



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

---

Formación de imágenes en la solución de Schwarzschild

Tesis presentada al

**Posgrado en Ciencias Física Aplicada**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**Maestría en Física**

por

Ernesto Espíndola Ramos

asesorado por

Dr. Gilberto Silva Ortigoza

Puebla Pue.  
Noviembre de 2016



**Título:** Formación de imágenes en la solución de Schwarzschild  
**Estudiante:** ERNESTO ESPÍNDOLA RAMOS

COMITÉ

---

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo  
Presidente

---

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla  
Secretario

---

Dra. Mercedes Paulina Velázquez Quesada  
Vocal

---

Dra. Irais Rubalcava Garcia  
Suplente

---

Dr. Gilberto Silva Ortigoza  
Asesor



# Resumen

En este trabajo teórico se estudia la formación de imágenes debido a una lente gravitacional generada por un agujero negro de Schwarzschild, con la finalidad de establecer las bases para la prueba de Ronchi aplicada a lentes gravitacionales; esta prueba es bien conocida para lentes y espejos comunes, y nos permite deducir la calidad del sistema óptico [1]. Comenzando con el estudio de formación de imágenes debido al fenómeno de refracción (a nivel de óptica geométrica), extendemos estos conceptos al espacio-tiempo de Schwarzschild, siendo necesario establecer las ecuaciones que describen las trayectorias de los rayos de luz (geodésicas nulas). Para tener una comprensión más clara del efecto de lentes gravitacionales, se presentan algunos ejemplos de imágenes debido a una fuente puntual y fuentes extendidas.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Herramienta básica para la computación de imágenes</b>	<b>1</b>
1.1. Formación de imágenes bajo el fenómeno de refracción . . . . .	1
<b>2. Geodésicas nulas en el espacio-tiempo de Schwarzschild</b>	<b>7</b>
2.1. Ecuación de movimiento de la luz . . . . .	7
2.2. Parametro de impacto . . . . .	14
2.3. Integración de la parte espacial de las geodésicas nulas . . . . .	17
<b>3. Formación de imágenes en el espacio-tiempo de Schwarzschild</b>	<b>23</b>
3.1. Imágenes primarias y relativistas . . . . .	25
3.2. Anillos de Einstein . . . . .	26
3.3. Imagen de una fuente lineal sobre el eje óptico . . . . .	28
3.4. Imagen de un disco pseudo-cartesiano . . . . .	29
3.5. Imagen de una elipse pseudo-cartesiana . . . . .	32
<b>4. Resultados</b>	<b>35</b>
4.1. Gravitronchigrama . . . . .	36
<b>5. Conclusiones</b>	<b>41</b>
<b>III. Bibliografía</b>	<b>43</b>



# Índice de figuras

1.1.	Un observador y un objeto 1-dimensional se encuentran inmersos en los medios con índice de refracción $n_1$ y $n_2$ , respectivamente. El observador se sustituye por una fuente puntual ficticia, con la finalidad de hallar fácilmente aquellos puntos sobre la interfase que conecten la posición del observador con puntos sobre el objeto vía rayo refractado; estos puntos conforman la imagen registrada por el observador. . . . .	2
1.2.	En (a) se muestran los rayos incidentes y refractados por una lente axicon, con índice de refracción $n = 1,517$ , debido a una fuente puntual en la posición $z \rightarrow -\infty$ ; adicionalmente, en (b) se muestra la región cáustica. En (c)-(e) se muestran los ronchigramas nulos (rejilla de curvas en la posición $z = 0$ ) que dan lugar al patrón de franjas paralelas registradas por una pantalla plana en las posiciones (f) $z = 1cm$ , (g) $z = 2cm$ y (h) $z = 3cm$ . Aprovechando el principio de reciprocidad, la imagen que registra un observador en la posición $z \rightarrow -\infty$ , debido a las rejillas (f)-(h), son precisamente las curvas (c)-(e), respectivamente, sobre la superficie plana del axicon. Nótese que se observa un cambio de topología en la imagen, si alguna de las rectas está dentro de la región de interferencia. <i>Fuente: Wavefronts, caustic, ronchigram, null ronchigrating of a plane wave refracted by an axicon lens</i> [11]. . . . .	4
1.3.	Se muestran en (a) los rayos refractados y en (b) los frentes de onda para una lente plano parabólica en la que inciden frentes de onda planos. En (c) se muestra la superposición de frentes de onda y rayos refractados. La cáustica asociada a este sistema óptico se muestra en rojo; notese que corresponde a la envolvente de los rayos refractados y a puntos en los cuales los frentes de onda poseen singularidades o autointersecciones. <i>Fuente: Wavefronts, light rays and caustic associated with the refraction of a spherical wave by two interfaces: the axicon and the plano-convex parabolic lenses</i> [13]. . . . .	5
2.1.	Definimos $\psi$ como el ángulo entre la dirección inicial de un rayo ( $\hat{X}^e$ ) y la línea imaginaria que conecta la posición de la fuente con el origen. . . . .	11
2.2.	Definición de $\gamma$ . . . . .	12
2.3.	a) La base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ . b) Los ángulos $\{\psi, \gamma\}$ determinan la dirección inicial de emisión de un fotón. . . . .	13
2.4.	Gráfico de la ecuación 2.42, con respecto de $\rho$ , para $r_o = 6\mathcal{M}$ , $\psi_o = \pi/8$ , $\pi/4$ , $3\pi/8$ , $\pi/2$ , y $\mathcal{M} = 1m$ . . . . .	14

- 2.5. El rayo 1 al ser emitido inicialmente en la dirección  $\psi = \pi/2$  siempre se aleja del agujero negro. El rayo 2 tiene un punto de máximo acercamiento denotado por la letra griega  $\rho$ . El rayo 3 al tener una dirección de emisión inicial entre  $0 \leq \psi < \psi_o^c$  siempre tiende a acercarse al agujero negro. . . . . 15
- 2.6. Geodésicas en el pseudo-plano  $xz$ . La fuente está en la posición radial  $r_0 = 6\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ . Se muestran las geodésicas nulas para los ángulos de emisión  $\psi = \pi/2, 3\pi/8$  y  $\pi/4 + 0,001$ , en los incisos a) b) y c), respectivamente. En el inciso d) se muestran juntos estos casos. . . . . 20
- 2.7. Para obtener la ecuación general de las geodésicas nulas, rotamos el vector 2.68 en una cantidad  $\theta_0$  en dirección antihoraria alrededor del eje  $y$ , y luego rotamos en una cantidad  $\phi_o$  en dirección antihoraria alrededor del eje  $z$ . . . . . 21
- 3.1. Se ilustra una geodésica particular descrita por la ecuación 2.68 para  $r_o = 6\mathcal{M}$ ,  $\gamma = \pi$ , y  $\mathcal{M} = 1$ ; además se ilustra la configuración de la base  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ . 23
- 3.2. Se muestra la posición espacial del observador y de la fuente puntual. También se ilustra la configuración de la base  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ , y un rayo ficticio emitido en el plano  $\gamma = 0$  ( $\phi_o = 0$ ). . . . . 24
- 3.3. La fuente puntual se encuentra en una posición tal que la geodésica nula que la conecta con el observador no llega a la posición de máximo acercamiento. 24
- 3.4. Superficie generada por los puntos de máximo acercamiento para un observador en  $r_o = 6\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ . Las regiones  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$  las hemos marcado con los símbolo  $\Theta^+$  y  $\Theta^-$ , respectivamente. . . . . 25
- 3.5. Se muestra al observador (punto en color cian) y fuente puntual (punto en color blanco) alineados sobre el eje óptico a una distancia  $r = 6\mathcal{M}$  del origen, para  $\mathcal{M} = 1m$ . La esfera que envuelve al agujero negro representa la esfera fotónica, la que envuelve al observador representa la esfera celeste. El anillo en blanco corresponde al anillo de Einstein primario registrado por el observador, mientras que el círculo en color cian representa al radio angular crítico. . . . . 27
- 3.6. a) Proyección del anillo de Einstein primario y b) primer anillo relativista sobre el plano  $\psi = \pi/2$  para  $r_o = 6\mathcal{M}$ ,  $r_s = 6\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M} = 1m$ . Nótese que el anillo relativista se encuentra cerca del radio angular crítico  $\psi_o^c = \pi/4$ . . . . . 27
- 3.7. a) Se muestra la dependencia del radio angular  $\psi$  del anillo de Einstein primario, en b) el correspondiente a la primera imagen relativista, ambas como función de la posición espacial de la fuente  $r_s$ , para un observador en la posición radial  $r_o = 6\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ . Nótese que el primer anillo relativista se encuentra muy cerca del radio angular crítico  $\psi_o^c = \pi/4$ . . . . . 28
- 3.8. a) Configuración del sistema físico en el sistema pseudocartesiano  $\{x, z\}$ . La posición del observador es  $r_o = 6\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ . La fuente está a lo largo del eje  $z$  en el rango  $3,5\mathcal{M} \leq z \leq 8\mathcal{M}$ . b) Se muestra la imagen registrada por el observador de la fuente lineal. Nótese que a medida que nos alejamos del agujero negro, la imagen de la fuente se hace más compacta. . . . . 29
- 3.9. Se muestra la posición angular de la imagen primaria y secundaria, como función de  $x_s$ , para  $z_s = 6\mathcal{M}$ , y  $r_o = 6\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ . Si  $x_s = 0$ , se recupera el radio angular del anillo de Einstein correspondiente. . . . . 30

3.10. Se muestra la imagen primaria y secundaria para una fuente circular, centrada en el eje óptico, en la posición $z = 6\mathcal{M}$ y de radio $x_s = 6\mathcal{M}$ , registradas por un observador en la posición $r_o = 6\mathcal{M}$ , con $\mathcal{M} = 1m$ . . . . .	31
3.11. Coloración de un disco de radio $6\mathcal{M}$ en el plano $z = 6\mathcal{M}$ centrado en el eje óptico del sistema, para $\mathcal{M} = 1m$ . . . . .	31
3.12. a) Imagen del disco de la figura 3.11 registrada por un observador en la posición $r_o = 6\mathcal{M}$ . La imagen primaria es detectada fuera del anillo de Einstein, mientras que dentro de este se observa la imagen secundaria. b) Se muestra con más detalle una porción de la imagen del inciso a). . . . .	32
3.13. a) Fuente pseudo-elíptica caracterizada por los parámetros $a = \mathcal{M}$ , $b = 6\mathcal{M}$ , con $\mathcal{M} = 1m$ . En b)-f) se muestra la imagen registrada de la elipse-pseudo-cartesiana por un observador en la posición $r_o = 6\mathcal{M}$ ; la elipse se encuentra en el plano pseudo cartesiano $z_o = 6\mathcal{M}$ en las posiciones $x_o = 0\mathcal{M}$ , $y = 0\mathcal{M}, 3\mathcal{M}, 5,97\mathcal{M}, 6,03\mathcal{M}, 9\mathcal{M}$ , respectivamente. El punto blanco representa el centro de la elipse. La circunferencia punteada en color rojo representa el anillo de Einstein para una fuente puntual sobre el eje óptico en la posición $z_o = 6\mathcal{M}$ . La circunferencia punteada en color cian representa el radio angular crítico. . . . .	33
3.14. a) Fuente pseudo-elíptica caracterizada por los parámetros $a = \mathcal{M}$ , $b = 6\mathcal{M}$ , con $\mathcal{M} = 1m$ . En b)-d) se muestra la imagen registrada de la elipse-pseudo-cartesiana por un observador en la posición $r_o = 6\mathcal{M}$ ; la elipse se encuentra en el plano pseudo cartesiano $z_o = 6\mathcal{M}$ en las posiciones $x_o = 3\mathcal{M}$ , $y = 0\mathcal{M}, 3\mathcal{M}, 6\mathcal{M}, 9\mathcal{M}, 12\mathcal{M}$ , respectivamente. El punto blanco representa el centro de la elipse. La circunferencia punteada en color rojo representa el anillo de Einstein para una fuente puntual sobre el eje óptico en la posición $z_o = 6\mathcal{M}$ . La circunferencia punteada en color cian representa el radio angular crítico. . . . .	34
4.1. Esquema de la prueba de Ronchi para lentes comunes. . . . .	35
4.2. La rejilla de Ronchi se muestra como un conjunto de nueve franjas sobre una esfera de radio $r_r = 8\mathcal{M}$ , con $\mathcal{M} = 1m$ . La fuente puntual se representa por un punto rojo en la posición $r_s = 6\mathcal{M}$ . . . . .	36
4.3. a) Se muestra la rejilla para el sistema ilustrado en la figura 4.2; en b) y c) se muestra el gravitoronchigrama correspondiente para una pantalla esférica de radio $r_p = 30\mathcal{M}$ centrada en el origen, con $\mathcal{M} = 1m$ . . . . .	38
4.4. a) a) Se muestra la rejilla para el sistema ilustrado en la figura 4.2, en b) se muestra el primer gravitoronchigrama relativista sobre una pantalla esférica de radio $r_p = 30\mathcal{M}$ centrada en el origen, con $\mathcal{M} = 1m$ . En c) se muestra el gravitoronchigrama de la figura 4.3 y el primer ronchigrama relativista; nótese que tienen morfología similar, sin embargo el relativista tiende a compactarse sobre el eje $z$ negativo. . . . .	38
4.5. Nuestro sistema consiste de un observador y una rejilla en posiciones opuestas al origen. Se muestra la configuración del sistema para una rejilla sobre una esfera de radio $r_r = 8\mathcal{M}$ y un observador en la posición radial $r_o = 20\mathcal{M}$ , con $\mathcal{M} = 1m$ . . . . .	39

- 4.6. a) Se muestra la configuración del sistema para una rejilla sobre una esfera de radio  $r_r = 8\mathcal{M}$  y un observador en la posición radial  $r_o = 20\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ . En b) se muestra el gravitoronchigrama sobre la esfera celeste del observador, la imagen primaria y secundaria de la rejilla corresponde a las curvas continuas y punteadas, respectivamente; en c) se muestra la proyección del gravitoronchigrama en el pseudo-plano  $xy$ . Las imágenes primarias se encuentran fuera del anillo de Einstein, representado por una circunferencia rosa; las imágenes secundarias se encuentran entre el anillo de Einstein y el primer anillo de Einstein relativista, el cual se encuentra muy cerca del radio angular crítico, representado por una circunferencia en color rojo; en general las imágenes relativistas se acercan cada vez más al radio angular crítico. . . . . 40

# Introducción

El fenómeno de lentes gravitacionales, el cual consiste en el estudio de la desviación de los rayos de luz por un campo gravitacional y en establecer las ecuaciones que relacionan al observador, la distribución de materia que genera el campo gravitacional y la fuente, está asociado con la física de un espacio-tiempo de dimensión cuatro con signatura lorentziana que satisface las ecuaciones de Einstein. El estudio de tal fenómeno generalmente se ha realizado usando una solución de las ecuaciones de Einstein linealizadas en torno de un fondo fijo que normalmente se toma como el espacio-tiempo de Minkowski[2]. Esto es justificado en parte por la precisión entre los resultados obtenidos usando esta aproximación y los datos observados con los que contamos actualmente. Se espera que la teoría completa de la relatividad general sea requerida para describir el fenómeno de lentes gravitacionales en regiones donde la curvatura del espacio-tiempo es muy grande para tomar en cuenta la no linealidad del fenómeno. Existen modelos que suponen la existencia de agujeros negros supermasivos en el centro de casi cada galaxia, de ser cierto, este sería un ejemplo en donde se haría necesario el uso de la teoría de la relatividad general completa.

Hacia aproximadamente una década y media se propuso un método para poder obtener una ecuación exacta para describir el fenómeno de lentes gravitacionales en un espacio tiempo general[3]. De acuerdo con este método es necesario conocer las geodésicas nulas del espacio-tiempo para poder construir el cono de luz pasado del observador debido a que la ecuación de lentes gravitacionales se obtiene de una representación paramétrica de este cono. Esta construcción se ha aplicado en particular al espacio tiempo plano y de Schwarzschild[4]-[5].

Por otra parte, para probar sistemas ópticos convencionales, tales como lentes y espejos, se han desarrollado diferentes pruebas[6]-[7]. La prueba de Ronchi[8]-[1], desarrollada por Ronchi en 1920's, es una de estas. La idea básica de esta prueba es deducir la calidad de un sistema óptico mediante la comparación de dos patrones (denominados ronchigramas), uno real, obtenido del experimento, y el otro ideal, obtenido mediante simulación, suponiendo que todas las características del sistema óptico ideal que queremos construir son conocidas. Por consiguiente, tal como fué remarcado por Ronchi mismo, un entendimiento claro de las propiedades del ronchigrama ideal es crucial para aplicar esta prueba. En trabajos recientes hemos mostrado que el entendimiento de la formación de imágenes en la presencia de la cáustica es fundamental en la descripción de la estructura de los ronchigramas ideales[9]-[10].

La relevancia de este trabajo de investigación radica en que establecerá las bases para que en trabajos futuros se pueda establecer la prueba de Ronchi para lentes gravitacionales. Es decir, estamos interesados en estudiar la formación de imágenes en la solución de

Schwarzschild y en particular determinar el análogo del ronchigrama, el cual recientemente lo hemos bautizado como el gravitoronchigrama.

Este proyecto de tesis está organizado de tal manera que se tenga una comprensión clara del fenómeno de lentes gravitacionales cuantitativa y cualitativamente, razón por la cual se revisan varios ejemplos.

