía) de n -celdas.

Entonces $X = \cup_n X_n$ tiene una única topología coherente con la familia $\{X_n\}$, y una única descomposición celular convirtiéndola en un complejo CW cuyo n -esqueleto es X_n para toda n .

Lema 4.28. [9, Lemma 5.26] *Sea M es una 1-variedad dotada de una descomposición regular CW. Entonces la frontera de cada 1-celda de M , consiste de exactamente de dos 0-celdas, y toda 0-celda de M es un punto frontera de exactamente dos 1-celdas.*

4.2 COMPLEJOS SIMPLICIALES

- Definición 4.29.**
1. Un subconjunto C de \mathbb{R}^n es convexo si para cualesquiera $x, y \in C$ y para todo $t \in I$ se tiene que $tx + (1 - t)y \in C$, donde $I = [0, 1]$ en lo sucesivo.
 2. Si $X \subset \mathbb{R}^n$, la envolvente convexa de X es el menor subconjunto convexo en \mathbb{R}^n que contiene a X .
 3. Diremos que $d + 1$ puntos x_0, \dots, x_d en \mathbb{R}^n son afinmente independientes si los vectores $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_d - x_0$ son linealmente independientes en \mathbb{R}^n .

- Observaciones 4.30.*
1. La intersección de conjuntos convexos en \mathbb{R}^n es convexa. Por lo tanto, si $X \subseteq \mathbb{R}^n$, la envolvente convexa de X es la intersección de todos los convexos en \mathbb{R}^n (incluyendo a \mathbb{R}^n) que contienen a X .
 2. Si $x_0, \dots, x_d \in \mathbb{R}^n$ son afinmente independientes, entonces todo vector $x - x_0$ en el espacio generado por los vectores $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_d - x_0$ se puede escribir de manera única como una combinación lineal:

$$x - x_0 = \sum_{i=1}^d r_i(x_i - x_0)$$

donde cada r_i es un real. De aquí:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^d r_i(x_i - x_0) + x_0 \\ &= \sum_{i=1}^d r_i x_i + x_0 - \sum_{i=1}^d r_i x_0 \\ &= \sum_{i=1}^d r_i x_i + (1 - \sum_{i=1}^d r_i) x_0. \end{aligned}$$

Sea $r_0 = 1 - \sum_{i=1}^d r_i$. Por lo tanto

$$x = \sum_{i=0}^d r_i x_i,$$

donde $\sum_{i=0}^d r_i = 1$. Y esta expresión es única ya que si existieran $\alpha_i \in \mathbb{R}$ con $i \in \{1, \dots, d\}$ tales que $x = \sum_{i=0}^d \alpha_i x_i$ con $\sum_{i=0}^d \alpha_i = 1$, entonces $\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^d \alpha_i$. Así

$$x = \sum_{i=0}^d \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^d \alpha_i x_i + \alpha_0 x_0 = \sum_{i=1}^d \alpha_i x_i + (1 - \sum_{i=1}^d \alpha_i) x_0.$$

Luego,

$$x - x_0 = \sum_{i=1}^d \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^d \alpha_i x_0 = \sum_{i=1}^d \alpha_i (x_i - x_0)$$

pero también se cumple que,

$$\sum_{i=1}^d r_i (x_i - x_0) = x - x_0.$$

Por lo tanto para cualquier $i \in \{1, \dots, d\}$ se tiene que $r_i = \alpha_i$ y por lo tanto $r_0 = \alpha_0$.

Definición 4.31. Sean x_0, \dots, x_d $d + 1$ puntos afínmente independientes en \mathbb{R}^n , se tiene que:

1. El d -simplejo (euclidiano) con vértices $\{x_0, \dots, x_d\}$, es el conjunto de combinaciones lineales $x = \sum_{i=0}^d \lambda_i x_i$, donde $\sum_{i=0}^d \lambda_i = 1$ y para todo $i \in \{0, \dots, d\}$, $\lambda_i \geq 0$. A este conjunto lo denotaremos por $\Delta(x_0, \dots, x_d)$.
2. Si $x \in \Delta(x_0, \dots, x_d)$ y $x = \sum_{i=0}^d \lambda_i x_i$ con $\sum_{i=0}^d \lambda_i = 1$, y $\lambda_i \geq 0$ a los coeficientes $\lambda_0, \dots, \lambda_d$ se les llama **coordenadas baricéntricas** de X .
3. Las **caras** de $\Delta(x_0, \dots, x_d)$ son las envolventes convexas de los subconjuntos de $\{x_0, \dots, x_d\}$.
4. Si una cara de $\Delta(x_0, \dots, x_d)$ no coincide con $\Delta(x_0, \dots, x_d)$ se dirá que es una **cara propia**.
5. El **interior** de $\Delta(x_0, \dots, x_d)$ es el conjunto de todos los puntos de $\Delta(x_0, \dots, x_d)$ con coordenadas baricéntricas positivas.
6. Si $S = \Delta(x_0, \dots, x_d)$, al interior de S lo denotaremos por \mathring{S} .

Definición 4.32. El n -simplejo estándar en \mathbb{R}^n es $\Delta(\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_n)$, donde $\{\hat{e}_0, \dots, \hat{e}_n\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} ($\hat{e}_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ con 1 en la i -ésima entrada).

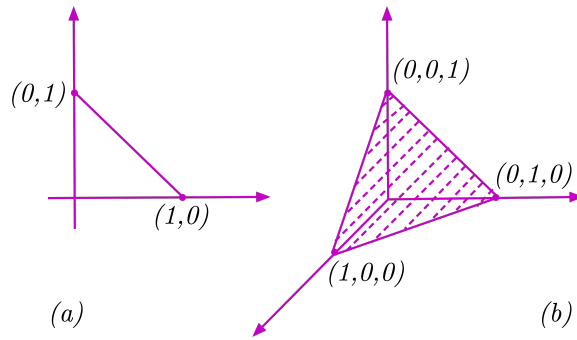


Figura 4: (a) 1-simplejo estándar, (b) 2-simplejo estándar.

Observación 4.33. Si S es un d -simplejo euclidiano en \mathbb{R}^n y $d \geq 1$, entonces $\overset{\circ}{S}$ coincide con el interior de S como subespacio topológico de \mathbb{R}^n y podemos obtener a $\overset{\circ}{S}$ si le quitamos a S sus caras propias.

Definición 4.34. Un complejo simplicial K en \mathbb{R}^n es una familia de simplejos de \mathbb{R}^n que satisface:

- s1 Si $S \in K$, entonces toda cara de S está en K .
- s2 Si S_1 y S_2 son simplejos de K y si $\overset{\circ}{S}_1 \cap \overset{\circ}{S}_2 \neq \emptyset$, entonces $S_1 = S_2$.

La dimensión de K es el máximo de las dimensiones de los simplejos que lo forman.

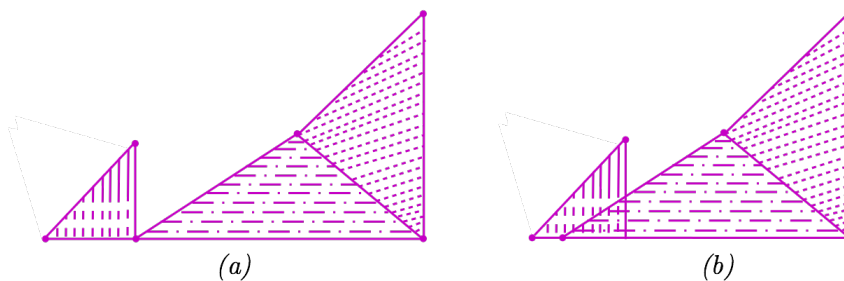


Figura 5: (a) Complejo simplicial 2-dimensional de \mathbb{R}^2 , (b) No es complejo simplicial.

- Observaciones 4.35.*
1. El d -simplejo $\Delta(x_0, \dots, x_d)$ es la envolvente convexa de $\{x_0, \dots, x_d\}$.
 2. Si x_0, \dots, x_d son afinmente independientes entonces cualquier subconjunto de $\{x_0, \dots, x_d\}$ es afinmente independiente.

Ejemplos 4.36. 1. Todo simplejo de \mathbb{R}^n , visto como el conjunto de sus caras, es un complejo simplicial.

2. El conjunto de todas las caras propias de un simplejo d -dimensional en \mathbb{R}^n es un complejo simplicial de dimensión $(d - 1)$.
3. El conjunto de todos los intervalos $[1/n, 1/(n + 1)]$, con $n \in \mathbb{N}$ es un complejo simplicial (con un número infinito de simplejos).
4. Si P_m es una línea poligonal regular contenida en $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, cuyos vértices son las m -raíces de la unidad $\{z \in \mathbb{C} : z^m = 1\}$. El complejo simplicial correspondiente es homeomorfo a S^1 .

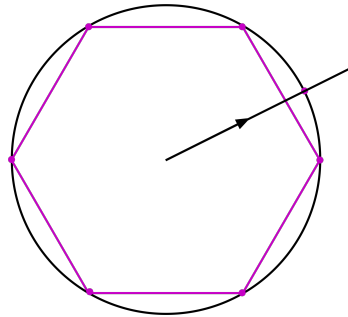


Figura 6: Hexágono P_6 con las seis raíces de la unidad como vértices.

5. Los sólidos platónicos pueden subdividirse en triángulos. Ello da lugar a complejos simpliciales en \mathbb{R}^3 .

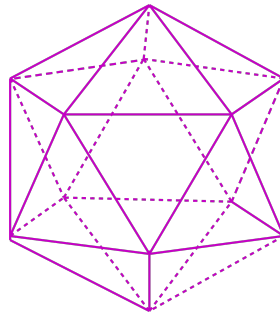


Figura 7: Icosaedro.

4.3 FUNCIONES SIMPLICIALES

Definición 4.37. Una función afín $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es cualquier función de la forma $F(x) = c + A(x)$, donde A es una función lineal y c es algún vector fijo en \mathbb{R}^m .

Toda función afín es continua.

- Definición 4.38.** 1. Sean K, L complejos simpliciales y sean K_0 y L_0 sus 0-esqueletos (i.e. los conjuntos de sus vértices). Una función simplicial de K a L es una función continua $f : |K| \rightarrow |L|$ cuya restricción a cada simplejo $\sigma \in K$ coincide con una función afín que transforma a σ sobre algún simplejo en L .
2. La restricción de f a K_0 genera una función $f : K_0 \rightarrow L_0$ llamada transformación de vértices de f . Una función simplicial se llama isomorfismo simplicial si es también un homeomorfismo.

Observación 4.39. f^{-1} también es una función simplicial.

□

4.4 COMPLEJOS SIMPLICIALES ABSTRACTOS

Definición 4.40. 1. Un complejo simplicial (abstracto) es una pareja $K = (X, \Phi)$, donde X es un conjunto finito y $\Phi \subseteq \wp(X) - \{\emptyset\}$, tal que:

- κ_1 Para todo $x \in X, \{x\} \in \Phi$.
- κ_2 Para cualquier $\sigma \in \Phi$ y para todo $\sigma' \subseteq \sigma$ con $\sigma' \neq \emptyset$ se tiene que $\sigma' \in \Phi$.
2. Los elementos de X son los vértices de K .
3. Los elementos de Φ son los simplejos de K .
4. Si σ es un simplejo de K , todo subconjunto no vacío σ' de σ es una cara de σ . Sea $\sigma \in \Phi$, diremos que σ es un n -simplejo (o que σ es un simplejo de dimensión n) si σ tiene $n + 1$ elementos. La proposición « σ es un n -simplejo» se escribe $\dim \sigma = n$.
5. Si existe $n := \max\{\dim \sigma : \sigma \in \Phi\}$; éste número se le llama la dimensión de K y se denota por $\dim K = n$, se dice que K tiene dimensión n o que es n -dimensional.

Convención 4.41. En este trabajo, supondremos que todos los simplejos de un complejo simplicial son conjuntos finitos y también que todo complejo simplicial euclidiano es una familia finita de simplejos euclidianos.

Observaciones 4.42. Si $K = (X, \Phi)$ es un complejo simplicial, entonces:

1. Si $\sigma \in \Phi$ y $\sigma' \subseteq \sigma$ es una cara de σ , entonces $\sigma' \in \Phi$ (Por **K2**).
2. Los 0-simplejos de K son vértices.

Definición 4.43. Diremos que un complejo simplicial $L = (Y, \Psi)$ es un subcomplejo del complejo simplicial $K = (X, \Phi)$ si $Y \subseteq X$ y $\Psi \subseteq \Phi$.

Observación 4.44. Si $K_0 = (X_0, \Phi_0)$ y $K_1 = (X_1, \Phi_1)$ son subcomplejos de un complejo simplicial K , entonces

$$K_0 \cup K_1 := (X_0 \cup X_1, \Phi_0 \cup \Phi_1) \text{ y } K_0 \cap K_1 := (X_0 \cap X_1, \Phi_0 \cap \Phi_1)$$

con $X_0 \cap X_1 \neq \emptyset$, son subcomplejos de K .

En particular, la unión de dos complejos simpliciales ajenos K_0 y K_1 (es decir, tales que $X_0 \cap X_1 = \emptyset$), es un complejo simplicial.

Ejemplos 4.45. 1. Sea X un conjunto finito y sea $\wp(X) = 2^X$ el conjunto de subconjuntos de X . Claramente la pareja $K = (X, \wp(X) - \{\emptyset\})$ es un complejo simplicial.

2. El conjunto de todos los simplejos de un complejo simplicial euclidiano es un complejo simplicial abstracto.

Demostración. En efecto, si Φ es el conjunto $\{S_1, \dots, S_n\}$, donde para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, S_i es un simplejo euclidiano y, si para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$, x_i son los vértices de S_i , entonces $K = (\cup_{i=1}^n \{x_i\}, \Phi)$ es un complejo simplicial abstracto. \square

Observación 4.46. Sea $K = (X, \Phi)$ un complejo simplicial. Entonces, para todo simplejo $\sigma \in \Phi$, la pareja $\bar{\sigma} = (\sigma, \wp(\sigma) - \{\emptyset\})$ es un complejo simplicial.

Demostración. En efecto, σ es un conjunto finito pues $\sigma \in \Phi \subseteq \wp(X)$ y, como X es finito y σ es un subconjunto de X , σ es finito. Todos los subconjuntos de σ de un elemento están en $\wp(\sigma) - \{\emptyset\}$ y si $\mu \in \wp(\sigma) - \{\emptyset\}$ y $\mu' \subseteq \mu$ con $\mu \neq \emptyset$ entonces $\mu' \in \wp(\sigma) - \{\emptyset\}$. \square

Definición 4.47. Sea $K = (X, \Phi)$ un complejo simplicial. Entonces

1. Si $\sigma \in \Phi$, entonces al complejo simplicial $\bar{\sigma} := (\sigma, \wp(\sigma) - \{\emptyset\})$ se llama el complejo simplicial generado por σ (algunas veces se llama «la cerradura de σ »).
2. Si $B \subseteq \Phi$ entonces $\bar{B} := \cup_{\sigma \in B} \bar{\sigma}$ es el complejo simplicial generado por todos los simplejos del conjunto B .

Observación 4.48. Note que \bar{B} es un subcomplejo de K .

Demostración. En efecto, si $B = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, entonces, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que $\bar{\sigma}_i = (\sigma_i, \wp(\sigma_i) - \{\emptyset\})$ y por lo tanto $\bar{B} = (\cup_{i=0}^n \sigma_i, \cup_{i=1}^n (\wp(\sigma_i) - \{\emptyset\}))$. Es claro que $\cup_{i=1}^n \sigma_i \subseteq X$. Si $\varphi \in \cup_{i=1}^n (\wp(\sigma_i) - \{\emptyset\})$ entonces $\varphi \neq \emptyset$. Además, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\varphi \subseteq \sigma_i$, luego $\varphi \in \Phi$. \square

Observación 4.49. Si $K = (X, \Phi)$ es un complejo simplicial, $\sigma \in \Phi$ con más de un elemento, entonces, $\hat{\sigma} = (\sigma, \wp(\sigma) - \{\emptyset, \sigma\})$ es un complejo simplicial.

Definición 4.50. Si $K = (X, \Phi)$ es un complejo simplicial, $\sigma \in \Phi$ con más de un elemento, entonces, el complejo simplicial $\hat{\sigma} = (\sigma, \wp(\sigma) - \{\emptyset, \sigma\})$ se llama la frontera de σ . A veces escribiremos $\bar{\sigma} = \hat{\sigma} \cup \sigma$.

Definición 4.51. Dados dos complejos simpliciales $K = (X, \Phi)$ y $L = (Y, \Psi)$.

1. La juntura de K y L es el complejo simplicial $K * L$ cuyos vértices son los elementos de $X \cup Y$ y cuyos simplejos son los elementos de los conjuntos Φ y Ψ y del conjunto $\{\{x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m\} : \{x_0, \dots, x_n\} \in \Phi \text{ y } \{y_0, \dots, y_m\} \in \Psi\}$. Es decir, llamaremos $\Phi * \Psi$ al conjunto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x_0, \dots, x_n\} \in \Phi \cup \{\emptyset\} \\ \{x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m\} \subseteq X \cup Y - \{\emptyset\} : y \\ \{y_0, \dots, y_m\} \in \Psi \cup \{\emptyset\} \end{array} \right\}$$

entonces $K * L = (X \cup Y, \Phi * \Psi)$.

