



# BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA LUIS RIVERA TERRAZAS  
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)

FORMULACIÓN SIMPLÉCTICA DE TEORÍAS TOPOLÓGICAS EN TÉRMINOS  
DE NUEVAS VARIABLES: LA SEGUNDA CLASE DE CHERN Y LA CLASE DE  
EULER

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA  
CARLOS MEDEL PORTUGAL

DIRECTOR DE TESIS  
DR. ALBERTO ESCALANTE HERNÁNDEZ

PUEBLA, PUE.

2017



*Dedicatoria*

Dedico esta tesis a Dios, que gracias a él, tengo dones y habilidades con los que pude llegar hasta aquí.

A mis padres, que por su apoyo incondicional he logrado la meta que ellos consiguieron en su juventud, la cual debo superar.



# Agradecimientos

A mi familia, pero en especial a mis padres, que siempre han estado detrás de mí, brindándome palabras de aliento, regañándome cuando fue necesario. Por ser no sólo mis papás, sino mis más grandes aliados y amigos.

A todos los profesores que tuvieron que ver en mi formación de maestría, durante estos 2 años, compartiendo no solo conocimientos, sino experiencias de vida, pero principalmente al Dr. Escalante por compartir conmigo su tiempo, su entusiasmo y las ideas que me permitieron acercarme a la Gravedad Cuántica de Lazos.

A los miembros del jurado, por todas sus preguntas, comentarios y observaciones hechas a lo largo de esta tesis.

A mis amigos, que con sus comentarios compañía y apoyo, me permitieron seguir adelante, ante las situaciones adversas.

A mis amigos Prihel Cavildo Sánchez, Anniela Melissa Rodríguez Zárate, Harold Osmart Ochoa Gutiérrez y Jorge Luis Serrano Echeverría que desde el inicio de la tesis tuve un gran apoyo.

A mis tíos Guillermo Verdugo e Ignacia Portugal por su apoyo moral en esta tesis, brindándome palabras de aliento para seguir adelante.

Al CONACYT, por su apoyo económico durante toda la maestría.



# Resumen

En este trabajo de tesis, se analizan bajo los formalismos de Dirac y de Faddeev-Jackiw (FJ) dos invariantes topológicos vistos como teorías de campo llamadas la segunda clase de Chern y el invariante de Euler. Respecto al formalismo de Dirac, se encuentran todas las restricciones de la teoría, se calculan las transformaciones de norma, los paréntesis de Dirac y se muestra que a pesar de que la segunda clase de Chern y el invariante de Euler tienen las mismas ecuaciones de movimiento, su correspondiente estructura simpléctica es diferente. Este resultado podría indicar, en principio, que las formulaciones cuánticas de ambas teorías serán diferentes.

Por otra parte, se reproducen los resultados encontrados en Dirac usando el formalismo simpléctico de FJ y se muestra que los paréntesis generalizados de FJ y de Dirac coinciden.



# Introducción

Actualmente, podemos decir que uno de los logros más importantes que ha alcanzado la física, ha sido comprender y realizar la unificación de tres fuerzas fundamentales, la electromagnética, la débil y la fuerte. En efecto, con el llamado modelo estándar de las partículas elementales se ha podido tener un acercamiento a la comprensión de la naturaleza a nivel cuántico [1]. Sin embargo, a pesar del éxito que tiene el modelo estándar para explicar la física de las interacciones fundamentales a nivel cuántico, no se ha podido lograr la unificación del modelo estándar (o también llamada teoría cuántica de campos) con la interacción gravitacional descrita por la teoría de Einstein. En el proceso uno encuentra infinitos y violaciones de algunos principios físicos fundamentales, tal como el principio de causalidad y las técnicas comúnmente usadas en una teoría de renormalización han fallado para eliminar tales inconsistencias. Es por ello que en las recientes décadas, se ha optado por buscar de manera alternativa nuevas técnicas o teorías que ayuden a lograr la unificación consistente entre la teoría cuántica de campos y la relatividad general [RG]. Respecto a este punto, una de las alternativas con las que se ha trabajado últimamente es realizar la cuantización de RG de forma canónica, respetando las simetrías que caracterizan al campo gravitacional; como son la covarianza bajo difeomorfismos y la independencia del espacio tiempo de fondo, simetrías que uno mantiene y requiere que no se pierdan en todo el proceso de cuantización, dando origen a la teoría que conocemos como gravedad cuántica de lazos [GCL] [2, 3]. La teoría de (GCL) nace con los trabajos reportados por Arnowitt, Dessler y Misner, conocidos por su famosa formulación llamada la formulación (ADM) [4]. La formulación (ADM) es una descripción canónica del campo gravitacional, donde la variable fundamental deja de ser la métrica y en su lugar se usan la tres-métrica de la foliación del espacio-tiempo y su momento canónico conjugado. En esta formulación, uno encuentra que RG tiene restricciones, y dichas restricciones al ser no polinomiales en los campos complica el proceso de cuantización que hasta ahora, cuantizar RG usando la formulación (ADM) es un problema abierto. Sin embargo, el panorama llegó a aclararse gracias a los trabajos realizados por Ashtekar en 1986 [5, 6, 7] donde introdujo unas nuevas variables para estudiar la formulación Ha-

miltoniana de RG. En esencia, Ashtekar encontró una transformación canónica compleja entre las variables (ADM) y una conexión valuada en el álgebra del grupo  $SL(2, C)$ . De esta manera, la nueva variable dinámica de la formulación Hamiltoniana de RG sería una conexión compleja, y así RG se pondría al mismo nivel que una teoría de Yang-Mills. El uso de las variables de Ashtekar llevaría a significantes simplificaciones en las restricciones, pues ahora las restricciones serían polinomiales con una estructura sencilla. Sin embargo, debido a que la conexión es compleja, la formulación de Ashtekar describe RG compleja y para extraer los grados de libertad reales es necesario introducir las llamadas condiciones de realidad [2, 3], y dichas condiciones junto con las restricciones complican nuevamente llevar a cabo el proceso de cuantización de RG a la Ashtekar.

Por otra parte, en los años 90's F. Barbero encontró una formulación Hamiltoniana de RG expresada en términos de una conexión real. En efecto, la conexión ahora sería valuada en el álgebra del grupo  $SO(3)$  [8], sin embargo, la estructura polinomial de las restricciones que se tenía en la formulación de Ashtekar se pierde, y nuevamente la estructura no polinomial de las restricciones, entre otras cosas, complicarían una vez más el proceso de cuantización. En el año 1996, S. Holst introduce un principio de acción el cual contiene un parámetro (llamado parámetro  $\gamma$  o de Barbero-Immirzi) que conecta tanto la formulación compleja de Ashtekar como la formulación real de Barbero [9]. La acción de Holst es la siguiente

$$S[e, A] = \int_M \epsilon_{IJ}{}^{KL} e^I \wedge e^J \wedge F_{KL}[A] + \frac{1}{\gamma} \int_M e_I \wedge e_J \wedge F^{IJ}[A] \quad (0.0.1)$$

donde  $e$  es la tétrada,  $F_{KL}$  es la curvatura de la conexión y  $A$  es una conexión valuada en el grupo de Lorentz  $SO(3,1)$ . Cabe mencionar que el primer término de la acción (0.0.1) es conocido como la acción de Palatini [10], la cual describe RG. El segundo término llamado término de Holst, es un término topológico, es decir, al variar la acción (0.0.1) se obtienen las ecuaciones de Einstein y no hay contribución alguna por parte del parámetro  $\gamma$  del término de Holst. La acción de Palatini y la acción de Holst describen clásicamente RG puesto que ambas acciones tienen las mismas ecuaciones de movimiento. Sin embargo, a nivel Hamiltoniano existe una contribución del parámetro  $\gamma$  tanto en la estructura simpléctica como en las restricciones y este resultado hace que la acción de Palatini y Holst sean diferentes a nivel cuántico [2, 3]. Además, uno puede mostrar que si  $\gamma$  toma valores particulares, uno puede obtener los diferentes escenarios previamente comentados; si  $\gamma = 1$  uno reproduce la formulación de Barbero y si  $\gamma = i$  uno reproduce la formulación compleja de Ashtekar [6].

Es importante mencionar que el significado físico del parámetro  $\gamma$  es aún controversial, puesto que a nivel cuántico también hay una contribución del parámetro  $\gamma$  en los eigenvalores del operador de área y volumen que se encuentran en (GCL) [11], desde luego,

este trabajo no está enfocado en estudiar el significado de el parámetro  $\gamma$  por lo que se recomienda que si es de interés el tema, se vean las citas [12, 13, 14].

Siguiendo la misma idea de Holst, D. Jimenez y A. Perez [15] proponen una acción que también reproduce las ecuaciones de movimiento de Einstein. La acción es la siguiente

$$S[e, A] = \int_M \epsilon_{IJ}{}^{KL} e^I \wedge e^J \wedge F_{KL}[A] + \frac{1}{\gamma} \int_M e_I \wedge e_J \wedge F^{IJ}[A] \\ + \Xi \int_M F_{IJ}[A] \wedge F^{IJ}[A] + \Omega \int_M \epsilon_{IJKL} F^{IJ}[A] \wedge F^{KL}[A], \quad (0.0.2)$$

donde  $\Xi$  y  $\Omega$  son constantes. Los dos primeros términos corresponden a la acción de Holst, el tercer término se conoce como la segunda clase de Chern y el cuarto término se le conoce como la clase de Euler. Como ya se comentó, la acción (0.0.2) también reproduce las ecuaciones de Einstein y debido a que los invariantes de Chern y Euler se pueden escribir como una diferencial total, entonces dichos invariantes no tienen contribución alguna a las ecuaciones de movimiento, sin embargo, se espera que a nivel Hamiltoniano y cuántico los parámetros  $\gamma$ ,  $\Xi$  y  $\Omega$  puedan tener una contribución relevante. Por otra parte, algo que también se podría investigar en la acción (0.0.2) es encontrar las condiciones que habría en los parámetros para reproducir las formulaciones de Ashtekar y Barbero o quizá una formulación más general que nos permita realizar la cuantización de manera consistente.

Con los antecedentes expuestos, en esta tesis se analiza desde el punto de vista canónico y simpléctico a los invariantes de Chern y Euler. Como veremos, dichos invariantes vistos como una teoría de campo corresponden a ser teorías topológicas, es decir, no tienen grados de libertad locales, pero pueden tener grados de libertad globales que están asociados a topologías no triviales de la variedad en la cual son definidos. También, dichos invariantes reproducen las mismas ecuaciones de movimiento, sin embargo, veremos que sus correspondientes estructuras simplécticas serán diferentes y este hecho hará que sus correspondientes formulaciones cuánticas podrían diferir, tal como pasa con la acción de Holst y Palatini.

El estudio de teorías topológicas se ha convertido en una fuerte actividad científica debido a que dichas teorías tienen en común simetrías con RG [16, 17, 18, 19], como son la independencia de fondo y la covarianza bajo difeomorfismos. De esta manera, las teorías topológicas son modelos de juguete que pueden ser utilizadas como laboratorio para poder estudiar aspectos de cuantización que posteriormente se podrían aplicar a RG. En nuestro estudio, reescribiremos a las acciones de los invariantes en términos de variables tipo Ashtekar y como una teoría BF, este hecho facilitará en gran medida nuestro análisis. Cabe mencionar que la idea de una teoría BF fue introducida por Plebański en 1970 [23]. En efecto, Plebański introdujo una acción compleja para describir el cam-

po gravitacional, donde las variables dinámicas son campos espinoriales y una conexión valuada en el álgebra del grupo  $SL(2, C)$ . Si uno realiza el análisis Hamiltoniano de la acción de Plebański uno obtiene la formulación de Ashtekar, este importante trabajo fue realizado por Capovilla, Dell, Jacobson y Manson [24, 25].

En términos generales, una teoría BF es una teoría topológica, es covariante bajo difeomorfismos [26, 27, 28, 29] y si uno agrega condiciones extra sobre el campo B, la estructura topológica se rompe y emergen teorías como RG compleja, RG real [30, 31], o una teoría de Yang-Mills [32]. Respecto a este punto, cabe mencionar que la acción alterna a la de Plebański reportada en [30, 31] describe RG real, y si uno realiza el análisis canónico de dicha acción, uno obtiene la formulación de Barbero. En adición, las diversas formulaciones BF de gravedad son actualmente de gran interés en la comunidad, puesto que han permitido realizar grandes avances en el desarrollo de las espumas de espín que se utiliza en GCL [33, 34].

Por otra parte, una vez que tengamos a los invariantes como una teoría BF, para nuestro estudio canónico se utilizará el formalismo de sistemas singulares desarrollado por Dirac [35, 36]. Un sistema singular es aquel que el determinante de su matriz Hessiana es cero, por lo que no se pueden conocer todos los momentos en términos de las posiciones y las velocidades. Debido a que el Hessiano es cero, existirán restricciones, y el formalismo de Dirac nos dice cómo tratar dichas restricciones. Cabe mencionar que ejemplos de teorías singulares son la teoría electromagnética, la teoría de Yang-Mills y la de RG entre otras, por lo que aprender a aplicar el método de Dirac tiene su importancia. Sin embargo, trabajar con las restricciones encontradas en el método de Dirac es muy engorroso pues en su estudio hay que clasificarlas en restricciones de primera clase y segunda clase. Respecto a este punto, realizar la clasificación de las restricciones es relevante debido a que las restricciones de primera clase son las generadoras de una simetría muy importante llamada simetría de norma. Por otro lado, las restricciones de segunda clase nos permiten construir los llamados paréntesis de Dirac, que son los paréntesis que se promueven a conmutadores cuando se realiza el estudio de cuantización. Debido a que el proceso de clasificación es difícil, uno recurre a métodos alternativos que nos den mayor o igual información a la encontrada en el formalismo de Dirac, en este sentido, existe un formalismo alternativo para estudiar sistemas singulares llamado el formalismo de Faddeev-Jackiw [FJ] [37, 38]. Como veremos, el método de FJ consiste en analizar un sistema singular mediante la construcción de una matriz simpléctica. Dicha matriz es construida identificando de la acción lo que se llamarán las variables simplécticas que en esta formulación corresponderán a los grados de libertad de la teoría. Debido a que el sistema bajo estudio es singular, la matriz simpléctica no será invertible y presentará restricciones. Una vez que se han identificado todas las restricciones, se construye una nueva matriz simpléctica, que si continúa siendo singular se fija la norma para obtener finalmente un tensor

simplético. Con dicho tensor simplético en mano, se pasa a construir los paréntesis generalizados de FJ, y uno demuestra que tanto los paréntesis generalizados como los de Dirac coinciden mutuamente. En este trabajo demostraremos que para los invariantes de Chern y Euler, los paréntesis de FJ y de Dirac son los mismos.

Finalmente, es importante comentar que en [39] ya se ha analizado los invariantes de Chern y Euler bajo el contexto de un formalismo de Dirac reducido. Es decir, únicamente a las variables que aparecen en el Lagrangiano con derivada temporal se les asigna su momento canónico conjugado. Sin embargo, hay trabajos donde se ha mostrado que si uno no trabaja con el formalismo de Dirac estricto, no se puede comparar los resultados de Dirac con los que se obtengan en FJ. Por lo que en este trabajo, se aplicará el formalismo de Dirac estricto que se diferencia con el reducido, porque se le asigna a todas las variables dinámicas su momento canónicamente conjugado. Esta forma de trabajar en el formalismo de Dirac, nos permitirá conocer la completa estructura de las restricciones y de las transformaciones de norma tal como se ha mostrado en los siguientes trabajos [40, 41, 42, 43, 44].

La tesis se organiza de la siguiente forma. En el Capítulo I daremos a conocer todo el formalismo de Dirac estricto que usaremos posteriormente. En el Capítulo II se explicará lo esencial del formalismo de FJ. En el Capítulo III y IV se expone el formalismo de Dirac y el formalismo de FJ aplicados a los invariantes de Chern y el de Euler respectivamente. Por último en el Capítulo V daremos las conclusiones.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Introducción</b>	<b>VII</b>
<b>1. Algoritmo de Dirac-Bergmann</b>	<b>1</b>
1.1. Sistemas clásicos singulares . . . . .	1
1.2. Restricciones primarias . . . . .	3
1.3. Ecuaciones débiles y fuertes . . . . .	5
1.4. Condiciones sobre las funciones de restricción . . . . .	6
1.4.1. Analogía con el método de multiplicadores de Lagrange . . . . .	7
1.5. Hamiltoniana Canónica . . . . .	7
1.6. Hamiltoniana primaria y restricciones secundarias . . . . .	9
1.7. Reductibilidad . . . . .	13
1.8. Condiciones sobre los multiplicadores y hamiltoniana total . . . . .	13
1.9. Restricciones de primera y segunda clase . . . . .	15
1.9.1. Álgebra de restricciones . . . . .	17
1.9.2. Separación de las restricciones de primera y segunda clase . . . . .	17
1.10. Transformaciones de norma . . . . .	19
1.11. Grados de libertad . . . . .	21
1.12. La acción y la hamiltoniana extendidas . . . . .	22
1.13. Paréntesis de Dirac . . . . .	23
1.14. Observables . . . . .	24

<b>2. Formalismo de Faddeev-Jackiw</b>	<b>27</b>
2.1. Formalismo simpléctico . . . . .	28
2.1.1. Dos-Forma no Singular . . . . .	28
2.1.2. Dos-Forma Singular . . . . .	29
2.1.3. Fijando la Norma . . . . .	30
2.1.4. Conteo de Grados de Libertad . . . . .	31
<b>3. La segunda clase de Chern</b>	<b>33</b>
3.1. Análisis Hamiltoniano . . . . .	33
3.2. Análisis de Faddeev-Jackiw . . . . .	47
<b>4. El invariante de Euler</b>	<b>57</b>
4.1. Análisis Hamiltoniano . . . . .	57
4.2. Análisis de Faddeev-Jackiw . . . . .	69
<b>5. Conclusiones</b>	<b>79</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>81</b>

**FORMULACIÓN SIMPLÉCTICA DE TEORÍAS  
TOPOLÓGICAS EN TÉRMINOS DE NUEVAS  
VARIABLES: LA SEGUNDA CLASE DE CHERN Y  
LA CLASE DE EULER**

**CARLOS MEDEL PORTUGAL**

2017



# Capítulo 1

## Algoritmo de Dirac-Bergmann

En lo que respecta al formalismo de Dirac, en el presente capítulo se toma en cuenta el trabajo previamente hecho en [39] del cuál se extrae este capítulo debido a que lo utilizaremos en este trabajo de tesis.

### 1.1. Sistemas clásicos singulares

En este capítulo (reportado en [45]), y con la finalidad de comenzar el estudio de los sistemas singulares en una manera lo más simple posible, se desarrollará la teoría considerando inicialmente sistemas puntuales con un número finito de variables dinámicas. Y como se verá más adelante resulta un mero formalismo pasar a teoría de campo (sin olvidar las sutilezas que existen de pasar de un enfoque a otro).

El punto de partida para estudiar la dinámica de los sistemas singulares será el principio de Hamilton<sup>1</sup>, que en su forma lagrangiana establece que: De entre todas las trayectorias en el espacio de configuración, que a los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  pasan por dos configuraciones

---

<sup>1</sup>La idea de partir de un principio de acción tiene la gran ventaja de que se puede tener fácilmente teorías que estén de acuerdo con el principio de relatividad. A diferencia de lo que sucede con la función hamiltoniana, donde no es nada sencillo formular las condiciones para que la teoría sea relativista, o al menos no se conoce una manera sistemática de hacerlo. Por ejemplo, en el caso de la electrodinámica, cuando al proponer la acción

$$S[A] = \int_M \mathcal{L} dt = \int_M F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x,$$

se tuvo en cuenta que  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  es un invariante de Lorentz, lo cual hace que de inicio sea compatible con la relatividad espacial.

dadas, aquella que realmente sigue el sistema es la que hace que la integral

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q^n(t), \dot{q}^n(t)) dt \quad (1.1.1)$$

tenga un valor mínimo (un extremo o un valor estacionario)<sup>2</sup>, con  $q^n$  las coordenadas,  $\dot{q}^n = dq^n/dt$  sus respectivas velocidades y  $n = 1, \dots, N$ . Además aquí  $t$  es un parámetro de evolución, el cual, como es usual en la mecánica elemental, se identifica con el tiempo, pero en los capítulos siguientes se considerará como un parámetro de evolución (que se denotará como  $x_0$ ), y sólo al final de la evolución dinámica podrá ser identificado con el tiempo. Las condiciones bajo las cuales la integral anterior tiene un valor estacionario son las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0, \quad (1.1.2)$$

desarrollando,

$$\frac{\partial}{\partial q^{n'}} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) \frac{dq^{n'}}{dt} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{n'}} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) \frac{d\dot{q}^{n'}}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0,$$

lo cual puede reescribirse como

$$\ddot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} = \frac{\partial L}{\partial q^n} + \dot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial q^{n'}}. \quad (1.1.3)$$

De la ecuación anterior se ve que, si el determinante de la matriz dada por  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n}$ , es distinto de cero, la matriz es invertible, lo cual significa que todas las  $\ddot{q}^n$ 's quedan determinadas de manera única en términos de  $q^i$  y  $\dot{q}^i$ ; de otra manera, si el determinante es cero, la matriz no es invertible, sin embargo si tiene rango igual a  $R < N$ , implica que se van a poder despejar  $\ddot{q}^j$ 's con  $j = 1, \dots, R$ , tales que

$$\ddot{q}^j = \ddot{q}^j(q^j, \dot{q}^j, q^a, \dot{q}^a, \ddot{q}^a), \quad (1.1.4)$$

---

<sup>2</sup>Nótese que el principio de mínima acción es un caso particular del principio de Hamilton cuando la hamiltoniana,  $H$ , no depende explícitamente del tiempo (i.e. es una constante, aunque no necesariamente la energía total del sistema), que es equivalente a que la lagrangiana,  $L$ , no dependa explícitamente del tiempo; lo cual puede verse recordando que la acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i dq^i - H dt,$$

ya que al ser  $H$  constante no tendrá dependencia temporal explícita en la acción.

donde  $\ddot{q}^a$  son las aceleraciones que no se pudieron despejar de (1.1.3), por lo que en general las  $\ddot{q}^j$ 's con  $j = 1, \dots, N$ , quedan determinadas hasta  $q^{R+1}, \dots, q^N$  funciones independientes arbitrarias y sus respectivas velocidades y aceleraciones. Por lo que el caso de interés para el estudio de las teorías de norma es cuando  $\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} \right) = 0$ .

Por lo tanto, una lagrangiana  $L$  se llama singular si el determinante de la matriz hessiana es cero.<sup>3 4</sup>

## 1.2. Restricciones primarias

Para pasar del formalismo lagrangiano al hamiltoniano se definen los momentos canónicos<sup>5</sup>

$$p_n := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}. \quad (1.2.1)$$

---

<sup>3</sup>Esta afirmación es independiente de las coordenadas que se elijan, lo cual puede verse de la siguiente manera. Considérese una transformación  $q^i \rightarrow \hat{q}^i(q)$ , cuyo jacobiano  $J_i^j = \frac{\partial \hat{q}^j}{\partial q^i}$  no es singular, i.e. la transformación es invertible, lo que implica que  $\hat{q}^i = J_j^i \hat{q}^j$ , y si  $\hat{L}(\hat{q}, \hat{q}) = L(q(\hat{q}), \dot{q}(\hat{q}, \hat{q}))$ ,

$$\hat{H}_{ij} = \frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial \hat{q}^i \partial \hat{q}^j} = H_{kl} J_i^k J_j^l.$$

Por lo que, como  $\det J_i^j \neq 0$ , si  $\det H_{kl} = 0$ , entonces  $\det \hat{H}_{ij} = 0$ .

<sup>4</sup>Nótese que la afirmación también es cierta para  $L'$ , si

$$L' = L + \frac{\partial \Lambda(q)}{\partial q^i} \dot{q}^i.$$

De los cursos de Mecánica Clásica [46, 47], se sabe que dos lagrangianas,  $L$  y  $L'$ , llevan a las mismas ecuaciones de movimiento si

$$L' = L + \frac{\partial \Lambda(q^i, t)}{\partial t} = L + \frac{\partial \Lambda}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial \Lambda}{\partial t},$$

en el caso en que  $\Lambda$  no depende explícitamente del tiempo, el significado de la proposición se ve de manera inmediata.

<sup>5</sup>En mecánica elemental se consideran a las  $q$ 's y  $p$ 's como variables independientes, sin embargo una teoría más general pudiera tomar en cuenta que no lo sean, i.e. que exista una relación entre ellas de la forma  $\phi^m(q, p) = 0$ . Este es el caso del que se ocupa el algoritmo de Dirac-Bergmann para tratar sistemas singulares.

Por lo visto anteriormente, cuando  $\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} \right) = 0$ , existen funciones

$$\phi^m(q, p) = 0, \quad (1.2.2)$$

con  $m = 1, \dots, M$ , las cuales se llaman restricciones primarias.<sup>6</sup> Una característica de estas restricciones es que para su obtención no se requirió de las ecuaciones de movimiento y además cuando se sustituyen en las ecs. (1.2.1) en éstas, se obtiene una identidad.

Dicho de otra manera, el problema se convierte en encontrar la inversa de las ecs. (1.2.1), i.e. encontrar las  $\dot{q}$ 's en términos de las  $p$ 's. Y por el teorema de la función inversa, dicha inversa existe si

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}^1} & \cdots & \frac{\partial p_N}{\partial \dot{q}^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_1}{\partial \dot{q}^N} & \cdots & \frac{\partial p_N}{\partial \dot{q}^N} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \partial \dot{q}^1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \partial \dot{q}^N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^N \partial \dot{q}^1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^N \partial \dot{q}^N} \end{pmatrix} \neq 0. \quad (1.2.3)$$

En el caso en que el determinante es cero, implica que no todas las  $\dot{q}$ 's van a poder ser expresadas en términos de las  $q$ 's y las  $p$ 's, por lo que existen relaciones de la forma  $\phi^m(q, p) = 0$ , que de inmediato se ve que satisfacen la condición de que el determinante sea cero.

En particular, si se tienen  $M'$  ecuaciones independientes de la forma (1.2.2), implica que  $M'$   $p$ 's no se pueden escribir en términos de las  $\dot{q}$ 's, por lo que  $M'$  renglones son cero.

Así, el rango de la matriz  $\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} \right)$  es  $(N - M')$ .<sup>7</sup> Se considera, por simplicidad, que este rango es constante en el espacio  $(q, \dot{q})$ , o sea que el número de restricciones primarias independientes no varía, con lo cual la superficie de restricciones primarias es una subvariedad de dimensión  $2N - M'$  del espacio fase<sup>8</sup>.

No se supone que las restricciones (1.2.2) sean independientes entre sí, por lo que en general  $M' \leq M$ .

Una vez que encontramos las restricciones primarias, ¿qué nos garantiza que hemos encontrado todas?. Una forma consiste en calcular el rango de la matriz hessiana,  $N - M'$ ,

<sup>6</sup>Esta terminología se debe a Bergmann.

<sup>7</sup>La afirmación recíproca también es cierta.

<sup>8</sup>En el caso del péndulo simple, éste define una superficie unidimensional, una circunferencia, y físicamente se espera que la dimensión de esta superficie no varíe. Por lo que suena razonable desde el punto de vista físico y no sólo por simplicidad matemática que la dimensión de la superficie definida por las restricciones sea constante.

donde  $M'$  es el número de restricciones primarias independientes que se esperan. Nótese que las  $\phi^{m'}$ 's, restricciones independientes, no tienen por qué venir dadas directamente de (1.2.1) como las  $\phi^m$ 's, sino que pueden ser combinaciones lineales de estas últimas, por lo tanto conviene fijarse en los vectores nulos de la matriz hessiana, los cuales, por definición, forman una base de la nulidad de  $H_{\mu\nu}$ . Así, si  $V^\mu$  son los vectores nulos (con  $V_\alpha^\mu$  sus componentes), y  $\phi^\alpha$  son las restricciones primarias que se han encontrado. Las restricciones primarias independientes que se esperan, se pueden obtener mediante la contracción,

$$\Phi^\mu = V_\alpha^\mu \phi^\alpha. \quad (1.2.4)$$

Recordando que una condición necesaria y suficiente para que una transformación  $F$  tenga inversa, es que no existan dos puntos en el dominio que tengan la misma imagen en el codominio bajo dicha transformación, es fácil notar que la condición de no invertibilidad de las velocidades como función de las coordenadas y los momentos, implica que la inversa que va de las  $p$ 's a las  $q$ 's es, en general, multivaluada.

Con la finalidad de mantener la transformación univaluada será necesario introducir parámetros extra, los multiplicadores de Lagrange.

### 1.3. Ecuaciones débiles y fuertes

Aquí conviene introducir el concepto de igualdad débil, el cual será representado por el símbolo, " $\approx$ ". De manera elemental, dos funciones  $F$  y  $G$ , se dicen débilmente iguales, si lo son en la subvariedad definida por las restricciones primarias,  $\phi^m = 0$ , lo cual se escribe como,

$$F \approx G.$$

En particular,  $\phi^m \approx 0$ , i.e. el valor numérico de las restricciones es cero, aunque no se anulan idénticamente en todo el espacio fase, por lo que su paréntesis de Poisson no tiene por qué ser cero. Así, una regla nemotécnica para utilizar estas expresiones es primero realizar la operación del paréntesis y al final ocupar las restricciones. También puede verse que, en general, una función que es débilmente cero puede ser escrita como combinación lineal de restricciones, i.e.  $G \approx 0 \Leftrightarrow G = g_m \phi^m$ , con  $g_m$  alguna función del espacio fase.

Por otra parte, una ecuación que se satisface en todo el espacio fase y no sólo en la subvariedad  $\phi^m \approx 0$  se le llama fuerte, y se utiliza el símbolo usual de igualdad para representarla.

Una manera más formal de definir ecuaciones débiles y fuertes, es la siguiente: **Definición:** Una funcional  $F$  del espacio fase, es *débilmente* igual cero si,

$$F|_{\Sigma_1} = 0, \quad (1.3.1)$$

donde  $\Sigma_1$  es la subvariedad definida por las restricciones primarias (1.2.2). Por otra parte, se dice *fuertemente* igual a cero si,

$$F|_{\Sigma_1} = 0 \quad \text{y} \quad \left( \frac{\partial F}{\partial q^i}, \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) |_{\Sigma_1} = 0, \quad (1.3.2)$$

con  $\left( \frac{\partial F}{\partial q^i}, \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) |_{\Sigma_1} = 0$ , el conjunto formado por todas las derivadas parciales de  $F$  con respecto a las variables canónicas, evaluadas en  $\Sigma_1$ .

## 1.4. Condiciones sobre las funciones de restricción

Existen varias maneras de representar una superficie dada por (1.2.2). Sin embargo, es necesario imponer condiciones en la elección de las funciones  $\phi^m$ , que representan la superficie de restricciones primarias, para que sean consistentes con el formalismo hamiltoniano. En lo que sigue se llamará a éstas, *condiciones de regularidad*.

