



**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**LA FUNCIÓN ZETA PARA EL ANILLO DE
BURNSIDE DE UN GRUPO CÍCLICO DE
ORDEN P^3**

TESIS

Para obtener el título de:

**MAESTRO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS**

Presenta:

JUAN MANUEL RAMÍREZ CONTRERAS

Asesores de tesis:

Dr. DAVID VILLA HERNÁNDEZ

PUEBLA, PUE.

NOVIEMBRE 2014

Dedicatoria

A mis padres:

Jesús Ramírez Montes y Ana Bertha Contreras Morales.

Por estar a mi lado y apoyarme incondicionalmente en cada día de mi vida.

A mis hermanos:

Jesús Alberto Ramírez Contreras y Nanyeli Ramírez Contreras.

Por sus sabios consejos, apoyo y cariño.

A mis sobrinas:

Citlali Ramos Ramírez, Paulina Hernández Ramírez y Ana Gabriela Ramírez Roldán.

Por venir a dar felicidad a nuestra hermosa familia.

A mi novia:

Laura Cruzado Lima.

Por enseñarme lo que es el amor y nunca dejarme solo.

A mi cuñada:

Claudia Patricia Roldán Amaro.

Por amar a mi hermano y querer formar parte de esta familia.

Agradecimientos

Quiero agradecer a dios por darme salud, fuerzas y la motivación para poder culminar otro proyecto en mi vida.

A mis padres por darme la vida, por educarme de la forma en que lo hicieron, sin ellos no estaría aquí. Siento un gran orgullo decir que soy su hijo, les agradezco todo su amor, apoyo y comprensión.

A mi hermana por ayudarme con las labores que me corresponden para tener más tiempo que dedicarle a este trabajo.

A mi hermano por ser la mejor persona que he conocido, sin duda es el motor de mi familia.

A mi Lau por darme ánimos cuando los necesitaba, por hacerme reír y sobre todo por hacerme feliz.

A mis sobrinas por hacer feliz a toda mi familia, las quiero mucho.

A Paty por estar al pendiente de la salud de mis padres.

Al Dr. David Villa Hernández por darme la oportunidad de trabajar con él, por confiar en mí, por su paciencia, por sus comentarios, sugerencias, consejos, por apoyarme en cualquier trámite que yo necesité y sobre todo por el tiempo dedicado para la realización esta tesis.

Al Dr. Alexander Igorevich Bykov Barabanov , al Dr. Iván Martínez Ruiz , al Dr. Juan Angoa Amador y al Dr. Alberto Gerardo Raggi Cárdenas por enriquecer esta tesis con sus comentarios, observaciones y sugerencias. También, quiero agradecerles por su paciencia y por dejar sus ocupaciones para estar presentes en mis exposiciones, en especial al Dr. Gerardo Raggi, muchas gracias.

Agradezco al Dr. Dr. José Ramón Enrique Arrazola Ramírez por ser una persona fundamental para que yo pudiera ingresar al Posgrado, por darme la oportunidad de pertenecer al Laboratorio de Lógica Matemática, por dejarme tener un espacio donde trabajar, por las facilidades brindadas a lo largo de todo este tiempo y sobre todo por siempre portarse bien con mi persona.

A cada uno de los profesores que tuve la oportunidad de conocer como estudiante, gracias por dedicar su tiempo en mi educación, me llevo un gran aprendizaje de cada uno de ustedes.

Agradezco a Verónica (verito), Rubén (Maestro Ches), Reynaldo (Maestro Rey), Juan Pablo, Javier, Marcos (Lord), Miguel (Migues), Luis Ángel (Viejito) y Sergio (Serch) por ser buenos amigos conmigo y por los momentos que pasamos en el Laboratorio.

Agradezco a mis amigos Diego, Giovanni (Gio), Jose Luis (Borre), Angel, Abel, Jaquelina (Jaque), Irene, Nantzy (Nan), Gabriel (Gaby), Ricardo (chivo), Jaime, Joaquín, Aldo, Daniel (Dani) y demás amigos, por haber compartido un momento especial conmigo.

Agradezco a todas aquellas personas que directa e indirectamente han aportado algo a mi persona y en especial a esta tesis, que con mucho esfuerzo he realizado.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por otorgarme la beca durante el periodo de Agosto 2012 a Junio de 2014 para la realización de mis estudios de maestría.

Gracias a todos

Introducción

A finales del siglo XIX, W. Burnside introdujo las ideas sobre lo que actualmente se conoce como el anillo de Burnside, pero fue Solomon (1967) quien le da la estructura algebraica de anillo. Dado un grupo finito G , la unión disjunta y el producto cartesiano dan lugar a una suma y un producto en el conjunto de clases de isomorfismo de los G -conjuntos finitos. A excepción de la falta de inversos aditivos, dicho conjunto satisface los axiomas de un anillo conmutativo, con lo cual, si agregamos formalmente dichos inversos, obtenemos el correspondiente anillo de Grothendieck, el cual se conoce como el anillo de Burnside $B(G)$ de G . En [2] podemos encontrar un estudio global más reciente.

En consecuencia, el anillo de Burnside $B(G)$ es uno de los anillos fundamentales de representación de G . Además, es el objeto universal a considerar en el estudio de la categoría de G -conjuntos. Es un análogo para los G -conjuntos finitos del anillo $\mathbb{Z}$ (es de hecho isomorfo al anillo de Burnside del grupo trivial).

Por otra parte, el estudio de su espectro primo y de sus idempotentes primitivos conduce a varios teoremas de inducción como el de Artin, Brauer y Dress (teoremas de representación). El anillo de Burnside es un invariante del grupo, el cual detecta solubilidad. Andreas Dress, probó que un grupo es soluble si y sólo si los únicos idempotentes de $B(G)$ son los triviales. También probó el teorema de inducción de Dress para $B(G)$, el cual, a partir del hecho de que $B(G)$ actúa en los funtores de Mackey, se tradujo en un teorema de inducción para cada uno de estos funtores, ver [1].

En topología algebraica, este anillo es un marco, para el estudio de invariantes ligados a G -conjuntos estructurados, tales como G -copos o G -complejos simpliciales. Estos invariantes son generalizaciones de la categoría de G -conjuntos, tal como la función de Möbius y el módulo de Steinberg.

En 1977, L. Solomon introdujo una función zeta para un orden, la cual requiere del conocimiento de todos sus ideales de índice finito, desde entonces, C. J. Bushnell e I. Reiner han desarrollado aún más esta función y algunas de sus generalizaciones.

Por otro lado la función zeta de Solomon, es un invariante del anillo que detecta la distribución de los ideales primos y es una generalización de la función zeta usual de Riemann. Así, la temática de este proyecto se inscribe en el desarrollo de la teoría de las funciones zeta en el anillo de Burnside.

En el primer capítulo, comenzaremos con el estudio de temas previos al anillo de Burnside tales como los G -conjuntos, daremos varios ejemplos para tener un buen entendimiento de ellos. Posteriormente, hablaremos sobre la Marca y algunas de sus propiedades. Luego, daremos paso a la definición del anillo de Burnside, para continuar con el estudio del su espectro primo y posteriormente finalizar este capítulo con sus idempotentes primitivos.

Como ya hemos mencionado, la función zeta de Solomon depende del conocimiento de todos los ideales de índice finito; por lo que, en el segundo capítulo, mostraremos un método empleado por C. J. Bushnell e I. Reiner, que sólo depende de la colección finita de las clases de isomorfismos de sus ideales de índice finito, el cual lo vamos a desarrollar para el caso de la función zeta del anillo de Burnside para grupos cíclicos de orden p^3 con p un número primo.

Finalmente, en el tercer capítulo se determinará de forma explícita la función zeta del anillo de Burnside para grupos cíclicos de orden p^3 con p un primo. Para ello, daremos previamente los conceptos necesarios para dicha función. Cabe resaltar que los cálculos correspondientes a p^3 , nunca se habían realizado y se desconocía dicha función.

Índice general

Introducción	I
Índice general	III
1. Anillo de Burnside	1
1.1. <i>G</i> -conjuntos	1
1.2. <i>Propiedades de la Marca</i>	11
1.3. <i>El anillo de Burnside</i>	15
1.4. <i>B como funtor contravariante</i>	22
1.5. <i>El espectro primo de $B_{\Pi}(G)$</i>	23
1.6. <i>Idempotentes primitivos en $B_{\Pi}(G)$</i>	37
2. Ideales de índice finito de $B_P(C_{P^3})$	49
2.1. <i>Estructura de producto fibrado</i>	50
2.2. <i>Estructura de producto fibrado de $B_p(C_{P^n})$</i>	53
2.3. <i>Ideales de $B_p(C_p)$</i>	54
2.4. <i>Ideales de $B_p(C_{p^2})$</i>	56
2.5. <i>Ideales de $B_P(C_{P^3})$</i>	65
3. Función zeta de $B(C_{p^3})$	111
3.1. <i>La función $\zeta_{B(C_{p^3})}(s)$</i>	116
Conclusiones	121
Bibliografía	123

FUNCIÓN ZETA PARA EL ANILLO DE BURNSIDE DE UN
GRUPO CÍCLIO DE ORDEN P^3

Juan Manuel Ramírez Contreras

JUNIO 2104

Capítulo 1

Anillo de Burnside

En nuestro marco natural para el estudio del anillo de Burnside de un grupo G , es importante mencionar que sólo se considerará a G como un grupo finito a menos que se especifique lo contrario, de modo que este capítulo tiene como objetivo desarrollar los elementos necesarios para una mayor comprensión de las nociones básicas en la teoría de los anillos de Burnside. Sabemos que esto puede ser estudiado desde diferentes puntos de vista, pero en muchos sentidos el anillo de Burnside es el objeto universal a considerar cuando se habla de la categoría de G -conjuntos, por tal motivo:

1.1. G -conjuntos

Definición 1.1.1. Sean X un conjunto y G un grupo. Diremos que G *actúa* sobre X si existe una función

$$\begin{array}{ccc} * : G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & g * x \end{array}$$

que satisface:

- i) $e * x = x$ para todo $x \in X$, donde e es la identidad en G
- ii) $(gh) * x = g * (h * x)$ para todo $g, h \in G$ y $x \in X$.

Diremos que X es un G -conjunto y $*$ una *acción* de G en X

Observación 1. Dada $*$ una acción de G en X , se tiene que $\sim$ es una relación de equivalencia en X , donde $x \sim y$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $x = g * y$

Es fácil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Definición 1.1.2. Denotaremos a la clase de equivalencia de x en X de acuerdo a la relación anterior $\sim$, por $\mathcal{O}_G(x)$ y la llamaremos *órbita* de x en G .

$$\mathcal{O}_G(x) = \{g * x : g \in G\} \subseteq X.$$

Ejemplo 1. Sean X un conjunto y G un grupo. Entonces

$$* : G \times X \longrightarrow X \\ (g, x) \longmapsto g * x = x$$

es llamada *Acción trivial* de G en X .

Ejemplo 2. Sean X un conjunto, G un grupo y $H \leq G$ un subgrupo. Recordemos que $G/H = \{gH : g \in G\}$ es el conjunto de las clases laterales izquierdas de H . La funcion

$$* : G \times G/H \longrightarrow G/H \text{ tal que } (g, g_1H) \longmapsto g * (g_1H) = (gg_1)H$$

para todo $g \in G$ y $g_1H \in G/H$, es una acción de G en G/H .

Sean (g, g_1H) y $(g, g_2H) \in G \times G/H$ tales que $(g, g_1H) = (g, g_2H)$, de aquí $g_1H = g_2H$, se sigue que $g_1h = g_2$ para algún $h \in H$ puesto que $g_2^{-1}g_1 \in H$. Como $g \in G$, $g * (g_2H) = (gg_2)H = (gg_1h)H = (gg_1)H = g * (g_1H)$, así $*$ está bien definida. Luego, sea $e \in G$ la identidad, entonces $e * (gH) = (eg)H = gH$. Además, $(g_1g_2) * gH = (g_1g_2g)H = g_1 * (g_2gH) = g_1 * (g_2 * gH)$. Por lo tanto, $*$ es una acción de G en G/H .

Ejemplo 3. Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de G -conjuntos, entonces

i) La unión ajena, denotada por $\dot{\bigcup}_{i \in I} X_i$ de la familia $\{X_i\}_{i \in I}$ es un G -conjunto.

ii) El producto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$ es un G -conjunto.

i) La acción de G en $\dot{\bigcup}_{i \in I} X_i$ es la siguiente:

$$* : G \times \dot{\bigcup}_{i \in I} X_i \longrightarrow \dot{\bigcup}_{i \in I} X_i \text{ tal que } (g, x) \longmapsto g * x = (g * _i x),$$

donde $*_i$ es la acción de G en X_i con $x \in X_i$ para algún $i \in I$.

ii) La acción de G en $\prod_{i \in I} X_i$ es la siguiente:

$$* : G \times \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow \prod_{i \in I} X_i \text{ tal que } (g, (x_i)_{i \in I}) \longmapsto g * (x_i)_{i \in I} = (g * _i x_i)_{i \in I},$$

donde $*_i$ es la acción de G en X_i para $i \in I$.

Ejemplo 4. Sean X, Y dos G -conjuntos, si definimos el conjunto de funciones con dominio X y codominio Y como

$$Hom(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ es función}\},$$

entonces $Hom(X, Y)$ es un G -conjunto.

La acción de G en $Hom(X, Y)$ es la siguiente:

$* : G \times Hom(X, Y) \longrightarrow Hom(X, Y)$ tal que $(g, f) \longmapsto g * f$ donde

$$g * f : X \longrightarrow Y$$

y además

$$x \mapsto (g * f)(x) = g *_Y f(g^{-1} *_X x)$$

para toda $x \in X$, $f \in \text{Hom}(X, Y)$ y $g \in G$.

Se puede ver que $*$ está bien definida, puesto que f es una función y $*, *$ son las acciones de G en Y y X , respectivamente.

Sea $f \in \text{Hom}(X, Y)$, entonces $e * f = f$ ya que $(e * f)(x) = e *_Y f(e *_X x) = f(x)$ para toda $x \in X$.

Ahora, veamos que

$$\begin{aligned} ((hg) * f)(x) &= (hg) *_Y [f(g^{-1} h^{-1} *_X x)] \\ &= h *_Y [g *_Y f(g^{-1} h^{-1} *_X x)] \\ &= h *_Y [(g * f)(h^{-1} *_X x)] \\ &= h * (g * f)(x) \text{ para toda } x \in X. \end{aligned}$$

Por tanto $((gh) * f) = h * (g * f)$ con $g, h \in G$.

Ejemplo 5. Sean X un G -conjunto, Y un H -conjunto, entonces $\text{Hom}(X, Y)$ es un $(G \times H)$ -conjunto.

La acción de $(G \times H)$ en $\text{Hom}(X, Y)$ es la siguiente:

$*$: $(G \times H) \times \text{Hom}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}(X, Y)$ tal que $((g, h), f) \mapsto (g, h) * f$ donde

$$(g, h) * f : X \longrightarrow Y$$

y además

$$x \mapsto ((g, h) * f)(x) = h *_H f(g^{-1} *_G x)$$

para toda $x \in X$, $f \in \text{Hom}(X, Y)$ y $g \in G$.

Se puede ver que $*$ está bien definida, puesto que f es una función y $*, *$ son las acciones de H en Y y G en X , respectivamente.

Sea $f \in \text{Hom}(X, Y)$, de aquí que $(e_G, e_H) * f = f$ ya que $((e_G, e_H) * f)(x) = e_H *_H f(e_G *_G x) = f(x)$ para toda $x \in X$.

Ahora, veamos que

$$\begin{aligned} ((g_1, h_1)(g_2, h_2) * f)(x) &= ((g_1 g_2, h_1 h_2) * f)(x) \\ &= h_1 h_2 *_H [f(g_2^{-1} g_1^{-1} *_G x)] \\ &= h_1 *_H [h_2 *_H f(g_2^{-1} *_G (g_1^{-1} *_G x))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h_1 *_H [(g_2, h_2) * f](g_1^{-1} *_G x) \\
&= (g_1, h_1) * ((g_2, h_2) * f)(x) \text{ para toda } x \in X.
\end{aligned}$$

Por tanto $((g_1, h_1)(g_2, h_2) * f) = (g_1, h_1) * ((g_2, h_2) * f)$ con $g, h \in G$.

Ejemplo 6. Sean X un G -conjunto, Y un H -conjunto, entonces $X \times Y$ es un $(G \times H)$ -conjunto.

La acción de $(G \times H)$ en $X \times Y$ es la siguiente:

$*$: $(G \times H) \times (X \times Y) \longrightarrow X \times Y$ tal que

$$((g, h), (x, y)) \longmapsto (g, h) * (x, y) = (g *_X x, h *_Y y)$$

Ejemplo 7. Sean $H \leq G$ un subgrupo de G , X un H -conjunto, entonces $G \times X$ es un H -conjunto.

La acción de H en $G \times X$ es la siguiente:

$*$: $H \times (G \times X) \longrightarrow G \times X$ tal que

$$(h, (g, x)) \longmapsto h * (g, x) = (g, h *_X x)$$

$$i) \quad e * (g, x) = (g, e *_X x) = (g, x) \text{ para toda } (g, x) \in G \times X.$$

$$ii) \quad h_1 h_2 * (g, x) = (g, (h_1 h_2) *_X x) = (g, h_1 *_X (h_2 *_X x)) = h_1(g, h_2 *_X x) = h_1 * (h_2 * (g, x))$$

Ejemplo 8. Sean X un G -conjunto y $F : H \longrightarrow G$ homomorfismo de grupos, entonces X es un H -conjunto.

La acción de H en X es la siguiente:

$*$: $H \times X \longrightarrow X$ tal que

$$(h, x) \longmapsto h * x = F(h) *_G x$$

$$i) \quad e_H * x = F(e_H) *_G x = e_G *_G x = x \text{ para toda } x \in X.$$

$$ii) \quad h_1 h_2 * x = F(h_1 h_2) *_G x = F(h_1) F(h_2) *_G x = F(h_1) *_G (F(h_2) *_G x) = F(h_1) *_G (h_2 * x) = h_1 * (h_2 * x)$$

Observación 2. En el ejemplo 7 podemos definir otra acción de H en $G \times X$ como sigue:

$*$: $H \times (G \times X) \longrightarrow G \times X$ tal que

$$(h, (g, x)) \longmapsto h * (g, x) = (gh^{-1}, hx).$$

Ejemplo 9. Si $G \times X$ es un H -conjunto con la acción definida en la observación 2, entonces $G \times H / \sim$ es un G -conjunto, donde $G \times H / \sim$ es el conjunto de orbitas respecto a la acción de H .

La acción de G en $G \times H / \sim$ es la siguiente:

$*$: $G \times (G \times H / \sim) \longrightarrow G \times H / \sim$ tal que

$$(g', \mathcal{O}_H(g, x)) \longmapsto g' * \mathcal{O}_H(g, x) = \mathcal{O}_H(g'g, x).$$

Veamos que $*$ está bien definida, sean $\mathcal{O}_H(g_1, x_1)$ y $\mathcal{O}_H(g_2, x_2) \in G \times H / \sim$ tales que $\mathcal{O}_H(g_1, x_1) = \mathcal{O}_H(g_2, x_2)$.

De aquí que

$$\exists h_1 \in H \text{ tal que } (g_2, x_2) = h_1 *_H (g_1, x_1) = (g_1 h_1^{-1}, h_1 x_1)$$

Así

$$g' * \mathcal{O}_H(g_2, x_2) = g' * \mathcal{O}_H(g_1 h_1^{-1}, h_1 x_1) = \mathcal{O}_H(h_1 *_H (g'g_1, x_1) = g' * \mathcal{O}_H(g_1, x_1).$$

Por tanto, $*$ está bien definida.

Ejemplo 10. Sea X un conjunto, $X^n = \underbrace{X \times \dots \times X}_{n\text{-veces}}$, entonces X^n es un S_n -conjunto, donde S_n es el grupo de simétrico de n letras.

La acción de S_n en X^n es la siguiente:

$*$: $S_n \times X^n \longrightarrow X^n$ tal que

$$(\sigma, (x_1, \dots, x_n)) \longmapsto \sigma * (x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Para probar $\tau * (\sigma * (x_1, \dots, x_n)) = (\tau\sigma) * (x_1, \dots, x_n)$, notemos que

$$\tau(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}) = (x_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(1))}, \dots, x_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(n))}).$$

Ejemplo 11. Sea X un G -conjunto, X^n un S_n -conjunto, entonces X^n es un $(S_n \times G)$ -conjunto.

La acción de $(S_n \times G)$ en X^n es la siguiente:

Sea $*$: $(S_n \times G) \times X^n \longrightarrow X^n$ tal que

$$((\sigma, g), (x_1, \dots, x_n)) \longmapsto (\sigma, g) * (x_1, \dots, x_n) = (gx_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, gx_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} (\sigma_1, g_1) * ((\sigma_2, g_2) * (x_1, \dots, x_n)) &= (\sigma_1, g_1) * (g_2 x_{\sigma_2^{-1}(1)}, \dots, g_2 x_{\sigma_2^{-1}(n)}) \\ &= (g_1 g_2 x_{\sigma_2^{-1}(\sigma_1^{-1}(1))}, \dots, g_1 g_2 x_{\sigma_2^{-1}(\sigma_1^{-1}(n))}) \\ &= ((g_1 g_2) x_{(\sigma_1 \sigma_2)^{-1}(1)}, \dots, (g_1 g_2) x_{(\sigma_1 \sigma_2)^{-1}(n)}) \\ &= (\sigma_1 \sigma_2, g_1 g_2) * (x_1, \dots, x_n) = ((\sigma_1, g_1)(\sigma_2, g_2)) * (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Observación 3. En el ejemplo 10 podemos definir otra acción de G en X^n como sigue:

Sea $*$: $G \times X^n \longrightarrow X^n$ tal que

$$(g, (x_1, \dots, x_n)) \longmapsto g * (x_1, \dots, x_n) = (gx_1, \dots, gx_n).$$

Dicha acción con la acción del ejemplo 10 conmuta, puesto que

$$\sigma g(x_1, \dots, x_n) = \sigma(gx_1, \dots, gx_n) = (gx_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, gx_{\sigma^{-1}(n)}) = g\sigma(x_1, \dots, x_n).$$

Por tanto, X^n es un $(G \times S_n)$ -conjunto.

Ejemplo 12. Sean X un conjunto, $Y \subset X$ y $q \in \mathbb{N} - \{0\}$. Denotamos por $[X]^q$ al conjunto de todos los subconjuntos de X que tienen cardinalidad q , es decir:

$$[X]^q = \{Y \subset X : |Y| = q\}.$$

Si X es un G -conjunto, entonces $[X]^q$ es un G -conjunto con la acción siguiente:

$$* : G \times [X]^q \longrightarrow [X]^q \text{ tal que } (g, Y) \longmapsto (g * Y) = gY = \{gy : y \in Y\}.$$

Ejemplo 13. Sea X un conjunto, $q \in \mathbb{N} - \{0\}$, definimos

$$S_q(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{N} \mid \sum_{x \in X} f(x) = q\}.$$

Si X es un G -conjunto, entonces $S_q(X)$ es un G -conjunto con la acción siguiente:

$$* : G \times S_q(X) \longrightarrow S_q(X) \text{ tal que}$$

$$(g, f) \longmapsto g * f = gf$$

donde $gf : X \longrightarrow \mathbb{N}$ y es tal que $x \longmapsto (gf)(x) = f(g^{-1}x)$.

Notemos que $X \longrightarrow X$ tal que $x \longmapsto g^{-1}x$ es una biyección, así $gf \in S_q(X)$.

Definición 1.1.3. Sean X, Y dos G -conjuntos con acciones $*_X$ y $*_Y$, respectivamente, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Diremos que f es un morfismo de G -conjuntos si satisface que

$$f(g *_X x) = g *_Y f(x) \text{ para todo } g \in G \text{ y } x \in X.$$

Ejemplo 14. Sean $H, K \leq G$ subgrupos y $H \leq K$, la *proyección*

$$\Pi : G/H \longrightarrow G/K$$

tal que

$$aH \longmapsto aK$$

es un morfismo de G -conjuntos y sobreyectivo.

i) Veamos que Π está bien definida.

$$aH = a'H \Rightarrow (a')^{-1}a \in H \leq K \Rightarrow aK = a'K.$$

- ii) Veamos que Π es un morfismo de G -conjuntos. Notemos que la acción es la definida en el ejemplo 2.

$$\Pi(g *_H aH) = \Pi((ga)H) = (ga)K = g *_K (aK) = g *_K \Pi(aH).$$

Ejemplo 15. Sea X un G -conjunto, la *identidad*

$$Id_X : X \longrightarrow X$$

tal que

$$gx \longmapsto gx.$$

es un morfismo de G -conjuntos.

Observación 4. Se puede ver que la composición de morfismos de G -conjuntos es nuevamente un morfismo de G -conjuntos.