2. En particular, si $L(Y, \Psi)$ es un complejo simplicial definido por un único punto y , $K * L$, que denotaremos por $K * y$ o por Ky , se llamará cono (abstracto) de K con vértice y . Análogamente se define el cono yK .
3. Si L es el complejo simplicial determinado por dos puntos x y y , esto es, $L = (Y, \Psi)$, con $Y = \{x, y\}$, y $\Psi = \{\{x\}, \{y\}\}$, entonces la juntura $K * L = \sum K$ se llama suspensión de K .

Observación 4.52. 1. La juntura de K y L es un complejo simplicial.

2. Un n -simplejo con $n \geq 1$ se puede interpretar como el cono de cada una de sus caras de dimensión $n - 1$.

3. $\sum K$ se puede ver como la unión de los conos $K * x$ y $K * y$.

Definición 4.53. Si $K = (X, \Phi)$ y $L = (Y, \Psi)$ son complejos simpliciales, un morfismo de K a L es una función $f : X \rightarrow Y$ tal que para todo $\sigma := \{x_0, \dots, x_n\} \in \Phi$, $f(\sigma) := \{f(x_0), \dots, f(x_n)\} \in \Psi$. Para decir que $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo de K a L , usaremos la notación $f : K \rightarrow L$.

Observación 4.54. La quinteta $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, \text{dom}, \text{cod}, \circ)$ donde \mathcal{O} es la clase de todos los complejos simpliciales, \mathcal{M} es la clase de mordiscos entre complejos simpliciales, dom , cod y \circ son el dominio, codominio y composición usuales para las funciones entre conjuntos, es una categoría.

Definición 4.55. La categoría de la observación anterior se denotarán por Csim y un morfismo $f : K \rightarrow L$ en Csim se llama una función simplicial de K a L .

4.4.1 Funtor realización geométrica

Definición 4.56. Sea $K = (X, \Phi)$ es un complejo simplicial. Definimos

1. $V(K) := \{p : X \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\} : p \text{ es función}\}$.
2. Si $p \in V(K)$, el soporte de p es $s(p) := \{x \in X : p(x) > 0\}$.
3. $|K| := \{p \in V(K) : s(p) \in \Phi \wedge \sum_{x \in s(p)} p(x) = 1\}$.

Proposición 4.57. Si $K = (X, \Phi)$ es un complejo simplicial, la función $d : |K| \times |K| \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ tal que para toda $(p, q) \in |K| \times |K|$ se tiene que,

$$d_K(p, q) := \sqrt{\sum_{x \in X} (p(x) - q(x))^2}$$

es una métrica sobre $|K|$.

Demostración. Note que si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ y $q : X \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, se tiene que $(p(x_1), \dots, p(x_n)) \in \mathbb{R}^n$ y que $(q(x_1), \dots, q(x_n)) \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto $d_K(p, q)$ no es más que la distancia euclidiana usual en \mathbb{R}^n , restringido a $(\mathbb{R}_+ \cup \{0\})^X$. \square

Definición 4.58. Si $K = (X, \Phi)$ es un complejo simplicial, el espacio métrico $(|K|, d_K)$ se llama la realización geométrica de K .

Observación 4.59. Sea $K = (X, \Phi)$ un complejo simplicial. Entonces, $(|K|, d_K)$ es un espacio métrico acotado, en el sentido de que para cualesquiera $p, q \in |K|$ se tiene que $d(p, q) \leq \sqrt{2}$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
 d(p, q) &= \sqrt{\sum_{x \in X} (p(x) - q(x))^2} \\
 &\leq \sqrt{\sum_{x \in X} (p(x)^2 + q(x)^2)} \\
 &= \sqrt{\sum_{x \in X} p(x)^2 + \sum_{x \in X} q(x)^2} \\
 &\leq \sqrt{\sum_{x \in s(p)} p(x)^2 + \sum_{x \in s(q)} q(x)^2} \\
 &\leq \sqrt{\sum_{x \in s(p)} p(x) + \sum_{x \in s(q)} q(x)} \\
 &= \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

□

Observaciones 4.60. Sea $K = (X, \Phi)$ un complejo simplicial.

1. Supongamos que X tiene n elementos ($X = \{x_1, \dots, x_n\}$). Note que $V(K) \subset \mathbb{R}^X \simeq \mathbb{R}^n$ y $|K| \subseteq \mathbb{R}^n$. Además, $|K|$ se puede pensar como un subespacio métrico de \mathbb{R}^n con la métrica usual, como dijimos en la demostración de la Proposición 4.57.
2. Podemos escribir los elementos de $|K|$ como combinaciones lineales. Sea x un vértice de K . Podemos definir $\hat{x} : X \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ tal que para cualquier $y \in X$

$$\hat{x}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \neq x; \\ 1 & \text{si } y = x. \end{cases}$$

Notemos que para todo $x \in X$ se tiene que $\hat{x} \in V(K)$ y que $s(\hat{x}) = \{x\}$.

Si $p \in |K|$ y $s(p) = \{x_1, \dots, x_m\}$ y si para todo $i \in \{0, \dots, m\}$ se tiene que $p(x_i) = \alpha_i$, entonces podemos escribir $p = \sum_{i=0}^m \alpha_i \hat{x}_i$.

Demostración. En efecto, sea $x \in X$.

- a. Si $x \notin s(p)$ se tiene que $p(x) = 0$. Por otro lado, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, $x \neq x_i$. Entonces $\hat{x}_i(x) = 0$ para cualquier $i \in \{1, \dots, m\}$. Por lo tanto $\sum_{i=0}^m (\alpha_i \hat{x}_i)(x) = 0$. Así $p(x) = \sum_{i=0}^m (\alpha_i \hat{x}_i)(x)$.
- b. Si $x \in s(p)$ existe $i_0 \in \{0, \dots, m\}$ tal que $x = x_{i_0}$. Así $\sum_{i=0}^m (\alpha_i \hat{x}_i)(x) = \alpha_{i_0} = p(x_{i_0}) = p(x)$.

Por lo tanto $p = \sum_{i=0}^m \alpha_i \hat{x}_i$ □

3. Suele identificarse cada función \hat{x} con x y escribirse $p = \sum_{i=0}^m \alpha_i x_i$.
4. Supongamos que $\{x_0, \dots, x_m\} \in \Phi$ y que $\alpha_0, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ son tales que $\sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$. Si $p = \sum_{i=0}^m \alpha_i \hat{x}_i(x)$, entonces $p \in |K|$.

Demostración. En efecto, $p \in V(K)$. Note que $p(x) > 0$ si y sólo si $\sum_{i=0}^m \alpha_i \hat{x}_i > 0$ si y sólo si existe un único $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $x = x_i$. Por lo tanto $s(p) = \{x_0, \dots, x_m\} \in \Phi$ y por lo tanto $\sum_{x \in s(p)} p(x) = \sum_{i=0}^m p(x_i) = \sum_{i=0}^m \alpha_i = 1$. □

Definición 4.61. Si $K = (X, \Phi)$ es un complejo simplicial, $p \in |K|$, $s(p) = \{x_0, \dots, x_m\}$ y para todo $i \in \{0, \dots, m\}$, $\alpha_i = p(x_i)$ entonces $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ se llaman coordenadas baricéntricas de p

Observación 4.62. Si $p, q \in |K|$ entonces $p = q$ si y sólo si p y q tienen las mismas coordenadas baricéntricas.

Lema 4.63. Sean $K = (X, \Phi), L = (Y, \Psi)$ complejos simpliciales, $f : K \rightarrow L$ un morfismo de $Csim$ y $|f| : |K| \rightarrow |L|$ es tal que para cualquier $p = \sum_{i=0}^m \alpha_i x_i$ se tiene que $|f|(p) = \sum_{i=0}^m \alpha_i f(x_i)$. Si $p \in |K|$, entonces existe $c(p) > 0$ tal que para cualquier $q \in |K|$, $d_{|K|}(|f|(p), |f|(q)) \leq c(p)d(p, q)$.

Demostración. Sea $p \in |K|$. Si $q \in |K|$, $s(p) = \{x_0, \dots, x_n\}$, $s(q) = \{y_0, \dots, y_m\}$, para todo $i \in \{0, \dots, n\}$, $\alpha_i = p(x_i)$ y para cualquier $j \in \{0, \dots, m\}$, $\beta_j = q(y_j)$. Tenemos los siguientes tres casos.

a. Supongamos que $s(p) \cap s(q) = \emptyset$. Entonces

$$\begin{aligned}
 d(p, q) &= \sqrt{\sum_{x \in X} (p(x) - q(x))^2} \\
 &= \sqrt{\sum_{x \in s(p)} (p(x) - q(x))^2 + \sum_{x \in s(q)} (p(x) - q(x))^2} \\
 &= \sqrt{\sum_{x \in s(p)} p(x)^2 + \sum_{x \in s(q)} q(x)^2} \\
 &= \sqrt{\sum_{i=0}^n \alpha_i^2 + \sum_{i=0}^m \beta_i^2} \geq \sqrt{\sum \alpha_i^2}.
 \end{aligned}$$

Note que con la condición $\sum \alpha_i = 1$ se tiene que $\sum \alpha_i^2$ tiene un mínimo, cuando $\alpha_i = 1/(n+1)$. Por lo tanto $d(p, q) \geq 1/\sqrt{n+1}$. Así $d_L(|f|(p), |f|(q))$ y como $d(p, q) \leq \sqrt{2}$ obtenemos que $d_L(|f|(p), |f|(q)) \leq \sqrt{2(n+1)}$. En este caso $c(p) = \sqrt{2(n+1)}$.

b. Supongamos que $s(p) \cap s(q) \neq \emptyset$ pero $s(p) \not\subseteq s(q)$ y $s(q) \not\subseteq s(p)$. Reescribimos los índices de los elementos de $s(p)$ y $s(q)$ de tal forma que los elementos comunes son $x_r = y_0, x_{r+1} = y_1, \dots, x_n = y_{n-r}$ (son $n-r+1$ elementos en común). Note que $s(p) \cup s(q)$ tiene exactamente $n+m-(n-r+1) = m+r+1$ elementos. Sean

$$z_i = \begin{cases} x_i & 0 \leq i \leq r-1 \\ x_i = y_i & r \leq i \leq n; \\ y_i & n+1 \leq i \leq m+r. \end{cases}$$

y

$$\gamma_i = \begin{cases} -\alpha_i & 0 \leq i \leq r-1 \\ -\alpha_i + \beta_{i-r} & r \leq i \leq n; \\ \beta_{i-r} & n+1 \leq i \leq m+r. \end{cases}$$

Note que para cualesquiera $i \in \{0, \dots, r-1\}, \gamma_i \leq 0$ y para todo $i \in \{n+1, \dots, m+r\}, \gamma_i > 0$. Ordenemos los números γ_i de tal forma que $\gamma_0 \leq \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_{m+r}$ (si es necesario se permutan los índices).

Como $s(p) \not\subseteq s(q)$ y existe $x \in s(q) - s(p)$, se sigue que $x \in \{x_0, \dots, x_{r-1}\}$. Así $\{i \in \{0, \dots, m+r\} : \gamma_i < 0\} \neq \emptyset$. Sea $\ell = \max\{i \in \{0, \dots, m+r\} : \gamma_i < 0\}$. Es claro que $\ell \geq r-1$. También existe $y \in s(q) - s(p)$, luego $\{i \in \{0, \dots, m+r\} : \gamma_i > 0\} \neq \emptyset$. Por lo que $r-1 \leq \ell \leq n$.

Por otro lado, los vértices z_0, z_1, \dots, z_ℓ vistos como funciones son sumandos de p (los γ_i correspondientes son negativos). Mientras que los vértices $z_{\ell+1}, \dots, z_{m+r}$ son parte de q (los correspondientes números γ_i son no negativos).

Sea $\lambda = \sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i < 0$ y consideremos las sucesiones finitas,

$$\left\{ \frac{\gamma_0}{\lambda}, \dots, \frac{\gamma_\ell}{\lambda} \right\} \text{ y } \left\{ \frac{\gamma_{\ell+1}}{-\lambda}, \dots, \frac{\gamma_{m+r}}{-\lambda} \right\}.$$

Note que

$$\sum_{i=0}^{\ell} \frac{\gamma_i}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{\ell} \gamma_i = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m+r} \gamma_i &= \sum_{i=0}^{r-1} -\alpha_i + \sum_{i=r}^n -\alpha_i + \sum_{i=r}^n \beta_{i-r} + \sum_{i=n+1}^{m+r} \beta_{i-r} \\ &= \sum_{i=0}^n -\alpha_i + \sum_{i=r}^{m+r} \beta_{i-r} \\ &= \sum_{i=0}^n -\alpha_i + \sum_{i=0}^m \beta_i = 1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Así,

$$\lambda + \sum_{i=\ell+1}^{m+r} \gamma_i = \sum_{i=0}^{m+r} \gamma_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=\ell+1}^{m+r} \gamma_i = -\lambda.$$

Luego,

$$\sum_{i=\ell+1}^{m+r} \frac{\gamma_i}{-\lambda} = 1.$$

Por lo tanto, los elementos

$$p' := \sum_{i=0}^{\ell} \frac{\gamma_i}{\lambda} \hat{z}_i \text{ y } q' = \sum_{i=\ell+1}^{m+r} \frac{\gamma_i}{-\lambda} \hat{z}_i$$

están en $|K|$.

Además, note que si $x \in s(p')$ se tiene que $(\sum_{i=0}^{\ell} \frac{\gamma_i}{\lambda} \hat{z}_i)(x) > 0$, luego $x \in \{z_i : i \in \{0, \dots, \ell\}\}$. Así $x = x_i \in s(p)$, para algún $i \in \{0, \dots, \ell\}$. Del mismo modo si $x \in s(q')$ entonces $x \in s(q)$. Por lo que $s(p') \subseteq s(p)$ y $s(q') \subseteq s(q)$.

Supongamos que $s(p') \cap s(q') \neq \emptyset$. Sea $y \in s(p') \cap s(q')$, entonces $p'(y) > 0$ y $q'(y) > 0$. Luego, existen $i \in \{0, \dots, \ell\}$ y

$j \in \{\ell + 1, \dots, m + r\}$ tales que $z_i = y = z_j$. Si $i \in \{0, \dots, r - 1\}$ y $j \in \{n + 1, \dots, m + r\}$ se tiene que $x_i \neq y_j$ lo cual es una contradicción. Por otro lado si $i, j \in r, \dots, n$, como $i \neq j$ y dado que los elementos $x_i \neq x_j$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$ se tiene un contradicción. Por lo tanto $s(p') \cap s(q') = \emptyset$.

Por caso a., $d(|f|(p'), |f|(q')) \leq \sqrt{2(\ell + 1)}d(p', q')$.

Observe que

$$\begin{aligned} d(p', q') &= \sqrt{\sum_{i=0}^{\ell} \frac{\gamma_i^2}{\lambda^2} + \sum_{i=\ell+1}^{m+r} \frac{\gamma_i^2}{-\lambda^2}} \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \sqrt{\sum_{i=0}^{m+r} \gamma_i^2} \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \sqrt{\sum_{i=0}^n \alpha_i^2 + \sum_{i=0}^m \beta_i^2} \\ &= \frac{1}{-\lambda} d(p, q). \end{aligned}$$

Del mismo modo $d(|f|(p'), |f|(q')) = 1/(-\lambda)d(|f|(p), |f|(q))$, además $\sqrt{2(\ell + 1)} \leq \sqrt{2(n + 1)}$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} d(|f|(p), |f|(q)) &= -\lambda d(|f|(p'), |f|(q')) \\ &\leq -\lambda \sqrt{2(\ell + 1)} d(p', q') \\ &= -\lambda \sqrt{2(\ell + 1)} \frac{1}{-\lambda} d(p, q) \\ &\leq \sqrt{2(n + 1)} d(p, q). \end{aligned}$$

En este caso también $c(p) = \sqrt{2(n + 1)}$.

- c. Supongamos que $s(p) \cap s(q) \neq \emptyset$ y $s(p) \subseteq s(q)$. Reescribimos los índices de $s(p)$ y $s(q)$ de tal suerte que $x_i = y_i$ para cualquier $i \in 0, \dots, n$. Consideremos los elementos:

$$z_i = \begin{cases} x_i = y_i & 0 \leq i \leq n; \\ y_i & n + 1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

y los números reales

$$\gamma_i = \begin{cases} -\alpha_i + \beta_i & 0 \leq i \leq n; \\ \beta_i & n + 1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

- i. Supongamos que para todo $i \in \{0, \dots, n\}$ se tiene que $-\alpha_i + \beta_i \geq 0$.

Note que $\beta_i \geq \alpha_i$, luego

$$1 = \sum_{i=0}^m \beta_i \geq \sum_{i=0}^n \beta_i \geq \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1.$$

Así $\sum_{i=0}^n \beta_i = 1$, entonces $\sum_{i=n+1}^m \beta_i = 0$. Por lo tanto $\beta_i = 0$ es decir $q(y_i) = 0$, luego $y_i \notin s(q)$ para todo $i \in \{n+1, \dots, m\}$. Entonces $s(q) = \{y_0, \dots, y_n\} = s(p)$. Además, si existiera $i_0 \in \{0, \dots, n\}$ tal que $\beta_{i_0} > \alpha_{i_0}$ se tendría que $\sum_{i=0}^n \beta_i > \sum_{i=0}^n \alpha_i$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto para toda $i \in \{0, \dots, n\}$ $\beta_i = \alpha_i$.

- Si $x \notin s(q) = s(p)$ entonces $p(x) = 0 = p(q)$.
- Si $x \in s(q) = s(p)$ se tiene que $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$, luego $\exists i_0 \in \{0, \dots, n\}$ tal que $x = x_{i_0}$ lo cual implica que $p(x) = \alpha_{i_0} = \beta_{i_0} = q(x)$.