En el capítulo 1 se aborda el problema de determinar la imagen registrada por un observador debido a una fuente 1-dimensional ante el fenómeno de refracción de la luz, con la finalidad de entender los conceptos básicos y metodología para aplicarlos posteriormente al caso de la lente gravitacional de Schwarzschild; en este capítulo se resalta que un paso clave es investigar aquellos rayos que conectan al observador con la fuente, por lo que, para la lente gravitacional de nuestro interés, es esencial el estudio de las trayectorias de la luz en el espacio-tiempo correspondiente. El capítulo 2 está dedicado a obtener las trayectorias de los fotones (integración de las geodésicas nulas) emitidos por una fuente puntual en el espacio-tiempo de Schwarzschild; y las representamos en un sistema de referencia pseudo-cartesiano, para visualizar el fenómeno de deflexión de la luz. En el capítulo 3 abordamos el problema de determinar la imagen registrada por un observador fijo en el espacio-tiempo de Schwarzschild, debido a una fuente puntual; se realiza la clasificación de las imágenes generadas en primarias y relativistas, siendo estas últimas característica de un campo gravitacional fuerte; y finalmente se muestra la imagen detectada por un observador fijo, debido a fuentes no puntuales, con forma de disco pseudo-cartesiano, y una elipse pseudo-cartesiana; en el último caso, cabe resaltar que, bajo ciertas condiciones, la imagen registrada contiene arcos circulares, en forma similar a los observados en algunos grupos de galaxias.

# Capítulo 1

## Herramienta básica para la computación de imágenes

### 1.1. Formación de imágenes bajo el fenómeno de refracción

Consideremos dos medios ópticos con índice de refracción  $n_1$  y  $n_2$  separados por una superficie  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + f(x, y)\hat{z}$ . Un observador es colocado en el medio con índice de refracción  $n_1$  en la posición  $\vec{r}_o = X_o\hat{x} + Y_o\hat{y} + Z_o\hat{z}$ , y en el segundo medio se encuentra un objeto 1-dimensional con representación paramétrica  $\vec{X}_s = X_s(\sigma)\hat{x} + Y_s(\sigma)\hat{y} + Z_s(\sigma)\hat{z}$ , siendo  $\sigma$  una etiqueta sobre los puntos que conforman al objeto. De acuerdo con la óptica geométrica, cada punto del objeto se comporta como una fuente puntual emitiendo rayos en todas las direcciones, y la imagen correspondiente de este objeto detectada en la posición del observador está determinada por los rayos que conectan a todos los puntos de objeto con el observador vía fenómeno de refracción. Podemos replantear el problema aplicando el principio de reciprocidad, de esta forma el observador se comporta como una fuente puntual ficticia; la imagen estará conformada por aquellos puntos sobre la interfase de los medios que conecten la posición del observador con algún punto del objeto vía fenómeno de refracción (ver figura 1.1).

Los rayos ficticios refractados que procedieron de la posición del observador están descritos por

$$\vec{X} = \vec{r}(x, y) + l\hat{R}(x, y), \quad (1.1)$$

siendo  $l$  la distancia desde el punto  $\vec{r}(x, y)$  sobre la superficie refractante hasta un punto arbitrario sobre el rayo ficticio refractado, y  $\hat{R}$  su dirección de propagación correspondiente determinada por la ley de refracción:

$$\hat{R} = \gamma\hat{I} + \Omega\hat{N}, \quad (1.2)$$

donde  $\hat{I}$  y  $\hat{N}$  indican la dirección del rayo emitido y el vector normal a la superficie en un punto sobre la interfase respectivamente, y

$$\Omega = -\gamma(\hat{I} \cdot \hat{N}) + \sqrt{1 - \gamma^2[1 - (\hat{I} \cdot \hat{N})^2]}, \quad \gamma = \frac{n_1}{n_2}. \quad (1.3)$$

**CAPÍTULO 1. HERRAMIENTA BÁSICA PARA LA COMPUTACIÓN DE  
IMÁGENES**  
1.1. FORMACIÓN DE IMÁGENES BAJO EL FENÓMENO DE REFRACCIÓN

---

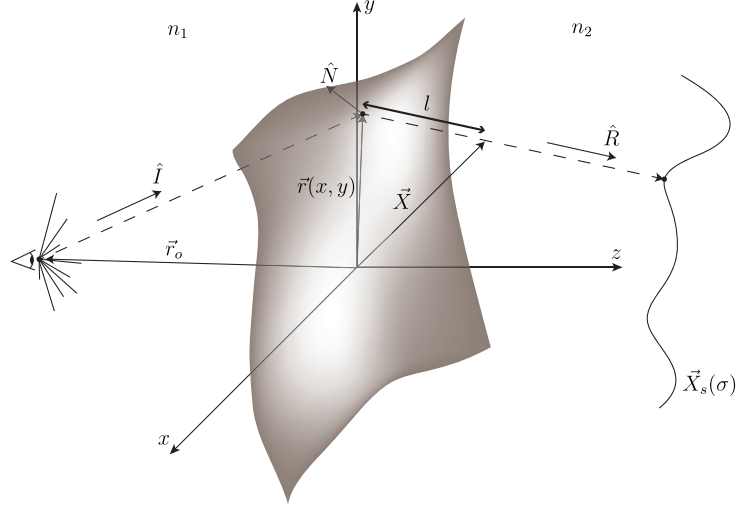


Figura 1.1: Un observador y un objeto 1-dimensional se encuentran inmersos en los medios con índice de refracción  $n_1$  y  $n_2$ , respectivamente. El observador se sustituye por una fuente puntual ficticia, con la finalidad de hallar fácilmente aquellos puntos sobre la interfase que conecten la posición del observador con puntos sobre el objeto vía rayo refractado; estos puntos conforman la imagen registrada por el observador.

Los puntos  $(x, y, f(x, y))$  sobre la interfase que conectan al observador con el objeto  $\vec{X}_s$  a través del fenómeno de refracción, deben de satisfacer

$$\vec{X}_s(\sigma) = \vec{r}(x, y) + l\hat{R}(x, y), \quad (1.4)$$

en componentes cartesianas, lo anterior corresponde al siguiente sistema de ecuaciones

$$X_s(\sigma) = x + l\hat{R}(x, y) \cdot \hat{x}, \quad (1.5)$$

$$Y_s(\sigma) = y + l\hat{R}(x, y) \cdot \hat{y}, \quad (1.6)$$

$$Z_s(\sigma) = z + l\hat{R}(x, y) \cdot \hat{z}, \quad (1.7)$$

despejando  $l$  de la última expresión, el sistema de ecuaciones se reduce a

$$X_s(\sigma) = x + [Z_s(\sigma) - f(x, y)] \frac{\hat{R}(x, y) \cdot \hat{x}}{\hat{R}(x, y) \cdot \hat{z}}, \quad (1.8)$$

$$Y_s(\sigma) = y + [Z_s(\sigma) - f(x, y)] \frac{\hat{R}(x, y) \cdot \hat{y}}{\hat{R}(x, y) \cdot \hat{z}}, \quad (1.9)$$

finalmente, para computar la imagen registrada por el observador en la posición  $\vec{r}_o$ , seleccionamos cada punto sobre el objeto a través del parámetro  $\sigma$ , y resolvemos el

# CAPÍTULO 1. HERRAMIENTA BÁSICA PARA LA COMPUTACIÓN DE IMÁGENES

## 1.1. FORMACIÓN DE IMÁGENES BAJO EL FENÓMENO DE REFRACCIÓN

---

sistema de ecuaciones anterior para  $(x, y)$ , posteriormente evaluamos  $(x, y, f(x, y))$ , que es la imagen del objeto proyectada en la interfase.

En general, el sistema de ecuaciones 1.8-1.9 puede poseer más de una solución, indicando que el observador puede registrar imágenes múltiples de un solo objeto; esto revela que por lo menos dos rayos ficticios refractados se intersectaron en un punto sobre el objeto. Llamaremos región de interferencia al conjunto de puntos espaciales en los que al menos dos rayos refractados se intersectan. En la figura 1.2 [11] se muestra la imagen teórica que registraría un observador desde el infinito de una rejilla de Ronchi (conjunto de líneas paralelas e igualmente espaciadas) al mirarla a través de una lente axicon, para diferentes posiciones de la rejilla; en este caso la región de interferencia ficticia corresponde a un volumen en el que se intersectan dos rayos, de modo que, si alguna franja está dentro de esta región, se detectan dos imágenes curvas de esta.

Por otro lado, cabe resaltar que el *caustic touching theorem* [12], introducido por Berry, establece que la región cáustica tiene un papel fundamental en el cambio de topología de la imagen de un objeto extendido (lo cual se corresponde a la formación de imágenes múltiples). La región cáustica está contenida en la región de interferencia, y se define como la envolvente de los rayos emitidos; esta puede calcularse a partir de la siguiente definición:

**Definición.** Sea  $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un mapeo diferenciable, con  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  variedades diferenciales. El conjunto de puntos en  $\mathcal{M}$  donde  $h$  no es un mapeo uno a uno localmente, corresponde al conjunto crítico, y la imagen del conjunto crítico corresponde al conjunto cáustico de  $h$ .

De nuestro análisis, nótese que  $\vec{X}$  ( ecuación (1.1)) es un mapeo entre dos subconjuntos de  $\mathcal{R}^3$ , donde  $x$ ,  $y$ , y  $l$  son las coordenadas locales en el conjunto dominio, mientras que las componentes cartesianas de  $\vec{X}$  son las coordenadas locales del conjunto imagen. De acuerdo con la definición anterior, el conjunto crítico se determina a través de la siguiente condición:

$$H_2 l^2 + H_1 l + H_0 = 0, \quad (1.10)$$

que resulta del jacobiano entre las coordenadas del conjunto dominio y el conjunto imagen, con

$$H_2 \equiv \hat{R} \cdot \left[ \left( \frac{\partial \hat{R}}{\partial x} \right) \times \left( \frac{\partial \hat{R}}{\partial y} \right) \right], \quad (1.11)$$

$$H_1 \equiv \hat{R} \cdot \left[ \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \right) \times \left( \frac{\partial \hat{R}}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial \hat{R}}{\partial x} \right) \times \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right) \right], \quad (1.12)$$

y

$$H_0 \equiv \hat{R} \cdot \left[ \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \right) \times \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right) \right]. \quad (1.13)$$

**CAPÍTULO 1. HERRAMIENTA BÁSICA PARA LA COMPUTACIÓN DE  
IMÁGENES**  
1.1. FORMACIÓN DE IMÁGENES BAJO EL FENÓMENO DE REFRACCIÓN

---

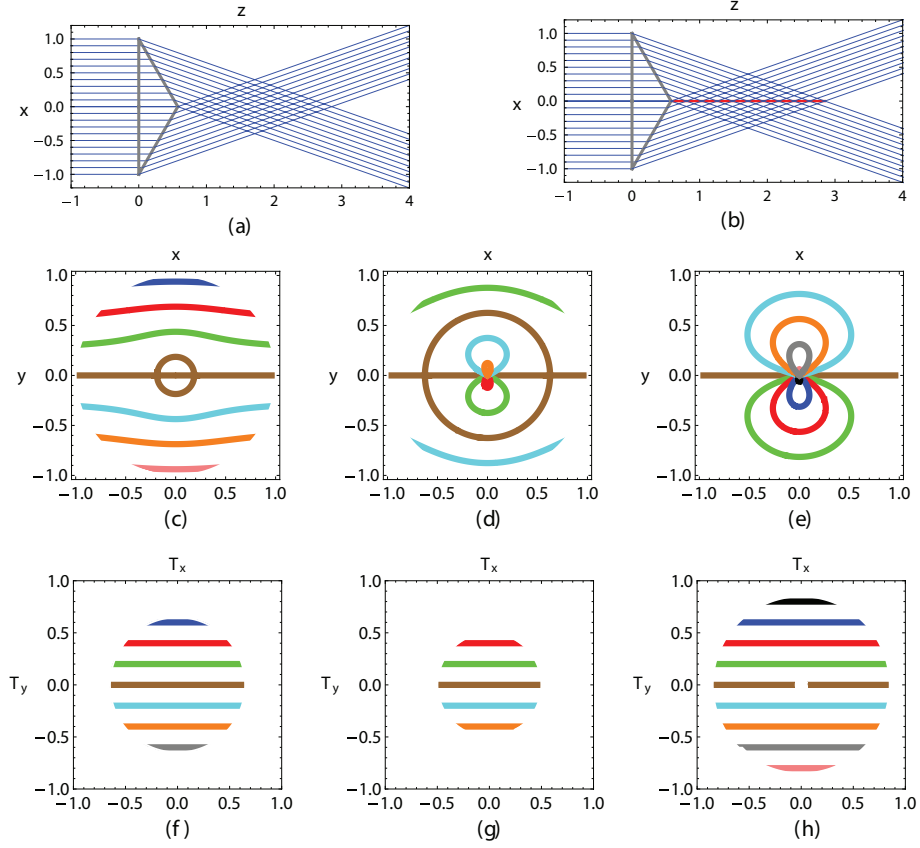


Figura 1.2: En (a) se muestran los rayos incidentes y refractados por una lente axicon, con índice de refracción  $n = 1,517$ , debido a una fuente puntual en la posición  $z \rightarrow -\infty$ ; adicionalmente, en (b) se muestra la región cóustica. En (c)-(e) se muestran los ronchigramas nulos (rejilla de curvas en la posición  $z = 0$ ) que dan lugar al patrón de franjas paralelas registradas por una pantalla plana en las posiciones (f)  $z = 1\text{cm}$ , (g)  $z = 2\text{cm}$  y (h)  $z = 3\text{cm}$ . Aprovechando el principio de reciprocidad, la imagen que registra un observador en la posición  $z \rightarrow -\infty$ , debido a las rejillas (f)-(h), son precisamente las curvas (c)-(e), respectivamente, sobre la superficie plana del axicon. Nótese que se observa un cambio de topología en la imagen, si alguna de las rectas está dentro de la región de interferencia. Fuente: *Wavefronts, caustic, ronchigram, null ronchigrating of a plane wave refracted by an axicon lens* [11].

Para  $H_2 \neq 0$ , el conjunto crítico correspondiente es

$$l = l_{\pm} = \frac{-H_1 \pm \sqrt{H_1^2 - 4H_2H_0}}{2H_2}, \quad (1.14)$$

y la cóustica está descrita por

$$\vec{X}_{\pm} = \vec{r} + \left( \frac{-H_1 \pm \sqrt{H_1^2 - 4H_2H_0}}{2H_2} \right) \hat{R}; \quad (1.15)$$

**CAPÍTULO 1. HERRAMIENTA BÁSICA PARA LA COMPUTACIÓN DE  
IMÁGENES**  
1.1. FORMACIÓN DE IMÁGENES BAJO EL FENÓMENO DE REFRACCIÓN

---

Por otro lado, si  $H_2 = 0$ , entonces

$$l = \frac{-H_0}{H_1}, \quad (1.16)$$

y la cáustica es

$$\vec{X}_c = \vec{r} - \left( \frac{H_0}{H_1} \right) \hat{R}. \quad (1.17)$$

Para ilustrar lo anterior, en la figura 1.3 se muestra la cáustica de una lente plano parabólica para una fuente situada en el infinito sobre el eje óptico[13]. En este ejemplo la caustica está compuesta por dos ramas: un segmento de línea recta y una superficie en forma de trompeta. Otro aspecto importante de la cáustica, como puede apreciarse en esta ilustración, es que está conformada por puntos en los cuales los frentes de onda refractados se autointersecan o tienen singularidades.

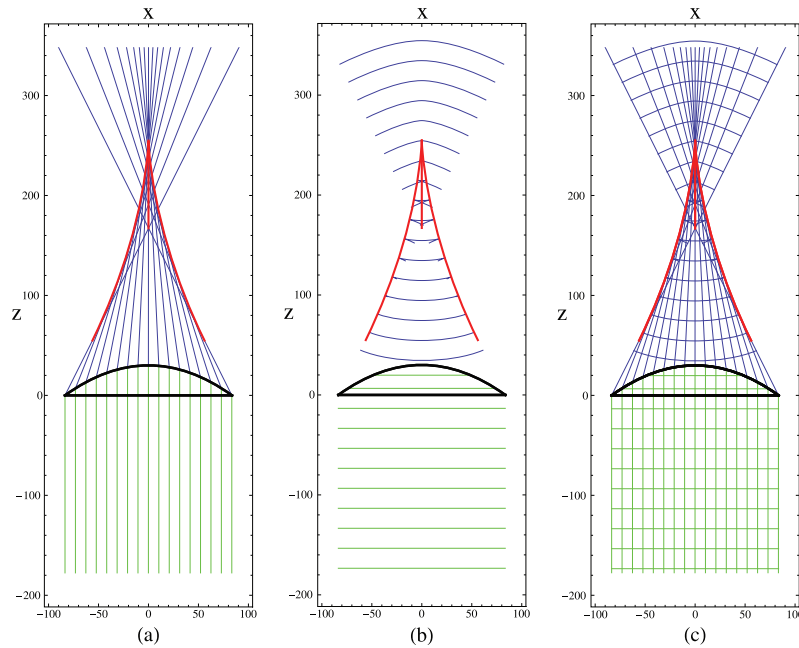


Figura 1.3: Se muestran en (a) los rayos refractados y en (b) los frentes de onda para una lente plano parabólica en la que inciden frentes de onda planos. En (c) se muestra la superposición de frentes de onda y rayos refractados. La cáustica asociada a este sistema óptico se muestra en rojo; notese que corresponde a la envolvente de los rayos refractados y a puntos en los cuales los frentes de onda poseen singularidades o autointersecciones. *Fuente: Wavefronts, light rays and caustic associated with the refraction of a spherical wave by two interfaces: the axicon and the plano-convex parabolic lenses [13].*



## Capítulo 2

# Geodésicas nulas en el espacio-tiempo de Schwarzschild

En el capítulo anterior se describió la metodología para hallar la imagen registrada por un observador asociada a un objeto cuando el fenómeno de refracción se hace patente; este método es muy general, y en esencia se requieren hallar las trayectorias de luz emitidas por una fuente puntual en la posición del observador tales que terminan en el espacio ocupado por el objeto.