Definición 1.1.4. Sean X, Y dos G -conjuntos, definimos el conjunto de morfismos de G -conjuntos con dominio X y codominio Y como

$$Hom_G(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ es de } G\text{-conjuntos}\}.$$

Definición 1.1.5. Diremos que X, Y dos G -conjuntos con acciones $_X^*$ y $_Y^*$, respectivamente, son isomorfos si existe $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo de G -conjuntos biyectivo. Denotaremos que X y Y son isomorfos como G -conjuntos por

$$X \cong_G Y.$$

Definición 1.1.6. Sean G es un grupo, X un G -conjunto y $x \in X$. Definimos el estabilizador de x en G como

$$stab_G(x) = \{g \in G : g *_G x = x\}.$$

Observación 5. Veamos que $stab_G$ es un subgrupo de G .

- i) Sea e la identidad en G , sabemos que $e *_G x = x$, entonces $e \in stab_G(x)$.
- ii) Sean $g_1, g_2 \in stab_G(x)$, sabemos que $(g_1 g_2) *_G x = g_1 *_G (g_2 *_G x) = x$, entonces $g_1 g_2 \in stab_G(x)$.
- iii) Sea $g \in stab_G(x)$, luego $g *_G x = x$, así $x = g^{-1} *_G x$, entonces $g^{-1} \in stab_G(x)$.

Definición 1.1.7. Llamaremos a un G -conjunto *transitivo* si tiene una única órbita; es decir, si para cada $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $y = gx$.

Si no hay confusión, vamos a abreviar la notación y escribiremos gx en lugar de $g *_G x$.

Teorema 1.1.1. Si G un grupo, X un G -conjunto y $x_0 \in X$, entonces

- i) $stab_G(gx_0) = g(stab_G(x_0))g^{-1}$.
- ii) $\mathcal{O}_G(x_0) \cong_G G/stab_G(x_0)$.
- iii) Si $H \leq G$ subgrupo, entonces G/H es transitivo.
- iv) Si X es un G -conjunto transitivo, entonces $X \cong_G G/H$ para algún $H \leq G$ subgrupo.

DEMOSTRACIÓN. *i)* Sea $a \in \text{stab}_G(gx_0) \leq G$, luego $a(gx_0) = gx_0$, así

$$(ag)x_0 = gx_0,$$

en consecuencia $g^{-1}agx_0 = x_0$, de aquí que $g^{-1}ag \in \text{stab}_G$, así

$$a \in g(\text{stab}_G g)g^{-1},$$

por tanto $\text{stab}_G(gx_0) \subset g(\text{stab}_G(x_0))g^{-1}$. De manera análoga $g(\text{stab}_G(x_0))g^{-1} \subset \text{stab}_G(gx_0)$, por lo tanto

$$\text{stab}_G(gx_0) = g(\text{stab}_G(x_0))g^{-1}.$$

ii) Definimos $\varphi : \mathcal{O}_G(x_0) \longrightarrow G/\text{stab}_G(x_0)$ tal que $gx_0 \longmapsto g(\text{stab}_G(x_0))$.

Veamos que φ está bien definida y es inyectiva.

Sean $g_1x_0, g_2x_0 \in \mathcal{O}_G(x_0)$, entonces $g_1x_0 = g_2x_0$ si y sólo si $(g_2^{-1}g_1)x_0 = x_0$ si y sólo si $g_2^{-1}g_1 \in \text{stab}_G(x_0)$ si y sólo si $g_2(\text{stab}_G(x_0)) = g_1(\text{stab}_G(x_0))$.

Veamos que φ es sobre.

Sea $g(\text{stab}_G(x_0)) \in G/\text{stab}_G(x_0)$, notemos que $gx_0 \in \mathcal{O}_G(x_0)$ y es tal que $\varphi(gx_0) = g(\text{stab}_G(x_0))$, así φ es sobre.

Sólo falta ver que φ es de G -conjuntos.

$$\varphi(a(gx_0)) = \varphi((ag)x_0) = ag(\text{stab}_G(x_0)) = a(g(\text{stab}_G(x_0))) = a(\varphi(gx_0)).$$

Por lo tanto $\mathcal{O}_G(x_0) \cong_G G/\text{stab}_G(x_0)$.

iii) Basta ver que $G/H = \mathcal{O}_G(H)$.

Sea $gH \in G/H$, entonces $gH = (ge)H = g(eH)$. Por tanto

$$G/H = \mathcal{O}_G(H).$$

iv) Es inmediato de *ii*). □

Definición 1.1.8. Sea $H \leq G$ un subgrupo, llamaremos el *conjugado* de H a un subgrupo de G de la forma:

$$gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\} \text{ donde } g \in G.$$

Observación 6. Si llamamos $X = \{H \subset G : H \leq G \text{ es subgrupo}\}$, entonces X es un G -conjunto con la acción siguiente:

$*$: $G \times X \longrightarrow X$ tal que

$$(g, H) \longmapsto g * H = gHg^{-1}.$$

Veamos que $*$ cumple las propiedades de acción.

$$i) \quad e * H = eHe^{-1} = H.$$

$$ii) \quad g_1g_2 * H = (g_1g_2)H(g_1g_2)^{-1} = g_1g_2Hg_2^{-1}g_1^{-1} = g_1 * (g_2Hg_2^{-1}) = g_1 * (g_2 * H).$$

Definición 1.1.9. Al conjunto de órbitas de X bajo la acción de G (ver 6) lo denotaremos $\mathcal{C}(G)$ y lo llamaremos las clases de conjugación de subgrupos de G . Definimos $[H] \in \mathcal{C}(G)$ como:

$$[H] = \{gHg^{-1} : g \in G\}.$$

Además, $[K] =_G [H]$ si y sólo si $K = gHg^{-1}$ para algún $g \in G$.

Observación 7. Sea G un grupo finito, X un G -conjunto, entonces las orbitas de X en G son ajenas.

Supongamos que $\mathcal{O}_G(x) \cap \mathcal{O}_G(y) \neq \emptyset$ con $x, y \in X$.

Sea $g_1x = g_2y$, entonces $x = g_1^{-1}g_2y \in \mathcal{O}_G(y)$, luego $ax = a(g_1^{-1}g_2)y \in \mathcal{O}_G(y)$, así $\mathcal{O}_G(x) \subset \mathcal{O}_G(y)$.

Análogamente, $\mathcal{O}_G(y) \subset \mathcal{O}_G(x)$, por tanto $\mathcal{O}_G(y) = \mathcal{O}_G(x)$. Por lo tanto

$$X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_G(x_i).$$

Ahora, tomemos $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo de G -conjuntos.

Dado $x \in X$, sea $\mathcal{O}_G(x)$ la órbita de x en G .

Luego, $f(gx) = g(f(x))$, así $f(\mathcal{O}_G(x)) \subset \mathcal{O}_G(f(x))$.

Por otro lado, $gf(x) = f(gx) \in f(\mathcal{O}_G(x))$, por tanto $\mathcal{O}_G(f(x)) \subset f(\mathcal{O}_G(x))$.

Por lo tanto,

$$\mathcal{O}_G(f(x)) = f(\mathcal{O}_G(x))$$

En consecuencia, un morfismo de G -conjuntos manda orbitas en orbitas.

Lema 1.1.1. Si $H, K \leq G$ son subgrupos, entonces $G/H \cong_G G/K$ si y sólo si $[H] =_G [K]$.

DEMOSTRACIÓN. ($\Leftarrow$) Sabemos que $[K] =_G [H]$, entonces existe $g \in G$ tal que $K = gHg^{-1}$, así

$$g^{-1}kg = H.$$

Luego, definimos $\varphi : G/H \longrightarrow G/K$ tal que $aH \longmapsto ag^{-1}K$.

Sea $aH, bH \in G/H$, entonces

$aH = bH$ si y sólo si $a^{-1}b \in (H = g^{-1}Kg)$ si y sólo si $ag^{-1}Kg = bg^{-1}Kg$ si y sólo si $ag^{-1}K = bg^{-1}K$.

Así φ está bien definida y es inyectiva.

Sea $bK \in G/K$ con $b \in G$, notemos que $bgH \in G/H$, luego $\varphi(bgH) = bgg^{-1}K = bK$.

De aquí φ es sobreyectiva y, por tanto, biyectiva.

Ahora, $\varphi(g_1(aH)) = \varphi(g_1aH) = (g_1ag^{-1})K = g_1(ag^{-1})K = g_1\varphi(aH)$, con lo cual φ es de G -conjuntos.

Por lo tanto $G/H \cong_G G/K$.

($\Rightarrow$) Sea $g \in G$ y tomemos $f : G/H \longrightarrow G/K$ tal que $H \longmapsto gK$.

Para todo $h \in H$, $gK = f(H) = f(hH) = hgK$, así $gK = hgK$, luego $g^{-1}hg \in K$, de aquí $g^{-1}Hg \subset K$.

Por otro lado, tomemos f^{-1} y notamos que para cada $k \in K$ $kg^{-1}H = g^{-1}H$, así $gkg^{-1} \in H$ para todo $k \in K$, luego $gKg^{-1} \subset H$, en consecuencia $K \subset g^{-1}Hg$, por tanto $K = g^{-1}Hg$, por lo tanto

$$[H] =_G [K].$$

□

Teorema 1.1.2. Si X es un G -conjunto finito, entonces

$$X \cong_G \dot{\bigcup}_{i \in I} G/H_i$$

donde $H_i \leq G$ subgrupo para cada $i \in I$.

DEMOSTRACIÓN. Sea X es un G -conjunto, sabemos que

$$X = \dot{\bigcup}_{i \in I} \mathcal{O}_G(x_i)$$

y además

$$\mathcal{O}_G(x_i) \cong_G^{f_i} G/\text{stab}_G(x_i).$$

Definimos $f : \dot{\bigcup}_{i \in I} \mathcal{O}_G(x_i) \longrightarrow \dot{\bigcup}_{i \in I} G/\text{stab}_G(x_i)$ tal que

$$x \longmapsto f_i(x)$$

Por tanto, f es un isomorfismo de G -conjuntos.

□

Definición 1.1.10. Sean $H, K \leq G$ subgrupos. Si existe $g \in G$ tal que

$$gHg^{-1} \subset K,$$

diremos que H es *subconjugado* de K .

Teorema 1.1.3. Si $H, K \leq G$ son subgrupos, entonces

$$\text{Hom}_G(G/H, G/K) \neq \emptyset \text{ si y sólo si } H \text{ es subconjugado de } K.$$

DEMOSTRACIÓN. ($\Rightarrow$) Sea $f \in \text{Hom}_G(G/H, G/K)$ tal que $f(eH) = aK$ para cada $h \in H$, luego $aK = f(hH) = hf(eH) = haK$, entonces $(a^{-1})ha \in K$ con lo cual $(a^{-1})Ha \subset K$.

($\Leftarrow$) Sabemos que existe $a \in G$ tal que $a^{-1}Ha \leq K$ subgrupo.

Así, tomamos $\alpha : G/H \longrightarrow G/a^{-1}Ha$ un isomorfismo de G -conjuntos y la proyección (Ejm. 12) $\Pi : G/a^{-1}Ha \longrightarrow G/K$.

En consecuencia

$$\Pi \circ \alpha \in \text{Hom}_G(G/H, G/K).$$

□

Observación 8. Si H es subconjugado de K , entonces todo subconjugado de H es subconjugado de cualquier conjugado de K .

Observación 9. En $\mathcal{C}(G)$ hay una relación de orden parcial.

Dados $[H], [K] \in \mathcal{C}(G)$, tenemos que

$$[H] \leq [K] \text{ si y sólo si } H \text{ es subconjugado de } K.$$

1.2. Propiedades de la Marca

Definición 1.2.1. Dado G un grupo, $H \leq G$ subgrupo y X un G -conjunto finito. Definimos X^H como el conjunto de todos los puntos de X que quedan fijos bajo la acción de H ; es decir,

$$X^H = \{x \in X : h * x = x \text{ para todo } h \in H\}.$$

Definimos la *Marca* de H en X como el número de elementos de X^H y la denotamos por

$$\varphi_H(X) = |X^H|.$$

Teorema 1.2.1. Si $H, K \leq G$ son subgrupos y X, Y son G -conjuntos ajenos, entonces

$$i) \quad \varphi_H(X \cup Y) = \varphi_H(X) + \varphi_H(Y).$$

$$ii) \quad \varphi_H(X \times Y) = \varphi_H(X)\varphi_H(Y).$$

$$iii) \quad \text{Si } [H] =_G [K], \text{ entonces } \varphi_H = \varphi_K.$$

DEMOSTRACIÓN. $i) \quad (X \cup Y)^H = \{z \in X \cup Y : h * z = z \text{ para todo } h \in H\} =$

$$\{z : (z \in X \vee z \in Y) \wedge h * z = z \text{ para todo } h \in H\} =$$

$$\{z : (z \in X \wedge h * z = z) \vee (z \in Y \wedge h * z = z) \text{ para todo } h \in H\} =$$

$$\{z \in X \text{ o } z \in Y : h * z = z \text{ para todo } h \in H\} = X^H \cup Y^H.$$

$$\text{Luego } |(X \cup Y)^H| = |X^H \cup Y^H| = |X^H| + |Y^H|.$$

$$ii) (X \times Y)^H = \{(x, y) \in X \times Y : h * (x, y) = (x, y) \text{ para todo } h \in H\} =$$

$$\{(x, y) \in X \times Y : (h * x, h * y) = (x, y) \text{ para todo } h \in H\} =$$

$$\{(x, y) : x \in X^H \text{ y } y \in Y^H \text{ para todo } h \in H\} =$$

$$X^H \times Y^H.$$

$$\text{Luego } |(X \times Y)^H| = |X^H \times Y^H| = |X^H| |Y^H|.$$

$$iii) \text{ Sea } X \text{ un } G\text{-conjunto y } [H] =_G [K], \text{ entonces}$$

$$\exists g \in G \text{ tal que } H = gKg^{-1}, \text{ luego}$$

$$X^H = \{x \in X : h * x = x \text{ para todo } h \in H\} =$$

$$\{x \in X : gkg^{-1} * x = x \text{ para todo } k \in K\} =$$

$$\{x \in X : k(g^{-1} * x) = g^{-1} * x \text{ para todo } k \in K\} =$$

$$\{x \in X : g^{-1} * x \in X^K \text{ para todo } k \in K\} =$$

$$\{x \in X : x \in gX^K \text{ para todo } k \in K\} = gX^K.$$

$$\text{Así } |X^H| = |gX^K|.$$

Luego, defínase $\psi : X^K \longrightarrow gX^K$ tal que $x \longmapsto gx$. Notemos que, ψ es una biyección, con lo cual $|X^K| = |gX^K|$.

$$\text{En consecuencia, } |X^H| = |X^K|$$

Por tanto, para todo G -conjunto se tiene que $\varphi_H = \varphi_K$. □

Lema 1.2.1. Sean $H, K \leq G$ subgrupos, entonces existe una biyección entre

$$(G/H)^K \text{ y } \text{Hom}_G(G/K, G/H).$$

DEMOSTRACIÓN. *i)* Supongamos que K no es subconjugado de H , entonces $\text{Hom}_G(G/K, G/H) = \emptyset$.

$$\text{Por otro lado } (G/H)^K = \{gH \in G/H : (kg)H = gH \text{ para todo } k \in K\} =$$

$$\{gH \in G/H : g^{-1}kgH = H \text{ para todo } k \in K\} =$$

$$\{gH \in G/H : g^{-1}Kg \subset H\} = \emptyset.$$

ii) Supongamos que K es subconjugado de H . Definimos

$$\gamma : (G/H)^K \longrightarrow \text{Hom}_G(G/K, G/H)$$

tal que

$$aH \longmapsto \gamma_a : G/K \longrightarrow G/H$$

donde

$$gK \longmapsto gaH.$$

Veamos que γ_a está bien definida.

Sean $g_1K = g_2K$, así $g_1 = g_2k$ para $k \in K$. Luego, $\gamma_a(g_1K) = g_1aH$

$$g_2(k(aH)) = g_2(aH) = \gamma_a(g_2K).$$

Ahora veamos que γ_a es un morfismo de G -conjuntos.

Sean $f \in G$ y $gK \in G/K$, entonces $\gamma_a(f(gK)) = \gamma_a((fg)K) = fgaH = f\gamma_a(gK)$.

Veamos que γ está bien definida.

Sean $aH, bH \in (G/H)^K$ tales que $aH = bH$. Entonces $b = ah$ para algún $h \in H$.

Luego, $\gamma_b(gK) = gbH = gahH = gaH = \gamma_a(gK)$. Por tanto, para toda $gK \in G/K$, se tiene que

$$\gamma_a = \gamma_b.$$

Sea $\gamma' : \text{Hom}_G(G/K, G/H) \longrightarrow (G/H)^K$ tal que

$$\alpha \longmapsto \alpha(K).$$

Veamos que γ' está bien definida.

Sea $k \in K$, tenemos que $k\alpha(K) = \alpha(kK) = \alpha(K)$.

Ahora, veamos que $\gamma \circ \gamma' = \text{Id}_{\text{Hom}_G(G/K, G/H)}$.

$$\gamma \circ \gamma'(\alpha) = \gamma(\gamma'(\alpha)) = \gamma(\alpha(K)) = \gamma(gH) = \gamma_g.$$

Por otro lado $\gamma \circ \gamma'((\alpha)(xK)) = \gamma_g(xK) = xgH = x(\alpha K) = \alpha(xK)$.

Así, para todo $xK \in G/K$, se tiene que $\gamma \circ \gamma'(\alpha) = \alpha$, de aquí

$$\gamma \circ \gamma' = \text{Id}_{\text{Hom}_G(G/K, G/H)}.$$

Ahora, sea $aH \in (G/H)^K$, $\gamma' \circ \gamma(aH) = \gamma'(\gamma_a) = \gamma_a(K) = aH$.

Por tanto

$$\gamma' \circ \gamma = Id_{(G/H)^\kappa}.$$

□

Corolario 1.2.1. Sean $H, K \leq G$ subgrupos. Entonces $\varphi_K(G/H) \neq 0$ si y sólo si K es subconjugado de H .

Definición 1.2.2. Dado G un grupo, $H \leq G$ subgrupo. Definimos el normalizador de H en G como:

$$N_G(H) = \{g \in G : gH = Hg\}.$$

Observación 10. Dado $H \leq G$, se cumplen las siguiente propiedades:

- i) $N_G(H) \leq G$.
- ii) $H \trianglelefteq N_G(H)$ subgrupo normal.
- iii) $H \trianglelefteq G$ si y sólo si $N_G(H) = G$.

Teorema 1.2.2. $\varphi_H(G/H) = |N_G(H)/H|$

DEMOSTRACIÓN. Sólo basta ver que $(G/H)^H$ es un $N_G(H)$ -conjunto y $(G/H)^H \cong_{N_G(H)} N_G(H)/H$.

Sean $aH \in (G/H)^H \subset G/H$ y $x \in N_G(H) \leq G$; como G actúa en G/H mediante $g(aH) = gaH$, se tiene que $x(aH) = xaH$. Veamos que, $xaH \in (G/H)^H$.

Sea $h \in H$, debemos ver que $h * xaH = xaH$; es decir, $a^{-1}x^{-1}hxa \in H$. Se cumple que, $a^{-1}ha \in H$ y $x^{-1}hx \in H$, así $(G/H)^H$ es un $N_G(H)$ -conjunto.

Ahora, sea $\psi : (G/H)^H \longrightarrow N_G(H)/H$ tal que

$$aH \longmapsto aH.$$

Veamos que ψ está bien definida; es decir, $a \in N_G(H)$ para $a \in G$. Notemos que $a^{-1}ha \in H$ para toda $h \in H$. Luego, tomemos $\sigma_a : H \longrightarrow H$ tal que

$$x \longmapsto a^{-1}xa$$

la cual es una biyección, así $a \in N_G(H)$, con lo cual ψ está bien definida. Notar que ψ se comporta como la identidad, en consecuencia

$$(G/H)^H \cong_{N_G(H)} N_G(H)/H.$$

□

Teorema 1.2.3 (Cauchy-Frobenius-Burnside). Sean G un grupo finito y X un G -conjunto. Definimos para cada $g \in G$ el conjunto $X^g = \{x \in X : gx = x\}$. Si N denota el número de orbitas de X , entonces

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{A} = \{(g, x) \in G \times X : gx = x\}$. Si fijamos $g \in G$, tenemos que $\mathcal{A} = \dot{\bigcup}_{g \in G} \{(g, x) : gx = x\} = \dot{\bigcup}_{g \in G} \{(g, x) : x \in X^g\}$.

En consecuencia, $|\mathcal{A}| = \sum_{g \in G} |\{(g, x) : x \in X^g\}| = \sum_{g \in G} |X^g|$.

Análogamente, si fijamos $x \in X$, tenemos que $|\mathcal{A}| = \sum_{x \in X} |\text{stab}_G(x)|$.

Recordemos que $\mathcal{O}_G(x_i) \cong_G G/\text{stab}_G(x_i)$. Sea $x \in \mathcal{O}(x_i)$, así $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(x_i)$, de aquí que $|\mathcal{O}(x)| = |\mathcal{O}(x_i)|$ para toda $x \in \mathcal{O}(x_i)$. Se obtiene de esta forma:

$$\sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{x \in \dot{\bigcup}_{i=1}^N \mathcal{O}(x_i)} |\text{stab}_G(x)|.$$

Como $|\mathcal{O}_G(x_i)| = |G| / |\text{stab}_G(x_i)|$, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \dot{\bigcup}_{i=1}^N \mathcal{O}(x_i)} |\text{stab}_G(x)| &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{x \in \mathcal{O}(x_i)} |G| / |\mathcal{O}_G(x_i)| \right) \\ &= |G| \sum_{i=1}^N \left(\sum_{x \in \mathcal{O}(x_i)} 1 / |\mathcal{O}_G(x_i)| \right) \\ &= |G| \sum_{i=1}^N 1 = |G| N \end{aligned}$$

□

Para saber más de las marcas, ver [4].

1.3. El anillo de Burnside

Observación 11. Llamemos $\mathbb{A}$ a la familia de todos los G -conjuntos finitos. Dados $X, Y \in \mathbb{A}$, tenemos la siguiente relación de equivalencia

$X \sim Y$ si y sólo si $X \cong_G Y$ son isomorfos como G -conjuntos.

Definición 1.3.1. Sea $X \in \mathbb{A}$. Llamaremos a $[X] = \{Y \in \mathbb{A} : X \cong_G Y\}$ la clase de G -isomorfismo de X . Así, definimos

$$B^+(G) := \{[X] : X \text{ es un } G \text{ conjunto finito}\}.$$

Teorema 1.3.1. $B^+(G)$ es un semianillo conmutativo con unidad, con las operaciones binarias de unión ajena y producto cartesiano, a las cuales las denotaremos por:

$$\begin{aligned} i) \quad [X] + [Y] &= [X \dot{\cup} Y] \\ ii) \quad [X] \cdot [Y] &= [X \times Y] \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Primero notemos que, dado $g \in G$ y $z \in X \dot{\cup} Y$ tenemos que

$$g * z = \begin{cases} g *_X z & \text{si } z \in X \\ g *_Y z & \text{si } z \in Y \end{cases}$$

Además $g * (x, y) = (g *_X x, g *_Y y)$. Ahora, veamos que la suma está bien definida.

Sean $[X], [X'], [Y]$ y $[Y'] \in B^+(G)$ tales que $[X] = [X']$ y $[Y] = [Y']$; es decir, existen

$$\sigma : X \longrightarrow X' \text{ y } \beta : Y \longrightarrow Y'$$

isomorfismos de G -conjuntos.

Sea $\gamma : X \dot{\cup} Y \longrightarrow X' \dot{\cup} Y'$ definida por

$$z \longmapsto \begin{cases} \sigma(z) & \text{si } z \in X \\ \beta(z) & \text{si } z \in Y \end{cases}$$

Observemos que γ es biyectiva, falta ver que es un morfismo de G -conjuntos, para ello notemos que

$$g * z \longmapsto \begin{cases} \sigma(gz) = g\sigma(z) & \text{si } z \in X \\ \beta(gz) = g\beta(z) & \text{si } z \in Y. \end{cases}$$

Por tanto, $[X \dot{\cup} Y] = [X' \dot{\cup} Y']$.

Para la conmutatividad de la suma, notemos que sólo necesitamos usar el morfismo identidad.

Para la asociatividad de la suma, observemos que la unión ajena es asociativa.

El neutro de la suma es $[\emptyset]$

Veamos que el producto está bien definido. Sean $[X], [X'], [Y]$ y $[Y'] \in B^+(G)$ tales que $[X] = [X']$ y $[Y] = [Y']$; es decir, existen

$$\sigma : X \longrightarrow X' \text{ y } \beta : Y \longrightarrow Y'$$

isomorfismos de G -conjuntos.

Sea $\gamma : X \times Y \longrightarrow X' \times Y'$ tal que

$$(x, y) \longmapsto (\sigma(x), \beta(y)).$$

Es fácil ver que γ es un isomorfismo de G -conjuntos. Por tanto, $[X \times Y] = [X' \times Y']$.