Finalmente $p = q$. Por lo tanto, $d(|f|(p), |f|(q)) = 0 = \sqrt{2(n+1)}d(p, q)$.

- ii. Supongamos que existe $i \in \{0, \dots, n\}$ tal que $-\alpha_i + \beta_i < 0$. Ordenamos los números γ_i de tal forma que $\gamma_0 \gamma_1 \cdots < \gamma_m$. Luego, sea $\ell = \max\{i \in \{0, \dots, m\} : \gamma_i \leq 0\}$. Por lo tanto $0 \leq \ell \leq n$. Sean

$$p' := \sum_{i=0}^{\ell} \frac{\gamma_i}{\lambda} \hat{z}_i \text{ y } q' = \sum_{i=\ell+1}^{m+r} \frac{\gamma_i}{-\lambda} \hat{z}_i.$$

Como en el caso (b.) se tiene que $p', q' \in |K|$. Luego $s(p') \subseteq s(p)$ y $s(q') \subseteq s(q)$. Además $s(p') \cap s(q') = \emptyset$. Así, como en el caso (b.) se sigue que $d(|f|(p), |f|(q)) \leq c(p)d(p, q)$.

□

Como un corolario, obtenemos:

Proposición 4.64. Sean $K = (X, \Phi)$, $L = (Y, \Psi)$ complejos simpliciales, $f : K \rightarrow L$ es un morfismo de Csim y $|f| : |K| \rightarrow |L|$ es tal que para cualquier $p = \sum_{i=0}^m \alpha_i x_i$ se tiene que $|f|(p) = \sum_{i=0}^m \alpha_i f(\hat{x}_i)$. Entonces la función inducida $|f| : |K| \rightarrow |L|$ es continua.

Demostración. Si $p \in |K|$ por lema anterior, existe $c(p) > 0$ tal que $d(|f|(p), |f|(q)) \leq c(p)d(p, q)$. Sea $\varepsilon > 0$, definamos

$\delta = \varepsilon/c(p) > 0$. Entonces para cualquier $q \in |K|$ se tiene que $d_{|K|}(p, q) \leq \delta$. Por lo tanto $d_{|L|}(|f|(p), |f|(q)) \leq c(p)d(p, q) \leq c(p)\delta = \varepsilon$. Finalmente $|f|$ es continua. \square

Teorema 4.65. *La terna $(\mathcal{C}_{\text{sim}}, \|\cdot\|, \text{Top})$, donde $\|\cdot\| : \mathcal{M}_{\mathcal{C}_{\text{sim}}} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{Top}}$ es la función tal que si $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}_{\text{sim}}}(K, L)$, entonces $|f| : |K| \rightarrow |L|$ es tal que para cualquier $p = \sum_{i=0}^m \alpha_i x_i$ se tiene que $|f|(p) = \sum_{i=0}^m \alpha_i f(\hat{x}_i)$, es un funtor, que se llama funtor realización geométrica. Para cada $|\in \mathcal{O}_{\mathcal{C}_{\text{sim}}}$, $|K|$ es la realización geométrica de K .*

Demostración. Por la proposición anterior $\|\cdot\|$ está bien definida. Sea $K = (X, \Phi)$. Además, si $f = 1_K$ en \mathcal{C}_{sim} entonces $f = 1_X$. Así para cualquier $p = \sum_{i=0}^n \alpha_i y_i$ y $|f|(p) = \sum_{i=0}^n \alpha_i 1_X(x_i) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i = p$. Por lo tanto $|f| = 1_{|K|}$. Así «manda identidades en identidades».

Si $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \in \mathcal{M}_{\mathcal{C}_{\text{sim}}}$ donde $L = (Y, \Psi)$ y $M = (Z, \Sigma)$

$$\begin{aligned} |g \circ f|(p) &= \sum_{i=0}^n \alpha_i (g \circ f)(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^n \alpha_i g(f(x_i)) \\ &= |g|\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i)\right) \\ &= |g|(|f|\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i x_i\right)) \\ &= |g| \circ |f|(p) \end{aligned}$$

\square

Teorema 4.66. *Sea $K = (X, \Phi)$ un complejo simplicial. Entonces se cumplen:*

1. *Si $\sigma \in \Phi$, la realización geométrica $|\bar{\sigma}|$ de $\bar{\sigma}$ es convexo.*
2. *Para cualesquiera dos simplejos $\sigma, \tau \in \Phi$ se tiene que $|\bar{\sigma}| \cap |\bar{\tau}| = |\bar{\sigma} \cap \bar{\tau}|$.*
3. *Para toda $\sigma \in \Phi$, $\bar{\sigma}$ es compacto.*

Demostración. 1. Sea $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\} \subseteq X$. Sean $p = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i$ y $q = \sum_{i=0}^n \beta_i x_i$ y $[p, q]$ el segmento $\{tp + (1-t)q : t \in [0, 1]\}$. Entonces, si $t \in [0, 1]$, $r = tp + (1-t)q = \sum_{i=0}^n (t\alpha_i +$

$(1-t)\beta_i)x_i$. Luego para todo $i \in \{0, \dots, n\}$, $t\alpha_i + (1-t)\beta_i > 0$ y

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (t\alpha_i + (1-t)\beta_i) &= t \sum_{i=0}^n \alpha_i + (1-t)\beta_i \\ &= t + (1-t) = 1. \end{aligned}$$

Así $r \in |\sigma|$.

2. Observe que si $p \in |\bar{\sigma}|$, entonces $s(p) \subseteq \sigma$. Por ende, si $p \in |\bar{\sigma} \cap \bar{\tau}|$ se tiene que $s(p) \subseteq \sigma \cap \tau$ luego, $p \in |\overline{s(p)}| \subseteq |\overline{\sigma \cap \tau}|$. Por lo tanto $|\bar{\sigma} \cap \bar{\tau}| \subseteq |\overline{\sigma \cap \tau}|$.

Inversamente, si $p \in |\overline{\sigma \cap \tau}| = |(\sigma \cap \tau, \wp(\sigma \cap \tau) - \{\emptyset\})|$. Luego $\overline{s(p)} \subseteq \sigma \cap \tau$ implica que $\overline{s(p)} = (s(p), \wp(s(p)) - \{\emptyset\}) \subseteq \overline{\sigma}$ y $\overline{s(p)} \subseteq \overline{\tau}$. Así $|\overline{s(p)}| \subseteq |\overline{\sigma}|$ y $|\overline{s(p)}| \subseteq |\overline{\tau}|$. Finalmente $|\overline{s(p)}| \subseteq |\overline{\sigma} \cap \overline{\tau}|$.

3. Sea $\sigma \in \Phi$ tal que $s(p) = \{x_0, \dots, x_n\}$. Tomemos el n -simplejo estándar

$$\Delta^n = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq z_i \leq 1, \sum_{i=0}^n z_i = 1\}.$$

Dotado de un sistema de coordenadas baricéntricas con respecto a los vértices $e_0 = (1, \dots, 0)$, $e_1 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Podemos escribir los elementos de Δ^n como combinaciones lineales con coeficientes reales no negativos, $\sum_{i=0}^n \alpha_i e_i$, donde $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$. Además Δ^n es compacto en \mathbb{R}^{n+1} , pues es cerrado y acotado en \mathbb{R}^{n+1} .

Si definimos $f : \{e_0, \dots, e_n\} \rightarrow \{x_0, \dots, x_n\}$, con $f(e_j) = x_j$ para todo $j \in \{0, \dots, n\}$. Note que f es morfismo. Sea $F : \Delta^n \rightarrow |\bar{\sigma}|$ la función que manda $p = \sum_{i=0}^n \alpha_i e_i \in \Delta^n$ al punto $F(p) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(e_i)$. Note que $F = |f|$, luego F es continua. También f es biyectiva y por lo tanto $f(\Delta^n) = |\bar{\sigma}|$ es compacto.

□

Definición 4.67. Sea $K = (X, \Phi)$ un complejo simplicial. Para toda $p \in |K|$, sea

$$B(p) := \{\sigma \in \Phi : p \in |\bar{\sigma}|\}$$

y sea

$$D(p) := \bigcup_{\sigma \in B(p)} |\bar{\sigma}|.$$

La frontera $S(p)$ de $D(p)$

$$S(p) := \partial D(p) = \bigcup_{\sigma \in B(p)} \bigcup_{\tau \subseteq \sigma, p \notin |\tau|} |\tau|$$

Observaciones 4.68. 1. Intuitivamente $D(p)$ es el disco definido por todos los simplejos geométricos que contienen a P y $S(p)$ es la «esfera» que la acota.

2. $D(p)$ y $S(p)$ son subconjuntos cerrados de $|K|$. (Son unión finitas de compactos y por ende cerrados en $|K|$)
3. $D(p)$ y $S(p)$ son subcomplejos de $|K|$.

Teorema 4.69. *Sea K un complejo simplicial. Entonces*

1. *para todo $p \in |K|$, $D(p)$ es compacto;*
2. *para cualesquiera $p \in |K|$, $q \in D(p) - \{p\}$ y $t \in I$, $r = (1 - t)p + tq \in D(p)$ (para cualquier $p \in |K|$, $D(p)$ es «estrellado desde p »).*
3. *Todo rayo en $D(p)$ con origen p interseca a $S(p)$ en un único punto.*

Teorema 4.70. [6, Theorem II.2.11] *Si $f : |K| \rightarrow |L|$ es un homeomorfismo, entonces para toda $p \in |K|$, $S(p)$ y $S(f(p))$ tienen el mismo tipo de homotopía.*

Teorema 4.71. *Si $K = (X, \Phi)$ es un complejo simplicial y si $F \subset |K|$, entonces F es cerrado en $|K|$ si y sólo si para todo $\sigma \in \Phi$ $F \cap |\sigma|$ es cerrado en $|\sigma|$.*

Definición 4.72. Un poliedro o politopo es la realización geométrica de un complejo simplicial.

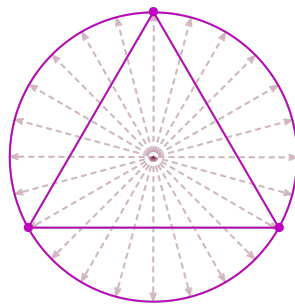


Figura 8: Triangulación de S^1 , usando un triángulo.

Definición 4.73. Si X es un espacio topológico, se dice que X es triangulable si existe un poliedro K que es homeomorfo a X . En este caso se dice que K es una triangulación de X .

Observación 4.74. Un espacio topológico puede tener más de una triangulación. Por ejemplo, es fácil entender que S^1 tiene una triangulación dada. Por ejemplo un complejo simplicial cuya realización geométrica es homeomorfa a la frontera de un triángulo equilátero. (Ver figura 8.)

Pero también puede triangularse por un complejo cuya realización geométrica sea un polígono regular con vértices en S^1 . (Ver figura 9.)

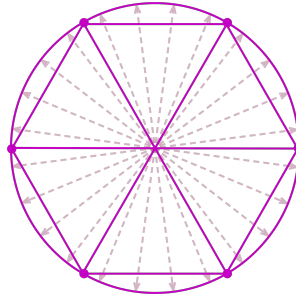


Figura 9: Triangulación de S^1 , usando un polígono regular.

Más generalmente, un disco \mathbb{D}^n y su frontera S^{n-1} son ejemplos de espacios triangulables. Pueden tener varias posibles triangulaciones.

Sea $\Sigma^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} |x_i| = 1\}$. Sea X el conjunto de vértices de Σ^n , es decir $X = \{a_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), a'_i = (0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} : i \in \{1, \dots, n+1\}\}$. Sea $\Phi = \{\{x_{i_0}, \dots, x_{i_r}\} \subseteq X : \{x_{i_0}, \dots, x_{i_r}\} \neq \emptyset \wedge (x_{i_s} = a_{i_s} \vee x_{i_s} = a'_{i_s}) \wedge 1 \leq i_0 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n+1\}$. Note que $K^n = \{X, \Phi\}$ es un complejo simplicial. Su realización geométrica es homeomorfa a Σ^n . Por otro lado Σ^n y S^n son homomorfos por proyección radial desde el centro y entonces, K^n es una triangulación de S^n . El complejo simplicial K^n se llama la triangulación estándar de S^n .

4.4.2 Complejos simpliciales e immersiones

Observaciones 4.75. 1. Sea $\mathfrak{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ una unión finita de simplejos euclidianos en \mathbb{R}^n tales que,

- a. si $\sigma \in \mathfrak{K}$, toda cara de σ está en \mathfrak{K} .
- b. la intersección de dos simplejos euclidianos de \mathfrak{K} es una cara de ambos.

Entonces \mathfrak{K} es un complejo simplicial euclidiano porque es claro que satisface:

- s1 Si $S \in \mathfrak{K}$ entonces toda cara de S está en \mathfrak{K} .
 - s2 Si $S_1, S_2 \in \mathfrak{K}$ y $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ entonces $S_1 = S_2$.
2. Si $F \subset \mathfrak{K}$ es cerrado entonces la intersección $F \cap \sigma$ es cerrado en σ para toda $\sigma \in \mathfrak{K}$. Inversamente, si F es un subconjunto de \mathfrak{K} tal que, para cualquier simplejo euclidiano σ de \mathfrak{K} , $F \cap \sigma$ es cerrado en σ , entonces F es cerrado en \mathfrak{K} , pues F es unión finita de los conjuntos cerrados $F \cap \sigma$.
 3. Un complejo euclidiano \mathfrak{K} de \mathbb{R}^n es compacto y cerrado en \mathbb{R}^n .

Teorema 4.76. [6, pág. II.2.14] *Todo poliedro n -dimensional $|K|$ es homeomorfo a un complejo simplicial euclidiano.*

4.4.3 El funtor homología

Definición 4.77. Sea $K = (X, \Phi)$ un complejo simplicial. Sea $\sigma_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ un n -simplejo de K .

1. Un orden de σ_n es alguna permutación de sus elementos.
2. Dos órdenes θ_1 y θ_2 de σ_n son equivalentes si existe una permutación par θ_3 , de los elementos de σ_n que $\theta_3\theta_2 = \theta_1$. Tal relación es de equivalencia.
3. Una orientación de σ_n es una clase de equivalencia

$$[x_0, \dots, x_n].$$

Observación 4.78. 1. Todo n -simplejo σ_n (con $n \geq 1$) tiene dos orientaciones.

2. Un 0-simplejo tiene solamente un orden.
3. Si $\sigma_n = [x_0, x_1, \dots, x_n]$ está orientada, el simplejo $[x_1, x_0, \dots, x_n]$, por ejemplo, se denotará por $-\sigma_n$.
4. Sea $n \geq 0$. Una orientación dada de $\sigma_n = [x_0, \dots, x_n]$ define automáticamente una orientación de todos sus $n - 1$ caras. Por ejemplo, si $\sigma_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$ está orientado por $[x_0, x_1, x_2]$, sus 1-caras orientadas son: $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_0] = -[x_0, x_2]$ y $[x_0, x_1]$.

5. Más generalmente. Si $\sigma_n = \{x_0, \dots, x_n\}$ está orientada por el orden natural de los índices de sus vértices, es decir, por $[x_0, x_1, \dots, x_n]$, sus $(n-1)$ -caras

$$\sigma_{n-1,i} = \{x_0, x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n\} = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$$

(opuesta al vértice x_i , con $i \in \{0, \dots, n\}$) tiene una orientación dada por $(-1)^i[\sigma_{n-1,i}]$ decimos que $\sigma_{n-1,i}$ está orientada coherentemente respecto a σ_n si i es par y que está orientada coherentemente a $-\sigma_n$ si i es impar.

6. Sea $K = (X, \Phi)$ un complejo simplicial. Sea \leq un orden parcial en X tal que para cualquier $\sigma \in \Phi$ el conjunto de vértices de σ está totalmente ordenado por \leq . De esta manera obtenemos (un orden de clase, es decir,) una orientación para cada simplejo.

Definición 4.79. Sea $K = (X, \Phi)$ con $X = \{x_0, \dots, x_n\}$. Un complejo simplicial está orientado si cada uno de sus simplejos está orientado.

Definición 4.80. Sea $K = (X, \Phi)$ un complejo simplicial orientado.

1. Para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $C_n(K)$ es el grupo abeliano libre de los n -simplejos orientados. Es decir, es el conjunto de las combinaciones lineales con coeficientes en \mathbb{Z} de los n -simplejos orientados de K . O sea, si $\{\sigma_n^i\}$ es el conjunto de todos los n -simplejos orientados de K , entonces $C_n(K)$ es el conjunto finito de todos los n -simplejos orientados de K , es decir, $C_n(K)$ es el conjunto de todas las sumas formales.

$$\sum_i m_i \sigma_n^i, m_i \in \mathbb{Z} \text{ (llamadas } n\text{-cadenas)}$$

con la siguiente suma:

$$\sum_i p_i \sigma_n^i + \sum_i q_i \sigma_n^i := \sum_i (p_i + q_i) \sigma_n^i.$$

2. Para todo $n < 0$, $C_n(K) := 0$ (0 representa el grupo trivial).

Definición 4.81. Para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, definimos el homomorfismo $\partial_n = \partial_n^K : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$, como sigue:

1. Si $n \leq 0$, ∂_n es el homomorfismo constante 0.

2. Si $n \geq 0$, primero definamos ∂_n sobre un n -simplejo orientado $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ (visto como n -cadena):

$$\partial_n(\{x_0, \dots, x_n\}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \{x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n\};$$

finalmente, se extiende la definición por linealidad sobre una n -cadena de n -simplejos orientados ($\partial(\sum_i m_i \sigma_n^i) = \sum_i m_i \partial_n(\sigma_n^i)$).