En este capítulo desarrollamos las ecuaciones que, de acuerdo con la teoría de la relatividad general, gobiernan las trayectorias de la luz, para el espacio-tiempo de Schwarzschild. Este es el primer paso que daremos para entender el fenómeno de lente gravitacional asociado a un campo gravitacional fuerte.

### 2.1. Ecuación de movimiento de la luz

En la métrica de Schwarzschild, el intervalo entre dos sucesos infinitesimalmente cercanos está dado por

$$ds^2 = c^2(1 - 2MG/c^2r)dt^2 - (1 - 2MG/c^2r)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.1)$$

esta ecuación sólo es válida para el exterior de un cuerpo esféricamente simétrico de masa  $M$  con un espacio-tiempo asintóticamente plano en el infinito. Por simplicidad de escritura y cálculo, conviene definir las siguientes cantidades:

$$\mathcal{M} \equiv GM/c^2, \quad \mathcal{T} = ct, \quad \mathcal{U} = (1 - 2\mathcal{M}/r), \quad (2.2)$$

de esta manera, la ecuación 2.1 se reescribe como

$$ds^2 = \mathcal{U}d\mathcal{T}^2 - \mathcal{U}^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.3)$$

Las componentes del tensor métrico se identifican inmediatamente de la ecuación anterior, y podemos representarlas separando las coordenadas espaciales de la temporal de la siguiente manera:

**CAPÍTULO 2. GEODÉSICAS NULAS EN EL ESPACIO-TIEMPO DE  
SCHWARZSCHILD**  
2.1. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DE LA LUZ

---

$$g = g^e + g^t, \quad (2.4)$$

donde

$$g^e \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{U}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad g^t = \begin{bmatrix} \mathcal{U} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Como habíamos mencionado antes, el primer paso para analizar el fenómeno de lentes gravitacionales es hallar las trayectorias de los rayos de luz (geodésicas nulas) emitidas por una fuente puntual. La forma paramétrica de estas trayectorias la expresaremos de la siguiente manera

$$X[\lambda] \equiv X^e[\lambda] + X^t[\lambda], \quad (2.6)$$

con

$$X^e[\lambda] \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ r[\lambda] \\ \theta[\lambda] \\ \phi[\lambda] \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad X^t[\lambda] \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{T}[\lambda] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

siendo  $\lambda$  un parámetro a fin, que etiqueta los puntos sobre las trayectorias de la luz. La ecuación 2.6 debe necesariamente satisfacer el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{X}^T g \dot{X} = 0, \quad (2.8)$$

que en otras palabras, indica que la norma de la cuadrivelocidad debe ser cero. Explícitamente, el lagrangiano toma la siguiente forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \mathcal{U} \dot{\mathcal{T}}^2 - \mathcal{U}^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \left( \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) \right), \quad (2.9)$$

y las ecuaciones de movimiento correspondientes son

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^\alpha} = 0. \quad (2.10)$$

que son el equivalente a la ecuaciones de Euler-Lagrange de la mecánica clásica.

Comencemos resolviendo este sistema de ecuaciones para las coordenadas  $\mathcal{T}$  y  $\phi$ ; dado que el lagrangiano no depende explícitamente de estas, las ecuaciones de movimiento

**CAPÍTULO 2. GEODÉSICAS NULAS EN EL ESPACIO-TIEMPO DE  
SCHWARZSCHILD**  
2.1. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DE LA LUZ

---

toman una forma más sencilla.

Para la coordenada  $\mathcal{T}$ , de acuerdo con 2.10, se concluye lo siguiente

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathcal{T}}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \equiv \mathcal{U} \dot{\mathcal{T}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathcal{T}} = C_1 \mathcal{U}^{-1}, \quad (2.11)$$

y para  $\phi$  se tiene que:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 \equiv r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{C_2}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (2.12)$$

Por otro lado, la ecuación de movimiento 2.10 para la coordenada  $\theta$  queda como

$$-\frac{d}{d\lambda} (r^2 \dot{\theta}) + r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0, \quad (2.13)$$

sustituyendo 2.12 en la expresión anterior, y multiplicándola por  $\dot{\theta} r^2$ , se tiene que

$$(\dot{\theta} r^2) \frac{d}{d\lambda} (r^2 \dot{\theta}) - \frac{C_2^2 (\cos \theta) \dot{\theta}}{\sin^3 \theta} = \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{2} (r^2 \dot{\theta})^2 \right) + \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{C_2^2}{2 \sin^2 \theta} \right) = 0, \quad (2.14)$$

por lo tanto

$$C_3 \equiv (r^2 \dot{\theta})^2 + \frac{C_2^2}{\sin^2 \theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{C_3}{r^4} - \frac{C_2^2}{r^4 \sin^2 \theta}}, \quad (2.15)$$

con  $C_3 \geq 0$ . Sustituyendo las ecuaciones 2.11-2.15 en la condición 2.8, se concluye que

$$\mathcal{U}^{-1} r^2 = C_1^2 \mathcal{U}^{-1} - \frac{C_3}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \pm \sqrt{C_1^2 - \frac{C_3 \mathcal{U}}{r^2}}. \quad (2.16)$$

Conviene redefinir las constantes de movimiento como  $C_1 \equiv C$ ,  $C_2 \equiv A/2$  y  $C_3 \equiv B^2$ , así que las componentes de la cuadrivelocidad ( $\dot{X}[\lambda]$ ) quedan como:

$$\dot{\mathcal{T}} = C \mathcal{U}^{-1}, \quad (2.17)$$

$$\dot{r} = \pm C \sqrt{1 - \left( \frac{B}{Cr} \right)^2} \mathcal{U}, \quad (2.18)$$

**CAPÍTULO 2. GEODÉSICAS NULAS EN EL ESPACIO-TIEMPO DE  
SCHWARZSCHILD**

2.1. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DE LA LUZ

---

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\left(\frac{B}{r^2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2r^2 \sin \theta}\right)^2}, \quad (2.19)$$

y

$$\dot{\phi} = \frac{A}{2r^2 \sin^2 \theta}. \quad (2.20)$$

Vamos a seleccionar al parámetro  $\lambda$  de tal manera que avanzamos en el tiempo al incrementar su valor; bajo esta aseveración se concluye que  $C > 0$  (ver ecuación 2.17).

Para determinar las constantes de integración ( $A$ ,  $B$  y  $C$  de las ecuaciones anteriores), se requieren definir las condiciones iniciales del sistema. Recuérdese que deseamos hallar las trayectorias de los rayos de luz emitidos por una fuente puntual, por esta razón es conveniente tomar como condiciones iniciales a la posición espacial de la fuente y la dirección inicial de un rayo emitido; además, supondremos que la fuente está en una posición fija para todo tiempo. En adelante indicaremos por el subíndice  $o$  a las cantidades evaluadas en la posición de la fuente.

La información de la dirección inicial del rayo emitido está contenida en la parte espacial de la cuadrivelocidad; inmediatamente de la ecuación 2.7 se obtiene que

$$\dot{X}^e[\lambda] = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{r}[\lambda] \\ \dot{\theta}[\lambda] \\ \dot{\phi}[\lambda] \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

su norma espacial cuadrada es

$$|\dot{X}^e|^2 = -\dot{X}^e{}^T g^e \dot{X}^e = C^2 \mathcal{U}^{-1}, \quad (2.22)$$

por lo tanto, deducimos que la dirección inicial del rayo es

$$\dot{X}_o^e = \frac{\mathcal{U}_o^{1/2}}{C} \dot{X}_o^e. \quad (2.23)$$

Lo que haremos a continuación es representar esta dirección a través de dos ángulos. Considere el vector radial unitario, que en la métrica de Schwarzschild tiene la siguiente forma

$$\hat{r} = \mathcal{U}^{1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

el producto interno de las ecuaciones 2.23 y 2.24 evaluadas en la posición de la fuente es

$$\cos \psi = \hat{r}_o^T g_o^e \dot{X}_o^e = \frac{\dot{r}_o}{C}, \quad (2.25)$$


---

**CAPÍTULO 2. GEODÉSICAS NULAS EN EL ESPACIO-TIEMPO DE  
SCHWARZSCHILD**  
2.1. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DE LA LUZ

---

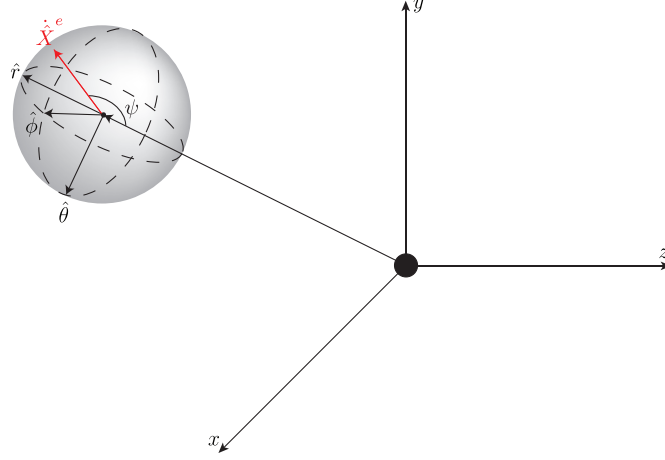


Figura 2.1: Definimos  $\psi$  como el ángulo entre la dirección inicial de un rayo ( $\hat{X}^e$ ) y la línea imaginaria que conecta la posición de la fuente con el origen.

donde  $\psi$  es el ángulo entre la línea imaginaria que conecta la posición de la fuente puntual con el origen, y  $\hat{X}_o^e$ , como se ilustra en la figura 2.1. Al sustituir 2.18 en la ecuación anterior elevada al cuadrado, se obtiene

$$\cos^2 \psi = 1 - \left( \frac{B}{Cr_o} \right)^2 \mathcal{U}_o, \quad (2.26)$$

$$(2.27)$$

al seleccionar un ángulo particular  $\psi_o$ , inmediatamente de la ecuación anterior se obtiene la razón entre las constantes de integración ( $B/C$ ):

$$\left( \frac{B}{C} \right)^2 = r_o^2 \mathcal{U}_o^{-1} \sin^2 \psi_o; \quad (2.28)$$

por simplicidad, renombraremos a la cantidad anterior como

$$a_o = r_o^2 \mathcal{U}_o^{-1} \sin^2 \psi_o. \quad (2.29)$$

Lo que resta ahora es definir al otro ángulo que caracteriza a la dirección inicial del rayo emitido. Al vector  $\hat{X}_o^e$  vamos a sustraerle su componente radial y normalizarlo, el resultado se ilustra en la figura 2.2 b), y tiene la siguiente expresión

$$\hat{J}_o \equiv \frac{\hat{X}_o^e + \cos \psi_o \hat{r}_o}{\sin \psi_o}; \quad (2.30)$$

por otra lado, el vector unitario  $\hat{\phi}$  en la métrica de Schwarzschild es

**CAPÍTULO 2. GEODÉSICAS NULAS EN EL ESPACIO-TIEMPO DE  
SCHWARZSCHILD**  
2.1. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DE LA LUZ

---

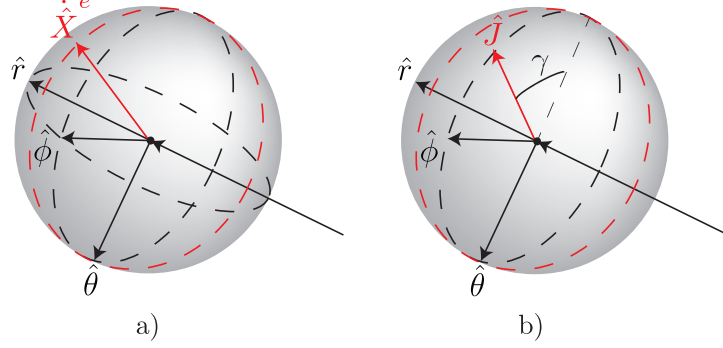


Figura 2.2: Definición de  $\gamma$

$$\hat{\phi} = \frac{1}{r|\sin\theta|} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (2.31)$$

además, puede verificarse que

$$\hat{\phi}_o \cdot \dot{X}_o^e = -\hat{\phi}_o^T g_o^e \dot{X}_o^e = \frac{A\mathcal{U}_o^{1/2}}{2Cr_o|\sin\theta_o|}. \quad (2.32)$$

Vamos a definir como  $\gamma$  al ángulo entre  $\hat{J}_o$  y  $-\hat{\theta}_o$  (ver figura 2.2 b) ), auxiliándose del resultado anterior, el producto interno entre estos es

$$\hat{\phi}_o \cdot \hat{J}_o = \cos(\pi/2 - \gamma) = \frac{A\mathcal{U}_o^{1/2}}{2r_oC|\sin\theta_o|\sin\psi_o}, \quad (2.33)$$

por lo tanto, al seleccionar un ángulo particular  $\gamma_o$ , concluimos que la razón entre las constantes de integración ( $A/C$ ) tiene la siguiente expresión

$$\left(\frac{A}{C}\right)^2 = 4a_o|\sin\theta_o|\sin\gamma_o. \quad (2.34)$$

Por practicidad, conviene definir una nueva base  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ , de la siguiente manera

$$\hat{e}_1 = -\hat{\theta}, \quad \hat{e}_2 = \hat{\phi}, \quad \hat{e}_3 = -\hat{r}, \quad (2.35)$$

bajo estas condiciones,  $\psi$  y  $\gamma$  toman un papel análogo a los ángulos empleados en las coordenadas esféricas, como se ilustra en la figura 2.3 b). Finalmente, las componentes espaciales de la cuadrivelocidad adquieren la siguiente forma

**CAPÍTULO 2. GEODÉSICAS NULAS EN EL ESPACIO-TIEMPO DE  
SCHWARZSCHILD**  
2.1. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DE LA LUZ

---

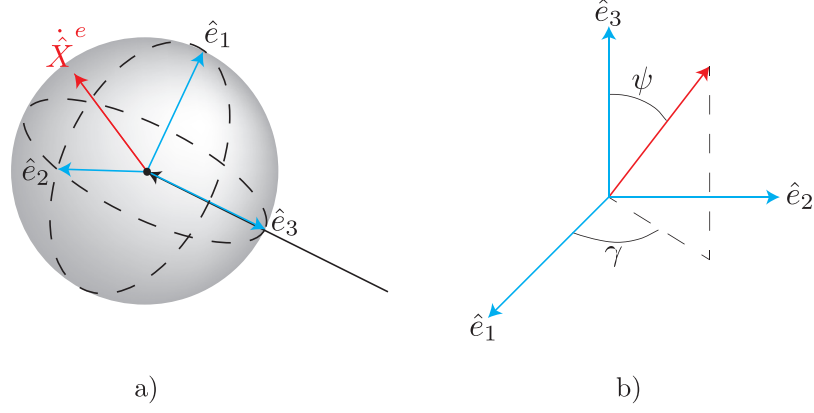


Figura 2.3: a) La base  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ . b) Los ángulos  $\{\psi, \gamma\}$  determinan la dirección inicial de emisión de un fotón.

$$\dot{r} = \pm C \sqrt{1 - \frac{a_o \mathcal{M}}{r^2}}, \quad (2.36)$$

$$\dot{\theta} = \pm \frac{C a_o^{1/2}}{r^2} \sqrt{1 - \frac{|\sin \theta_o| \sin \gamma_o}{\sin^2 \theta}}, \quad (2.37)$$

$$\dot{\phi} = \frac{C a_o^{1/2}}{r^2 \sin^2 \theta} \sqrt{|\sin \theta_o| \sin \gamma_o}. \quad (2.38)$$

El siguiente paso es integrar las ecuaciones anteriores para obtener la forma paramétrica de los rayos de luz emitidos por una fuente puntual. Para simplificar términos, sin pérdida de generalidad debido a la simetría esférica del sistema, considere que la posición de la fuente es  $\theta_o = 0$ , y  $r_o > 2\mathcal{M}$ , de este modo las ecuaciones 2.36-2.38 quedan como

$$\dot{r} = \pm C \sqrt{1 - \frac{a_o \mathcal{M}}{r^2}}, \quad (2.39)$$

$$\dot{\theta} = \pm \frac{C a_o^{1/2}}{r^2}, \quad (2.40)$$

$$\dot{\phi} = 0. \quad (2.41)$$

De la ecuación 2.41 inmediatamente se concluye que un rayo de luz está contenido en un plano. Nosotros lo denotaremos como el plano  $\phi = \phi_o$ .

Antes de continuar, en la siguiente sección introduciremos un término útil, conocido como parámetro de impacto.