Sea $\varphi : X \times Y \longrightarrow Y \times X$ tal que

$$(x, y) \longmapsto (y, x).$$

Claramente φ es biyectiva, con lo cual el producto es conmutativo. Ahora, veamos que φ es un morfismo de G -conjuntos.

$$\varphi(g(x, y)) = \varphi(g * x, g * y) = (g * y, g * x) = g(y, x) = g\varphi(x, y).$$

Para la asociatividad del producto, notar que el producto cartesiano es asociativo.

Veamos la ley distributiva. Sea $\delta : X \times (Y \dot{\cup} Z) \longrightarrow (X \times Y) \dot{\cup} (X \times Z)$ tal que

$$(x, w) \longmapsto \begin{cases} (x, w) \in X \times Y & \text{si } w \in Y \\ (x, w) \in X \times Z & \text{si } w \in Z. \end{cases}$$

Notemos que δ es la identidad, con lo cual está bien definida, es biyectiva y es un morfismo de G -conjuntos.

$$\text{Por tanto, } [X]([Y] + [Z]) = [X][Y] + [X][Z].$$

Veamos que $B^+(G)$ tiene unidad. Sea $\eta : X \times G/G \longrightarrow X$ tal que

$$(x, eG) \longmapsto x.$$

Claramente δ está bien definida, es biyectiva y es un morfismo de G -conjuntos.

Así, $[X][G/G] = [X]$, es decir $[G/G]$ es la unidad. □

Ejemplo 16. Tomemos $G = \{e\}$ y X un conjunto. Note que X es un G -conjunto con acción trivial (Ejemplo 1), observese que dos G -conjuntos con la acción trivial son isomorfos si existe una biyección entre ellos. Es facil ver que, $\phi : B^+(\{e\}) \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $[X] \longmapsto |X|$ es un isomorfismo de semianillos, con lo cual $\mathbb{N} \cong B^+(\{e\})$.

Teorema 1.3.2. Hay cancelación en $B^+(G)$ con la suma.

DEMOSTRACIÓN. Sean $[X], [Y]$ y $[Z] \in B^+(G)$ tales que $[X] + [Z] = [Y] + [Z]$, así existe $\gamma : X \dot{\cup} Z \longrightarrow Y \dot{\cup} Z$ isomorfismo de G -conjuntos. Ahora, a $X \dot{\cup} Z$ y a $Y \dot{\cup} Z$ los descomponemos en unión ajena de órbitas, como γ manda órbitas en órbitas, y las órbitas de Z se corresponden con las órbitas de Z por consecuencia, las órbitas de X se corresponden con las órbitas de Y , así

$$\gamma|_X : X \longrightarrow Y$$

es isomorfismo de G -conjuntos, por lo tanto $[X] = [Y]$. □

Observación 12. El teorema anterior nos permite definir una relación de equivalencia en $B^+(G) \times B^+(G)$.

$$([X_1], [Y_1]) \sim ([X_2], [Y_2])$$

si y sólo si

$$[X_1] + [Y_2] = [X_2] + [Y_1].$$

Para mayor comodidad, denotaremos a la clase de equivalencia de $([X], [Y]) \in B^+(G) \times B^+(G)$ por

$$[X] - [Y].$$

Definición 1.3.2. Definimos el *Anillo de Burnside* $(B(G))$ de un grupo G como:

$$B(G) = [(B^+(G) \times B^+(G)) / \sim] =$$

$$\{[X] - [Y] : ([X], [Y]) \in B^+(G) \times B^+(G)\}.$$

El cual recibe el nombre de Anillo de Grothendieck de $B^+(G)$.

Observación 13. $B(G)$ es un anillo conmutativo con unidad, $1 \neq 0$ con las operaciones:

$$[X_1] - [Y_1] + [X_2] - [Y_2] = ([X_1] + [X_2]) - ([Y_1] + [Y_2])$$

$$([X_1] - [Y_1])([X_2] - [Y_2]) = ([X_1][X_2] + [Y_1][Y_2]) - ([X_1][Y_2] + [X_2][Y_1])$$

Además,

i) El neutro de la suma es $0 = [\emptyset] - [\emptyset] = [X] - [X]$ con $[X] \in B^+(G)$.

ii) Dado $[X] - [Y] \in B(G)$ su inverso aditivo es $[Y] - [X]$.

iii) En el producto la unidad es $1 = [G/G] - [\emptyset]$.

Teorema 1.3.3. Dado G un grupo, como grupo abeliano $B(G)$ es libre como $\mathbb{Z}$ -módulo generado por los elementos de la forma $[G/H_i]$, donde $[H_i]$ corre sobre un conjunto de representantes de $\mathcal{C}(G)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea G un grupo finito y X un G -conjunto. Por Teorema 1.1.2,

$$X \cong_G \dot{\bigcup}_{i \in I} G/H_i$$

donde $H_i \leq G$ es subgrupo para cada $i \in I$. Con lo cual,

$$[X] = \left[\dot{\bigcup}_{i \in I} G/H_i \right] \in B^+(G).$$

Recordemos que $G/H_i \cong_G G/H_j$ si y sólo si $[H_i] =_G [H_j]$ (ver lema 1.1.1). Con lo cual, podemos tener repeticiones de algunos G/H_i . Así, llamemos $a_{H_i} \in \mathbb{N}$ al número de veces que se repite el elemento G/H_i . De aquí que,

$$\left[\dot{\bigcup}_{i \in I} G/H_i \right] = \sum_{[H_i] \in \mathcal{C}(G)} a_{H_i} [G/H_i] \text{ donde } a_{H_i} \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia,

$$B^+(G) = \bigoplus_{[H] \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{N}[G/H] \text{ como semigrupo abeliano.}$$

Luego, como el Anillo de Grothendieck de los $\mathbb{N}$ son los $\mathbb{Z}$, se tiene que

$$B(G) = \bigoplus_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}[G/H] \text{ como grupo abeliano.}$$

□

Teorema 1.3.4. Sean G un grupo y $H, K \leq G$ subgrupos. Entonces hay biyecciones entre cada par de conjuntos siguientes:

- i) El conjunto de las G -orbitas de $(G/H) \times (G/K)$.
- ii) El conjunto de las H -orbitas de (G/K) .
- iii) El conjunto de las clases laterales dobles de $H \setminus G/K$ de la forma HgK para algún $g \in G$.

DEMOSTRACIÓN. [ii] y iii) Sea $gK \in G/K$. Notemos que $\mathcal{O}_H(gK) = \{hgK : h \in H\} = HgK$, claramente se puede ver que podemos definir una biyección.

[i] y ii) Sea $(aH, bK) \in (G/H) \times (G/K)$. Notemos que $\mathcal{O}_G(aH, bK) = \mathcal{O}_G(aeH, aa^{-1}bK) = \mathcal{O}_G(a(eH, a^{-1}bK)) = \mathcal{O}_G(eH, a^{-1}bK)$.

Así, tenemos una función tal que $\mathcal{O}_G(aH, bK) \mapsto \mathcal{O}_H(a^{-1}bK)$.

Veamos que está bien definida, sean $\mathcal{O}_G(aH, bK) = \mathcal{O}_G(a'H, b'K)$, entonces existe $g \in G$ tal que $(a'H, b'K) = (gaH, gbK)$, de aquí $a'H = gaH$ y $b'K = gbK$, con lo cual $(a')^{-1}ga \in H$ y $(b')^{-1}gb \in K$.

Llamemos $h = (a')^{-1}ga$ y $k = (b')^{-1}gb$, por tanto $(a')^{-1}b'K = ha^{-1}g^{-1}b'K = ha^{-1}g^{-1}gbK = ha^{-1}bK$. Por lo tanto $\mathcal{O}_H((a')^{-1}b'K) = \mathcal{O}_H(a^{-1}bK)$.

Notemos que $\mathcal{O}_G(eH, gK) \mapsto \mathcal{O}_H(gK)$ es inyectiva y sobreyectiva.

□

Teorema 1.3.5. Sean $(aH, bK) \in (G/H) \times (G/K)$, entonces $\text{stab}_G(aH, bK) = aHa^{-1} \cap bKb^{-1}$.

DEMOSTRACIÓN. $\text{stab}_G(aH, bK) = \{g \in G : (gaH, gbK) = (aH, bK)\}$

$$= \{g \in G : gaH = aH \text{ y } gbK = bK\}$$

$$= \{g \in G : a^{-1}ga \in H \text{ y } b^{-1}gb \in K\}$$

$$= \{g \in G : g \in (aHa^{-1} \cap bKb^{-1})\}$$

$$= aHa^{-1} \cap bKb^{-1}.$$

□

Corolario 1.3.1. $(G/H) \times (G/K) \cong \dot{\bigcup} G/(H \cap gKg^{-1})$ con $g \in R$, donde R son los representantes de las clases laterales dobles de la forma HgK .

$$\begin{aligned} \text{DEMOSTRACIÓN. } (G/H) \times (G/K) &\cong \dot{\bigcup}_{g \in R} \mathcal{O}_G(eH, gK) \\ &\cong \dot{\bigcup}_{g \in R} G/\text{stab}_G(eH, gK) \\ &\cong \dot{\bigcup}_{g \in R} G/(H \cap gKg^{-1}). \end{aligned}$$

□

Corolario 1.3.2. Sean $[G/H], [G/K] \in B(G)$. Entonces

$$[G/H] [G/K] = \sum_{g \in R} [G/(H \cap gKg^{-1})].$$

Corolario 1.3.3. Si $K \trianglelefteq G$ es un subgrupo normal, entonces

$$[G/H] [G/K] = |R| [G/(H \cap K)].$$

Observación 14. En el caso de que K es normal, se tiene que $H \setminus G/K = \{HgK : g \in G\} = \{HKg : g \in G\}$. Con lo cual, $H \setminus G/K$ coincide con el conjunto de las clases laterales derechas de HK en G , así $|R| = [G : HK]$ y $|HK| = (|H| |K|) / |H \cap K|$, por lo tanto

$$[G/H] [G/K] = \frac{|H \cap K| |G|}{|H| |K|} [G/(H \cap K)].$$

Observación 15. Hay una inclusión $i : B^+(G) \longrightarrow B(G)$ tal que

$$[X] \longmapsto [X] - [\emptyset].$$

Observación 16. Sean G un grupo finito, R un anillo conmutativo y

$$f : B^+(G) \longrightarrow R$$

un morfismo de semianillos. Entonces f se extiende de manera única a $B(G)$; es decir, existe $F : B(G) \longrightarrow R$ un morfismo de anillos tal que

$$F|_{B^+(G)} = f.$$

La forma de extender a $f : B^+(G) \longrightarrow R$ un morfismo de semianillos, es de la siguiente manera:

$$F([X] - [Y]) = f([X]) - f([Y]).$$

Lema 1.3.1. $\varphi : B^+(G) \longrightarrow \prod_{[H] \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}$ dada por

$$[X] \longmapsto \varphi([X]) = (\varphi_H(X))_{[H] \in \mathcal{C}(G)} \text{ (ver la definición 1.2.1).}$$

es un morfismo inyectivo de semianillos. De aquí que, φ se extiende de manera única a un morfismo inyectivo de anillos; el cual, abusando de la notación, denotaremos también por φ .

$$\varphi : B(G) \longrightarrow \prod_{[H] \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}$$

DEMOSTRACIÓN. Note que $\prod_{[H] \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{|\mathcal{C}(G)|}$, con lo cual $\prod_{[H] \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}$ es un anillo conmutativo con suma y producto definimos de manera usual (entrada a entrada). Además, $1_{B(G)} = [G/G]$ y $1_{\prod \mathbb{Z}} = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{|\mathcal{C}(G)| \text{ veces}}$. Por tanto,

$$\varphi([G/G]) = (\varphi_H(G/G))_{[H] \in \mathcal{C}(G)}.$$

Ahora, para cada $H \leq G$ subgrupo, tenemos que $[H] \leq [G]$, así $\varphi([G/G]) \neq 0$, de modo que $\varphi_H(G/G) = 1$. Por tanto, φ manda al uno en el uno para cada $[H] \in \mathcal{C}(G)$.

De las propiedades de marca, es fácil ver que abre la suma y el producto. Sólo falta ver que φ extendida es inyectiva.

Recordemos que φ es inyectiva si y sólo si para cada $a \neq 0 \in B(G)$, se tiene que $\varphi(a) \neq 0$.

Sea $a \in B(G)$ tal que $a \neq 0$, así $a = \sum_{[H] \in \mathcal{C}(G)} a_H [G/H]$ con $a_H \in \mathbb{Z}$, donde no todos los a_H son cero. Se puede ver que la relación $[H] < [K]$ si y sólo si H es subconjugado de K , es un orden parcial en $\mathcal{C}(G)$. Además, puesto que G es finito, toda cadena creciente $[H_1] < [H_2] < \dots$ se estaciona. Elegimos $[K]$ maximal con respecto a este orden tal que $a_K \neq 0$, de aquí

$$\varphi_K(a) = \sum_{[H] \in \mathcal{C}(G)} a_H \varphi_K([G/H]) = a_K \varphi_K(G/K) \neq 0.$$

□

Corolario 1.3.4. Sean X, Y dos G -conjuntos, entonces $X \cong_G Y$ si y sólo si $\varphi_H(X) = \varphi_H(Y)$ para todo $[H] \in \mathcal{C}(G)$.

DEMOSTRACIÓN. ($\Leftarrow$) Supongamos que $\varphi_H(X) = \varphi_H(Y)$ para toda $[H] \in \mathcal{C}(G)$. Entonces $\varphi([X]) = \varphi([Y])$, como φ es inyectiva, se sigue que $[X] = [Y]$ en $B(G)$. Por tanto $X \cong_G Y$.

($\Rightarrow$) Sea $f : X \longrightarrow Y$ isomorfismo de G -conjuntos. Recordemos que,

$$\begin{aligned} Y^H &= \{y \in Y : hy = y \text{ para toda } h \in H\} \\ &= \{f(x) \in Y : hf(x) = f(x) \text{ para toda } h \in H\} \\ &= \{f(x) \in Y : f(hx) = f(x) \text{ para toda } h \in H\}. \end{aligned}$$

De aquí que $hx = x$ para toda $h \in H$ si y sólo si $x \in X^H$.
Para saber más sobre el anillo de Burnside, ver [2].

□

1.4. B como funtor contravariante

Sean $\mathcal{G}$ la categoría de grupos y $\mathcal{R}$ a la categoría de anillos. Definimos un funtor $B : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{R}$ como:

$$\begin{array}{ccc} G & \rightsquigarrow & B(G) \\ f \downarrow & & \uparrow B(f) \\ H & \rightsquigarrow & B(H) \end{array}$$

En el diagrama anterior $f : G \rightarrow H$ es un homomorfismo de grupos. Ahora, si X es un H -conjunto, entonces para cada $h \in H$ y $x \in X$ podemos tomar la acción $h * x$. Así, podemos hacer a X un G -conjunto mediante la siguiente acción:

$$g * x = f(g) * x \text{ para cada } g \in G \text{ y } x \in X.$$

Denotemos por $B(X)$ a este G -conjunto, el cual como conjunto es simplemente X . De esta forma, es posible definir $B(f) : B(H) \rightarrow B(G)$ tal que

$$X \mapsto B(X).$$

No es difícil ver que $B(f)$ es un morfismo de semianillos; de aquí que, existe $F : B(H) \rightarrow B(G)$ un morfismo de anillos tal que

$$F|_{B^+(H)} = B(f)$$

Abusando de la notación $F = B(f)$.

Lema 1.4.1. B es un funtor contravariante.

DEMOSTRACIÓN. Veamos que:

i) $B(1_G) = 1_{B(G)}$ para cada morfismo identidad 1_G de $\mathcal{G}$.

ii) $B(g \circ f) = B(f) \circ B(g)$ para cada dos morfismos $f, g \in \mathcal{G}$ cuya composición $g \circ f$ está definida.

i) Sea $G \in \mathcal{G}$, como $\mathcal{G}$ es un categoría, existe $1_G : G \rightarrow G$ tal que para cada $f : A \rightarrow G$ y $g : G \rightarrow D$ se tiene que

$$1_G \circ f = f \text{ y } g \circ 1_G = g.$$

Así, $B(1_G) : B(G) \rightarrow B(G)$.

Luego, dado X un G -conjunto, se tiene que

$$a * x = 1_G(a) * x \text{ para cada } a \in G \text{ y } x \in X.$$

Por tanto, $B(1_G)$ se comporta como la identidad de $B(G) \in \mathcal{R}$. Por lo tanto $B(1_G) = 1_{B(G)}$.

ii) Sean f y $g \in \text{Hom}(\mathcal{G})$ tales que $g \circ f$ está definida.

$$\begin{array}{ccc}
 G & \rightsquigarrow & B(G) \\
 f \downarrow & & \uparrow B(f) \\
 H & \rightsquigarrow & B(H) \\
 g \downarrow & & \uparrow B(g) \\
 K & \rightsquigarrow & B(K)
 \end{array}$$

Por otro lado, dado X un K -conjunto, se tiene que X es un H -conjunto mediante la acción siguiente:

$$a *_H x = g(a) *_K x \text{ para cada } a \in H \text{ y } x \in X.$$

Análogamente, dado X un H -conjunto, se sigue que X es un G -conjunto.

De la misma manera, dado X un K -conjunto, se tiene que X es un G -conjunto mediante la siguiente acción:

$$a *_G x = g(f(a)) *_K x = (g \circ f)(a) *_K x \text{ para cada } a \in G \text{ y } x \in X.$$

Por tanto $B(g \circ f) = B(f) \circ B(g)$. □

1.5. El espectro primo de $B_\Pi(G)$.

Definición 1.5.1. Llamemos Π a un conjunto de números primos cualesquiera. Definimos

$$\mathbb{Z}_\Pi := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : p \nmid b \text{ para todo } p \in \Pi \right\}.$$

Observación 17. i) Dados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Z}_\Pi$, se tiene que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \in \mathbb{Z}_\Pi \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in \mathbb{Z}_\Pi.$$

ii) Se cumple que $\mathbb{Z}_\Pi$ es un anillo conmutativo con unidad.

iii) $\mathbb{Z}_{\{p\}} := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : p \nmid b \right\}$.

iv) Si Π es el conjunto de todos los número primos, entonces $\mathbb{Z}_\Pi = \mathbb{Z}$

v) Si $\Pi = \emptyset$, entonces $\mathbb{Z}_\Pi = \mathbb{Q}$.

Teorema 1.5.1. Sea A un anillo conmutativo con unidad tal que $\mathbb{Z} \subsetneq A \subsetneq \mathbb{Q}$. Entonces existe Π tal que $A = \mathbb{Z}_\Pi$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{b} \notin A$ con $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Por el teorema fundamental de la Aritmética, existen $r \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_r$ números primos distintos y $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{N}$ tales que

$$b = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}.$$

Supongamos que $\frac{1}{p_i} \in A$ para toda $i = 1, \dots, r$. En consecuencia $\frac{1}{p_i^{e_i}} \in A$ para toda $i = 1, \dots, r$. Con lo cual $\frac{1}{b} \in A$, así $\frac{a}{b} \in A$ lo cual no es posible. Por tanto, si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - A$, entonces existe p primo tal que $p \mid b$ y $\frac{1}{p} \notin A$.

Tomamos $\Pi = \left\{ p \in \mathbb{Z} \text{ primo} : \frac{1}{p} \notin A \right\}$. Veamos que $A = \mathbb{Z}_\Pi$.

($\supseteq$) Sea $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}_\Pi$ y $a/b \notin A$, entonces existe p primo tal que $p \mid b$ y $\frac{1}{p} \notin A$, de aquí $p \in \Pi$ y $p \mid b$, con lo cual $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}_\Pi$, lo cual es una contradicción, por tanto $\mathbb{Z}_\Pi \subseteq A$.

($\subseteq$) Supongamos que existe $\frac{a}{b} \in A - \mathbb{Z}_\Pi$ y $(a, b) = 1$, como $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}_\Pi$ existe $p \in \Pi$ tal que $p \mid b$, con lo cual $(p, a) = 1$, entonces existen $r, s \in \mathbb{Z}$ tales que $rp + sa = 1$, notemos que $\frac{b}{p} \in A$, con lo cual $\frac{a}{p} = \frac{a}{b} \frac{b}{p} \in A$, así

$$\frac{1}{p} = \frac{rp}{p} + \frac{sa}{p} = r + s\left(\frac{a}{p}\right) \in A,$$

lo cual no es posible, ya que $p \in \Pi$, en consecuencia $\frac{1}{p}$ no está en A . Así

$$A \subseteq \mathbb{Z}_\Pi.$$

□

Definición 1.5.2. Sea A a un anillo conmutativo con unidad, definimos el espectro primo de A como

$$\text{Spec}(A) := \{P \subset A : P \text{ es un ideal primo.}\}$$

Teorema 1.5.2. Sean A un anillo conmutativo con unidad, entonces $\text{Spec}(A)$ tiene estructura de espacio topológico donde los cerrados son

$$V(I) = \{P \in \text{Spec}(A) : I \subseteq P\} \text{ donde } I \leq A \text{ es cualquier ideal.}$$

DEMOSTRACIÓN.

i) Notemos que $V(A) = \emptyset$ y $\text{Spec}(A) = V(\{0\})$.

ii) Sean $\{I_l\}_{l \in L}$ una familia de ideales de A , entonces

$$\sum_{l \in L} I_l = \left\{ \sum_{l \in L} a_l : a_l \in I_l \text{ y } a_l = 0 \text{ para casi toda } l \in L \right\}.$$

Ahora, veamos que $\bigcap_{l \in L} V(I_l) = V(\sum_{l \in L} I_l)$.

($\subseteq$) Notemos que $I_l \subseteq \sum_{l \in L} I_l$ para toda $l \in L$, de aquí que $V(\sum_{l \in L} I_l) \subseteq V(I_l)$ para toda $l \in L$, así $V(\sum_{l \in L} I_l) \subseteq \bigcap_{l \in L} V(I_l)$.

($\supseteq$) Sea $P \in \bigcap_{l \in L} V(I_l)$ y $P \leq A$ ideal primo. Sabemos que $I_l \subseteq P$ para toda $l \in L$, sea $a \in \sum_{l \in L} I_l$, con lo que $a = a_{l_1} + \cdots + a_{l_r}$ con $a_{l_i} \in I_{l_i} \subseteq P$, de aquí $a \in P$, luego $\sum_{l \in L} I_l \subseteq P$, por tanto $P \in V(\sum_{l \in L} I_l)$.

iii) Veamos que $V(I) \cup V(J) = V(IJ) = V(I \cap J)$.

Sean $I, J \leq A$ ideales, entonces $IJ = \left\{ \sum_{\text{finitos}} \underbrace{a_i b_i}_{\text{finitos}} : a_i \in I \text{ y } b_i \in J \right\} \leq A$ es ideal.

Como $IJ \subseteq I \cap J \subseteq I, J$, se tiene que $V(J) \cup V(I) \subseteq V(IJ) \subseteq V(I \cap J) \subseteq V(IJ)$.

Luego, sea $P \in V(IJ)$, así $IJ \subseteq P \leq A$ ideal primo, entonces $I \subseteq P$ o $J \subseteq P$, con lo cual $P \in V(I)$ o $P \in V(J)$, por tanto $P \in V(I) \cup V(J)$. $\square$

Lema 1.5.1. Sea Π a un conjunto arbitrario de números primos. Entonces

i) $\text{Spec}(\mathbb{Z}_\Pi) = \{p\mathbb{Z}_\Pi : p \in \Pi\} \cup \{0\}$.

ii) $\mathbb{Z}_\Pi/p\mathbb{Z}_\Pi \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$ con $p \in \Pi$.

DEMOSTRACIÓN. i) ($\supseteq$) Sea $p \in \Pi$, notemos que

$$p\mathbb{Z}_\Pi = \{a/b \in \mathbb{Q} : q \nmid b \text{ para toda } q \in \Pi \text{ y } p \mid a\} = \{a/b \in \mathbb{Z}_\Pi : p \mid a\}$$

es un ideal propio (principal) de $\mathbb{Z}_\Pi$, ya que el uno no pertenece a $\mathbb{Z}_\Pi$. Veamos que $p\mathbb{Z}_\Pi$ es también un ideal primo.

Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Z}_\Pi$ tal que $\frac{ac}{bd} \in p\mathbb{Z}_\Pi$. Se cumple que $p \mid ac$, así $p \mid a$ o $p \mid c$, en consecuencia $\frac{a}{b} \in p\mathbb{Z}_\Pi$ o $\frac{c}{d} \in p\mathbb{Z}_\Pi$. Por tanto $p\mathbb{Z}_\Pi \subseteq \text{Spec}(\mathbb{Z}_\Pi)$.

($\subseteq$) Sea $I \subsetneq \mathbb{Z}_\Pi$ ideal primo, tomemos $I \cap \mathbb{Z}$, como I es ideal primo, entonces $I \cap \mathbb{Z}$ es ideal primo, de aquí existe $q \in \mathbb{Z}$ primo tal que $I \cap \mathbb{Z} = q\mathbb{Z}$.