A manera de motivación, uno esperaría que dada una restricción de la forma  $f_m := \phi^m(q, p) \approx 0$ , cualquier función de esta, por ejemplo,  $f^2$ ,  $\sqrt{f}$ , etc. siga siendo cero en la subvariedad definida por  $\phi^m$  y por lo tanto sigan siendo restricciones. Sin embargo, para que estas funciones definan una subvariedad de dimensión  $M'$  constante, como ya se vió (??), es necesario que el rango de la matriz jacobiana,  $\left( \frac{\partial \phi^i}{\partial (q^j, p_j)} \right) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial (q^j, p_j)} \right)$  sea constante e igual a  $M'$ . Por ejemplo, para el caso en que se tenga  $(f^i)^2$ , estos elementos de matriz serán  $\frac{\partial (f^i)^2}{\partial (q^j, p_j)} = 2f^i \frac{\partial \phi^i}{\partial (q^j, p_j)} \approx 0$ , con lo que el rango de la matriz jacobiana ya no será  $M'$ . Por lo que resulta natural imponer la condición de que las restricciones,  $\phi^{m'}$ , al formar una subvariedad, el rango de  $\left( \frac{\partial \phi^i}{\partial (q^j, p_j)} \right)$  sea constante e igual a  $M'$ , con  $M'$  el número de restricciones primarias independientes. Además, también como consecuencia del hecho de que sea una subvariedad se tienen las siguientes condiciones alternativas:

La superficie de restricciones primarias puede ser cubierta por conjuntos abiertos, en cada uno de los cuales, las funciones  $\phi^m$  pueden “partirse” en dos grupos, el primero consistente de las restricciones independientes,  $\phi^{m'} = 0$  con  $(m' = 1, \dots, M')$ , tales que

$\left(\frac{\partial \phi^{m'}}{\partial (q^n, p_n)}\right)$  tiene rango  $M'$ , y las dependientes,  $\phi^{\bar{m}'} = 0$  con  $(\bar{m}' = M' + 1, \dots, M)$ , que se satisfacen como consecuencia de las primeras.

Dicho de otra manera, en la subvariedad  $2N - M'$  dimensional definida por las restricciones primarias, localmente se pueden elegir restricciones de tal manera que haya  $M'$  independientes y las demás  $(M - M')$  se satisfagan sólo como consecuencia de las primeras, con lo que, localmente, éstas pueden tomarse como las primeras  $M'$  coordenadas de un sistema regular de coordenadas. Con lo que además,  $d\phi^1 \wedge d\phi^2 \wedge \dots \wedge d\phi^{M'} \neq 0$ .

### 1.4.1. Analogía con el método de multiplicadores de Lagrange

Nótese que esto es muy similar a lo que se hace en el método de los multiplicadores de Lagrange tanto en el cálculo en varias variables, como en mecánica elemental, en este último, por ejemplo, a la función lagrangiana se le suma una combinación lineal de restricciones, cuyos coeficientes son los multiplicadores de Lagrange. Una diferencia importante es que en este último caso, las restricciones son funciones de las coordenadas del espacio de configuración (o fase de velocidades  $(q, \dot{q})$ , como también se le conoce). Mientras que en el caso que ocupa al presente capítulo las restricciones son funciones de las variables del espacio fase, por lo que ya no se puede sumar a la lagrangiana una combinación lineal de éstas, más bien ahora es a la hamiltoniana a la que se le suman, puesto que junto con las restricciones están definidas en el mismo espacio.

## 1.5. Hamiltoniana Canónica

Como es sabido de la Mecánica Clásica [46, 47], y como ya se mencionó al principio del capítulo, en un sistema regular se pasa de la formulación Lagrangiana a la Hamiltoniana mediante la transformada de Legendre. Sin embargo, cuando se tiene un sistema singular para realizar dicho paso se requerirán más ingredientes, los cuales son el propósito de este capítulo. A pesar de que ahora, en un sistema singular ya no se podrán despejar todas las velocidades en términos de las coordenadas y los momentos, podemos definir la Hamiltoniana canónica en la misma manera en que usualmente se define la Hamiltoniana, i.e,

$$H_C := \dot{q}^i p_i - L, \tag{1.5.1}$$

cuya variación es,

$$\begin{aligned}\delta H_C &= \dot{q}^i \delta p_i + \delta \dot{q}^i p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \\ &= \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i.\end{aligned}\quad (1.5.2)$$

Aquí, a diferencia de lo que sucede en mecánica elemental, donde  $H$  depende de las  $q$ 's y  $p$ 's y estas son variables independientes entre sí; en este caso y debido a las relaciones (1.2.2), éstas ya no son coordenadas independientes (en el espacio fase). Por lo que (1.5.1) sólo está bien definida en la subvariedad definida por las restricciones primarias. Debido a lo anterior, si

$$H_C \rightarrow H_C + u^m \phi^m, \quad (1.5.3)$$

el formalismo debe mantenerse invariante (puesto que cualquier combinación lineal de restricciones es débilmente cero).

Como ya se mencionó en la sección anterior, esto tiene también sentido si se le ve desde el punto de vista que se está estudiando un problema de extremos con restricciones. Cuando estas son funciones del espacio de configuración

$$\int L dt \rightarrow \int (L + \lambda_a \phi^a) dt, \quad (1.5.4)$$

pero cuando lo son del espacio fase, es de esperarse que

$$\int (\dot{q}^i p_i - H_C) dt \rightarrow \int (\dot{q}^i p_i - H_C - u_m \phi^m) dt. \quad (1.5.5)$$

Variando esta última acción,

$$\begin{aligned}0 &= \delta S = \int \left[ \dot{q}^i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial H_C}{\partial q^i} \delta q^i - \frac{\partial H_C}{\partial p_i} \delta p_i - u_m \left( \frac{\partial \phi^m}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial \phi^m}{\partial p_i} \delta p_i \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\partial u_m}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial u_m}{\partial p_i} \delta p_i \right) \phi^m \right] dt \\ &= \int \left[ \left( -\dot{p}_i - \frac{\partial H_C}{\partial q^i} - u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial q^i} \right) \delta q^i + \left( \dot{q}^i - \frac{\partial H_C}{\partial p_i} - u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right] dt\end{aligned}\quad (1.5.6)$$

lo anterior tomando en cuenta que  $\delta q^i|_{t_1}^{t_2} = 0$  y haciendo uso de las restricciones. Se obtienen las ecuaciones de movimiento,

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_C}{\partial q^i} - u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial q^i} \quad (1.5.7)$$

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H_C}{\partial p_i} + u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_i}. \quad (1.5.8)$$

Aquí hay que notar dos cosas, la primera es recordar que debido a que las  $u_m$  son funciones arbitrarias de las coordenadas del espacio fase, en general las ecuaciones de movimiento (1.5.7) y (1.5.8) no están determinadas de manera única, para esto se necesitará encontrar las  $u$ 's (multiplicadores de Lagrange). Al final del proceso (después de encontradas todas las restricciones de la teoría e introducido todos los multiplicadores de Lagrange necesarios), si hubo multiplicadores que no se pudieron encontrar, significa que el sistema está indeterminado hasta funciones arbitrarias, pero recordando que la Mecánica Clásica es una teoría determinista se podría pensar que quizá esto tenga alguna relación con la libertad de norma de la teoría, y en efecto, se verá que las restricciones asociadas a estos multiplicadores serán las generadoras de las transformaciones de norma de la teoría.

Si se define la transformada de Legendre del espacio de configuración  $(q, \dot{q})$  a la superficie  $\phi(q, p) = 0$  del espacio  $(q, p, u)$  dada por

$$\begin{aligned} q^n &= q^n, \\ p_n &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}(q, \dot{q}), \\ u_m &= u_m(q, \dot{q}), \end{aligned} \tag{1.5.9}$$

se ve que la transformación entre espacios de la misma dimensión  $2N$  es invertible, puesto que se tiene

$$\begin{aligned} q^n &= q^n, \\ \dot{q}^n &= \frac{\partial H_C}{\partial p_n} + u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_n}, \\ \phi(q, p) &= 0. \end{aligned} \tag{1.5.10}$$

De esta manera, las ecuaciones (1.5.9) implican (1.5.10) y viceversa. Así la invertibilidad de la transformación de Legendre cuando el determinante de la matriz hessiana es cero, se puede recuperar agregando variables extra, los multiplicadores de Lagrange  $u$ .

## 1.6. Hamiltoniana primaria y restricciones secundarias

A una hamiltoniana de la forma (1.5.3), por definición, se le llamará Hamiltoniano primario,

$$H_1 := H_C + u_m \phi^m, \tag{1.6.1}$$

el cual ya contiene, a diferencia de  $H_C$ , toda la información con la que hasta este momento se cuenta del sistema.

Nótese que las ecuaciones anteriores (1.5.8) y (1.5.7) se pueden reescribir de manera compacta en la forma<sup>9</sup>

$$\dot{g} = \{g, H_C\} + u_m \{g, \phi^m\}, \quad (1.6.2)$$

Con  $g = g(q, p)$  siendo una función arbitraria del espacio fase. En particular puede ser una de las coordenadas o los momentos, con lo que se recuperan las ecuaciones (1.5.8) y (1.5.7). Además, esta expresión puede reescribirse como

$$\dot{g} = \{g, H_C + u_m \phi^m\} := \{g, H_1\}, \quad (1.6.3)$$

cuya veracidad, se ve desarrollando

$$\dot{g} = \{g, H_C\} + \{g, u_m \phi^m\} \quad (1.6.4)$$

$$= \{g, H_C\} + u_m \{g, \phi^m\} + \{g, u_m\} \phi^m \quad (1.6.5)$$

$$= \{g, H_C\} + u_m \{g, \phi^m\}, \quad (1.6.6)$$

Lo anterior utilizando las propiedades del paréntesis de Poisson y ocupando las restricciones  $\dot{\phi}^m = 0$ .

Como ya se mencionó previamente, en forma un tanto heurística, se espera que las restricciones no varíen con el tiempo, i.e.  $\dot{\phi}^m \approx 0$ . Estas condiciones en lo siguiente se

---

<sup>9</sup>Donde  $\{, \}$  representa el Paréntesis de Poisson, el cual nos da la estructura simpléctica de la teoría. Sean  $f$  y  $g$  dos funciones arbitrarias del espacio fase, el Paréntesis de Poisson entre ellas se define como

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i}.$$

Y cumple las siguientes propiedades: ( $f, g$  y  $h$  funciones arbitrarias del espacio fase)

1. Antisimetría:  $\{f, g\} = -\{g, f\}$ .
2. Linealidad:  $\{c_1 f + c_2 g, h\} = c_1 \{f, h\} + c_2 \{g, h\}$ , con  $c_1$  y  $c_2$  constantes.
3. Existencia de elementos nulos:  $\{c, f\} = 0$ ,  $\forall c$  constante.
4. Identidad de Jacobi:  $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$ .
5. Regla del producto:  $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$ .
6. Paréntesis de Poisson fundamentales

$$\begin{aligned} \{q^i, q^k\} &= 0 = \{p_i, p_k\} \\ \{q^i, p_k\} &= \delta_k^i. \end{aligned}$$

llamarán *condiciones de consistencia*, que pueden ser vistas como un caso particular de (1.6.3) cuando  $g = \phi^m(q, p)$ , las cuales pueden escribirse de la siguiente manera,

$$\dot{\phi}^i = \{\phi^i, H_1\} = \{\phi^i, H_C\} + u_m \{\phi^i, \phi^m\} \approx 0. \quad (1.6.7)$$

La relación anterior se puede considerar como un sistema de ecuaciones lineales no-homogeneo para los multiplicadores de Lagrange  $u_m$ , y del comportamiento de este sistema dependerá si se pueden o no despejar todos o algunos multiplicadores. Definiendo,  $h^i = \{\phi^i, H_C\}$  y  $W$  la matriz cuyas entradas son  $W^{im} = \{\phi^i, \phi^m\}$ , este comportamiento se puede resumir en los siguientes casos:

**Caso I:**  $h \neq 0$  (no todas  $h^i \approx 0$ ) y  $\det W \neq 0$ .

Escribiendo el sistema de ecuaciones (1.6.7) en forma matricial,

$$h + Wu \approx 0, \quad (1.6.8)$$

con  $h$  y  $u$  los vectores columna cuyas entradas son  $h^i$  y  $u_m$  respectivamente. Debido a que  $\det W \neq 0$ ,  $W$  tiene inversa, por lo que todos los multiplicadores de Lagrange van a poder ser encontrados y estarán dados por

$$u = -W^{-1}h \quad \Rightarrow \quad u_m = -W_{mi}^{-1}\{\phi^i, H_C\}. \quad (1.6.9)$$

Así, para este caso, sutituyendo (1.6.9) en (1.6.7), las ecuaciones de movimiento se podrán escribir como

$$\dot{g} = \{g, H_C\} - \{g, \phi^m\}W_{mi}^{-1}\{\phi^i, H_C\} := \{g, H_C\}_D, \quad (1.6.10)$$

ésta es la definición del *paréntesis de Dirac*, del cual se hablará más en lo sucesivo.

Puesto que todos los multiplicadores de Lagrange pudieron ser encontrados, dadas las condiciones iniciales para un sistema, las ecuaciones (1.6.10) determinan una evolución única, como usualmente se presenta en Mecánica Clásica. Nótese también que esta expresión es análoga a la que aparece en Mecánica Clásica, sólo que aquí se sustituye al paréntesis de Poisson por el de Dirac.<sup>10</sup>

**Caso II:**  $h \neq 0$  y  $\det W = 0$ .

Retomando (1.6.8),  $h + Wu \approx 0$ , puesto que  $\det W = 0$ , sólo  $K$  multiplicadores de Lagrange van a poderse despejar, y  $M' - K$  (nulidad de  $W$ ) quedarán indeterminados<sup>11</sup>,

---

<sup>10</sup>En Mecánica Clásica elemental se tiene que la evolución temporal de alguna función, o traslación en el tiempo, está dada por el paréntesis de Poisson de esta función con el hamiltoniano (generador infinitesimal de traslaciones en el tiempo), y en el caso de que la función dependa explícitamente del tiempo se le agrega la derivada parcial con respecto a éste.

<sup>11</sup>Utilizando un razonamiento análogo al de la subsección 1.2.

por lo que la teoría seguirá conteniendo funciones arbitrarias, lo cual es el caso de interés en las teorías de norma.

Sean  $V^i$  los vectores nulos de  $W$  ( $i = 1, \dots, M' - K$ ) que, por definición, satisfacen

$$WV^i \approx 0, \quad (1.6.11)$$

con esto y (1.6.8) se tiene

$$hV^i \approx 0, \quad (1.6.12)$$

que en general son funciones del espacio fase independientes de los multiplicadores. Estas  $i$  relaciones implican que la teoría presenta  $i$  restricciones adicionales, las cuales se llamarán *restricciones secundarias*.

Este es quizá, el caso más importante, pues es el que aparece en las teorías de norma, por ejemplo<sup>12</sup>, Electrodinámica Clásica, Chern-Simons, Pontrijagin, Teorías tipo BF, Gravedad en 3 dimensiones, etc.

**Caso III:**  $h = 0$  y  $\det W \neq 0$ .

De la relación de (1.6.8) se tiene ahora el sistema homogéneo,

$$Wu \approx 0, \quad (1.6.13)$$

y, de los teoremas de sistemas de ecuaciones lineales, se tiene que sólo existe la solución trivial, es decir todos los multiplicadores de Lagrange son cero. Por lo que el sistema se reduce a una igualdad,  $0 \approx 0$ . Esta complicación se puede minorar, imponiendo que  $\det W \approx 0$  como restricción secundaria.

**Caso IV:**  $h = 0$  y  $\det W = 0$ .

En este caso, de la relación (1.6.8) se sigue teniendo, al igual que en III, que

$$Wu \approx 0, \quad (1.6.14)$$

pero ahora, debido a que  $\det W = 0$ , si el rango de  $W$  es igual a  $K$ ,  $M' - K$  multiplicadores van a poder ser débilmente determinados.

Nótese que el hecho de  $h$  sea cero puede venir de un hamiltoniano igual a cero, i.e.  $H_C = 0$ , con lo cual tendríamos problemas para definir la evolución temporal del sistema dado por (1.6.3). Sin embargo todas las teorías que se estudiarán en esta tesis caen en el segundo caso, y éstos últimos se incluyen sólo por completez.

Una vez agotada la información que proviene de las relaciones de consistencia sobre las restricciones primarias, si la teoría presenta restricciones secundarias, se tiene un caso

---

<sup>12</sup>Algunos de estos ejemplos se estudian en detalle en esta tesis.

similar al que se tenía en un inicio, i.e. un problema de extremos con restricciones sólo que estas restricciones viven en el espacio fase. Ahora se puede construir, de manera análoga a como se hizo con la hamiltoniana primaria, el hamiltoniano secundario,

$$H_2 := H_C + u_i \phi^i, \quad (1.6.15)$$

donde las  $\phi^i$  son todas las restricciones que se han encontrado hasta el momento (primarias y secundarias), ahora es este hamiltoniano el que contiene toda la información con la que hasta este momento se cuenta del sistema. Por lo que las ecuaciones de movimiento toman la forma,

$$\dot{g} = \{g, H_C + u_i \phi^i\} := \{g, H_2\}, \quad (1.6.16)$$

y de aquí se pueden calcular las relaciones de consistencia sobre las restricciones secundarias. Si después de realizado este proceso aparecen nuevas restricciones, que se llamarán terciarias, se repite otra vez todo el proceso, ahora se construye la hamiltoniana terciaria, y se vuelven a calcular las relaciones de consistencia sobre estas restricciones, y así se repite la misma historia hasta que dejen de aparecer restricciones. A todo el conjunto de restricciones secundarias, terciarias, ..., se les llamará simplemente secundarias en lo sucesivo.

## 1.7. Reductibilidad

Si las restricciones  $\phi^k$  no son todas independientes entre sí, es decir, unas se pueden obtener a partir de las otras mediante una transformación lineal, se dice que la teoría presenta *reductibilidad*, de otro modo se dice que se tiene el caso *irreducible*. Por ejemplo, en las dos teorías tipo BF que son el objeto principal de esta tesis, se presenta reductibilidad, en tal caso, se pueden omitir las restricciones que son dependientes, puesto que siempre se puede considerar que localmente se está trabajando con el caso irreducible. Nótese que la identificación de las restricciones independientes no siempre es una tarea fácil, o incluso podría ser globalmente imposible debido a obstrucciones topológicas.

## 1.8. Condiciones sobre los multiplicadores y hamiltoniana total

Una vez encontrado el conjunto completo de restricciones, se analizarán las condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange. De las condiciones de consistencia para *todas* las restricciones de tiene,

$$\dot{\phi}^\mu = \{\phi^\mu, H_T\} = \{\phi^\mu, H_C\} + u_\nu \{\phi^\mu, \phi^\nu\} \approx 0, \quad (1.8.1)$$

con  $\mu, \nu = 1, \dots, J$ , siendo  $J$  el número total de restricciones encontradas, y se define al *hamiltoniano total*,  $H_T$ , por la ecuación dada arriba. En unos momentos se regresará a este hamiltoniano.

Como ya se había mencionado antes, las ecuaciones (1.8.1) pueden ser vistas como un sistema de ecuaciones lineales para los multiplicadores,  $u_\nu$ ; y, como se sabe de álgebra lineal elemental, la solución general se puede escribir de la siguiente manera

$$u_\nu = U_\nu + V_\nu, \quad (1.8.2)$$

con  $U_\mu$  una solución particular a las ecuaciones inhomogéneas y  $V_\mu$  la solución más general del sistema homogéneo,

$$V_\nu\{\phi^\mu, \phi^\nu\} \approx 0. \quad (1.8.3)$$

Debido a que  $V_\nu$  es la solución más general, ésta a su vez puede ser escrita como combinación lineal de soluciones independientes al sistema homogéneo, por lo que  $V_\nu = v_i V_\nu^i$ , con  $i = 1, \dots, I$ , siendo  $I$  el número de soluciones independientes del sistema homogéneo. Con lo anterior,

$$u_\nu = U_\nu + v_i V_\nu^i. \quad (1.8.4)$$

Hay que considerar que las  $v^i$  son totalmente arbitrarias, así que las  $u_\nu$  pueden separarse en una parte que se fija mediante las condiciones de consistencia y otra que permanece indeterminada. Lo cual se reflejado en la hamiltoniana total, y a su vez en las ecuaciones de movimiento,

$$\begin{aligned} H_T &:= H_C + u_\nu \phi^\nu \\ &= H_C + (U_\nu + v_i V_\nu^i) \phi^\nu \\ &= H_C + U_\nu \phi^\nu + v_i V_\nu^i \phi^\nu \\ &:= H_C + U_\nu \phi^\nu + v_i \phi^i, \end{aligned} \quad (1.8.5)$$

con  $v_i V_\nu^i \phi^\nu := v_i \phi^i$ , que sustituido en las ecuaciones de movimiento,

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \{f, H_T\} = \{f, H_C + U_\nu \phi^\nu + v_i \phi^i\} \\ &:= \{f, H' + v_i \phi^i\} = \{f, H'\} + \{f, v_i \phi^i\} \\ &= \{f, H'\} + v_i \{f, \phi^i\} + \{f, v_i\} \phi^i = \{f, H'\} + v_i \{f, \phi^i\}, \end{aligned} \quad (1.8.6)$$

con  $H' := H_C + U_\nu \phi^\nu$  y utilizando las restricciones  $\phi^i \approx 0$ . Nótese que estas ecuaciones contienen  $I$  funciones arbitrarias, y por construcción son equivalentes a las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange (1.1.2); y como se verá más adelante  $H'$  es de primera clase, así como también las  $\phi^i$ .

El hecho de que aparezcan funciones arbitrarias, marca una diferencia sustancial con lo que se conocía de Mecánica Clásica elemental, donde para unas condiciones iniciales dadas se tiene una evolución única del sistema; aquí por el contrario dadas las condiciones iniciales ya no se tiene una evolución única, sino que está indeterminada hasta funciones arbitrarias. Esto se va a relacionar con la libertad de norma de la teoría, como se verá más adelante.

## 1.9. Restricciones de primera y segunda clase

Como ya se mencionó anteriormente, la diferencia entre las restricciones primarias y secundarias es más bien un tanto irrelevante y se tratan al mismo nivel. Sin embargo, resulta fundamental separar las restricciones entre de primera y segunda clase, puesto que las primeras serán las generadoras de las transformaciones de norma (un elemento fundamental en todo este análisis) y las segundas permitirán construir el Paréntesis de Dirac, que en las teorías que presentan este tipo restricciones vendrá a sustituir al paréntesis de Poisson a la hora de calcular la evolución dinámica del sistema.

**Definición:** Sea  $F$  una funcional del espacio fase, se dice que es de *primera clase* si su paréntesis de Poisson con todas las restricciones es débilmente cero,

$$\{F, \phi^\mu\} \approx 0, \quad (1.9.1)$$

en otro caso, se dice que  $F$  es de *segunda clase*.<sup>13</sup>

Si  $F$  es de primera clase, entonces  $\{F, \phi^\mu\}$  tiene que ser fuertemente igual a alguna combinación lineal de  $\phi$ 's, debido a que cualquier funcional que es débilmente cero en el presente análisis es fuertemente igual a una combinación lineal de las  $\phi$ 's puesto que estas son las únicas cantidades independientes que son débilmente cero. Así,

$$\{F, \phi^\mu\} = f^\mu{}_\rho \phi^\rho. \quad (1.9.2)$$

**Teorema:** El paréntesis de Poisson de dos cantidades de primera clase, es también de primera clase.

*Prueba:* Sean  $\{F, \phi^\mu\} = f^\mu{}_\rho \phi^\rho$  y  $\{S, \phi^\mu\} = s^\mu{}_\rho \phi^\rho$ , con  $F$  y  $S$  de primera clase. Considé-

---

<sup>13</sup>Basta que  $F$  no sea débilmente cero con una restricción para que sea de segunda clase.

rese  $\{\{F, S\}, \phi^\mu\}$ , que utilizando la identidad de Jacobi,

$$\begin{aligned}
\{\{F, S\}, \phi^\mu\} &= \{\{F, \phi^\mu\}, S\} - \{\{S, \phi^\mu\}, F\} \\
&= \{f^\mu{}_\rho \phi^\rho, S\} - \{s^\mu{}_\rho \phi^\rho, F\} \\
&= f^\mu{}_\rho \{\phi^\rho, S\} + \{f^\mu{}_\rho, S\} \phi^\rho - s^\mu{}_\rho \{\phi^\rho, F\} - \{s^\mu{}_\rho, F\} \phi^\rho \\
&= (f^\mu{}_\rho s^\rho{}_\alpha - s^\mu{}_\rho f^\rho{}_\alpha) \phi^\alpha + (\{f^\mu{}_\rho, S\} \phi^\rho - \{s^\mu{}_\rho, F\} \phi^\rho) \approx 0. \tag{1.9.3}
\end{aligned}$$

Como primera aplicación de este concepto, nótese que tanto  $H'$  como  $\phi^\alpha$  son de primera clase, cuya veracidad puede verse de la siguiente manera. Para ver que  $\phi^i$  es de primera clase, hay que recordar que  $v_i V_\nu^i \phi^\nu := v_i \phi^i$ , con lo que el paréntesis es

$$\begin{aligned}
\{\phi^i, \phi^\mu\} &= \{V_\nu^i \phi^\nu, \phi^\mu\} = V_\nu^i \{\phi^\nu, \phi^\mu\} + \{V_\nu^i, \phi^\mu\} \phi^\nu \\
&= V_\nu^i \{\phi^\nu, \phi^\mu\}, \tag{1.9.4}
\end{aligned}$$

y debido a que  $V_\nu^i$  es solución al sistema homogéneo de ecuaciones para los multiplicadores, i.e.  $V_\nu^i \{\phi^\nu, \phi^\mu\} \approx 0$ , se llega a la conclusión,

$$\{\phi^i, \phi^\mu\} \approx 0; \tag{1.9.5}$$

por lo tanto las  $\phi^i$  son restricciones de primera clase.

Para ver que  $H'$  es de primera clase, se considera su paréntesis de Poisson con todas las restricciones,

$$\{H', \phi^\mu\} = \{H_C + U^\nu \phi^\nu, \phi^\mu\} = \{H_C, \phi^\mu\} + U_\nu \{\phi^\nu, \phi^\mu\} + \{U_\nu, \phi^\mu\} \phi^\nu, \tag{1.9.6}$$

sumándole un cero débil, ecuación (1.9.5),

$$\begin{aligned}
\{H', \phi^\mu\} &= \{H_C, \phi^\mu\} + U_\nu \{\phi^\nu, \phi^\mu\} + v_i \{\phi^i, \phi^\mu\} \\
&= \{H_C + U_\nu \phi^\nu + v_i \phi^i, \phi^\mu\} \\
&= \{H_T, \phi^\mu\} = -\{\phi^\mu, H_T\} \approx 0. \tag{1.9.7}
\end{aligned}$$

Esta última igualdad se satisface por condiciones de regularidad.

También puede verse que las  $\phi^i$  forman un conjunto completo de restricciones de primera clase, por lo que cualquier restricción de primera clase es una combinación lineal de las  $\phi^i$  (con coeficientes que son funciones del espacio fase), módulo términos cuadráticos en las restricciones de segunda clase. Si cualquier restricción primaria puede escribirse en

esta forma, su paréntesis con todas las restricciones debe ser débilmente cero, lo cual se verifica fácilmente,

$$\{v_i\phi^i + w_{\mu\nu}\phi^\mu\phi^\nu, \phi^\rho\} = w_{\mu\nu}(\phi^\mu\{\phi^\nu, \phi^\rho\} + \{\phi^\mu, \phi^\rho\}\phi^\nu) \approx 0, \quad (1.9.8)$$

donde  $\phi^i$  es de primera clase,  $\phi^\nu, \phi^\mu$  de segunda clase,  $w_{\mu\nu}$  coeficientes del espacio fase, y utilizando al final las restricciones.

Cabe mencionar que la descomposición de  $H_T$  en  $H'$  y  $\phi^i$  no es única, puesto que  $U_\mu$  es cualquier solución del sistema inhomogéneo. Esto significa que si renombramos las  $v_i$ , se puede admitir en  $H'$  cualquier combinación lineal de las  $\phi^i$  sin alterar la hamiltoniana total.

### 1.9.1. Álgebra de restricciones

Una vez separada las restricciones de primera y de segunda clase, al construir el álgebra, si  $\gamma_a$  es constricción de primera clase y  $\chi_b$  es constricción de segunda clase, uno obtiene

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = C_{ab}^c \gamma_c + T_{ab}^{\alpha\beta} \chi_\alpha \chi_\beta, \quad (1.9.9)$$

$$\{\gamma_a, \chi_\alpha\} = C_{a\alpha}^b \gamma_b + C_{a\alpha}^{\beta} \chi_\beta, \quad (1.9.10)$$

donde  $C_{ab}^c$  y  $T_{ab}^{\alpha\beta}$  son las funciones de estructura. Efectuando el álgebra de constricciones de alguna teoría, debe tener la forma de (1.9.9) y (1.9.10), donde se podrán encontrar el valor de las funciones de estructura.

### 1.9.2. Separación de las restricciones de primera y segunda clase

En esta sección ya se dió la definición de restricciones de primera y segunda clase. Sin embargo, similarmente a lo que sucedió con las restricciones primarias, las restricciones de primera clase no tienen que ser directamente algunas de las restricciones primarias o secundarias; en general serán combinaciones de éstas; y para encontrarlas será necesario encontrar los vectores nulos de la matriz cuyas entradas son todos los paréntesis de Poisson entre las restricciones, para finalmente contraerlos con las restricciones y así obtener las restricciones de primera clase correctas (i.e. todas las restricciones de primera clase independientes entre sí de la teoría).

Sea  $W'$  la matriz  $J \times J$  cuyas entradas son,

$$W'^{\alpha\beta} = \{\phi^\alpha, \phi^\beta\}, \quad (1.9.11)$$

donde  $\phi^\alpha$  son todas las restricciones primarias y secundarias encontradas y  $J$  es el número total de éstas.

**Proposición.** Si  $\det W' \approx 0$ , entonces hay  $R'$  restricciones de primera clase (con  $R'$  el rango de la matrix  $W'$ ).

*Prueba.* Si  $\det W' = 0$  (en la subvariedad definida por las restricciones), entonces  $\text{Rango} W' = R' < J$  y la nulidad  $(J - R') \neq 0$ ; con lo que se pueden encontrar  $(J - R')$  vectores nulos,  $\omega^i$  con  $(i = 1, \dots, J - R')$ , tales que

$$\omega_\alpha^i \{\phi^\alpha, \phi^\beta\} \approx 0, \quad (1.9.12)$$

esto por la misma definición de los vectores nulos, con lo que se tiene,

$$\{\omega_\alpha^i \phi^\alpha, \phi^\beta\} \approx 0, \quad \forall \phi^\beta \in \Phi, \quad (1.9.13)$$

con  $\Phi = \{\phi^\beta \mid \phi^\beta \text{ es una restricción primaria o secundaria}\}$ . De esta manera puede verse que las restricciones  $\omega_\alpha^i \phi^\alpha$  forman un conjunto de  $(J - R')$  restricciones de primera clase (puesto que su paréntesis de Poisson es cero con todas las restricciones). Así, las restricciones de primera clase de la teoría son,

$$\gamma^i := \omega_\alpha^i \phi^\alpha. \quad (1.9.14)$$

Con lo anterior no sólo queda probada la proposición, sino que se muestra una manera sistemática de encontrar las restricciones de primera clase de la teoría, y de paso también se prueba lo que se decía en un principio, i.e. que es necesario calcular los vectores nulos de  $W'$ . Un ejemplo sencillo de esto se tiene en Chern-Simons Abeliano.

Debido a que la separación relevante para las restricciones es aquella que las distingue entre de primera y segunda clase, conviene introducir una notación que tome en cuenta este hecho. Así, las restricciones de primera clase se denotarán por la letra griega  $\gamma$  y las de segunda clase por  $\chi$ .