## 2.2. Parametro de impacto

Considere una fuente puntual en presencia de un agujero negro de Schwarzschild. Es de esperarse que para ciertas posiciones de la fuente y direcciones de emisión, existan fotones que primeramente tienden a acercarse al origen (centro del agujero negro) para posteriormente escapar hacia el infinito. La posición radial de máximo acercamiento de estas trayectorias hacia el origen se conoce como parámetro de impacto, y lo denotaremos con la letra griega  $\rho$ ; en esta posición particular, la velocidad radial del fotón debe ser cero ( $\dot{r}(\rho) = 0$ ), lo cual implica que el argumento de la raíz cuadrada de la ecuación 2.36, que definiremos como  $f(\rho, r_o, \psi_o, \mathcal{M})$ , debe satisfacer la siguiente condición:

$$f(\rho, r_o, \psi_o, \mathcal{M}) \equiv \rho^3 - \rho a_o + 2\mathcal{M}a_o = 0. \quad (2.42)$$

Para ilustrar la información contenida en la ecuación anterior, analizaremos un caso particular. Considere un agujero negro de Schwarzschild de masa  $\mathcal{M} = 1m$ , y una fuente puntual en la posición  $r_o = 6\mathcal{M}$ . En la figura 2.4 se muestran las gráficas de la ecuación 2.42 en función de  $\rho$  para las direcciones de emisión  $\psi_o = \pi/8, \pi/4, 3\pi/8$  y  $\pi/2$ . Cabe mencionar que cada uno de los casos tiene una raíz real negativa; en la figura respectiva solo mostramos la región que tiene significado físico.

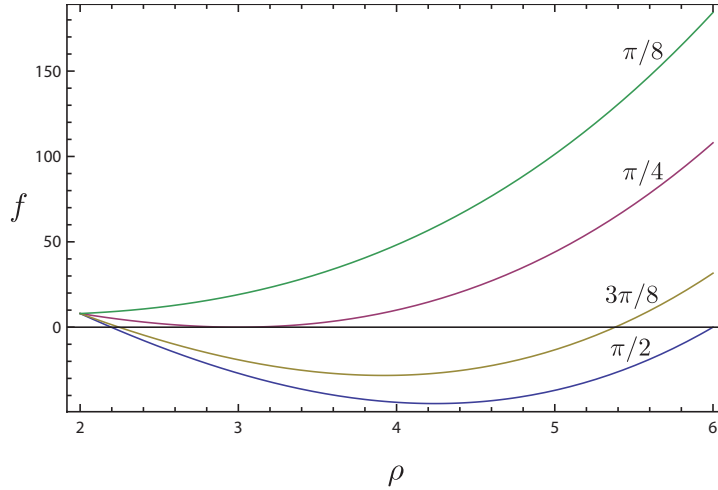


Figura 2.4: Gráfico de la ecuación 2.42, con respecto de  $\rho$ , para  $r_o = 6\mathcal{M}$ ,  $\psi_o = \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2$ , y  $\mathcal{M} = 1m$ .

Para este ejemplo es fácil mostrar que  $f(\rho)$  tiene dos raíces idénticas e iguales a  $\rho = 3\mathcal{M}$  para el ángulo de emisión  $\psi_o = \pi/4$ . En general, al ángulo  $\psi_o$  tal que la función 2.42 tenga raíces múltiples le llamaremos ángulo crítico, y lo denotaremos como  $\psi_o^c$ .

Consideremos el caso para el cual los ángulos de emisión están entre  $0 \leq \psi < \psi_o^c$ . Revisando el gráfico de la figura 2.4 resulta que para este intervalo de ángulos la función  $f(\rho)$  no tiene raíces con significado físico, indicando que no hay cambio en la dirección radial de la velocidad del fotón. Además, los fotones con estas direcciones tienen inicialmente

**CAPÍTULO 2. GEODÉSICAS NULAS EN EL ESPACIO-TIEMPO DE  
SCHWARZSCHILD**  
2.2. PARAMETRO DE IMPACTO

---

una velocidad radial negativa, como se ilustra en la figura 2.5 para el rayo 3; por lo tanto, los fotones emitidos en este conjunto de ángulos, se acercan continuamente al agujero negro hasta ser absorbidos.

Para el intervalo de ángulos entre  $\psi_o^c < \psi < \pi/2$  existen dos raíces diferentes de la función 2.42, como puede observarse de los gráficos de la figura 2.4. Dado que se espera que el parámetro de impacto se aleje cada vez más del origen al incrementar el valor de  $\psi$  en el intervalo antes mencionado, resulta que la raíz de mayor valor es la que tiene sentido físico. Esta raíz corresponde al parámetro de impacto, y la denotaremos como  $\rho_o$ . En este caso el fotón primero se acerca al agujero negro hasta su punto de máximo acercamiento y luego escapa hacia el infinito, como se muestra en la figura 2.5 para el rayo 2.

Por otra parte, los fotones emitidos con el ángulo crítico  $\psi_o^c = \pi/4$ , terminan atrapados en una esfera de radio  $\rho_o = 3\mathcal{M}$ , conocida como esfera fotónica.

Si  $\psi = \pi/2$ , resulta que el parámetro de impacto coincide con la posición de la fuente puntual, como puede apreciarse en la figura 2.4. En este caso el fotón emitido inmediatamente escapa del agujero negro como se muestra en la figura 2.4 con el rayo 1.

Cabe resaltar que para el intervalo de direcciones  $\psi_o^c < \psi < \pi/2$ , el parámetro de impacto toma un valor entre  $3\mathcal{M} \leq \rho \leq r_o$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ .

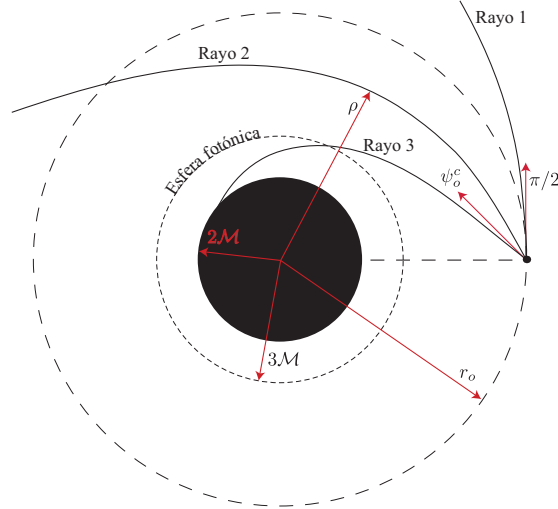


Figura 2.5: El rayo 1 al ser emitido inicialmente en la dirección  $\psi = \pi/2$  siempre se aleja del agujero negro. El rayo 2 tiene un punto de máximo acercamiento denotado por la letra griega  $\rho$ . El rayo 3 al tener una dirección de emisión inicial entre  $0 \leq \psi < \psi_o^c$  siempre tiende a acercarse al agujero negro.

Es posible estudiar la solución general de la ecuación cúbica 2.42 con las fórmulas de Cardano-Ferrari; de acuerdo con estas, una ecuación de la forma

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \tag{2.43}$$

tiene un discriminante definido como

**CAPÍTULO 2. GEODÉSICAS NULAS EN EL ESPACIO-TIEMPO DE  
SCHWARZSCHILD**  
2.2. PARAMETRO DE IMPACTO

---

$$\Delta \equiv \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3, \quad (2.44)$$

con

$$p \equiv \frac{3b - a^2}{3}, \quad y \quad q \equiv \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}. \quad (2.45)$$

Bajo estas condiciones se tienen tres casos: si  $\Delta < 0$ , la ecuación cúbica tiene tres raíces simples; si  $\Delta = 0$ , todas las raíces son reales, y al menos dos de ellas son iguales; y si  $\Delta > 0$ , la ecuación cúbica tiene una raíz real y dos raíces imaginarias.

El discriminante asociado a la ecuación que nos interesa (ecuación 2.42) es

$$\Delta = \mathcal{M}^2 a_0^2 - \frac{a_0^3}{27}. \quad (2.46)$$

Si exigimos que  $\Delta = 0$ , debe cumplirse que  $a_0 = 27\mathcal{M}^2$ , y las raíces correspondientes de la ecuación 2.42 son  $\{3\mathcal{M}, 3\mathcal{M}, -6\mathcal{M}\}$ . Recordemos que bajo estas condiciones se definió al ángulo crítico, y puede hallarse de la siguiente manera:

$$a_0 = 27\mathcal{M}^2 \quad \Rightarrow \quad r_o \mathcal{U}_o^{-1} \sin^2 \psi_o^c = 27\mathcal{M}^2 \quad (2.47)$$

$$\Rightarrow \psi_o^c = \arcsin \left( \sqrt{\frac{27\mathcal{M}^2 \mathcal{U}_o}{r_o^2}} \right), \quad (2.48)$$

por lo tanto, dada la posición radial de la fuente puntual,  $r_o$ , y la masa del agujero negro,  $\mathcal{M}$ , la ecuación 2.48 determina la dirección de emisión de un rayo tal que termina atrapado en la esfera fotónica.

Para terminar de analizar al discriminante, reescribamos  $a_0 = 27\mathcal{M}^2 + \delta$ , entonces

$$\Delta = -\frac{\delta}{27}(\delta + 27\mathcal{M}^2)^2. \quad (2.49)$$

Si  $\delta < 0$  entonces el discriminante es positivo, y con lo revisado hasta este momento concluimos que no existen raíces con significado físico, de modo que los fotones caen hacia el agujero negro. De 2.47 es fácil notar que  $\delta < 0$  solo si  $0 \leq \psi < \psi_o^c$ .

Por otro lado, si  $\delta > 0$ , el discriminante es negativo, y la raíz de mayor valor, que denotaremos como  $\rho_o$ , corresponderá al parámetro de impacto. La condición  $\delta > 0$  solo se satisface si  $\psi_o^c < \psi \leq \pi/2$ . En este caso, el rayo inicialmente se acercará al agujero negro hasta la posición de máximo acercamiento y posteriormente escapa al infinito.

Para terminar, al evaluar la ecuación 2.42 en  $\rho = \rho_o$ , se encuentra que

$$a_o = \frac{\rho_o^2}{\mathcal{U}(\rho_o)}, \quad (2.50)$$

**CAPÍTULO 2. GEODÉSICAS NULAS EN EL ESPACIO-TIEMPO DE  
SCHWARZSCHILD**  
**2.3. INTEGRACIÓN DE LA PARTE ESPACIAL DE LAS GEODÉSICAS NULAS**

---

por lo tanto, podemos reescribir la ecuación cúbica de la siguiente manera

$$f = (\rho - \rho_o) \left( \rho^2 + \rho\rho_o - \frac{2\mathcal{M}\rho_o}{\mathcal{U}(\rho_o)} \right). \quad (2.51)$$

Las raíces de la ecuación cuadrática de la expresión anterior son

$$\rho_1 = -\frac{\rho_o}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\rho_o + 6\mathcal{M}}{\rho_o - 2\mathcal{M}}} \right), \quad (2.52)$$

y

$$\rho_2 = -\frac{\rho_o}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{\rho_o + 6\mathcal{M}}{\rho_o - 2\mathcal{M}}} \right), \quad (2.53)$$

así que podemos reescribir a la función 2.42 de la siguiente manera

$$f = (\rho - \rho_o)(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2); \quad (2.54)$$

donde, de acuerdo con las fórmulas de Cardano-Ferrari, el parámetro de impacto está determinado por

$$\rho_o = 2\sqrt{\frac{a_o}{3}} \cos \left( \frac{1}{3} \arccos \left( -\sqrt{\frac{27\mathcal{M}^2}{a_o}} \right) \right). \quad (2.55)$$

En esencia, el parámetro de impacto depende tanto de la masa del agujero negro como del ángulo de emisión  $\psi$ .

### 2.3. Integración de la parte espacial de las geodésicas nulas

Sin pérdida de generalidad, habíamos elegido la posición de la fuente en  $\theta_o = 0$ , con  $r_o > 2\mathcal{M}$ , llegando así a las ecuaciones 2.39-2.41. Además, se concluyó de la ecuación 2.41 que el movimiento del fotón ocurre sobre un plano  $\phi = \phi_o$ . Para obtener la forma paramétrica de las geodésicas nulas, primero vamos a analizar el cociente de las ecuaciones 2.39 y 2.40, de lo cual se obtiene lo siguiente

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} = (\pm)_{\dot{r}} (\pm)_{\dot{\theta}} \frac{a_o^{1/2}}{r^2 \sqrt{f/r^3}}, \quad (2.56)$$

donde  $(\pm)_{\dot{r}}$  y  $(\pm)_{\dot{\theta}}$  se seleccionan de acuerdo al signo correspondiente de  $\dot{r}$  y  $\dot{\theta}$ , respectivamente.

Vamos a considerar que el ángulo de emisión  $\psi_o$  se encuentra en el intervalo  $\psi_o^c \leq \psi_o \leq \pi/2$ ,

## CAPÍTULO 2. GEODÉSICAS NULAS EN EL ESPACIO-TIEMPO DE SCHWARZSCHILD

### 2.3. INTEGRACIÓN DE LA PARTE ESPACIAL DE LAS GEODÉSICAS NULAS

---

bajo estas condiciones sabemos que el parámetro de impacto existe. La integral de la ecuación anterior desde la posición radial de máximo acercamiento hasta un valor  $r > \rho_o$  tiene la siguiente forma

$$\theta = (\pm)_{\dot{\theta}} \frac{\rho_o^{3/2}}{\sqrt{\rho_o - 2\mathcal{M}}} \int_{\rho_o}^r \frac{dr'}{\sqrt{(r' - \rho_o)(r' - \rho_1)r'(r' - \rho_2)}}; \quad (2.57)$$

este tipo de integrales se conocen como integrales elípticas. Puede mostrarse que  $r > \rho_o > \rho_1 > 0 > \rho_2$ , y de acuerdo con la referencia [14] se tiene que

$$\int_{\rho_o}^r \frac{dr'}{\sqrt{(r - \rho_o)(r - \rho_1)r(r - \rho_2)}} = \frac{2}{\rho_o} \left( \frac{\rho_o - 2\mathcal{M}}{\rho_o + 6\mathcal{M}} \right)^{1/4} \mathcal{F}(\nu, q), \quad (2.58)$$

siendo  $\mathcal{F}(\nu, q)$  la función elíptica, y

$$\nu = \arcsin \sqrt{\frac{4(r - \rho_o)\sqrt{(\rho_o + 6\mathcal{M})(\rho_o - 2\mathcal{M})}}{[3\sqrt{\rho_o - 2\mathcal{M}} + \sqrt{\rho_o + 6\mathcal{M}}] [(2r - \rho_o)\sqrt{\rho_o - 2\mathcal{M}} - \rho_o\sqrt{\rho_o + 6\mathcal{M}}]}}, \quad (2.59)$$

$$q = \sqrt{\frac{6\mathcal{M} - \rho_o + \sqrt{(\rho_o + 6\mathcal{M})(\rho_o - 2\mathcal{M})}}{2\sqrt{(\rho_o + 6\mathcal{M})(\rho_o - 2\mathcal{M})}}}; \quad (2.60)$$

por lo tanto, el resultado de la integral 2.57 es

$$\theta = \frac{(\pm)_{\dot{\theta}} 2\sqrt{\rho_o} \mathcal{F}(\nu, q)}{[(\rho_o - 2\mathcal{M})(\rho_o + 6\mathcal{M})]^{1/4}}. \quad (2.61)$$

Vamos a definir

$$\Theta(\rho_o, r, \mathcal{M}) = \frac{2\sqrt{\rho_o} \mathcal{F}(\nu, q)}{[(\rho_o - 2\mathcal{M})(\rho_o + 6\mathcal{M})]^{1/4}}; \quad (2.62)$$

la ecuación anterior corresponde al desplazamiento angular del fotón en la coordenada  $\theta$  como función de su posición radial, medido desde la posición angular del punto de máximo acercamiento. Para describir la trayectoria completa del fotón desde la posición de la fuente, conviene definir las siguientes funciones

$$\Theta^- \equiv \Theta(\rho_o, r_0, \mathcal{M}) - \Theta(\rho_o, r, \mathcal{M}), \quad \text{para } \rho_o \leq r \leq r_o, \quad (2.63)$$

y

$$\Theta^+ \equiv \Theta(\rho_o, r_0, \mathcal{M}) + \Theta(\rho_o, r, \mathcal{M}), \quad \text{para } \rho_o \leq r \leq \infty, \quad (2.64)$$

## CAPÍTULO 2. GEODÉSICAS NULAS EN EL ESPACIO-TIEMPO DE SCHWARZSCHILD

### 2.3. INTEGRACIÓN DE LA PARTE ESPACIAL DE LAS GEODÉSICAS NULAS

---

de este modo, la ecuación 2.63 describe la geodésica nula desde la posición de la fuente puntual hasta la posición radial de máximo acercamiento, y la ecuación 2.64 desde el punto de máximo acercamiento hasta una posición radial  $r$  arbitraria, con  $r > \rho_o$ .

Para representar las geodésicas nulas en forma gráfica, considere un sistema de referencia pseudo-cartesiano, cuyas coordenadas,  $\{x, y, z\}$ , se relacionan con las coordenadas esféricas de la solución de Schwarzschild,  $\{r, \theta, \phi\}$ , en la forma usual

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad (2.65)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi, \quad (2.66)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (2.67)$$

Para el caso particular en el que  $\phi_o = 0$ , la expresión de las geodésicas nulas en la base pseudo-cartesiana es

$$\vec{r} = r \begin{bmatrix} \sin \Theta^\mp \\ 0 \\ \cos \Theta^\mp \end{bmatrix}. \quad (2.68)$$

En la figura 2.6 se muestran algunas geodésicas nulas para una fuente en la posición  $r_o = 6\mathcal{M}$ , en presencia de un agujero negro de Schwarzschild de masa  $\mathcal{M} = 1m$ .