Estos homomorfismos se llaman homomorfismos frontera.

Lema 4.82. Para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Demostración. 1. Si $n = 1$. $\partial_0 \circ \partial_1 = 0$, pues $\partial_0 : C_0 \rightarrow C_{-1}(K)$ es la constante 0.

2. Si $n \geq 1$. Sea $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ un n -simplejo orientado con $n \geq 2$. Entonces

$$\begin{aligned} & \partial_{n-1} \circ \partial_n([x_0, x_1, \dots, x_n]) \\ &= \partial_{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \{x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n\} \right) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_{n-1}(\{x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n\}) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^i (-1)^j \{x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n\} \\ &+ \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^n (-1)^i (-1)^{j-1} \{x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ es el único homomorfismo que extiende ∂_n a n -simplejos orientados.

□

Corolario 4.83. Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\text{Im } \partial_n \subset \ker \partial_{n-1}$.

Definición 4.84. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, sean $Z_n(K) = \ker \partial_n$, $B_n(K) = \text{Im } \partial_{n+1}$. Entonces si $n \geq 0$, $H_n(K; \mathbb{Z}) = Z_n(K)/B_n(K)$ y si $n < 0$, $H_n(K; \mathbb{Z}) = 0$.

Definición 4.85. 1. Una n -cadena $c_n \in C_n(K)$ es un n -ciclo (o simplemente ciclo) si $\partial_n(c_n) = 0$.

2. Una n -cadena c_n se llama n -frontera si existe una $n + 1$ cadena c_{n+1} tal que $c_n = \partial_{n+1}(c_{n+1})$.

3. Dos n -cadenas c_n y c'_n son homólogas, si $c_n - c'_n \in B_n(K)$.

Observaciones 4.86. 1. $B_n(K)$ es el conjunto de n -fronteras.

2. Sea $f : K = (X, \Phi) \rightarrow L = (Y, \Psi)$ una función simplicial (K y L tienen una orientación fija). Definamos $c_n(f) : C_n(K) \rightarrow C_n(L)$ sobre los simples por:

$$c_n(f)(\{x_0, \dots, x_n\}) = \begin{cases} \{f(x_0), \dots, f(x_n)\}, & \forall i \neq j, f(x_i) \neq f(x_j); \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

y extenderemos $c_n(f)$ linealmente sobre el grupo abeliano complejo $C_n(K)$

$$c_n(f) = \sum_i p_i \sigma_n^i = \sum_i p_i c_n(f)(\sigma_n^i)$$

3. Para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$\partial_n^L(c_n(f)) = c_{n-1}(f)\partial_n^K$$

es decir, conmuta el diagrama.

$$\begin{array}{ccc} C_n(K) & \longrightarrow & C_n(L) \\ \partial_n^K \downarrow & & \downarrow \partial_n^L \\ C_{n-1}(K) & \longrightarrow & C_{n-1}(L) \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \partial_n^L(c_n(f)(\{x_0, \dots, x_n\})) \\ &= \partial_n^L(\{f(x_0), \dots, f(x_n)\}) \\ &= \sum_i (-1)^i \{f(x_0), \dots, f(\hat{x}_i), \dots, f(x_n)\}. \\ & c_{n-1}(f)\partial_n^K(\{x_0, \dots, x_n\}) \\ &= c_{n-1}(f)\left(\sum_i (-1)^i \{x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n\}\right) \\ &= \sum_i (-1)^i \{f(x_0), \dots, f(\hat{x}_i), \dots, f(x_n)\}. \end{aligned}$$

Intuitivamente, el n -ésimo grupo topológico es generado por aquellas n -cadenas sin fronteras que no son, por ellas mismas, fronteras de alguna $n + 1$ -cadena. Es decir, el n -ésimo grupo de homología $H_r(K)$ cuenta el número de agujeros $n + 1$ dimensionales en $|K|$.

Definición 4.87. Sea $K, L \in \text{Csim}$, f función simplicial, entonces

$$H_n(f) : H_n(K; \mathbb{Z}) = \frac{Z_n(K)}{B_n(K)} \rightarrow H_n(L; \mathbb{Z})$$

$$z + B_n(K) = \begin{cases} c_n(f)(z) + B_n(L), & n \geq 0; \\ 0 & n < 0. \end{cases}$$

Observación 4.88. Si z es un ciclo en $C_n(K)$ (o sea, $z \in Z_n(K)$), entonces $c_n(f)(z)$ es un ciclo en $c_n(L)$.

Note que $\partial_n^L(c_n(f)(z)) = c_{n-1}(f)\partial_n^K(z) = 0$. Por otro lado, supongamos que $z' \in Z_n(K)$ es tal que $z + B_n(K) = z' + B_n(K)$, es decir $z - z' \in B_n(K)$. Y dado que el diagrama de Observación 4.86 inciso 3 conmuta, se tiene que $c_n(f)(z - z') \in B_n(L)$.

Proposición 4.89. Para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, H_n es homomorfismo de grupos.

Demostración.

$$\begin{aligned} & H_n(f)((z + B_n(K)) + (z' + B_n(K))) \\ &= H_n(f)((z + z') + B_n(K)) \\ &= c_n(f)((z + z') + B_n(L)) \\ &= (c_n(f)(z) + B_n(L)) + (c_n(f)(z') + B_n(K)) \\ &= H_n(f)(z + B_n(K)) + H_n(f)(z' + B_n(K)). \end{aligned}$$

□

Proposición 4.90. $(\text{Csim}, H_n, \text{Ab})$ tal que para cualquier $f \in \text{hom}_{\text{Csim}}(K, L)$ con $f \mapsto H_n(f)$ es un funtor.

Demostración. 1. Note que $H_n(1_K)(z + B_n(K)) = c_n(1_K)(z) + B_n(K) = z + B_n(K)$.

2. Sean $f : K \rightarrow L$, $g : L \rightarrow Q$, $H_n(f) : H_n(K) \rightarrow H_n(L)$ y $H_n(g) : H_n(L) \rightarrow H_n(Q)$ es tal que

$$\begin{aligned} (H_n(g) \circ H_n(f))(z + B_n(K)) &= H_n(g)(c_n(f)(z) + B_n(L)) \\ &= c_n(g)(c_n(f)(z)) + B_n(Q) \\ &= c_n(g \circ f)(z) + B_n(Q) \\ &= H_n(g \circ f)(z + B_n(K)). \end{aligned}$$

Note que $B_n(K) \subset Z_n(K) \subseteq C_n(K)$.

□

Observación 4.91. La construcción de los grupos $H_n(K; \mathbb{Z})$ es independiente hasta isomorfismo, de la orientación de K . En efecto, sean O y O' orientaciones diferentes de K junto con las orientaciones O y O' , respectivamente. A los simplejos de K^O los denotaremos por σ y los simplejos de $K^{O'}$ los denotaremos por σ' . Definamos $\phi_n : C_n(K^O) \rightarrow C_n(K^{O'})$ como la función que manda un simplejo σ_n en el simplejo σ'_n , si O y O' dan orientaciones opuestas a σ_n . Se extiende linealmente ϕ_n sobre el grupo completo $C_n(K^O)$. Es claro que ϕ_n es un homomorfismo de grupos. Además, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\partial_n \circ \phi_n = \phi_{n-1} \circ \partial_n$ es decir, conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_n(K^O) & \xrightarrow{\phi_n} & C_n(K^{O'}) \\ \partial_n^{K^O} \downarrow & & \downarrow \partial_n^{K^{O'}} \\ C_{n-1}(K^O) & \xrightarrow{\phi_{n-1}} & C_{n-1}(K^{O'}) \end{array}$$

Note que para un n -simplejo dado σ_n de K^O , se tienen dos casos:

1. O y O' le dan la misma orientación a σ_n . Entonces,

$$\partial_n \phi_n(\sigma_n) = \partial(\sigma'_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma'_{n-1,i}$$

y

$$\phi_{n-1} \partial_n(\sigma_n) = \phi_{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{n-1,i} \right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma'_{n-1,i}.$$

2. Si O y O' dan distintas orientaciones sobre σ_n , entonces:

$$\partial\phi_n(\sigma_n) = \partial_n(-\sigma'_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \sigma'_{n-1,i}.$$

Por otro lado, $\phi_{n-1} \circ \partial_n(\sigma_n) = \phi_{n-1}(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma'_{n-1,i}) = \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \sigma'_{n-1,i}.$

Así como definimos el homomorfismo de grupos $H_n(f)$ con la ayuda de un diagrama conmutativo, se puede ver fácilmente que por el diagrama anterior ϕ_n induce un homomorfismo $H_n(\phi_n) : H_n(K^O; \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(K^{O'}; \mathbb{Z})$ que es isomorfismo.

Por lo tanto, hasta isomorfismos, la orientación dada a un complejo simplicial no influye en la definición del grupo $H_n(K, \mathbb{Z})$. Con esto, podemos definir el siguiente funtor.

Definición 4.92.

$$H_*(-; \mathbb{Z}) : \text{Csim} \rightarrow \text{Ab}^{\mathbb{Z}} \text{ con}$$

$$H_*(K; \mathbb{Z}) = \{H_n(K; \mathbb{Z}) | n \in \mathbb{Z}\} \text{ y } H_*(f) = \{H_n(f) | n \in \mathbb{Z}\}$$

en objetos y morfismos respectivamente. El grupo abeliano graduado $H_*(K; \mathbb{Z})$ es la homología (simplicial) de K con coeficientes en \mathbb{Z} .

Ejemplo 4.93. Vamos a calcular los grupos de homología del complejo simplicial \mathbb{T}^2 .

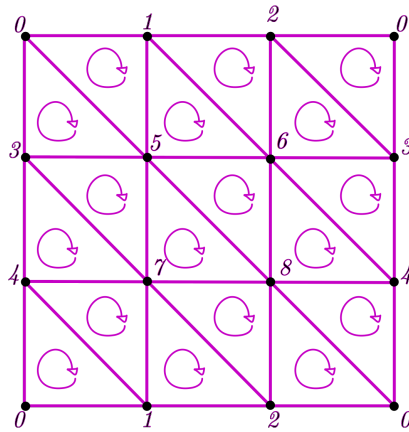


Figura 10: Calculando la homología del toro.

Vamos a denotar $C_i(\mathbb{T}^2)$ como C_i . Note que $C_2 \simeq \mathbb{Z}^{18}$, $C_1 \simeq \mathbb{Z}^{27}$ y $C_0 = \mathbb{Z}^9$. Por definición, si $n < 0$, $H_n(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}) = 0$ y $C_n(K) = 0$. Por lo tanto si $n \leq 0$, ∂_0 es el homomorfismo constante 0.

$$0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Cada vértice (y por lo tanto cada 0-cadena) es un ciclo (es decir, pertenece a $\ker \partial_0$).

Los elementos $\{0\}, \{1\} - \{0\}, \dots, \{8\} - \{0\}$ forman una base de Z_0 . Cualesquiera dos vértices se pueden conectar por una sucesión de 1- simples y los 0-ciclos $\{1\} - \{0\}, \dots, \{8\} - \{0\}$ son 0-fronteras.

$$([n] - [0]) = \partial_1([0, n]).$$

Como la frontera de un 1-simplejo $[i, j]$ se puede escribir como $\partial_1([i, j]) = [j] - [i] = ([j] - [0]) - ([i] - [0])$. Tenemos B_0 está generado por $[1] - [0], [2] - [0], \dots, [8] - [0]$.

Entonces $H_0(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ ya que se reduce a las clases de homología $m\{0\} + B_0, m \in \mathbb{Z}$. Ahora calculemos $H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z})$. Las dos 1-cadenas $z'_1 = [0, 3] + [3, 4] + [4, 0]$ y $z'_2 = [0, 1] + [1, 2] + [2, 0]$ son ciclos, pues $\partial_1(z'_1) = [3] - [0] + [4] - [3] + [0] - [4] = 0$. Por lo tanto $z'_1 \in \ker \partial_1 = Z_1$, y generan en Z_1 un grupo abeliano libre de rango 2 que denotaremos por $S (\simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$ donde $m_1 z'_1 + m_2 z'_2 \longleftrightarrow (m_1, m_2)$.

Sea $z \in Z_1$ un 1-ciclo, $z = \sum_i k_i \sigma_1^i$ en la cual σ_1^i son los 1-simplejos y $k_i \in \mathbb{Z}$. Es posible hallar una 1-frontera b tal que el 1-ciclo $z - b$ no contiene los términos que corresponden a los 1-simplejos diagonales $\{0, 5\}, \{1, 6\}, \dots, \{8, 0\}$. Análogamente, añadiendo parejas adecuadas de 2-simplejos (aquellos que forman cuadrados de diagonal común), se puede encontrar una 1-frontera b' tal que el ciclo $z - b - b'$ sólo contiene los términos correspondientes a los 1-simplejos $\{0, 3\}, \{3, 4\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}$ y $\{2, 0\}$.

Como $z - b - b'$ es un 1-ciclo, $z - b - b' \in S$. Por lo tanto $z \in b + b' + S$. Así $Z_1 \subset B_1 + S$. Pero $B_1 + S \subseteq Z_1$. Finalmente $B_1 + S = Z_1$.

Ahora veamos que $Z = B_1 \oplus S$, es decir, probemos que $B_1 \cap S = \{0\}$. Supongamos que $B_1 \cap S \neq \{0\}$. Entonces una combinación lineal de 2-simplejos $\sum h_j \sigma_2^j$ tal que $\sum h_j \partial_2(\sigma_2^j) \in S$. Si los 2-simplejos $\sigma_2^i \sigma_2^j$ tienen un 1-simplejo interno (del cuadrado) común, deben tener coeficientes iguales $h_j = h_i$. Por lo tanto, existe $h \in \mathbb{Z}$ tal que $\sum_j h_j = h$. Luego $\sum_j h_j \sigma_2^j = h z_2$ donde z_2 es la 2-cadena $\sum_j \sigma_2^j$. Es claro que $\partial z_2 = \sum_j \partial \sigma_2^j = 0$. Así $B_1 \cap S = \emptyset$.

Finalmente $H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}) = S \simeq \mathbb{Z}^2$ con generadores libres z'_1 y z'_2 .

Además argumentos similares muestran que todo 2-ciclo es un múltiplo de la 2-cadena z_2 definida antes (dada por la suma de

todos los 2-simplejos orientados de \mathbb{T}^2) y entonces $H_2(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Teorema 4.94. [6, Theorem III.4.1] Para cualquier par de poliedros $(|K|, |L|)$ (con L un subcomplejo de K) y cualquier entero $n \geq 1$,

$$H_n(|K|, |L|; \mathbb{Z}) \cong H_n(|K| - |L|; \mathbb{Z}).$$

4.4.4 La característica de Euler-Poincaré

Definición 4.95. Sean K un complejo simplicial finito de dimensión p y p_n es el número de los n -simplejos en K , definimos la característica de Euler-Poincaré de K ($\chi(K)$) por

$$\chi(K) = \sum_{n=0}^p (-1)^n p_n.$$

Definición 4.96. Definimos el n -ésimo número de Betti del complejo K ($\beta(n)$), como el rango del grupo Abeliano $H_n(K)$.

El nombre de «número de Betti» fue puesto nada más y nada menos que por Henri Poincaré en honor a Enrico Betti quien introdujo el concepto en su artículo titulado *Sopra gli spazi d'un numero qualunque di dimensioni* (Sobre espacios de cualquier dimensión), y publicado en 1871 en el Italiano *Annals of Pure and Applied Mathematics*. Se puede ver de la definición que los números de Betti hacen la idea de «contadores de agujeros». Por ejemplo, el 0-ésimo número de Betti cuenta el número de componentes de un objeto: el 0-ésimo número de Betti de cuerpos simplemente conexos como el toro o la esfera, es 1, mientras que en objetos compuestos por dos piezas será 2. El primer número de Betti, cuenta los números de agujeros y túneles, a un túnel lo asociamos intuitivamente con el interior de un asa. Así la esfera tiene $\beta_1 = 0$ ya que no tiene agujeros, mientras que el toro tiene $\beta_1 = 2$ ya que además de que tiene, obviamente un agujero, también cuenta con un túnel del interior del toro. Los objetos de dos y tres dimensiones tienen segundos números de Betti. Indica cuántas cavidades están ocultas dentro del objeto, por ejemplo el segundo número de Betti de la esfera es 1 ya que tiene una cavidad por dentro, sin embargo, el segundo número de Betti de una esfera sólida es 0. ya que no tiene cavidades. Un toro tiene $b_2 = 1$ ya que el «túnel» también cuenta como «cavidad».