Veamos que $I = q\mathbb{Z}_\Pi$. Supongamos que $q \notin \Pi$, entonces $\frac{1}{q} \in \mathbb{Z}_\Pi$ y $q\mathbb{Z} \subseteq I$ con $q \in I$, así $\frac{1}{q}q \in I$, lo cual no es posible. Por tanto, $q \in \Pi$ y $q\mathbb{Z}_\Pi \subseteq I$.

Ahora, supongamos que existe $\frac{a}{b} \in I$ tal que $\frac{a}{b} \notin q\mathbb{Z}_\Pi$, de aquí que $q \nmid a$, por otra parte $b \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}_\Pi$, con lo cual $b(\frac{a}{b}) = a \in I \cap \mathbb{Z} = q\mathbb{Z}$, de aquí $q \mid a$, lo cual no es posible. Por lo tanto $I \subseteq q\mathbb{Z}_\Pi$.

ii) Sólo basta ver que

$$0 \longrightarrow p\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}_\Pi/p\mathbb{Z}_\Pi \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta, donde i es la inclusión y $\gamma : \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}_\Pi \longrightarrow \mathbb{Z}_\Pi/p\mathbb{Z}_\Pi$ tal que

$$\frac{a}{1} \longmapsto \frac{a}{1} + p\mathbb{Z}_\Pi.$$

Veamos que γ es sobreyectiva. Sea $\frac{a}{b} + p\mathbb{Z}_\Pi \in \mathbb{Z}_\Pi/p\mathbb{Z}_\Pi$, como $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}_\Pi$ se tiene que $p \nmid b$, así $(b, p) = 1$; en consecuencia, existen $r, s \in \mathbb{Z}$ tal que $sp + rb = 1$, con lo cual

$$\frac{a}{b} = ra + sp\left(\frac{a}{b}\right).$$

Por tanto $\gamma(ra) = \frac{a}{b} + p\mathbb{Z}_\Pi$. Sólo falta ver que $\text{Imag}(i) = \text{Ker}(\gamma)$.

($\subseteq$) Notemos que $\text{Imag}(i) = p\mathbb{Z}$, con lo cual $\text{Imag}(i) \subseteq \text{Ker}(\gamma)$.

($\supseteq$) Sea $a \in \text{Ker}(\gamma)$, entonces $\frac{a}{1} \in p\mathbb{Z}$, así $p \mid a$, de aquí que $a \in p\mathbb{Z}$.

Por tanto, la sucesión es exacta. $\square$

Definición 1.5.3. Sean R un anillo, A_R un R -módulo derecho, ${}_R B$ un R -módulo izquierdo y G un grupo abeliano (aditivo). Diremos que una función

$f : A_R \times_R B \longrightarrow G$ es *biaditiva* si para todo $a_1, a_2 \in A_R$, $b_1, b_2 \in {}_R B$ y $r \in R$ se cumplen las siguientes condiciones:

- i) $f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b)$.
- ii) $f(a, b_1 + b_2) = f(a, b_1) + f(a, b_2)$.
- iii) $f(ar, b) = f(a, rb)$.

En particular, si R es conmutativo y A, B y M son R -módulos, entonces una función biaditiva $f : A \times B \longrightarrow M$ es llamada *bilineal* si además cumple que:

$$f(ar, b) = f(a, rb) = rf(a, b).$$

Definición 1.5.4. Sean R un anillo, A_R un R -módulo derecho y ${}_R B$ un R -módulo izquierdo. Definimos el *producto tensorial* de A_R y ${}_R B$ como el grupo abeliano $A \otimes B$ junto con una función biaditiva

$$h : A \times B \longrightarrow A \otimes B.$$

tal que para cada grupo abeliano G y cada función biaditiva $f : A \times B \longrightarrow G$, existe un único $\tilde{f} : A \otimes B \longrightarrow G$ morfismo de $\mathbb{Z}$ -módulos tal que hace que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{array}{ccc} A \times B & & \\ \downarrow h & \searrow f & \\ A \otimes B & \xrightarrow{\tilde{f}} & G \end{array}$$

Teorema 1.5.3. Si R un anillo, A_R un R -módulo derecho y ${}_R B$ un R -módulo izquierdo, entonces su producto tensorial existe.

DEMOSTRACIÓN. Sea F el grupo abeliano libre generado por los elementos $(a, b) \in A \times B$, es decir

$$F = \bigoplus_{(a,b) \in A \times B} \langle (a, b) \rangle \text{ donde } \langle (a, b) \rangle = \{n(a, b) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Sea S el subgrupo de F generado por los elementos de la siguiente forma:

$$i) (a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b).$$

$$ii) (a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2).$$

$$iii) (ar, b) - (a, rb).$$

Ahora definimos $A \otimes B = F/S$ y denotamos a la clase $(a, b) + S$ como $a \otimes b$, donde $(a \otimes b) + (c \otimes d) = (a + c) \otimes (b + d)$.

Sea $h : A \times B \longrightarrow A \otimes B$ dada por

$$(a, b) \longmapsto a \otimes b.$$

Notemos que basta aplicar h a $i)$, $ii)$ y $iii)$ para que h sea biaditiva.

Así, tenemos las siguientes identidades:

$$i') (a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b.$$

$$ii') a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2.$$

$$iii') ar \otimes b = a \otimes rb.$$

Sean G un grupo abeliano y $f : A \times B \longrightarrow G$ biaditiva. Luego, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & A \times B & \\ & \downarrow i & \\ & F & \\ \swarrow h & & \searrow f \\ A \otimes B & \xrightarrow{\quad \tilde{f} \quad} & G \end{array}$$

Nota: En el diagrama original, hay una flecha etiquetada como 'Nat' de A x B a A otimes B, y una flecha punteada etiquetada como 'psi' de F a G. El camino de A x B a A otimes B a G se indica como 'f-tilde'.

donde $i : A \times B \longrightarrow F$ es la inclusión. Como F es un grupo abeliano libre, existe un homomorfismo de grupos $\psi : F \longrightarrow G$ con $\psi((a, b)) = f((a, b))$. Por otro lado, como f es biaditiva, tenemos que $S \subseteq \text{Ker}(\psi)$. Posteriormente, ψ induce una función $\tilde{f} : A \otimes B \longrightarrow G$ tal que

$$\tilde{f}((a \otimes b)) = \tilde{f}((a, b) + S) = \psi((a, b)) = f((a, b)).$$

Por tanto, $\tilde{f}h = f$; es decir, el diagrama conmuta.

Finalmente $\tilde{f}$ es única porque $A \otimes B$ está generado por los elementos de la forma $a \otimes b$. $\square$

Observación 18. $A \otimes B$ está generado por los elementos de la forma $a \otimes b$ con $(a, b) \in A \times B$, con lo cual para cada $u \in A \otimes B$, se tiene que

$$u = \sum_{i \in I} (a_i \otimes b_i).$$

Así, en general la expresión para u no es única. Por ejemplo, hay expresiones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 0 &= (a_1 + a_2) \otimes b - a_1 \otimes b - a_2 \otimes b \\ &= a \otimes (b_1 + b_2) - a \otimes b_1 - a \otimes b_2 \\ &= ar \otimes b - a \otimes rb. \end{aligned}$$

Por lo que, a la hora de dar un morfismo $g : A \otimes B \longrightarrow G$ con G un grupo abeliano, este estará bien definido solamente en F y además debemos probar que $S \subseteq \text{Ker}(g)$. Ahora, la manera más segura de proceder, es definir una función biaditiva en $A \times B$ y esto nos dará un homomorfismo bien definido. Para ver el procedimiento de como hacer dicha función biaditiva en $A \times B$ ver [7, Proposición 8.75].

Definición 1.5.5. Sean R, S anillos y M un grupo abeliano. Diremos que M es un (R, S) -bimódulo, denotado por ${}_R M_S$, si M es un R -módulo izquierdo, un S -módulo derecho y las dos multiplicaciones escalares están relacionadas por una ley asociativa:

$$r(ms) = (rm)s \text{ para cada } r \in R, m \in M \text{ y } s \in S.$$

Si M es un (R, S) -bimódulo, es permisible escribir rms sin paréntesis, porque la definición dice que las dos asociaciones coinciden.

Ejemplo 17. Si R es un anillo conmutativo con unidad, entonces cada R -módulo izquierdo (R -módulo derecho) es un (R, R) -bimódulo. De forma mas precisa, si M es un R -módulo izquierdo, mediante $M \times R \longrightarrow M$ tal que $(m, r) \longmapsto rm$, se ve que M es un R -módulo derecho. Finalmente M es un (R, R) -bimódulo.

Además, si M es un R -módulo, entonces $M \otimes R \cong M$. Se puede ver que $m \otimes r \longmapsto rm$ es bilineal con inverso $m \longmapsto m \otimes 1$. Más aún, se puede ver que $[M \otimes N] \oplus P \cong [M \otimes P] \oplus [N \otimes P]$, ya que $(m, n) \otimes p \longmapsto (m \otimes p, n \otimes p)$ es bilineal con inverso $(m \otimes p_1, n \otimes p_2) \longmapsto [(m, 0) \otimes p_1] + [(0, n) \otimes p_2]$.

Lema 1.5.2. Sean ${}_S A_R$ un bimódulo y ${}_R B_S$ un R -módulo izquierdo, entonces el producto tensorial $A \otimes B$ es un S -módulo izquierdo, donde

$$s(a \otimes b) = (sa) \otimes b.$$

Similarmente, dado A_R y ${}_R B_S$, el producto tensorial $A \otimes B$ es un S -módulo derecho, donde $(a \otimes b)s = a \otimes (sb)$.

La demostración de este lema puede consultarse en [7, Lema. 8.80].

Corolario 1.5.1. Si R es un anillo conmutativo, entonces $A \otimes B$ es un R -módulo.

DEMOSTRACIÓN. Por definición $ar = ra$, luego por el lema anterior

$$r(a \otimes b) = ra \otimes b = ar \otimes b = a \otimes rb = (a \otimes b)r.$$

□

Observación 19. El siguiente anillo es una generalización de $B(G)$; en el cual, éste se ve como $\mathbb{Z}_\Pi$ -módulo.

Sea Π un conjunto de números primos cualesquiera. Definimos

$$i) \quad B_\Pi(G) = (\mathbb{Z}_\Pi \otimes B(G)) \cong \bigoplus_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}_\Pi[G/H].$$

$$ii) \quad \tilde{B}_\Pi(G) = \left(\mathbb{Z}_\Pi \otimes \prod_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z} \right) \cong \prod_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z}_\Pi.$$

Notemos que, es posible definir un morfismo inyectivo de anillos

$$\varphi : B_\Pi(G) \longrightarrow \tilde{B}_\Pi(G).$$

Además,

$$\prod_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Z} \subseteq \tilde{B}_\Pi(G)$$

y

$$B(G) \subseteq B_\Pi(G).$$

Definición 1.5.6. Sean R un anillo conmutativo y M un R -módulo. Diremos que M es una R -álgebra si M es un anillo y

$$r(ab) = (ra)b = a(rb) \text{ para cada } r \in R \text{ y } a, b \in M.$$

Definición 1.5.7. Sean Λ una R -álgebra con R un dominio de ideales principales (DIP). Diremos que Λ es un *orden* sobre R si:

$$i) \quad R \hookrightarrow \Lambda.$$

$$ii) \quad \text{Como } R\text{-módulo } \Lambda \text{ es libre y finitamente generado.}$$

Ejemplo 18. $i)$ $B(G)$ como $\mathbb{Z}$ -módulo es finitamente generado por $[G/H]$ y $[H] \in \mathcal{C}(G)$; además $B(G)$ es un anillo conmutativo con unidad, con lo cual $\mathbb{Z} \hookrightarrow B(G)$. Por tanto, $B(G)$ es un orden sobre $\mathbb{Z}$.

$$ii) \quad B_\Pi(G) \text{ es un } \mathbb{Z}_\Pi \text{ orden}$$

$$iii) \quad \tilde{B}_\Pi(G) \text{ es un } \mathbb{Z}_\Pi \text{ orden maximal. Decimos que es un orden maximal en el sentido que, dado } \Lambda' \text{ otro orden sobre } \mathbb{Z}_\Pi \text{ tal que } \tilde{B}_\Pi(G) \subseteq \Lambda' \subseteq \Lambda_k, \text{ se tiene que } \tilde{B}_\Pi(G) = \Lambda', \text{ donde}$$

$$\Lambda_k = K \otimes \tilde{B}_\Pi(G) \text{ y } K \text{ es el campo de cocientes de } \mathbb{Z}_\Pi.$$

Para saber más sobre órdenes, ver [4], [5].

Recordemos que en $\mathcal{C}(G)$ tenemos una relación de orden parcial (Ver Observación ??).

Teorema 1.5.4. Si $f : B_{\Pi}(G) \longrightarrow R$ es un morfismo de anillos, con R un dominio entero, entonces

- i) Existe un único $[H] \in \mathcal{C}(G)$ más pequeño tal que $f([G/H]) \neq 0$.
- ii) Si $[H]$ es como en i), entonces $f([X]) = \varphi_H([X]) \cdot 1_R$.

DEMOSTRACIÓN. i) Como f es un morfismo de anillos, tenemos que $f([G/G]) = 1_R \neq 0$. Luego, como G es finito, existe $[H] \in \mathcal{C}(G)$ más pequeño tal que $f([G/H]) \neq 0$.

Ahora, sea $[K] \in \mathcal{C}(G)$ minimal tal que $f([G/K]) \neq 0$. Por otro lado, recordemos que R consiste de los representantes de las clases laterales dobles $H \setminus G/K$. Así,

$$\begin{aligned} [G/H \times G/K] &= \sum_{g \in R} [G/(H \cap gKg^{-1})] \\ &= \sum_{[U] \leq [H], [K]} a_U [G/U] \text{ para algún } a_U \text{ apropiado.} \end{aligned}$$

De aquí que

$$f([G/H \times G/K]) = \sum_{[U] \leq [H], [K]} a_U f([G/U]) \neq 0,$$

así existe $[U]$ tal que $a_U f([G/U]) \neq 0$. Obtenemos así que $f([G/U]) \neq 0$, luego por la minimalidad de $[H]$

$$[U] = [H] \text{ y } [U] = [K],$$

por tanto $[H] = [K]$.

- ii) Sea X un G -conjunto, sabemos que

$$[X] = \sum_{[K] \in \mathcal{C}(G)} b_K [G/K] \text{ con } b_K \in \mathbb{N}$$

Luego, $[(G/H) \times X] = \sum_{[K] \in \mathcal{C}(G)} b_K [(G/H) \times (G/K)] = \sum_{[U] \leq [H]} a_K [G/U]$ con $a_K \in \mathbb{N}$ apropiados.

Si aplicamos φ_H a $[(G/H) \times X]$, obtenemos que

$$\varphi_H([(G/H) \times X]) = \varphi_H([G/H])\varphi_H([X]).$$

Por las propiedades de la marca tenemos que $\varphi_H([G/U]) = 0$ para $[U] < [H]$, de aquí que $\varphi_H([G/H])\varphi_H([X]) = a_H \varphi_H([G/H])$, así

$$\varphi_H([X]) = a_H.$$

Por otro lado, $f([G/H] \times X) = f([G/H])f([X]) = \sum_{[U] \leq [H]} a_K f([G/U])$. Por la minimalidad de $[H]$ tenemos que

$$\sum_{[U] \leq [H]} a_K f([G/U]) = a_H f([G/H]) = \varphi_H([X])f([G/H]).$$

De esta forma, $f([G/H])f([X]) = \varphi_H([X])f([G/H])$. Luego, como R es dominio entero y $f([G/H]) \neq 0$, tenemos que

$$f([X]) = \varphi_H([X]) \cdot 1_R.$$

□

Corolario 1.5.2. Si $f, f' : B_\Pi(G) \longrightarrow R$ con R un dominio entero, entonces $f = f'$ siempre que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f')$.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que existen $[H], [H'] \in \mathcal{C}(G)$ tales que $f([G/H]) \neq 0$ y $f'([G/H']) \neq 0$. Supongamos que $[H] < [H']$, entonces $f'([G/H]) = 0$ y como $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f')$ entonces $f([G/H]) = 0$, lo cual es una contradicción. Similarmente, si $[H'] < [H]$ obtenemos una contradicción, con lo cual

$$[H] = [H'].$$

Luego, como $f([X]) = \varphi_H([X]) \cdot 1_R = \varphi_{H'}([X]) \cdot 1_R = f'([X])$, por tanto $f = f'$. □

Definición 1.5.8. Para cada $H \leq G$ subgrupo y cada ideal primo $P = p\mathbb{Z}_\Pi$ con $p \in \Pi$, definimos

$$\beta_\Pi(H, P) = \{X \in B_\Pi(G) : \varphi_H(X) \in P\}.$$

Observación 20. Notemos que $\varphi_H : B_\Pi(G) \longrightarrow \mathbb{Z}_\Pi$ es un morfismo sobreyectivo de anillos, con lo cual

$$\beta_\Pi(H, P) = \varphi_H^{-1}(P)$$

es un ideal primo de $B_\Pi(G)$.

Definición 1.5.9. Sea R un dominio entero. Si existe $n \in \mathbb{Z}$ minimal, tal que $na = 0$ para todo $a \in R$, diremos que n es la *característica* de R . Si no existe dicho entero, entonces se dice que R es de característica 0.

Teorema 1.5.5. Todo ideal primo de $B_\Pi(G)$ es de la forma $\beta_\Pi(H, P)$ para $H \leq G$ subgrupo y $P = p\mathbb{Z}_\Pi \leq \mathbb{Z}_\Pi$ ideal primo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $P^* \leq B_\pi(G)$ ideal primo, entonces $R = B_\pi(G)/P^*$ es un dominio entero. Luego, la proyección canónica

$$\mu : B_\pi(G) \longrightarrow R \text{ es de anillos,}$$

así, existe $H \in \mathcal{C}(G)$ tal que $\mu(X) = \varphi_H(X) \cdot 1_R$ para todo $X \in B_\pi(G)$.

Sea p la característica de R , entonces dado X un G -conjunto, se tiene que $X \in P^*$ si y sólo si $\mu(X) = 0_R$ si y sólo si $p \mid \varphi_H(X)$ si y sólo si $\varphi_H(X) \in P$ si y sólo si $X \in \varphi_H^{-1}(P) = \beta_\Pi(H, P)$. □

Observación 21. Recordemos que $(\mathbb{Z}_\Pi/p\mathbb{Z}_\Pi) \cong \mathbb{Z}_p$ es de característica p . Luego, si tomamos $\tilde{\varphi}_H : B_\Pi(G) \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ tal que

$$X \longmapsto [\varphi_H(X)],$$

tenemos que $\text{Ker}(\tilde{\varphi}_H) = \beta_\Pi(H, P)$, con lo cual

$$\text{Imag}(\tilde{\varphi}_H) \cong B_\pi(G)/\beta_\Pi(H, P) \text{ es de característica } p.$$

Lema 1.5.3. Sean $U, V \leq G$ subgrupos y $P = p\mathbb{Z}_\Pi$, $Q = q\mathbb{Z}_\Pi$ ideales primos.

- i) $\beta_\Pi(V, Q) \subseteq \beta_\Pi(U, P)$, implica $P = Q$.
- ii) Si $P^* \leq B_\pi(G)$ ideal primo y $\beta_\Pi(U, 0) \subseteq P^*$, entonces existe $p_1 \in \Pi$ tal que $P^* = \beta_\Pi(U, P_1)$.
- iii) $\beta_\Pi(U, P)$ es maximal en $\text{Spec}(\beta_\Pi(G))$ si y sólo si $P \neq 0$ con $\Pi \neq \emptyset$.
- iv) $\beta_\Pi(U, 0) \leq \text{Spec}(\beta_\Pi(G))$ es minimal.

DEMOSTRACIÓN. i) Llamemos $\mathcal{A} = \beta_\Pi(V, Q)$ y $\mathcal{B} = \beta_\Pi(U, P)$. Como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ entonces

$$\gamma : (B_\pi(G)/\mathcal{A}) \longrightarrow (B_\pi(G)/\mathcal{B}) \text{ tal que } X + \mathcal{A} \longmapsto X + \mathcal{B}$$

es un homomorfismo sobreyectivo de anillos. Luego, la característica de $B_\pi(G)/\mathcal{A}$ es q , entonces la imagen de la clase de q mediante γ es la clase del cero en $B_\pi(G)/\mathcal{B}$, con lo cual $p \mid q$. Como p, q son primos, se tiene que $p = q$.

ii) Sean $U \leq G$ un subgrupo y $P^* \leq B_\pi(G)$ ideal primo. Sabemos que $\varphi_U : B_\Pi(G) \longrightarrow \mathbb{Z}_\Pi$ es un morfismo sobreyectivo de anillos. Es sencillo ver que $\varphi_U(P^*)$ es un ideal primo de $\mathbb{Z}_\Pi$, con lo cual $\varphi_U(P^*) = p_1\mathbb{Z}_\Pi$. Por tanto, $P^* = \beta_\Pi(U, P_1)$.

iii) Sea $\Pi \neq \emptyset$ y $P \neq 0$ ideal primo. Por el Lema 1.5.1 $(\mathbb{Z}_\Pi/P) \cong \mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{Z}_p$ es campo, entonces

$$P \text{ es maximal en } \text{Spec}(\mathbb{Z}_\Pi).$$

Por tanto, $\beta_\Pi(U, P) = \varphi_U^{-1}(P)$ es maximal en $\text{Spec}(B_\Pi(G))$.

iv) Supongamos que $\beta_\Pi(V, Q) \subseteq \beta_\Pi(U, 0)$. La propiedad i) garantiza que $Q = 0$, así $\beta_\Pi(V, 0) \subseteq \beta_\Pi(U, 0)$. A partir de ii) podemos asegurar que existe $k \in \Pi$ tal que $\beta_\Pi(U, 0) = \beta_\Pi(V, K)$ con $K = k\mathbb{Z}_\Pi$. De aquí $K = 0$, por tanto $\beta_\Pi(U, 0) \subseteq \beta_\Pi(V, 0)$. $\square$

Lema 1.5.4. Las siguientes propiedades son equivalentes:

- i) $\beta_\Pi(U, 0) = \beta_\Pi(V, 0)$.
- ii) $U \sim V$ en $B_\Pi(G)$.
- iii) $\varphi_U = \varphi_V$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $U \sim V$, entonces $\varphi_U = \varphi_V$, de aquí que $\beta_\Pi(U, 0) = \text{Ker}(\varphi_U) = \text{Ker}(\varphi_V) = \beta_\Pi(V, 0)$.

Ahora, supongamos que $\beta_\Pi(U, 0) = \beta_\Pi(V, 0)$, en consecuencia $\text{Ker}(\varphi_U) = \varphi_U^{-1}(0) = \varphi_V^{-1}(0) = \text{Ker}(\varphi_V)$, por el corolario 1.5.2, tenemos que $\varphi_U = \varphi_V$, de aquí que $\varphi_U(G/U) = \varphi_V(G/U) \neq 0$, con lo cual $[V] \leq [U]$, análogamente $\varphi_U(G/V) = \varphi_V(G/V) \neq 0$ y así $[U] \leq [V]$. $\square$

Definición 1.5.10. Sea P un número primo. Diremos que un grupo finito G es un p -grupo si $|G| = p^n$ para algún $n \geq 0$.

Definición 1.5.11. Sea G un grupo. Definimos como $O^p(G)$ al mínimo subgrupo normal de G tal que $G/O^p(G)$ es un p -grupo, con p primo.

Teorema 1.5.6. $O^p(G)$ es único con la propiedad de la definición anterior.

DEMOSTRACIÓN. Sean $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ subgrupos normales, tales que G/N_1 y G/N_2 son p -grupos. Luego, tomemos

$$0 \longrightarrow N_1 \cap N_2 \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\gamma} (G/N_1) \times (G/N_2),$$

donde γ es tal que $g \mapsto (gN_1, gN_2)$ y notar que $(G/N_1) \times (G/N_2)$ es un p -grupo, con lo cual $\text{Img}(\gamma)$ también es un p -grupo, además

$$\text{Ker}(\gamma) = N_1 \cap N_2.$$

Así,

$$G/(N_1 \cap N_2) \cong \text{Img}(\gamma).$$

Si N_1 y N_2 son minimales con la propiedad de la definición anterior, entonces

$$N_1 = N_1 \cap N_2 = N_2$$

$\square$

Definición 1.5.12. Sea $H \leq G$ subgrupo. Diremos que H es *característico* si para toda $T : G \longrightarrow G$ isomorfismo, se tiene que $T(H) \leq H$ es subgrupo.

Teorema 1.5.7. $O^p(G)$ es característico.