Por otro lado, si el fotón emitido se mueve sobre el plano  $\phi = \phi'_o$ , la ecuación de la geodésica nula tiene la siguiente expresión

$$\vec{r} = r \begin{bmatrix} \sin \Theta^\mp \cos \phi'_o \\ \sin \Theta^\mp \sin \phi'_o \\ \cos \Theta^\mp \end{bmatrix}. \quad (2.69)$$

La ecuación de las geodésicas nulas para una posición arbitraria de la fuente puntual puede obtenerse al rotar el sistema de forma adecuada. Primero rotaremos el sistema en dirección anti horaria por un ángulo  $\theta_o$  alrededor del eje  $y$ , y posteriormente por una cantidad  $\phi_o$  alrededor del eje  $z$ , en dirección anti horaria, como se muestra en la figura 2.7; las matrices de rotación correspondientes son

$$R_y(\theta_o) = \begin{bmatrix} \cos \theta_o & 0 & \sin \theta_o \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_o & 0 & \cos \theta_o \end{bmatrix}, \quad R_z(\phi_o) = \begin{bmatrix} \cos \phi_o & -\sin \phi_o & 0 \\ \sin \phi_o & \cos \phi_o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

Conviene extrapolar la definición de la base  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  sobre el eje  $z$  a través de las matrices de rotación, aplicándolas en el orden antes mencionado, bajo estas condiciones se satisface que  $\phi'_o = \pi - \gamma$  para  $\theta_o = 0$ , de modo que la ecuación paramétrica de las geodésicas nulas queda como

**CAPÍTULO 2. GEODÉSICAS NULAS EN EL ESPACIO-TIEMPO DE  
SCHWARZSCHILD**  
2.3. INTEGRACIÓN DE LA PARTE ESPACIAL DE LAS GEODÉSICAS NULAS

---

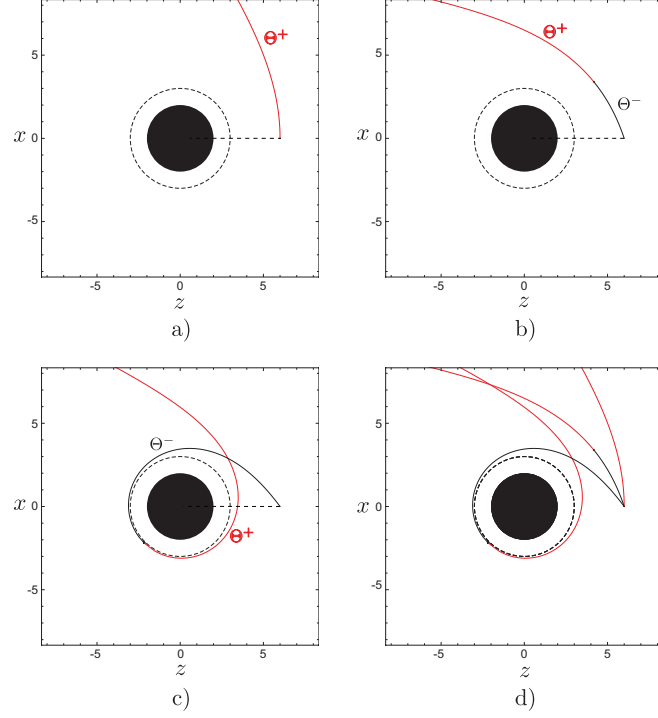


Figura 2.6: Geodésicas en el pseudo-plano  $xz$ . La fuente está en la posición radial  $r_0 = 6\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ . Se muestran las geodésicas nulas para los ángulos de emisión  $\psi = \pi/2, 3\pi/8$  y  $\pi/4 + 0,001$ , en los incisos a) b) y c), respectivamente. En el inciso d) se muestran juntos estos casos.

$$\vec{r} = r \begin{bmatrix} -\sin \Theta^\mp \cos \gamma \cos \phi_o \cos \theta_o - \sin \Theta^\mp \sin \gamma \sin \phi_o + \cos \Theta^\mp \cos \phi_o \sin \theta_o \\ -\sin \Theta^\mp \cos \gamma \sin \phi_o \cos \theta_o + \sin \Theta^\mp \sin \gamma \cos \phi_o + \cos \Theta^\mp \sin \phi_o \sin \theta_o \\ \sin \Theta^\mp \cos \gamma \sin \theta_o + \cos \Theta^\mp \cos \theta_o \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

donde  $\{r_o, \theta_o, \phi_o\}$  denotan la posición espacial de la fuente, y  $\{\psi, \gamma\}$  determinan la dirección inicial del rayo emitido (ver figura 2.3). Si comparamos  $\vec{r} = r(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  con la ecuación 2.71, se concluye que las coordenadas esféricas sobre las geodésicas nulas satisfacen las siguientes relaciones

$$\cos \theta = \cos \Theta^\mp \cos \theta_o + \sin \Theta^\mp \sin \theta_o \cos \gamma, \quad (2.72)$$

y

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi_o \sin \theta_o + \tan \Theta^\mp (\cos \phi_o \sin \gamma - \sin \phi_o \cos \theta_o \cos \gamma)}{\cos \phi_o \sin \theta_o - \tan \Theta^\mp (\sin \phi_o \sin \gamma + \cos \phi_o \cos \theta_o \cos \gamma)}. \quad (2.73)$$

**CAPÍTULO 2. GEODÉSICAS NULAS EN EL ESPACIO-TIEMPO DE  
SCHWARZSCHILD**  
**2.3. INTEGRACIÓN DE LA PARTE ESPACIAL DE LAS GEODÉSICAS NULAS**

---

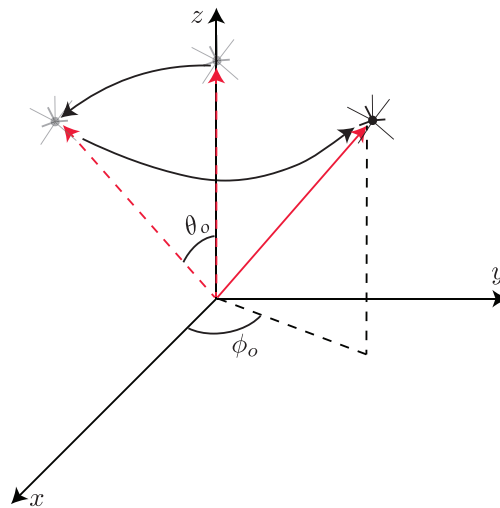


Figura 2.7: Para obtener la ecuación general de las geodésicas nulas, rotamos el vector 2.68 en una cantidad  $\theta_0$  en dirección antihoraria alrededor del eje  $y$ , y luego rotamos en una cantidad  $\phi_0$  en dirección antihoraria alrededor del eje  $z$ .



## Capítulo 3

# Formación de imágenes en el espacio-tiempo de Schwarzschild

En el capítulo anterior se obtuvo la forma paramétrica de los rayos de luz (geodésicas nulas) y se ilustraron algunas trayectorias para una fuente puntual en la posición  $r_o = 6\mathcal{M}, \theta_o = 0$ , sobre el plano  $\gamma = \pi$  (o, equivalentemente  $\phi_o = 0$ ), con un ángulo de emisión entre  $\psi_o^c \leq \psi < \pi/2$  (ver figura 2.6). En la figura 3.1 mostramos otro ejemplo con las condiciones antes mencionadas, y agregamos la configuración de la base  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  correspondiente. La forma en que se definieron los ángulos  $\{\psi, \gamma\}$  se muestra en la figura 2.3.

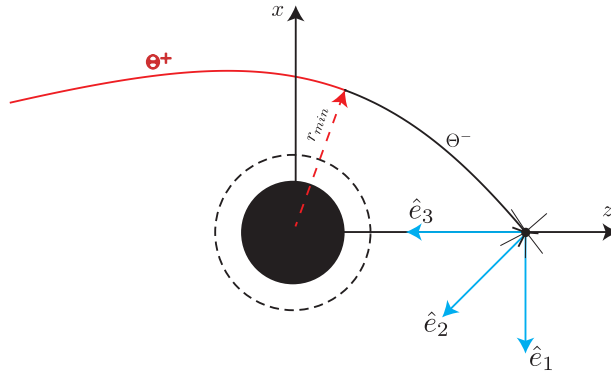


Figura 3.1: Se ilustra una geodésica particular descrita por la ecuación 2.68 para  $r_o = 6\mathcal{M}$ ,  $\gamma = \pi$ , y  $\mathcal{M} = 1$ ; además se ilustra la configuración de la base  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ .

En el capítulo 1 estudiamos como determinar la imagen registrada por un observador debido a una fuente 1-dimensional. El primer paso es sustituir al observador por una fuente puntual ficticia para luego hallar aquellos rayos que conectan la posición del observador con la fuente. Lo que vamos a hacer es interpretar las ecuaciones de las geodésicas nulas que encontramos anteriormente como los rayos emitidos por una fuente puntual ficticia en la posición del observador  $\{r_o, \theta_o, \phi_o\}$ . Por simplicidad, y sin pérdida de generalidad, colocaremos a nuestro observador en la posición angular  $\theta_o = \pi$  (sobre el eje pseudo-cartesiano  $z$  negativo). Por el momento estudiaremos como determinar la imagen de una

### CAPÍTULO 3. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN EL ESPACIO-TIEMPO DE SCHWARZSCHILD

---

fuente puntual en la posición  $\{r_s, \theta_s, \phi_s\}$ , como se ilustra en la figura 3.2.

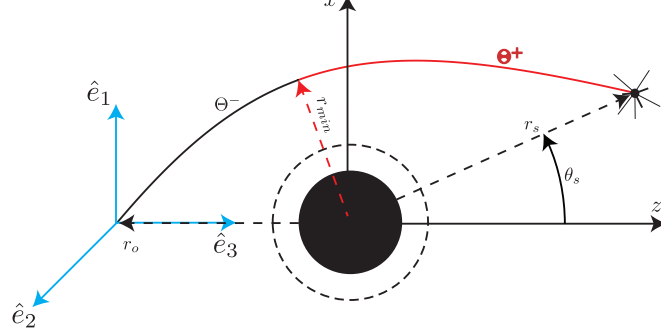


Figura 3.2: Se muestra la posición espacial del observador y de la fuente puntual. También se ilustra la configuración de la base  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ , y un rayo ficticio emitido en el plano  $\gamma = 0$  ( $\phi_o = 0$ ).

Para determinar la imagen registrada por el observador, necesitamos hallar la dirección inicial del rayo ficticio  $\{\gamma, \psi\}$  tal que conecta al observador con la fuente; esta dirección la representaremos con un punto sobre una esfera imaginaria unitaria centrada en la posición del observador. De acuerdo con la figura 3.2, la dirección inicial del rayo emitido debe satisfacer las siguientes ecuaciones

$$\gamma = \phi_s, \quad \theta_s = \pi - \Theta^+. \quad (3.1)$$

También puede ocurrir que el rayo conecta con la fuente antes de llegar a la posición de máximo acercamiento, como se muestra en la figura 3.3, bajo estas condiciones, la dirección del rayo emitido debe satisfacer

$$\gamma = \phi_s, \quad \theta_s = \pi - \Theta^-. \quad (3.2)$$

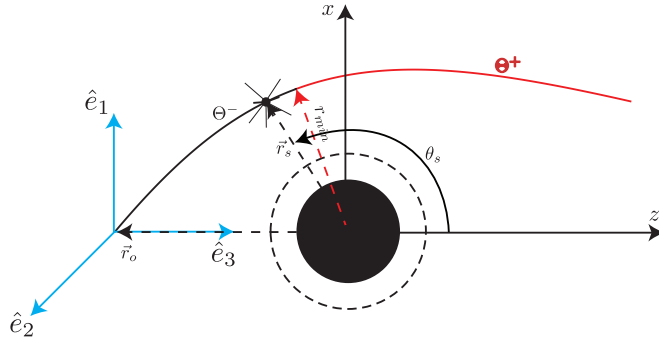


Figura 3.3: La fuente puntual se encuentra en una posición tal que la geodésica nula que la conecta con el observador no llega a la posición de máximo acercamiento.

**CAPÍTULO 3. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN EL ESPACIO-TIEMPO  
DE SCHWARZSCHILD**  
3.1. IMÁGENES PRIMARIAS Y RELATIVISTAS

---

Para establecer las regiones donde las ecuaciones 3.1-3.2 son válidas, calcularemos la superficie que generan las posiciones de máximo acercamiento, para esto basta evaluar la ecuación 2.63 en  $r = \rho_o$ , determinada por la ecuación 2.55 como función de  $\psi$ . En la figura 3.4 se muestra esta superficie para un observador en  $r_o = 6\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ . En el exterior de la superficie, que llamaremos  $\mathcal{R}_1$ , se satisface la ecuación 3.1, y en la región interna, que llamaremos  $\mathcal{R}_2$  se debe satisfacer la ecuación 3.2.

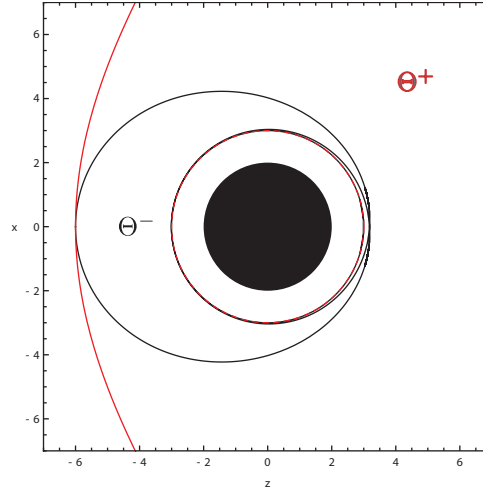


Figura 3.4: Superficie generada por los puntos de máximo acercamiento para un observador en  $r_o = 6\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ . Las regiones  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$  las hemos marcado con los símbolo  $\Theta^+$  y  $\Theta^-$ , respectivamente.

### 3.1. Imágenes primarias y relativistas

Revisando la figura 3.2 es de esperarse que exista un segundo rayo emitido sobre el plano  $\gamma_o = \pi$  (por “debajo” del agujero negro) que conecta la posición del observador con la fuente puntual, por lo tanto detectaremos dos imágenes de la misma fuente. Cada imagen debe satisfacer las siguientes ecuaciones

$$\Theta^+ = \pi - \theta_s, \quad \text{para } \gamma = 0, \quad (3.3)$$

$$\Theta^- = \pi + \theta_s, \quad \text{para } \gamma = \pi, \quad (3.4)$$

respectivamente. A estas dos imágenes las llamaremos imágenes primarias.

También puede ocurrir que un rayo ficticio experimente un número  $n$  de vueltas alrededor del agujero negro antes de conectar con la posición de la fuente; bajo estas condiciones, la generalización de las ecuaciones anteriores es la siguiente

$$\Theta^\pm = (2n + 1)\pi - \theta_s, \quad \text{para } \gamma = \phi_s, \quad (3.5)$$

**CAPÍTULO 3. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN EL ESPACIO-TIEMPO  
DE SCHWARZSCHILD**  
3.2. ANILLOS DE EINSTEIN

---

$$\Theta^+ = (2n + 1)\pi + \theta_s, \quad \text{para } \gamma = \phi_s + \pi; \quad (3.6)$$

diremos que para  $n > 0$  estas ecuaciones corresponden a las  $n$ -ésimas imágenes relativistas. Nótese que se recuperan las ecuaciones de las imágenes primarias para  $n = 0$ , sin embargo debe aclararse que estas son válidas en la región  $\mathcal{R}_1$ ; para la región  $\mathcal{R}_2$  las imágenes primarias deben satisfacer

$$\Theta^- = \pi - \theta_s, \quad \text{para } \gamma = 0, \quad (3.7)$$

$$\Theta^+ = \pi + \theta_s, \quad \text{para } \gamma = \pi. \quad (3.8)$$

pero las imágenes relativistas sí satisfacen las ecuaciones 3.5-3.6.

Debe recordarse que de las ecuaciones anteriores se desea obtener la dirección inicial del rayo ficticio emitido, determinada por los ángulos  $\{\psi, \gamma\}$ . A continuación mostraremos ejemplos para fuentes extendidas, cabe aclarar que en las siguientes secciones obtendremos el valor del ángulo  $\psi$  numéricamente.

### 3.2. Anillos de Einstein

Consideremos una fuente puntual en la región  $\mathcal{R}_1$  perfectamente alineada con el centro del agujero negro y la posición del observador. Bajo estas condiciones las ecuaciones 3.5-3.6 se reducen a

$$\Theta^+ = (2n + 1)\pi, \quad (3.9)$$

para todo valor de  $\gamma$ ; por lo tanto las imágenes correspondientes son un conjunto de círculos concéntricos, conocidos como anillos de Einstein. En la figura 3.5 se muestra la proyección de las direcciones de los rayos emitidos sobre una esfera de radio unitario para un observador en  $r_o = 6\mathcal{M}$  y posición de la fuente en  $r_s = 6\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ ; además en color cian se muestran las direcciones correspondientes al ángulo crítico  $\psi_o^c = \pi/4$ . La esfera unitaria antes mencionada corresponde a la esfera celeste del observador.