Teorema 4.97. Si K es un complejo simplicial finito de dimensión p , tenemos que la característica de Euler está dada por

$$\chi(K) = \sum_{n=0}^p (-1)^n \beta_n.$$

Demostración. $C_n(K)$ es un grupo abeliano libre de rango p_n . Como $H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K)$, por [Proposición 5.3, [7]], tenemos que

$$\beta(n) = \text{ran}(Z_n(K)) - \text{ran}(B_n(K))$$

Como de [Proposición 5.3, [7]], se tiene la siguiente sucesión,

$$0 \longrightarrow Z_n(K) \longrightarrow C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1}(K) \longrightarrow 0$$

tenemos que

$$\text{ran}(C_n(K)) = p_n = \text{ran}(Z_n(K)) + \text{ran}(B_{n-1}(K)).$$

Note que $B_m(K) = 0$, y $B_{-1}(K) = 0$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \chi(K) &= \sum_{n=0}^p (-1)^n p_n \\ &= \sum_{n=0}^p (-1)^n (\text{ran}(Z_n(K)) + \text{ran}(B_{n-1}(K))) \\ &= \sum_{n=0}^p (-1)^n \text{ran}(Z_n(K)) + \sum_{n=0}^p (-1)^n \text{ran}(B_{n-1}(K)) \end{aligned}$$

Dado que $B_m(K) = 0$, y $B_{-1}(K) = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \chi(K) &= \sum_{n=0}^p (-1)^n \text{ran}(Z_n(K)) + \sum_{n=0}^{p+1} (-1)^n \text{ran}(B_{n-1}(K)) \\ &= \sum_{n=0}^p (-1)^n (\text{ran}(Z_n(K)) + \text{ran}(B_{n-1}(K))) \\ &= \sum_{n=0}^p (-1)^n \beta_n. \end{aligned}$$

Como los grupos homológicos son invariantes topológicos (las funciones continuas inducen un homomorfismo homológico), también lo son los números de Betti. Por lo que podemos concluir que la característica de Euler también los es.

- Ejemplos 4.98.**
1. $\chi(S^2) = 1 \cdot 1 + -1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2$
 2. $\chi(T^2) = 1 \cdot 1 + -1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 0$
 3. $\chi(RP^2) = 1 \cdot 1 + -1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1$

4.5 HOMOLOGÍA DE BLOQUES

Empecemos esta sección revisando cómo se calcula la homología del toro T^2 con la definición derivada del cuadrado con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, y $(1,1)$ e identificando los lados horizontales y luego los lados verticales. Una posible triangulación, como lo habíamos visto en una sección anterior está representado en la siguiente Figura 12

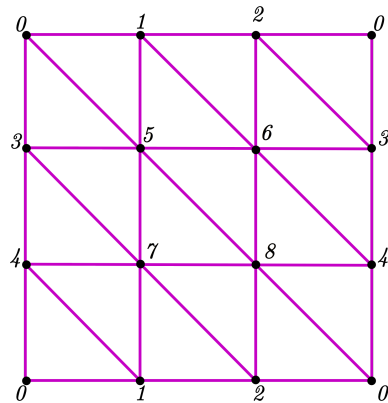


Figura 11: Triangulación del toro.

Tenemos 9 vértices, 27 lados y 8 caras, un total de 54 simplejos en él, note que el número es muy grande comparado que empezamos con un simple cadrado; de hecho, dadas alas identificaciones hechas en el cuadrado euclidiano, podemos tomar los simplejos en «bloques», considerando un sólo vértice (los cuatro vértices se han identificado), dos «bloques» unidimensionales, a saber, el cuadrado sin su frontera.

Ahora, podríamos preguntarnos si podemos clacular la homología de T^2 por medio de esta interpretación en bloques del toro y al hacerlo, evitar la manipulación de un número bastante grande de simplejos; ya que si este procedimiento ya es un

poco complicado para el toro, que es un espacio fácil de interpretar, para calcular la homología de un poliedro más complejo va a ser más difícil.

Definición 4.99. Sea $K = (X, \Phi)$ un complejo simplicial dado.

1. Para cada subconjunto $e \subset \Phi$, sea \bar{e} el subcomplejo más pequeño de K que contiene a e (obsérvese que e no necesariamente es un complejo simplicial; por ejemplo, tomemos la triangulación anterior T del toro \mathbb{T}^2 y sea e el conjunto de los simplejos $\{2\}$, $\{0, 3, 5\}$, y $\{3, 4, 6\}$; en este ejemplo $\{0, 3\} \subset \{0, 3, 5\}$ pero $\{0, 3\} \notin e$). El complejo simplicial \bar{e} se puede describir de otra forma:

$$\bar{e} = \bigcup_{\sigma \in e} \bar{\sigma}.$$

El complejo simplicial \bar{e} asociado al conjunto e se llama la clausura de e .

2. Para cada $e \subset \Phi$, podemos definir la frontera de e como

$$\dot{e} = \overline{\bar{e} - e},$$

este, por definición, es un subcomplejo de K .

Observación 4.100. \dot{e} es un subcomplejo simplicial de \bar{e} :

$$\bar{e} - e \subset \bar{e} \Rightarrow \overline{\bar{e} - e} \subset \bar{e} = \bar{e} \Rightarrow \dot{e} \subset \bar{e}$$

Finalmente, $\bar{e} = e \cup \dot{e}$; de hecho, como $e \subset \bar{e}$ y $\dot{e} \subset \bar{e}$, tenemos la inclusión $e \cup \dot{e} \subset \bar{e}$; por otro lado, si $\sigma \in \bar{e}$ y $\sigma \notin e$ luego $\sigma \in \bar{e} - e$ y así

$$\sigma \in \overline{\bar{e} - e} = \dot{e};$$

Por lo tanto, $e \cup \dot{e} \subset \bar{e}$.

Definición 4.101. Extendemos la definición de clausura de un conjunto $e \subset \Phi$ a una cadena $c_n = \sum_i m_i \sigma_n^i \in C_n(K, \mathbb{Z})$: la clausura de c_n es el complejo simplicial

$$\bar{c}_n = \bigcup_{i: m_i \neq 0} \bar{\sigma}_n^i.$$

Definición 4.102. Un p -bloque o bloque de dimensión p de K es un conjunto $e_p \subset \Phi$ tal que:

1. e_p no contiene simplejos de dimensión mayor que p .
2. $H_p(\bar{e}_p, \dot{e}_p; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$

3. Para todo $q \neq p$, se tiene que $H_q(\bar{e}_p, \dot{e}_p; \mathbb{Z}) \cong 0$

Observación 4.103. Para calcular la homología del par de complejos simpliciales (\bar{e}_p, \dot{e}_p) , es necesario darle una orientación a K . Sin embargo, también podemos darle una orientación a \bar{e}_p individualmente escogiendo un generador β_p del grupo Abeliano

$$H_p(\bar{e}_p, \dot{e}_p; \mathbb{Z}) \cong Z_p(\bar{e}_p) \cong \mathbb{Z}$$

Note que un generador β_p se puede interpretar como una combinación lineal de p -simplejos de K o de \bar{e}_p ; en cualquier caso, $\partial(\beta_p)$ es una cadena de \dot{e}_p y por lo tanto

$$\overline{\partial(\beta_p)} \subset \dot{e}_p.$$

Definición 4.104. Una triangulación en bloque de un complejo $K = (X, \Phi)$ (o de un poliedro $|K|$) es un conjunto $e(K) = \{e_p^i$ de bloques con las siguientes condiciones:

1. Para cualquier $\sigma \in \Phi$, existe un bloque único $e(\sigma)$ de el conjunto $e(K)$ tal que $\sigma \in e(\sigma)$.
2. Para todo p -bloque $e_p^i \in B(K)$, \dot{e}_p^i es una unión de bloques con dimensión menor que p .

Observación 4.105. De la definición se sigue que

1. Para cualesquiera i, j, p , $\dot{e}_p^i \cap \dot{e}_p^j = \emptyset$.
2. Si $i \neq j$, entonces $\overline{\dot{e}_p^i} \cap \dot{e}_p^j = \emptyset$.

Ejemplo 4.106. Como un ejemplo, damos una triangulación en bloque del toro con la triangulación descrita anteriormente. Consideremos los siguientes conjuntos de simplejos de T :

1. $e_0 = \{0\}$
2. $e_1^1 = \{\{3\}, \{4\}, \{0, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 0\}\}$
3. $e_1^2 = \{\{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 0\}\}$
4. $e_2 = T - (e_0 \cup e_1^1 \cup e_1^2)$

Determinamos que el conjunto

$$e(\mathbb{T}^2) = \{e_0, e_1^1, e_1^2, e_2\}$$

es la triangulación en bloque para \mathbb{T}^2 . Note que

$$\begin{aligned} \bar{e}_0 &= \{0\}, \dot{e}_0 = \emptyset \\ \bar{e}_1^1 &= \overline{\{0, 3\}} \cup \overline{\{3, 4\}} \cup \overline{\{4, 0\}}, \dot{e}_1^1 = \{0\}, \\ \bar{e}_1^2 &= \overline{\{0, 1\}} \cup \overline{\{1, 2\}} \cup \overline{\{2, 0\}}, \dot{e}_1^2 = \{0\}, \\ \bar{e}_2 &= \mathbb{T}, \dot{e}_2 = \bar{e}_1^1 \cup \bar{e}_1^2; \end{aligned}$$

recordando el Teorema 4.94 y observando que

$$\begin{aligned} |\bar{e}_1^i| - |\dot{e}_1^i| &\cong S^1, \quad i \in \{1, 2\}, \\ |\bar{e}_2| - |\dot{e}_2| &\cong S^2; \end{aligned}$$

lo cual muestra que los elementos de $e(\mathbb{T}^2)$ son bloques

Ejemplo 4.107. Para el plano proyectivo real, con la triangulación P que tiene 6 vértices, 15 lados, y 10 caras en la Figura ?? tiene la siguiente triangulación en bloque:

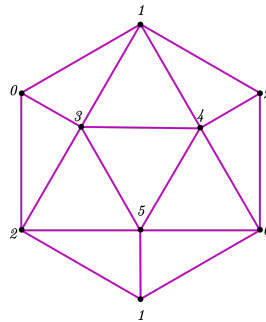


Figura 12: Triangulación del plano proyectivo real.

1. $e_0 = \{0\}$
2. $e_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 0\}\}$
3. $e_2 = \mathbb{RP}^2 - (e_0 \cup e_1)$

Teorema 4.108. [6, Theorem III.5.9] Sea $|K|$ un poliedro con una triangulación de bloque $e(K)$. Entonces, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, existe un isomorfismo de grupo

$$H_n(e(K), \mathbb{Z}) \cong H_n(|K|, \mathbb{Z}).$$

CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES

En este capítulo estudiaremos las 2-variedades compactas. Éstas son las variedades más familiares a nuestra experiencia diaria. En particular culminaremos el capítulo con la demostración del Teorema de Clasificación de Superficies.

5.1 VARIEDADES TRIANGULABLES

Para la demostración de este teorema, necesitamos definir un concepto imprescindible. Nos ayudará a dar una receta para poder desmenuzar a la variedad y conocer algunas de sus propiedades

Definición 5.1. Una n -variedad X es triangulable si existe un poliedro $|K|$ homeomorfo a X .

Ejemplo 5.2. La superficie tetraédrica de abajo con la triangulación

$$T = \{\{v_0v_1v_2\}, \{v_0v_1v_3\}, \{v_0v_2v_3\}, \{v_1v_2v_3\}, \\ \{v_0v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0v_3\}, \{v_1v_2\}, \{v_1v_3\}, \{v_2, v_3\}, \\ \{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$$

es una 2-variedad triangulable (homeomorfa a S^2). (Ver Figura 13.)

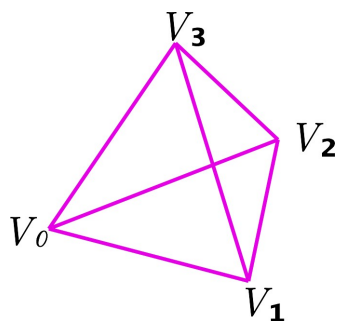


Figura 13: Triangulación de la esfera.

Recordar la Definición 4.67. Dado $K = (X, \Phi)$ un complejo simplicial. Para toda $p \in |K|$, sea

$$B(p) := \{\sigma \in \Phi : p \in |\bar{\sigma}|\}$$

y sea

$$D(p) := \bigcup_{\sigma \in B(p)} |\bar{\sigma}|.$$

La frontera $S(p)$ de $D(p)$

$$S(p) := \partial D(p) = \bigcup_{\sigma \in B(p)} \bigcup_{\tau \subseteq \sigma, p \notin |\bar{\tau}|} |\bar{\tau}|$$

A continuación probaremos un teorema muy importante.

Teorema 5.3 (Teorema de Triangulación para las 2-variedades). *Toda 2-variedad es homeomorfa al poliedro de un complejo simplicial 2-dimensional, en el que cualquier 1-simplejo es una cara de exactamente dos 2-simplejos.*

La prueba de este teorema es muy técnica y por el momento, está más allá de nuestro alcance, así que a continuación sólo vamos a describir algunas ideas. El enfoque básico es análogo a la prueba del [9, Theorem 5.25]: cubrir la variedad con discos coordenados regulares, e inductivamente mostrar que cada disco sucesivo se puede triangular de tal forma que sea compatible con las triangulaciones que ya estaban definidas. Sin embargo en superficies, encontrar una triangulación de cada disco, compatible con el anterior, es más difícil, ya que la frontera del nuevo disco debe intersecar una cantidad infinita de veces a las fronteras de los simplejos ya definidos. Incluso, si hubiera únicamente un número finito de intersecciones, mostrar que las regiones definidas por las curvas que se intersecan sean homeomorfas a discos cerrados, y por lo tanto triangulables, requiere de un delicado resultado topológico conocido como el Teorema de Schönflies, que dice que cualquier encaje del círculo en \mathbb{R}^2 se extiende a un encaje al disco cerrado. Los detalles de la prueba son muy largos y complejos por lo que algunas pruebas «legibles» se pueden encontrar en [11] y [13].

5.2 SUPERFICIES CERRADAS

Notación 5.4. Llamaremos a las 2-variedades compactas y conexas superficies cerradas.

Note que $S^2, \mathbb{R}P^2, \mathbb{T}^2$ son ejemplos de superficies cerradas.

Definición 5.5. 1. Definimos un polígono como un subconjunto de \mathbb{R}^2 que es homeomorfo S^1 y es la unión de una cantidad finita 1-simplejos que se interseccionan sólo en sus puntos finales.

2. Los 0-simplejos y los 1 simplejos del polígono se llaman vértices y lados, respectivamente.

Observación 5.6. Por el Lema 4.28 se sigue que cada vértice toca exactamente a dos lados.

Definición 5.7. Una región poligonal es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 cuyo interior es una bola coordenada regular (y así una 2-celda regular), y cuya frontera es un polígono. Los lados y los vértices del polígono frontera también son los lados y vértices de la región poligonal.

Observación 5.8. Cualquier 2-simplejo en el plano se puede ver fácilmente como una región poligonal, como un «cuadrado relleno». O más precisamente como una región compacta y convexa que tiene interior no vacío y frontera poligonal.

Proposición 5.9. [9, Proposition 6.4] Sean P_1, \dots, P_k regiones poligonales en el plano. Sea $P = P_1 \sqcup \dots \sqcup P_k$, y suponga que damos una relación de equivalencia en P , que identifica algunos lados de los polígonos con otros dados por homeomorfismos afines.

1. El espacio cociente resultante es un complejo CW 2-dimensional cuyo 0-esqueleto es la imagen bajo la función cociente de el conjunto de vértices de P , y cuyo 1-esqueleto es la imagen de la unión de las fronteras de las regiones poligonales.
2. Si la relación de equivalencia identifica cada lado de cada P_i con exactamente otro lado en algún P_j (podría o no $j = i$), entonces el espacio cociente resultante es una 2-variedad compacta.

A continuación se tiene un ejemplo de una variedad formada como un cociente de una región poligonal.

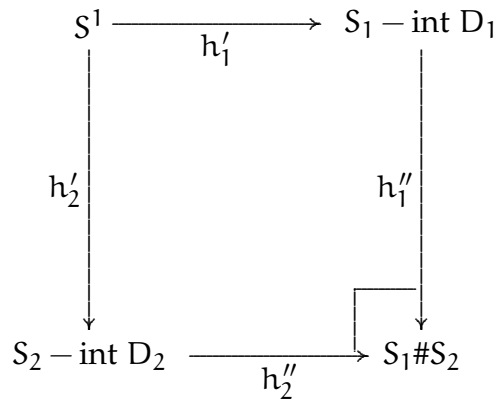
Ejemplo 5.10. La botella de Klein es una 2-variedad K obtenida identificando los lados del cuadrado $I \times I$ de tal manera que $(0, t) \sim (1, t)$ y $(t, 0) \sim (1 - t, 1)$ con $0 \leq t \leq 1$.

Observaciones 5.11. Sea S una 2-variedad y $x \in S$. Entonces existen $D \subseteq S$ tal que $x \in D$ y un homeomorfismo $h : \mathbb{D}^2 \rightarrow D$. A un subconjunto D de S homeomorfo a \mathbb{D}^2 lo llamaremos disco cerrado en S .

Definición 5.12. Sean S_1 y S_2 superficies y tomemos los discos cerrados D_1 en S_1 y D_2 en S_2 , junto con los homeomorfismos $h_1 : \mathbb{D}^2 \rightarrow D_1$ y $h_2 : \mathbb{D}^2 \rightarrow D_2$. Entonces $h_1|_{S^1} : S^1 \rightarrow \partial D_1$ y $h_2|_{S^1} : S^1 \rightarrow \partial D_2$ son homeomorfismos. Ahora definamos las funciones:

$$\begin{aligned} h'_1 : S^1 &\rightarrow \partial D_1 \hookrightarrow S_1 - \text{int } D_1 \\ h'_2 : S^1 &\rightarrow \partial D_2 \hookrightarrow S_2 - \text{int } D_2 \end{aligned}$$

Entonces la suma conexa de S_1 y S_2 , $(S_1 \# S_2)$ es el coproducto fibrado de la fuente $\{h'_1 : S^1 \rightarrow S_1 - \text{int } D_1, h'_2 : S^1 \rightarrow S_2 - \text{int } D_2\}$ es decir, es el pozo final $\{h''_1 : S_1 - \text{int } D_1 \rightarrow S_1 - \text{int } D_1 \sqcup_{h'_1, h'_2} S_2 - \text{int } D_2, h''_2 : S_2 - \text{int } D_2 \rightarrow S_1 - \text{int } D_1 \sqcup_{h'_1, h'_2} S_2 - \text{int } D_2\}$ donde



es cocartesiano.