DEMOSTRACIÓN. Sea $T : G \longrightarrow G$ un isomorfismo. Luego, tomemos

$$G \xrightarrow{T} G \xrightarrow{\phi} G/T(O^p(G))$$

tal que

$$a \mapsto T(a) \mapsto T(a)T(O^p(G)).$$

Notamos que $\text{Ker}(\phi \circ T) = O^p(G)$, con lo cual

$$G/(O^p(G)) \cong G/(T(O^p(G))).$$

Luego, $G/T(O^p(G))$ es p -grupo, como en la demostración del teorema 1.5.6 se tiene que $(O^p(G) \cap T(O^p(G))) = O^p(G)$, por lo que $O^p(G) \leq T(O^p(G))$.

Como T es biyección, tenemos que

$$O^p(G) = T(O^p(G)).$$

$\square$

Observación 22. $[U] =_G [V]$, implica que $[O^p(U)] =_G [O^p(V)]$.

Tenemos que existe $g \in G$ tal que $V = gUg^{-1}$, así $O^p(U) \trianglelefteq U$, de aquí que

$$U/(O^p(U)) \cong V/(T_g(O^p(U))),$$

donde $T_g : G \rightarrow G$ es la conjugación por g , con lo cual $O^p(V) \leq T_g(O^p(U))$. Luego, notemos que $T_{g^{-1}} = (T_g)^{-1}$, así de manera similar $O^p(U) \leq T_{g^{-1}}(O^p(V))$ al aplicar T_g , obtenemos que $O^p(V) = T_g(O^p(U)) = gO^p(U)g^{-1}$.

Lema 1.5.5. Dados $U, V \leq G$ subgrupos tales que $V \trianglelefteq U$ y U/V p-grupo, entonces $O^p(U) = O^p(V)$. En particular, $O^p(O^p(U)) = O^p(U)$.

DEMOSTRACIÓN. Notamos que $O^p(U) \leq V$, así $O^p(U) \trianglelefteq V$, con lo cual

$$V/(O^p(U)) \leq U/(O^p(U)) \text{ es p-grupo.}$$

Se obtiene que $O^p(V) \leq O^p(U)$. Por otro lado, $O^p(V) \trianglelefteq V$ es característico en V , de modo que $O^p(V) \trianglelefteq U$, por el tercer teorema de isomorfismos para grupos, tenemos que

$$\frac{U/O^p(V)}{V/O^p(V)} \cong U/V,$$

además U/V es p-grupo, así $U/O^p(V)$ es p-grupo, por tanto $O^p(U) \leq O^p(V)$ □

Observación 23. Sean $U \leq G$ subgrupo y X un U -conjunto. Tomemos $O^p(U) \trianglelefteq U$ y notemos que los puntos fijos bajo la acción en U están contenidos en los puntos fijos bajo la acción en $O^p(U)$; es decir

$$X^U \subseteq X^{O^p(U)}.$$

Además, $X^{O^p(U)}$ es un $(U/O^p(U))$ -conjunto mediante la acción:

$$(aO^p(U)) * x = a * x \text{ para } a \in U \text{ y } x \in X^{O^p(U)}.$$

Veamos que está bien definida, sea $aO^p(U) = bO^p(U)$, con lo cual $a^{-1}b \in O^p(U)$, así $a^{-1}b * x = x$, por tanto $b * x = a * x$.

Luego, llamemos $A = X^{O^p(U)}$ y sea $x \in A$ tal que $\mathcal{O}_A(x) = \{x\}$; con lo cual, necesariamente $x \in X^U$, entonces tomemos $Y \in (A - X^U)$, el cual es un $U/O^p(U)$ conjunto con órbitas no triviales, de aquí que

$$\mathcal{O}_{U/O^p(U)}(y) \cong (U/O^p(U))/\text{Stab}_{U/O^p(U)}(y)$$

Notemos que $(U/O^p(U))/\text{Stab}_{U/O^p(U)}(y)$ es p-grupo, en consecuencia

$$p \mid |\mathcal{O}_{U/O^p(U)}(y)|.$$

Por otro lado, $X^{O^p(U)} = (X^U)^c \dot{\bigcup} X^U$, así

$$|X^{O^p(U)}| \equiv |X^U| \pmod{p}, \text{ entonces } \varphi_{O^p(U)}(X) \equiv \varphi_U(X) \pmod{p}.$$

Por tanto, para todo Y un G -conjunto, se tiene que $\varphi_{O^p(U)}(Y) \equiv \varphi_U(Y) \pmod{p}$.

Concluimos que $Y \in \beta_{\Pi}(U, P)$ si y sólo si $\varphi_U(Y) \in P = p\mathbb{Z}_{\Pi}$ si y sólo si $p \mid \varphi_U(Y)$ si y sólo si $p \mid \varphi_{O^p(U)}(Y)$ si y sólo si $\varphi_{O^p(U)}(Y) \in P$ si y sólo si $Y \in \varphi_{O^p(U)}^{-1}(P)$ si y sólo si $Y \in \beta_{\Pi}(O^p(U), P)$ si y sólo si

$$\beta_{\Pi}(U, P) = \beta_{\Pi}(O^p(U), P).$$

Lema 1.5.6. Sea $P \leq \mathbb{Z}_{\Pi}$ ideal primo, entonces

$$\beta_{\Pi}(U, P) = \beta_{\Pi}(V, P) \text{ si y sólo si } [O^p(U)] = [O^p(V)].$$

DEMOSTRACIÓN. ($\Leftarrow$) Supongamos que $[O^p(U)] = [O^p(V)]$, de aquí $\varphi_{O^p(U)} = \varphi_{O^p(V)}$, así $\varphi_{O^p(U)}^{-1} = \varphi_{O^p(V)}^{-1}$, con lo cual $\beta_{\Pi}(O^p(U), P) = \beta_{\Pi}(O^p(V), P)$, por tanto $\beta_{\Pi}(U, P) = \beta_{\Pi}(V, P)$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\beta_{\Pi}(U, P) = \beta_{\Pi}(V, P)$. Ahora, tomemos

$$\rho_P : \mathbb{Z}_{\Pi} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\Pi}/P \quad \text{la proyección canónica,}$$

$$\varphi_U : B_{\Pi}(G) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\Pi} \text{ y}$$

$$\varphi_V : B_{\Pi}(G) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\Pi}.$$

Notamos que $\text{Ker}(\rho_P \circ \varphi_U) = \beta_{\Pi}(U, P) = \beta_{\Pi}(V, P) = \text{Ker}(\rho_P \circ \varphi_V)$, por el corolario 1.5.2, tenemos que $\rho_P \circ \varphi_U = \rho_P \circ \varphi_V$.

Sea $[H] \in \mathcal{C}(G)$ minimal tal que $(\rho_P \circ \varphi_U)(G/H) \neq 0$. Ahora, recordemos que en un grupo finito G , si S es cualquier p-subgrupo de G , entonces existe un p-subgrupo de sylow $\mathcal{P}$ que contiene a S . Ahora, sabemos que el grupo cociente $N_G(O^p(U))/O^p(U)$ está bien definido.

Luego, sea $\mathcal{P}$ un p-subgrupo de sylow en $N_G(O^p(U))/O^p(U)$ tal que

$$(U/O^p(U)) \leq \mathcal{P}$$

y tomemos

$$\Gamma : N_G(O^p(U)) \longrightarrow N_G(O^p(U))/O^p(U) \text{ proyección canónica.}$$

Luego, definimos $O_p(U) = \Gamma^{-1}(\mathcal{P})$, notemos que tenemos las siguientes correspondencias:

$$\begin{array}{ccc} O^p(U) & \xrightarrow{\Gamma} & [0] \\ \subseteq & & \subseteq \\ U & \longrightarrow & U/O^p(U) \\ \subseteq & & \subseteq \\ O_p(U) & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ \subseteq & & \subseteq \\ N_G(O^p(U)) & \longrightarrow & N_G(O^p(U))/O^p(U) \end{array}$$

Notemos que $O^p(U) \trianglelefteq O_p(U)$ y $\mathcal{P} = O_p(U)/O^p(U)$ es p-grupo, por el lema 1.5.5, tenemos que

$$O^p(O_p(U)) = O^p(O^p(U)) = O^p(U).$$

De lo anterior y la observación 23, se tiene que para todo Y un G -conjunto:

$$\varphi_U(Y) \equiv \varphi_{O_p(U)}(Y) \pmod{p}.$$

Así, $\rho_P \circ \varphi_U = \rho_P \circ \varphi_{O_p(U)}$, con lo cual $\rho_P \circ \varphi_{O_p(U)}(G/H) \neq 0$, de aquí que $\varphi_{O_p(U)}(G/H) \neq 0$ si y sólo si $O_p(U)$ es subconjugado de H en G .

Por otro lado, como $\mathcal{P}$ es un subgrupo de Sylow, se tiene que

$$\begin{aligned} p \nmid [N_G(O^p(U))/O^p(U) : \mathcal{P}] &= [N_G(O^p(U))/O^p(U) : O_p(U)/O^p(U)] \\ &= [N_G(O^p(U)) : O_p(U)] \end{aligned}$$

Observemos lo siguiente: sea $a \in N_G(O_p(U)) = \{g \in G : g(O_p(U))g^{-1} = O_p(U)\}$, tomemos

$$Ta : O_p(U) \longrightarrow O_p(U) \text{ tal que } Ta(O_p(U)) = a(O_p(U))a^{-1}.$$

Notemos que T_a es un isomorfismo y como $O^p(U) \subseteq O_p(U)$ es característico, entonces $T_a(O_p(U)) = O_p(U)$. Por tanto $N_G(O_p(U)) \subseteq N_G(O^p(U))$.

De aquí que,

$$p \nmid [N_G(O^p(U)) : N_G(O_p(U))][N_G(O_p(U)) : O_p(U)],$$

en consecuencia

$$p \nmid [N_G(O_p(U)) : O_p(U)]$$

Por el teorema 1.2.2, tenemos que

$$p \nmid \varphi_{O_p(U)}(G/O_p(U)).$$

De aquí que,

$$\rho_P \circ \varphi_{O_p(U)}(G/O_p(U)) \neq 0.$$

Por la minimalidad de H , obtenemos que H es subconjugado de $O_p(U)$, entonces $H =_G O_p(U)$ hasta conjugados. De manera análoga tenemos que $H =_G O_p(V)$, en consecuencia $O_p(V) =_G O_p(U)$, entonces $O^p(O_p(V)) =_G O^p(O_p(U))$ si y sólo si

$$O^p(V) =_G O^p(U)$$

□

Teorema 1.5.8 (Drees). Todo ideal primo en $B_\Pi(G)$ es de la forma $\beta_\Pi(U, P)$ con $U \leq G$ subgrupo y $P \leq \mathbb{Z}_\Pi$ ideal primo y satisfacen:

- i) Si $P \neq Q$, entonces $\beta_\Pi(U, P) \neq \beta_\Pi(V, Q)$.
- ii) $\beta_\Pi(U, 0)$ es minimal y $\beta_\Pi(U, 0) = \beta_\Pi(V, 0)$ si y sólo si $U =_G V$.
- iii) Si $P \neq 0$, entonces $\beta_\Pi(U, P)$ es maximal y $\beta_\Pi(U, P) = \beta_\Pi(V, P)$ si y sólo si $O^p(U) = O^p(V)$.
- iv) $\beta_\Pi(V, 0) \subseteq \beta_\Pi(V, P)$.

1.6. Idempotentes primitivos en $B_{\Pi}(G)$.

Definición 1.6.1. Dado conjunto $P \neq \emptyset$ junto con una relación " $\leq$ ", diremos que es un *conjunto parcialmente ordenado (COPO)* si para cada $a, b, c \in P$, se cumple que:

- i) $a \leq a$.
- ii) Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.
- iii) Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

Definición 1.6.2. Sea $P \neq \emptyset$ un COPO, diremos que P es *localmente finito* si para cada $a, b \in P$, se tiene que

$$|\{z \in P : a \leq z \text{ y } z \leq b\}| < \infty$$

Observación 24. Sea $P \neq \emptyset$ un COPO, localmente finito, R un anillo conmutativo con unidad. Definimos el siguiente conjunto:

$$\mathcal{O}_R(P) = \{\eta : P \times P \longrightarrow R \mid \eta((x, y)) = 0 \text{ si } x \not\leq y\}.$$

Notemos que $\mathcal{O}_R(P)$ tiene estructura de anillo con unidad, donde la suma es la suma usual de funciones y el producto está definido de la siguiente manera:

Dados $\eta, \lambda \in \mathcal{O}_R(P)$, tenemos que

$$(\eta \cdot \lambda)((x, y)) = \sum_{x \leq z \leq y} \eta((x, z))\lambda((z, y)) = \sum_{z \in P} \eta((x, z))\lambda((z, y)).$$

La unidad en $\mathcal{O}_R(P)$ es $\delta : P \times P \longrightarrow R$ tal que

$$\delta((x, y)) = \begin{cases} 1_R & \text{si } x = y. \\ 0_R & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Sea $\eta \in \mathcal{O}_R(P)$, así

$$(\eta \cdot \delta)((x, y)) = \sum_{x \leq z \leq y} \eta((x, z))\delta((z, y)) = \eta((x, y))\delta((y, y)) = \eta((x, y)).$$

Por tanto, $\eta \cdot \delta = \eta$.

Por otro lado,

$$(\delta \cdot \eta)((x, y)) = \sum_{x \leq z \leq y} \delta((x, z))\eta((z, y)) = \delta((x, x))\eta((x, y)) = \eta((x, y)).$$

Por lo tanto, $\delta \cdot \eta = \eta$. En consecuencia, δ es la unidad de $\mathcal{O}_R(P)$.

En general $\mathcal{O}_R(P)$ no es conmutativo.

Definición 1.6.3. Un elemento $u \in R$ es llamado una *unidad* en un anillo R si existe $v \in R$ tal que $uv = 1 = vu$. El elemento v es llamado el *inverso* de u y es denotado por u^{-1} .

Si R es un anillo, denotamos por $U(R)$ al conjunto de todas las unidades en R .

Teorema 1.6.1. Sea $P \neq \emptyset$ un COPO localmente finito y R un anillo conmutativo con unidad, entonces $\eta \in U(\mathcal{O}_R(P))$ si y sólo si $\eta((x, x)) \in U(R)$ para toda $x \in P$.

DEMOSTRACIÓN. ($\implies$) Sea $\eta \in U(\mathcal{O}_R(P))$, entonces existe $\lambda \in \mathcal{O}_R(P)$ tal que

$$\eta \cdot \lambda = \delta.$$

Si $x \in P$, tenemos que $1_R = \delta((x, x)) = (\eta \cdot \lambda)((x, x)) = \sum_{x \leq z \leq x} \eta((x, z))\lambda((z, x)) = \eta((x, x))\lambda((x, x))$.

Luego, como R es conmutativo, se tiene que $\eta((x, x)) \in U(R)$.

($\impliedby$) Sea $\eta \in \mathcal{O}_R(P)$ tal que para toda $x \in P$, se tiene que $\eta((x, x)) \in U(R)$.

Definimos λ el inverso de η de la siguiente manera:

$$\lambda((x, x)) = [\eta((x, x))]^{-1} \text{ para cada } x \in P.$$

$$\lambda((x, y)) = 0_R \text{ si } x \not\leq y \text{ con } x, y \in P.$$

Sea $x, y \in P$ y supongamos que para toda $z \in P$ tal que $x \leq z < y$, tenemos que $\lambda((x, z))$ está definido. Notemos que

$$(\lambda \cdot \eta)((x, y)) = \sum_{x \leq z \leq y} \lambda((x, z))\eta((z, y)) = \sum_{x \leq z < y} \lambda((x, z))\eta((z, y)) + \lambda((x, y))\eta((y, y)).$$

De tal suerte, podemos definir $\lambda((x, y)) = -[\eta((y, y))]^{-1} \sum_{x \leq z < y} \lambda((x, z))\eta((z, y))$, con lo cual

$$(\lambda \cdot \eta)((x, y)) = \delta((x, y)) \text{ para todo } (x, y) \in P \times P.$$

Análogamente, podemos construir el inverso derecho de η , por lo tanto $\eta \in U(\mathcal{O}_R(P))$. $\square$

Observación 25. Si consideramos la siguiente función

$$\zeta((x, y)) = \begin{cases} 1_R & \text{si } x \leq y. \\ 0_R & \text{si } x \not\leq y. \end{cases}$$

Observamos que para todo $x \in P$, tenemos que $\zeta((x, x)) = 1_R \in U(R)$, con lo cual $\zeta \in U(\mathcal{O}_P(R))$. Así, la función ζ tiene inverso, a dicha función la llamaremos *la función de Möbius* y la denotaremos por

$$\mu = \zeta^{-1}.$$

Teorema 1.6.2. Sea $P \neq \emptyset$ un COPO localmente finito, la función de Möbius μ de P cumple:

i) $\mu((x, x)) = 1$ para todo $x \in P$.

ii) $\sum_{x \leq z \leq y} \mu((z, y)) = 0$ para todo $x, y \in P$ con $x \neq y$.

DEMOSTRACIÓN. i) Sea $x \in P$, sabemos que $(\mu \cdot \zeta)((x, x)) = \mu((x, x))\zeta((x, x))$. Luego, por la observación 25, tenemos que $\mu((x, x))\zeta((x, x)) = \delta((x, x)) = 1$, además $\zeta((x, x)) = 1$, con lo cual $\mu((x, x)) = 1$ para todo $x \in P$.

ii) Sean $x, y \in P$ tal que $x \neq y$. Por la observación 24, tenemos que $\delta((x, y)) = 0$, luego por la observación 25, se tiene que

$$\begin{aligned} \delta((x, y)) &= (\zeta \cdot \mu)((x, y)) \\ &= \sum_{x \leq z \leq y} \zeta((x, z))\mu((z, y)) \\ &= \sum_{x \leq z \leq y} \mu((z, y)). \end{aligned}$$

Por tanto, $\sum_{x \leq z \leq y} \mu((z, y)) = 0$. □

Observación 26. Si llamamos χ a la diferencia de ζ con δ , tenemos que

$$\chi((x, y)) = \begin{cases} 1_R & \text{si } x < y. \\ 0_R & \text{si } x \not< y. \end{cases}$$

Definición 1.6.4. Dado P un COPO localmente finito, sea $x = x_0 < x_1 < \dots < x_n = y$ con $x_0, \dots, x_n \in P$ una cadena de tamaño $n + 1$. Una cadena de tamaño $n + 1$, la llamaremos $(n + 1)$ –simplejo.

Teorema 1.6.3. $\chi^n((x, y)) = |\{x = x_0 < x_1 < \dots < x_n = y\}|$ es el número de $(n + 1)$ –simplejos entre x y y .

DEMOSTRACIÓN. Procederemos por inducción sobre n . Sin pérdida de generalidad asumiremos que $x < y$.

Si $n = 1$, entonces $x < y$ es el único 2–simplejo entre x y y .

Supongamos que la conclusión es válida para $\chi^{n-1}((x, y))$. Veamos que se cumple para $\chi^n((x, y))$

$$\begin{aligned} \chi^n((x, y)) &= (\chi \cdot \chi^{n-1})((x, y)) = \sum_{x \leq z \leq y} \chi((x, z))\chi^{n-1}((z, y)) \\ &= \sum_{x < z < y} \chi((x, z))\chi^{n-1}((z, y)). \end{aligned}$$

Por la observación 26, se sigue que

$$\sum_{x < z < y} \chi((x, z))\chi^{n-1}((z, y)) = \sum_{x < z < y} \chi^{n-1}((z, y))$$

$$= \sum_{x < z < y} |\{z = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} = y\}|$$

Notemos que, por cada $z \in P$ tal que $x < z < y$, tenemos un n -simplejo entre z y y ; de aquí que, si agregamos $x < z$ a cada n -simplejo entre z y y , tenemos un $(n+1)$ -simplejo entre x y y , con lo cual tenemos que la suma anterior es igual al número de los $(n+1)$ -simplejos entre x y y , por tanto

$$\sum_{x < z < y} |\{z = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} = y\}| = |\{x = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = y\}|.$$

□

Definición 1.6.5. Dado P un COPO localmente finito, definimos el *complejo simplicial* de P como el conjunto de todos los k -simplejos en P para $k \in \mathbb{N}$.

Definición 1.6.6. Si P es un COPO finito, definimos la *característica de Euler* de P como:

$$\psi(P) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k,$$

donde a_k es el número de k -simplejos en P .

Lema 1.6.1. Si P es un COPO finito, entonces

$$\psi(P) = \sum_{x, y \in P} \mu((x, y)).$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 1.6.3, tenemos que

$$\begin{aligned} \psi(P) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{x, y \in P} \chi^k((x, y)) \\ &= \sum_{x, y \in P} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \chi^k((x, y)). \end{aligned}$$

Tomemos χ como en la observación 26 y δ como en la observación 24. Luego,

$$\begin{aligned} [(\chi + \delta) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \chi^k]((x, y)) &= \\ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \chi^{k+1}((x, y)) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \chi^k((x, y)) &= \delta((x, y)). \end{aligned}$$

Por tanto, $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \chi^k = (\chi + \delta)^{-1} = \zeta^{-1} = \mu$.

□

Lema 1.6.2. Sea P un COPO finito con un único elemento minimal ($0 \in P$) y μ la función de Möbius de P , entonces

$$\psi(P) = 1 \quad \text{y} \quad \psi(P - \{0\}) = 1 - \sum_{y \in P} \mu((0, y)).$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned}\psi(P) &= \sum_{x,y \in P} \mu((x,y)) = \sum_{y \in P} \left(\sum_{0 \leq x \leq y} \mu((x,y)) \right) \\ &= \mu((0,0)) = 1.\end{aligned}$$

$$\text{Por otro lado, } 1 = \sum_{x,y \in P} \mu((x,y)) = \sum_{x \neq 0, y \in P} \mu((x,y)) + \sum_{y \in P} \mu((0,y)).$$

Notemos que $\sum_{x \neq 0, y \in P} \mu((x,y)) = \psi(P - \{0\})$, ya que $\sum_{0 \neq x \in P} \mu((x,0)) = 0$, puesto que el 0 es el mínimo en P , con lo cual se obtiene la segunda igualdad de este lema. $\square$

Teorema 1.6.4 (Inversión de Möbius). Sea P un COPO localmente finito, R un anillo conmutativo, $f, g : P \rightarrow R$ funciones y supongamos que existe $\alpha \in U(\mathcal{O}_P(R))$ con inverso β , entonces

$$f(x) = \sum_{y \in P} \alpha((y,x))g(y) \text{ si y sólo si } g(x) = \sum_{y \in P} \beta((y,x))f(y).$$

$$\begin{aligned}\text{DEMOSTRACIÓN. } (\implies) \quad \sum_{y \in P} \beta((y,x))f(y) &= \sum_{y \in P} \beta((y,x)) \left(\sum_{z \in P} \alpha(z,y)g(z) \right) \\ &= \sum_{y,z \in P} \beta((y,x))\alpha((z,y))g(z) = \sum_{z \in P} g(z) \left(\sum_{z \leq y \leq x \in P} \beta((y,x))\alpha((z,y)) \right) \\ &= \sum_{z \in P} g(z) \left(\sum_{z \leq y \leq x \in P} \alpha((z,y))\beta((y,x)) \right) = \sum_{z \in P} g(z)\delta((z,x)) = g(x).\end{aligned}$$

De manera análoga, podemos ver que $f(x) = \sum_{y \in P} \alpha((y,x))g(y)$. $\square$

Definición 1.6.7. Sean P_1, P_2 dos COPOS localmente finitos y $f : P_1 \rightarrow P_2$ una función biyectiva. Diremos que f es un isomorfismo de COPOS si se cumple que $x \leq y$ si y sólo si $f(x) \leq f(y)$ para todo $x, y \in P_1$

Observación 27. Si $f : P_1 \rightarrow P_2$ es un isomorfismo de COPOS y μ la función de Möbius de P_1 y P_2 , entonces

$$\mu((x,y)) = \mu((f(x), f(y))).$$

Definición 1.6.8. Sean G un grupo finito, denotamos por $S(G)$ al conjunto de subgrupos de G , el cual resulta ser un COPO con la relación de contención y es llamado *la red de subgrupos de G* .

Definición 1.6.9. Sean $H \leq G$ subgrupo, diremos que H es *p-perfecto* si $O^p(H) = H$. Además, $P_{\{p\}}(G) \subseteq \mathcal{C}(G)$ es llamado *la clase de conjugación de subgrupos de G que son p-perfectos*.

Definición 1.6.10. Sea $D \leq G$ subgrupo y $H \leq G$ p-perfecto, definimos

$$i) \quad \xi_{\{p\}}(G, H) = \{K \leq G : O^p(K) = H\}$$

$$ii) \quad \sigma(D, H) = \sum_{K \in \xi_{\{p\}}(G, H)} \mu(D, K).$$

Observación 28. Si $\sigma(D, H) \neq 0$, entonces existe $S \in \xi_{\{p\}}(G, H)$ tal que $\mu(D, S) \neq 0$ con $D \subseteq S$.