En la figura 3.6 se muestra la proyección del anillo de Einstein primario y primer anillo relativista sobre el plano  $\psi = \pi/2$  en la posición del observador.

**CAPÍTULO 3. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN EL ESPACIO-TIEMPO  
DE SCHWARZSCHILD**  
3.2. ANILLOS DE EINSTEIN

---

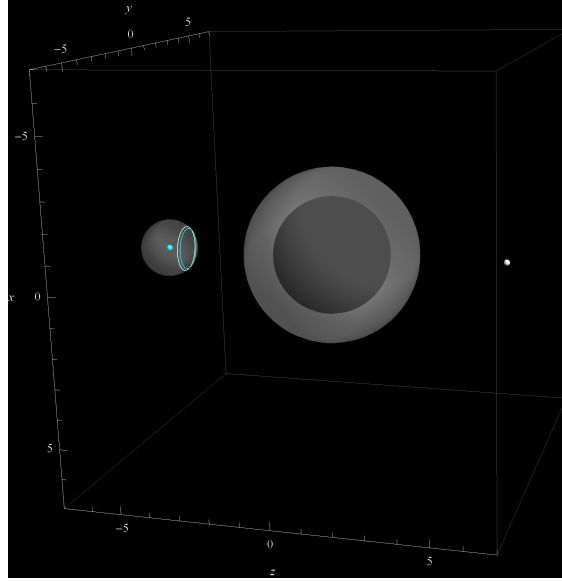


Figura 3.5: Se muestra al observador (punto en color cian) y fuente puntual (punto en color blanco) alineados sobre el eje óptico a una distancia  $r = 6\mathcal{M}$  del origen, para  $\mathcal{M} = 1m$ . La esfera que envuelve al agujero negro representa la esfera fotónica, la que envuelve al observador representa la esfera celeste. El anillo en blanco corresponde al anillo de Einstein primario registrado por el observador, mientras que el círculo en color cian representa al radio angular crítico.

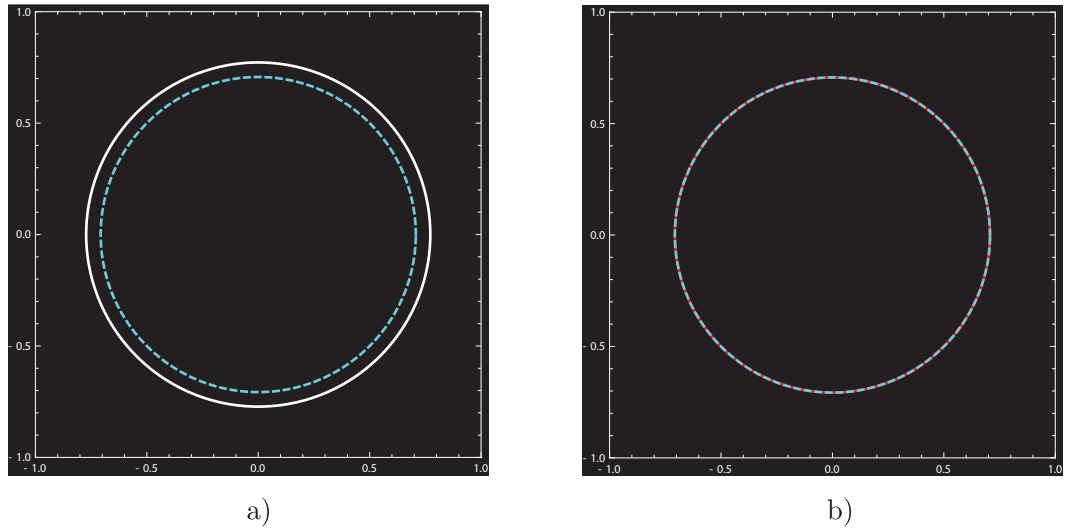


Figura 3.6: a) Proyección del anillo de Einstein primario y b) primer anillo relativista sobre el plano  $\psi = \pi/2$  para  $r_o = 6\mathcal{M}$ ,  $r_s = 6\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M} = 1m$ . Nótese que el anillo relativista se encuentra cerca del radio angular crítico  $\psi_o^c = \pi/4$ .

En el gráfico 3.7 se muestra la dependencia del radio angular  $\psi$  para la imagen primaria y la primera imagen relativista de los anillos de Einstein en función de la posición de la

**CAPÍTULO 3. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN EL ESPACIO-TIEMPO  
DE SCHWARZSCHILD**  
3.3. IMAGEN DE UNA FUENTE LINEAL SOBRE EL EJE ÓPTICO

---

fente  $r_s$ , para un observador en la posición  $r_o = 6\mathcal{M}$ . Nótese que la primera imagen relativista se encuentra muy cerca del radio crítico; en general, las imágenes relativistas se aproximan cada vez más a  $\psi_o^c$ .

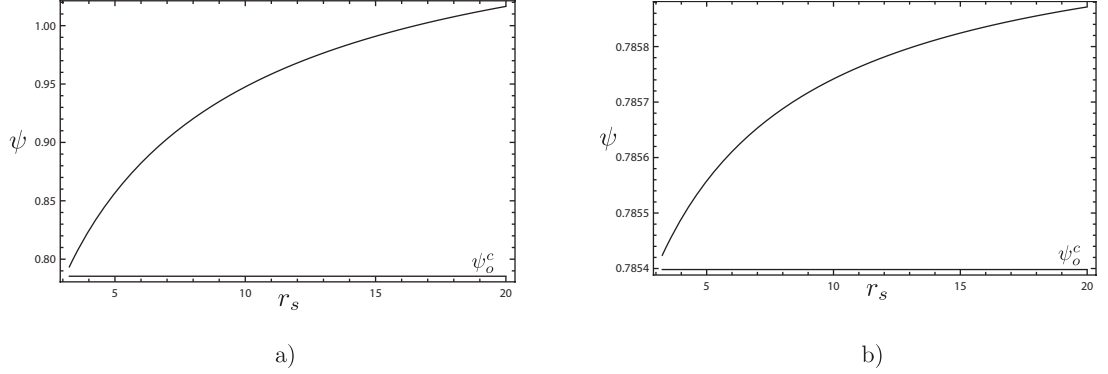


Figura 3.7: a) Se muestra la dependencia del radio angular  $\psi$  del anillo de Einstein primario, en b) el correspondiente a la primera imagen relativista, ambas como función de la posición espacial de la fuente  $r_s$ , para un observador en la posición radial  $r_o = 6\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ . Nótese que el primer anillo relativista se encuentra muy cerca del radio angular crítico  $\psi_o^c = \pi/4$ .

### 3.3. Imagen de una fuente lineal sobre el eje óptico

Con la finalidad de comprender a detalle el fenómeno de lentes gravitacionales, consideremos una fuente lineal sobre el eje óptico (recta imaginaria que conecta al observador con el centro del agujero negro) en la región  $\mathcal{R}_1$ . Cada punto sobre la fuente será registrado como un anillo de Einstein determinado por la ecuación 3.9. En la figura 3.8 se muestra la imagen registrada por un observador en la posición  $r_o = 6\mathcal{M}$  de una fuente lineal tal que  $3,5\mathcal{M} \leq z \leq 8\mathcal{M}$ . Hemos dividido la fuente en tres partes iguales, con la finalidad de mostrar que mientras más alejada esté la fuente lineal del agujero negro, la imagen se hace más compacta.

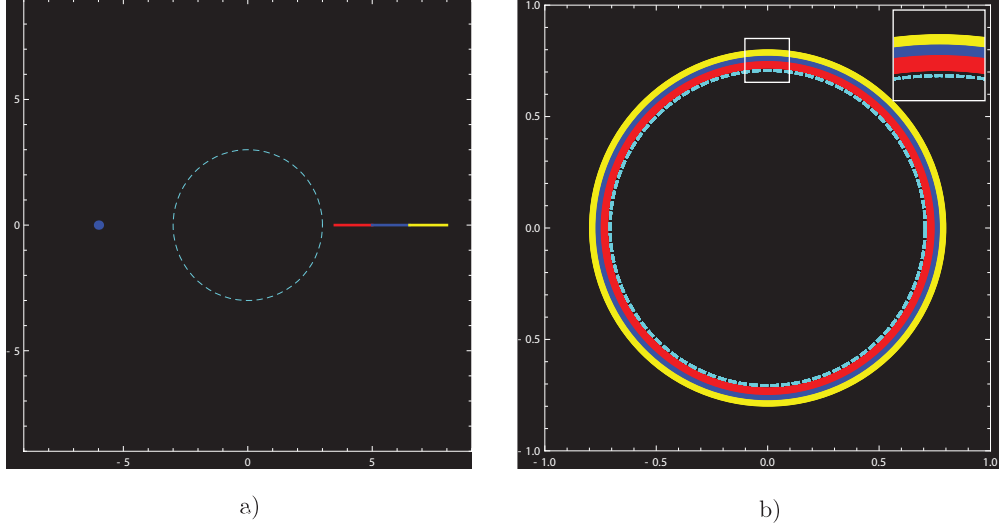


Figura 3.8: a) Configuración del sistema físico en el sistema pseudocartesiano  $\{x, z\}$ . La posición del observador es  $r_o = 6\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ . La fuente está a lo largo del eje  $z$  en el rango  $3,5\mathcal{M} \leq z \leq 8\mathcal{M}$ . b) Se muestra la imagen registrada por el observador de la fuente lineal. Nótese que a medida que nos alejamos del agujero negro, la imagen de la fuente se hace más compacta.

### 3.4. Imagen de un disco pseudo-cartesiano

Supongamos que tenemos una fuente puntual en la posición pseudo-cartesiana  $x = x_s > 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = z_s = cte$ , en la región  $\mathcal{R}_1$ . Para hallar la posición de la fuente en coordenadas esféricas debe resolverse el siguiente sistema de ecuaciones

$$x_s = r_s \sin \theta_s \cos \phi_s, \quad (3.10)$$

$$0 = r_s \sin \theta_s \sin \phi_s, \quad (3.11)$$

$$z_s = r_s \cos \theta_s, \quad (3.12)$$

es evidente que  $\phi_s = 0$ , satisfaciéndose 3.11 automáticamente. Dado que

$$r_s = \sqrt{x_s^2 + y_s^2}, \quad (3.13)$$

de la ecuación 3.10 se concluye que

$$\theta_s = \arcsin \left( \frac{x_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}} \right), \quad (3.14)$$

por lo tanto, de acuerdo con las ecuaciones 3.5-3.6, las imágenes primarias registradas por el observador satisfacen

**CAPÍTULO 3. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN EL ESPACIO-TIEMPO  
DE SCHWARZSCHILD**  
3.4. IMAGEN DE UN DISCO PSEUDO-CARTESIANO

---

$$\Theta^+ = \pi - \arcsin \left( \frac{x_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}} \right), \quad \text{para } \gamma = 0, \quad (3.15)$$

$$\Theta^+ = \pi + \arcsin \left( \frac{x_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}} \right), \quad \text{para } \gamma = \pi. \quad (3.16)$$

Vamos a decir que las ecuaciones 3.5 y 3.6 describen la imagen primaria y secundaria respectivamente. En la figura 3.9 se muestra la posición angular de la imagen primaria y secundaria como función de  $x_s$  para  $z_s = 6\mathcal{M}$  y  $r_o = 6\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ ; nótese que si  $x_s = 0$ , entonces se recupera el radio angular del anillo de Einstein primario.

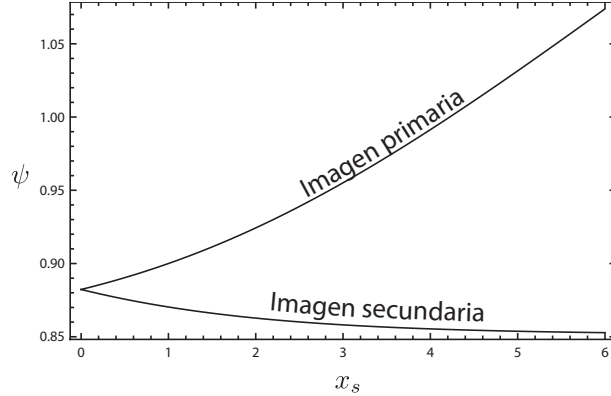


Figura 3.9: Se muestra la posición angular de la imagen primaria y secundaria, como función de  $x_s$ , para  $z_s = 6\mathcal{M}$ , y  $r_o = 6\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ . Si  $x_s = 0$ , se recupera el radio angular del anillo de Einstein correspondiente.

Dada la simetría del sistema, es evidente que la imagen de una fuente circular en el plano  $z_s$  centrada en el eje óptico con radio pseudo-cartesiano  $x_s$  está determinada por las ecuaciones 3.15-3.16 para  $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ , obteniendo así dos anillos concéntricos externo e interno correspondientes a la imagen primaria y secundaria respectivamente (ver la figura 3.9). En la figura 3.10 se muestra un ejemplo para una fuente circular en la posición  $z = 6\mathcal{M}$  y de radio  $x_s = 6\mathcal{M}$ , registradas por un observador en la posición  $r_o = 6\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ .

**CAPÍTULO 3. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN EL ESPACIO-TIEMPO  
DE SCHWARZSCHILD**  
3.4. IMAGEN DE UN DISCO PSEUDO-CARTESIANO

---

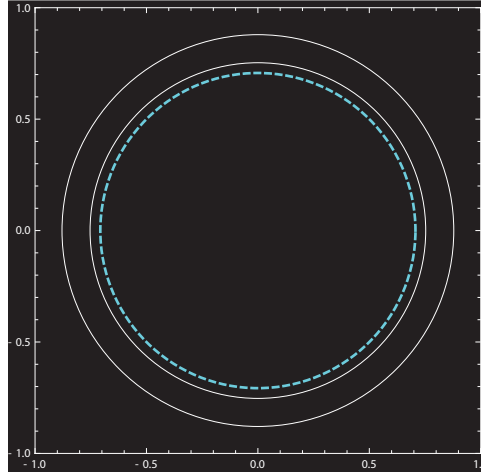


Figura 3.10: Se muestra la imagen primaria y secundaria para una fuente circular, centrada en el eje óptico, en la posición  $z = 6\mathcal{M}$  y de radio  $x_s = 6\mathcal{M}$ , registradas por un observador en la posición  $r_o = 6\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ .

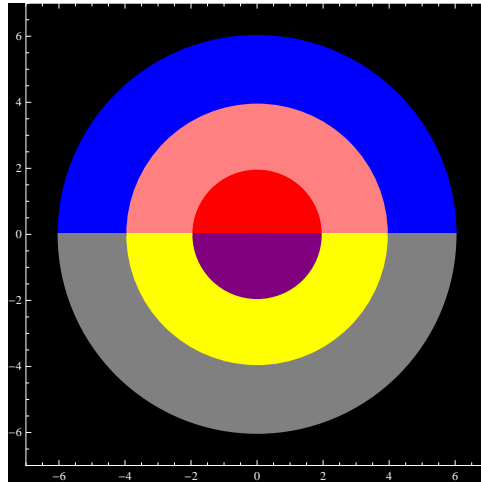


Figura 3.11: Coloración de un disco de radio  $6\mathcal{M}$  en el plano  $z = 6\mathcal{M}$  centrado en el eje óptico del sistema, para  $\mathcal{M} = 1m$ .

Consideremos un disco en el plano  $z = 6\mathcal{M}$  de radio  $x_s = 6\mathcal{M}$  para  $\mathcal{M} = 1m$ , con la coloración que se muestra en la figura 3.11. La imagen registrada por un observador en la posición  $r_o = 6\mathcal{M}$  se muestra en la figura 3.12. El círculo en color blanco representa el anillo de Einstein correspondiente al centro del disco; en el exterior del anillo se encuentra la imagen primaria; nótese que la imagen se hace más compacta cerca del anillo de Einstein. En el interior del anillo se encuentra la imagen secundaria, la cual está invertida con respecto a la imagen primaria, y además tiende a acercarse al radio angular crítico, representado por el círculo punteado en color cian, haciéndose cada vez más compacta.

**CAPÍTULO 3. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN EL ESPACIO-TIEMPO  
DE SCHWARZSCHILD**  
3.5. IMAGEN DE UNA ELIPSE PSEUDO-CARTESIANA

---

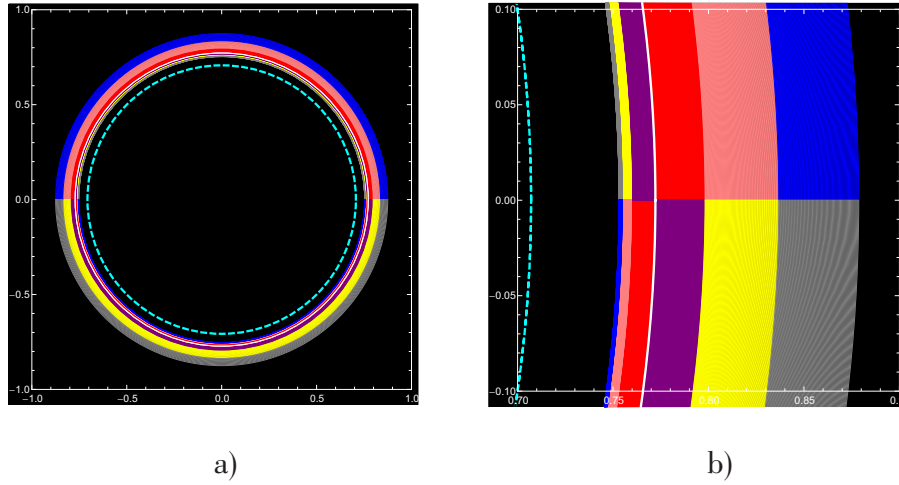


Figura 3.12: a) Imagen del disco de la figura 3.11 registrada por un observador en la posición  $r_o = 6\mathcal{M}$ . La imagen primaria es detectada fuera del anillo de Einstein, mientras que dentro de este se observa la imagen secundaria. b) Se muestra con más detalle una porción de la imagen del inciso a).