Observación 5.13. Note que dadas S_1 y S_2 superficies conexas, $S_1 \# S_2$ es una superficie conexa

Intuitivamente, la suma conexa de dos superficies consiste en quitarle un disco a cada una de ellas y «pegarlas» a lo largo de sus fronteras. (Ver Figura 14.)

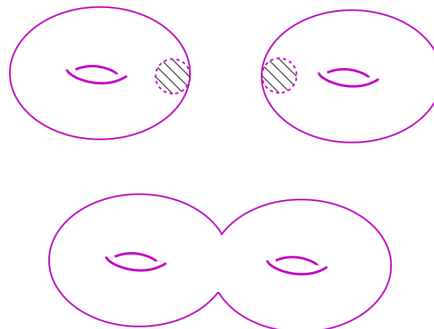


Figura 14: Suma Conexa de 2 toros.

Lema 5.14. *Si S es una superficie entonces, para todo par de homeomorfismos $h_1 : \mathbb{D}^2 \rightarrow h_1(\mathbb{D}^2) \subseteq S$ y $h_2 : \mathbb{D}^2 \rightarrow h_2(\mathbb{D}^2) \subseteq S$ existe un homeomorfismo $f : h_1(\mathbb{D}^2) \rightarrow h_2(\mathbb{D}^2)$ tal que $f \circ h_1 = h_2$.*

Demostración. Note que $h_1^{-1} : h_1(\mathbb{D}^2) \rightarrow \mathbb{D}^2$ es homeomorfismo. Por lo tanto $f := h_2 \circ h_1^{-1} : h_1(\mathbb{D}^2) \rightarrow h_2(\mathbb{D}^2)$ es homeomorfismo. Además

$$\begin{aligned} f \circ h_1 &= (h_2 \circ h_1^{-1}) \circ h_1 \\ &= h_2. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.15. *Si S_1 y S_2 son superficies conexas, entonces $S_1 \# S_2$ es independiente (salvo por homeomorfismos) de la elección de los discos cerrados D_1 y D_2 y de los homeomorfismos h_1 y h_2 .*

Demostración. Este resultado se sigue del Lema 5.14 y la independencia de escoger h_1 y h_2 se sigue de la Propiedad Universal del coproducto fibrado. □

Teorema 5.16. *La suma conexa es conmutativa, asociativa y tiene elemento neutro. El elemento neutro es S^2 , es decir, para cualquier superficie S , se tiene $S \# S^2 \simeq S$*

Demostración. Veamos que $S_1 \# S_2 \simeq S_2 \# S_1$. Pongamos $D_1 \subseteq S_1$ y $D_2 \subseteq S_2$. Sean $h_1 : \mathbb{D}^2 \rightarrow D_1$ y $h_2 : \mathbb{D}^2 \rightarrow D_2$ homeomorfismos. Entonces, si $h_1|_{S^1} : S^1 \rightarrow D_1 - \text{int } D_1$ y $h_2|_{S^1} : S^1 \rightarrow D_2 - \text{int } D_2$ son también homeomorfismos. Entonces, si $h'_1 = i \circ h_1|_{S^1}$ y $h'_2 = j \circ h_2|_{S^1}$ donde

$$\begin{aligned} i : S_1 - \text{int } D_1 &\rightarrow S_1 - \text{int } D_1 \sqcup S_2 - \text{int } D_2 \\ x &\mapsto (x, 1) \text{ y} \\ j : S_2 - \text{int } D_2 &\rightarrow S_1 - \text{int } D_1 \sqcup S_2 - \text{int } D_2 \\ y &\mapsto (y, 2) \end{aligned}$$

son las inmersiones canónicas, entonces $S_1 \# S_2$ es el coproducto fibrado de (h'_1, h'_2) , es decir, es la pareja $(q \circ i, q \circ j)$, donde

$$q : S_1 - \text{int } D_1 \sqcup_{h'_1, h'_2} S_2 - \text{int } D_2$$

es la función cociente.

Por otro lado, la función

$$H : S_1 - \text{int } D_1 \sqcup S_2 - \text{int } D_2 \rightarrow S_2 - \text{int } D_2 \sqcup S_1 - \text{int } D_1,$$

tal que para todo $x \in S_1 - \text{int } D_1$

$$(x, 1) \mapsto (x, 2).$$

y para todo $y \in S_2 - \text{int } D_2$

$$(y, 2) \mapsto (y, 1)$$

es homeomorfismo.

Notemos que

$$H \circ j : S_2 - \text{int } D_2 \rightarrow S_2 - \text{int } D_2 \sqcup S_1 - \text{int } D_1$$

es tal que para cualquier $y \in S_2 - \text{int } D_2$

$$H \circ j(y) = h(j(y)) = H(y, 2) = (y, 1)$$

y

$$H \circ i : S_1 - \text{int } D_1 \rightarrow S_2 - \text{int } D_2 \sqcup S_1 - \text{int } D_1$$

es tal que para todo $x \in S_1 - \text{int } D_1$,

$$H \circ i(x) = H(i(x)) = H(x, 1) = (x, 2)$$

son las inmersiones canónicas. Entonces, si

$$q' : S_2 - \text{int } D_2 \cup S_1 - \text{int } D_1 \rightarrow S_2 \# S_1$$

es la función cociente, entonces conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 & \xrightarrow{h'_1} & S_1 - \text{int } D_1 \\
 \downarrow h'_2 & & \downarrow q' \circ H \circ i \\
 S_2 - \text{int } D_2 & \xrightarrow{q' \circ H \circ j} & S_1 \# S_2
 \end{array}$$

pues para toda $t \in S^1$

$$q' \circ H \circ i \circ h_1(t) = q' \circ H(h'_1(t), 1)$$

$$= q'(h'_1(t), 2)$$

$$q' \circ H \circ j \circ h_2(t) = q' \circ H(h'_2(t), 2)$$

$$= q'(h'_2(t), 1)$$

y es cocartesiano. Por lo tanto existe un homeomorfismo

$$F : S_1 \# S_2 \rightarrow S_2 \# S_1.$$

De forma parecida se pueden demostrar el resto de las propiedades. Sin embargo se pueden dar pruebas más simples usando la presentaciones poligonales como veremos después.

□

Ejemplo 5.17. Una suma conexa de una 2-variedad M con \mathbb{T}^2 se puede ver de otra forma, como un espacio obtenido por «adjuntar un asa» a M . Para hacerlo más preciso, sea M_0 la variedad M con dos discos removidos. Entonces M_0 y $S^1 \times I$ son variedades con frontera, y cada frontera es homeomorfa a la unión de dos círculos ajenos. Sea \tilde{M} el espacio de adjunción obtenido por adjuntar M_0 con $S^1 \times I$ sobre sus fronteras (ver Teorema 3.20). La razón por la que este espacio cociente es homeomorfo a $M \# \mathbb{T}^2$ se sugiere en la Figura 15; muestra que se puede obtener un espacio homeomorfo a $M \# \mathbb{T}^2$ quitando de M el interior de un disco coordenado regular (bola coordenada regular en), luego adjuntando un disco cerrado con dos discos abiertos con dos discos removidos (la región más oscura en la figura en una superficie), y finalmente adjuntando el cilindro $S^1 \times I$ a lo largo de los dos círculos frontera. Como en la primera operación resulta un espacio homeomorfo a M con dos discos coordenados regulares de M removidos, el resultado es el mismo que si hubiéramos empezado quitando dos discos y luego adjuntar el cilindro a los dos círculos frontera restantes.

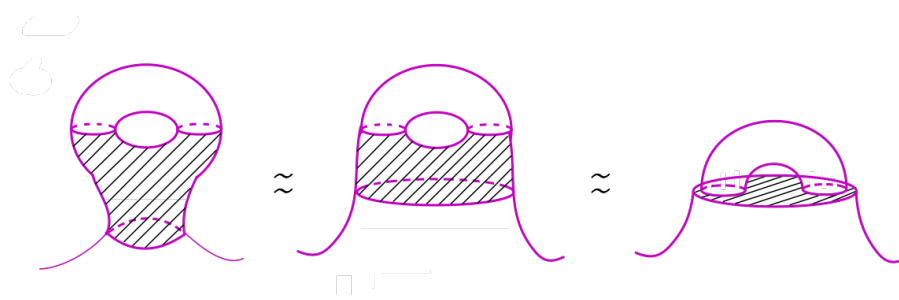


Figura 15: Suma conexa con un toro y adjuntar un asa.

Ejemplo 5.18. Una n -ésima suma conexa $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$ se llama un toro con n agujeros ver Figura 16.

Dado que S^2 actúa como elemento neutro y, por el ejemplo anterior, este toro con n agujeros se puede considerar como una esfera a la que se le puede adjuntar n asas (ver Figura 17).



Figura 16: Toro con 3 agujeros.

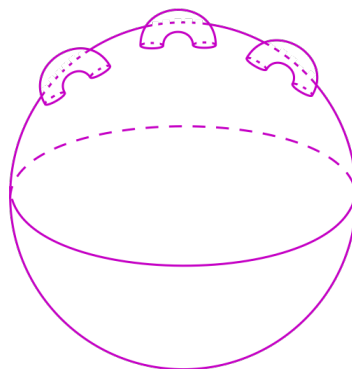


Figura 17: Esfera con 3 asas.

5.3 PRESENTACIONES POLIGONALES DE SUPERFICIES

Para el Teorema de Clasificación necesitamos una manera uniforme para describir superficies. Representaremos todas nuestras superficies como cociente de regiones poligonales de $2n$ lados.

Informalmente, podemos describir cualquier relación de equivalencia de lados «etiquetando» los lados con las letras a_1, \dots, a_n y usando una flecha en cada lado apuntando hacia alguno de sus vértices, de tal manera que los lados con la misma etiqueta sean identificados; con las flechas se indica de qué manera se emparejan los vértices. Con cada etiquetado de un polígono podemos asociar una sucesión de símbolos, obtenido por la lectura de las etiquetas de la frontera en sentido contrario de las manecillas del reloj y, para cada etiqueta frontera a_i , ponemos a_i en la sucesión si la flecha apunta en sentido contrario a las manecillas del reloj, y a_i^{-1} si es en el sentido de las manecillas del reloj. Por ejemplo, la elección de equivalencia en $I \times I$ de Proposición 3.14 que da como resultado el toro, podría verse como la sucesión de símbolos $aba^{-1}b^{-1}$.

Recordemos que una presentación poligonal es el grupo generado por algún conjunto con ciertas relaciones en el grupo libre generado por el mismo, cuyas palabras cumplen ciertas propie-

dades que se pueden ver en la Definición ??). Cualquier presentación poligonal \mathcal{P} determina un espacio topológico $|\mathcal{P}|$.

Definición 5.19. Definamos a la realización geométrica de \mathcal{P} , denotado por $|\mathcal{P}|$ con la siguiente receta:

1. Para cada palabra W_i , sea P_i la región poligonal convexa de k lados en el plano que tiene su centro en el origen, lados de longitud 1, ángulos iguales y un vértice en el eje positivo Y (donde k es la longitud de la palabra W_i).
2. Definir una correspondencia inyectiva entre los símbolos de W_i y los lados de P_i en el sentido contrario de las manecillas del reloj, empezando en el vértice que se encuentra en el eje Y .
3. Denotaremos por $|\mathcal{P}|$ al espacio cociente de $\coprod_i P_i$ determinada por la identificación de cada lado que tiene el mismo símbolo, de acuerdo con el homeomorfismo afín que empareja los primeros vértices de los lados con etiqueta a y los últimos vértices de los lados con etiqueta a^{-1} (en el sentido contrario a las manecillas del reloj).

Observación 5.20. Si \mathcal{P} es una de las presentaciones especiales nombradas con una sola palabra de longitud 2, mencionada en la Observación 2.17, motivados por las Proposiciones 3.12 y 3.13 definimos $|\mathcal{P}|$ como la esfera si la palabra es aa^{-1} o $a^{-1}a$ (ver Figura 18) y el plano proyectivo si la palabra es aa o $a^{-1}a^{-1}$ (ver Figura 19).

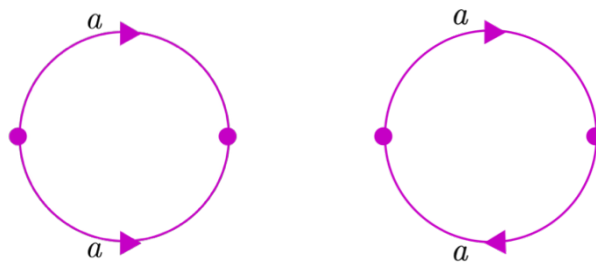


Figura 18: Presentación de \mathbb{S}^2 . Figura 19: Presentación de \mathbb{RP}^2 .

Definición 5.21. Los interiores, lados y vértices de las regiones poligonales P_i se llaman, respectivamente, la caras, lados y vértices de la presentación.

Observación 5.22. El número de caras es el mismo que el número de palabras, y el número de lados es la suma de las longitudes de las palabras.

Definición 5.23. Para un lado etiquetado a , el vértice inicial es el primero en el sentido contrario a las manecillas del reloj, y el vértice terminal, es el otro; para un lado con etiqueta a^{-1} , éstas definiciones se intercambian.

En términos de nuestra descripción informal anteriormente comentada, si etiquetamos cada lado con una flecha apuntando en el sentido contrario a las manecillas del reloj cuando el símbolo es a y en sentido de las manecillas del reloj cuando ésta es a^{-1} , las flecha apunta del vértice inicial al vértice final.

Definición 5.24. Una presentación poligonal $F(S; W_1, \dots, W_r)$ se llama presentación superficial si cada símbolo $a \in S$ ocurre exactamente dos veces en W_i con $i \in \{1, \dots, r\}$ (contando que a o bien a^{-1} como una sola vez).

Proposición 5.25. *La realización geométrica de una presentación superficial es una superficie compacta.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 5.9. □

Definición 5.26. Si X es un espacio topológico y \mathcal{P} es una presentación poligonal cuya realización geométrica es homeomorfa a X , decimos que \mathcal{P} es una presentación de X .

Observación 5.27. Un espacio que admite una presentación con sólo una cara es conexo, ya que es homeomorfo a un cociente de una sola región poligonal conexa; con más de una sola cara, podría o no ser conexo.

Ejemplos 5.28. A continuación mostraremos las presentaciones poligonales de superficies conocidas:

1. La esfera: $\langle a|aa^{-1} \rangle$ (Proposición 3.12, ver Figura 18).
2. El toro: $\langle a, b|aba^{-1}b^{-1} \rangle$ (Proposición 3.14, ver Figura 20).
3. El plano proyectivo: $\langle a|aa \rangle$ (Proposición 3.13, ver Figura 19).
4. La botella de Klein: $\langle a, b|abab^{-1} \rangle$ (Ejemplo 5.10, ver Figura 21).

Con el fin de probar el Teorema de Clasificación, es necesario desarrollar algunas reglas generales para transformar presentaciones poligonales.

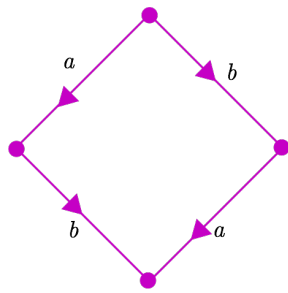


Figura 20: Presentación del toro.

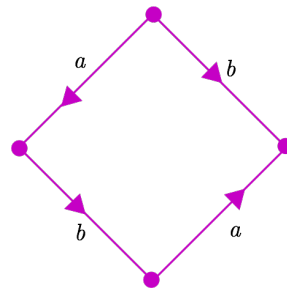


Figura 21: Presentación de la botella de Klein.

Definición 5.29. Si dos presentaciones \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 tienen realizaciones geométricas homeomorfas, decimos que son topológicamente equivalentes y lo denotamos por $\mathcal{P}_1 \approx \mathcal{P}_2$.

- Notación 5.30.**
1. En lo que sigue S denota una sucesión de símbolos.
 2. a, b, c, a_1, a_2, \dots denota cualquier símbolo de S o sus inversos.
 3. e denota cualquier símbolo que no está en S .
 4. W_1, W_2, \dots denota toda palabra formada por símbolos en S .
 5. Adoptamos la convención de que $(a^{-1})^{-1} = a$

Es importante tener en cuenta que las transformaciones que definiremos a continuación son operaciones en las presentaciones. Veremos que estas transformaciones producen presentaciones topológicamente equivalentes. Los nombres que se les dan y las ilustraciones que se muestran son para motivar la intuición de por qué las presentaciones definen espacios cocientes homeomorfos; pero recordar que el efecto real de llevar a cabo una transformación elemental es primero transformar la presentación simbólica como se indica, y sólo después crear una nueva realización geométrica de la presentación modificada. La imágenes no necesariamente refleja la apariencia exacta de la realización geométrica resultante.

Definición 5.31. Las siguientes operaciones se llaman transformaciones elementales de una presentación poligonal.

- Reetiquetar:

1. Cambiar todas las apariciones de un símbolo a , por un nuevo símbolo que no esté en la presentación.
2. Intercambiar todas las apariciones de dos símbolos a y b .
3. Intercambiar todas las apariciones de a por a^{-1} para alguna $a \in S$.