Luego, como $S \in \xi_{\{p\}}(G, H)$, se tiene que $O^p(S) = H$, por el teorema 1.5.6, se sigue que $H \trianglelefteq S$ es característico. Sea $a \in N_G(S)$ y tomemos $T_a : S \rightarrow S$ tal que $g \mapsto aga^{-1}$, entonces

$$H \mapsto aHa^{-1} = T_a(H) = H.$$

Por tanto, $a \in N_G(H)$, así

$$D \leq S \leq N_G(S) \subseteq N_G(H).$$

Definición 1.6.11. Sea $H \leq G$ p -perfecto, definimos

$$\mathfrak{E}_{G,H}^p = \frac{1}{|N_G(H)|} \left(\sum_{D \leq N_G(H)} |D| \sigma(D, H)[G/D] \right).$$

Observación 29. Si $[H] = [K]$ en $\mathcal{C}(G)$, entonces $\mathfrak{E}_{G,H}^p = \mathfrak{E}_{G,K}^p$.

Sea $K = g^{-1}Hg$ para algún $g \in G$, luego

$$\mathfrak{E}_{G,K}^p = \mathfrak{E}_{G,g^{-1}Hg}^p = \frac{1}{|N_G(g^{-1}Hg)|} \left(\sum_{D \leq N_G(g^{-1}Hg)} |D| \sigma(D, g^{-1}Hg)[G/D] \right)$$

Notemos que $N_G(g^{-1}Hg) = g^{-1}N_G(H)g$, de aquí que

$$\mathfrak{E}_{G,g^{-1}Hg}^p = \frac{1}{|N_G(H)|} \left(\sum_{gDg^{-1} \in N_G(H)} |D| \sigma(D, g^{-1}Hg)[G/D] \right)$$

Si $D' = gDg^{-1}$, entonces

$$\mathfrak{E}_{G,g^{-1}Hg}^p = \frac{1}{|N_G(H)|} \left(\sum_{D' \in N_G(H)} |D'| \sigma(g^{-1}D'g, g^{-1}Hg)[G/D'] \right)$$

Ahora, si tomamos $T_g : S(G) \rightarrow S(G)$ tal que $L \mapsto gLg^{-1}$, tenemos que T_g es un isomorfismo de COPOS, con lo cual

$$\begin{aligned} \sigma(g^{-1}D'g, g^{-1}Hg) &= \sum_{g^{-1}Sg \in \xi_{\{p\}}(G, g^{-1}Hg)} \mu(g^{-1}D'g, g^{-1}Sg) \\ &= \sum_{S \in \xi_{\{p\}}(G, H)} \mu(D', S) = \sigma(D', H). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathfrak{E}_{G,g^{-1}Hg}^p = \frac{1}{|N_G(H)|} \left(\sum_{D' \in N_G(H)} |D'| \sigma(D', H)[G/D'] \right) = \mathfrak{E}_{G,H}^p$$

Lema 1.6.3. Sean $H, K \leq G$ subgrupos, entonces

$$\varphi_H(G/K) = \left(\frac{|N_G(K)|}{|K|} \right) \alpha(H, K) = \left(\frac{|N_G(H)|}{|K|} \right) \beta(H, K),$$

donde

$$\alpha(H, K) = |\{E \leq G : [E] = [K] \text{ y } H \subseteq E\}|$$

y

$$\beta(H, K) = |\{E \leq G : [E] = [H] \text{ y } E \subseteq K\}|.$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $\varphi_H(G/K) = |\{aK : haK = aK \text{ para toda } h \in H\}|$

$$= |\{aK : a^{-1}ha \in K \text{ para toda } h \in H\}|$$

$$= |\{aK : a^{-1}Ha \subseteq K\}|$$

$$= |\{aK : H \subseteq aKa^{-1}\}|.$$

Ahora, tomemos $f : \{aK : H \subseteq aKa^{-1}\} \longrightarrow \alpha(H, K)$ tal que

$$aK \longmapsto aKa^{-1}$$

Veamos que f está bien definida, sean $aK = bK$, de aquí que $b^{-1}a = k$, así $a = bk$, entonces $aKa^{-1} = bkKk^{-1}b^{-1} = bKb^{-1}$.

Veamos que f es sobreyectiva, sea $E \in \alpha(H, K)$, así $E = aKa^{-1}$, sólo falta ver que $aK \in (G/K)^H$, sea $h \in H \subseteq E$, entonces $h = aka^{-1}$, con lo cual $haK = aka^{-1}aK = aK$.

Por tanto,

$$\{aK : H \subseteq aKa^{-1}\} = \dot{\bigcup}_{E \in \alpha(H, K)} f^{-1}(E).$$

Luego, veamos que $f^{-1}(E) = \{abK : bK \in N_G(K)/K\}$.

($\subseteq$) Sea $cK \in \{aK : H \subseteq aKa^{-1}\}$ tal que $f(cK) = aKa^{-1}$, de aquí que $cKc^{-1} = aKa^{-1}$, así $a^{-1}cKc^{-1}a = K$, con lo cual $a^{-1}c \in N_G(K)$, en consecuencia $a^{-1}c = b \in N_G(K)$, entonces $c = ab$ tal que $bK \in N_G(K)/K$.

($\supseteq$) Sea abK con $bK \in N_G(K)/K$, en consecuencia $f(abK) = abKb^{-1}a^{-1} = aka^{-1} = E$, entonces $abK \in f^{-1}(E)$.

Por tanto,

$$\varphi_H(G/K) = \left(\frac{|N_G(K)|}{|K|} \right) \alpha(H, K).$$

Por otro lado, Llamemos $A = \{a \in G : a^{-1}Ha \subseteq K\}$ y tomemos

$$f' : A \longrightarrow \{aK : a^{-1}Ha \subseteq K\}$$

tal que $a \mapsto aK$. Es claro que f' está bien definida y es sobreyectiva.

Ahora, $(f')^{-1}(aK) = \{g \in G : f'(g) = aK\}$

$$= \{g \in G : gK = aK\} = \{g \in G : a^{-1}g \in K\}$$

$$= \{g \in G : g = ak \text{ para algún } k \in K\} = \{ak : k \in K\} = aK.$$

Así, $|(f')^{-1}(aK)| = |aK| = |K|$, de aquí que

$$|A| = |K| \varphi_H(G/K).$$

Ahora, veamos que $|A| = |N_G(H)| \beta(H, K)$, para ello tomemos

$$f'' : A \longrightarrow \beta(H, K)$$

tal que

$$a \mapsto a^{-1}Ha.$$

Notemos que f'' está bien definida. Veamos que es sobreyectiva. Sea $E \in \beta(H, K)$, así $E = a^{-1}Ha \subseteq K$, en consecuencia $a \in A$, por tanto f'' es sobreyectiva.

Por otra parte, $(f'')^{-1}(E) = \{g \in G : f''(g) = a^{-1}Ha\}$

$$= \{g \in G : g^{-1}Hg = a^{-1}Ha\} = \{g \in G : ag^{-1}Hga^{-1} = H\}$$

$$= \{g \in G : ga^{-1} \in N_G(H)\} = \{g \in G : ga^{-1} = h \text{ para algún } h \in N_G(H)\}$$

$$= \{ha : h \in N_G(H)\} = (N_G(H))a.$$

De esto, $|(f'')^{-1}(E)| = |(N_G(H))a| = |N_G(H)|$. Por tanto,

$$|A| = |N_G(H)| \beta(H, K).$$

Por lo tanto,

$$\varphi_H(G/K) = \left(\frac{|N_G(H)|}{|K|} \right) \beta(H, K).$$

□

Lema 1.6.4. $e_D = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{D\text{-ésima}}$ en $\prod_{H \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Q}$, entonces

$$G/H = \sum_{D \leq H} \left(\frac{|N_G(D)|}{|H|} \right) e_D.$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $G/H = \sum_{D \in \mathcal{C}(G)} \varphi_D(G/H) \mathbf{e}_D$ en $\prod_{D \in \mathcal{C}(G)} \mathbb{Q}$.

Por el lema 1.6.3, tenemos que

$$\varphi_D(G/H) = \left(\frac{|N_G(D)|}{|H|} \right) \beta(D, H),$$

de aquí que

$$\begin{aligned} G/H &= \sum_{[D] \leq [H]} \left(\frac{|N_G(D)|}{|H|} \right) \beta(D, H) \mathbf{e}_D \\ &= \sum_{D \leq H} \left(\frac{|N_G(D)|}{|H|} \right) \mathbf{e}_D. \end{aligned}$$

Notemos que, agrupamos en clases de conjugación; es decir, $[D] = [D']$, entonces $[N_G(D)] = [N_G(D')]$, con lo cual $|N_G(D)| = |N_G(D')|$. Por tanto,

$$\frac{|N_G(D)|}{|H|}$$

se repite $\beta(D, H)$ veces. □

Lema 1.6.5. $\{\mathbf{e}_{G,H} : [H] \in \mathcal{C}(G)\}$ es el conjunto de idempotentes primitivos de $B_{\mathbb{Q}}(G)$, donde

$$\mathbf{e}_{G,H} = \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{D \leq H} |D| \mu(D, H) [G/D].$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $f, g : S(G) \longrightarrow B_{\mathbb{Q}}(G)$ tales que

$$f(H) = |H| (G/H)$$

$$g(H) = |N_G(H)| \mathbf{e}_H \text{ para toda } H \in S(G).$$

$$\text{De aquí que, } f(H) = \sum_{D \leq H} |N_G(H)| \mathbf{e}_H = \sum_{D \leq H} g(D)$$

$$= \sum_{D \in S(G)} \zeta(D, H) g(D).$$

Por el teorema 1.6.4, tenemos que

$$g(H) = \sum_{D \in S(G)} \mu(D, H) f(D),$$

En consecuencia,

$$|N_G(H)| \mathbf{e}_H = \sum_{D \in S(G)} \mu(D, H) |D| (G/D).$$

Por tanto,

$$\mathbf{e}_H = \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{D \leq H} |D| \mu(D, H) [G/D].$$

□

Teorema 1.6.5 (Yoshida). $\{\mathbf{e}_{G,H}^p : H \in P_{\{p\}}(G)\}$ es el conjunto de todos los idempotentes primitivos de $B_{\{p\}}(G)$, en particular

$$\sum_{[H] \in P_{\{p\}}(G)} \mathbf{e}_{G,H}^p = 1$$

y

$$\mathbf{e}_{G,H}^p \mathbf{e}_{G,K}^p = \begin{cases} \mathbf{e}_{G,H}^p & \text{si } [H] = [K]. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Debemos tener presentes las siguientes definiciones 1.6.9, 1.6.10 y 1.6.11. Además, se toma $[H] \in P_{\{p\}}(G)$ porque si $[H] = [K]$, entonces $\mathbf{e}_{G,H}^p = \mathbf{e}_{G,K}^p$.

Ahora, notemos que si $A \subseteq B$ y A es característico en B , entonces $N_G(B) \subseteq N_G(A)$. Además, si $A \trianglelefteq B$ y $B \trianglelefteq C$, entonces $A \trianglelefteq C$.

Sea $H \in P_{\{p\}}(G)$ y $S \in \xi_{\{p\}}(G, H)$, así $O^p(S) = H \trianglelefteq S$. Por el teorema 1.5.6 H es característico en S para todo $S \in \xi_{\{p\}}(G, H)$, además $S \trianglelefteq N_G(S)$, por tanto $H \trianglelefteq N_G(S) \leq N_G(H)$ para todo $S \in \xi_{\{p\}}(G, H)$.

Observación 30. Si $S, S' \in \xi_{\{p\}}(G, H)$, entonces $[S] =_G [S']$ si y sólo si $[S] =_{N_G(H)} [S']$.

Puesto que, si existe $g \in G$ tal que $S' = gSg^{-1}$, entonces $H = O^p(S') = gO^p(S)g^{-1} = gHg^{-1}$, con lo cual $g \in N_G(H)$.

De aquí, podemos deducir que $\xi_{\{p\}}(G, H)$ es un $N_G(H)$ -conjunto, donde la acción es la la conjugación. Sea $S \in \xi_{\{p\}}(G, H)$ y $a \in N_G(H)$, de aquí $O^p(aSa^{-1}) = aO^p(S)a^{-1} = aHa^{-1} = H$, en consecuencia $S' = aSa^{-1} \in \xi_{\{p\}}(G, H)$. Por tanto, la acción está bien definida.

Recordemos que

$$|\mathcal{O}_{N_G(H)}(S)| = \frac{|N_G(H)|}{|Stab_{N_G(H)}(S)|}, \text{ donde } Stab_{N_G(H)}(S) = N_G(S).$$

Sean $S_1, S_2, \dots$ representantes de las clases de conjugación $N_G(H)$ en $\xi_{\{p\}}(G, H)$. Nos fijamos que en $B_{\mathbb{Q}}(G)$ la suma de idempotentes es idempotente, por otro lado

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{e}_{G,S_i} &= \sum_{S \in \xi_{\{p\}}(G, H)} \frac{1}{|\mathcal{O}(S)|} \mathbf{e}_{G,S} \\ &= \sum_{S \in \xi_{\{p\}}(G, H)} \frac{|N_G(S)|}{|N_G(H)|} \mathbf{e}_{G,S} \end{aligned}$$

por el lema 1.6.5, tenemos que

$$= \sum_{S \in \xi_{\{p\}}(G, H)} \frac{|N_G(S)|}{|N_G(H)|} \left(\frac{1}{|N_G(S)|} \sum_{D \leq S} |D| \mu(D, S) [G/D] \right)$$

$$= \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{S \in \xi_{\{p\}}(G, H)} \sum_{D \leq S} |D| \mu(D, S) [G/D]$$

si $S \leq D$, entonces $\mu(D, S) = 0$, así

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{D \leq G} |D| \left(\sum_{S \in \xi_{\{p\}}(G, H)} \mu(D, S) \right) [G/D] \\ &= \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{D \leq G} |D| \sigma(D, S) [G/D] = \mathfrak{E}_{G, H}^p \end{aligned}$$

De aquí que, $\mathfrak{E}_{G, H}^p$ es idempotente en $B_{\mathbb{Q}}(G)$.

Observación 31. $\mathfrak{E}_{G, H}^p = \mathfrak{E}_{G, K}^p$ si y sólo si $[H] =_G [K]$.

($\Leftarrow$) Nos la da la observación 29.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathfrak{E}_{G, H}^p = \mathfrak{E}_{G, K}^p$, con lo cual

$$\mathfrak{E}_{G, H} \mathfrak{E}_{G, H}^p = \mathfrak{E}_{G, H} \sum_i \mathfrak{E}_{G, S_i},$$

Así, tenemos que

$$\mathfrak{E}_{G, H} \mathfrak{E}_{G, H}^p = \mathfrak{E}_{G, H}$$

y

$$\mathfrak{E}_{G, H} \mathfrak{E}_{G, K}^p = \mathfrak{E}_{G, T} \text{ con } O^p(T) = K,$$

así

$$\mathfrak{E}_{G, H} = \mathfrak{E}_{G, T},$$

por tanto $[H] =_G [T]$, en consecuencia $[H] = [Op(H)] =_G [Op(T)] = [K]$. Ver observación 22.

Ahora, para ver que $\mathfrak{E}_{G, H}^p$ con $H \in P_{\{p\}}(G)$ son los idempotentes primitivos en $B_{\{p\}}(G)$, es suficiente probar que todo idempotente en $B_{\{p\}}(G)$ es suma en $B_{\mathbb{Q}}(G)$ de algunos idempotentes de la forma $\mathfrak{E}_{G, H}^p$.

Sea $\mathfrak{E} \in B_{\{p\}}(G)$ un idempotente, $H \in \xi_{\{p\}}(G)$ y tomemos

$$\varphi_H : B_{\{p\}}(G) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\{p\}}.$$

Como φ_H es un homomorfismo de anillos, se sigue que $\varphi_H(\mathfrak{E}^2) = \varphi_H(\mathfrak{E})\varphi_H(\mathfrak{E})$. Luego, como $\mathfrak{E}$ es idempotente, se sigue que

$$\varphi_H(\mathfrak{E})\varphi_H(\mathfrak{E}) = \varphi_H(\mathfrak{E}).$$

En consecuencia, $\varphi_H(\mathfrak{E})$ es un idempotente. Por tanto, para cada $H \leq G$, se tiene que

$$\varphi_H(\mathbf{e}) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

Sea $\mathbb{H} = \{H \leq G : \varphi_H(\mathbf{e}) = 1\}$ y $H_1, \dots, H_t$ representantes de la clase de conjugación de G en $\mathbb{H}$.

Si vemos a $\mathbf{e} \in B_{\mathbb{Q}}(G)$, entonces

$$\mathbf{e} = \sum_{i=1}^t \mathbf{e}_{G, H_i}$$

Notemos que $H \in \mathbb{H}$ si y sólo si $\mathbf{e} \notin \beta_p(H, q\mathbb{Z}_p)$. Ver definición 1.5.8 y la observacion 20. Por otro lado, como H es p -perfecto y de la definición 1.5.8, tenemos que $\beta_p(H, p\mathbb{Z}_p) = \beta_p(O^p(H), p\mathbb{Z}_p)$, con lo cual

$$H \in \mathbb{H} \text{ si y sólo si } O^p(H) \in \mathbb{H}.$$

De aquí que,

$$\mathbb{H} = \bigcup_l \{ \xi_{\{p\}}(G, H_l) : H_l \in \mathbb{H} \text{ y } H_l \text{ es } p\text{-perfecto} \}$$

Para cada l , sean $H_{l_1}, \dots$ representantes de la clase de conjugación de G en $\xi_{\{p\}}(G, O^p(H_l))$, de esto

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \sum_i \mathbf{e}_{G, H_i} \\ &= \sum_l \left(\sum_j \mathbf{e}_{G, H_{l_j}} \right) = \sum_i \mathbf{e}_{G, H_i}^p, \end{aligned}$$

donde j corre sobre los representantes de las clases de conjugación de $\xi_{\{p\}}(G, H_l)$

□

Capítulo 2

Ideales de índice finito de $B_P(C_{p^3})$

A lo largo de este capítulo, denotamos por $\mathbb{Z}_p$ al anillo de los enteros p -ádicos. No confundir con el campo de los enteros módulo p . También a lo largo del capítulo se consideran solamente ideales de índice finito, a los cuales sólo se les llamará ideales mientras no se indique lo contrario.

Sea p un número primo, $n \in \mathbb{N}$ y C_{p^n} un grupo cíclico de orden p^n . Luego, tomemos su anillo de Burnside, el cual denotaremos $B(C_{p^n})$. Denotamos:

$$B_p(C_{p^n}) = \bigoplus_{H \in \mathcal{C}(C_{p^n})} \mathbb{Z}_p[C_{p^n}/H].$$

Notemos que $\mathcal{C}(C_{p^n}) = \{C_{p^n}, pC_{p^n}, p^2C_{p^n}, \dots, p^nC_{p^n}\}$. Para simplificar la notación, llamemos

$$H_0 = C_{p^n}, \dots, H_n = p^nC_{p^n}.$$

Ahora, por el lema 1.3.1, se sigue que

$$\varphi : B_p(C_{p^n}) \longrightarrow \prod_{H \in \mathcal{C}(C_{p^n})} \mathbb{Z}_p \quad \text{tal que}$$

$$[X] \longmapsto \varphi([X]) = (\varphi_H(X))_{H \in \mathcal{C}(G)} = (\varphi_{H_0}(X), \varphi_{H_2}(X), \dots, \varphi_{H_n}(X)),$$

es un homomorfismo inyectivo de anillos.

Observemos que, sólo basta ver qué pasa con los $\varphi_{H_i}(C_{p^n}/H_j)$ con $H_i \in \mathcal{C}(C_{p^n})$.

Por el corolario 1.2.1, se tiene que $\varphi_{H_i}(C_{p^n}/H_j) \neq 0$ si y sólo si $i \geq j$. Además, por el lema 1.6.3, se obtiene que

$$\varphi_{H_i}((C_{p^n}/H_j)) = \frac{|N_{C_{p^n}}(H_j)|}{|H_j|},$$

puesto que $\alpha(H_i, H_j) = |\{H_j\}| = 1$. Note que $N_{C_{p^n}}(H_j) = C_{p^n}$, con lo cual

$$\frac{|N_{C_{p^n}}(H_j)|}{|H_j|} = \frac{|C_{p^n}|}{|p^j C_{p^n}|} = p^j.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} C_{p^n}/H_0 &\longrightarrow \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{n+1-\text{veces}} \\ C_{p^n}/H_1 &\longrightarrow (0, \underbrace{p, p, \dots, p}_{n-\text{veces}}) \\ C_{p^n}/H_2 &\longrightarrow (0, 0, \underbrace{p^2, p^2, \dots, p^2}_{n-1-\text{veces}}) \\ &\vdots \\ C_{p^n}/H_n &\longrightarrow (0, 0, \dots, 0, \underbrace{p^n}_{n-\text{veces}}) \end{aligned}$$

En consecuencia, podemos ver a $B_p(C_{p^n})$ en $\mathbb{Z}_p^{n+1}$ como:

$$\{(x_1, x_1 + px_2, \dots, x_1 + px_2 + p^2x_3 + \dots + p^nx_{n+1}) \in \mathbb{Z}_p^{n+1} : x_i \in \mathbb{Z}_p\}$$

con $i = 1, \dots, n+1$.

$$\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{Z}_p^{n+1} : x_i - x_{i+1} \in p^i \mathbb{Z}_p \text{ con } i = 1, \dots, n\}.$$

2.1. Estructura de producto fibrado.

Definición 2.1.1. Dados dos morfismos $f : B \longrightarrow A$ y $g : C \longrightarrow A$ en una categoría $\mathcal{C}$, una *solución* es una tripleta ordenada (D, α, β) que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\alpha} & C \\ \beta \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

Un *producto fibrado* es una solución (D, α, β) que es la ‘mejor’ en el sentido que: para cada solución (X, α', β') existe un único morfismo $\theta : X \longrightarrow D$ haciendo que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \searrow \alpha' & & \searrow g & \\ & & D & \xrightarrow{\alpha} & C \\ & \swarrow \beta' & \downarrow \beta & & \downarrow g \\ & & B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

(Note: A dashed arrow labeled θ points from X to D in the original diagram.)

El producto fibrado, cuando existe es único hasta isomorfismo.

Ejemplo 19. En la categoría de anillos conmutativos, denotada por $C\mathcal{R}$ hay un producto fibrado. Sean A, B, C en los objetos de $C\mathcal{R}$ y $f : B \rightarrow A$, $g : C \rightarrow A$ en los morfismos de $C\mathcal{R}$, el producto fibrado de estos objetos y morfismos está definido por el subconjunto $B \times_A C$ del producto cartesiano $B \times C$, definido por:

$$B \times_A C = \{(b, c) \in B \times C : f(b) = g(c)\},$$

donde $\alpha : B \times_A C \rightarrow C$ y $\beta : B \times_A C \rightarrow B$ son tales que $f \circ \beta = g \circ \alpha$.

En base al ejemplo 19, tomemos A_1, A_2 y $\bar{A}$ anillos conmutativos, además A_2 Dominio de Ideales principales (DIP). También, sean

$$f_1 : A \rightarrow A_1, f_2 : A \rightarrow A_2, g_1 : A_1 \rightarrow \bar{A} \text{ y } g_2 : A_2 \rightarrow \bar{A}$$

homomorfismos sobreyectivos de anillos, donde

$$A = \{(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2 : g_1(a_1) = g_2(a_2)\}.$$

Con lo cual, el siguiente es un diagrama de producto fibrado.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_2} & A_2 \\ f_1 \downarrow & & \downarrow g_2 \\ A_1 & \xrightarrow{g_1} & \bar{A} \end{array}$$

Ahora, nos interesa saber cómo se comportan los ideales de A .

Sea I un ideal de A y llamemos $I_1 = f_1(I)$, $I_2 = f_2(I)$. Veamos que I_1, I_2 son ideales de A_1 y A_2 , respectivamente.

Sea $f_1(x_1), f_1(x_2) \in I_1$ con $x_1, x_2 \in I$, como f_1 es homomorfismo de anillos, se tiene que

$$f_1(x_1 + x_2) = f_1(x_1) + f_1(x_2).$$

Claramente, $f_1(x_1 + x_2) \in f_1(I)$, así $f_1(x_1) + f_1(x_2) \in I_1$.

Sea $a_1 \in A_1$ arbitrario. Luego, como f_1 es sobreyectiva, existe $y_1 \in A$ tal que $f_1(y_1) = a_1$, ahora sea $f_1(x_1) \in I_1$ con $x_1 \in I$, entonces

$$a_1 f_1(x_1) = f_1(y_1) f_1(x_1)$$

como f_1 es homomorfismo de anillos, se tiene que

$$a_1 f_1(x_1) = f_1(y_1 x_1),$$

con lo cual $a_1 f_1(x_1) \in I_1$, es fácil ver que $0 \in I_1$, porque I es ideal y f_1 es homomorfismo de anillos, de aquí que I_1 es ideal de A_1 , de manera análoga I_1 es ideal de A_2 .