### 3.5. Imagen de una elipse pseudo-cartesiana

Consideremos una fuente 1-dimensional, perteneciente a la región  $\mathcal{R}_1$ , cuya forma paramétrica es la siguiente

$$x(u) = a \cos u + x_o, \quad (3.17)$$

$$y(u) = b \sin u + y_o, \quad (3.18)$$

$$z(u) = z_o, \quad (3.19)$$

con  $0 \leq u \leq 2\pi$ . En  $R^3$  esto corresponde a la ecuación de una elipse sobre el plano  $z_o = ct_e$  con centro en  $(x_o, y_o)$ , por esta razón, le llamamos elipse pseudo-cartesiana. La forma paramétrica de la fuente en coordenadas esféricas debe satisfacer las siguientes relaciones

$$a \cos u + x_o = r_s \sin \theta_s \cos \phi_s, \quad (3.20)$$

$$b \sin u + y_o = r_s \sin \theta_s \sin \phi_s, \quad (3.21)$$

$$z_o = r_s \cos \theta_s, \quad (3.22)$$

es fácil hallar que la forma paramétrica de la elipse pseudo-cartesiana es

$$\phi_s(u) = \arctan \left( \frac{b \sin u + y_o}{a \cos u + x_o} \right), \quad (3.23)$$

**CAPÍTULO 3. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN EL ESPACIO-TIEMPO  
DE SCHWARZSCHILD**  
3.5. IMAGEN DE UNA ELIPSE PSEUDO-CARTESIANA

---

$$\theta_s(u) = \arctan \left( \frac{a \cos u + x_o}{z_o \cos(\phi_s(u))} \right), \quad (3.24)$$

$$r_s(u) = \frac{z_o}{\cos(\theta_s(u))}, \quad (3.25)$$

por lo tanto, de acuerdo con las ecuaciones 3.5-3.6, las imágenes deben satisfacer lo siguiente

$$\Theta^+ = (2n + 1)\pi - \theta_s(u), \quad \text{para } \gamma = \phi_s(u), \quad (3.26)$$

$$\Theta^+ = (2n + 1)\pi + \theta_s(u), \quad \text{para } \gamma = \phi_s(u) + \pi; \quad (3.27)$$

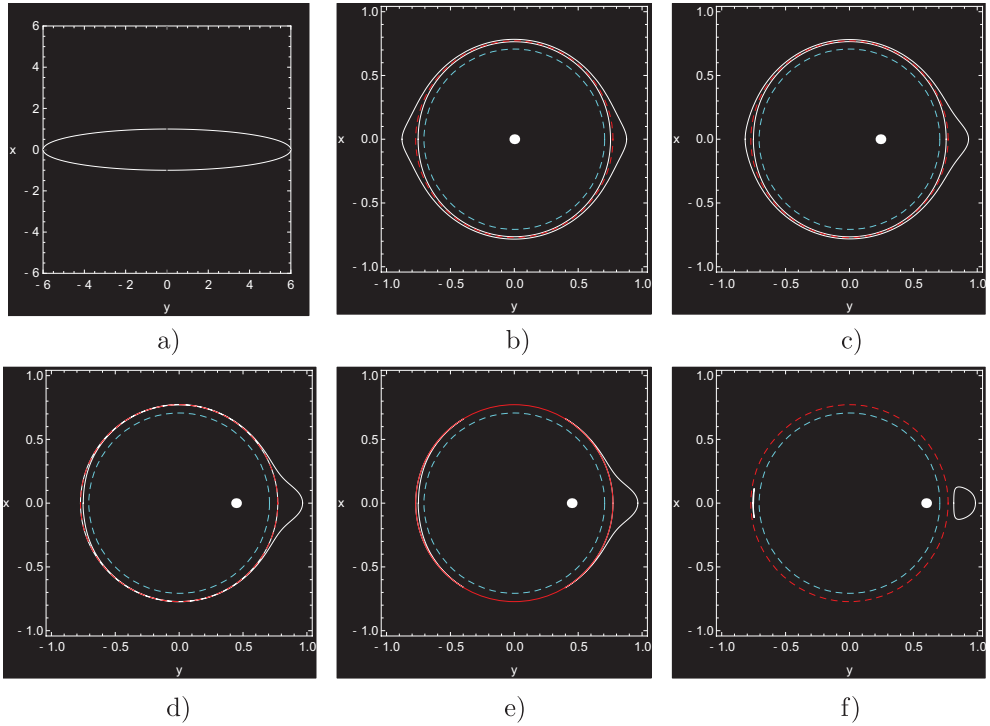


Figura 3.13: a) Fuente pseudo-elíptica caracterizada por los parámetros  $a = \mathcal{M}$ ,  $b = 6\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ . En b)-f) se muestra la imagen registrada de la elipse-pseudo-cartesiana por un observador en la posición  $r_o = 6\mathcal{M}$ ; la elipse se encuentra en el plano pseudo cartesiano  $z_o = 6\mathcal{M}$  en las posiciones  $x_o = 0\mathcal{M}$ ,  $y = 0\mathcal{M}$ ,  $3\mathcal{M}$ ,  $5,97\mathcal{M}$ ,  $6,03\mathcal{M}$ ,  $9\mathcal{M}$ , respectivamente. El punto blanco representa el centro de la elipse. La circunferencia punteada en color rojo representa el anillo de Einstein para una fuente puntual sobre el eje óptico en la posición  $z_o = 6\mathcal{M}$ . La circunferencia punteada en color cian representa el radio angular crítico.

la información de la ecuación 3.25 está contenida en  $\Theta^+$  (ver 2.64), y de las ecuaciones anteriores debemos ser capaces de obtener  $\psi(u)$ ; aquí lo hacemos numéricamente. En la

**CAPÍTULO 3. FORMACIÓN DE IMÁGENES EN EL ESPACIO-TIEMPO  
DE SCHWARZSCHILD**  
3.5. IMAGEN DE UNA ELIPSE PSEUDO-CARTESIANA

---

figura 3.13 se ilustra la imagen registrada por un observador en la posición  $r_o = 6\mathcal{M}$  de una fuente pseudo-elíptica con parámetros  $a = \mathcal{M}$ ,  $b = 6\mathcal{M}$ , para  $\mathcal{M} = 1m$ . Cuando la pseudo-elipse encierra al eje óptico, el observador registra dos curvas cerradas, una dentro de la otra; por otro lado, si la pseudo-elipse está fuera del eje óptico, entonces se registran dos curvas cerradas separadas entre sí. La imagen primaria y secundaria están fuera y dentro de un anillo de Einstein generado por una fuente puntual en la posición  $z_o$  sobre el eje óptico. En la figura 3.14 se muestra a la misma pseudo-elipse desplazada en la coordenada pseudo-cartesiana  $x$  por una cantidad  $3\mathcal{M}$ . Cabe resaltar que la imagen forma arcos muy pronunciados y cercanos al anillo de Einstein correspondiente cuando la fuente se encuentra cerca del eje óptico.

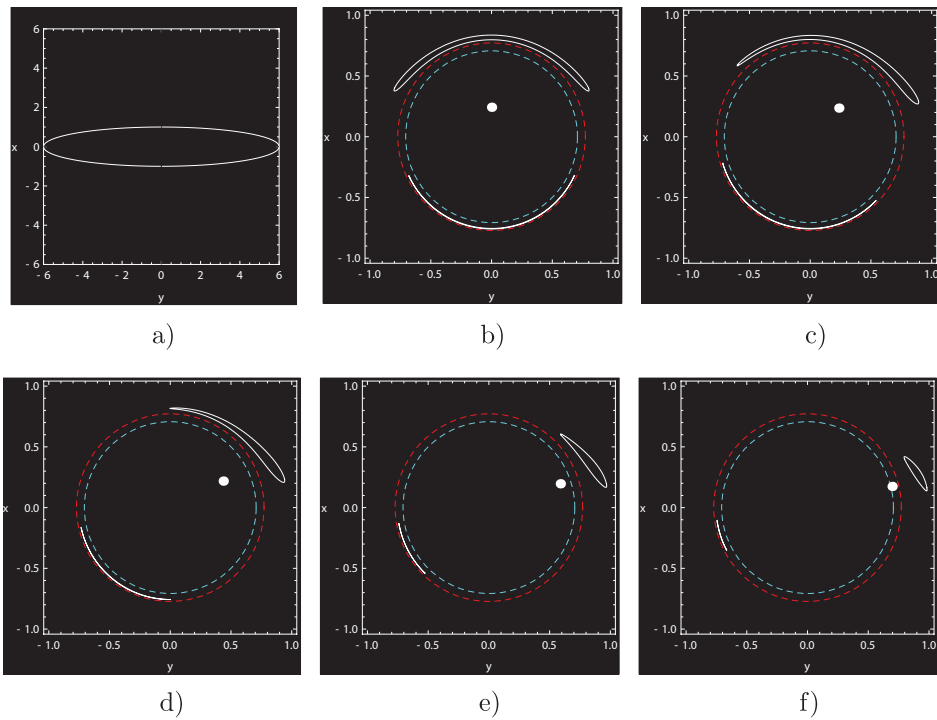


Figura 3.14: a) Fuente pseudo-elíptica caracterizada por los parámetros  $a = \mathcal{M}$ ,  $b = 6\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ . En b)-d) se muestra la imagen registrada de la elipse-pseudo-cartesiana por un observador en la posición  $r_o = 6\mathcal{M}$ ; la elipse se encuentra en el plano pseudo cartesiano  $z_o = 6\mathcal{M}$  en las posiciones  $x_o = 3\mathcal{M}$ ,  $y = 0\mathcal{M}$ ,  $3\mathcal{M}$ ,  $6\mathcal{M}$ ,  $9\mathcal{M}$ ,  $12\mathcal{M}$ , respectivamente. El punto blanco representa el centro de la elipse. La circunferencia punteada en color rojo representa el anillo de Einstein para una fuente puntual sobre el eje óptico en la posición  $z_o = 6\mathcal{M}$ . La circunferencia punteada en color cian representa el radio angular crítico.

## Capítulo 4

# Resultados

Una de las técnicas empleadas para determinar la calidad de una lente común es la prueba de Ronchi, que a grandes rasgos consiste de cuatro elementos: una fuente luminosa, una lente, una rejilla de Ronchi (conjunto de segmentos de líneas paralelas igualmente separadas) y una pantalla. El objetivo es obtener una proyección de las sombras de la rejilla sobre una pantalla cuando la luz ya ha atravesado la lente; el conjunto de sombras se conoce como ronchigrama, y se compara con el resultado teórico para una lente ideal, con el fin de detectar defectos en la lente fabricada; en otras palabras, a partir del conocimiento del ronchigrama experimental, podemos obtener alguna información acerca de la lente que se está examinando. En la figura 4.1 mostramos una posible configuración de esta prueba para una lente común.

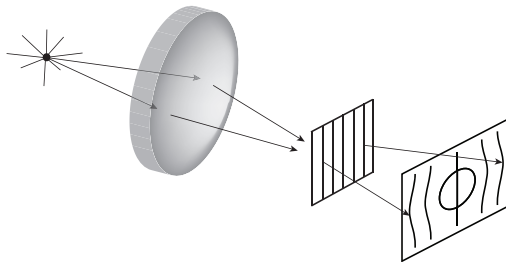


Figura 4.1: Esquema de la prueba de Ronchi para lentes comunes.

El ronchigrama puede presentar una topología diferente con respecto a la rejilla de Ronchi, dependiendo si la rejilla se encuentra dentro de una región de interferencia o si entra en contacto con la región cáustica, en forma análoga a la expuesta en el capítulo 1, en el que se explicó el cambio de topología de la imagen con respecto al objeto observado.

En este trabajo de tesis estamos interesados en analizar una configuración análoga a la prueba de Ronchi para lentes comunes para el efecto de lente gravitacional, que llamaremos gravitoronchigrama

## 4.1. Gravitoronchigrama

El sistema físico que vamos a analizar consiste de una rejilla y una fuente puntual en posiciones opuestas al origen. La rejilla la colocaremos sobre una esfera de radio  $r_r$ , cuyas franjas están caracterizadas por  $y = l$ , siendo  $l$  constante; la forma paramétrica de la rejilla es la siguiente

$$\vec{F}_r(l, \psi_p) = \left( |l| \cot \phi_p, l, -\sqrt{r_r^2 - l^2 / \sin^2 \phi_p} \right), \quad \text{con } 0 \leq \phi_p \leq \pi, \quad (4.1)$$

si comparamos la expresión anterior con la ecuación de la esfera, se puede concluir lo siguiente

$$l = r_r \sin \theta \sin \phi \Rightarrow \phi(\theta) = \arcsin \left( \frac{l}{r_r \sin \theta} \right) \Rightarrow \theta(\phi) = \arcsin \left( \frac{l}{r_r \sin \phi} \right), \quad (4.2)$$

estos resultados serán útiles más adelante.

La posición de la fuente estará determinada por  $\theta_s = 0$ ,  $r_s \geq 3\mathcal{M}$ ; bajo estas condiciones aseguramos que existen rayos emitidos que conectan la posición de la fuente con las franjas de la rejilla. Por simplicidad vamos a suponer que la rejilla se encuentra en la región  $\mathcal{R}_1$  (ver figura 3.4, se intercambia al observador por una fuente puntual), en la figura 4.2 se muestra la configuración antes descrita para una fuente en la posición  $r_s = 6\mathcal{M}$  y una rejilla sobre la esfera  $r_r = 8\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ ; se muestran nueve franjas.

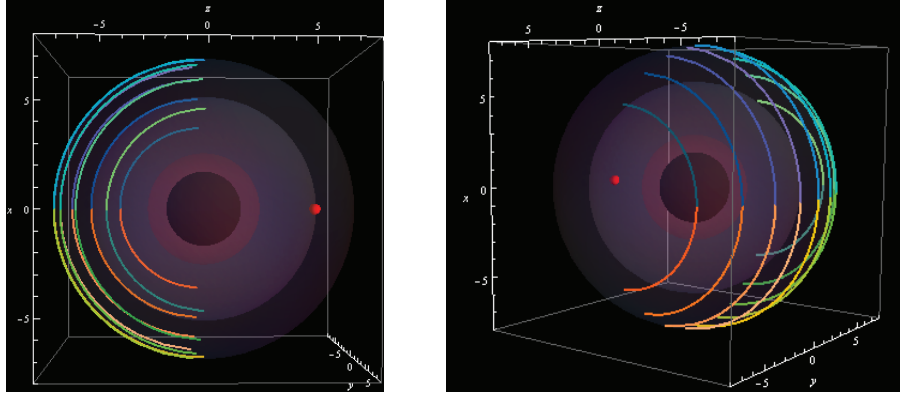


Figura 4.2: La rejilla de Ronchi se muestra como un conjunto de nueve franjas sobre una esfera de radio  $r_r = 8\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ . La fuente puntual se representa por un punto rojo en la posición  $r_s = 6\mathcal{M}$ .

Dada la masa del agujero negro y la posición de la fuente, conviene definir una función  $\Theta^+(r, \psi)$  de la siguiente manera

$$\Theta^+(r, \psi) \equiv \Theta(\rho_o(\psi, \mathcal{M}), r_s, \mathcal{M}) + \Theta(\rho_o(\psi, \mathcal{M}), r, \mathcal{M}), \quad (4.3)$$

que, de acuerdo con la ecuación 2.64, corresponde al desplazamiento angular en la coordenada  $\theta$  de un rayo emitido como función de la posición radial  $r$ ; para el caso que estamos analizando la ecuación anterior coincide con la coordenada  $\theta$  de nuestro sistema.

**CAPÍTULO 4. RESULTADOS**  
4.1. GRAVITORONCHIGRAMA

---

Para obtener el gravitoronchigrama (patrón de Ronchi) vamos a proyectar las sombras de las franjas sobre una pantalla esférica de radio  $r_p > r_r$ ; de acuerdo con las ecuaciones 4.2-4.3, y apoyándonos de la figura 4.2, el gravitoronchigrama está descrito por

$$r(\psi) = r_p, \quad (4.4)$$

$$\theta(\psi) = \Theta^+(r_p, \psi), \quad (4.5)$$

$$\phi_1^1(\psi) = \arcsin\left(\frac{l}{r_r \sin \Theta^+(r_r, \psi)}\right), \quad (4.6)$$

$$\phi_2^1(\psi) = \pi - \arcsin\left(\frac{l}{r_r \sin \Theta^+(r_r, \psi)}\right), \quad (4.7)$$

con  $\psi \in [\psi_1^1, \psi_2^1]$  tal que  $\Theta^+(r_r, \psi_1^1) = \theta(\pi/2)$  (ver ecuación 4.2) y  $\Theta^+(r_r, \psi_2^1) = \pi/2$ . Las funciones  $\phi_1^1$  y  $\phi_2^1$  describen la parte correspondiente a la componente x positiva y negativa de la rejilla.