- Subdividir: Reemplazar toda aparición de a por ae y toda aparición de a^{-1} por $e^{-1}a^{-1}$, donde e es un nuevo símbolo que no aparece en la presentación.
- Simplificar: Si a y b siempre aparecen de forma adyacente, ya sea como ab o $b^{-1}a^{-1}$, reemplazar cada aparición de ab por a y cada aparición de $b^{-1}a^{-1}$ por a^{-1} , siempre que el resultado es uno o más palabras de longitud al menos 3 o una sola palabra de longitud 2.

- Reflejar (ver Figura 22):

$$\langle S | a_1 \dots a_m, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S | a_m^{-1} \dots a_1^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

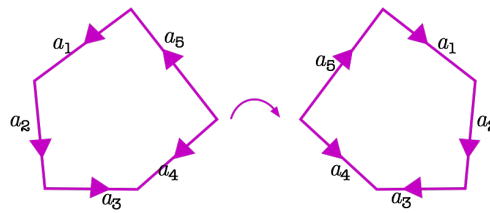


Figura 22: Reflejar.

- Rotar (ver Figura 23):

$$\langle S | a_1 a_2 \dots a_m, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S | a_2 \dots a_m a_1, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

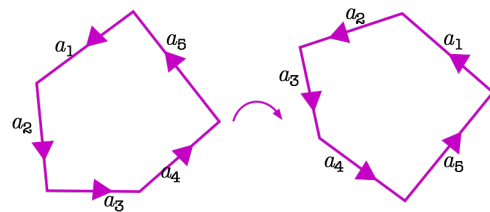


Figura 23: Rotar.

- Cortar (ver Figura 24): Si W_1 y W_2 tienen al menos 2 de longitud,

$$\langle S | W_1, W_2, W_3, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S, e | W_1 e, e^{-1} W_2, W_3, \dots, W_k \rangle.$$

- Pegar (ver Figura 24):

$$\langle S, e|W_1e, e^{-1}W_2, W_3, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S|W_1, W_2, W_3, \dots, W_k \rangle.$$

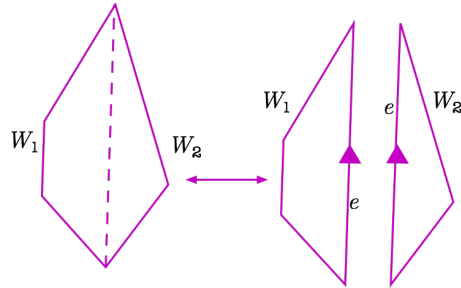


Figura 24: Cortar-Pegar.

- Doblar (ver Figura 25): Si W_1 tiene al menos 3 de longitud,

$$\langle S, e|W_1ee^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S|W_1, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

También se permite que W_1 tenga longitud 2, si la presentación tiene una sola palabra.

- Desdoblar (ver Figura 5.41):

$$\langle S, e|W_1, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S, e|W_1ee^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle.$$

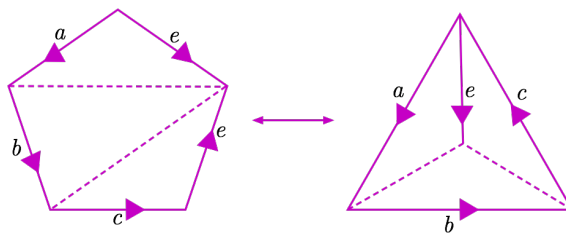


Figura 25: Doblar-Desdoblar.

Proposición 5.32. *Cada transformación elemental de una presentación poligonal produce una presentación topológicamente equivalente.*

Demostración. Note que subdividir y simplificar son transformaciones inversas una de la otra. Así como cortar-pegar y doblar-desdoblar, así, por simetría solamente es necesario probar una de cada par.

1. Para probar que «cortar» produce una realización geométrica homeomorfa, sean P_1 y P_2 regiones poligonales convexas etiquetadas por W_1e y $e^{-1}W_2$, respectivamente. Sea P' una región convexa poligonal etiquetada por W_1W_2 . Por el momento, vamos a suponer que estas son las únicas palabras en sus respectivas presentaciones. Sean $\pi : P_1 \amalg P_2 \rightarrow M$ y $\pi' : P' \rightarrow M$ las funciones cocientes respectivas. El segmento de línea que va del vértice terminal de W_1 en P' a su vértice inicial, por convexidad, está en P' ; etiquetemos a este segmento como e . Existe una función continua $f : P_1 \amalg P_2 \rightarrow P'$ que toma cada lado de P_1 o P_2 al lado en P' que correspondiente a la misma etiqueta, y cuya restricción a cada P_i es un homeomorfismo sobre su imagen. Por el Lema de mapeo cerrado (Lema 3.11), f es una función cociente. Como f identifica los dos lados e y e^{-1} nada más, las funciones cocientes $\pi' \circ f$ y π hacen las mismas identificaciones, así sus espacios cocientes son homeomorfos. Si hubiera otras palabras W_3, \dots, W_k , extendemos f definiéndola como la identidad en sus respectivas regiones poligonales.
2. Para «doblar», como en el inciso anterior, ignoraremos las palabras W_2, \dots, W_k , por el momento. Si W_1 tiene longitud 2, podemos «subdividir» para alargarlo, luego realizar la operación «pegar» y luego «simplificar». Por lo tanto, podemos suponer que W_1 tiene longitud al menos 3. Supongamos primero que $W_1 = abc$ tiene longitud igual a 3. Sean P y P' las regiones poligonales convexas con lados etiquetados como $abcee^{-1}$ y abc , respectivamente, y sea $\pi : P \rightarrow M, \pi' : P' \rightarrow M'$ las funciones cocientes. Agregar lados como se muestra en la Figura 25 vuelve P y P' en poliedros de complejos simpliciales Euclidianos, y existe una función simplicial única $f : P \rightarrow P'$ que manda cada lado de P al lado de P' con la misma etiqueta. Como en el inciso anterior, $\pi' \circ f$ y π son funciones cocientes que hacen las mismas identificaciones, así los espacios cocientes son homeomorfos.

Si W_1 tiene longitud 4 o más, podemos escribir $W_1 = Xbc$ para alguna X con longitud al menos 2. Luego cortamos sobre un nuevo lado a , para obtener,

$$\langle S, b, c, e | Xbcee^{-1} \rangle \approx \langle S, a, b, c, e | Xa^{-1}, abcee^{-1} \rangle,$$

y se continúa como en el caso anterior.

3. Para el resto de las transformaciones se hace una prueba parecida.

□

Ahora necesitamos encontrar presentaciones poligonales estándar para sumas conexas. Para esto tenemos la siguiente proposición.

Proposición 5.33. *Sean M_1 y M_2 las superficies que admiten presentaciones $\langle S_1|W_1 \rangle$ y $\langle S_2|W_2 \rangle$, respectivamente, donde S_1 y S_2 son conjuntos ajenos y cada presentación tiene una sola cara. Entonces $\langle S_1, S_2|W_1, W_2 \rangle$ es una presentación de la suma conexa $M_1 \# M_2$ (recordar que $W_1 W_2$ es la yuxtaposición de palabras).*

Demostración. Consideremos la presentación

$$\langle S_1, a, b, c|W_1 c^{-1} b^{-1} a^{-1}, abc \rangle.$$

Usando transformaciones elementales, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle S_1, a, b, c|W_1 c^{-1} b^{-1} a^{-1}, abc \rangle &\approx \langle S_1, b, c|W_1 c^{-1} b^{-1} bc \rangle \\ &\approx \langle S_1, c|W_1 c^{-1} c \rangle \\ &\approx \langle S_1|W_1 \rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto, la presentación que consideramos al principio es de M_1 . Sea B_1 la imagen en M_1 del interior de la región poligonal acotada por el triángulo abc . En la parte final de la prueba, vamos a probar que B_1 es un disco coordinado regular en M_1 . Supongamos, por el momento, que la anterior afirmación es verdadera, se sigue de manera inmediata que la realización geométrica de $\langle S_1, a, b, c|W_1 c^{-1} b^{-1} a^{-1} \rangle$ es homeomorfa a $M_1 - B_1$ (que denotaremos por M'_1), y ∂B_1 es la imagen de los lados $c^{-1} b^{-1} a^{-1}$. De la misma forma se puede probar que $\langle S_2, a, b, c|abc W_2 \rangle$ es una presentación de M_2 menos un disco coordinado regular (denotado por M'_2). Por lo tanto, $\langle S_1, S_2, a, b, c|W_1 c^{-1} b^{-1} a^{-1}, abc W_2 \rangle$ es una presentación de $M'_1 \amalg M'_2$ con la fronteras de sus respectivos discos identificados, que es $M_1 \# M_2$. Usando transformaciones elementales, obtenemos

$$\begin{aligned} &\langle S_1, S_2, a, b, c|W_1 c^{-1} b^{-1} a^{-1}, abc W_2 \rangle \\ &\approx \langle S_1, S_2, b, c|W_1 c^{-1} b^{-1} bc W_2 \rangle \\ &\approx \langle S_1, S_2, c|W_1 c^{-1} c W_2 \rangle \\ &\approx \langle S_1, S_2|W_1 W_2 \rangle. \end{aligned}$$

Que es lo que se pedía.

Ahora veamos que B_1 es un disco coordenado regular en M_1 , es decir, vamos a probar que tiene como vecindad un disco abierto en donde \bar{B}_1 es enviado a un disco cerrado más pequeño. Sean P_1, Q y P'_1 regiones poligonales convexas con lados etiquetados por las palabras $W_1c^{-1}b^{-1}a^{-1}$, abc y W_1 , respectivamente. Triangulando las regiones poligonales, obtenemos una función simplicial $f : P_1 \amalg Q \rightarrow P'_1$ que manda a Q a un triángulo pequeño $Q' \subseteq P'$ que tiene un vértice v en común con P' . La composición $P \amalg Q \rightarrow P'_1 \rightarrow M_1$ respeta las identificaciones hechas por la función cociente $P'_1 \amalg Q \rightarrow M_1$, así descende un homeomorfismo de M_1 que manda a B_1 a la imagen de Q' .

En la prueba de [9, Proposition 6.4] se muestra que el espacio cociente de una presentación superficial es una variedad. En la construcción de una vecindad euclidiana de un punto vértice, reunimos «cuñas» en varios vértices en un disco coordenado. Aplicando esta construcción al vértices v , Q' se toma para un conjunto que es homeomorfo a un disco cerrado en el plano, y es fácil extender ese homeomorfismo a un disco abierto ligeramente más grande. \square

Ejemplos 5.34 (Presentaciones de Superficies). . Usando la proposición anterior, podemos aumentar nuestra lista de presentaciones de superficies conocidas de la siguiente manera. Para que la lista luzca sencilla, interpretamos una «suma conexa de un solo toro» como \mathbb{T}^2 y de manera similar para $\mathbb{R}P^2$

1. Esfera:

$$\langle a | aa^{-1} \rangle.$$

2. Suma conexa de n -toros, con $n \geq 1$:

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_n, b_n | a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} \rangle.$$

3. Suma conexa de n -planos proyectivos:

$$\langle a_1, \dots, a_n | a_1 a_1 \dots a_n a_n \rangle.$$

A estas las llamaremos presentaciones estándares de estas superficies.

5.4 TEOREMA DE CLASIFICACIÓN

Por fin estamos listos para la demostración de éste tan majestuoso Teorema de Clasificación de Superficies. Una demostración de este teorema fue publicada en 1907 por Max Dehn y Poul Heegaard [3] suponiendo que la superficie tiene alguna presentación poligonal. La siguiente proposición muestra que siempre ocurre.

Proposición 5.35. *Cualquier superficie compacta admite una presentación poligonal.*

Demostración. Sea M una superficie compacta. El Teorema 5.3 muestra que M es homeomorfa al poliedro de un complejo simplicial de dimensión 2, en donde cada 1-simplejo es una cara de exactamente dos 2-simplejos. De éste complejo, podemos construir una presentación superficial \mathcal{P} con una palabra de longitud 3 para cada 2-simplejos, y los lados tienen la misma etiqueta si y sólo si corresponden al mismo 1-simplejo. Queremos probar que la realización geométrica de \mathcal{P} es homeomorfa a la realización geométrica de K . Si $P = P_1 \amalg \cdots \amalg P_k$ es la unión ajena de los 2-simplejos de K , luego tenemos dos funciones cocientes $\pi_K : P \rightarrow |K|$ y $\pi_{\mathcal{P}} : P \rightarrow |\mathcal{P}|$, así es suficiente probar que hacen las mismas identificaciones.

Note sur las dos funciones cocientes identifican los mismos lados. Para completar la prueba, necesitamos probar que π_K , así como $\pi_{\mathcal{P}}$, identifica vértices únicamente cuando se ven obligados a hacerlo por la relación generada por las identificaciones en los lados. Para probar esto, supongamos que $v \in K$ es cualquier vértice. Dado que $|K|$ es una variedad, no puede suceder que v sea un punto aislado de $|K|$. Por lo tanto v pertenece a algún 1-simplejo. El Teorema 5.3 nos garantiza que este 1-simplejo es una cara de exactamente dos 2-simplejos.

Vamos a decir que dos simplejos σ, σ' que contienen a v son **lados unidos en v** si existe una sucesión $\sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_k = \sigma'$ de 2-simplejos que contienen a v tal que σ_i comparte un lado con σ_{i+1} para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Note que «los lados estén unidos» es una relación de equivalencia en el conjunto de los 2-simplejos que contienen a v , así que para probar la afirmación, es suficiente mostrar que hay una sola clase de equivalencia.

Si este no fuera el caso, podemos agrupar los 2-simplejos que contienen a v en dos conjuntos ajenos $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ y $\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$,

tal que para cualquiera σ_i y σ_j son lados que están unidos uno con el otro, pero τ_i no es un lado unido con cualquier otro lado σ_j . Sea ε lo suficientemente pequeño tal que $B_\varepsilon(v) \cap |K|$ es un subconjunto abierto de $|K|$ y así v tiene una vecindad U homomorfa a \mathbb{R}^2 que también es un subconjunto $W \subseteq B_\varepsilon(v) \cap |K|$ que es homeomorfa a un abierto en \mathbb{R}^2 . Se sigue que $W - \{v\}$ es conexa. Sin embargo, si establecemos

$$U = W \cap (\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_k) - \{v\}, \quad V = W \cap (\tau_1 \cup \dots \cup \tau_m) - \{v\},$$

se tiene que U y V son abiertos en $|K|$, pues sus intersecciones con cada simplejo es abierta en el simplejo, y $W = U \cup V$ es una desconexión de W . Lo cual es una contradicción. \square

Antes de continuar, necesitamos hacer una aclaración: Teorema de Clasificación para superficies compactas consta de dos partes; una es que toda superficie compacta y conexa es homeomorfa a una de las de la lista del Teorema 5.41, pero esta no muestra que las diferentes superficies de la lista son topológicamente distintas.

Observación 5.36. Recordar que en el capítulo anterior, describimos las triangulaciones de bloque del toro \mathbb{T}^2 y del plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$. Una situación similar ocurre para las superficies cerradas $n\mathbb{T}^2$ y $n\mathbb{R}P^2$.

Es fácil ver que $n\mathbb{T}^2$ tiene una triangulación en bloque con sólo un 0-bloque, $2n$ bloques de dimensión 1,

$$e(a)_1^1, e(a)_1^2, \dots, e(a)_1^n \text{ y } e(b)_1^1, e(b)_1^2, \dots, e(b)_1^n,$$

representados respectivamente por los lados a_1, \dots, a_n y $b_1 \dots b_n$; finalmente, tiene un 2-bloque

$$e_2 = n\mathbb{T}^2 - (e_0 \cup (\cup_{i=1}^n e(a)_1^i) \cup (\cup_{i=1}^n e(b)_1^i)).$$

Para $n\mathbb{R}P^2$, tenemos una triangulación en bloque con sólo un 0-bloque e_0 , n 1-bloques e_1^1, \dots, e_1^n que corresponde a a_1, \dots, a_n , y sólo un 2-bloque $e_2 = n\mathbb{R}P^2 - (e_0 \cup (\cup_{i=1}^n e_1^i))$.

Con esta observación, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.37. *Las superficies cerradas $S^2, n\mathbb{T}^2$, y $n\mathbb{R}P^2$ con $n \geq 1$ no son homeomorfas a pares.*

Demostración. Para probar este resultado, vamos a calcular los grupos de homología $H_1(S^2; \mathbb{Z}), H_1(n\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}), H_1(n\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z})$ y luego mostrar que estos, a pares, no son isomorfos.

Note que $H_1(S^2; \mathbb{Z}) \cong 0$. Calculemos el primer grupo de homología con coeficientes en \mathbb{Z} de las otras dos variedades a través de las triangulaciones de bloque ya descritas.