Cabe mencionar que el número de restricciones de segunda clase esperadas nos la da el rango de la matriz  $W'$ , la cual una vez hecha la separación toma la forma,

$$\begin{aligned} W' &= \begin{matrix} & \phi^0(y) & \phi^1(y) & \cdots & \phi^J(y) \\ \phi^0(x) & \left( \begin{array}{cccc} \{\phi^0, \phi^0\} & \{\phi^0, \phi^1\} & \cdots & \{\phi^0, \phi^J\} \\ \{\phi^1, \phi^0\} & \{\phi^1, \phi^1\} & \cdots & \{\phi^1, \phi^J\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \{\phi^2, \phi^J\} \\ \phi^J(x) & \{\phi^J, \phi^0\} & \{\phi^J, \phi^1\} & \cdots & \{\psi, \phi^J\} \end{array} \right) \end{matrix} \\ &\rightarrow \begin{matrix} & \gamma^i(y) & \chi^\alpha(y) \\ \gamma^j(x) & \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & C^{\alpha\beta} \end{array} \right), \end{matrix} \end{aligned} \quad (1.9.15)$$

con  $C^{\alpha\beta}$  una matriz  $R' \times R'$  antisimétrica e invertible sobre la superficie de restricciones.<sup>14</sup> Nótese que el número de restricciones de segunda clase, que coincide con  $\text{Rango}W' = R'$ , debe ser par.<sup>15</sup>

## 1.10. Transformaciones de norma

Con lo visto hasta el momento cabe hacerse la pregunta: ¿Qué significado físico tiene el hecho de que las ecuaciones de movimiento contengan funciones arbitrarias?<sup>16</sup>

Uno sabe de Mecánica Clásica elemental que dadas las condiciones iniciales para un sistema dado, las ecuaciones de movimiento determinan de manera única el estado del sistema para tiempos posteriores. Sin embargo, aquí se encuentra una situación muy diferente, pues ahora dadas las condiciones iniciales del sistema<sup>17</sup> (el estado físico inicial) la evolución de éste, dada por las ecuaciones de movimiento, no está determinada de forma única debido a la presencia de estas funciones arbitrarias (los multiplicadores de Lagrange). Pero la Mecánica Clásica es una teoría determinista, por lo que dos estados que comparten las mismas condiciones iniciales no deben de ser físicamente diferentes, se dirá que estos sistemas son equivalentes de norma.

Siguiendo esta idea, considérense dos estados con las mismas condiciones iniciales al tiempo  $t_0$ , y que su evolución dinámica difiere en el valor de los multiplicadores de Lagrange. Utilizando el desarrollo en serie de Taylor a primer orden para la variable

<sup>14</sup>El que  $C^{\alpha\beta}$  sea una matriz invertible se ve directamente a partir del hecho de que tiene rango  $R'$ , puesto que el rango de una matriz da el número de renglones independientes, o dicho de otra manera, la matriz más grande que se puede construir a partir de la primera y cuyo determinante es distinto de cero. Esta última condición da la invertibilidad de la matriz.

<sup>15</sup>Dado que  $C$  es una matriz  $R' \times R'$ , con  $R'$  el número de restricciones de segunda clase, si  $R'$  fuese impar implicaría que  $\det C = 0$  (que contradice que  $R'$  sea el rango de  $W'$ ).

Prueba: Como  $C$  es antisimétrica y utilizando las propiedades del determinante,

$$\det C = \det(C^t) = \det(-C) = (-1)^{R'} \det C,$$

en el caso que  $R'$  fuese impar,

$$\det C = -\det C \Rightarrow \det C = 0.$$

<sup>16</sup>La definición general de un sistema invariante de norma, y que resulta ser la más útil para entender los sistemas de norma se debe a Dirac.

<sup>17</sup>Sólo se necesita dar los valores iniciales de  $q$ 's y  $p$ 's, los valores de  $v$  se mantienen indeterminados, una forma de verlo es que el estado físico inicial está determinado por las variables canónicas, no por  $v$ .

canónica  $F$ , en cada uno de los dos estados,

$$\begin{aligned} F(t) &= F(t_0) + \dot{F} \delta t \\ &= F(t_0) + (\{F, H'\} + v_i \{F, \phi^i\}) \delta t \end{aligned} \quad (1.10.1)$$

$$\begin{aligned} F'(t) &= F(t_0) + \dot{F}' \delta t \\ &= F(t_0) + (\{F, H'\} + v'_i \{F, \phi^i\}) \delta t, \end{aligned} \quad (1.10.2)$$

$$(1.10.3)$$

y restando estas ecuaciones se tiene,

$$\delta F(t) = F(t) - F'(t) = (v_i - v'_i) \{F, \phi^i\} \delta t := \delta v_i \{F, \phi^i\}, \quad (1.10.4)$$

con  $\delta v_i := (v_i - v'_i) \delta t$ . Con esto se puede ver que el estado físico del sistema se mantiene inalterado, por hipótesis, bajo estas transformaciones aplicadas a las variables canónicas. Este cambio en las variables canónicas consiste en aplicar una transformación de contacto infinitesimal con una función generadora  $\delta v_i \phi^i$ . Con esto se llega a la conclusión de que las restricciones de primera clase son *las funciones generadoras de transformaciones infinitesimales de contacto, que corresponden a cambios en las  $q$ 's y  $p$ 's que no afectan al estado físico del sistema.*<sup>18</sup>

Se puede ir más lejos y probar lo siguiente,

1. El paréntesis de Poisson  $\{\phi^i, \phi^j\}$  de cualesquiera dos restricciones de primera clase genera una transformación de norma<sup>19</sup>.

---

<sup>18</sup>Para abreviar, en lo siguiente se referirá a las restricciones de primera clase como las generadoras de transformaciones de norma.

<sup>19</sup>La veracidad de esta afirmación puede verse aplicando cuatro veces de manera sucesiva una transformación de norma (1.10.4), de la siguiente manera

$$F_1 := F + \epsilon_i \{F, \phi^i\},$$

$$F_2 := F_1 + \eta_j \{F_1, \phi^j\},$$

$$F_3 := F_2 - \epsilon_k \{F_2, \phi^k\},$$

$$F_4 := F_3 - \eta_l \{F_3, \phi^l\},$$

y en efecto, puede verse que (despreciando términos cuadráticos en  $\epsilon$  y  $\eta$ ),

$$F_4 := F + \eta_j \epsilon_i \{F, \{\phi^i, \phi^j\}\},$$

y al ser  $\epsilon$  y  $\eta$  parámetros arbitrarios, se ve que en efecto se tiene una transformación de norma de la forma 1.10.4.

2. El paréntesis de Poisson  $\{\phi^i, H'\}$  de cualquier restricción primaria de primera clase con la hamiltoniana de primera clase  $H'$  genera una transformación de norma.<sup>20</sup>

Utilizando las dos afirmaciones anteriores se puede ver que, si a una variable canónica  $F$  se le aplica una transformación de la forma (1.10.4) y posteriormente se evoluciona en el tiempo con  $H_T$ ,

$$F' := F + \eta_i \{F, \phi^i\} \rightarrow (F')_1 := \{F', H_T\}, \quad (1.10.5)$$

y luego se le aplican las mismas transformaciones en orden inverso,

$$F_1 := \{F, H_T\} \rightarrow (F_1)' := F_1 + \eta_i \{F_1, \phi^i\}; \quad (1.10.6)$$

la diferencia

$$(F')_1 - (F_1)' = \eta_i \{F, \{\phi^i, H'\}\} + \eta_i v_j \{F, \{\phi^i, \phi^j\}\}, \quad (1.10.7)$$

es también una transformación de norma que deja inalterado el estado físico del sistema.

## 1.11. Grados de libertad

Hasta este punto ya tenemos todos los ingredientes necesarios para proceder al conteo de grados de libertad. Antes de proceder al cálculo definamos este concepto.

**Definición:** Los grados de libertad de un sistema, son el número de variables físicas independientes necesarias para describir al sistema.

---

<sup>20</sup>Prueba:

Sea  $F$  una variable canónica. Si se le aplica una transformación de norma (1.10.4) y posteriormente se evoluciona con  $H'$ , i.e.,

$$F' := F + \eta_i \{F, \phi^i\} \rightarrow (F')_1 := \{F', H'\}.$$

Y a la misma variable  $F$  se le aplican las transformaciones en orden contrario,

$$F_1 := \{F, H'\} \rightarrow (F_1)' := F_1 + \eta_i \{F_1, \phi^i\}.$$

y se toma la diferencia, despreciando términos cuadráticos en  $\eta$  y  $\epsilon$ , se tiene,

$$(F')_1 - (F_1)' = \eta_i \{F, \{\phi^i, H'\}\},$$

la cual es una transformación de la forma (1.10.4) con generador  $\{\phi^i, H'\}$ , con lo que queda probada la afirmación. Lo anterior significa que la diferencia en el orden en que se aplican las transformaciones nos da una transformación que no altera el estado físico del sistema.

Recordando la manera en como se calculan los grados de libertad en Mecánica Elemental, el número de coordenadas generalizadas menos el número de ecuaciones independientes de las restricciones. Aquí se puede hacer una extrapolación de este hecho, y ver que suena razonable que el número de grados de libertad sea

$$GL = \frac{1}{2} \left[ \left( \begin{array}{c} \text{Número total de} \\ \text{variables canónicas} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Número de restricciones de} \\ \text{segunda clase originales} \end{array} \right) - 2 \times \left( \begin{array}{c} \text{Número de restricciones} \\ \text{de primera clase} \end{array} \right) \right] \quad (1.11.1)$$

Esto significa que el número de grados de libertad está dado por *todas* las variables canónicas independientes,  $q$ 's y  $p$ 's, menos todas las restricciones. Hay que considerar dos cosas, una es que el  $1/2$  aparece para compensar el hecho de que usualmente los grados de libertad se refieren a las coordenadas generalizadas,  $q$ 's, y al considerar todas las variables canónicas estamos considerando en realidad el doble. Y el dos que acompaña a las restricciones de primera clase, es debido a su doble carácter, tanto de restricción, como de generadores de transformaciones de norma. Dicho de otra manera la teoría presenta restricciones y transformaciones de norma, que pueden verse como condiciones adicionales que cumple la teoría.

## 1.12. La acción y la hamiltoniana extendidas

Ahora bien, la hamiltoniana total, tal como se definió anteriormente, ya toma en cuenta todas las restricciones (primarias y secundarias), sin embargo, en ésta todavía no se hace una distinción entre restricciones de primera y segunda clase, que como ya se dijo no necesariamente vienen dadas directamente de las restricciones primarias y secundarias. Se puede pensar en una *hamiltoniana extendida* que ya considere esta separación entre las restricciones y además pueda tomar en cuenta transformaciones de norma, la cual está dada por,

$$H_E = H' + v_a \gamma^a, \quad (1.12.1)$$

donde  $H'$  se define de la misma manera que antes, sólo que ahora se hace evidente que,

$$H' = H_C + U_j \chi^j, \quad (1.12.2)$$

lo cual se podía haber intuído por la forma en que se construyó originalmente  $H'$ .

Cabe mencionar que es esta  $H_E$  la que da la evolución dinámica del sistema, mediante las ecuaciones de movimiento,

$$\dot{F} := \{F, H_E\}; \quad (1.12.3)$$

y para las variables dinámicas invariante de norma (i.e. variables tales que su paréntesis de Poisson con los generadores de norma  $\gamma^a$  es débilmente cero), la evolución dinámica dada por  $H'$ ,  $H_1$  y  $H_E$  es la misma. Para cualesquiera otras variables es necesario usar  $H_E$ , que considera toda la libertad de norma del sistema.

Además estas ecuaciones, (1.12.3), si bien son matemáticamente distintas a (1.1.2), son por construcción, físicamente equivalentes.

Debe mencionarse que la necesidad de una hamiltoniana extendida no es algo que se deduzca de la formulación lagrangiana, pues es la hamiltoniana primaria la que genera las ecuaciones de movimiento (1.5.7) y (1.5.8) que son equivalentes, por construcción a las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.1.2); además de que  $H_E$  contiene más funciones arbitrarias que las que contiene  $H_1$ . La introducción de esta  $H_E$  es una nueva característica del marco hamiltoniano para poder incluir de manera manifiesta la invarianza de norma. Nótese que las ecuaciones (1.12.3) se pueden obtener a partir de la acción,

$$S_E[q, p, v] = \int (p_n \dot{q}^n - H' - v_a \gamma^a) dt = \int (p_n \dot{q}^n - H_E) dt, \quad (1.12.4)$$

la cual se llamará *acción extendida* que, a diferencia de  $S$  dada por (1.5.5), ya contiene *toda* la información del sistema, i.e. ya considera la separación de restricciones entre de primera y segunda clase, ya contiene la información de la libertad de norma, y da como ecuaciones de movimiento

$$\dot{F} = \{F, H_E\} \quad (1.12.5)$$

y

$$\phi^a = \gamma^a \approx 0. \quad (1.12.6)$$

### 1.13. Paréntesis de Dirac

Debido a que la matriz  $C^{\alpha\beta}$  es invertible, existe su inversa  $C_{\alpha\beta}$  tal que

$$C^{\alpha\beta} C_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha. \quad (1.13.1)$$

Así, el *Paréntesis de Dirac* se define como,

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \{F, \chi^\alpha\} C_{\alpha\beta} \{\chi^\beta, G\}, \quad (1.13.2)$$

con  $\{, \}$  el paréntesis de Poisson. Y satisface las siguientes propiedades:

$$\{F, G\}_D = -\{G, F\}_D \quad (1.13.3)$$

$$\{F, GR\}_D = \{F, G\}_D R + G\{F, R\}_D \quad (1.13.4)$$

$$\{\{F, G\}_D, R\}_D + \{\{R, F\}_D, G\}_D + \{\{G, R\}_D, F\}_D = 0 \quad (1.13.5)$$

$$\{\chi^\alpha, F\}_D = 0, \quad \forall F \quad (1.13.6)$$

$$\{F, G\}_D \approx \{F, G\}, \quad G \text{ de primera clase y } F \text{ arbitraria.} \quad (1.13.7)$$

$$\{R\{F, G\}_D\}_D \approx \{R\{F, G\}\}. \quad (1.13.8)$$

La demostración de las propiedades anteriores es directa a partir de la definición del Paréntesis de Dirac, excepto en el caso de la identidad de Jacobi, pero su demostración no se tratará aquí.

Nótese que las ecuaciones de movimiento (1.12.5), debido a que  $H_E$  es de primera clase y (1.13.7), se pueden reescribir como,

$$\dot{F} = \{F, H_E\}_D, \quad (1.13.9)$$

y por los mismos argumentos, el efecto de una transformación de norma se puede escribir como,

$$\{F, \gamma^a\} \approx \{F, \gamma^a\}_D, \quad \forall F. \quad (1.13.10)$$

El panorama general hasta este momento es el siguiente. El paréntesis de Poisson, después de realizar la separación de las restricciones entre de primera y segunda clase, se generalizó al paréntesis de Dirac, en términos de la cual se pueden escribir las ecuaciones más relevantes del formalismo (como las ecuaciones (1.13.9) y (1.13.10)). Las restricciones de segunda clase se convierten en identidades para algunas variables canónicas en términos de otras. Además, es esta estructura del paréntesis de Dirac, la que, en analogía con lo que se hace usualmente, se promoverá a conmutador a la hora de intentar cuantizar la teoría.

En general, no es una tarea fácil construir este paréntesis, puesto que se necesita encontrar la inversa de la matriz  $C^{\alpha\beta}$ .

## 1.14. Observables

Una *observable* (clásica) es, por definición, una función que es invariante de norma en la superficie de restricciones, o dicho de otra forma, una observable es una función,  $\mathcal{O}$ , cuyo paréntesis de Dirac es débilmente cero con las restricciones de primera clase

$$\{\mathcal{O}, \gamma^a\}_D \approx 0. \quad (1.14.1)$$

Si bien a estas funciones  $\mathcal{O}$  se les llamó observables, el dar un significado experimental de éstas va más allá de los alcances de la presente tesis. Finalmente, cabe mencionar que las observables clásicas no necesariamente lo serán en el caso cuántico.



## Capítulo 2

# Formalismo de Faddeev-Jackiw

Como pudimos observar en el capítulo anterior la clasificación de las constricciones en primera y segunda clase es necesaria, lo cual no siempre es fácil realizar. En este contexto, FJ [37] reportaron un método más “económico” el cual nos ayuda a desarrollar una descripción del sistema de manera simpléctica.

El método de FJ está basado en Lagrangianos de primer orden, también llamados Lagrangianos no estándares en la terminología usual debido a que sus ecuaciones de movimiento no involucran las aceleraciones. La esencia del formalismo de FJ es construir una matriz llamada matriz simpléctica, cuya construcción se realiza con las llamadas variables simplécticas que son identificadas a partir del conjunto de variables dinámicas del sistema. Si la matriz simpléctica es invertible, entonces es posible identificar los paréntesis generalizados de FJ. Si la matriz no es invertible, entonces para el caso de sistemas singulares pasaremos a fijar la norma. Una vez que la matriz simpléctica sea invertible, se podrán identificar los paréntesis de FJ y se puede mostrar que tanto los paréntesis de Dirac como los de FJ coinciden.

Cabe mencionar que en este método, no necesariamente se obtienen las mismas constricciones que se encuentran en el Formalismo de Dirac, y no es necesario su clasificación, i.e., todas las restricciones están al mismo nivel, por tanto el conteo de grados de libertad se efectúa tomando el número total de variables dinámicas y restamos el número de constricciones independientes de la teoría. Aquí es donde se hace notar lo “económico” del formalismo [53].

A continuación, presentaremos el formalismo simpléctico de FJ para sistemas sin constricciones y con constricciones [54, 38].

## 2.1. Formalismo simpléctico

### 2.1.1. Dos-Forma no Singular

Consideremos una variedad  $n$ -dimensional en el espacio de configuración descrita por las coordenadas  $\xi_i, i = 1, \dots, n$ . Para los sistemas de primer orden, escribimos su Lagrangiano lineal en sus velocidades como

$$\mathcal{L}^{(0)}(\xi_i^{(0)}, \dot{\xi}_i^{(0)}) = a_i^{(0)}(\xi^{(0)})\dot{\xi}_i^{(0)} - V^{(0)}(\xi^{(0)}), \quad (2.1.1)$$

donde  $a_i^{(0)}$  es la uno-forma canónica y  $V^{(0)}$  es llamado el potencial simpléctico. Se puede construir el vector uno-forma como

$$\vec{a}^{(0)} = \left( a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_3^{(0)}, \dots, a_n^{(0)} \right), \quad (2.1.2)$$

donde la entrada  $a_i^{(0)}$  corresponde al término que acompaña a las variables  $\dot{\xi}_i^{(0)}$ . Así, identificaremos a las variables simplécticas con el siguiente vector

$$\vec{\xi}^{(0)} = \left( \xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)} \right). \quad (2.1.3)$$

Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para el Lagrangiano (2.1.1) toman la forma

$$f_{ij}^{(0)}\dot{\xi}_j^{(0)} = \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi_i^{(0)}}, \quad (2.1.4)$$

donde  $f_{ij}^{(0)}$  llamada la dos-forma se puede encontrar a partir de (2.1.1) y tiene la siguiente forma

$$f_{ij}^{(0)} = \frac{\partial a_j^{(0)}}{\partial \xi_i^{(0)}} - \frac{\partial a_i^{(0)}}{\partial \xi_j^{(0)}}. \quad (2.1.5)$$

La solución de (2.1.4) está asociada a que la matriz  $f_{ij}^{(0)}$  sea invertible. Si  $(f_{ij}^{(0)})^{-1}$  existe, entonces podemos escribir

$$\dot{\xi}_j^{(0)} = (f_{ij}^{(0)})^{-1} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi_i^{(0)}}. \quad (2.1.6)$$

Cuando el potencial  $V^{(0)}$  coincide con el Hamiltoniano, entonces la ecuación (2.1.6) también puede ser identificada con las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\xi}_j^{(0)} = \{V^{(0)}, \xi_j^{(0)}\} = \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi_i^{(0)}} \{ \xi_i^{(0)}, \xi_j^{(0)} \}. \quad (2.1.7)$$

Comparando (2.1.6) y (2.1.7) podemos encontrar que

$$\{\xi_i^{(0)}, \xi_j^{(0)}\} = (f_{ij}^{(0)})^{-1}. \quad (2.1.8)$$

El lado izquierdo de (2.1.8) corresponde a los paréntesis fundamentales de FJ, mientras que el lado derecho de (2.1.8) son las entradas de la matriz inversa de la dos-forma  $f_{ij}^{(0)}$ . Esto quiere decir que podemos identificar los paréntesis fundamentales de FJ con las entradas de la matriz inversa de  $f_{ij}^{(0)}$ .

### 2.1.2. Dos-Forma Singular

Si la matriz  $f_{ij}^{(0)}$  no es invertible, es decir, es singular, entonces  $f_{ij}^{(0)}$  tiene  $m$  ( $m < n$ ) modos-cero (o vectores nulos)  $v_\alpha^{(0)}$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ) donde  $v_\alpha^{(0)}$  es un vector fila con  $n$  entradas. De las ecuaciones de movimiento (2.1.5) es fácil ver que los modos-cero  $v_\alpha^{(0)}$  satisfacen la siguiente ecuación

$$v_\alpha^{(0)} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi_\alpha^{(0)}} = 0. \quad (2.1.9)$$

Esta es la forma en la que aparecen las constricciones Lagrangianas. Denotaremos el lado izquierdo de (2.1.9) por  $\Omega_\alpha^{(0)}$ .

Como sucede con la contraparte Hamiltoniana, es natural pedir que se cumplan las relaciones de consistencia [56]

$$\dot{\Omega}_\alpha^{(0)} = \frac{\partial \Omega_\alpha^{(0)}}{\partial \xi_i^{(0)}} \dot{\xi}_i^{(0)} = 0. \quad (2.1.10)$$

Para saber si existen más restricciones que emerjan de (2.1.10), calcularemos el siguiente sistema

$$\bar{f}_{ij} \dot{\xi}^{(0)j} = Z_i(\xi), \quad (2.1.11)$$

donde

$$\bar{f}_{ij} = \begin{pmatrix} f_{ij}^{(0)} \\ \frac{\delta \Omega_i^{(0)}}{\delta \xi^{(0)j}} \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} \quad Z_i = \begin{pmatrix} \frac{\delta V^{(0)}}{\delta \xi^{(0)j}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1.12)$$

Se puede observar la matriz  $\bar{f}_{ij}$  no es cuadrada, sin embargo tiene vectores nulos, digamos  $\bar{V}_i^{(0)\mu}$ . Por tanto, las nuevas constricciones emergen de

$$\bar{V}_i^{(0)\mu} Z_\mu = 0. \quad (2.1.13)$$

Si (2.1.13) son cero, entonces la teoría no presenta más constricciones. En caso contrario, se debe imponer la condición de consistencia sobre (2.1.13) hasta encontrar que la teoría no presente más constricciones.

Incluiremos todas las constricciones en  $\Omega_i$ , las cuales deben ser agregadas en el nuevo Lagrangiano digamos  $\mathcal{L}^{(1)}$  acompañadas con su respectivo multiplicador de Lagrange como se muestra en lo siguiente

$$\mathcal{L}^{(1)} = a_i^{(0)} \dot{\xi}_i^{(0)} - V^{(1)} + \dot{\lambda}^{(0)i} \Omega_i^{(0)}, \quad (2.1.14)$$

donde

$$V^{(1)} = V^{(0)}|_{\Omega_i^{(0)}=0}. \quad (2.1.15)$$

De esta manera construimos el vector de variables simplécticas  $\vec{\xi}^{(1)}$  como

$$\vec{\xi}^{(1)} = \left( \bar{\xi}^{(0)}, \xi_{n+1}^{(1)}, \dots, \xi_m^{(1)} \right) = \left( \xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \xi_3^{(0)}, \dots, \xi_n^{(0)}, \xi_{n+1}^{(1)}, \dots, \xi_m^{(1)} \right), \quad (2.1.16)$$

donde  $\bar{\xi}^{(0)}$  es el vector de todas las variables simplécticas que ya conocíamos y  $\xi_{n+1}^{(1)}, \dots, \xi_m^{(1)}$  son los multiplicadores de Lagrange  $\lambda^{(0)i}$  asociados a las restricciones que también serán considerados como variables simplécticas. El vector uno-forma los construiremos como

$$\vec{a}^{(1)} = \left( a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_3^{(0)}, \dots, a_n^{(0)}, a_{n+1}^{(1)}, \dots, a_m^{(1)} \right), \quad (2.1.17)$$

donde  $a_{n+1}^{(1)}, \dots, a_m^{(1)}$  son las funciones que acompañan a las variables  $\dot{\xi}_{n+1}^{(1)}, \dots, \dot{\xi}_m^{(1)}$  en el Lagrangiano  $\mathcal{L}^{(1)}$  respectivamente.

Ahora, construimos la matriz dos-forma  $f_{ij}^{(1)}$  como (2.1.5). Si el determinante de esta matriz es diferente de cero, podemos invertir la matriz como en (2.1.6) y encontrar los paréntesis de FJ como en (2.1.8). Por el contrario, si el determinante es igual a cero y ya no se han encontrado más restricciones, entonces se fijará la norma para obtener una matriz simpléctica invertible como veremos más adelante.

### 2.1.3. Fijando la Norma

Este caso se presenta si el determinante de  $f_{ij}^{(1)}$  es igual a cero y además no encontramos restricciones bajo la subsección anterior, por tanto, esa teoría es de norma.

Las transformaciones de norma se pueden obtener a partir de los vectores nulos de la matriz  $f_{ij}^{(1)}$  de la siguiente manera [55]

$$\delta \xi^i = V_l^i e^l, \quad (2.1.18)$$

donde  $V_l^i$  son los vectores nulos de  $f_{ij}$  y  $e^l$  son parámetros infinitesimales arbitrarios. Para poder encontrar la inversa, se procede a fijar la norma, es decir, imponer restricciones a la teoría de tal forma que al construir la nueva  $f_{ij}$ , su determinante sea distinto de cero. Nótese que la identificación de la norma no siempre es una tarea fácil debido a que no cualquier norma puede facilitar los cálculos para invertir la matriz  $f_{ij}$ <sup>1</sup>.

#### 2.1.4. Conteo de Grados de Libertad

Para efectuar el conteo de grados de libertad, a diferencia del formalismo de Dirac, las restricciones linealmente independientes son consideradas al mismo estatus, es decir, no existe una clasificación, por tanto, el conteo de grados de libertad de la teoría es

$$GL = \left[ \left( \begin{array}{c} \text{Número total de} \\ \text{variables dinámicas} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Número de restricciones} \\ \text{independientes} \end{array} \right) \right].$$

---

<sup>1</sup>Una vez fijada la norma, se seguirán los pasos de la subsección anterior a partir de (2.1.14)



# Capítulo 3

## La segunda clase de Chern

Dentro del marco de la topología, un invariante topológico describe las características de la variedad a la que está asociado. Desde este punto de vista, la segunda clase de Chern es un invariante topológico que detecta la topología del haz de norma. Por otro lado, es una teoría topológica si es vista como una teoría de campo, esto se debe a que carece de grados de libertad locales. Otra característica de este invariante, es que puede ser escrito como una diferencial total, lo cual implica que no contribuye a las ecuaciones de movimiento de la teoría a la que es agregado, sin embargo, su relevancia se hace presente en la estructura simpléctica, esto es importante dado que la estructura simpléctica será promovida a conmutadores a nivel cuántico para cuantizar la teoría [57].

Cabe mencionar que existe el formalismo de Dirac estricto y el formalismo de Dirac reducido. Éste último formalismo se usó para estudiar la segunda clase de Chern en [39]. Sin embargo, este formalismo no está desarrollado en el espacio fase completo. Como ya se mencionó anteriormente, para comparar el formalismo de Dirac y el de FJ, es necesario tratar con el espacio fase completo. Por ello, en esta sección, estudiaremos la segunda clase de Chern bajo el formalismo de Dirac estricto utilizando las mismas variables usadas en [39] (tipo Ashtekar) para así obtener las constricciones completas de la teoría y poder construir los paréntesis de Dirac, los cuales no fueron reportados en [39].

### 3.1. Análisis Hamiltoniano

La segunda clase de Chern tiene la siguiente forma

$$S[A_\mu^{IJ}] = \frac{\Xi}{2} \int_M [F^{IJ}[A] \wedge F_{IJ}[A]], \quad (3.1.1)$$

donde  $\Xi$  es una constante,  $M$  es una variedad cuadridimensional y  $F$  es una 2-forma llamada la curvatura de la conexión definida como  $F^{IJ}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta^{IJ} - \partial_\beta A_\alpha^{IJ} + A_\alpha^I{}_K A_\beta^{KJ} - A_\alpha^J{}_K A_\beta^{KI}$  donde  $A_\mu^{IJ}$  es la conexión valuada en el grupo  $SO(3, 1)$ . Aquí  $I, J, K = 0, 1, 2, 3$  son los índices de grupo que pueden ser subidos y bajados por una métrica de Minkowski  $\eta^{IJ} = (-1, 1, 1, 1)$ .

Para realizar nuestro análisis, introduciremos un campo auxiliar  $B^{IJ}$  que corresponde a una 2-forma valuada en el grupo  $SO(3, 1)$ . Así la acción (3.1.1) toma la estructura de una teoría tipo  $BF$  dada por

$$S[A_\mu^{IJ}, B_{\alpha\beta}^{KL}] = \Xi \int_M \left[ F^{IJ}[A] \wedge B_{IJ} - \frac{1}{2} B^{IJ} \wedge B_{IJ} \right], \quad (3.1.2)$$

donde  $B^{IJ} = \frac{1}{2} B_{\alpha\beta}^{IJ} dx^\alpha \wedge dx^\beta$  y  $x^\mu$  son las coordenadas espacio-temporales con  $\alpha, \beta, \mu = 0, 1, 2, 3$ .

Al obtener las ecuaciones de movimiento de la acción (3.1.2), uno obtiene (3.1.1), es decir, las acciones (3.1.1) y (3.1.2) son equivalentes vía ecuaciones de movimiento.