Por otro lado, como A_2 es un DIP, se sigue que $I_2 = \beta A_2$ con $\beta \in A_2$, como f_2 es sobreyectiva, existe $a \in A$ tal que $f_2(a) = \beta$, tomemos $a = (\alpha, \beta) \in I$ con $\alpha \in A_1$ y $g_1(\alpha) = g_2(\beta)$. Posteriormente, tomemos $(x, y) \in I$ arbitrario, desde que $I_2 = \beta A_2$, existe $a_2 \in A_2$ tal que $y = \beta a_2$, además como f_1 es sobreyectiva, se tiene que $f_2(b) = a_2$ para algún $b \in A$, como $b \in A$, tenemos que $b = (a_1, a_2)$, entonces

$$b(\alpha, \beta) = (a_1\alpha, a_2\beta)$$

el cual se encuentra en I , por tanto $(x - a_1\alpha, 0) \in I$.

Definimos $J = \{c \in A_1 : (c, 0) \in I\}$; es fácil ver que J es un ideal de A_1 , de aquí que $x - a_1\alpha = c$ para algún $c \in J$, así $x = c + a_1\alpha$, en consecuencia

$$(x, y) = (c + a_1\alpha, a_2\beta) = (a_1, a_2)(\alpha, \beta) + (c, 0),$$

con lo cual $(x, y) \in A(\alpha, \beta) + (J, 0)$. Entonces $I \subseteq A(\alpha, \beta) + (J, 0)$. Por otra parte, I es ideal, así $A(\alpha, \beta) + (J, 0) \subseteq I$, por tanto

$$A(\alpha, \beta) + (J, 0) = I.$$

De tal manera, los ideales de A son de la forma

$$A(\alpha, \beta) + (J, 0)$$

donde

- i) J es un ideal de A_1 tal que $g_1(J) = 0$.
- ii) β es un generador de un ideal principal de A_2 , donde $f_2(I) = \beta A_2$.
- iii) α es un elemento en A_1 tal que $g_1(\alpha) = g_2(\beta)$ y además α es único módulo J .
- iv) $f_1(D)\alpha \subseteq J$, donde $D = \{a \in A : (f_2(a))\beta = 0\}$

Veamos que α es único módulo J . Sean $(\alpha_1, \beta), (\alpha_2, \beta) \in I$, entonces

$$(\alpha_1 - \alpha_2, 0) \in I,$$

así $\alpha_1 - \alpha_2 \in J$, por tanto

$$\alpha_1 + J = \alpha_2 + J.$$

Ahora, sea $D = \{a \in A : (f_2(a))\beta = 0\} \subseteq A$. Luego, tomemos $a \in D$ de la siguiente manera:

$$a = (f_1(a), f_2(a)),$$

si multiplicamos a por (α, β) , tenemos que

$$a(\alpha, \beta) = (f_1(a)\alpha, f_2(a)\beta) = (f_1(a)\alpha, 0) \in I.$$

En consecuencia, $f_1(D)\alpha \subseteq J$. Esto, puede ser visto en [6].

2.2. Estructura de producto fibrado de $B_p(C_{P^n})$.

En base a la sección 2.1, podemos dar la siguiente estructura de producto fibrado con f_1, f_2, g_1 y g_2 homomorfismos sobre yectivos de anillos, para saber cómo se comportan los ideales de $B_p(C_{p^n})$.

$$\begin{array}{ccc}
 (x_1, x_2, \dots, x_n) \vdash & \text{-----} & \succ x_n \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 & B_p(C_{p^n}) \xrightarrow{f_2} \mathbb{Z}_p & \\
 f_1 \downarrow & & \downarrow g_2 \\
 & B_p(C_{p^{n-1}}) \xrightarrow{g_1} \mathbb{Z}_p/p^n \mathbb{Z}_p & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \vdash & \text{-----} & \succ [x_{n-1}] = [x_n]
 \end{array}$$

Como en $\mathbb{Z}_p$ todos sus ideales son principales, entonces tenemos que son de la forma $p^r \mathbb{Z}_p$ con $r \geq 0$. Ahora, sea $I \leq B_p(C_{p^n})$ ideal, sabemos que I es de la forma:

$$I = (\alpha, p^r)B_p(C_{p^n}) + (J, 0)$$

donde

- i) $J \leq B_p(C_{p^{n-1}})$ ideal, tal que $g_1(J) = 0$.
- ii) $\alpha \in B_p(C_{p^{n-1}})$ es tal que $g_1(\alpha) \equiv [p^r] \pmod{p^n \mathbb{Z}_p}$ y α es único módulo J .
- iii) $(f_1(D))\alpha \in J$, donde $D = p\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times \dots \times p^n\mathbb{Z}_p \times \{0\}$.

Veamos iii). Por la sección 2.1, tenemos que

$$D = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in B_p(C_{p^n}) : u_n p^r = 0\},$$

como $u_n p^r = 0$ en $\mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{Z}_p$ resulta ser dominio entero, se sigue que

$$u_n = x_1 + px_2 + p^2x_3 + \dots + p^n x_{n+1} = 0,$$

en consecuencia,

$$x_1 \in p\mathbb{Z}_p$$

$$x_1 + px_2 \in p^2\mathbb{Z}_p$$

$$x_1 + px_2 + p^2x_3 \in p^3\mathbb{Z}_p$$

$\vdots$

$$x_1 + px_2 + p^2x_3 + \cdots + p^{n-1}x_n \in p^n\mathbb{Z}_p.$$

Por tanto $D \subseteq p\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times \cdots \times p^n\mathbb{Z}_p \times \{0\}$. Por otra parte, es fácil ver que $p\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times \cdots \times p^n\mathbb{Z}_p \times \{0\} \subseteq D$. Por tanto,

$$D = p\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times \cdots \times p^n\mathbb{Z}_p \times \{0\}.$$

Con lo cual, $f_1(D) = p\mathbb{Z}_{\{p\}} \times p^2\mathbb{Z}_{\{p\}} \times \cdots \times p^n\mathbb{Z}_{\{p\}}$. En consecuencia, al multiplicar los generadores del conjunto $f_1(D)$ por α , dicho producto se encuentra en J .

2.3. Ideales de $B_p(C_p)$.

De acuerdo a la sección 2.2, tenemos el siguiente diagrama de producto fibrado.

$$\begin{array}{ccc} (u_1, u_2) \vdash \text{-----} \triangleright u_2 & & \\ \vdots & & \vdots \\ & \begin{array}{ccc} B_p(C_p) & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{Z}_p \\ f_1 \downarrow & & \downarrow g_2 \\ \mathbb{Z}_p & \xrightarrow{g_1} & \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \end{array} & \\ \vdots & & \vdots \\ u_1 \vdash \text{-----} \triangleright [u_1] = [u_2] & & \end{array}$$

Sabemos que los ideales de $\mathbb{Z}_p$ son de la forma $p^m\mathbb{Z}_p$ con $m \geq 0$. Con lo cual, dado I un ideal de $B_p(C_p)$, este es de la forma

$$I = (\alpha, p^r)B_p(C_p) + (p^m\mathbb{Z}_p, 0) \text{ con } m \geq 0, r \geq 0.$$

De *i*), queremos que $g_1(p^m\mathbb{Z}_p) = 0$, esto ocurre cuando $m \geq 1$.

De *ii*), sea $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Luego, de *iii*), tenemos que $f_1(D) = p\mathbb{Z}_p$, ahora si multiplicamos dicho conjunto por α , tenemos que $(p\mathbb{Z}_p)\alpha \subseteq p^m\mathbb{Z}_p$, de aquí que

$$\alpha \in p^{m-1}\mathbb{Z}_p.$$

En consecuencia, $\alpha = p^{m-1}s$ para algún $s \in \mathbb{Z}_p$. Notemos que, $s = s_0 + ps_1$ con $s_0 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_1 \in \mathbb{Z}_p$. Así,

$$\alpha = p^{m-1}s_0 + p^m s_1.$$

Como α es único módulo J , tenemos que $\alpha = p^{m-1}s_0$. Sustituyendo en I , obtenemos que

$$I = (p^{m-1}s_0, p^r)B_p(C_p) + (p^m\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{ (p^{m-1}(s_0x + pu), p^r(x + py)) \in \mathbb{Z}_p^2 : x, y, u \in \mathbb{Z}_p \}.$$

Por tanto, tenemos los siguientes dos casos:

a) $s_0 = 0$.

b) $s_0 \neq 0$.

Puesto que $m \geq 1$, por *ii*), tenemos que:

$$p^r \equiv p^m \equiv 0 \pmod{p\mathbb{Z}_p}$$

por lo que $r \geq 1$.

a)

$$\begin{aligned} I &= \{ (p^m u, p^r(x + py)) \in \mathbb{Z}_p^2 : x, y, u \in \mathbb{Z}_p \} \\ &= (p^m, p^r) \{ (u, v) \in \mathbb{Z}_p^2 : u, v \in \mathbb{Z}_p \} \\ &= (p^m, p^r)\mathbb{Z}_p^2 \text{ con } m \geq 1 \text{ y } r \geq 1. \end{aligned}$$

Notemos que, $v = x + py$.

b)

$$\begin{aligned} I &= \{ (p^{m-1}(s_0x + pu), p^r(x + py)) \in \mathbb{Z}_p^2 : x, y, u \in \mathbb{Z}_p \} \\ &= (p^{m-1}, p^r) \{ (s_0x + pu, x + py) \in \mathbb{Z}_p^2 : x, y, u \in \mathbb{Z}_p \} \\ &= (p^{m-1}, p^r) \{ (w, v) \in \mathbb{Z}_p^2 : s_0v - w \in p\mathbb{Z}_p \} \end{aligned}$$

$$= (p^{m-1}, p^r[s_0]^{-1})B_p(C_p) \text{ con } \begin{cases} m-1 = r = 0 & \text{con } s_0 = 1 \text{ ya que } s_0 \equiv 1 \pmod{p\mathbb{Z}_p}. \\ 1 \leq m-1, r & \text{con } s_0 \in \{1, \dots, p-1\}. \end{cases}$$

Note que, $w = s_0x + pu$ y $v = x + py$.

En resumen, todos los ideales en $B_p(C_p)$ son de la forma siguiente.

$$J_1 = (p^m, p^k)\mathbb{Z}_p^2 \text{ con } m \geq 1 \text{ y } k \geq 1.$$

$$J_2 = (p^m, p^k \mathbf{w}_0)B_p(C_p) \text{ con } \begin{cases} m = k = 0 & \text{con } \mathbf{w}_0 = 1. \\ m \geq 1, k \geq 1 & \text{con } \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}. \end{cases}$$

Los escribimos de esta forma para realizar de manera más práctica el cálculo de los ideales de $B_p(C_{p^2})$.

2.4. Ideales de $B_p(C_{p^2})$.

Tenemos el siguiente diagrama de producto fibrado.

$$\begin{array}{ccccc}
 (u_1, u_2, u_3) & \vdash & \text{-----} & \succ & u_3 \\
 \uparrow & & & & \uparrow \\
 & & B_p(C_{p^2}) \xrightarrow{f_2} \mathbb{Z}_p & & \\
 & & \downarrow f_1 \quad \quad \downarrow g_2 & & \\
 & & B_p(C_p) \xrightarrow{g_1} \mathbb{Z}_p/p^2\mathbb{Z}_p & & \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 (u_1, u_2) & \vdash & \text{-----} & \succ & [u_2] = [u_3]
 \end{array}$$

De manera similar a la sección 2.3, dado I un ideal de $B_p(C_{p^2})$, este es de la forma

$$I = (\alpha, p^r)B_p(C_{p^2}) + (J, 0) \text{ con } r \geq 0 \text{ y } J \text{ un ideal de } B_p(C_p).$$

De aquí que, tenemos los siguientes casos:

- a) Tomar $J = J_1$ de la sección 2.3.
- b) Tomar $J = J_2$ de la sección 2.3.

a) Si suponemos que $J = J_1$, obtenemos que

$$I = (\alpha, p^r)B_p(C_{p^2}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, 0) \text{ con } r \geq 0, m \geq 1 \text{ y } k \geq 1.$$

Como queremos que $g_1(J_1) = 0$, se sigue que $k \geq 2$.

Luego, sea $\alpha \in B_p(C_p)$, así $\alpha = (x_0, x_0 + py_0)$ y multipliquémoslo por los generadores del conjunto $f_1(D)$, donde $D = p\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times \{0\}$. Recordemos que dichos productos están en J_1

- i) $(p, 0)\alpha = (px_0, 0) \in J_1$.
- ii) $(0, p^2)\alpha = (0, p^2(x_0 + py_0)) \in J_1$.

De i) y de ii), tenemos que $x_0 \in p^{m-1}\mathbb{Z}_p$ y $x_0 + py_0 \in p^{k-2}\mathbb{Z}_p$, respectivamente.

Con lo cual,

$$\alpha = (p^{m-1}x'_0, p^{k-2}y'_0) \text{ con } x'_0, y'_0 \in \mathbb{Z}_p.$$

Notemos que $x'_0 = s_0 + px''_0$ y $y'_0 = s_1 + ps_2 + p^2y''_0$ con $x''_0, y''_0 \in \mathbb{Z}_p$ y $s_0, s_1, s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$, en consecuencia

$$\alpha = (p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2)) + (p^m x''_0, p^k y''_0).$$

Como α es único módulo J , se sigue que $\alpha = (p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2))$. Por tanto

$$I = (p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), p^r)B_p(C_{p^2}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, 0)$$

con $r \geq 0$, $m \geq 1$, $k \geq 2$ y $s_0, s_1, s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.

Sólo nos falta ver $g_1(\alpha) \equiv [p^r](\text{mod } p^2\mathbb{Z}_p)$.

Supongamos que $r = 0$. Así,

$$p^{k-2}(s_1 + ps_2) \equiv 1(\text{mod } p^2\mathbb{Z}_p)$$

si y sólo si $k = 2$, $s_1 = 1$ y $s_2 = 0$. Luego, como $\alpha \in B_p(C_p)$, debemos ver que $p^{m-1}s_0 - 1 \in p\mathbb{Z}_p$. Con lo cual,

$$m = 1 \text{ y } s_0 = 1.$$

Por tanto,

$$I = (1, 1, 1)B_p(C_{p^2}) + (p\mathbb{Z}_p, p^2\mathbb{Z}_p, 0) = B_p(C_{p^2}).$$

Supongamos que $r = 1$. Así,

$$p^{k-2}(s_1 + ps_2) \equiv p(\text{mod } p^2\mathbb{Z}_p)$$

cuando tenemos los siguientes casos:

$$r_{1_1}) \quad k = 2, \quad s_1 = 0 \text{ y } s_2 = 1$$

$$r_{1_2}) \quad k = 3, \quad s_1 = 1 \text{ y } s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$$

$r_{1_1})$ Supongamos que $k = 2$, $s_1 = 0$ y $s_2 = 1$, como $\alpha \in B_p(C_p)$, debemos ver que $p^{m-1}s_0 - p \in p\mathbb{Z}_p$. Con lo cual, tenemos los siguientes casos:

$$r_{1_{1_1}}) \quad s_0 = 0.$$

$$r_{1_{1_2}}) \quad s_0 \neq 0.$$

$r_{1_{1_1}})$ Si $s_0 = 0$, entonces $m \geq 1$, con lo cual

$$I = (0, p, p)B_p(C_{p^2}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^2\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{ (p^m u, p(x + py + pv), p(x + py + p^2 z)) \in \mathbb{Z}_p^3 : x, y, z, u, v \in \mathbb{Z}_p \}$$

$$= (p^m, p, p) \{ (u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 : w - v \in p\mathbb{Z}_p \} \text{ con } m \geq 1.$$

Nota 2.4.1. A menudo en esta demostración, al final de cada subcaso, se redenotará a cada familia de ideales, por comodidad en la notación.

$r_{1_{1_2}}$) Si $s_0 \neq 0$, entonces $m \geq 2$, con lo cual

$$I = (p^{m-1}s_0, p, p)B_p(C_{p^2}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^2\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0(x+pu), p(x+py+pv), p(x+py+p^2z)) \in \mathbb{Z}_p^3 : x, y, z, u, v \in \mathbb{Z}_p\}$$

$$= (p^{m-1}s_0, p, p) \{(x+pu, x+py+pv, x+py+p^2z) \in \mathbb{Z}_p^3 : x, y, z, u, v \in \mathbb{Z}_p\}$$

$$= (p^{m-1}s_0, p, p) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 : w-v \text{ y } v-u \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 2$ y $s_0 \in \{1, \dots, p-1\}$.

r_{1_2}) Supongamos que $k=3$, $s_1=1$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ como $\alpha \in B_p(C_p)$, debemos ver que $p^{m-1}s_0 - p(1+ps_2) \in p\mathbb{Z}_p$. Con lo cual, tenemos los siguientes casos:

$r_{1_{2_1}}$) $s_0 = 0$.

$r_{1_{2_2}}$) $s_0 \neq 0$.

$r_{1_{2_1}}$) Si $s_0 = 0$, entonces $m \geq 1$, con lo cual

$$I = (0, p(1+ps_2), p)B_p(C_{p^2}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^3\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, p(1+ps_2)(x+py+p^2v), p(x+py+p^2z)) \in \mathbb{Z}_p^3 : x, y, z, u, v \in \mathbb{Z}_p\}$$

$$= (p^m, p(1+ps_2), p) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 : w-v \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{1_{2_2}}$) Si $s_0 \neq 0$, entonces $m \geq 2$, de aquí que

$$I = (p^{m-1}s_0, p(1+ps_2), p)B_p(C_{p^2}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^3\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0(x+pu), p(1+ps_2)(x+py+p^2v), p(x+py+p^2z)) \in \mathbb{Z}_p^3 : x, y, z, u, v \in \mathbb{Z}_p\}$$

$$= (p^{m-1}s_0, p(1+ps_2), p) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 : v-u \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } w-v \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

$$= (p^{m-1}s_0, p(1+ps_2), p) B_p(C_{p^2})$$

con $m \geq 2$, $s_0 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.

Por último, supogamos que $r \geq 2$, con esto, sólo nos falta ver que

$$p^{k-2}(s_1 + ps_2) \equiv 0 \pmod{p^2\mathbb{Z}_p}$$

cuando tenemos los siguientes casos:

$$r_{2_1}) \quad s_1 = 0 = s_2.$$

$$r_{2_2}) \quad s_1 = 0 \text{ y } s_2 \in \{1, \dots, p-1\}.$$

$$r_{2_3}) \quad s_1 \neq 0 \text{ y } s_2 \in \{0, \dots, p-1\}.$$

$r_{2_1})$ Si $s_1 = 0 = s_2$, entonces $k \geq 2$, como $\alpha \in B_p(C_p)$, debemos ver que $p^{m-1}s_0 - 0 \in p\mathbb{Z}_p$. Con lo cual, tenemos los siguientes casos:

$$r_{2_{1_1}}) \quad s_0 = 0.$$

$$r_{2_{1_2}}) \quad s_0 \neq 0.$$

$$r_{2_{1_1}}) \text{ Si } s_0 = 0, \text{ entonces } m \geq 1, \text{ de aquí}$$

$$\begin{aligned} I &= (0, 0, p^r)B_p(C_{p^2}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, 0) \\ &= \{(p^mu, p^kv, p^r(x + py + p^2z)) \in \mathbb{Z}_p^3 : x, y, z, u, v \in \mathbb{Z}_p\} \\ &= (p^m, p^k, p^r) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 : u, v, w \in \mathbb{Z}_p\} \\ &= (p^m, p^k, p^r) \mathbb{Z}_p^3 \end{aligned}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 2$ y $r \geq 2$.

$$r_{2_{1_2}}) \text{ Si } s_0 \neq 0, \text{ entonces } m \geq 2, \text{ de aquí}$$

$$\begin{aligned} I &= (p^{m-1}s_0, 0, p^r)B_p(C_{p^2}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, 0) \\ &= \{(p^{m-1}s_0(x + pu), p^kv, p^r(x + py + p^2z)) \in \mathbb{Z}_p^3 : x, y, z, u, v \in \mathbb{Z}_p\} \\ &= (p^{m-1}s_0, p^k, p^r) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 : w - u \in p\mathbb{Z}_p\} \end{aligned}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 2$, $r \geq 2$ y $s_0 \in \{1, \dots, p-1\}$.

$r_{2_2})$ Si $s_1 = 0$ y $s_2 \in \{1, \dots, p-1\}$, entonces $k \geq 3$, como $\alpha \in B_p(C_p)$, debemos ver que $p^{m-1}s_0 - p^{k-1}s_2 \in p\mathbb{Z}_p$. Con lo cual, tenemos los siguientes casos:

$$r_{2_{2_1}}) \quad s_0 = 0.$$

$$r_{2_{2_2}}) \quad s_0 \neq 0.$$

$r_{2_{2_1}}$) Si $s_0 = 0$, entonces $m \geq 1$, así

$$\begin{aligned}
I &= (0, p^{k-1}s_2, p^r)B_p(C_{p^2}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, 0) \\
&= \{(p^mu, p^{k-1}s_2(x+py+pv), p^r(x+py+p^2z)) \in \mathbb{Z}_p^3 : x, y, z, u, v \in \mathbb{Z}_p\} \\
&= (p^m, p^{k-1}s_2, p^r) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 : w - v \in p\mathbb{Z}_p\} \\
\text{con } m &\geq 1, \quad k \geq 3, \quad r \geq 2 \text{ y } s_2 \in \{1, \dots, p-1\}.
\end{aligned}$$

$r_{2_{2_2}}$) Si $s_0 \neq 0$, entonces $m \geq 2$, así

$$\begin{aligned}
I &= (p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^r)B_p(C_{p^2}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, 0) \\
&= \{(p^{m-1}s_0(x+pu), p^{k-1}s_2(x+py+pv), p^r(x+py+p^2z)) \in \mathbb{Z}_p^3 : \\
&\quad x, y, z, u, v \in \mathbb{Z}_p\} \\
&= (p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^r) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 : v - u \text{ y } w - v \in p\mathbb{Z}_p\} \\
\text{con } m &\geq 2, \quad k \geq 3, \quad r \geq 2 \text{ y } s_0, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}.
\end{aligned}$$

r_{2_3}) Si $s_1 \neq 0$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$, entonces $k \geq 4$, como $\alpha \in B_p(C_p)$, debemos ver que $p^{m-1}s_0 - p^{k-2}(s_1 + ps_2) \in p\mathbb{Z}_p$. Con lo cual, tenemos los siguientes casos:

$r_{2_{3_1}}$) $s_0 = 0$.

$r_{2_{3_2}}$) $s_0 \neq 0$.

$r_{2_{3_1}}$) Si $s_0 = 0$, entonces $m \geq 1$, así

$$\begin{aligned}
I &= (0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), p^r)B_p(C_{p^2}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, 0) \\
&= \{(p^mu, p^{k-2}(s_1 + ps_2)(x+py+p^2v), p^r(x+py+p^2z)) \in \mathbb{Z}_p^3 : \\
&\quad x, y, z, u, v \in \mathbb{Z}_p\} \\
&= (p^m, p^{k-2}(s_1 + ps_2), p^r) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 : w - v \in p^2\mathbb{Z}_p\} \\
\text{con } m &\geq 1, \quad k \geq 4, \quad r \geq 2, \quad s_1 \in \{1, \dots, p-1\} \text{ y } s_2 \in \{0, \dots, p-1\}.
\end{aligned}$$

$r_{2_{3_2}}$) Si $s_0 \neq 0$, entonces $m \geq 2$, así

$$I = (p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), p^r)B_p(C_{p^2}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{ (p^{m-1}s_0(x+pu), p^{k-2}(s_1+ps_2)(x+py+p^2v), p^r(x+py+p^2z)) \in \mathbb{Z}_p^3 : \\ x, y, z, u, v \in \mathbb{Z}_p \}$$

$$= (p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1+ps_2), p^r) \{ (u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 : v-u \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } w-v \in p^2\mathbb{Z}_p \}$$

$$= (p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1+ps_2), p^r) B_p(C_{p^2})$$

con $m \geq 2$, $k \geq 4$, $r \geq 2$, $s_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.

b) Si suponemos que $J = J_2$, obtenemos que

$$I = (\alpha, p^r)B_p(C_{p^2}) + ((p^m, p^k \mathbf{w}_0)B_p(C_p), 0) \text{ con } r \geq 0 \text{ y}$$

*) $m = k = 0$ y $\mathbf{w}_0 = 1$.

**) $m \geq 1$, $k \geq 1$ y $\mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}$.

Como queremos que $g_1(J_2) = 0$, entonces el caso *) lo descartamos, porque no podemos mandar a J_2 a la clase del cero. Se sigue que, para el caso **), $k \geq 2$. En consecuencia,

$$I = (\alpha, p^r)B_p(C_{p^2}) + ((p^m, p^k \mathbf{w}_0)B_p(C_p), 0)$$

con $r \geq 0$, $m \geq 1$, $k \geq 2$, y $\mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}$.