Empecemos con $n\mathbb{T}^2$, demos a $\overline{e(a)}_1^i$ y $\overline{e(b)}_1^i$ una orientación, escogiendo un generador $\beta(a)_1^i$ y $\beta(b)_1^i$, respectivamente, para cada

$$H_1(\overline{e(a)}_1^i, e(a)_1^i; \mathbb{Z}) \text{ y } H_1(\overline{e(b)}_1^i, e(b)_1^i; \mathbb{Z})$$

donde $i = 1, \dots, n$; similarmente, al complejo simplicial $\overline{e_2}$ se le da una orientación de acuerdo con un generador β_2 . El grupo cadena $C_1(e(n\mathbb{T}^2))$ es un grupo abeliano libre generado por $\beta(a)_1^i$ y $\beta(b)_1^i$ con $i \in \{1, \dots, n\}$; por otro lado, $d_2(\beta_2) = 0$, ya que los 1-bloques aparecen dos veces y en direcciones opuestas. Por lo tanto, por Teorema 4.108

$$H_1(n\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2n}.$$

En el caso de $n\mathbb{R}P^2$, damos a los 1-bloques e_1^i una orientación escogiendo un generador β_1^i para cada $H_1(\overline{e_1^i}, e_1^i; \mathbb{Z})$, y un generador

$$\beta_2 \in H_2(\overline{e_2}, e_2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

En este caso, tenemos $d_2(\beta_2) = 2(\sum_{i=1}^n \beta_1^i)$; entonces $C_1(e(n\mathbb{R}P^2))$ es un grupo abeliano generado por $\beta_1^1, \beta_1^2, \dots, \beta_1^{n-1}, \sum_{i=1}^n \beta_1^i$ y como $2(\sum_{i=1}^n \beta_1^i)$ es una frontera,

$$H_1(n\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}_2.$$

Así, ninguna de las superficies compactas antes mencionadas no son homeomorfas dos a dos. □

Necesitaremos otros resultados importantes que nos ayudarán para la demostración del teorema.

Lema 5.38. *La botella de Klein es homemomorfa a $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$.*

Demostración. Por una sucesión de transformaciones elementales, encontramos que la botella de Klein tiene las siguientes presentaciones:

$$\begin{aligned}
 \langle a, b | abab^{-1} \rangle &\approx \langle a, b, c | abc, c^{-1} ab^{-1} \rangle \\
 &\approx \langle a, b, c | bca, ba^{-1} c \rangle \\
 &\approx \langle a, b, c | bca, a^{-1} cb \rangle \\
 &\approx \langle b, c | bccb \rangle \\
 &\approx \langle b, c | bbcc \rangle
 \end{aligned}$$

La presentación en el último renglón es nuestra presentación estándar de una suma conexa de dos planos proyectivos. \square

Lema 5.39. *La suma conexa $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{R}P^2$ es homeomorfo a $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$.*

Demostración. Una presentación de $K \# \mathbb{P}^2$ es $\langle a, b, c | abab^{-1} cc \rangle$. Por el Lema 5.38 $K \simeq \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$, luego la presentación antes mencionada es una presentación de $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$.

Veamos que por medio de transformaciones elementales, que podemos llegar a una presentación de $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{P}^2$, que está dada por $\langle a, d, e | a^{-1} d^{-1} adee \rangle$.

$$\begin{aligned}
 \langle a, b, c | abab^{-1} cc \rangle &\approx \langle a, b, c | cabab^{-1} c \rangle \\
 &\approx \langle a, b, c | cabd^{-1}, dab^{-1} c \rangle \\
 &\approx \langle a, b, c, d | abd^{-1} c, c^{-1} ba^{-1} d^{-1} \rangle \\
 &\approx \langle a, b, d | abd^{-1} ba^{-1} d^{-1} \rangle \\
 &\approx \langle a, b, d | a^{-1} d^{-1} abd^{-1} b \rangle \\
 &\approx \langle a, b, d, e | a^{-1} d^{-1} abe, e^{-1} d^{-1} b \rangle \\
 &\approx \langle a, b, d, e | ea^{-1} d^{-1} ab, b^{-1} de \rangle \\
 &\approx \langle a, d, e | ea^{-1} d^{-1} ade \rangle \\
 &\approx \langle a, d, e | a^{-1} d^{-1} adee \rangle.
 \end{aligned}$$

\square

Definición 5.40. Un par de lados que están identificados son *complementarios* si aparecen en las presentaciones como a y a^{-1} , y los llamaremos *torcidos* si aparecen como a, \dots, a o como a^{-1}, \dots, a^{-1} .

Usando esto como nuestro punto de salida, podemos probar el culmen de la tesis.

Teorema 5.41 (Teorema de Clasificación para Superficies Compactas). *Cualquier 2-variedad, compacta, conexa y no vacía es homeomorfa a una de la siguientes superficies:*

1. La esfera S^2 ,
2. Una suma conexa de uno o más copias de T^2 .
3. Una suma conexa de una o más copias de RP^2

Demostración. Sea M una superficie compacta y conexa. Por la Proposición 5.35, podemos suponer que M cuenta con una presentación poligonal dada. Se probará el teorema transformando esta presentación a una de nuestras presentaciones estándar en varios pasos.

Paso 1: M admite una presentación con una sola cara. Si existieran dos o más caras, dado que M es conexa, algún lado de una cara debería estar identificado con uno de otra diferente; de otro modo, M sería la unión ajena de los cocientes de sus caras, y como cada cociente es abierto y cerrado, desconectaría a M . Así, mediante la realización de transformaciones de «pegado» (junto con las rotaciones y reflexiones como sea necesario), podemos reducir el número de caras en la presentación hasta tener sólo una.

Paso 2: M es homeomorfa a la esfera, o admite una presentación en donde cualquier par de lados complementarios no son adyacentes. Cada par de lados complementarios adyacentes se pueden eliminar mediante un «doblado» ($\langle S, e|W_1ee^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle S|W_1, W_2, \dots, W_k \rangle$), a menos que sea el único par en la presentación; en este caso, la presentación es equivalente a $\langle a|aa^{-1} \rangle$ y M es homeomorfa a la esfera. Desde ahora, podemos suponer que la presentación no es la presentación estándar de la esfera.

Paso 3: M admite una presentación en la que todos los pares torcidos, son adyacentes. Si un par torcido no fuera adyacente, entonces la presentación se puede transformar por rotaciones a una descrita por una palabra de la forma $VaWa$, donde ni V ni W son palabras

vacías. A continuación mostraremos cómo se puede transformar la palabra $VaWa$ en $VW^{-1}bb$,

$$\begin{aligned}\langle S, a|VaWa \rangle &\approx \langle S, a, b|Vab, b^{-1}Wa \rangle \\ &\approx \langle S, a, b|bVa, a^{-1}W^{-1}b \rangle \\ &\approx \langle S, b|bVW^{-1}b \rangle \\ &\approx \langle S, b|VW^{-1}bb \rangle\end{aligned}$$

Note que W^{-1} denota a la palabra que se obtiene al «reflejar» a W . En esta última presentación, los pares torcidos a, a se han remplazado por otro par torcido b, b que ya es adyacente. Además, no hay otro par de lados adyacentes que esté separado. Pudimos haber creado algún nuevo par de lados torcidos cuando «reflejamos» W , pero disminuimos el número total de pares no adyacentes (incluyendo los torcidos y los complementarios) por al menos uno. Así, después de una cantidad finita de operaciones, no existirán más pares torcidos no adyacentes. Podríamos ahora crear nuevos pares complementarios adyacentes. Éstos, se pueden eliminar usando el **Paso 2**, en donde no incrementan el número de pares no adyacentes.

Paso 4: *M admite una presentación en la cual todos los vértices se identifican en un solo punto.* Escogamos alguna clase de equivalencia de vértices, le llamamos v . Si existieran vértices que no estuvieran identificados con v tendría que existir un lado que conectara un vértice v con un vértice en alguna otra clase de equivalencia; etiquetemos al lado a que tiene como vértices a y v y al vértice con otra clase de equivalencia, w . El otro lado que toca a en su vértice v no puede estar identificado con a : si fuera complementario a s , tuvo que haberse eliminado en el **Paso 2**, mientras que si se formara un par torcido con a , entonces la función cociente debería identificar los vértices iniciales y terminales de a con los del otro lado, pero suponemos que estamos suponiendo que esto no sucede, pues v y w no son de la misma clase de equivalencia. Así, etiquetemos a este lado como b , y etiquetamos a su otro vértice como x (éste último, podría identificarse con v, w , o con cualquier otro). En algún lugar del polígono hay otro lado etiquetado como b o

b^{-1} . Supongamos por definitud que es b^{-1} ; el argumento para b es similar excepto por una «reflexión» extra. Así podemos escribir la palabra que describe a la presentación en la forma $baXb^{-1}Y$, donde X y Y son palabras desconocidas, ambas no vacías. Aplicando transformaciones elementales, se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} \langle S, a, b | baXb^{-1}Y \rangle &\approx \langle S, a, b, c | bac, c^{-1}Xb^{-1}Y \rangle \\ &\approx \langle S, a, b, c | acb, b^{-1}Yc^{-1}X \rangle \\ &\approx \langle S, a, c | acYc^{-1}X \rangle. \end{aligned}$$

Note que el lado c tiene como uno de sus vértices a w . Como el lado que se eliminó es b , que por su parte tenía como uno de sus vértices a v , se redujo el número de vértices v y se incrementó el número de vértices w . En el proceso quizá pudimos haber introducido un par de lados complementarios adyacentes, pero aplicando el *Paso 2* nos podemos deshacer de él. Este puede disminuir el número de vértices etiquetados con v (por ejemplo, si un vértice v está entre los lados etiquetados con aa^{-1} , por la transformación «doblar» se eliminará), pero no puede incrementar su número. Así que repitiendo esta secuencia de pasos un número finito de veces podemos disminuir los vértices v a uno sólo, luego eliminamos los lados complementarios adyacentes eventualmente eliminaremos la clase del vértice v de la presentación por completo. Volviendo a hacer este procedimiento para cada clase de vértices hasta que sólo quede uno.

Paso 5: *Si la presentación tiene cualquier par complementario a, a^{-1} , entonces tiene otro par complementario b, b^{-1} que ocurren intercalados con el primero, como en $a, \dots, b, \dots, a^{-1}, \dots, b^{-1}$. Si este no es el caso, entonces la presentación es de la forma $aXa^{-1}Y$, donde X contiene únicamente pares complementarios o pares torcidos adyacentes emparejados entre sí. Así cada lado en X se identifica sólo con otro lado de X y lo mismo para Y . Pero esto quiere decir que los vértices terminales de los lados a y a^{-1} , sólo tocan a X , por lo que pueden ser identificados únicamente*

con vértices en X , mientras que los vértices iniciales se pueden identificar sólo con vértices en Y . Lo cual es una contradicción, pues por el **Paso 4**, todos los vértices se identifican entre sí.

Paso 6: M admite una presentación en donde todos los pares complementarios intercalados aparecen juntos sin que otros lados intervengan: $aba^{-1}b^{-1}$. Si la presentación esta dada por la palabra $WaXbYa^{-1}Zb^{-1}$, mediante transformaciones elementales podemos obtener:

$$\begin{aligned}
 & \langle S, a, b | WaXbYa^{-1}Zb^{-1} \rangle \\
 & \approx \langle S, a, b, c | WaXc, c^{-1}bYa^{-1}Zb^{-1} \rangle \\
 & \approx \langle S, a, b, c | XcWa, a^{-1}Zb^{-1}c^{-1}bY \rangle \\
 & \approx \langle S, b, c | XcWZb^{-1}c^{-1}bY \rangle \\
 & \approx \langle S, b, c | WZb^{-1}c^{-1}bYXc \rangle \\
 & \approx \langle S, b, c, d | WZb^{-1}d^{-1}, dc^{-1}bYXc \rangle \\
 & \approx \langle S, b, c, d | d^{-1}WZb^{-1}, bYXcdc^{-1} \rangle \\
 & \approx \langle S, c, d | d^{-1}WZYXcdc^{-1} \rangle \\
 & \approx \langle S, c, d | cdc^{-1}d^{-1}WZYX \rangle
 \end{aligned}$$

La nueva palabra $cdc^{-1}d^{-1}WZYX$ el antiguo conjunto de pares de lados intercalados a uno nuevo conjunto adyacente $cdc^{-1}d^{-1}$, sin separar cualesquiera otros lados que han estado previamente adyacentes. Repetimos esto para cada conjunto de pares intercalados. (Note que este paso no necesita «reflexiones».)

Paso 7: M es homeomorfa a la suma conexa de uno o más toros o una suma conexa de uno o más planos proyectivos. Por lo que hemos hecho hasta ahora, todos los pares torcidos aparecen adyacentes a otro, y todos los pares complementarios aparecen en grupos intercalados como $aba^{-1}b^{-1}$. Esta es una presentación de una suma conexa de toros (representados como $aba^{-1}b^{-1}$) y de planos proyectivos (representados como cc .) Si solo existieran toros o planos proyectivos, terminamos.

El otro caso sería, si la presentación contuviera pares de lados torcidos, y pares de lados complemen-

tarios. En este caso, algún par torcido debe ocurrir junto con un par complementario; así la presentación se describe como una palabra de la forma $aba^{-1}b^{-1}ccXX$ o de la forma $ccaba^{-1}b^{-1}$. En cualquier caso, es la suma conexa de un toro con un plano proyectivo y la superficie descrita por la palabra X . Por el Lema 5.39 se muestra que la presentación estándar de $\mathbb{T}^2\#\mathbb{R}P^2$ se puede transformar en una suma conexa de tres planos proyectivos, $\mathbb{R}P\#\mathbb{R}P\#\mathbb{R}P$. Haciendo esta transformación, eliminamos una aparición de \mathbb{T} en la suma conexa. Repitiendo este procedimiento, eliminamos todos los toros, así completamos la prueba.

□

BIBLIOGRAFÍA

- [1] H.R. Brahana. «System of circuits on two-dimensional manifolds.» En: *Ann. Math* 23.2 (1921), págs. 144-168.
- [2] Richard H. Crowel y Ralph H. Fox. *Introduction to Knot Theory*. Springer-Verlag New York, 1963.
- [3] M. Dehn y P. Heegard. «Analysis Situs». En: *Encyklopädie Der Mathematischen Wissenschaften Mit Einschuluss Ihrer Anwendungen* III AB.3 (1907), págs. 153-220.
- [4] W. von Dick. «Beiträge zur analysis situs». En: *Ann. Math* 32 (1888), págs. 457-512.
- [5] James Dugundji. *Topology*. Allyn y Bacon, inc., Boston., 1966.
- [6] Davide L. Ferriario y Renzo A. Piccinini. *Simplicial Structures in Topology*. CMS Books in Mathematics. Springer, 2011.
- [7] Jean Gallier y Xu Dianna. *A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces*. Vol. 9. Geometry and Com. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [8] C. Jordan. «Sur la déformation des surfaces». En: *J. de Mathématiques Pures et Appliquées* 2^e 11 (1866), págs. 105-109.
- [9] Jhon M. Lee Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2000.
- [10] A.F. Möbius. «Zur theorie der polyëder und der elementarverwandtschaft.» En: *Oeuvres Complètes* 2 (1861), págs. 519-559.
- [11] E.E. Moise. *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1977.
- [12] Graciela Salicrup. *Introducción a la Topología*. Aportaciones Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana, 1997.
- [13] C. Thomassen. «The Jordan-Schonflies Theorem and the classification of surfaces». En: *Am. Math. Monthly* 99 (1992), págs. 116-131.

ÍNDICE ALFABÉTICO

- $F(S)$, 12
- $F(S; R)$, 13
- W_S , 11
- HTop, 4

- acción de un grupo, 15
- adjuntar celdas, 26
- afinmente independientes, 29

- bloque, 58
- bola coordenada, 17
 - regualr, 24
- bola unitaria cerrada, 19

- característica de Euler-Poincaré, 55
- carta coordenada, 18
- categoría, 1
 - de homotopía, 4
 - plena, 2
- celda, 25
- celda cerrada, 25
- celda compleja, 26
- celda regular, 28
- ciclo, 50
- complejo CW, 27
 - regular, 28
- complejo simplicial
 - abstracto, 33
 - en \mathbb{R}^n , 31
 - orientado, 48
- complejo simplicial generado, 35
- cono (abstracto), 35
- contracción/expansión elemental de tipo I, 11
- contracción/expansión elemental de tipo II, 12
- coordenadas, 18
 - coordenadas baricéntricas, 30
 - coordenadas baricéntricas de p., 38
- coproducto fibrado, 4
- cortar, 72
- covexo, 29
- cuadrado cocartesiano, 4

- descomposición celular, 26
- descomposición de CW, 27
- desdoblar, 73
- dimensión de una variedad topológica, 17
- disco unitario cerrado, 19
- doblar, 73
- dominio coordinado, 17

- envolvente convexa, 29
- esfera de dimensión n , 19
- espacio proyectivo real de dimensión n , 20
- esqueleto, 28

- frontera, 50
- frontera de σ , 35
- función afín, 32
- función coordenada, 17
- función homotópica, 3
- función simplicial, 33
- functor, 3

- grupo
 - actuando libremente, 16
- grupo actuando transitivamente, 16
- grupo topológico, 15

- homología simplicial, 53
- homotopía, 3
 - mismo tipo de, 4

- juntura, 35
- letras, 11
- morfismo, 36
- número de Betti, 55
- palabras, 11
 - equivalentes, 12
 - reducidas, 12
- parametrización local, 18
- pegar, 72
- polígono, 63
- poliedro, 45
- presentación de un espacio
 - topológico, 70
- presentación poligonal, 14
- presentación superficial, 70
- propiedad universal del co-
 - producto fibrado, 4

- realización geométrica, 37
- realización geométrica de una
 - presentación, 69
- reetiquetar, 71
- reflejar, 72
- región poligonal, 63
- rotar, 72

- sílabas, 11
- simplejo (euclidiano), 30
- simplificar, 72
- soporte, 36
- subcategoría, 2
- subcomplejo
 - simplicial, 34
- subcomplejo CW, 28
- subdividir, 72
- suma conexa, 64
- suspensión, 35

- topología coherente, 26
- toro de dimensión n , 20
- triangulable, 45
- triangulación en bloque, 59

- vértice
 - inicial, 69
 - terminal, 70
- vértices(complejo simplicial abstracto), 33
- variedad topológica, 17
- variedad triangulable, 61
- vecindad coordenada, 18