Ahora tomaremos la hipótesis de que la variedad  $M$  es topológicamente como  $M = \Sigma \times R$  donde  $\Sigma$  es una hipersuperficie de Cauchy y  $R$  es un parámetro de evolución, esto con la finalidad de poder efectuar la descomposición 3+1. Con lo anterior mencionado y además rompiendo la covarianza de Lorentz obtenemos el siguiente Lagrangiano

$$\begin{aligned} L = & \int_M \Xi \eta^{abc} \left[ B_{bc}^{0j} \dot{A}_{a0j} + \frac{1}{2} B_{bc}^{ij} \dot{A}_{aij} + \frac{1}{2} A_{0ij} (\partial_a B_{bc}^{ij} + 2B_{bc}^{il} A_a^j{}_l + 2B_{bc}^{0i} A_{a0}^j) \right. \\ & + A_{00i} (\partial_a B_{bc}^{0i} + B_{bc}^{ij} A_{a0j} + B_{bc}^{0j} A_a^i{}_j) \\ & + B_{0c}^{0i} (\partial_a A_{b0i} - \partial_b A_{a0i} + A_{a0j} A_b^j{}_i + A_{b0}^j A_{aij}) \\ & + \frac{1}{2} B_{0c}^{ij} (\partial_a A_{bij} - \partial_b A_{aij} + A_{ai0} A_b^0{}_j + A_{ail} A_b^l{}_j - A_{aj0} A_b^0{}_i - A_{ajl} A_b^l{}_i) \\ & \left. - \frac{1}{2} B_{0a}^{0j} B_{0jbc} - \frac{1}{2} B_{ab}^{0j} B_{0j0c} - \frac{1}{4} B_{0a}^{ij} B_{ijbc} - \frac{1}{4} B_{ab}^{ij} B_{ij0c} \right] d^3x, \quad (3.1.3) \end{aligned}$$

aquí  $a, b, c = 1, 2, 3$  corresponden a los índices espacio-temporales,  $\epsilon^{0abc} = \eta^{abc}$  y  $i, j, k = 1, 2, 3$  corresponden a los índices de grupo, donde ambos índices pueden ser subidos y bajados con la métrica euclidiana  $\eta^{ij} = (1, 1, 1)$ . Introduciendo los siguientes cambios de variable

$$\begin{aligned} A_{aij} &\equiv -\epsilon_{ijk} A_a^k, \\ A_{0ij} &\equiv -\epsilon_{ijk} A_0^k, \\ B_{abij} &\equiv -\epsilon_{ijk} B_{ab}^k, \\ B_{0aij} &\equiv -\epsilon_{ijk} B_{0a}^k, \\ A_{ai} &\equiv \Upsilon_{ai}, \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

obtenemos la siguiente densidad Lagrangiana

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \Xi\eta^{abc} \left( B_{ab}{}^{0i} \dot{A}_{c0i} + B_{abi} \dot{\Upsilon}_c{}^i \right) \\
& + A_0{}^k \left[ \partial_c (\Xi\eta^{abc} B_{abk}) + \Xi\eta^{abc} \epsilon_{jkm} B_{ab}{}^j \Upsilon_c{}^m - \Xi\eta^{abc} \epsilon_{ijk} B_{ab}{}^{0i} A_{c0}{}^j \right] \\
& + A_{00i} \left[ \partial_c (\Xi\eta^{abc} B_{ab}{}^{0i}) - \Xi\eta^{abc} \epsilon^{ij}{}_k A_{c0j} B_{ab}{}^k - \Xi\eta^{abc} \epsilon^i{}_{jk} B_{ab}{}^{0j} \Upsilon_c{}^k \right] \\
& + \Xi\eta^{abc} B_{0a}{}^{0i} \left[ \partial_b A_{c0i} - \partial_c A_{b0i} + \epsilon_i{}^{jk} A_{b0j} \Upsilon_{ck} - \epsilon_{ijk} A_{c0}{}^j \Upsilon_b{}^k \right] \\
& + \Xi\eta^{abc} B_{0a}{}^k \left[ \partial_b \Upsilon_{ck} - \partial_c \Upsilon_{bk} - \epsilon^{ij}{}_k A_{b0i} A_{c0j} + \epsilon_{kjm} \Upsilon_b{}^j \Upsilon_c{}^m \right] \\
& - \Xi\eta^{abc} \left[ B_{0c}{}^{0j} B_{ab0j} + B_{ab}{}^k B_{0ck} \right], \tag{3.1.5}
\end{aligned}$$

si introducimos ahora las siguientes variables

$$\begin{aligned}
A_0{}^i & \equiv -T^i, \\
A_{00i} & \equiv -\Lambda^i, \\
B_{0a}{}^{0i} & \equiv -\frac{1}{2} \zeta_a{}^i, \\
B_{0ai} & \equiv -\frac{1}{2} \chi_{ai}, \tag{3.1.6}
\end{aligned}$$

obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \Xi\eta^{abc} \left( B_{ab}{}^{0i} \dot{A}_{c0i} + B_{abi} \dot{\Upsilon}_c{}^i \right) \\
& - T^k \left[ \partial_c (\Xi\eta^{abc} B_{abk}) + \Xi\eta^{abc} \epsilon_{jkm} B_{ab}{}^j \Upsilon_c{}^m - \Xi\eta^{abc} \epsilon_{ijk} B_{ab}{}^{0i} A_{c0}{}^j \right] \\
& - \Lambda_i \left[ \partial_c (\Xi\eta^{abc} B_{ab}{}^{0i}) - \Xi\eta^{abc} \epsilon^{ij}{}_k A_{c0j} B_{ab}{}^k - \Xi\eta^{abc} \epsilon^i{}_{jk} B_{ab}{}^{0j} \Upsilon_c{}^k \right] \\
& - \frac{\Xi}{2} \eta^{abc} \zeta_a{}^i \left[ \partial_b A_{c0i} - \partial_c A_{b0i} + \epsilon_i{}^{jk} A_{b0j} \Upsilon_{ck} - \epsilon_{ijk} A_{c0}{}^j \Upsilon_b{}^k - B_{bc0i} \right] \\
& - \frac{\Xi}{2} \eta^{abc} \chi_a{}^i \left[ \partial_b \Upsilon_{ci} - \partial_c \Upsilon_{bi} - \epsilon^{ij}{}_k A_{b0i} A_{c0j} + \epsilon_{ijk} \Upsilon_b{}^j \Upsilon_c{}^k - B_{bci} \right]. \tag{3.1.7}
\end{aligned}$$

De la ecuación (3.1.7), encontramos los siguientes momentos canónicos

$$\begin{aligned}
p^{c0i} &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_{c0i}} = \Xi \eta^{abc} B_{ab}{}^{0i}, \\
\pi^{ci} &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\Upsilon}_{ci}} = \Xi \eta^{abc} B_{ab}{}^i, \\
\hat{T}^i &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{T}_i} = 0, \\
\hat{\Lambda}^i &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\Lambda}_i} = 0, \\
\hat{\zeta}^{ai} &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}_{ai}} = 0, \\
\hat{\chi}^{ai} &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_{ai}} = 0, \\
p^{ab0i} &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{B}_{ab0i}} = 0, \\
p^{abi} &\equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{B}_{abi}} = 0,
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

con los siguientes paréntesis fundamentales de Poisson entre los campos a tiempos iguales

$$\begin{aligned}
\{\Upsilon_{ai}(x), \pi^{bj}(y)\} &= \delta_a^b \delta_i^j \delta^3(x-y), \\
\{A_{a0i}(x), p^{b0j}(y)\} &= \delta_a^b \delta_i^j \delta^3(x-y), \\
\{T_i(x), \hat{T}^j(y)\} &= \delta_i^j \delta^3(x-y), \\
\{\Lambda_i(x), \hat{\Lambda}^j(y)\} &= \delta_i^j \delta^3(x-y), \\
\{\zeta_{ai}(x), \hat{\zeta}^{bj}(y)\} &= \delta_a^b \delta_i^j \delta^3(x-y), \\
\{\chi_{ai}(x), \hat{\chi}^{bj}(y)\} &= \delta_a^b \delta_i^j \delta^3(x-y), \\
\{B_{ab0i}(x), p^{de0j}(y)\} &= \frac{1}{2} (\delta_a^d \delta_b^e - \delta_a^e \delta_b^d) \delta_i^j \delta^3(x-y), \\
\{B_{abi}(x), p^{dej}(y)\} &= \frac{1}{2} (\delta_a^d \delta_b^e - \delta_a^e \delta_b^d) \delta_i^j \delta^3(x-y).
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Si uno desea conocer los paréntesis de Poisson a tiempos diferentes, es necesario resolver las ecuaciones de movimiento de la teoría, encontrar la función de Green a dos puntos y seguir los pasos marcados en [58]. Por otro lado, de la definición de los momentos canónicos, podemos identificar la siguientes 60 constricciones primarias

$$\begin{aligned}
\phi_1^{a0i} &\equiv p^{a0i} - \Xi\eta^{abc}B_{bc}{}^{0i} \approx 0, \\
\phi_2^{ai} &\equiv \pi^{ai} - \Xi\eta^{abc}B_{bc}{}^i \approx 0, \\
\phi_3^i &\equiv \hat{T}^i \approx 0, \\
\phi_4^i &\equiv \hat{\Lambda}^i \approx 0, \\
\phi_5^{ai} &\equiv \hat{\zeta}^{ai} \approx 0, \\
\phi_6^{ai} &\equiv \hat{\chi}^{ai} \approx 0, \\
\phi_7^{ab0i} &\equiv p^{ab0i} \approx 0, \\
\phi_8^{abi} &\equiv p^{abi} \approx 0.
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

El Hamiltoniano canónico de la teoría esta dado por

$$\begin{aligned}
H_c &= \int_M \left[ \dot{A}_{c0i} p^{c0i} + \dot{\Upsilon}_{ci} \pi^{ci} + \dot{T}_i \hat{T}^i + \dot{\Lambda}_i \hat{\Lambda}^i + \dot{\zeta}_{ai} \hat{\zeta}^{ai} + \dot{B}_{ab0i} p^{ab0i} + \dot{B}_{abi} p^{abi} - \mathcal{L} \right] d^3x \\
&= \int_M \left( T^i \left[ \partial_a \pi^a{}_i + \epsilon_i{}^{jk} \pi^a{}_j \Upsilon_{ak} - \epsilon_{ijk} p^{a0j} A_{a0}{}^k \right] \right. \\
&\quad + \Lambda_i \left[ \partial_a p^{a0i} - \epsilon^{ijk} A_{a0j} \pi^a{}_k - \epsilon^i{}_{jk} p^{a0j} \Upsilon_a{}^k \right] \\
&\quad - \frac{\Xi}{2} \eta^{abc} \zeta_a{}^i \left[ \partial_b A_{c0i} - \partial_c A_{b0i} + \epsilon_i{}^{jk} A_{b0j} \Upsilon_{ck} - \epsilon_{ijk} A_{c0}{}^j \Upsilon_b{}^k \right] \\
&\quad - \frac{\Xi}{2} \eta^{abc} \chi_a{}^i \left[ \partial_b \Upsilon_{ci} - \partial_c \Upsilon_{bi} - \epsilon^{ij}{}_k A_{b0i} A_{c0j} + \epsilon_{ijk} \Upsilon_b{}^j \Upsilon_c{}^k \right] \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \zeta_a{}^i p^{a0}{}_i + \frac{1}{2} \chi_a{}^i \pi^a{}_i \right] d^3x,
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

agregando a la ecuación (3.1.11) las constricciones primarias obtenemos el Hamiltoniano primario dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
H_1 &= H_c + \int_M \left[ \lambda_{a0i} (p^{a0i} - \Xi\eta^{abc}B_{bc}{}^{0i}) + \lambda_{ai} (\pi^{ai} - \Xi\eta^{abc}B_{bc}{}^i) + \alpha_i \hat{T}^i + \beta_i \hat{\Lambda}^i + \theta_{ai} \hat{\zeta}^{ai} + \mu_{ai} \hat{\chi}^{ai} \right. \\
&\quad \left. + \lambda_{ab0i} p^{ab0i} + \lambda_{abi} p^{abi} \right] d^3x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_M \left( T^i \left[ \partial_a \pi^a_i + \epsilon_i^{jk} \pi^a_j \Upsilon_{ak} - \epsilon_{ijk} p^{a0j} A_{a0}^k \right] \right. \\
&\quad + \Lambda_i \left[ \partial_a p^{a0i} - \epsilon^{ijk} A_{a0j} \pi_k^a - \epsilon^i_{jk} p^{a0j} \Upsilon_a^k \right] \\
&\quad - \frac{\Xi}{2} \eta^{abc} \varsigma_a^i \left[ \partial_b A_{c0i} - \partial_c A_{b0i} + \epsilon_i^{jk} A_{b0j} \Upsilon_{ck} - \epsilon_{ijk} A_{c0}^j \Upsilon_b^k \right] \\
&\quad - \frac{\Xi}{2} \eta^{abc} \chi_a^i \left[ \partial_b \Upsilon_{ci} - \partial_c \Upsilon_{bi} - \epsilon^{ij}_k A_{b0i} A_{c0j} + \epsilon_{ikj} \Upsilon_b^j \Upsilon_c^k \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \varsigma_a^i p^{a0i} + \frac{1}{2} \chi_a^i \pi^a_i + \lambda_{a0i} (p^{a0i} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}^{0i}) + \lambda_{ai} (\pi^{ai} \Xi \eta^{abc} B_{bc}^i) \\
&\quad \left. + \alpha_i \hat{T}^i + \beta_i \hat{\Lambda}^i + \theta_{ai} \hat{\varsigma}^{ai} + \mu_{ai} \hat{\chi}^{ai} + \lambda_{ab0i} p^{ab0i} + \lambda_{abi} p^{abi} \right] d^3x, \tag{3.1.12}
\end{aligned}$$

donde  $\lambda_{a0i}$ ,  $\lambda_{ai}$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\theta_{ai}$ ,  $\mu_{ai}$ ,  $\lambda_{ab0i}$ ,  $\lambda_{abi}$  son los multiplicadores de Lagrange.

De la consistencia de las constricciones, identificamos las siguientes 24 constricciones secundarias

$$\dot{\phi}_3^i \approx 0 \Rightarrow \psi_3^i \equiv \partial_a \pi^{ai} - \epsilon^{ijk} \pi^a_j \Upsilon_{ak} - \epsilon^i_{jk} p^{a0j} A_{a0}^k \approx 0, \tag{3.1.13}$$

$$\dot{\phi}_4^i \approx 0 \Rightarrow \phi_4^i \equiv -(\partial_a p^{a0i} - \epsilon^{ijk} A_{a0j} \pi_k^a - \epsilon^i_{jk} p^{a0j} \Upsilon_a^k - \epsilon^{ijk} \pi_k^a A_{a0j}) \approx 0, \tag{3.1.14}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_5^{ai} \approx 0 \Rightarrow \psi_5^{ai} &\equiv -\frac{\Xi}{2} \eta^{abc} [\partial_b A_c^{0i} - \partial_c A_b^{0i} + \epsilon^{ij}_k A_{c0j} \Upsilon_b^k - \epsilon^{ijk} A_{b0j} \Upsilon_{ck}] \\
&\quad - \frac{1}{2} p^{a0i} \approx 0, \tag{3.1.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_6^{ai} \approx 0 \Rightarrow \psi_6^{ai} &\equiv -\frac{\Xi}{2} \eta^{abc} [\partial_b \Upsilon_c^i - \partial_c \Upsilon_b^i - \epsilon^{ijk} A_{b0j} A_{b0k} + \epsilon^i_{jk} \Upsilon_b^j \Upsilon_c^k] \\
&\quad - \frac{1}{2} \pi^{ai} \approx 0, \tag{3.1.16}
\end{aligned}$$

y los siguientes 36 multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned}
\lambda_{ef}^{0n} \approx &\frac{1}{2\Xi} \left( \eta_{efc} \epsilon_{ij}^n T^i p^{c0j} - \eta_{efc} \Lambda_i \epsilon^{nik} \pi_k^c + \Xi \partial_f \varsigma_e^n - \Xi \partial_e \varsigma_f^n - \Xi \varsigma_f^i \epsilon_i^k \Upsilon_e^k \right. \\
&\quad \left. + \Xi \varsigma_e^i \epsilon_i^k \Upsilon_f^k - \Xi \chi_{ei} \epsilon^{ink} A_{f0k} + \Xi \chi_{fi} \epsilon^{ink} A_{e0k} \right), \tag{3.1.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{ef}^n \approx &\frac{1}{2\Xi} \left( \eta_{efc} \epsilon_i^{jn} T^i \pi_j^c + \eta_{efc} \Lambda_i \epsilon^{ni}_j p^{c0j} - \Xi \epsilon_i^{nj} \varsigma_e^i A_{f0j} + \Xi \epsilon_i^{jn} \varsigma_f^i A_{e0j} \right. \\
&\quad \left. - \Xi \partial_e \chi_f^n + \Xi \partial_f \chi_e^n - \Xi \chi_e^i \epsilon_i^{jn} \Upsilon_{fj} + \Xi \chi_f^i \epsilon_i^{jn} \Upsilon_{ej} \right), \tag{3.1.18}
\end{aligned}$$

$$\lambda_{e0n} \approx 0, \tag{3.1.19}$$

$$\lambda_{en} \approx 0. \tag{3.1.20}$$

Hasta ahora hemos encontrado las siguientes constricciones primarias

$$\begin{aligned}
\phi_1^{a0i} &\equiv p^{a0i} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^{0i} \approx 0, \\
\phi_2^{ai} &\equiv \pi^{ai} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^i \approx 0, \\
\phi_7^{ab0i} &\equiv p^{ab0i} \approx 0, \\
\phi_8^{abi} &\equiv p^{abi} \approx 0,
\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

y a continuación las constricciones secundarias

$$\psi_3^l \equiv \partial_a \pi^{ai} - \epsilon^{ijk} \pi_j^a \Upsilon_{ak} - \epsilon^i{}_{jk} p^{a0j} A_{a0}{}^k \approx 0, \tag{3.1.22}$$

$$\phi_4^i \equiv -(\partial_a p^{a0i} - \epsilon^i{}_{jk} p^{a0j} \Upsilon_a{}^k - \epsilon^{ijk} \pi_k^a A_{a0j}) \approx 0, \tag{3.1.23}$$

$$\begin{aligned}
\psi_5^{ai} &\equiv -\frac{\Xi}{2} \eta^{abc} [\partial_b A_c{}^{0i} - \partial_c A_b{}^{0i} + \epsilon^{ij}{}_k A_{c0j} \Upsilon_b{}^k - \epsilon^{ijk} A_{b0j} \Upsilon_{ck}] \\
&\quad - \frac{1}{2} p^{a0i} \approx 0,
\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

$$\begin{aligned}
\psi_6^{ai} &\equiv -\frac{\Xi}{2} \eta^{abc} [\partial_b \Upsilon_c{}^i - \partial_c \Upsilon_b{}^i - \epsilon^{ijk} A_{b0j} A_{c0k} + \epsilon^i{}_{jk} \Upsilon_b{}^j \Upsilon_c{}^k] \\
&\quad - \frac{1}{2} \pi^{ai} \approx 0.
\end{aligned} \tag{3.1.25}$$

La teoría no presenta constricciones terciarias.

Las constricciones secundarias obtenidas coinciden con lo reportado en [39], donde se utilizó el formalismo de Dirac “reducido”.

Con lo anterior, encontramos la siguiente álgebra de constricciones.

$$\begin{aligned}
\{\phi_1^{a0i}(x), \phi_1^{d0l}(y)\} &= 0, & \{\psi_3^i(x), \psi_6^{dl}(y)\} &= \epsilon^{il}{}_k \psi_6^{ak} \delta^3(x-y) \approx 0, \\
\{\phi_1^{a0i}(x), \phi_2^{dl}(y)\} &= 0, & \{\psi_3^i(x), \phi_7^{de0l}(y)\} &= 0, \\
\{\phi_1^{a0i}(x), \psi_3^l(y)\} &= -\epsilon^{il}{}_m p^{a0m} \delta^3(x-y), & \{\psi_3^i(x), \phi_8^{del}(y)\} &= 0, \\
\{\phi_1^{a0i}(x), \psi_4^l(y)\} &= -\epsilon^{iln} \pi_n^a \delta^3(x-y), & \{\psi_4^i(x), \psi_4^l(y)\} &= -\epsilon^{il}{}_k \psi_3^k \delta^3(x-y) \approx 0, \\
\{\phi_1^{a0i}(x), \psi_5^{dl}(y)\} &= -\Xi \eta^{adl} (-\eta^{il} \partial_{e_x} \\
&\quad + \epsilon^{iln} \Upsilon_{en}) \delta^3(x-y), & \{\psi_4^i(x), \psi_5^{dl}(y)\} &= \epsilon^{il}{}_k \psi_6^{ak} \delta^3(x-y) \approx 0, \\
\{\phi_{a0i}(x), \psi_6^{dl}(y)\} &= -\Xi \eta^{adf} \epsilon^{iln} A_{f0n} \delta^3(x-y), & \{\psi_4^i(x), \psi_6^{dl}(y)\} &= -\epsilon^{il}{}_k \psi_5^{ak} \delta^3(x-y) \approx 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\phi_1^{a0i}(x), \phi_7^{de0l}(y)\} &= \Xi \eta^{ade} \eta^{il} \delta^3(x-y), & \{\psi_4^i(x), \phi_7^{de0l}(y)\} &= 0, \\
\{\phi_1^{a0i}(x), \phi_8^{del}(y)\} &= 0, & \{\psi_4^i(x), \phi_8^{del}(y)\} &= 0, \\
\{\phi_2^{ai}(x), \phi_2^{dl}(y)\} &= 0, & \{\psi_5^{ai}(x), \psi_5^{dl}(y)\} &= 0, \\
\{\phi_2^{ai}(x), \psi_3^l(y)\} &= \epsilon^{ilm} \pi_m^a \delta^3(x-y), & \{\psi_5^{ai}(x), \psi_6^{dl}(y)\} &= 0, \\
\{\phi_2^{ai}(x), \psi_4^l(y)\} &= -\epsilon^{il} {}_m p^{a0m} \delta^3(x-y), & \{\psi_5^{ai}(x), \phi_7^{de0l}(y)\} &= 0, \\
\{\phi_2^{ai}(x), \psi_5^{dl}(y)\} &= -\Xi \eta^{adf} \epsilon^{ilm} A_{f0m} \delta^3(x-y), & \{\psi_5^{ai}(x), \phi_8^{del}(y)\} &= 0, \\
\{\phi_2^{ai}(x), \psi_6^{dl}(y)\} &= \Xi \eta^{ade} (-\eta^{il} \partial_{e_x} \\
&\quad + \epsilon^{ilm} \Upsilon_{em}) \delta^3(x-y), & \{\psi_6^{ai}(x), \psi_6^{dl}(y)\} &= 0, \\
\{\phi_2^{ai}(x), \phi_7^{de0l}(y)\} &= 0, & \{\psi_6^{ai}(x), \phi_7^{de0l}(y)\} &= 0, \\
\{\phi_2^{ai}(x), \phi_8^{del}(y)\} &= -\Xi \eta^{il} \delta^3(x-y), & \{\psi_6^{ai}(x), \phi_8^{del}(y)\} &= 0, \\
\{\psi_3^i(x), \psi_3^l(y)\} &= \epsilon^{il} {}_k \psi_3^k \delta^3(x-y) \approx 0, & \{\phi_7^{ab0i}(x), \phi_7^{de0l}(y)\} &= 0, \\
\{\psi_3^i(x), \psi_4^l(y)\} &= \epsilon^{il} {}_k \psi_4^k \delta^3(x-y) \approx 0, & \{\phi_7^{ab0i}(x), \phi_8^{del}(y)\} &= 0, \\
\{\psi_3^i(x), \psi_5^{dl}(y)\} &= \epsilon^{il} {}_k \psi_5^{ak} \delta^3(x-y) \approx 0, & \{\phi_8^{abi}(x), \phi_8^{del}(y)\} &= 0.
\end{aligned}$$

Sustituyendo los 36 multiplicadores de Lagrange en la acción (12), encontramos bajo la conjetura de Dirac las siguientes 48 constricciones de primera clase

$$\begin{aligned}
\gamma_1^i &\equiv \hat{T}^i \approx 0, \\
\gamma_2^i &\equiv \hat{\Lambda}^i \approx 0, \\
\gamma_3^{ai} &\equiv \hat{\zeta}^{ai} \approx 0, \\
\gamma_4^{ai} &\equiv \hat{\chi}^{ai} \approx 0, \\
\gamma_5^i &\equiv \partial_a \pi^{ai} - \epsilon^{ijk} \pi_j^a \Upsilon_{ak} - \epsilon^i{}_{jk} p^{a0j} A_{a0}{}^k + \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \epsilon^i{}_{jk} (\pi^{aj} p^{bck} - p^{a0j} p^{bc0k}) \approx 0, \\
\gamma_6^{0i} &\equiv \partial_a p^{a0i} - \epsilon^i{}_{jk} p^{a0j} \Upsilon_a{}^k - \epsilon^{ijk} \pi_k^a A_{a0j} + \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \epsilon^i{}_{jk} (\pi^{aj} p^{bc0k} + p^{a0j} p^{bck}) \approx 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{7\ 0i}^a &\equiv \frac{\Xi}{2}\eta^{abc} \left[ \partial_b A_{c0i} - \partial_c A_{b0i} - \epsilon_i^j{}^k A_{c0j} \Upsilon_b{}^k + \epsilon_i^{jk} A_{b0j} \Upsilon_{ck} \right] + \frac{1}{2} p^{a0i} \\
&\quad - \partial_b p^{ab}{}_{0i} + \epsilon_i^{jk} \Upsilon_{bk} p^{ab}{}_{0j} + \epsilon_i^{jk} A_{b0k} p^{ab}{}_j \approx 0, \\
\gamma_8^{ai} &\equiv \frac{\Xi}{2}\eta^{abc} \left[ \partial_b \Upsilon_c{}^i - \partial_c \Upsilon_b{}^i - \epsilon^{ijk} A_{b0j} A_{c0k} + \epsilon^i{}_{jk} \Upsilon_b{}^j \Upsilon_c{}^k \right] + \frac{1}{2} \pi^{ai} \\
&\quad - \partial_b p^{abi} - \epsilon^{ijk} A_{b0k} p^{ab}{}_{0j} + \epsilon^{ijk} \Upsilon_{bk} p^{ab}{}_j \approx 0,
\end{aligned} \tag{3.1.26}$$

y las siguientes 36 constricciones de segunda clase

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^{a0i} &\equiv p^{a0i} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^{0i} \approx 0, \\
\Gamma_2^{ai} &\equiv \pi^{ai} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^i \approx 0, \\
\Gamma_3^{ab0i} &\equiv p^{ab0i} \approx 0, \\
\Gamma_4^{abi} &\equiv p^{abi} \approx 0,
\end{aligned} \tag{3.1.27}$$

cuya álgebra de constricciones es

$$\{\gamma_5^i(x), \gamma_5^l(y)\} = \epsilon^{ilk} \gamma_5{}^k \delta^3(x-y) \approx 0,$$

$$\{\gamma_5^i(x), \gamma_6^{0l}(y)\} = \epsilon^{il}{}^k \gamma_6^{0k} \delta^3(x-y) \approx 0,$$

$$\{\gamma_5^i(x), \gamma_7^d{}_{0l}(y)\} = \epsilon^i{}_{lk} \gamma_7^d{}_{0k} - \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \Gamma_4^{bc}{}_{l\ 0} \Gamma_3^{da}{}_{0i} + \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \Gamma_3^{bc0}{}_{l\ 0} \Gamma_4^{dai} \approx 0,$$

$$\begin{aligned}
\{\gamma_{5,\ i}(x), \gamma_8^{dl}(y)\} &= \epsilon_i{}^{lk} \gamma_8^d{}_{0k} + \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \delta_i^l \Gamma_4^{bcm} \Gamma_4^{da}{}_{0m} - \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \Gamma_4^{bcl} \Gamma_4^{da}{}_{0i} + \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \delta_i^l \Gamma_3^{bc0m} \Gamma_3^{da}{}_{0m} \\
&\quad - \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \Gamma_3^{bc0l} \Gamma_3^{da}{}_{0i} \approx 0,
\end{aligned}$$

$$\{\gamma_6^{0i}(x), \gamma_6^{0l}(y)\} - \epsilon^{ilk} \gamma_5{}^k \delta^3(x-y) \approx 0,$$

$$\begin{aligned}
\{\gamma_6^{0i}(x), \gamma_7^d{}_{0l}(y)\} &= \epsilon^i{}_{lk} \gamma_8^{dk} - \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \delta_l^i \Gamma_3^{bc0}{}_{m\ 0} \Gamma_3^{da0m} + \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \Gamma_3^{bc0}{}_{l\ 0} \Gamma_3^{da0i} + \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \delta_l^i \Gamma_4^{bc}{}_{m\ 0} \Gamma_4^{dam} \\
&\quad - \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \Gamma_4^{bc}{}_{l\ 0} \Gamma_4^{dai} \approx 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\gamma_6^{0i}(x), \gamma_8^{dl}(y)\} &= \epsilon^{il}{}^k \gamma_7^d{}_{0k} + \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \delta^{il} \Gamma_3^{bc0m} \Gamma_4^{da}{}_{0m} - \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \Gamma_4^{dai} \Gamma_3^{bc0l} - \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \delta^{il} \Gamma_3^{da}{}_{0m} \Gamma_4^{bcm} \\
&\quad + \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \Gamma_3^{da}{}_{0\ 0} \Gamma_4^{bcl} \approx 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\gamma_7^a{}_{0i}(x), \gamma_7^d{}_{0l}(y)\} &= 0, & \{\gamma_7^a{}_{0i}(x), \Gamma_1^{d0l}(y)\} &= -\epsilon_i{}^{lj} \Gamma_4^{ad}{}_j \delta^3(x-y), \\
\{\gamma_7^a{}_{0i}(x), \gamma_8^{dl}(y)\} &= 0, & \{\gamma_7^a{}_{0i}(x), \Gamma_2^{dl}(y)\} &= -\epsilon_i{}^{lj} \Gamma_3^{ad}{}_{0j} \delta^3(x-y), \\
\{\gamma_8^{0i}(x), \gamma_8^{dl}(y)\} &= 0, & \{\gamma_7^a{}_{0i}(x), \Gamma_3^{de0l}(y)\} &= 0, \\
\{\gamma_5^i(x), \Gamma_1^{d0l}(y)\} &= 0, & \{\gamma_7^a{}_{0i}(x), \Gamma_4^{del}(y)\} &= 0, \\
\{\gamma_5^i(x), \Gamma_2^{dl}(y)\} &= 0, & \{\gamma_8^{ai}(x), \Gamma_1^{d0l}(y)\} &= \epsilon^{ilj} \Gamma_3^{ad}{}_{0j} \delta^3(x-y), \\
\{\gamma_5^i(x), \Gamma_3^{de0l}(y)\} &= 0, & \{\gamma_8^{ai}(x), \Gamma_2^{dl}(y)\} &= -\epsilon^{ilj} \Gamma_4^{ad}{}_j \delta^3(x-y), \\
\{\gamma_5^i(x), \Gamma_4^{del}(y)\} &= 0, & \{\gamma_8^{ai}(x), \Gamma_3^{de0l}(y)\} &= 0, \\
\{\gamma_6^{0i}(x), \Gamma_1^{d0l}(y)\} &= 0, & \{\gamma_8^{ai}(x), \Gamma_4^{del}(y)\} &= 0, \\
\{\gamma_6^{0i}(x), \Gamma_2^{dl}(y)\} &= 0, & \{\gamma_6^{0i}(x), \Gamma_4^{del}(y)\} &= 0, \\
\{\gamma_6^{0i}(x), \Gamma_3^{de0l}(y)\} &= 0,
\end{aligned}$$

donde se puede observar que el álgebra es cerrada y obedece las reglas del formalismo canónico del álgebra entre constricciones expresado en (1.9.9) y (1.9.10). Por otro lado, las constricciones  $\gamma_5^i$  y  $\gamma_6^{0i}$  son indentificadas como generadores de rotaciones y boost respectivamente mientras que  $\gamma_7^a{}_{0i}$  y  $\gamma_8^{ai}$  son generadores de traslaciones, esto se puede ver del álgebra de constricciones. Debido a lo anterior, podemos identificar que el álgebra de constricciones de primera y segunda clase mostrada anteriormente tiene una estructura de grupo, el cual corresponde al grupo de Poincaré.