Dado que por cada punto de la rejilla pasan al menos dos rayos, debe existir una proyección secundaria, análoga a la imagen secundaria estudiada en el capítulo 3. Es fácil hallar que la proyección secundaria está descrita por

$$r(\psi) = r_p, \quad (4.8)$$

$$\theta(\psi) = 2\pi - \Theta^+(r_p, \psi), \quad (4.9)$$

$$\phi_1^2(\psi) = \pi + \arcsin\left(\frac{l}{r_r \sin(2\pi - \Theta^+(r_r, \psi))}\right), \quad (4.10)$$

$$\phi_2^2(\psi) = 2\pi - \arcsin\left(\frac{l}{r_r \sin(2\pi - \Theta^+(r_r, \psi))}\right), \quad (4.11)$$

con  $\psi \in [\psi_1^2, \psi_2^2]$  tal que  $\Theta^+(r_r, \psi_1^2) = 2\pi - \theta(\pi/2)$  y  $\Theta^+(r_r, \psi_2^2) = 3\pi/2$ .

En la figura 4.3 se muestra el gravitoronchigrama correspondiente al sistema ilustrado de la figura 4.2 para una pantalla en la posición  $r_p = 30\mathcal{M}$  con  $\mathcal{M} = 1m$ . La proyección primaria y secundaria se muestra con líneas continuas y punteadas, respectivamente. Cabe resaltar que en este ejemplo la cáustica consiste de una recta sobre el eje  $z$  negativo (por simetría del sistema) y que el punto de la rejilla coincidente con la cáustica se mapea en la pantalla como una circunferencia, dentro del cual, los patrones se autointersectan dando lugar a una curva cerrada. Un aspecto importante a tomar en cuenta de este ejemplo es que la morfología del gravitoronchigrama se mantiene independientemente de la posición de la fuente y la rejilla siempre y cuando se satisfagan las condiciones descritas.

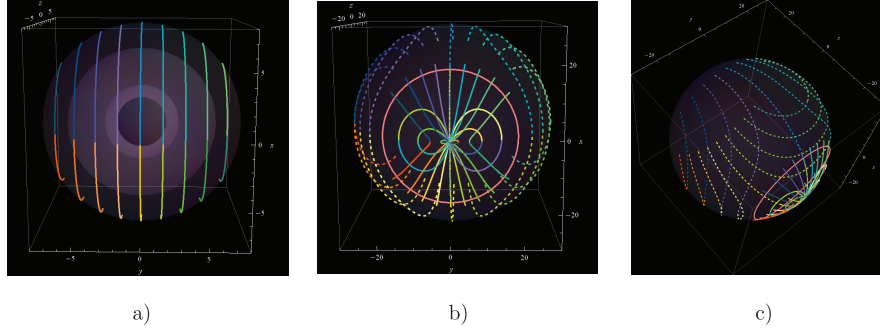


Figura 4.3: a) Se muestra la rejilla para el sistema ilustrado en la figura 4.2; en b) y c) se muestra el gravitoronchigramma correspondiente para una pantalla esférica de radio  $r_p = 30\mathcal{M}$  centrada en el origen, con  $\mathcal{M} = 1m$ .

Para describir el primer gravitoronchigramma relativista basta con realizar el cambio de variable  $\Theta^+ \rightarrow \Theta^+ + 2\pi$ . En la figura 4.4 se muestra el primer gravitoronchigramma relativista junto con el gravitoronchigramma primario y secundario; nótese que la morfología es similar y que el relativista tiende a compactarse sobre el eje  $z$  negativo.

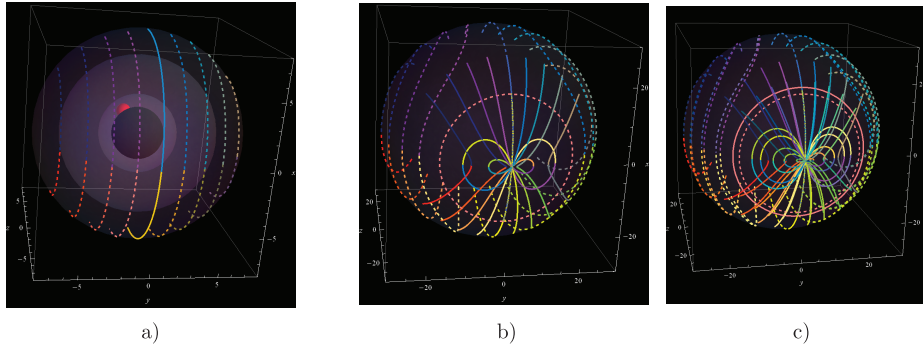


Figura 4.4: a) a) Se muestra la rejilla para el sistema ilustrado en la figura 4.2, en b) se muestra el primer gravitoronchigramma relativista sobre una pantalla esférica de radio  $r_p = 30\mathcal{M}$  centrada en el origen, con  $\mathcal{M} = 1m$ . En c) se muestra el gravitoronchigramma de la figura 4.3 y el primer ronchigramma relativista; nótese que tienen morfología similar, sin embargo el relativista tiende a compactarse sobre el eje  $z$  negativo.

Otra posible configuración para realizar una prueba de Ronchi para lentes gravitacionales consiste de un observador y una rejilla en posiciones opuestas al origen. Para este caso vamos a colocar una rejilla sobre la parte positiva del eje pseudo-cartesiano  $z$  con las franjas parametrizadas de la siguiente manera

$$\vec{F}_r(l, \psi_p) = \left( |l| \cot \phi_p, l, \sqrt{r_r^2 - l^2 / \sin^2 \phi_p} \right), \quad \text{con } 0 \leq \phi_p \leq \pi. \quad (4.12)$$

Consideremos un observador en la posición espacial  $\theta_o = \pi$ ,  $r_o \geq 3\mathcal{M}$ ; en la figura 4.5 se muestra la configuración del sistema para una rejilla sobre una esfera de radio  $r_r = 8\mathcal{M}$  y un observador en la posición radial  $r_o = 20\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ .

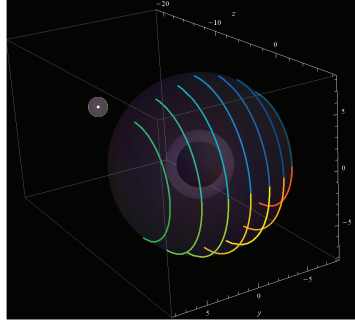


Figura 4.5: Nuestro sistema consiste de un observador y una rejilla en posiciones opuestas al origen. Se muestra la configuración del sistema para una rejilla sobre una esfera de radio  $r_r = 8\mathcal{M}$  y un observador en la posición radial  $r_o = 20\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ .

En este caso el gravitoronchigrama corresponde a la imagen registrada por el observador de la rejilla, la cual, como se estudió en el capítulo 3, se proyecta sobre la esfera celeste del observador. Requerimos de hallar el conjunto de direcciones de emisión  $\{\psi, \gamma\}$  de una fuente puntual ficticia en la posición del observador tal que la conecten con las franjas de la rejilla. Cabe mencionar que las ecuaciones 4.2 siguen siendo válidas. Mediante un razonamiento análogo al caso anterior, se encuentra que la imagen primaria está descrita por

$$\gamma_1^1(\psi) = \arcsin\left(\frac{l}{r_r \sin(\pi - \Theta^+(r_r, \psi))}\right), \quad (4.13)$$

y

$$\gamma_2^1(\psi) = \pi - \arcsin\left(\frac{l}{r_r \sin(\pi - \Theta^+(r_r, \psi))}\right), \quad (4.14)$$

para  $\psi \in [\psi_1^1, \psi_2^1]$  tal que  $\Theta^+(r_r, \psi_1^1) = \pi - \theta(\pi/2)$  y  $\Theta^+(r_r, \psi_2^1) = \pi/2$ . Por otro lado, la imagen secundaria está descrita por

$$\gamma_1^2(\psi) = \pi - \arcsin\left(\frac{l}{r_r \sin(\pi - \Theta^+(r_r, \psi))}\right), \quad (4.15)$$

y

$$\gamma_2^2(\psi) = \arcsin\left(\frac{l}{r_r \sin(\pi - \Theta^+(r_r, \psi))}\right), \quad (4.16)$$

para  $\psi \in [\psi_1^2, \psi_2^2]$  tal que  $\Theta^+(r_r, \psi_1^2) = \pi + \theta(\pi/2)$  y  $\Theta^+(r_r, \psi_2^2) = 3\pi/2$ . En la figura 4.6 se muestra el gravitoronchigrama correspondiente a la configuración del sistema de la figura 4.5. La imagen primaria y secundaria de la rejilla se muestra con curvas continuas y punteadas, respectivamente. La cáustica asociada a la fuente ficticia, por simetría del sistema, se encuentra a lo largo del eje  $z$  positivo; el punto de la rejilla que coincide con la cáustica es registrado por el observador como una circunferencia, correspondiente al anillo de Einstein. Las imágenes primarias se mapean fuera del anillo, mientras que las secundarias se mapean entre el anillo de Einstein primario y el primer anillo de Einstein

## CAPÍTULO 4. RESULTADOS

### 4.1. GRAVITORONCHIGRAMA

---

relativista, el cual se encuentra muy próximo al ángulo radial crítico ilustrado con una circunferencia roja. Al igual que el gravitoronchigrama del ejemplo anterior, la morfología del patrón de Ronchi se mantiene al variar la posición de la rejilla y del observador. En este capítulo hemos presentado ecuaciones analíticas que permiten estudiar a detalle la estructura del gravitoronchigrama.

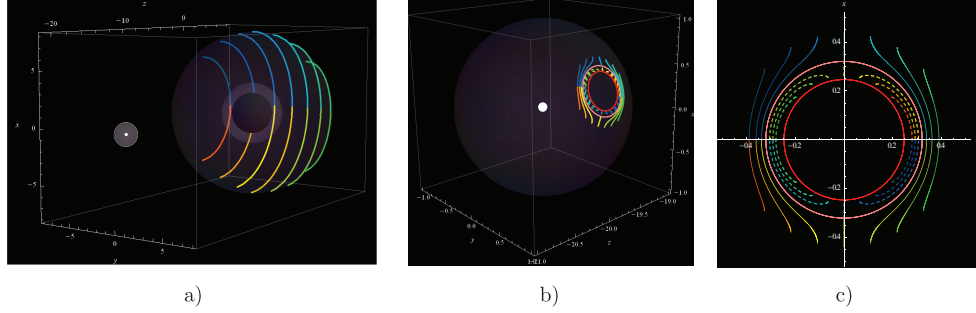


Figura 4.6: a) Se muestra la configuración del sistema para una rejilla sobre una esfera de radio  $r_r = 8\mathcal{M}$  y un observador en la posición radial  $r_o = 20\mathcal{M}$ , con  $\mathcal{M} = 1m$ . En b) se muestra el gravitoronchigrama sobre la esfera celeste del observador, la imagen primaria y secundaria de la rejilla corresponde a las curvas continuas y punteadas, respectivamente; en c) se muestra la proyección del gravitoronchigrama en el pseudo-plano  $xy$ . Las imágenes primarias se encuentran fuera del anillo de Einstein, representado por una circunferencia rosa; las imágenes secundarias se encuentran entre el anillo de Einstein y el primer anillo de Einstein relativista, el cual se encuentra muy cerca del radio angular crítico, representado por una circunferencia en color rojo; en general las imágenes relativistas se acercan cada vez más al radio angular crítico.

## Capítulo 5

# Conclusiones

En la primera parte de este trabajo hemos abordado el problema de hallar la imagen registrada por un observador de un objeto cuando el fenómeno de refracción se hace patente. Un paso importante en la técnica empleada es aplicar el principio de reciprocidad de la luz, replanteando así el problema a determinar aquellos rayos emitidos por una fuente puntual ficticia en la posición del observador que llegan al objeto. Debido al fenómeno de refracción pueden existir regiones en el espacio donde dos o más rayos emitidos se cruzan, dando lugar a regiones de interferencia y/o regiones cóusticas, que están asociados con las propiedades locales y globales de los rayos refractados, respectivamente. La imagen registrada por el observador puede presentar una topología distinta al objeto si este entra en contacto con la región de interferencia asociada a la fuente puntual ficticia, además, el *the caustic touching theorem*, abordado por Berry, asegura un cambio de la topología de la imagen cuando el objeto entra en contacto con la región cóustica. El entendimiento a detalle de la formación de imágenes permite una comprensión clara acerca de la prueba de Ronchi, técnica experimental aplicada a espejos y lentes comunes para deducir la calidad de fabricación de estos objetos. La prueba de Ronchi consiste en obtener un patrón de franjas sobre una pantalla cuando la luz emitida por una fuente pasa a través del elemento óptico bajo análisis y una rejilla, conocida como rejilla de Ronchi. Existen diferentes configuraciones de los elementos de esta prueba para obtener estos patrones, también conocidos como Ronchigramas. La comparación del Ronchigrama ideal con el experimental nos permite obtener información de que tan perfecta fué fabricada la lente o espejo en cuestión.

En este trabajo de tesis nos ocupamos de aplicar las ideas antes descritas a una lente gravitacional de Schwarzschild. Se han resuelto las ecuaciones de movimiento para las geodésicas nulas, y hemos descrito el método para hallar las imágenes primarias y relativistas registradas por un observador.

En forma análoga a la técnica empleada en el fenómeno de refracción, sustituimos al observador por una fuente puntual ficticia, y, dadas las propiedades físicas del sistema analizado, y por simetría, resulta que todo el espacio es una región de interferencia, y la cóustica corresponde una recta a lo largo del eje óptico. Bajo estas condiciones, un objeto puntual sobre el eje óptico es registrado por un observador como un conjunto infinito de circunferencias conocidos como anillos de Einstein, haciéndose así patente el teorema de Berry (un punto se transforma en una infinidad de anillos). Con el fin de tener una

## CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

---

comprensión clara del fenómeno de lente gravitacional, se han revisado varios ejemplos de formación de imágenes para objetos de distintas formas; en particular, el análisis de un objeto pseudo-elíptico conduce a resultados que se asemejan a observaciones experimentales del telescopio espacial Hubble, el cual ha detectado varios ejemplos del fenómeno de lente gravitacional. Finalmente, hemos aplicado el análogo de la prueba de Ronchi a la lente de Schwarzschild, cuyo patrón de Ronchi lo hemos llamado gravitoronchigrama. Cabe resaltar que se han obtenido ecuaciones analíticas para el gravitoronchigrama cuya morfología es similar a la encontrada en espejos y lentes comunes. Una posible aplicación inmediata de esta prueba es determinar si un agujero negro se encuentra en rotación (agujero negro de Kerr), o no, ya que, evidentemente, el gravitoronchigrama se vería modificado con respecto a los resultados mostrados en este trabajo, ya que el sistema correspondiente no posee la misma simetría que un agujero negro de Schwarzschild (agujero negro estático).

# Bibliografía

- [1] A. Cornejo-Rodríguez, *Ronchi test* in Optical shop testing, D. Malacara, ed. Wiley, 1978, Chap. 9.
- [2] Schneider, J. Ehlers, and E. E. Falco, *Gravitational lenses* (Springer- Verlag, New York, Berlín, Heidelberg, 1992).
- [3] S. Frittelli and E. T. Newmann, *Exact universal gravitational lensing equation*, Physical Review D, 50, 124001 (1999).
- [4] T. P. Kling and E. T. Newmann, *Null cones in Schwarzschild geometry*, Physical Review D, 61, 064021 (2000).
- [5] S. Frittelli, T. P. Kling and E. T. Newmann, *Space time perspective of schwarzschild lensing*, Physical Review D, 61, 064021 (2000).
- [6] D. Malacara, A. Cornejo, and M. V. R. K. Murty, *Bibliography of various optical testing methods*, Appl. Opt. 14, 1065-1065 (1975).
- [7] A. Cornejo, H. J. Caulfield, and W. Friday, *Testing of optical surfaces: a bibliography*, Appl. Opt, 20, 4148-4148 (1981).
- [8] V. Ronchi, *Forty years of history of a grating interferometer*, Appl, Opt. 3. 437-451 (1964).
- [9] E. Román-Hernández and G. Silva-Ortigoza, *Exact computation of image disruption under reflection on a smooth surface and ronchigrams*, Appl. opt. 47, 5500-5518 (2008).
- [10] E. Román-Hernández, J. G. Santiago-Santiago, G. Silva-Ortigoza, R. Silva-Ortigoza, and J. Velazquez-Castro, *Describing the structure of ronchigrams when the grating is places at the caustic region: the parabolical mirror*, J. Opt. Soc. Am. A 27, 832-845 (2010).
- [11] S. A. Juárez-Reyes, M. Marciano-Melchor, M. Marcelino-Aranda, P. Ortega-Vidals, E. Román-Hernández, et al. *Wavefronts, caustic, ronchigram, and null ronchigrating of a plane wave refracted by axicon lens*, J. Opt. Soc. Am. A 31, 448-459 (2014).
- [12] Berry M V. *Disruption of images: the caustic-touching theorem*, J. Opt. Soc. Am. A 4, 561-9 (1987).
- [13] S. A. Juárez-Reyes, P. Ortega-Vidals, G. Silva-Ortigoza *Wavefronts, light rays and caustic associated with the refraction of a spherical wave by two interfaces: the axicon and the plano-convex parabolic lenses*, J. Opt. 17, 065604 (2015).

**BIBLIOGRAFÍA**  
**BIBLIOGRAFÍA**

---

- [14] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press 1980.