Con toda esta información obtenida, podemos efectuar el conteo de grados de libertad físicos de la teoría de la siguiente forma; hay 120 variables dinámicas, 48 constricciones de primera clase y 36 constricciones de segunda clase, por tanto uno obtiene -6 grados de libertad. Sin embargo, se sabe que la segunda clase de Chern es una teoría reductible, es decir, las constricciones no son independientes una de la otra. La reductibilidad de las constricciones es la siguiente

$$\begin{aligned} \partial_a \gamma_7^a{}_{0i} &= \epsilon_i^{jk} \Upsilon_{ak} \gamma_7^a{}_{0j} + \epsilon_i^{jk} A_{a0k} \gamma_8^a{}_j + \frac{1}{2} \gamma_6{}_{0i} + \epsilon_i^{jk} F_{abk} \Gamma_3^{ab}{}_{0j} + \epsilon_i^{jk} F_{ab0k} \Gamma_4^{ab}{}_j \\ &\quad + \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \epsilon_i^{jk} \pi^c{}_k \Gamma_3^{ab}{}_{0j} + \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \epsilon_i^{jk} p^c{}_k \Gamma_4^{ab}{}_j, \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

$$\begin{aligned} \partial_a \gamma_8^a{}_i &= -\epsilon_i^{jk} A_{a0k} \gamma_7^a{}_{0j} + \epsilon_i^{jk} \Upsilon_{ak} \gamma_8^a{}_j + \frac{1}{2} \gamma_5{}^i{}_i - \epsilon_i^{jk} F_{ab0k} \Gamma_3^{ab}{}_{0j} + \epsilon_i^{jk} F_{abk} \Gamma_4^{ab}{}_j \\ &\quad - \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \epsilon_i^{jk} p^a{}_j \Gamma_3^{bc}{}_{0k} - \frac{1}{2\Xi} \eta_{abc} \epsilon_i^{jk} \pi^a{}_j \Gamma_4^{bc}{}_k. \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Por tanto, hay 42 constricciones de primera clase independientes. Efectuando nuevamente el conteo de grados de libertad encontramos que la teoría carece de grados de libertad, la teoría es topológica como uno esperaba.

Debido a que las constricciones de primera clase son generadoras de las transformaciones de norma, definimos el generador de norma  $G$  como una combinación de constricciones de primera clase

$$G = \int_M [\theta_{1,i} \gamma_1^i + \theta_{2,i} \gamma_2^i + \theta_{3,ai} \gamma_3^{ai} + \theta_{4,ai} \gamma_4^{ai} + \theta_5^i \gamma_{5,i} + \theta_{6,0i} \gamma_6^{0i} + \theta_7^{0i}{}_a \gamma_7^a{}_{0i} + \theta_{8,ai} \gamma_8^{ai}] d^3x. \quad (3.1.30)$$

Con esta función generadora encontramos las siguientes transformaciones de norma

$$\begin{aligned} \delta A_{d0l} &= \{A_{d0l}, G\} \\ &= -\theta_5^i \epsilon_{ilk} \left( A_{d0}{}^k + \frac{1}{2\Xi} \eta_{dbc} p^{bc0k} \right) + \theta_{6,0i} \epsilon^i{}_{lk} \left( \frac{1}{2\Xi} \eta_{dbc} p^{bck} - \Upsilon_d{}^k \right) \\ &\quad - \partial_d \theta_{6,0l} - \frac{1}{2} \theta_7^0{}_{ld}, \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

$$\begin{aligned} \delta \Upsilon_{dl} &= \{\Upsilon_{dl}, G\} \\ &= \theta_5^i \left( \frac{1}{2\Xi} \eta_{dbc} \epsilon_{ilk} p^{bck} - \epsilon_{il}{}^k \Upsilon_{dk} \right) + \theta_{6,0i} \left( \frac{1}{2\Xi} \eta_{dbc} \epsilon^i{}_{lk} p^{bc0k} - \epsilon^{ij}{}_l A_{d0j} \right) \\ &\quad - \partial_d \theta_{5,l} + \frac{1}{2} \theta_{8,dl}, \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

$$\delta T_l = \{T_l, G\} = \theta_{1,l}, \quad (3.1.33)$$

$$\delta \Lambda_l = \{\Lambda_l, G\} = \theta_{2,l}, \quad (3.1.34)$$

$$\delta \varsigma_{dl} = \{\varsigma_{dl}, G\} = \theta_{3,dl}, \quad (3.1.35)$$

$$\delta \chi_{dl} = \{\chi_{dl}, G\} = \theta_{4,dl}, \quad (3.1.36)$$

$$\begin{aligned} \delta B_{de0l} &= \{B_{de0l}, G\} \\ &= -\frac{1}{2\Xi} \theta_5^i \eta_{ade} \epsilon_{ijl} p^{a0j} + \frac{1}{2\Xi} \theta_{6,ai} \eta_{ade} \epsilon^{ij} \pi^a_j - \frac{1}{2} \partial_e \theta_{7,ld}^0 + \frac{1}{2} \partial_d \theta_{7,le}^0 - \frac{1}{2} \theta_{7,d}^{0i} \epsilon_{il}^k \Upsilon_{ek} \\ &\quad + \frac{1}{2} \theta_{7,e}^{0i} \epsilon_{il}^k \Upsilon_{dk} + \frac{1}{2} \theta_{8,di} \epsilon_l^k A_{e0k} - \frac{1}{2} \theta_{8,ei} \epsilon_l^k A_{d0k}, \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

$$\begin{aligned} \delta B_{del} &= \{B_{del}, G\} \\ &= \frac{1}{2\Xi} \theta_5^i \eta_{ade} \epsilon_i^j \pi^a_j + \frac{1}{2\Xi} \theta_{6,0i} \eta_{adl} \epsilon^{ij} p^{a0j} + \frac{1}{2} \theta_{7,d}^{0i} \epsilon_{il}^k A_{e0k} - \frac{1}{2} \theta_{7,e}^{0i} \epsilon_{il}^k A_{d0k} + \frac{1}{2} \partial_e \theta_{8,dl} \\ &\quad - \frac{1}{2} \partial_d \theta_{8,el} + \frac{1}{2} \theta_{8,di} \epsilon_l^k \Upsilon_{ek} - \frac{1}{2} \theta_{8,ei} \epsilon_l^k \Upsilon_{dk}, \end{aligned} \quad (3.1.38)$$

$$\begin{aligned} \delta p^{d0l} &= \{p^{d0l}, G\} \\ &= \theta_5^i \epsilon_{ij}^l p^{d0j} + \theta_{6,0i} \epsilon^{ilk} \pi_k^d + \Xi \eta^{abd} \partial_b \theta_{7,a}^{0l} - \theta_{7,a}^{0i} \left( \Xi \eta^{adc} \epsilon_i^{lk} \Upsilon_{ck} + \epsilon_i^{jl} p^{ad}_j \right) \\ &\quad + \theta_{8,0i} \epsilon^{ijl} \left( \Xi \eta^{abd} A_{b0j} + p^{ad}_{0j} \right), \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

$$\begin{aligned} \delta \pi^{dl} &= \{\pi^{dl}, G\} \\ &= \theta_5^i \epsilon_i^{jl} \pi_j^d + \theta_{6,0i} \epsilon_i^l p^{d0j} - \theta_{7,a}^{0i} \epsilon_i^{jl} \left( \Xi \eta^{abd} A_{b0j} + p^{ad}_{0j} \right) \\ &\quad - \theta_{8,ai} \epsilon^{ijl} \left( \Xi \eta^{abd} \Upsilon_{bj} + p^{ad}_j \right), \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

$$\delta \hat{T}^l = \{\hat{T}^l, G\} = 0, \quad (3.1.41)$$

$$\delta \hat{\Lambda}^l = \{\hat{\Lambda}^l, G\} = 0, \quad (3.1.42)$$

$$\delta \hat{\varsigma}^{dl} = \{\hat{\varsigma}^{dl}, G\} = 0, \quad (3.1.43)$$

$$\delta \hat{\chi}^{dl} = \{\hat{\chi}^{dl}, G\} = 0, \quad (3.1.44)$$

$$\delta p^{de0l} = \{p^{de0l}, G\} = 0, \quad (3.1.45)$$

$$\delta p^{del} = \{p^{del}, G\} = 0. \quad (3.1.46)$$

La matriz formada por el álgebra de constricciones de segunda clase llamada matriz  $C_{\alpha\beta}$  tiene la forma

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \{\Gamma_1^{a0i}, \Gamma_1^{d0l}\} & \{\Gamma_1^{a0i}, \Gamma_2^{dl}\} & \{\Gamma_1^{a0i}, \Gamma_3^{de0l}\} & \{\Gamma_1^{a0i}, \Gamma_4^{del}\} \\ \{\Gamma_2^{ai}, \Gamma_1^{d0l}\} & \{\Gamma_2^{ai}, \Gamma_2^{dl}\} & \{\Gamma_2^{ai}, \Gamma_3^{de0l}\} & \{\Gamma_2^{ai}, \Gamma_4^{del}\} \\ \{\Gamma_3^{ab0i}, \Gamma_1^{d0l}\} & \{\Gamma_3^{ab0i}, \Gamma_2^{dl}\} & \{\Gamma_3^{ab0i}, \Gamma_3^{de0l}\} & \{\Gamma_3^{ab0i}, \Gamma_4^{del}\} \\ \{\Gamma_4^{abi}, \Gamma_1^{d0l}\} & \{\Gamma_4^{abi}, \Gamma_2^{dl}\} & \{\Gamma_4^{abi}, \Gamma_3^{de0l}\} & \{\Gamma_4^{abi}, \Gamma_4^{del}\} \end{pmatrix} \quad (3.1.47)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Xi\eta^{ade}\eta^{il} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Xi\eta^{ade}\eta^{il} \\ \Xi\eta^{dab}\eta^{il} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Xi\eta^{dab}\eta^{il} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y), \quad (3.1.48)$$

y su matriz inversa  $C_{\alpha\beta}^{-1}$  es

$$C_{\alpha\beta}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\Xi}\eta_{def}\eta^{lj} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\Xi}\eta_{def}\eta_{lj} \\ \frac{1}{2\Xi}\eta_{def}\eta_{lj} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\Xi}\eta_{def}\eta^{lj} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \quad (3.1.49)$$

El paréntesis de Dirac entre dos funcionales  $F(q, p)$  y  $G(q, p)$  está definido como

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \int_{\Sigma} dudv \{F, \Gamma^\alpha(u)\} C_{\alpha\beta}^{-1} \{\Gamma^\beta(v), G\}, \quad (3.1.50)$$

donde  $u, v$  son variables de integración auxiliares,  $\Gamma^\alpha$  representa las restricciones de segunda clase y  $C_{\alpha\beta}^{-1}$  es la matriz inversa de  $C_{\alpha\beta}$  que hemos definido anteriormente. Por lo tanto, usando (3.1.49), los paréntesis de Dirac entre los campos están dados por

$$\{A_{a0i}(x), p^{d0j}(y)\}_D = \{A_{a0i}(x), p^{d0j}(y)\} = \delta_a^d \delta_i^j \delta^3(x-y), \quad (3.1.51)$$

$$\{\Upsilon_{ai}(x), \pi^{dj}(y)\}_D = \{\Upsilon_{ai}(x), \pi^{dj}(y)\} = \delta_a^d \delta_i^j \delta^3(x-y), \quad (3.1.52)$$

$$\{T_i(x), \hat{T}^j(y)\}_D = \{T_i(x), \hat{T}^j(y)\} = \delta_i^j \delta^3(x-y), \quad (3.1.53)$$

$$\{\Lambda_i(x), \hat{\Lambda}^j(y)\}_D = \{\Lambda_i(x), \hat{\Lambda}^j(y)\} = \delta_i^j \delta^3(x-y), \quad (3.1.54)$$

$$\{\varsigma_{ai}(x), \hat{\varsigma}^{dj}(y)\}_D = \{\varsigma_{ai}(x), \hat{\varsigma}^{dj}(y)\} = \delta_a^d \delta_i^j \delta^3(x-y), \quad (3.1.55)$$

$$\{\chi_{ai}(x), \hat{\chi}^{dj}(y)\}_D = \{\chi_{ai}(x), \hat{\chi}^{dj}(y)\} = \delta_a^d \delta_i^j \delta^3(x-y), \quad (3.1.56)$$

$$\{B_{ab0i}(x), p^{de0l}(y)\}_D = 0, \quad (3.1.57)$$

$$\{B_{abi}(x), p^{del}(y)\}_D = 0, \quad (3.1.58)$$

$$\{B_{ab0i}(x), A_{d0l}(y)\}_D = \frac{1}{2\Xi} \eta_{abd} \eta_{il} \delta^3(x-y), \quad (3.1.59)$$

$$\{B_{abi}(x), \Upsilon_{dl}(y)\}_D = -\frac{1}{2\Xi} \eta_{abd} \eta_{il} \delta^3(x-y). \quad (3.1.60)$$

Se puede observar que en (3.1.59) y (3.1.60) presentan una contribución del parámetro  $\Xi$  a la estructura simpléctica, lo cual se manifiesta la importancia de este parámetro a nivel Hamiltoniano. Esto no fue contemplado en [39] debido a que las constricciones encontradas son de primera clase. Cabe mencionar que si efectuamos el límite  $\Xi \rightarrow \infty$

---

entonces tanto  $B_{ab0i}, A_{d0l}$  como  $B_{abi}, \Upsilon_{dl}$  conmutan, en el límite  $\Xi \rightarrow 0$  estos paréntesis se indefinen, por lo que este caso no es considerado.

En la sección siguiente, analizaremos la segunda clase de Chern pero ahora bajo el formalismo de FJ. En esa sección encontraremos que los paréntesis de Dirac (3.1.59) y (3.1.60) coinciden con los paréntesis de FJ.

### 3.2. Análisis de Faddeev-Jackiw

Cabe recalcar que lo que se desarrollará en esta sección no se encuentra reportado en la literatura lo cual es completamente nuevo y será reportado en [59].

Partimos de la ecuación (3.1.5) para realizar nuestro análisis. Si escribimos la ecuación (3.1.5) en la forma de (2.1.1) obtenemos lo siguiente

$$\mathcal{L}^{(0)} = \Xi\eta^{abc} B_{ab}{}^{0i} \dot{A}_{c0i} + \Xi\eta^{abc} B_{abi} \dot{\Upsilon}_c{}^i - \mathcal{V}^{(0)}, \quad (3.2.1)$$

donde  $\mathcal{V}^{(0)}$  llamado el potencial simpléctico es expresado como

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{(0)} = & -A_0{}^i \left[ \partial_c (\Xi\eta^{abc} B_{abi}) + \Xi\eta^{abc} \epsilon^j{}_{ik} B_{abj} \Upsilon_c{}^k - \Xi\eta^{abc} \epsilon_{jki} B_{ab}{}^{0j} A_{c0}{}^k \right] \\ & -A_{00i} \left[ \partial_c (\Xi\eta^{abc} B_{ab}{}^{0i}) - \Xi\eta^{abc} \epsilon^i{}_{jk} B_{ab}{}^{0j} \Upsilon_c{}^k - \Xi\eta^{abc} \epsilon^{ijk} B_{abk} A_{c0j} \right] \\ & -\Xi\eta^{abc} B_{0a}{}^{0i} \left[ \partial_b A_{c0i} - \partial_c A_{b0i} + \epsilon_i{}^{jk} A_{b0j} \Upsilon_{ck} - \epsilon_{ijk} A_{c0}{}^j \Upsilon_b{}^k \right] \\ & -\Xi\eta^{abc} B_{0ai} \left[ \partial_b \Upsilon_c{}^i - \partial_c \Upsilon_b{}^i + \epsilon^i{}_{jk} \Upsilon_b{}^j \Upsilon_c{}^k - \epsilon^{ijk} A_{b0j} A_{c0k} \right] \\ & +\Xi\eta^{abc} \left[ B_{0a}{}^{0i} B_{bc0i} + B_{bc}{}^i B_{0ai} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Del Lagrangiano simpléctico (3.2.1) podemos identificar las siguientes variables simplécticas

$$\xi^{(0)} = (A_{a0i}, B_{ab}{}^{0i}, \Upsilon_a{}^i, B_{abi}, A_0{}^i, A_{00i}, B_{a0}{}^{0i}, B_{0ai}), \quad (3.2.3)$$

y la uno-forma

$$a^{(0)} = (\Xi\eta^{abc} B_{ab}{}^{0i}, 0, \Xi\eta^{abc} B_{abi}, 0, 0, 0, 0, 0). \quad (3.2.4)$$

Con lo anterior, la matriz simpléctica  $f_{ij}$  que se define como  $f_{ij}(x, y) = \frac{\delta a_j(y)}{\delta \xi^i(x)} - \frac{\delta a_i(x)}{\delta \xi^j(y)}$  está dado por

$$f_{ij}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & \Xi\eta^{dec} \delta_l^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Xi\eta^{dec} \delta_l^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Xi\eta^{dec} \delta_l^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Xi\eta^{dec} \delta_l^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \quad (3.2.5)$$

Se puede observar que la matriz (4.2.5) es singular y por tanto, la teoría tendrá constricciones. Los modos-cero de la matriz  $f_{ij}^{(0)}$  son los siguientes cuatro vectores

$$\nu_1^{(0)} = (0, 0, 0, 0, V^{A_0^i}, 0, 0, 0), \quad (3.2.6)$$

$$\nu_2^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 0, V^{A_{a0i}}, 0, 0), \quad (3.2.7)$$

$$\nu_3^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, V^{B_{a0}{}^{0i}}, 0), \quad (3.2.8)$$

$$\nu_4^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, V^{B_{a0i}}), \quad (3.2.9)$$

donde  $V^{A_0^i}$ ,  $V^{A_{a0i}}$ ,  $V^{B_{a0}{}^{0i}}$  y  $V^{B_{a0i}}$  son funciones arbitrarias. Así, usando estos cero-modos, encontramos las siguientes constricciones

$$\begin{aligned} \Omega_i^{(0)} &= \int \mathbf{d}^3x V^{A_0^i} \frac{\delta}{\delta A_0^i} \int \mathbf{d}^3y \mathcal{V}^{(0)}(\xi) \\ &= \partial_c (\Xi \eta^{abc} B_{abi}) + \Xi \eta^{abc} \epsilon_{ik}^j B_{abj} \Upsilon_c^k - \Xi \eta^{abc} \epsilon_{jki} B_{ab}{}^{0j} A_{c0}{}^k, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

$$\begin{aligned} \Omega^{(0) 00i} &= \int \mathbf{d}^3x V^{A_{a0i}} \frac{\delta}{\delta A_{a0i}} \int \mathbf{d}^3y \mathcal{V}^{(0)}(\xi) \\ &= \partial_c (\Xi \eta^{abc} B_{ab}{}^{0i}) - \Xi \eta^{abc} \epsilon_{jk}^i B_{ab}{}^{0j} \Upsilon_c^k - \Xi \eta^{abc} \epsilon^{ijk} B_{abk} A_{c0j}, \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

$$\begin{aligned} \Omega^{(0) 0a}{}_{0i} &= \int \mathbf{d}^3x V^{B_{a0}{}^{0i}} \frac{\delta}{\delta B_{a0}{}^{0i}} \int \mathbf{d}^3y \mathcal{V}^{(0)}(\xi) \\ &= \Xi \eta^{abc} \left[ \partial_b A_{c0i} - \partial_c A_{b0i} + \epsilon_i{}^{jk} A_{b0j} \Upsilon_{ck} - \epsilon_{ijk} A_{c0}{}^j \Upsilon_b{}^k + B_{ab0i} \right], \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

$$\begin{aligned} \Omega^{(0) a0i} &= \int \mathbf{d}^3x V^{B_{a0i}} \frac{\delta}{\delta B_{a0i}} \int \mathbf{d}^3y \mathcal{V}^{(0)}(\xi) \\ &= \Xi \eta^{abc} \left[ \partial_b \Upsilon_c^i - \partial_c \Upsilon_b^i + \epsilon^i{}_{jk} \Upsilon_b^j \Upsilon_c^k - \epsilon^{ijk} A_{b0j} A_{c0k} + B_{ab}{}^i \right], \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

se puede observar que (3.2.10), (3.2.11), (3.2.12) y (3.2.13) son las constricciones de FJ y además no coinciden con las constricciones secundarias que se obtuvieron en el método de Dirac. Esta diferencia se debe a que en el método de Dirac se trabajó en el espacio fase y en FJ elegimos al espacio de configuración. Ahora observaremos si no existen más constricciones, para ello, calcularemos el siguiente sistema

$$\bar{f}_{ij} \dot{\xi}^{(0)j} = Z_i(\xi), \quad (3.2.14)$$

donde

$$\bar{f}_{ij} = \begin{pmatrix} f_{ij}^{(0)} \\ \delta \Omega_i^{(0)} \\ \delta \xi^{(0)j} \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} \quad Z_k = \begin{pmatrix} \frac{\delta \mathcal{V}^{(0)}}{\delta \xi^{(0)j}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.15)$$

Por tanto, la matriz simpléctica  $\bar{f}_{ij}$  tiene la forma

$$\bar{f}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \Xi\eta^{abc}\delta_k^i & 0 \\ \Xi\eta^{abc}\delta_k^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Xi\eta^{abc}\delta_k^i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Xi\eta^{abc}\epsilon_j^k B_{ab}^{0j} & -\Xi\eta^{abc}\epsilon_k^j A_{c0j} & \Xi\eta^{abc}\epsilon_{ik}^j B_{abj} \\ -\Xi\eta^{abc}\epsilon^{ikj} B_{abj} & \Xi\eta^{abc}(\delta_k^i \partial_c - \epsilon_{kj}^i \Upsilon_c^j) & -\Xi\eta^{abc}\epsilon_{jk}^i B_{ab}^{0j} \\ 2\Xi\eta^{abc}(\delta_i^k \partial_c - \epsilon_i^{jk} \Upsilon_{bk}) & -\Xi\eta^{abc}\delta_k^i & 2\Xi\eta^{abc}\epsilon_i^j A_{b0j} \\ -2\Xi\eta^{abc}\epsilon^{ijk} A_{b0j} & 0 & 2\Xi\eta^{abc}(\delta_k^i \partial_b + \epsilon_{jk}^i \Upsilon_b^j) \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \quad (3.2.16)$$

La matriz  $\bar{f}_{ij}$  no es cuadrada como se esperaba, sin embargo, tiene vectores nulos, los cuales están dados por

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= (-\epsilon_{ijl} A_{c0}^j V^l, \epsilon_{jil} B_{ab}^{0j} V^l, \partial_c V_i + \epsilon_{ijl} \Upsilon_c^l V^j, -\epsilon_{li}^j B_{abj} V^l, 0, 0, 0, 0, V^i, 0, 0, 0), \\ \vec{V}_2 &= (\partial_c V_i - \epsilon_{ij}^l \Upsilon_c^j V_l, \epsilon_i^l B_{abj} V_l, -\epsilon_i^{lj} A_{c0j} V_l, \epsilon_{lji} B_{ab}^{0j} V^l, 0, 0, 0, 0, 0, V^i, 0, 0), \\ \vec{V}_3 &= (V_i, -2(\partial_b V_i - \epsilon_l^{ji} \Upsilon_{bj} V^l), 0, -2\epsilon_l^j A_{b0j} V^l, 0, 0, 0, 0, 0, 0, V^i, 0), \\ \vec{V}_4 &= (0, 2\epsilon^{lj} A_{b0j} V_l, -V_i, -2(\partial_b V_i + \epsilon_{lji} \Upsilon_b^j V^l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, V^i). \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Por otro lado,  $Z_i(\xi)$  está dado por

$$\begin{aligned}
Z_i(\xi) &= \begin{pmatrix} \frac{\delta \mathcal{V}^{(i)}}{\delta \xi^{(0)j}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \Xi \eta^{abc} \epsilon_j^k A_0^i B_{ab}{}^{0j} + \Xi \eta^{abc} \epsilon^{ikj} A_{00i} B_{abj} + 2\Xi \eta^{abc} \partial_b B_{0a}{}^{0k} \\ \quad - 2\Xi \eta^{abc} \epsilon_i^{kj} B_{0a}{}^{0i} \Upsilon_{cj} + 2\Xi \eta^{abc} \epsilon^{ijk} B_{0ai} A_{b0j} \\ \\ \Xi \eta^{abc} \epsilon_{ikj} A_0^j A_{c0}{}^k + \Xi \eta^{abc} \partial_c A_{00i} + \Xi \eta^{abc} \epsilon^j{}_{ik} A_{00j} \Upsilon_c{}^k \\ \\ -\Xi \eta^{abc} \epsilon^j{}_{ik} A_0^i B_{abj} + \Xi \eta^{abc} \epsilon^i{}_{jk} A_{00i} B_{ab}{}^{0j} - 2\Xi \eta^{abc} \epsilon_i{}^{jk} A_{b0j} B_{0a}{}^{0i} \\ \quad - 2\Xi \eta^{abc} \partial_b B_{0ak} - 2\epsilon^i{}_{jk} \Upsilon_b{}^j B_{0ai} \\ \\ \Xi \eta^{abc} \partial_c A_0^i - \Xi \eta^{abc} \epsilon^i{}_{jk} A_0^j \Upsilon_c{}^k + \Xi \eta^{abc} \epsilon^{jki} A_{00j} A_{c0k} \\ \\ \Omega_i^{(0)} \\ \Omega^{(0) 00i} \\ \Omega^{(0) 0a}{}_{0i} \\ \Omega^{(0) 0ai} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.18)
\end{aligned}$$

La contracción de los vectores nulos con  $Z_i$ , es decir, la contracción  $\vec{V}_i^\mu Z_\mu(\xi) = 0$  dan identidades, es decir, se obtienen combinaciones lineal de constricciones. Por tanto, no hay más constricciones en la teoría. Cabe mencionar que es de esperarse este resultado debido a que en el análisis de Dirac, no se obtienen constricciones terciarias.

Ahora, agregaremos las constricciones encontradas en (3.2.10), (3.2.11), (3.2.12) y (3.2.13)

al Lagrangiano simpléctico usando los siguientes multiplicadores de Lagrange los cuales llamaremos  $A_0^i = \dot{T}^i$ ,  $A_{00i} = \dot{\Lambda}_i$ ,  $B_{0a}{}^{0i} = \frac{\zeta_a^i}{2}$ ,  $B_{0ai} = \frac{\dot{\chi}_{ai}}{2}$ . Con lo anterior, el Lagrangiano simpléctico toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)} = & \Xi\eta^{abc} B_{ab}{}^{0i} \dot{A}_{c0i} + \Xi\eta^{abc} B_{abi} \dot{\Upsilon}_c^i - \dot{T}^i \Omega_i^{(0)} - \dot{\Lambda}_i \Omega^{(0) 00i} - \frac{\dot{\zeta}_a^i}{2} \Omega^{(0) 0a}{}_{0i} \\ & - \frac{\dot{\chi}_{ai}}{2} \Omega^{(0) 0ai} - \mathcal{V}^{(1)}, \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

donde  $\mathcal{V}^{(1)} = \mathcal{V}^{(0)}|_{\Omega_i^{(0)}, \Omega^{(0) 00i}, \Omega^{(0) 0a}{}_{0i}, \Omega^{(0) 0ai}=0} = 0$ .

Del Lagrangiano simpléctico (3.2.19) podemos identificar las siguientes variables simplécticas

$$\xi^{(1)} = (A_{a0i}, B_{ab}{}^{0i}, \Upsilon_a^i, B_{abi}, A_0^i, A_{00i}, B_{a0}{}^{0i}, B_{0ai}, T^i, \Lambda_i, \zeta_a^i, \chi_{ai}), \quad (3.2.20)$$

y la uno-forma

$$a^{(1)} = \left( \Xi\eta^{abc} B_{ab}{}^{0i}, 0, \Xi\eta^{abc} B_{abi}, 0, -\Omega^{(0) i}, -\Omega^{(0) 00i}, -\frac{\Omega^{(0) 0a}{}_{0i}}{2}, -\frac{\Omega^{(0) 0ai}}{2} \right). \quad (3.2.21)$$

Por tanto, la matriz simpléctica está dada por

$$f_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \Xi\eta^{abc} \delta_k^i & 0 & 0 \\ \Xi\eta^{abc} \delta_k^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Xi\eta^{abc} \delta_k^i \\ 0 & 0 & \Xi\eta^{abc} \delta_k^i & 0 \\ -\Xi\eta^{abc} \epsilon_{j i}^k B_{ab}{}^{0j} & -\Xi\eta^{abc} \epsilon_{k i}^j A_{c0j} & \Xi\eta^{abc} \epsilon_{ik}^j B_{abj} & \Xi\eta^{abc} D_{kc}^i \\ -\Xi\eta^{abc} \epsilon^{ikj} B_{abj} & \Xi\eta^{abc} d_{kc}^i & -\Xi\eta^{abc} \epsilon_{jk}^i B_{ab}{}^{0j} & -\Xi\eta^{abc} \epsilon^{ijk} A_{c0j} \\ \Xi\eta^{abc} d_{kc}^i & -\frac{\Xi}{2} \eta^{abc} \delta_k^i & \Xi\eta^{abc} \epsilon_{i k}^j A_{b0j} & 0 \\ -\Xi\eta^{abc} \epsilon^{ijk} A_{b0j} & 0 & \Xi\eta^{abc} d_{kb}^i & -\Xi\eta^{abc} \delta_k^i \end{pmatrix} \delta^3(x-y), \quad (3.2.22)$$

donde  $D_{kc}^i = \delta_k^i \partial_c + \epsilon_k^{ij} \Upsilon_{cj}$  y  $d_{kc}^i = \delta_k^i \partial_c - \epsilon_k^{ij} \Upsilon_{cj}$ . Se puede encontrar que la matriz (3.2.22) es singular, sin embargo, no se pueden encontrar más constricciones, por tanto la teoría bajo estudio tiene una simetría de norma, tal como se espera del resultado obtenido en el análisis de Dirac. Para obtener un tensor simpléctico, debemos fijar la norma, de tal forma que podamos transformar la matriz (3.2.22) en una nueva matriz que no sea singular. Con lo anterior mencionado, fijaremos la siguiente norma temporal

$$A_0^i = 0 \quad (3.2.23)$$

$$A_{00i} = 0 \quad (3.2.24)$$

$$B_{0a}^{0i} = 0 \quad (3.2.25)$$

$$B_{0ai} = 0, \quad (3.2.26)$$

esto quiere decir que  $\dot{T}^i = 0, \dot{\Lambda}_i = 0, \dot{\zeta}_a^i = 0$  y  $\dot{\chi}_{ai} = 0$ . Introduciremos esto con los siguientes multiplicadores  $\beta_i, \alpha^i, \rho_i^a, \sigma_a^i$ , por tanto, el Lagrangiano simpléctico es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} = & \Xi \eta^{abc} B_{ab}^{0i} \dot{A}_{c0i} + \Xi \eta^{abc} B_{abi} \dot{\Upsilon}_c^i - \dot{T}^i \left[ \Omega_i^{(0)} - \beta_i \right] - \dot{\Lambda}_i \left[ \Omega^{(0) 00i} - \alpha^i \right] \\ & - \dot{\zeta}_a^i \left[ \frac{\Omega^{(0) 0a}_{0i}}{2} - \rho_i^a \right] - \dot{\chi}_{ai} \left[ \frac{\Omega^{(0) 0ai}}{2} - \sigma^{ai} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Del Lagrangiano simpléctico (4.2.27) podemos identificar las siguientes variables simplécticas

$$\xi^{(2)} = (A_{a0i}, B_{ab}^{0i}, \Upsilon_a^i, B_{abi}, A_0^i, A_{00i}, B_{a0}^{0i}, B_{0ai}, T^i, \Lambda_i, \zeta_a^i, \chi_{ai}, \beta_i, \alpha^i, \rho_i^a, \sigma^{ai}), \quad (3.2.28)$$

y la uno-forma

$$a^{(2)} = \left( \Xi \eta^{abc} B_{ab}^{0i}, 0, \Xi \eta^{abc} B_{abi}, 0, - \left[ \Omega_i^{(0)} - \beta_i \right], - \left[ \Omega^{(0) 00i} - \alpha^i \right], \quad (3.2.29) \right.$$

$$\left. - \left[ \frac{\Omega^{(0) 0a}_{0i}}{2} - \rho_i^a \right], - \left[ \frac{\Omega^{(0) 0ai}}{2} - \sigma^{ai} \right] \right). \quad (3.2.30)$$

Por tanto, la matriz simpléctica ahora es

$$f_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \Xi\eta^{abc}\delta_k^i & 0 & 0 & \Xi\eta^{abc}\epsilon_j^k B_{ab}^{0j} \\ \Xi\eta^{abc}\delta_k^i & 0 & 0 & 0 & \Xi\eta^{abc}\epsilon_k^j A_{c0j} \\ 0 & 0 & 0 & -\Xi\eta^{abc}\delta_k^i & -\Xi\eta^{abc}\epsilon_{ik}^j B_{abj} \\ 0 & 0 & \Xi\eta^{abc}\delta_k^i & 0 & -\Xi\eta^{abc}D_{kc}^i \\ -\Xi\eta^{abc}\epsilon_j^k B_{ab}^{0j} & -\Xi\eta^{abc}\epsilon_k^j A_{c0j} & \Xi\eta^{abc}\epsilon_{ik}^j B_{abj} & \Xi\eta^{abc}D_{kc}^i & 0 \\ -\Xi\eta^{abc}\epsilon^{ikj} B_{abj} & \Xi\eta^{abc}d_{kc}^i & -\Xi\eta^{abc}\epsilon_{jk}^i B_{ab}^{0j} & -\Xi\eta^{abc}\epsilon^{ijk} A_{c0j} & 0 \\ \Xi\eta^{abc}d_{kc}^i & -\frac{\Xi}{2}\eta^{abc}\delta_k^i & \Xi\eta^{abc}\epsilon_{ik}^j A_{b0j} & 0 & 0 \\ -\Xi\eta^{abc}\epsilon^{ijk} A_{b0j} & 0 & \Xi\eta^{abc}d_{kb}^i & -\Xi\eta^{abc}\delta_k^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Xi\eta^{abc}\epsilon^{ikj} B_{abj} & -\Xi\eta^{abc}d_{kc}^i & \Xi\eta^{abc}\epsilon^{ijk} A_{b0j} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Xi\eta^{abc}d_{kc}^i & \frac{\Xi}{2}\eta^{abc}\delta_k^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Xi\eta^{abc}\epsilon_{jk}^i B_{ab}^{0j} & -\Xi\eta^{abc}\epsilon_i^{jk} A_{b0j} & -\Xi\eta^{abc}d_{kb}^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Xi\eta^{abc}\epsilon^{ijk} A_{c0j} & 0 & \frac{\Xi}{2}\eta^{abc}\delta_k^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_b^a \delta_j^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_b^a \delta_j^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_b^a \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_b^a \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y) \quad (3.2.31)$$

Se puede observar que la matriz simpléctica (3.2.31) no es singular, por tanto, tiene inversa. Después de un largo cálculo, se encuentra la siguiente matriz simpléctica inversa

$$\begin{aligned}
f_{ij}^{(2)-1} = & \begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{2\Xi}\eta_{abg}\delta_l^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2\Xi}\eta_{abg}\delta_l^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\Xi}\eta_{abg}\delta_l^k & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2\Xi}\eta_{abg}\delta_l^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\epsilon_l^m A_{g0m} & -\epsilon^{lj} B_{de}{}^{0m} & -D_{gl}{}^j & \epsilon^{mj} B_{bgm} & -\delta_i^k & 0 & 0 & 0 \\
-d_{gl}{}^j & -\epsilon^{jlm} B_{dem} & \epsilon^{jm} A_{g0m} & -\epsilon^{jml} B_{bg}{}^{0m} & 0 & -\delta_i^k & 0 & 0 \\
\frac{1}{2}\delta_a^c \delta_b^d \delta_l^j & \frac{1}{2}\delta_{ag}^{de} d_e{}^{lj} & 0 & -\frac{1}{2}\delta_{ag}^{de} \epsilon^{jm} A_{d0m} & 0 & 0 & -\delta_a^c \delta_i^k & 0 \\
0 & -\frac{1}{2}\delta_{ag}^{de} \epsilon^{jml} A_{e0m} & -\frac{1}{2}\delta_a^c \delta_l^j \delta_g^b & \frac{1}{2}\delta_{ag}^{de} d_d{}^{lj} & 0 & 0 & 0 & -\delta_a^c \delta_i^k
\end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & -\epsilon^{ij} A_{c0j} & d_{ci}{}^l & -\frac{1}{2}\delta_a^f \delta_l^i & 0 \\
0 & 0 & 0 & \epsilon_{jil} B_{ab}{}^{0j} & \epsilon^l{}_{ij} B_{abj} & -\delta_a^f d_b{}^l{}_i & \delta_a^f \epsilon^l{}_{ij} A_{b0j} \\
0 & 0 & 0 & D_c{}^{il} & -\epsilon^l{}_{ij} A_{c0j} & 0 & \frac{1}{2}\delta_a^f \delta_{il} \\
0 & 0 & 0 & -\epsilon^{jli} B_{abj} & \epsilon^l{}_{ji} B_{ab}{}^{0j} & -\delta_a^f \epsilon^l{}_{ij} A_{b0j} & -\delta_a^f d_{bi}{}^l \\
0 & 0 & 0 & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j^i & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_b^a \delta_j^i & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_b^a \delta_j^i \\
0 & 0 & 0 & 0 & -G_{kl} & E_l^k & -H_{kl} \\
-\delta_j^i & 0 & 0 & C_{kl} & 0 & -I_l^k & -J_l^k \\
0 & -\delta_b^a \delta_j^i & 0 & E_l^k & -I_l^k & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\delta_b^a \delta_j^i & H_{kl} & -J_l^k & 0 & 0
\end{pmatrix} \delta^3(x-y),
\end{aligned} \tag{3.2.32}$$

donde

$$C_{kl} = \Xi \eta^{abc} \left( \epsilon_{jik} d_c{}^{il} B_{ab}{}^{0j} - \epsilon^{jl}{}_i D_{kc}{}^i B_{abj} \right), \tag{3.2.33}$$

$$G_{kl} = \Xi \eta^{abc} \left( -d^i{}_{kb} D_{cil} + \epsilon^{ij}{}_k \epsilon_i{}^m{}_l A_{b0j} A_{c0m} - \frac{1}{2} \epsilon^j{}_{lk} B_{abj} \right), \tag{3.2.34}$$

$$E_{kl} = \Xi \eta^{abc} \left( -\epsilon^{ij}{}_k A_{b0j} D_c{}^i{}_l + \epsilon^{ij}{}_l A_{c0j} d_{ikc} - \frac{1}{2} \epsilon_j{}^{il} B_{ab}{}^{0j} \right), \tag{3.2.35}$$

$$J_{kl} = \frac{\Xi}{2} \eta^{abc} \epsilon_{jkl} B_{ab}{}^{0j}, \tag{3.2.36}$$

$$I_{kl} = \Xi \eta^{abc} \left( d^i_{kb} d_{cil} - \epsilon_l^j d^i_{kb} A_{c0j} + \frac{1}{2} \epsilon_{ljk} B_{ab}{}^{0j} \right). \quad (3.2.37)$$

Del tensor simpléctico (4.2.32) se pueden identificar los paréntesis de FJ

$$\{\xi_i^{(2)}(x), \xi_j^{(2)}(y)\}_{FJ} = \left[ f_{ij}^{(2)}(x, y) \right]^{-1}, \quad (3.2.38)$$

por tanto, se pueden identificar los siguientes paréntesis

$$\{B_{ab0i}(x), A_{d0l}(y)\}_{FJ} = \frac{1}{2\Xi} \eta_{abd} \eta_{il} \delta^3(x - y), \quad (3.2.39)$$

$$\{B_{abi}(x), \Upsilon_{dl}(y)\}_{FJ} = -\frac{1}{2\Xi} \eta_{abd} \eta_{il} \delta^3(x - y), \quad (3.2.40)$$

donde se puede observar que los paréntesis de Dirac y los de Faddeev coinciden uno con otro. Por otra parte, en éste análisis hay menos restricciones que en análisis de Dirac, en este sentido, es más económico. Como hemos comentado desde el principio, el formalismo de FJ no hay clasificación de constricciones, todas están al mismo nivel. Por tanto, el conteo de grados de libertad se realiza con la siguiente manera [GL=variables dinámicas - constricciones independientes], es decir, hay 18 variables canónicas dadas por  $(A_{c0i}, \Upsilon_c^i)$  y 18 constricciones independientes  $(\Omega^{(0) i}, \Omega^{(0) 00i}, \Omega^{(0) 0ai}, \Omega^{(0) 0a}_{0i})$ , lo cuál nos da una teoría que carece de grados de libertad, que es de esperarse debido a que es bien conocido que la segunda clase de Chern es una teoría topológica. Es importante comentar nuevamente que los resultados encontrados en esta sección no se encuentran en la literatura, los cuales serán publicados en [59].

En el siguiente capítulo presentaremos el invariante de Euler analizado bajo los mismos formalismos que aplicamos a la segunda clase de Chern.



# Capítulo 4

## El invariante de Euler

Como se mencionó en el capítulo anterior, la segunda clase de Chern es un invariante topológico debido a que identifica ciertas características de la variedad asociada. Vista como una teoría de campo es una teoría topológica ya que carece de grados de libertad locales, puede ser escrita como una diferencial total y debido a esto no contribuye a nivel clásico pero su contribución es importante en la estructura simpléctica de la teoría a la que fue agregada [60]. De todo lo anterior, el invariante de Euler comparte todas estas características. Sin embargo, la diferencia en estas dos radica en que el invariante de Euler identifica la topología de la variedad base.

Como en el capítulo anterior, en [39] se analizó este invariante bajo el formalismo de Dirac reducido, encontrando que todas las constricciones de la teoría eran de primera clase. Debido a que se trabajó con el espacio fase reducido, no se puede comparar los resultados obtenidos en [39] con el análisis de FJ. Por lo anterior mencionado, en esta sección aplicaremos el formalismo de Dirac estricto al invariante de Euler para poder compararlo con el de FJ que mostraremos más adelante.

### 4.1. Análisis Hamiltoniano

El invariante de Euler escrito como una teoría tipo BF tiene la siguiente forma

$$S[A_\mu^{IJ}, B_{\alpha\beta}^{KL}] = \Omega \int_M \left[ *F^{IJ}[A] \wedge B_{IJ} - \frac{1}{2} * B^{IJ} \wedge B_{IJ} \right], \quad (4.1.1)$$

donde  $*$  =  $\epsilon^{KL}_{IJ}$  es el dual de  $SO(3, 1)$ ,  $\Omega$  es una constante,  $M$  es la variedad del espacio-tiempo,  $F$  es una 2-forma llamada la curvatura de la conexión dada como  $F^{IJ}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta^{IJ} - \partial_\beta A_\alpha^{IJ} + A_\alpha^I A_\beta^{KJ} - A_\alpha^J A_\beta^{KI}$  y  $A_\mu^{IJ}$  es la conexión valuada en el grupo

$SO(3, 1)$ . Aquí  $I, J, K, L = 0, 1, 2, 3$  son los índices de grupo que pueden ser subidos y bajados por una métrica tipo Minkowski  $\eta^{IJ}$ . También  $B^{IJ} = \frac{1}{2}B_{\alpha\beta}^{IJ}dx^\alpha \wedge dx^\beta$  donde  $x^\mu$  son las coordenadas espacio-temporales con  $\alpha, \beta, \mu = 0, 1, 2, 3$ .

Haciendo la misma suposición sobre la variedad  $M$  como en la segunda clase de Chern, es decir  $M = \Sigma \times R$ , podemos efectuar la descomposición  $3 + 1$  de la acción (4.1.1), de esta forma obtenemos la siguiente densidad Lagrangiana

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \Omega\eta^{abc} \left[ \frac{1}{2}\epsilon^{0j}_{kl}\dot{A}_a^{kl}B_{0jbc} + \frac{1}{2}\epsilon_0^{jk}{}_l\dot{A}_a^{0l}B_{jkbc} \right. \\
& + \frac{1}{2}A_0^{kl}(\epsilon^{0j}_{kl}\partial_a B_{0jbc} + 2\epsilon^{0j}_{km}A_{al}{}^m + \epsilon^{0jm}_k A_{al}{}^0 B_{jmbc}) \\
& + \frac{1}{2}A_0^{0l}(\epsilon_0^{jk}{}_l\partial_a B_{jkbc} + \epsilon_0^{jk}{}_m A_{al}{}^m B_{jkbc} + 2\epsilon^{0j}_{lk}A_a{}^{0k}B_{0jbc}) \\
& + \frac{1}{2}\epsilon_{0jkl}B_{0c}{}^{0j}(\partial_a A_b{}^{kl} - \partial_b A_a{}^{kl} + 2A_a{}^k{}_0 A_b{}^{0l} + 2A_a{}^k{}_m A_b{}^{ml}) \\
& + \frac{1}{2}\epsilon_{0jkl}B_{0c}{}^{jk}(\partial_a A_b{}^{0l} - \partial_b A_a{}^{0l} + A_a{}^0{}_m A_b{}^{ml} - A_a{}^l{}_m A_b{}^{m0}) \\
& \left. - \frac{1}{4}\epsilon^{0j}_{kl}(B_{0a}{}^{kl}B_{bc0j} + B_{ab}{}^{kl}B_{0c0j}) - \frac{1}{4}\epsilon_0^{jk}{}_l(B_{a0}{}^{0l}B_{bcjk} + B_{ab}{}^{0l}B_{0cjk}) \right], (4.1.2)
\end{aligned}$$

aquí  $a, b, c = 1, 2, 3$  corresponden a los índices espacio-temporales,  $\epsilon^{0abc} = \eta^{abc}$  y  $i, j, k = 1, 2, 3$  corresponden a los índices de grupo, donde ambos índices pueden ser subidos y bajados con la métrica euclidiana  $\eta^{ij} = (1, 1, 1)$ . Introduciendo las variables (3.1.4) con  $\epsilon^{0ijk} \equiv \epsilon^{ijk}$  obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\Omega\eta^{abc}\dot{\Upsilon}_a{}^j B_{0jbc} + \Omega\eta^{abc}\dot{A}_a{}^0 B_{bc}{}^l \\
& -A_0{}^i [\partial_a (\Omega\eta^{abc} B_{bc0i}) + \Omega\eta^{abc}\epsilon_{in}^j \Upsilon_a{}^n B_{0jbc} - \Omega\eta^{abc}\epsilon_{kli}A_a{}^{l0} B_{bc}{}^k] \\
& -A_{00l} [\partial_a (\Omega\eta^{abc} B_{bc}{}^l) - \Omega\eta^{abc}\epsilon_{in}^l \Upsilon_a{}^n B_{bc}{}^i + \Omega\eta^{abc}\epsilon_{jk}^{jl} A_a{}^{0k} B_{bc0j}] \\
& + \Omega\eta^{abc} B_{0c}{}^{0j} [\partial_a \Upsilon_{bj} - \partial_b \Upsilon_{aj} - \epsilon_{jkl}A_a{}^k{}_0 A_b{}^{0l} + \epsilon_{jin} \Upsilon_a{}^i \Upsilon_b{}^n] \\
& + \Omega\eta^{abc} B_{0ci} [\partial_a A_b{}^{0i} - \partial_b A_a{}^{0i} - \epsilon_{in}^m A_a{}^0{}_m \Upsilon_b{}^n + \epsilon_{mn}^i A_b{}^{m0} \Upsilon_a{}^n] \\
& + \Omega\eta^{abc} [B_{ab}{}^i B_{0c0i} + B_{0a}{}^i B_{bc0i}], \tag{4.1.3}
\end{aligned}$$

si introducimos ahora (3.1.6) encontramos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \Omega\eta^{abc}\dot{\Upsilon}_{al}B_{bc}{}^{0l} - \Omega\eta^{abc}\dot{A}_{a0l}B_{bc}{}^l \\
& - T^i [\partial_a (\Omega\eta^{abc}B_{bc}{}^{0i}) - \Omega\eta^{abc}\epsilon_{ijk}B_{bc}{}^{0j}\Upsilon_a{}^k - \Omega\eta^{abc}\epsilon_{kji}A_a{}^{0j}B_{bc}{}^k] \\
& + \Lambda_l [\partial_a (\Omega\eta^{abc}B_{bc}{}^l) + \Omega\eta^{abc}\epsilon_n{}^{il}B_{bci}\Upsilon_a{}^n - \Omega\eta^{abc}\epsilon_{jkl}A_{a0}{}^k B_{bc}{}^{0j}] \\
& - \frac{\Omega}{2}\eta^{abc}\zeta_c{}^j [\partial_a \Upsilon_{bj} - \partial_b \Upsilon_{aj} - \epsilon_j{}^{kl}A_{a0k}A_{b0l} + \epsilon_{jin}\Upsilon_a{}^i \Upsilon_b{}^n - B_{abj}] \\
& + \frac{\Omega}{2}\eta^{abc}\chi_{ci} [\partial_a A_{b0}{}^i - \partial_b A_{a0}{}^i + \epsilon_n{}^{im}A_{a0m}\Upsilon_b{}^n - \epsilon_{mn}^j A_{b0}{}^m \Upsilon_a{}^n - B_{ab0}{}^i]. \quad (4.1.4)
\end{aligned}$$

Utilizando los momentos canónicos definidos en la segunda clase de Chern (3.1.8) tendremos la siguiente densidad Lagrangiana

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{\Omega}{\Xi}\dot{\gamma}_{al}p^{a0l} - \frac{\Omega}{\Xi}\dot{A}_{a0l}\pi^{al} \\
& - \frac{\Omega}{\Xi}T^i [\partial_a p^{a0}{}_i + \epsilon_{ij}{}^k A_{a0k}\pi^{aj} - \epsilon_{ij}{}^k p^{a0j}\Upsilon_{ak}] \\
& + \frac{\Omega}{\Xi}\Lambda_i [\partial_a \pi^{ai} - \epsilon^i{}_{jk}\pi^{aj}\Upsilon_{ak} + \epsilon_{ik}{}^j p^{a0k}A_{a0j}] \\
& - \frac{\Omega}{2}\eta^{abc}\zeta_a{}^i [\partial_b \Upsilon_{ci} - \partial_c \Upsilon_{bi} - \epsilon_i{}^{jk}A_{b0j}A_{c0k} + \epsilon_{ijk}\Upsilon_b{}^j \Upsilon_c{}^k] \\
& + \frac{\Omega}{2}\eta^{abc}\chi_{ai} [\partial_b A_{c0}{}^i - \partial_c A_{b0}{}^i + \epsilon^{ij}{}_k A_{b0j}\Upsilon_c{}^k - \epsilon^i{}_{jk}A_{c0}{}^j \Upsilon_b{}^k] \\
& + \frac{\Omega}{2}\eta^{abc} [\zeta_c{}^j B_{abj} - \chi_a{}^j B_{bc0j}], \quad (4.1.5)
\end{aligned}$$

de donde podemos identificar los siguientes paréntesis fundamentales de Poisson entre los campos a tiempos iguales

$$\begin{aligned}
\{\Upsilon_{ai}(x), p^{b0j}(y)\} &= \frac{\Xi}{\Omega}\delta_a^b \delta_i^j \delta^3(x-y), \\
\{A_{a0i}(x), \pi^{bj}(y)\} &= -\frac{\Xi}{\Omega}\delta_a^b \delta_i^j \delta^3(x-y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{T_i(x), \hat{T}^j(y)\} &= \delta_i^j \delta^3(x-y), \\
\{\Lambda_i(x), \hat{\Lambda}^j(y)\} &= \delta_i^j \delta^3(x-y), \\
\{\varsigma_{ai}(x), \hat{\varsigma}^{bj}(y)\} &= \delta_a^b \delta_i^j \delta^3(x-y), \\
\{\chi_{ai}(x), \hat{\chi}^{bj}(y)\} &= \delta_a^b \delta_i^j \delta^3(x-y), \\
\{B_{ab0i}(x), p^{de0j}(y)\} &= \frac{1}{2} (\delta_a^d \delta_b^e - \delta_a^e \delta_b^d) \delta_i^j \delta^3(x-y), \\
\{B_{abi}(x), p^{dej}(y)\} &= \frac{1}{2} (\delta_a^d \delta_b^e - \delta_a^e \delta_b^d) \delta_i^j \delta^3(x-y).
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Es importante mencionar que usaremos las mismas variables del espacio fase que usamos en la segunda clase de Chern, así de la definición de los momentos canónicos, podemos identificar la siguientes 60 constricciones primarias

$$\begin{aligned}
\phi_1^{a0i} &\equiv p^{a0i} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^{0i} \approx 0, \\
\phi_2^{ai} &\equiv \pi^{ai} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^i \approx 0, \\
\phi_3^i &\equiv \hat{T}^i \approx 0, \\
\phi_4^i &\equiv \hat{\Lambda}^i \approx 0, \\
\phi_5^{ai} &\equiv \hat{\varsigma}^{ai} \approx 0, \\
\phi_6^{ai} &\equiv \hat{\chi}^{ai} \approx 0, \\
\phi_7^{ab0i} &\equiv p^{ab0i} \approx 0, \\
\phi_8^{abi} &\equiv p^{abi} \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

El Hamiltoniano canónico de la teoría esta dado por

$$\begin{aligned}
H_c &= \int_M \left[ \dot{A}_{c0i} \pi^{ci} + \dot{\Upsilon}_{ci} p^{c0i} + \dot{T}_i \hat{T}^i + \dot{\Lambda}_i \hat{\Lambda}^i + \dot{\varsigma}_{ai} \hat{\varsigma}^{ai} + \dot{B}_{ab0i} p^{ab0i} + \dot{B}_{abi} p^{abi} - \mathcal{L} \right] d^3x \\
&= \int_M \left( \frac{\Omega}{\Xi} T^i [\partial_a p^{a0}{}_i + \epsilon_{ij}{}^k A_{a0k} \pi^{aj} - \epsilon_{ij}{}^k p^{a0j} \Upsilon_{ak}] \right. \\
&\quad - \frac{\Omega}{\Xi} \Lambda_i [\partial_a \pi^{ai} - \epsilon^i{}_{jk} \pi^{aj} \Upsilon_{ak} + \epsilon_i{}^j{}_k p^{a0k} A_{a0j}] \\
&\quad + \frac{\Omega}{2} \eta^{abc} \varsigma_a{}^i [\partial_b \Upsilon_{ci} - \partial_c \Upsilon_{bi} - \epsilon_i{}^{jk} A_{b0j} A_{c0k} + \epsilon_{ijk} \Upsilon_b{}^j \Upsilon_c{}^k] \\
&\quad - \frac{\Omega}{2} \eta^{abc} \chi_{ai} [\partial_b A_{c0}{}^i - \partial_c A_{b0}{}^i + \epsilon^{ij}{}_k A_{b0j} \Upsilon_c{}^k - \epsilon^i{}_{jk} A_{c0}{}^j \Upsilon_b{}^k] \\
&\quad \left. + \frac{\Omega}{\Xi} \frac{1}{2} \varsigma_{ai} \pi^{ai} - \frac{\Omega}{\Xi} \frac{1}{2} \chi_{ai} p^{a0i} \right] d^3x,
\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

agregando a la ecuación (4.1.8) las constricciones primarias obtenemos el Hamiltoniano primario dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
H_1 &= H_c + \int_M \left[ \lambda_{a0i} (p^{a0i} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^{0i}) + \lambda_{ai} (\pi^{ai} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^i) + \alpha_i \hat{T}^i + \beta_i \hat{\Lambda}^i + \theta_{ai} \hat{\zeta}^{ai} + \mu_{ai} \hat{\chi}^{ai} \right. \\
&\quad \left. + \lambda_{ab0i} p^{ab0i} + \lambda_{abi} p^{abi} \right] d^3x \\
&= \int_M \left( \frac{\Omega}{\Xi} T^i [\partial_a p^{a0i} + \epsilon_{ij}{}^k A_{a0k} \pi^{aj} - \epsilon_{ij}{}^k p^{a0j} \Upsilon_{ak}] \right. \\
&\quad - \frac{\Omega}{\Xi} \Lambda_i [\partial_a \pi^{ai} - \epsilon^i{}_{jk} \pi^{aj} \Upsilon_{ak} + \epsilon^i{}_{jk} p^{a0k} A_{a0j}] \\
&\quad + \frac{\Omega}{2} \eta^{abc} \zeta_a{}^i [\partial_b \Upsilon_{ci} - \partial_c \Upsilon_{bi} - \epsilon_i{}^{jk} A_{b0j} A_{c0k} + \epsilon_{ijk} \Upsilon_b{}^j \Upsilon_c{}^k] \\
&\quad - \frac{\Omega}{2} \eta^{abc} \chi_{ai} [\partial_b A_{c0}{}^i - \partial_c A_{b0}{}^i + \epsilon^{ij}{}_{k} A_{b0j} \Upsilon_c{}^k - \epsilon^i{}_{jk} A_{c0}{}^j \Upsilon_b{}^k] \\
&\quad + \frac{\Omega}{\Xi} \zeta_{ai} \pi^{ai} - \frac{\Omega}{\Xi} \chi_{ai} p^{a0i} + \lambda_{a0i} (p^{a0i} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^{0i}) + \lambda_{ai} (\pi^{ai} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^i) + \alpha_i \hat{T}^i + \beta_i \hat{\Lambda}^i \\
&\quad \left. + \theta_{ai} \hat{\zeta}^{ai} + \mu_{ai} \hat{\chi}^{ai} + \lambda_{ab0i} p^{ab0i} + \lambda_{abi} p^{abi} \right] d^3x, \tag{4.1.9}
\end{aligned}$$

donde  $\lambda_{a0i}$ ,  $\lambda_{ai}$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\theta_{ai}$ ,  $\mu_{ai}$ ,  $\lambda_{ab0i}$ ,  $\lambda_{abi}$  son los multiplicadores de Lagrange. De la consistencia de las constricciones, identificamos las siguientes 24 constricciones secundarias

$$\dot{\phi}_3^i \approx 0 \Rightarrow \psi_3^l \equiv \partial_a p^{a0i} - \epsilon^i{}_{jk} p^{a0j} \Upsilon_a{}^k - \epsilon^{ijk} \pi_k^a A_{a0j} \approx 0, \tag{4.1.10}$$

$$\dot{\phi}_4^i \approx 0 \Rightarrow \phi_4^i \equiv \partial_a \pi^{ai} - \epsilon^{ijk} \pi_j^a \Upsilon_{ak} - \epsilon^i{}_{jk} p^{a0j} A_{a0}{}^k \approx 0, \tag{4.1.11}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_5^{ai} \approx 0 \Rightarrow \psi_5^{ai} &\equiv \frac{\Omega}{2} \eta^{abc} [\partial_b \Upsilon_c{}^i - \partial_c \Upsilon_b{}^i - \epsilon^{ijk} A_{b0j} A_{c0k} + \epsilon^i{}_{jk} \Upsilon_b{}^j \Upsilon_c{}^k] \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\Omega}{\Xi} \pi^{ai} \approx 0, \tag{4.1.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_6^{ai} \approx 0 \Rightarrow \psi_6^{ai} &\equiv \frac{\Omega}{2} \eta^{abc} [\partial_b A_c{}^{0i} - \partial_c A_b{}^{0i} + \epsilon^{ij}{}_{k} A_{c0j} \Upsilon_b{}^k - \epsilon^{ijk} A_{b0j} \Upsilon_{ck}] \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\Omega}{\Xi} p^{a0i} \approx 0, \tag{4.1.13}
\end{aligned}$$

y los siguientes 36 multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} \lambda_{abo}{}^l \approx & \frac{1}{2\Xi} \left( -\eta_{abc}\epsilon_{ij}{}^l T^i p^{c0j} + \eta_{abc}\Lambda_i \epsilon_j{}^{li} \pi^{cj} - \Xi \partial_b \zeta_a{}^l + \Xi \partial_a \zeta_b{}^l + \Xi \zeta_a{}^i \epsilon_i{}^{jl} \Upsilon_{bj} \right. \\ & \left. - \Xi \zeta_b{}^i \epsilon_i{}^{jl} \Upsilon_{aj} + \Xi \chi_{bi} \epsilon^{ijl} A_{a0k} - \Xi \chi_{ai} \epsilon^{ijl} A_{b0j} \right), \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ab}{}^l \approx & \frac{1}{2\Xi} \left( \eta_{abc}\epsilon_{ij}{}^l T^i \pi^{cj} - \eta_{abc}\Lambda_i \epsilon_k{}^{il} p^{c0k} - \Xi \epsilon_i{}^{jl} \zeta_a{}^i A_{b0j} + \Xi \epsilon_i{}^{jl} \zeta_b{}^i A_{a0j} \right. \\ & \left. - \Xi \partial_a \chi_b{}^l + \Xi \partial_b \chi_a{}^l - \Xi \chi_{bi} \epsilon_k{}^{il} \Upsilon_a{}^k + \Xi \chi_{ai} \epsilon_k{}^{il} \Upsilon_b{}^k \right), \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

$$\lambda_{e0n} \approx 0, \quad (4.1.16)$$

$$\lambda_{en} \approx 0. \quad (4.1.17)$$

Hasta ahora hemos encontrado las siguientes constricciones primarias

$$\begin{aligned} \phi_1^{a0i} & \equiv p^{a0i} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^{0i} \approx 0, \\ \phi_2^{ai} & \equiv \pi^{ai} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^i \approx 0, \\ \phi_7^{ab0i} & \equiv p^{ab0i} \approx 0, \\ \phi_8^{abi} & \equiv p^{abi} \approx 0, \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

que coinciden con las constricciones primarias de la segunda clase de Chern por construcción.

Las constricciones secundarias encontradas son

$$\psi_3^l \equiv \partial_a p^{a0i} - \epsilon^i{}_{jk} p^{a0j} \Upsilon_a{}^k - \epsilon^{ijk} \pi_k{}^a A_{a0j} \approx 0, \quad (4.1.19)$$

$$\phi_4^i \equiv \partial_a \pi^{ai} - \epsilon^{ijk} \pi_j{}^a \Upsilon_{ak} - \epsilon^i{}_{jk} p^{a0j} A_{a0}{}^k \approx 0, \quad (4.1.20)$$

$$\begin{aligned} \psi_5^{ai} & \equiv \frac{\Omega}{2} \eta^{abc} [\partial_b \Upsilon_c{}^i - \partial_c \Upsilon_b{}^i - \epsilon^{ijk} A_{b0j} A_{b0k} + \epsilon^i{}_{jk} \Upsilon_b{}^j \Upsilon_c{}^k] \\ & \quad - \frac{1}{2} \frac{\Omega}{\Xi} \pi^{ai} \approx 0, \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

$$\begin{aligned} \psi_6^{ai} & \equiv \frac{\Omega}{2} \eta^{abc} [\partial_b A_c{}^{0i} - \partial_c A_b{}^{0i} + \epsilon^{ij}{}_k A_{c0j} \Upsilon_b{}^k - \epsilon^{ijk} A_{b0j} \Upsilon_{ck}] \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{\Omega}{\Xi} p^{a0i} \approx 0, \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

que coinciden con las constricciones secundarias de la segunda clase de Chern. La teoría no presenta constricciones terciarias.

Sustituyendo los 36 multiplicadores de Lagrange en la acción (12), bajo la conjetura de

Dirac esperamos las siguientes 48 constricciones de primera clase

$$\begin{aligned}
\gamma_1^i &\equiv \hat{T}^i \approx 0, \\
\gamma_2^i &\equiv \hat{\Lambda}^i \approx 0, \\
\gamma_3^{ai} &\equiv \hat{\zeta}^{ai} \approx 0, \\
\gamma_4^{ai} &\equiv \hat{\chi}^{ai} \approx 0, \\
\gamma_5^i &\equiv \frac{\Omega}{\Xi} \left[ \partial_a p^{a0i} - \epsilon^i{}_j{}^k p^{a0j} \Upsilon_{ak} + \epsilon^i{}_j{}^k \pi^{aj} A_{a0k} + \frac{1}{2\Omega} \eta_{abc} \epsilon^i{}_j{}^k (\pi^{cj} p^{ab}{}_k - p^{c0j} p^{ab0}{}_k) \right] \approx 0, \\
\gamma_6^i &\equiv \frac{\Omega}{\Xi} \left[ \partial_a \pi^{ai} - \epsilon^i{}_j{}^k \pi^{aj} \Upsilon_{ak} + \epsilon^i{}_j{}^k p^{a0k} A_{a0j} + \frac{1}{2\Omega} \eta_{abc} \epsilon^{ij}{}_k (\pi^{ck} p^{ab0}{}_l + p^{c0k} p^{ab}{}_j) \right] \approx 0, \\
\gamma_{7,i}^a &\equiv \frac{\Omega}{2} \eta^{abc} \left[ \partial_b \Upsilon_{ci} - \partial_c \Upsilon_{bi} - \epsilon_i{}^{jk} A_{b0j} A_{c0k} + \epsilon_i{}^{jk} \Upsilon_{bj} \Upsilon_{ck} \right] - \frac{1}{2} \frac{\Omega}{\Xi} \pi^a{}_i \\
&\quad + \partial_b p^{ab0}{}_i + \epsilon_i{}^{jk} \Upsilon_{bj} p^{ab0}{}_k - \epsilon_i{}^{jk} A_{b0j} p^{ab}{}_k \approx 0, \\
\gamma_{8,i}^a &\equiv \frac{\Omega}{2} \eta^{abc} \left[ \partial_b A_{c0i} - \partial_c A_{b0i} - \epsilon_i{}^{jk} A_{c0j} \Upsilon_{bk} + \epsilon_i{}^{jk} A_{b0j} \Upsilon_{ck} \right] + \frac{1}{2} \frac{\Omega}{\Xi} p^{a0}{}_i \\
&\quad + \partial_b p^{ab}{}_i + \epsilon_i{}^{jk} A_{b0j} p^{ab0}{}_k - \epsilon_i{}^{jk} \Upsilon_{bk} p^{ab}{}_j \approx 0,
\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

y las siguientes 36 constricciones de segunda clase

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^{a0i} &\equiv p^{a0i} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^{0i} \approx 0, \\
\Gamma_2^{ai} &\equiv \pi^{ai} - \Xi \eta^{abc} B_{bc}{}^i \approx 0, \\
\Gamma_3^{ab0i} &\equiv p^{ab0i} \approx 0, \\
\Gamma_4^{abi} &\equiv p^{abi} \approx 0,
\end{aligned} \tag{4.1.24}$$

cuya álgebra de constricciones es

$$\{\gamma_{5,i}(x), \gamma_{5,l}(y)\} = \epsilon_{ilk} \gamma_5^k \delta^3(x-y) \approx 0, \tag{4.1.25}$$

$$\{\gamma_{5,i}(x), \gamma_6^{0l}(y)\} = \epsilon_i{}^l{}_k \gamma_6^{0k} \delta^3(x-y) \approx 0, \tag{4.1.26}$$

$$\begin{aligned}
\{\gamma_{5,i}(x), \gamma_7^d{}_l(y)\} &= \epsilon_{ilk} \gamma_7^{kd} - \frac{1}{2\Omega} \eta_{abe} \Gamma_3^{ab}{}_{0l} \Gamma_3^{da}{}_{0i} + \frac{1}{2\Omega} \eta_{abe} \Gamma_4^{ab}{}_{l} \Gamma_4^{de}{}_i \\
&\quad + \frac{1}{2\Omega} \eta_{abe} \delta_{il} \Gamma_3^{ab}{}_{0n} \Gamma_3^{de}{}_{0n} - \frac{1}{2\Omega} \eta_{abe} \delta_{il} \Gamma_4^{abn} \Gamma_4^{de}{}_n \approx 0,
\end{aligned} \tag{4.1.27}$$

$$\begin{aligned} \{\gamma_{5, i}^d(x), \gamma_{8, 0l}^d(y)\} &= \epsilon_{il}^k \gamma_{8, 0k}^d - \frac{1}{2\Omega} \eta_{abe} \delta_{il} \Gamma_4^{abm} \Gamma_3^{de}{}_{0m} + \frac{1}{2\Omega} \eta_{abe} \Gamma_4^{ab}{}_{l} \Gamma_3^{de}{}_{0i} - \frac{1}{2\Omega} \eta_{abe} \delta_{il} \Gamma_3^{ab}{}_{0} \Gamma_4^{de}{}_{m} \\ &\quad + \frac{1}{2\Omega} \eta_{abe} \Gamma_3^{ab}{}_{0l} \Gamma_4^{de}{}_{i} \approx 0, \end{aligned}$$

$$\{\gamma_6^{0i}(x), \gamma_6^{0l}(y)\} = -\epsilon^{il}{}_k \gamma_5^k \delta^3(x-y) \approx 0,$$

$$\begin{aligned} \{\gamma_6^{0i}(x), \gamma_7^d{}_{0l}(y)\} &= \epsilon^i{}_{lk} \gamma_8^{dk} - \frac{1}{2\Omega} \eta_{abe} \delta_l^i \Gamma_3^{ab}{}_{0} \Gamma_4^{de}{}_{m} - \frac{1}{2\Omega} \eta_{abe} \Gamma_3^{ab}{}_{0l} \Gamma_4^{dei} + \frac{1}{2\Omega} \eta_{abe} \delta_l^i \Gamma_4^{abm} \Gamma_3^{de}{}_{0m} \\ &\quad - \frac{1}{2\Omega} \eta_{abe} \Gamma_4^{ab}{}_{l} \Gamma_3^{de}{}_{0}{}^i \approx 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\gamma_6^{0i}(x), \gamma_8^d{}_{0l}(y)\} &= -\epsilon^i{}_{lk} \gamma_7^d{}_{0k} + \frac{1}{2\Omega} \eta_{abe} \delta_l^i \Gamma_3^{bc}{}_{0} \Gamma_3^{de}{}_{0m} + \frac{1}{2\Omega} \eta_{abe} \Gamma_4^{da}{}_{l} \Gamma_4^{dei} - \frac{1}{2\Omega} \eta_{abe} \delta_l^i \Gamma_4^{abm} \Gamma_4^{de}{}_{m} \\ &\quad - \frac{1}{2\Omega} \eta_{abe} \Gamma_3^{ab}{}_{0l} \Gamma_3^{de}{}_{0}{}^i \approx 0, \end{aligned}$$

$$\{\gamma_7^a{}_{0i}(x), \gamma_7^d{}_{0l}(y)\} = 0, \quad \{\Gamma_1^{a0i}(x), \psi_{7, l}^d(y)\} = -\frac{\Xi}{\Omega} \epsilon_l^{in} \Gamma_3^{da0} \delta^3(x-y),$$

$$\{\gamma_7^a{}_{0i}(x), \gamma_8^{dl}(y)\} = 0, \quad \{\Gamma_2^{ai}(x), \psi_{7, l}^d(y)\} = -\frac{\Xi}{\Omega} \epsilon_l^{in} \Gamma_4^{da} \delta^3(x-y),$$

$$\{\gamma_8^{0i}(x), \gamma_8^{dl}(y)\} = 0, \quad \{\gamma_7^a{}_{0i}(x), \Gamma_3^{de0l}(y)\} = 0,$$

$$\{\gamma_5^i(x), \Gamma_1^{d0l}(y)\} = 0, \quad \{\gamma_7^a{}_{0i}(x), \Gamma_4^{del}(y)\} = 0,$$

$$\{\gamma_5^i(x), \Gamma_2^{dl}(y)\} = 0, \quad \{\Gamma_1^{a0i}(x), \psi_{8, 0l}^d(y)\} = \frac{\Xi}{\Omega} \epsilon_l^{ni} \Gamma_4^{da} \delta^3(x-y),$$

$$\{\gamma_5^i(x), \Gamma_3^{de0l}(y)\} = 0, \quad \{\Gamma_2^{ai}(x), \psi_{8, 0l}^d(y)\} = \frac{\Xi}{\Omega} \epsilon_l^{il} \Gamma_3^{da0} \delta^3(x-y),$$

$$\{\gamma_5^i(x), \Gamma_4^{del}(y)\} = 0, \quad \{\gamma_8^{ai}(x), \Gamma_3^{de0l}(y)\} = 0,$$

$$\{\gamma_6^{0i}(x), \Gamma_1^{d0l}(y)\} = 0, \quad \{\gamma_8^{ai}(x), \Gamma_4^{del}(y)\} = 0,$$

$$\{\gamma_6^{0i}(x), \Gamma_2^{dl}(y)\} = 0, \quad \{\gamma_6^{0i}(x), \Gamma_4^{del}(y)\} = 0,$$

$$\{\gamma_6^{0i}(x), \Gamma_3^{de0l}(y)\} = 0,$$

donde se puede observar que el álgebra es cerrada y obedece las reglas del álgebra entre constricciones (1.9.9) y (1.9.10). Comparando las constricciones obtenidas anteriormente con las encontradas en la segunda clase de Chern, podemos concluir que las constriccio-

nes de estos dos invariantes no son exactamente las mismas pues en la segunda clase de Chern solo aparece  $\Xi$  mientras que en el invariante de Euler aparecen  $\Xi$  y  $\Omega$ .

Por otro lado, ahora las constricciones  $\gamma_5^i$  y  $\gamma_6^i$  son indentificadas como generadores de rotaciones y boost respectivamente mientras que  $\gamma_7^a$  y  $\gamma_8^a$  son generadores de traslaciones, esto se puede ver del álgebra de constricciones. Si comparamos los resultados obtenidos en la otra acción, encontramos que los generadores de rotaciones y de boost en la segunda clase de Chern ahora son generadores de boost y de rotaciones respectivamente en el invariante de Euler. Debido a lo anterior, podemos identificar que el álgebra de constricciones de primera y segunda clase mostrada anteriormente tiene una estructura de grupo, el cual corresponde al grupo de Poincaré.

Con toda esta información obtenida, podemos efectuar el conteo de grados de libertad físicos de la teoría de la siguiente forma; hay 120 variables dinámicas, 48 constricciones de primera clase y 36 constricciones de segunda clase, por tanto uno obtiene -6 grados de libertad. Sin embargo, es bien conocido que el invariante de Euler es una teoría reductible, es decir, las constricciones no son independientes una de la otra. La reductibilidad de las constricciones es la siguiente

$$\begin{aligned} \partial_a \gamma_7^a{}_i &= \epsilon_i{}^{jk} \Upsilon_{ak} \gamma_7^a{}_j - \epsilon_i{}^{jk} A_{a0k} \gamma_8^a{}_j - \frac{1}{2} \gamma_6^i{}_i + \epsilon_i{}^{jk} F_{abk} \Gamma_{3\ 0j}^{ab} + \epsilon_i{}^{jk} F_{ab0k} \Gamma_{4\ j}^{ab} \\ &\quad - \frac{1}{2\Omega} \eta_{abc} \epsilon^l{}_{ik} \pi^{ck} \Gamma_{3\ l}^{ab0} - \frac{1}{2\Omega} \eta_{abc} \epsilon^l{}_{ik} P^{c0k} \Gamma_{4\ l}^{ab}, \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

$$\begin{aligned} \partial_a \gamma_8^a{}_i &= \epsilon_i{}^{jk} A_{a0k} \gamma_7^a{}_j + \epsilon_i{}^{jk} \Upsilon_{ak} \gamma_8^a{}_j + \frac{1}{2} \gamma_5^i{}_i - \epsilon_i{}^{jk} F_{ab0k} \Gamma_{3\ 0j}^{ab} - \epsilon_i{}^{jk} F_{abk} \Gamma_{4\ j}^{ab} \\ &\quad - \frac{1}{2\Omega} \eta_{abc} \epsilon_i{}^{jk} P^{a0j} \Gamma_{3\ 0k}^{bc} - \frac{1}{2\Omega} \eta_{abc} \epsilon_i{}^{jk} \pi^a{}_j \Gamma_{4\ k}^{bc}. \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

Por tanto, hay 42 constricciones de primera clase independientes. Efectuando nuevamente el conteo de grados de libertad encontramos que la teoría carece de grados de libertad, la teoría es topológica como uno esperaba.

Debido a que las constricciones de primera clase son generadoras de las transformaciones de norma, definimos el generador de norma  $G$  como una combinación lineal de constricciones de primera clase

$$G = \int_M [\theta_{1,i} \gamma_1^i + \theta_{2,i} \gamma_2^i + \theta_{3,ai} \gamma_3^{ai} + \theta_{4,ai} \gamma_4^{ai} + \theta_5^i \gamma_{5,i} + \theta_{6,0i} \gamma_6^{0i} + \theta_{7, a}^{0i} \gamma_{7, 0i}^a + \theta_{8,ai} \gamma_8^{ai}] d^3x. \quad (4.1.30)$$

Con esta función generadora encontramos las siguientes transformaciones de norma

$$\begin{aligned}\delta A_{d0l} &= \{A_{d0l}, G\} \\ &= -\theta_{5,i} \epsilon^i{}_{lk} \left( A_{d0}{}^k + \frac{1}{2\Omega} \eta_{abd} p^{abk} \right) + \theta_{6,0i} \epsilon^i{}_{lk} \left( \frac{1}{2\Omega} \eta_{abd} p^{ab0k} + \Upsilon_d{}^k \right) \\ &\quad + \partial_d \theta_{6,0l} + \frac{1}{2} \theta_{7, dl},\end{aligned}\tag{4.1.31}$$

$$\begin{aligned}\delta \Upsilon_{dl} &= \{\Upsilon_{dl}, G\} \\ &= -\theta_{5,i} \epsilon^i{}_{lk} \left( \frac{1}{2\Omega} \eta_{abd} p^{ab0}{}_k + \Upsilon_{dk} \right) + \theta_{6,0i} \epsilon^i{}_{lj} \left( \frac{1}{2\Omega} \eta_{abd} p^{ab}{}_j + A_{d0j} \right) \\ &\quad - \partial_d \theta_{5,l} + \frac{1}{2} \theta_{8,dl},\end{aligned}\tag{4.1.32}$$

$$\delta T_l = \{T_l, G\} = \theta_{1,l},\tag{4.1.33}$$

$$\delta \Lambda_l = \{\Lambda_l, G\} = \theta_{2,l},\tag{4.1.34}$$

$$\delta \varsigma_{dl} = \{\varsigma_{dl}, G\} = \theta_{3,dl},\tag{4.1.35}$$

$$\delta \chi_{dl} = \{\chi_{dl}, G\} = \theta_{4,dl},\tag{4.1.36}$$

$$\begin{aligned}\delta B_{de0l} &= \{B_{de0l}, G\}, \\ &= -\frac{1}{2\Omega} \theta_{5,i} \eta_{dec} \epsilon_{ijl} p^{c0j} + \frac{1}{2\Omega} \theta_{6,i} \eta_{dec} \epsilon^i{}_{jk} p^{c0k} - \frac{1}{2} \partial_e \theta_{7, dl} + \frac{1}{2} \partial_d \theta_{7, el} \\ &\quad + \epsilon^j{}_{il} (\theta_{7,d}{}^i \Upsilon_{ej} - \theta_{7,e}{}^i \Upsilon_{dj}) - \epsilon^j{}_{il} (\theta_{8,d}{}^i A_{e0j} - \theta_{8,e}{}^i A_{d0j}),\end{aligned}\tag{4.1.37}$$

$$\begin{aligned}\delta B_{del} &= \{B_{del}, G\} \\ &= \frac{1}{2\Omega} \theta_{5,i} \eta_{dec} \epsilon_{ijl} \pi^{cj} + \frac{1}{2\Omega} \theta_{6,0i} \eta_{dec} \epsilon^i{}_{jl} \pi^{cl} - \partial_e \theta_{8,e}{}^i + \partial_d \theta_{8,e}{}^i \\ &\quad - \epsilon^j{}_{il} (\theta_{7,d}{}^i A_{e0j} - \theta_{7,e}{}^i A_{d0j}) - \epsilon_{il}{}^k (\theta_{8,d}{}^i \Upsilon_{ek} - \theta_{8,e}{}^i \Upsilon_{dk}),\end{aligned}\tag{4.1.38}$$

$$\begin{aligned}\delta p^{d0l} &= \{p^{d0l}, G\} \\ &= \theta_{5,i} \epsilon_{ij}{}^l p^{d0j} + \theta_{6,i} \epsilon^{ilk} \pi^d{}_k + \Xi \eta^{adb} \partial_b \theta_{7,a}{}^l + \Xi \theta_{7,a}{}^i \epsilon_i{}^{lj} \left( \eta^{abd} \Upsilon_{bj} + \frac{1}{\Omega} p^{ab0}{}_j \right) \\ &\quad + \Xi \theta_{8,a}{}^i \epsilon_i{}^{jl} \left( -\eta^{abd} A_{b0j} + \frac{1}{\Xi} p^{ad}{}_j \right),\end{aligned}\tag{4.1.39}$$

$$\begin{aligned}\delta \pi^{dl} &= \{\pi^{dl}, G\} \\ &= \theta_{5,i} \epsilon_i{}^{jl} \pi^d{}_j + \theta_{6,0i} \epsilon^{il}{}^j p^{d0j} - \Xi \theta_{7,a}{}^i \epsilon_i{}^{jl} \left( \eta^{abd} A_{b0j} - \frac{1}{\Omega} p^{ad}{}_j \right) \\ &\quad \Xi \theta_{8,a}{}^i \epsilon_i{}^{lj} \left( \eta^{adc} \Upsilon_{cj} + \frac{1}{\Omega} p^{ad0}{}_j \right) - \Xi \eta^{adb} \partial_b \theta_{8,a}{}^l,\end{aligned}\tag{4.1.40}$$

$$\delta\hat{T}^l = \{\hat{T}^l, G\} = 0, \quad (4.1.41)$$

$$\delta\hat{\Lambda}^l = \{\hat{\Lambda}^l, G\} = 0, \quad (4.1.42)$$

$$\delta\hat{\zeta}^{dl} = \{\hat{\zeta}^{dl}, G\} = 0, \quad (4.1.43)$$

$$\delta\hat{\chi}^{dl} = \{\hat{\chi}^{dl}, G\} = 0, \quad (4.1.44)$$

$$\delta p^{de0l} = \{p^{de0l}, G\} = 0, \quad (4.1.45)$$

$$\delta p^{del} = \{p^{del}, G\} = 0. \quad (4.1.46)$$

La matriz formada por el álgebra de constricciones de segunda clase llamada matriz  $C_{\alpha\beta}$  tiene la forma

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \{\Gamma_1^{a0i}, \Gamma_1^{d0l}\} & \{\Gamma_1^{a0i}, \Gamma_2^{dl}\} & \{\Gamma_1^{a0i}, \Gamma_3^{de0l}\} & \{\Gamma_1^{a0i}, \Gamma_4^{del}\} \\ \{\Gamma_2^{ai}, \Gamma_1^{d0l}\} & \{\Gamma_2^{ai}, \Gamma_2^{dl}\} & \{\Gamma_2^{ai}, \Gamma_3^{de0l}\} & \{\Gamma_2^{ai}, \Gamma_4^{del}\} \\ \{\Gamma_3^{ab0i}, \Gamma_1^{d0l}\} & \{\Gamma_3^{ab0i}, \Gamma_2^{dl}\} & \{\Gamma_3^{ab0i}, \Gamma_3^{de0l}\} & \{\Gamma_3^{ab0i}, \Gamma_4^{del}\} \\ \{\Gamma_4^{abi}, \Gamma_1^{d0l}\} & \{\Gamma_4^{abi}, \Gamma_2^{dl}\} & \{\Gamma_4^{abi}, \Gamma_3^{de0l}\} & \{\Gamma_4^{abi}, \Gamma_4^{del}\} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Xi\eta^{ade}\eta^{il} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Xi\eta^{ade}\eta^{il} \\ \Xi\eta^{dab}\eta^{il} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Xi\eta^{dab}\eta^{il} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y), \quad (4.1.47)$$

y su matriz inversa  $C_{\alpha\beta}^{-1}$  es

$$C_{\alpha\beta}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\Xi}\eta_{def}\eta^{lj} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\Xi}\eta_{def}\eta_{lj} \\ \frac{1}{2\Xi}\eta_{def}\eta_{lj} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\Xi}\eta_{def}\eta^{lj} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \quad (4.1.48)$$

Utilizando la ecuación (3.1.50), los paréntesis de Dirac encontrados son

$$\{A_{a0i}(x), \pi^{dj}(y)\}_D = \{A_{a0i}(x), \pi^{dj}(y)\} = -\frac{\Xi}{\Omega}\delta_a^d\delta_i^j\delta^3(x-y), \quad (4.1.49)$$

$$\{\Upsilon_{ai}(x), p^{d0j}(y)\}_D = \{\Upsilon_{ai}(x), p^{d0j}(y)\} = \frac{\Xi}{\Omega}\delta_a^d\delta_i^j\delta^3(x-y), \quad (4.1.50)$$

$$\{T_i(x), \hat{T}^j\}_D = \{T_i(x), \hat{T}^j\} = \delta_i^j\delta^3(x-y), \quad (4.1.51)$$

$$\{\Lambda_i(x), \hat{\Lambda}^j(y)\}_D = \{\Lambda_i(x), \hat{\Lambda}^j(y)\} = \delta_i^j \delta^3(x-y), \quad (4.1.52)$$

$$\{\varsigma_{ai}(x), \hat{\varsigma}^{dj}(y)\}_D = \{\varsigma_{ai}(x), \hat{\varsigma}^{dj}(y)\} = \delta_a^d \delta_i^j \delta^3(x-y), \quad (4.1.53)$$

$$\{\chi_{ai}(x), \hat{\chi}^{dj}(y)\}_D = \{\chi_{ai}(x), \hat{\chi}^{dj}(y)\} = \delta_a^d \delta_i^j \delta^3(x-y), \quad (4.1.54)$$

$$\{B_{ab0i}(x), p^{de0l}(y)\}_D = 0, \quad (4.1.55)$$

$$\{B_{abi}(x), p^{del}(y)\}_D = 0, \quad (4.1.56)$$

$$\{B_{ab0i}(x), \Upsilon_{dl}(y)\}_D = \frac{1}{2\Omega} \eta_{abd} \eta_{il} \delta^3(x-y), \quad (4.1.57)$$

$$\{B_{abi}(x), A_{dol}(y)\}_D = \frac{1}{2\Omega} \eta_{abd} \eta_{il} \delta^3(x-y). \quad (4.1.58)$$

Podemos observar que en (4.1.49), (4.1.50), (4.1.57) y (4.1.58) hay una contribución de los parámetros  $\Xi$  y  $\Omega$ , los cuáles no aparecían a nivel de las ecuaciones de movimiento. Cabe mencionar que al efectuar el límite de  $\Xi \rightarrow 0$  y  $\Omega \rightarrow \infty$ , el par de variables  $(A_{a0i}, \pi^{dj})$ ,  $(\Upsilon_{ai}, p^{d0j})$ ,  $(B_{ab0i}, \Upsilon_{dl})$ ,  $(B_{abi}, A_{dol})$  conmutan. En el límite  $\Omega \rightarrow 0$  los paréntesis (4.1.49), (4.1.50), (4.1.57), (4.1.58) se indefinen, por lo que descartamos ese caso. A diferencia de lo reportado en [39], los paréntesis de Dirac no fueron construidos debido a que las constricciones encontradas en ese trabajo fueron todas de primera clase. Esto evita que se pudiera comparar los resultados con el análisis de FJ, el cuál presentaremos a continuación en la siguiente sección.

## 4.2. Análisis de Faddeev-Jackiw

Al igual que las secciones anteriores, para realizar el análisis de FJ trabajaremos en el espacio de configuración. Lo que se reportará en esta sección al igual que (3.2) no se encuentra desarrollado en la literatura y será reportado en [59].

Partimos de (4.1.3) para realizar este análisis. Si escribimos la ecuación (4.1.3) en la forma de (2.1.1) obtenemos lo siguiente

$$\mathcal{L}^{(0)} = \Omega\eta^{abc}B_{ab}{}^{0i}\dot{\Upsilon}_{ci} - \Omega\eta^{abc}B_{abi}\dot{A}_{c0}{}^i - \mathcal{V}^{(0)}, \quad (4.2.1)$$

donde  $\mathcal{V}^{(0)}$  llamado el potencial simpléctico es expresado como

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{(0)} = & A_{00i} [\partial_c(\Omega\eta^{abc}B_{abi}) + \Omega\eta^{abc}\epsilon_{ik}^j B_{abj}\Upsilon_c{}^k - \Omega\eta^{abc}\epsilon_{jki} B_{ab}{}^{0j}A_{c0}{}^k] \\ & - A_0{}^i [\partial_c(\Omega\eta^{abc}B_{ab}{}^{0i}) - \Omega\eta^{abc}\epsilon_{jk}^i B_{ab}{}^{0j}\Upsilon_c{}^k - \Omega\eta^{abc}\epsilon^{ijk} B_{abk}A_{c0j}] \\ & + \Omega\eta^{abc}B_{0ai} [\partial_b A_{c0}{}^i - \partial_c A_{b0}{}^i + \epsilon^{ijk} A_{b0j}\Upsilon_{ck} - \epsilon_{ijk}^i A_{c0}{}^j \Upsilon_b{}^k + B_{bc}{}^{0i}] \\ & - \Omega\eta^{abc}B_{0a}{}^{0i} [\partial_b \Upsilon_{ci} - \partial_c \Upsilon_{bi} + \epsilon_{ijk}\Upsilon_b{}^j \Upsilon_c{}^k - \epsilon_i{}^{jk} A_{b0j}A_{c0k} - B_{bcj}]. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Del Lagrangiano simpléctico (4.2.1) podemos identificar las siguientes variables simplécticas

$$\xi^{(0)} = (A_{a0}{}^i, B_{ab}{}^{0i}, \Upsilon_{ai}, B_{abi}, A_0{}^i, A_{00i}, B_{a0}{}^{0i}, B_{0ai}), \quad (4.2.3)$$

y la uno-forma

$$a^{(0)} = (-\Omega\eta^{abc}B_{abi}, 0, \Omega\eta^{abc}B_{ab}{}^{0i}, 0, 0, 0, 0, 0). \quad (4.2.4)$$

Con lo anterior, la matriz  $f_{ij}$  que se define como  $f_{ij}(x, y) = \frac{\delta a_j(y)}{\delta \xi^i(x)} - \frac{\delta a_i(x)}{\delta \xi^j(y)}$  está dado por

$$f_{ij}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \Omega\eta^{dec}\delta_i^l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega\eta^{dec}\delta_i^l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega\eta^{dec}\delta_i^l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Omega\eta^{dec}\delta_i^l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \quad (4.2.5)$$

Se puede observar que la matriz (4.2.5) es singular y por tanto, la teoría tendrá restricciones. Los modos-cero de la matriz  $f_{ij}^{(0)}$  son los siguientes cuatro vectores

$$\nu_1^{(0)} = (0, 0, 0, 0, V^{A_0^i}, 0, 0, 0), \quad (4.2.6)$$

$$\nu_2^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 0, V^{A_{a0i}}, 0, 0), \quad (4.2.7)$$

$$\nu_3^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, V^{B_{a0}{}^{0i}}, 0), \quad (4.2.8)$$

$$\nu_4^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, V^{B_{a0i}}), \quad (4.2.9)$$

donde  $V^{A_0^i}$ ,  $V^{A_{a0i}}$ ,  $V^{B_{a0}{}^{0i}}$  y  $V^{B_{a0i}}$  son funciones arbitrarias. Así, usando estos cero-modos, encontramos las siguientes constricciones

$$\begin{aligned} \Omega_i^{(0)} &= \int \mathbf{d}^3x V^{A_0^i} \frac{\delta}{\delta A_0^i} \int \mathbf{d}^3y \mathcal{V}^{(0)}(\xi) \\ &= \partial_c (\Omega \eta^{abc} B_{ab}{}^0{}_i) - \Omega \eta^{abc} \epsilon_{ijk} B_{ab}{}^{0j} \Upsilon_c{}^k - \Omega \eta^{abc} \epsilon_i{}^{jk} B_{abk} A_{c0j}, \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

$$\begin{aligned} \Omega^{(0) 00i} &= \int \mathbf{d}^3x V^{A_{a0i}} \frac{\delta}{\delta A_{a0i}} \int \mathbf{d}^3y \mathcal{V}^{(0)}(\xi) \\ &= - [\partial_c (\Omega \eta^{abc} B_{abi}) + \Omega \eta^{abc} \epsilon^j{}_{ik} B_{abj} \Upsilon_c{}^k - \Omega \eta^{abc} \epsilon_{jki} B_{ab}{}^{0j} A_{c0}{}^k], \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

$$\begin{aligned} \Omega^{(0) a0}{}_i &= \int \mathbf{d}^3x V^{B_{a0}{}^{0i}} \frac{\delta}{\delta B_{a0}{}^{0i}} \int \mathbf{d}^3y \mathcal{V}^{(0)}(\xi) \\ &= \Omega \eta^{abc} [\partial_b \Upsilon_{ci} - \partial_c \Upsilon_{bi} + \epsilon_{ijk} \Upsilon_b{}^j \Upsilon_c{}^k - \epsilon_i{}^{jk} A_{b0j} A_{c0k} - B_{bci}], \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

$$\begin{aligned} \Omega^{(0) 0a}{}_{0i} &= \int \mathbf{d}^3x V^{B_{a0i}} \frac{\delta}{\delta B_{a0i}} \int \mathbf{d}^3y \mathcal{V}^{(0)}(\xi) \\ &= -\Omega \eta^{abc} [\partial_b A_{c0i} - \partial_c A_{b0i} + \epsilon_i{}^{jk} A_{b0j} \Upsilon_{ck} - \epsilon_{ijk} A_{c0}{}^j \Upsilon_b{}^k + B_{bc}{}^{0i}] \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Se puede observar que (4.2.10), (4.2.11), (4.2.12) y (4.2.13) no coinciden con las constricciones secundarias que se obtuvieron en el método de Dirac. Ahora observaremos si no existen más constricciones, para ello, calcularemos el siguiente sistema

$$\bar{f}_{ij} \dot{\xi}^{(0)j} = Z_i(\xi), \quad (4.2.14)$$

donde

$$\bar{f}_{ij} = \begin{pmatrix} f_{ij}^{(0)} \\ \delta \Omega_i^{(0)} \\ \delta \xi^{(0)j} \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} \quad Z_k = \begin{pmatrix} \frac{\delta \mathcal{V}^{(0)}}{\delta \xi^{(0)j}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.15)$$

Por tanto, la matriz simpléctica  $\bar{f}_{ij}$  tiene la forma

$$\bar{f}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega\eta^{abc}\delta_i^j \\ 0 & -\Omega\eta^{abc}\delta_i^j & 0 \\ -\Omega\eta^{abc}\delta_i^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Omega\eta^{abc}\epsilon_{ik}^j B_{abj} & \Omega\eta^{abc}(\delta_{ik}\partial_c - \epsilon_{ikj}\Upsilon_c^j) & -\Omega\eta^{abc}\epsilon_{ijk}B_{ab}^{0j} \\ -\Omega\eta^{abc}\epsilon_{jki}B_{ab}^{0j} & -\Omega\eta^{abc}\epsilon_{kji}A_{c0}^j & \Omega\eta^{abc}\epsilon_k^{ij}B_{abj} \\ -2\Omega\eta^{abc}\epsilon_i^{jk}A_{b0j} & 0 & 2\Omega\eta^{abc}(\delta_i^k\partial_b + \epsilon_{ijk}\Upsilon_b^j) \\ 2\Omega\eta^{abc}(\delta_k^i\partial_b - \epsilon^{ik}_j\Upsilon_b^j) & \Omega\eta^{abc}\delta_k^i & 2\Omega\eta^{abc}\epsilon^{ijk}A_{b0j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega\eta^{abc}\delta_i^j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Omega\eta^{abc}\epsilon_i^{jk}A_{c0j} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Omega\eta^{abc}(\delta^{ik}\partial_b + \epsilon^{ki}_j\Upsilon_c^j) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Omega\eta^{abc}\delta_i^k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \quad (4.2.16)$$

La matriz  $\bar{f}_{ij}$  no es cuadrada como se esperaba, sin embargo, tiene vectores nulos, los cuales son

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= (\epsilon_{ijl}A_{c0}^jV^l, \epsilon_{jil}B_{ab}^{0j}V^l, \partial_cV_i - \epsilon_{ijl}\Upsilon_c^lV^j, \epsilon^j_{li}B_{abj}V^l, 0, 0, 0, 0, V^i, 0, 0, 0), \\ \vec{V}_2 &= (-[\partial_cV_i + \epsilon^l_{ij}\Upsilon_c^jV_l], -\epsilon_i^l{}^jB_{abj}V_l, -\epsilon_i^l{}^jA_{c0j}V_l, -\epsilon_{lji}B_{ab}^{0j}V^l, 0, 0, 0, 0, 0, V^i, 0, 0), \\ \vec{V}_3 &= (V_i, -2(\partial_bV_i + \epsilon_l^{ji}\Upsilon_{bj}V^l), 0, -2\epsilon_l^j{}^iA_{b0j}V^l, 0, 0, 0, 0, 0, 0, V^i, 0), \\ \vec{V}_4 &= (0, 2\epsilon^{lj}_iA_{b0j}V_l, V_i, 2(\partial_bV_i - \epsilon_{lji}\Upsilon_b^jV^l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, V^i). \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Por otro lado,  $Z_i(\xi)$  está dado por

$$\begin{aligned}
Z_i(\xi) &= \begin{pmatrix} \frac{\delta \mathcal{V}^{(i)}}{\delta \xi^{(0)j}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \Omega \eta^{abc} \epsilon_i^{kj} A_0^i B_{abj} - \Omega \eta^{abc} \epsilon_{jki} A_{00i} B_{ab}^{0j} - 2\Omega \eta^{abc} \partial_b B_{0ak} \\ \quad + 2\Omega \eta^{abc} \epsilon_i^{kj} B_{0ai} \Upsilon_{cj} + 2\Omega \eta^{abc} \epsilon_i^{jk} B_{0a}^{0i} A_{b0j} \\ \\ -\Omega \eta^{abc} \epsilon_{jk}^i A_{00i} A_{c0}^k + \Omega \eta^{abc} \partial_c A_{0i} + \Omega \eta^{abc} \epsilon_{ijk} A_0^i \Upsilon_c^k \\ \\ \Omega \eta^{abc} \epsilon_{ijk} A_0^i B_{ab}^{0j} + \Omega \eta^{abc} \epsilon_k^{ji} A_{00i} B_{abj} - 2\Omega \eta^{abc} \epsilon_i^{jk} A_{b0j} B_{0ai} \\ \quad + 2\Omega \eta^{abc} \partial_b B_{0a}^{0i} - 2\Omega \epsilon_i^{jk} \Upsilon_b^j B_{0a}^{0i} \\ \\ -\Omega \eta^{abc} \partial_c A_{00}^i + \Omega \eta^{abc} \epsilon_k^{ji} A_{00i} \Upsilon_c^k + \Omega \eta^{abc} \epsilon_i^{jk} A_0^i A_{c0j} \\ \\ \Omega_i^{(0)} \\ \Omega^{(0) 00i} \\ \Omega^{(0) 0a}_{0i} \\ \Omega^{(0) 0ai} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.18)
\end{aligned}$$

La contracción de los vectores nulos con  $Z_i$ , es decir, la contracción  $\vec{V}_i^\mu Z_\mu(\xi) = 0$  dan identidades, es decir, se obtienen combinaciones lineales de constricciones. Por tanto, no hay más constricciones en la teoría. Cabe mencionar que es de esperarse este resultado debido a que en el análisis de Dirac, no se obtienen constricciones terciarias. Ahora, agregaremos las constricciones encontradas en (4.2.10), (4.2.11), (4.2.12) y (4.2.13) al

Lagrangiano simpléctico usando los siguientes multiplicadores de Lagrange los cuales llamaremos  $A_0^i = \dot{T}^i$ ,  $A_{00i} = \dot{\Lambda}_i$ ,  $B_{0a}{}^{0i} = \frac{\dot{\varsigma}_a^i}{2}$ ,  $B_{0ai} = \frac{\dot{\chi}_{ai}}{2}$ . Con lo anterior, el Lagrangiano simpléctico toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)} = & \Omega\eta^{abc} B_{ab}{}^{0i} \dot{\Upsilon}_{ci} - \Omega\eta^{abc} B_{abi} \dot{A}_{c0}{}^i - \dot{T}^i \Omega_i^{(0)} + \dot{\Lambda}_i \Omega^{(0) 00i} - \frac{\dot{\varsigma}_a^i}{2} \Omega^{(0) 0a}{}_{0i} \\ & + \frac{\dot{\chi}_{ai}}{2} \Omega^{(0) 0ai} - \mathcal{V}^{(1)}, \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

donde  $\mathcal{V}^{(1)} = \mathcal{V}^{(0)}|_{\Omega_i^{(0)}, \Omega^{(0) 00i}, \Omega^{(0) 0a}{}_{0i}, \Omega^{(0) 0ai}=0} = 0$ .

Del Lagrangiano simpléctico (4.2.19) podemos identificar las siguientes variables simplécticas

$$\xi^{(1)} = (A_{a0}{}^i, B_{ab}{}^{0i}, \Upsilon_{ai}, B_{abi}, A_0^i, A_{00i}, B_{a0}{}^{0i}, B_{0ai}, T^i, \Lambda_i, \varsigma_a^i, \chi_{ai}), \quad (4.2.20)$$

y la uno-forma

$$a^{(1)} = \left( -\Omega\eta^{abc} B_{abi}, 0, \Omega\eta^{abc} B_{ab}{}^{0i}, 0, -\Omega^{(0)}{}_i, +\Omega^{(0) 00i}, -\frac{\Omega^{(0) 0a}{}_{0i}}{2}, +\frac{\Omega^{(0) 0ai}}{2} \right). \quad (4.2.21)$$

Por tanto, la matriz simpléctica es

$$f_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \Omega\eta^{abc} \delta_i^k & 0 \\ 0 & 0 & \Omega\eta^{abc} \delta_i^k & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega\eta^{abc} \delta_i^k & 0 & 0 & 0 \\ -\Omega\eta^{abc} \delta_i^k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Omega\eta^{abc} \epsilon_{ik}{}^j B_{abj} & \Omega\eta^{abc} d_{ikc} & -\Omega\eta^{abc} \epsilon_{ijk} B_{ab}{}^{0j} & -\Omega\eta^{abc} \epsilon_i{}^{jk} A_{c0j} & \\ -\Omega\eta^{abc} \epsilon_{jki} B_{ab}{}^{0j} & -\Omega\eta^{abc} \epsilon_{kji} A_{c0}{}^j & \Omega\eta^{abc} \epsilon_k{}^{ij} B_{abj} & \Omega\eta^{abc} D_c{}^{ik} & \\ -\Omega\eta^{abc} \epsilon_i{}^{jk} A_{b0j} & 0 & \Omega\eta^{abc} d_{ib}^k & -\frac{\Omega}{2} \eta^{abc} \delta_i^k & \\ \Omega\eta^{abc} d_{kb}^i & \frac{\Omega}{2} \eta^{abc} \delta_k^i & \Omega\eta^{abc} \epsilon^{ijk} A_{b0j} & 0 & \end{pmatrix} \delta^3(x-y), \quad (4.2.22)$$

donde  $D_{kc}^i = \delta_k^i \partial_c + \epsilon_k^{ij} \Upsilon_{cj}$  y  $d_{kc}^i = \delta_k^i \partial_c - \epsilon_k^{ij} \Upsilon_{cj}$ . Se puede encontrar que la matriz (4.2.22) es singular, sin embargo, no se pueden encontrar más constricciones de esta matriz, por tanto la teoría bajo estudio tiene una simetría de norma, tal como se espera del resultado obtenido en el análisis de Dirac. Para obtener un tensor simpléctico no singular, debemos fijar la norma, de tal forma que podamos transformar la matriz (4.2.22) en una nueva matriz que no sea singular. Con lo anterior mencionado, fijaremos la siguiente norma temporal

$$A_0^i = 0 \quad (4.2.23)$$

$$A_{00i} = 0 \quad (4.2.24)$$

$$B_{0a}^{0i} = 0 \quad (4.2.25)$$

$$B_{0ai} = 0, \quad (4.2.26)$$

esto quiere decir que  $\dot{T}^i = 0, \dot{\Lambda}_i = 0, \dot{\zeta}_a^i = 0$  y  $\dot{\chi}_{ai} = 0$ . Introduciremos esto con los siguientes multiplicadores  $\beta_i, \alpha^i, \rho_i^a, \sigma_a^i$ , por tanto, el Lagrangiano simpléctico es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} = & \Omega \eta^{abc} B_{ab}^{0i} \dot{\Upsilon}_{ci} - \Omega \eta^{abc} B_{abi} \dot{A}_{c0}^i - \dot{T}^i \left[ \Omega_i^{(0)} - \beta_i \right] + \dot{\Lambda}_i \left[ \Omega^{(0) 00i} + \alpha^i \right] \\ & - \dot{\zeta}_a^i \left[ \frac{\Omega^{(0) 0a}{}_{0i}}{2} - \rho_i^a \right] + \dot{\chi}_{ai} \left[ \frac{\Omega^{(0) 0ai}}{2} + \sigma^{ai} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

Del Lagrangiano simpléctico (4.2.27) podemos identificar las siguientes variables simplécticas

$$\xi^{(2)} = (A_{a0}^i, B_{ab}^{0i}, \Upsilon_{ai}, B_{abi}, A_0^i, A_{00i}, B_{a0}^{0i}, B_{0ai}, T^i, \Lambda_i, \zeta_a^i, \chi_{ai}, \beta_i, \alpha^i, \rho_i^a, \sigma^{ai}), \quad (4.2.28)$$

y la uno-forma

$$\alpha^{(2)} = \left( -\Omega \eta^{abc} B_{abi}, 0, \Omega \eta^{abc} B_{ab}^{0i}, 0, - \left[ \Omega_i^{(0)} - \beta_i \right], \left[ \Omega^{(0) 00i} + \alpha^i \right], \quad (4.2.29)$$

$$- \left[ \frac{\Omega^{(0) 0a}{}_{0i}}{2} - \rho_i^a \right], \left[ \frac{\Omega^{(0) 0ai}}{2} + \sigma^{ai} \right] \right). \quad (4.2.30)$$

Por tanto, la matriz simpléctica ahora es

$$f_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \Omega\eta^{abc}\delta_i^k & -\Omega\eta^{abc}\epsilon_{ik}^j B_{abj} \\ 0 & 0 & \Omega\eta^{abc}\delta_i^k & 0 & -\Omega\eta^{abc}d_{ikc} \\ 0 & -\Omega\eta^{abc}\delta_i^k & 0 & 0 & \Omega\eta^{abc}\epsilon_{ik}^j B_{ab}^{0j} \\ -\Omega\eta^{abc}\delta_i^k & 0 & 0 & 0 & \Omega\eta^{abc}\epsilon_i^{jk} A_{c0j} \\ \Omega\eta^{abc}\epsilon_{ik}^j B_{abj} & \Omega\eta^{abc}d_{ikc} & -\Omega\eta^{abc}\epsilon_{ijk} B_{ab}^{0j} & -\Omega\eta^{abc}\epsilon_i^{jk} A_{c0j} & 0 \\ -\Omega\eta^{abc}\epsilon_{jki} B_{ab}^{0j} & -\Omega\eta^{abc}\epsilon_{kji} A_{c0}^j & \Omega\eta^{abc}\epsilon_k^{ij} B_{abj} & \Omega\eta^{abc}D_c^{ik} & 0 \\ -\Omega\eta^{abc}\epsilon_i^{jk} A_{b0j} & 0 & \Omega\eta^{abc}d_{ib}^k & -\frac{\Omega}{2}\eta^{abc}\delta_i^k & 0 \\ \Omega\eta^{abc}d_{kb}^i & \frac{\Omega}{2}\eta^{abc}\delta_k^i & \Omega\eta^{abc}\epsilon^{ijk} A_{b0j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{cccccccc} \Omega\eta^{abc}\epsilon_{jki} B_{ab}^{0j} & \Omega\eta^{abc}\epsilon_i^{jk} A_{b0j} & -\Omega\eta^{abc}d_{kb}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Omega\eta^{abc}\epsilon_{kji} A_{c0}^j & 0 & -\frac{\Omega}{2}\eta^{abc}\delta_k^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Omega\eta^{abc}\epsilon_k^{ji} B_{abj} & -\Omega\eta^{abc}d_{ib}^k & -\Omega\eta^{abc}\epsilon^{ijk} A_{b0j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Omega\eta^{abc}D_c^{ik} & \frac{\Omega}{2}\eta^{abc}\delta_i^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_b^a \delta_j^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_b^a \delta_j^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_b^a \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_b^a \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \delta^3(x-y). \quad (4.2.31)$$

Se puede observar que la matriz simpléctica (4.2.31) no es singular, por tanto, tiene

inversa. Después de un largo cálculo, se encuentra la siguiente matriz simpléctica inversa

$$f_{ij}^{(2)-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\Omega}\eta_{abg}\delta_k^l & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\Omega}\eta_{abg}\delta_k^l & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\Omega}\eta_{abg}\delta_k^l & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\Omega}\eta_{abg}\delta_k^l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\epsilon_j^{kl}A_{g0k} & -\epsilon_m^{jl}B_{bg}{}^{0m} & -d^{jl}{}_g & -\epsilon^{jlm}B_{bgm} & -\delta_j^i \\ D^{jl}{}_g & \epsilon^{jlm}B_{bgm} & \epsilon^{lmj}A_{g0j} & \epsilon_m^{lj}B_{bg}{}^{0j} & 0 \\ -\frac{1}{2}\delta_l^j\delta_a^c\delta_a^b & \frac{1}{2}\delta_{ag}^feD_f{}^{jl} & 0 & \frac{1}{2}\delta_{ag}^fe\epsilon^{jmk}A_{f0m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\delta_{ag}^fe\epsilon^{jlm}A_{f0m} & -\frac{1}{2}\delta_a^c\delta_g^b\delta^{jl} & -\frac{1}{2}\delta_{ag}^fed^{jl}{}_f & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \epsilon_l^{ji}A_{c0j} & -D_l{}^i{}_c & \frac{1}{2}\delta_a^f\delta_l^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_{lji}B_{ab}{}^{0j} & -\epsilon_i^{jl}B_{abj} & -\delta_a^fD_{lib} & \delta_a^f\epsilon_l{}^j{}_iA_{b0j} \\ 0 & 0 & 0 & d_{lic} & -\epsilon_i{}^j{}_lA_{c0j} & 0 & \frac{1}{2}\delta_a^f\delta_{il} \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_l{}^{ij}B_{abj} & -\epsilon_j{}^i{}_lB_{ab}{}^{0j} & -\delta_a^f\epsilon_l{}^j{}_iA_{b0j} & \delta_a^f d_l{}^i{}_b \\ 0 & 0 & 0 & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_b^a\delta_j^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_b^a\delta_j^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{kl} & E_l^k & -I_{kl} \\ -\delta_j^i & 0 & 0 & C_{kl} & 0 & I_l^k & -E_l^k \\ 0 & -\delta_b^a\delta_j^i & 0 & E_l^k & I_l^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_b^a\delta_j^i & G_{kl} & E_l^k & K_{kl}{}^f & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y),$$

(4.2.32)

donde

$$C_{kl} = \Omega \eta^{abc} (\epsilon_k^i{}^j B_{abj} d_{lic} + \epsilon_l^{ij} B_{abj} D_{kc}^i), \quad (4.2.33)$$

$$E_{kl} = \Omega \eta^{abc} \left( d_{lic} D_{kib} - \epsilon_i^{jk} \epsilon_l^{mi} A_{b0j} A_{c0m} - \frac{1}{2} \epsilon_{lk}^j B_{abj} \right), \quad (4.2.34)$$

$$G_{kl} = \Omega \eta^{abc} \left( \epsilon_k^{ij} A_{b0j} d_{lic} + \epsilon_{li}^j A_{c0j} d_{kb}^i + \frac{1}{2} \epsilon_{ljk} B_{ab}{}^{0j} \right), \quad (4.2.35)$$

$$I_{kl} = \frac{\Omega}{2} \eta^{abc} \epsilon_{jkl} B_{ab}{}^{0j}, \quad (4.2.36)$$

$$K_{kl}{}^f = \Omega \eta^{fbc} (d_{lkb} - D_{lkb}). \quad (4.2.37)$$

Del tensor simpléctico (4.2.32) se pueden identificar los paréntesis de FJ

$$\{\xi_i^{(2)}(x), \xi_j^{(2)}(y)\}_{FJ} = \left[ f_{ij}^{(2)}(x, y) \right]^{-1}, \quad (4.2.38)$$

por tanto, se pueden identificar los siguientes paréntesis

$$\{B_{ab0i}(x), \Upsilon_{al}(y)\}_D = \frac{1}{2\Omega} \eta_{abd} \eta_{il} \delta^3(x - y), \quad (4.2.39)$$

$$\{B_{abi}(x), A_{d0l}(y)\}_D = \frac{1}{2\Omega} \eta_{abd} \eta_{il} \delta^3(x - y). \quad (4.2.40)$$

donde se puede observar que los paréntesis de Dirac y los de Faddeev coinciden uno con otro. Por otra parte, en éste análisis hay menos constricciones que en el análisis de Dirac, en este sentido, es más económico. Como hemos comentado desde el principio, el formalismo de FJ no hay clasificación de constricciones, todas están al mismo nivel. Por ello, para realizar el conteo de grados de libertad usaremos la siguiente fórmula [GL=variables dinámicas - constricciones independientes], es decir, hay 18 variables canónicas dadas por  $(A_{c0i}, \Upsilon_c^i)$  y 18 constricciones independientes  $(\Omega^{(0) i}, \Omega^{(0) 00i}, \Omega^{(0) 0ai}, \Omega^{(0) 0a}_{0i})$ , lo cual nos da una teoría que carece de grados de libertad, que es de esperarse debido a que es bien conocido que el invariante de Euler es una teoría topológica.



# Capítulo 5

## Conclusiones

Como se puede observar, hemos analizado desde el punto de vista Hamiltoniano y de FJ a la segunda clase de Chern y el invariante de Euler. Entre los resultados obtenidos bajo el análisis Hamiltoniano, hemos encontrado que la estructura de grupo para el álgebra de constricciones de ambas teorías es el mismo, el cual corresponde al grupo de Poincaré. Otro punto a comentar es que, a pesar de trabajar con las mismas variables del espacio fase en ambas teorías, encontramos que la estructura simpléctica de las teorías es diferente y este resultado no ha sido reportado en la literatura, por lo cual es una aportación nueva de este trabajo. Cabe mencionar que los parámetros  $\Xi$  y  $\Omega$  tienen una contribución diferente en la estructura simpléctica y las constricciones, lo que indica que estrictamente no son las mismas. Estos parámetros tendrán importancia cuando los invariantes sean sumados a una acción como la de Holst, donde se buscará bajo qué condiciones sobre los parámetros se puede reproducir la formulación de Ashtekar y la de Barbero.

También podemos comentar que aunque las acciones de los dos invariantes sean diferentes, ambas comparten las mismas ecuaciones de movimiento, comparten la simetría bajo difeomorfismos, sin embargo, los generadores del grupo de Poincaré son diferentes para ambas teorías, es decir, los generadores de rotaciones y boost en la segunda clase de Chern ahora son generadores de boost y rotaciones respectivamente en el invariante de Euler y esto se debe a que la estructura simpléctica es diferente. Además, dentro del contexto del formalismo de FJ, podemos comentar que las constricciones encontradas no coinciden con las obtenidas en Dirac, esto es debido a que en el formalismo de Dirac se trabajó en el espacio fase y en el de FJ se trabaja en el espacio de configuración. Sin embargo, cuando se introducen los paréntesis de Dirac y se consideran a las restricciones de segunda clase fuertemente cero, entonces las constricciones de ambos formalismos coinciden. En adición, se encontró que los paréntesis de Dirac y los generalizados de FJ coinciden uno con el otro.

Por otra parte, es importante señalar que el Formalismo de FJ es más práctico debido a que no fue necesario clasificar las restricciones, lo cual nos sirve como método alternativo para poder obtener de manera más rápida la estructura simpléctica de la teoría, y así más adelante ser promovidos como operadores en la cuantización. Desde luego que el trabajo hecho en esta tesis no es un ejercicio de consistencia. La cuantización canónica en teorías de norma con covarianza general es un problema difícil de abordar. Desde el punto de vista de Dirac, si se tienen restricciones de primera y segunda clase, primero se construyen los paréntesis de Dirac, posteriormente, se usa la correspondencia clásica-cuántica en las variables canónicas y se pide que se escriban las restricciones de primera clase como operadores. Una vez que se tienen las restricciones en forma de operadores, uno busca estados que las resuelvan puesto que los estados cuánticos deben ser invariantes de norma. Posteriormente, con los estados que se encuentran uno debe definir un producto interno de tal manera que se pueda construir el espacio de Hilbert con funciones cuadráticamente integrables, digamos  $\mathcal{L}^2(\mathcal{A}/g)$ , donde  $\mathcal{A}/g$  es el conjunto de soluciones a las ecuaciones de movimiento, módulo el grupo de transformaciones de norma. Sin embargo, usualmente  $(\mathcal{A}/g)$  es infinito-dimensional y este hecho hace que el proceso de construir el espacio de Hilbert sea difícil. En adición, claro está que para definir el producto interno, uno necesita una medida, la cual en el formalismo de Dirac es difícil definir. Por otro parte, en el formalismo simpléctico, hay menos restricciones, y eso facilita un poco la situación al querer cuantizar. Para empezar, uno utiliza también la correspondencia clásica-cuántica en las variables canónicas y se pasa a operadores las restricciones. Una vez que se encuentran estados que resuelven las restricciones, uno también necesita definir un producto interno para construir el espacio de Hilbert. En el formalismo de FJ construir la medida es un problema que se puede abordar, de hecho, la medida está relacionada con el determinante del tensor simpléctico que se ha obtenido al final de aplicar el método. En efecto, se puede ver en la cita [61] que existe una conexión directa entre el formalismo de FJ y la cuantización por integral de trayectoria. Debido a que calcular el determinante del tensor simpléctico es muy engorroso, este trabajo no abordará el problema, sin embargo, esa parte ya está considerada en el artículo que se está redactando usando los resultados de esta tesis [59].

# Bibliografía

- [1] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volumes I and II*, Cambridge University Press, Cambridge, England (1996).
- [2] Rovelli, C.: *Quantum Gravity*, Cambridge University Press, Cambridge (2004).
- [3] Thiemann, T.: *Modern Canonical Quantum General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge (2007).
- [4] Arnowitt, R., Deser, R., Misner, C.: in: Witten, L. (ed.) *Gravitation: An introduction to current research*. Wiley, New York (1962).
- [5] Ashtekar, A.: *Phys. Rev. Lett.* 77,3288 (1986).
- [6] Ashtekar, A.: *Lectures on Non-Perturbative Canonical Gravity*. World Scientific, Singapore (1991).
- [7] Ashtekar, A., Romano, J.D., Tale, R.S.: *Phys. Rev. D* 40, 2572 (1989).
- [8] Barbero, J.F.: *Phys. Rev. D* 51, 5507 (1995).
- [9] Holst, S.: *Phys. Rev. D* 53, 5966 (1996).
- [10] Peldán, P. *Class.Quantum Grav.* 11, 1087 (1994).
- [11] A. Perez, C. Rovelli, *Phys. Rev. D* 73, 044013 (2006).
- [12] M Domagala, J Lewandowski “Black hole entropy from Quantum Geometry” *Class Quant Grav* 21 5233-5244 (2004).
- [13] Alexandrov “On the counting of black hole states in loop quantum gravity”, arXiv:gr-qc/0408033. KA Meissner, “Black hole entropy in loop quantum gravity”, *Class Quant Grav* 21 5245 (2004).

- 
- [14] C Rovelli, T Thiemann, "The Immirzi parameter in quantum general relativity", Phys Rev D 57 1009-1014 (1998).
- [15] D. J. Rezende and A. Perez Phys.Rev.D79:064026 (2009).
- [16] Escalante, A.: The Chern-Simons State for Topological Invariants. Phys. Lett. B (2008). DOI:10.1016/j.physletb.2009.04.052.
- [17] M. Montesinos, A. Perez, Phys. Rev. D 77 104020 (2008).
- [18] V. Cuesta, M. Montesinos, Phys. Rev. D 76 025025 (2007).
- [19] A. Escalante, Int. J. Theor. Phys. 48(9) 2486–2498 (2009).
- [20] A. Polyakov, Pis'ma v ZhETF 20 (1974), 430.
- [21] 'T Hooft G., Nucl.Phys. B79 (1974), 276.
- [22] A. Schwars, arXiv:hep-th/0011260v1, (2000).
- [23] J. F. Plebanski, J. Math. Phys. 18 2511 (1977).
- [24] Capovilla, R., Dell, J., Jacobson, T., Manson, L.: Class. Quantum Gravity 8, 41 (1991)
- [25] Capovilla, R., Jacobson, T., Dell, J.: Phys. Lett. 63, 2325 (1989)
- [26] G.T. Horowitz, Commun. Math. Phys., 125, 417 (1989).
- [27] G.T. Horowitz, M. Srednicki, Commun. Math. Phys., 130 , 83 (1990).
- [28] A. Escalante and I. Rubalcava, Int. Jour. of Geom. Methods in Modern Physics, Vol. 9, No. 7, 1250053, (2012).
- [29] M. Mondragon, M. Montesinos, J.Math.Phys. 47 022301 (2006).
- [30] R. Capovilla, M. Montesinos, V.A. Prieto, E. Rojas, Class.Quant.Grav. 18 (2001) L49-L52, Erratum: Class.Quant.Grav. 18 1157 (2001).
- [31] M. Celada, M. Montesinos, J. Romero, Class.Quant.Grav. 33 , 11, 115014 (2016).
- [32] A. Accardi, A. Belli, M. Martellini, M. Zeni, hep-th/9703152.

- 
- [33] A. Perez, Lectures presented at the II International Conference of Fundamental Interactions, Pedra Azul, Brazil, June 2004.
- [34] A. Perez, *Class. Quantum Grav.* 20 R43–R104 (2003).
- [35] Gitman, D.M., Tyutin, I.V.: *Quantization of Fields with Constraints*, Springer Series in Nuclear and Particle Physics. Springer, Berlin (1990).
- [36] Hanson, A., Regge, T., Teitelboim, C.: *Constrained Hamiltonian Systems*. Accademia Nazionale dei Lincei, Roma (1978).
- [37] L. Faddeev and R. Jackiw, *Hamiltonian Reduction of Unconstrained and Constrained Systems*, *Phys. Rev. Lett.* Vol. 60 No. 17 (1988).
- [38] R. Jackiw, (constrained) *Quantization Without Tears*, arXiv:hep-th/9306075v1 (1993).
- [39] C. M. Portugal, *Análisis de las Simetrías de Teorías Topológicas en Términos de Nuevas Variables: La Segunda Clase de Chern y la Clase de Euler* (Tesis de licenciatura), Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla Pue. (2015).
- [40] A. Escalante, J. Manuel-Cabrera, *Ann. Phys.* 361, 585 (2015).
- [41] A. Escalante, *Ann. Phys.* 353, 163 (2014).
- [42] A. Escalante, O. Rodríguez-Tzompantzi, *Ann. Phys.* 364, 136 (2016).
- [43] A. Escalante and O. Rodríguez Tzompantzi, *Eur. Phys. J. C*, 76:577, (2016).
- [44] Alberto Escalante and J. Manuel Cabrera, *Eur. Phys. J. C* 77:303 (2017).
- [45] I. Rubalcava, *Análisis Hamiltoniano a Teorías tipo BF*. F.C.F.M., BUAP. Tesis de Maestría, febrero 2010.
- [46] H. Goldstein, *Mecánica Clásica*, Ed. 1987, España: Editorial Reverté (2002).
- [47] M. G. Calkin, *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*, Ed. 1996, Singapore: World Scientific Press (2005).
- [48] XU Xiaoming, *Commun. Theor. Phys.* 29, pp. 295-302 (1998).
- [49] J. Govaerts, *Int. J. Mod. Phys. A*5, 3625 (1990).
-

- 
- [50] R. Floreanini and R. Jackiw, Phys. Rev. Lett. 59, 1873 (1987).
- [51] M. E. V. Costa and H. O. Girotti, Phys. Rev. Lett. 60, 1771 (1988).
- [52] J. Barcelos-Neto and P. P. Srivastava, Phys. Rev. Lett. B259, 456 (1991); J. Barcelos-Neto, P. P. Srivastava and C. Wotzasek, *Symplectic quantization of constrained systems*, Mod. Phys. Lett. A.
- [53] A. Escalante and P. C. Sánchez, *Faddeev-Jackiw quantization of four dimensional BF Theory*, Anals of Physics, 374 0-19 (2016).
- [54] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, *Faddeev-Jackiw Quantization and Constraints*, Int. J. Mod. Phys. A, Vol. 7, No. 20 4981-5003 (1992).
- [55] A. Escalante, R.,T., OmarEur. Phys. J. C (2016) 76:577, DOI 10.1140/epjc/s10052-016-4425-x.
- [56] L. Liao and Y. C. Huang, Annals of Phys. 322, 2469-2484 (2007).
- [57] M. Montesinos, Class. Quant. Grav. 23:2267-2278 (2006).
- [58] J. Berra-Montiel, A. Molgado and C. D. Palacios-García, *Causal Poisson bracket via deformation quantization*, arXiv: 1408.2796v3 (2016).
- [59] A. Escalante and C. M. Portuga, *Faddeev-Jackiw quantization of topological invariants: The Euler and Chern classes*, en preparación (2017).
- [60] A. Escalante and J. Angel López Osio, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 75, N. 3 (2012).
- [61] D. J. Toms, Physical Review D 92, 105026 (2015).