Luego, sea $\alpha \in B_p(C_p)$, así $\alpha = (x_0, x_0 + py_0)$ y multipliquémoslo por los generadores del conjunto $f_1(D)$, donde $D = p\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times \{0\}$. Recordemos que dichos productos estan en J_2

$$i) (p, 0)\alpha = (px_0, 0) \in J_2.$$

$$ii) (0, p^2)\alpha = (0, p^2(x_0 + py_0)) \in J_2.$$

De i), se obtiene que $(px_0, 0) = (p^m, p^k \mathbf{w}_0)(u, u + pv)$ con $(u, u + pv) \in B_p(C_p)$. De aquí que,

$$(px_0, 0) = (p^m u, p^k \mathbf{w}_0(u + pv)),$$

De esto,

$$px_0 = p^m u \quad \text{y} \quad u + pv = 0,$$

así

$$px_0 = p^{m+1}v,$$

con lo cual

$$x_0 \in p^m \mathbb{Z}_p.$$

De *ii*), se obtiene que

$$(0, p^2(x_0 + py_0)) = (p^m, p^k \mathbf{w}_0)(u, u + pv)$$

con $(u, u + pv) \in B_p(C_p)$. De aquí que,

$$(0, p^2(x_0 + py_0)) = (p^m u, p^k \mathbf{w}_0(u + pv)),$$

De esto,

$$0 = u \text{ y } p^k \mathbf{w}_0(u + pv) = p^2(x_0 + py_0),$$

así

$$p^2(x_0 + py_0) = p^{k+1} \mathbf{w}_0 v,$$

de modo que

$$x_0 + py_0 \in p^{k-1} \mathbf{w}_0 \mathbb{Z}_p.$$

Con lo cual,

$$\alpha = (p^m x'_0, p^{k-1} \mathbf{w}_0 y'_0) \text{ con } x'_0, y'_0 \in \mathbb{Z}_p.$$

Notemos que $x'_0 = s_0 + px''_0$ y $y'_0 = s_1 + ps_2 + p^2 y''_0$ con $x''_0, y''_0 \in \mathbb{Z}_p$ y $s_0, s_1, s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$, en consecuencia

$$\alpha = (p^m s_0, p^{k-1} \mathbf{w}_0(s_1 + ps_2)) + (p^m, p^k \mathbf{w}_0)(px''_0, py''_0).$$

Como α es único módulo J , se sigue que $\alpha = (p^m s_0, p^{k-1} \mathbf{w}_0(s_1 + ps_2))$. Por tanto,

$$I = (p^m s_0, p^{k-1} \mathbf{w}_0(s_1 + ps_2), p^r) B_p(C_{p^2}) + ((p^m, p^k \mathbf{w}_0) B_p(C_p), 0)$$

con $r \geq 0$, $m \geq 1$, $k \geq 2$, $\mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_0, s_1, s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.

Sólo nos falta ver $g_1(\alpha) \equiv [p^r](\text{mod } p^2 \mathbb{Z}_p)$.

Sabemos que $g_1(\alpha) = p^{k-1} \mathbf{w}_0(s_1 + ps_2)$, entonces tomando $\text{mod } p^2 \mathbb{Z}_p$ con $k \geq 2$, se tiene que, sólo basta fijarse que

$$p^{k-1} \mathbf{w}_0 s_1 \equiv p^r (\text{mod } p^2 \mathbb{Z}_p).$$

Si $r = 0$, entonces la congruencia no tiene solución, con lo cual $r \geq 1$.

Supongamos que $r = 1$, con lo cual

$$s_1 = (\mathbf{w}_0)^{-1} \text{ y } k = 2.$$

Entonces,

$$I = (p^m s_0, p \mathbf{w}_0((\mathbf{w}_0)^{-1} + ps_2), p) B_p(C_{p^2}) + ((p^m, p^2 \mathbf{w}_0) B_p(C_p), 0)$$

$$= \{(p^m[s_0x + u], p\mathbf{w}_0[(\mathbf{w}_0)^{-1} + ps_2](x + py) + pu + p^2v], p(x + py + p^2z)) \in \mathbb{Z}_p^3 : u, v, x, y, z \in \mathbb{Z}_p\}$$

$$= (p^m, p\mathbf{w}_0, p)\{u, v, w\} \in \mathbb{Z}_p^3 : pu - v + [(\mathbf{w}_0)^{-1} + p(s_2 - s_0)]w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

$$= (p^m, p\mathbf{w}_0, p[\mathbf{w}_0^{-1} + p(s'_2)]^{-1})\{u, v, w\} \in \mathbb{Z}_p^3 : pu - v + w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$, $\mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s'_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.

Supongamos que $r \geq 2$. Con esto, sólo nos falta ver que

$$p^{k-1}\mathbf{w}_0s_1 \equiv 0 \pmod{p^2\mathbb{Z}_p},$$

tenemos los siguientes casos:

$$r_{2_1}) \quad s_1 = 0.$$

$$r_{2_2}) \quad s_1 \neq 0.$$

$r_{2_1})$ Si $s_1 = 0$ entonces $k \geq 2$, como $\alpha \in B_p(C_p)$, debemos ver que

$$p^ms_0 - p^ks_2 \in p\mathbb{Z}_p.$$

Con lo cual, $m \geq 1$ y $s_0 \in \{0, \dots, p-1\}$. De aquí,

$$I = (p^ms_0, p^k\mathbf{w}_0s_2, p^r)B_p(C_{p^2}) + ((p^m, p^k\mathbf{w}_0)B_p(C_p), 0)$$

$$= \{(p^m[s_0x + u], p^k\mathbf{w}_0[s_2(x + py) + u + pv], p^r(x + py + p^2z)) \in \mathbb{Z}_p^3 : x, y, z, u, v \in \mathbb{Z}_p\}$$

$$= (p^m, p^k\mathbf{w}_0, p^r)\{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 : u - v + [s_2 - s_1]w \in p\mathbb{Z}_p\}$$

Si llamamos $s'_2 = s_2 - s_0$, tenemos los siguientes casos:

$$r_{2_{1_1})} \quad s'_2 = 0.$$

$$r_{2_{1_2})} \quad s'_2 \neq 0.$$

$r_{2_{1_1})}$ si $s'_2 = 0$, entonces

$$I = (p^m, p^k\mathbf{w}_0, p^r)\{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 : u - v \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 2$, $r \geq 2$ y $\mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}$.

$r_{2_{1_2}}$) si $s'_2 \neq 0$, entonces

$$I = (p^m, p^k \mathbf{w}_0, p^r (s'_2)^{-1}) \{ (u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 : u - v + w \in p\mathbb{Z}_p \}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 2$, $r \geq 2$ y $\mathbf{w}_0$, $s'_2 \in \{1, \dots, p-1\}$.

r_{2_2}) Si $s_1 \neq 0$ entonces $k \geq 3$, como $\alpha \in B_p(C_p)$, debemos ver que

$$p^m s_0 - p^{k-1} (s_1 + ps_2) \in p\mathbb{Z}_p.$$

Con lo cual, $m \geq 1$ y $s_0 \in \{0, \dots, p-1\}$. Llamemos $A = (s_1 + ps_2)$, de aquí,

$$I = (p^m s_0, p^{k-1} \mathbf{w}_0 A, p^r) B_p(C_{p^2}) + ((p^m, p^k \mathbf{w}_0) B_p(C_p), 0)$$

$$= \{ (p^m [s_0 x + u], p^{k-1} \mathbf{w}_0 [A(x + py) + pu + p^2 v], p^r (x + py + p^2 z)) \in \mathbb{Z}_p^3 : x, y, z, u, v \in \mathbb{Z}_p \}$$

$$= (p^m, p^{k-1} \mathbf{w}_0, p^r) \{ (u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 : pu - v + [s_1 + p(s_2 - s_0)]w \in p^2 \mathbb{Z}_p \}$$

$$= (p^m, p^{k-1} \mathbf{w}_0, p^r [s_1 + ps'_2]^{-1}) \{ (u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 : pu - v + w \in p^2 \mathbb{Z}_p \}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 3$, $r \geq 2$, $\mathbf{w}_0$, $s_1 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s'_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.

En resumen, todos los ideales en $B_p(C_{p^2})$ son de la forma siguiente.

i) $(p^m \mathbf{w}_0, p^k (\mathbf{w}_1 + p\mathbf{w}_2), p^l) B_p(C_{p^2})$.

- $m = k = l = 0$, $\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_1 = 1$ y $\mathbf{w}_2 = 0$.
- $m \geq 1, k = l = 1$, $\mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}$, $\mathbf{w}_1 = 1$ y $\mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 2$, $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $\mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.

ii) $(p^m, p^k, p^l) \mathbb{Z}_p^3$ con $m \geq 1, k \geq 2$ y $l \geq 2$.

iii) $(p^m, p^k \mathbf{w}_0, p^l) \{ (u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 \mid w - v \in p\mathbb{Z}_p \}$.

- $m \geq 1, k = l = 1$ y $\mathbf{w}_0 = 1$.
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 2$ y $\mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}$.

iv) $(p^m \mathbf{w}_0, p^k, p^l) \{ (u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 \mid w - u \in p\mathbb{Z}_p \}$
con $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 2$ y $\mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}$.

v) $(p^m, p^k \mathbf{w}_0, p^l) \{ (u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 \mid v - u \in p\mathbb{Z}_p \}$
con $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 2$ y $\mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}$.

- vi) $(p^m, p^k \mathbf{w}_0, p^l \mathbf{w}_1) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 \mid u - v + w \in p\mathbb{Z}_p\}$
con $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 2$ y $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_2 \in \{1, \dots, p-1\}$.
- vii) $(p^m \mathbf{w}_0, p^k \mathbf{w}_1, p^l) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 \mid (u-v), (w-v) \in p\mathbb{Z}_p\}$.
- $m \geq 1, k = l = 1, \mathbf{w}_1 = 1$ y $\mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 2$ y $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}$.
- viii) $(p^m, p^k(\mathbf{w}_0 + p\mathbf{w}_1), p^l) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 \mid w - v \in p^2\mathbb{Z}_p\}$.
- $m \geq 1, k = l = 1, \mathbf{w}_0 = 1$ y $\mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 2, \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $\mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.
- ix) $(p^m, p^k \mathbf{w}_0, p^l(\mathbf{w}_1 + p\mathbf{w}_2)^{-1}) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 \mid pu - v + w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k = l = 1, \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $\mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $\mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.

Los escribimos de esta forma para realizar de manera más práctica el cálculo de los ideales de $B_p(C_{p^3})$. Ver, [10].

2.5. Ideales de $B_P(C_{P^3})$.

De manera análoga a las secciones 2.3 y 2.4, podemos dar la siguiente estructura de producto fibrado con f_1, f_2, g_1 y g_2 homomorfismos sobreyectivos de anillos para saber cómo se comportan los ideales de $B_p(C_{p^3})$.

$$\begin{array}{ccc}
(u_0, u_1, u_2, u_3) \vdash \text{-----} \succ u_3 & & \\
\vdots & & \vdots \\
& B_p(C_{p^3}) \xrightarrow{f_2} \mathbb{Z}_{\{p\}} & \\
& \downarrow f_1 \quad \downarrow g_2 & \\
& B_p(C_{p^2}) \xrightarrow{g_1} \mathbb{Z}_{\{p\}}/p^3\mathbb{Z}_{\{p\}} & \\
\vdots & & \vdots \\
(u_0, u_1, u_2) \vdash \text{-----} \succ [u_2] = [u_3] & &
\end{array}$$

Sabemos que, dado I un ideal de $B_p(C_{p^3})$ es de la forma:

$$I = (\alpha, p^r)B_p(C_{p^3}) + (J, 0) \text{ con } r \geq 0$$

donde

- $J \leq B_p(C_{p^2})$ ideal tal que $g_1(J) = 0$.
- $\alpha \in B_p(C_{p^2})$ tal que $g_1(\alpha) \equiv [p^r] \pmod{p^3\mathbb{Z}_p}$, además α es único módulo J .

- $(f_1(D))\alpha \in J$, donde $D = p\mathbb{Z}_p \times p^2\mathbb{Z}_p \times p^3\mathbb{Z}_p \times \{0\}$.

De la parte final de la sección 2.4, tenemos que J puede ser de la forma $i), \dots, ix)$. A continuación, no iremos tomando J de manera ordenada como se muestra en la secciones anteriores, más bien, iremos tomando J de tal manera que el cálculo de los ideales de $B_p(C_{p^3})$ valla de la forma más sencilla a la más complicada.

Ahora, como queremos que $g_1(J) = 0$ para $i), \dots, ix)$, entonces para los 9 casos, se tiene que $l \geq 3$. Así,

$$m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3 \text{ para los 9 casos.}$$

A continuación, enlistaremos los 9 casos de la siguiente manera:

- i) $(p^m, p^k, p^l) \mathbb{Z}_p^3$.
- ii) $(p^m, p^k \mathbf{w}_0, p^l) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 \mid v - u \in p\mathbb{Z}_p\}$
con $\mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}$.
- iii) $(p^m \mathbf{w}_0, p^k, p^l) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 \mid w - u \in p\mathbb{Z}_p\}$
con $\mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}$.
- iv) $(p^m, p^k \mathbf{w}_0, p^l) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 \mid w - v \in p\mathbb{Z}_p\}$
con $\mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}$.
- v) $(p^m, p^k(\mathbf{w}_0 + p\mathbf{w}_1), p^l) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 \mid w - v \in p^2\mathbb{Z}_p\}$
con $\mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $\mathbf{w}_1 \in \{0, \dots, p-1\}$.
- vi) $(p^m \mathbf{w}_0, p^k \mathbf{w}_1, p^l) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 \mid (u - v), (w - v) \in p\mathbb{Z}_p\}$
con $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}$.
- vii) $(p^m \mathbf{w}_0, p^k(\mathbf{w}_1 + p\mathbf{w}_2), p^l) B_p(C_{p^2})$
con $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $\mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.
- viii) $(p^m, p^k \mathbf{w}_0, p^l \mathbf{w}_1) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 \mid u - v + w \in p\mathbb{Z}_p\}$
con $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}$.
- ix) $(p^m, p^k \mathbf{w}_0, p^l(\mathbf{w}_1 + p\mathbf{w}_2)^{-1}) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 \mid pu - v + w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$
con $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $\mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.

Notemos que la lista anterior es la que nos va a permitir saber cómo se van a comportar los ideales de $B_p(C_{p^3})$.

Consideremos el caso $J = (p^m, p^k, p^l) \mathbb{Z}_p^3$. Así,

$$I = (\alpha, p^r)B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0) \text{ con } r \geq 0, m \geq 1, k \geq 2 \text{ y } l \geq 3.$$

Luego, sea $\alpha \in B_p(C_{p^2})$, en consecuencia $\alpha = (x_0, x_0 + py_0, x_0 + py_0 + p^2z_0)$ y multipliquémoslo por los generadores del conjunto $f_1(D)$. Recordemos que dichos productos estan en J .

$$i) \quad (p, 0)\alpha = (px_0, 0, 0) \in J.$$

$$ii) \quad (0, p^2)\alpha = (0, p^2(x_0 + py_0), 0) \in J.$$

$$iii) \quad (0, 0, p^3)\alpha = (0, 0, p^3(x_0 + py_0 + p^2z_0)) \in J.$$

De $i)$, $ii)$ y $iii)$, tenemos que

$$x_0 \in p^{m-1}\mathbb{Z}_p,$$

$$x_0 + py_0 \in p^{k-2}\mathbb{Z}_p$$

$$x_0 + py_0 + p^2z_0 \in p^{l-3}\mathbb{Z}_p,$$

respectivamente. Con lo cual, $\alpha = (p^{m-1}x'_0, p^{k-2}y'_0, p^{l-3}z'_0)$ con $x'_0, y'_0, z'_0 \in \mathbb{Z}_p$. Notemos que

$$x'_0 = s_0 + px''_0,$$

$$y'_0 = s_1 + ps_2 + p^2y''_0$$

$$z'_0 = s_3 + ps_4 + p^2s_5 + p^3z''_0$$

con $x''_0, y''_0, z''_0 \in \mathbb{Z}_p$ y $s_i \in \{0, \dots, p-1\}$ para $i = 0, \dots, 5$. En consecuencia

$$\alpha = (p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), p^{l-3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5)) + (p^m x''_0, p^k y''_0, p^l z''_0)$$

como α es único módulo J , entonces tomamos α de la siguiente forma:

$$\alpha = (p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), p^{l-3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5)).$$

Por tanto

$$I = (p^{m-1}s_0, p^{k-2}A, p^{l-3}B, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

donde $A = s_1 + ps_2$ y $B = s_3 + ps_4 + p^2s_5$.

Sólo falta ver que

$$g_1(\alpha) = [p^r] \pmod{p^3\mathbb{Z}_p}.$$

Supongamos que $r = 0$, de aquí, veamos que

$$p^{l-3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5) \equiv 1 \pmod{p^3\mathbb{Z}_p}.$$

Tendrá solución cuando $l = 3$, lo cual implica que $s_3 = 1, s_4 = 0$ y $s_5 = 0$.

Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), 1) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{k-2}(s_1 + ps_2) - 1 \in p^2\mathbb{Z}_p, \text{ por tanto } k = 2, s_1 = 1 \text{ y } s_2 = 0,$$

así

$$p^{m-1}s_0 - 1 \in p\mathbb{Z}_{\{p\}},$$

con lo cual

$$m = 1 \text{ y } s_0 = 1$$

Sustituyendo, se sigue que

$$I = (1, 1, 1, 1)B_p(C_{p^3}) + (p\mathbb{Z}_p, p^2\mathbb{Z}_p, p^3\mathbb{Z}_p, 0)$$

Por lo tanto

$$I = (1, 1, 1, 1)B_p(C_{p^3}).$$

Supongamos que $r = 1$, entonces

$$p^{l-3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5) \equiv p \pmod{p^3\mathbb{Z}_p}$$

cuando tenemos los siguientes casos:

$r_{1_1}) \quad l = 3.$

$r_{1_2}) \quad l = 4.$

$r_{1_1})$ supongamos que $\underline{l=3}$, de aquí $s_3 = 0$, $s_4 = 1$ y $s_5 = 0$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), p) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{k-2}(s_1 + ps_2) - p \in p^2\mathbb{Z}_p.$$

En consecuencia, tenemos los siguientes casos:

$r_{1_{1_1})} \quad k = 2.$

$r_{1_{1_2})} \quad k = 3.$

$r_{1_{1_1})}$ supongamos que $\underline{k=2}$, entonces $s_1 = 0$ y $s_2 = 1$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p, p) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - p \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$r_{1_{1_{1_1}}}) \quad s_0 = 0.$

$r_{1_{1_{1_2}}}) \quad s_0 \neq 0.$

$r_{1_{1_1}}$) supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Entonces

$$I = (0, p, p, p) B_p(C_{p^3}) + (p^m \mathbb{Z}_p, p^2 \mathbb{Z}_p, p^3 \mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, p[x + py + pv], pM, pN) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2 z + p^2 w$ y $N = x + py + p^2 z + p^3 t$.

$$= (p^m, p, p, p) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } t - w \in p^2 \mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$.

$r_{1_{1_2}}$) supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1} s_0, p, p, p) B_p(C_{p^3}) + (p^m \mathbb{Z}_p, p^2 \mathbb{Z}_p, p^3 \mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1} s_0[x + pu], p[x + py + pv], pM, pN) \in \mathbb{Z}_p^4 : \\ x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2 z + p^2 w$ y $N = x + py + p^2 z + p^3 t$.

$$= (p^{m-1} s_0, p, p, p) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v, v - u \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } t - w \in p^2 \mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 2$ y $s_0 \in \{1, \dots, p-1\}$.

$r_{1_{1_2}}$) supongamos que $\underline{k=3}$, entonces $s_1 = 1$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1} s_0, p(1 + ps_2), p) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1} s_0 - p(1 + ps_2) \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{1_{1_2_1}}) \quad s_0 = 0.$$

$$r_{1_{1_2_2}}) \quad s_0 \neq 0.$$

$r_{1_{1_2_1}}$) supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Entonces

$$I = (0, p(1 + ps_2), p, p) B_p(C_{p^3}) + (p^m \mathbb{Z}_p, p^3 \mathbb{Z}_p, p^3 \mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, p(1 + ps_2)[x + py + p^2 v], pM, pN) \in \mathbb{Z}_p^4 :$$

$$x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

$$\text{donde } M = x + py + p^2z + p^2w \text{ y } N = x + py + p^2z + p^3t.$$

$$= (p^m, p(1 + ps_2), p, p) \{ (u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v \text{ y } t - v \in p^2\mathbb{Z}_p \}$$

$$\text{con } m \geq 1 \text{ y } s_2 \in \{0, \dots, p-1\}.$$

$$r_{1_{1_2}}) \text{ supongamos que } \underline{s_0} \neq 0, \text{ con lo cual } m \geq 2. \text{ Entonces}$$

$$I = (p^{m-1}s_0, p(1 + ps_2), p, p) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^3\mathbb{Z}_p, p^3\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{ (p^{m-1}s_0[x + pu], p(1 + ps_2)[x + py + p^2v], pM, pN) \in \mathbb{Z}_p^4 : \\ x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p \}$$

$$\text{donde } M = x + py + p^2z + p^2w \text{ y } N = x + py + p^2z + p^3t.$$

$$= (p^{m-1}s_0, p(1 + ps_2), p, p) \{ (u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } t - w, w - v \in p^2\mathbb{Z}_p \}$$

$$\text{con } m \geq 2, s_0 \in \{1, \dots, p-1\} \text{ y } s_2 \in \{0, \dots, p-1\}.$$

$$r_{1_2}) \text{ supongamos que } \underline{l} = 4, \text{ de aqu\u00ed } s_3 = 1, s_4 = 0 \text{ y } s_5 \in \{0, \dots, p-1\}. \text{ Sustituyendo en } \alpha,$$

tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), p(1 + p^2s_5)) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{k-2}(s_1 + ps_2) - p - p^3s_5 \in p^2\mathbb{Z}_p.$$

En consecuencia, tenemos los siguientes casos:

$$r_{1_{2_1}}) \text{ } k = 2.$$

$$r_{1_{2_2}}) \text{ } k = 3.$$

$$r_{1_{2_1}}) \text{ supongamos que } \underline{k} = 2, \text{ entonces } s_1 = 0 \text{ y } s_2 = 1. \text{ Sustituyendo en } \alpha, \text{ tenemos que}$$

$$(p^{m-1}s_0, p, p(1 + p^2s_5)) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - p \in p\mathbb{Z}_p.$$

As\u00ed, se dan los siguientes casos:

$$r_{1_{2_{1_1}}}) \text{ } s_0 = 0.$$

$$r_{1_{2_{1_2}}}) \text{ } s_0 \neq 0.$$

$r_{12_{11}}$) supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. LLamemos $B = (1 + p^2 s_5)$, entonces

$$I = (0, p, pB, p) B_p(C_{p^3}) + (p^m \mathbb{Z}_p, p^2 \mathbb{Z}_p, p^4 \mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, pM, pB[x + py + p^2 z + p^3 w], pN) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + pv$ y $N = x + py + p^2 z + p^3 t$.

$$= (p^m, p, pB, p) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } t - w \in p^3 \mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$ y $s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{12_{12}}$) supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1} s_0, p, pB, p) B_p(C_{p^3}) + (p^m \mathbb{Z}_p, p^2 \mathbb{Z}_p, p^4 \mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1} s_0[x + pu], pM, pB[x + py + p^2 z + p^3 w], pN) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + pv$ y $N = x + py + p^2 z + p^3 t$.

$$= (p^{m-1} s_0, p, pB, p) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v, v - u \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } t - w \in p^3 \mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 2$, $s_0 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

r_{12_2}) supongamos que $\underline{k=3}$, entonces $s_1 = 1$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1} s_0, p(1 + ps_2), pB) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1} s_0 - p(1 + ps_2) \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{12_{21}}) \quad s_0 = 0.$$

$$r_{12_{22}}) \quad s_0 \neq 0.$$

$r_{12_{21}}$) supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. LLamemos $A = (1 + ps_2)$, entonces

$$I = (0, pA, pB, p) B_p(C_{p^3}) + (p^m \mathbb{Z}_p, p^3 \mathbb{Z}_p, p^4 \mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, pA[x + py + p^2 v], pBM, pN) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2 z + p^3 w$ y $N = x + py + p^2 z + p^3 t$.

$$= (p^m, pA, pB, p) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v \in p^2 \mathbb{Z}_p \text{ y } t - w \in p^3 \mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$ y $s_2, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

r_{122_2}) supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1} s_0, pA, pB, p) B_p(C_{p^3}) + (p^m \mathbb{Z}_p, p^3 \mathbb{Z}_p, p^4 \mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1} s_0 [x + pu], pA[x + py + p^2 v], pBM, pN) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2 z + p^3 w$ y $N = x + py + p^2 z + p^3 t$.

$$= (p^{m-1} s_0, pA, pB, p) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u \in p \mathbb{Z}_p, w - v \in p^2 \mathbb{Z}_p, t - w \in p^3 \mathbb{Z}_p\}$$

$$= (p^{m-1} s_0, pA, pB, p) B_p(C_{p^3}).$$

con $m \geq 2$, $s_0 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

Supongamos que $r = 2$, de aquí

$$p^{l-3}(s_3 + ps_4 + p^2 s_5) \equiv p^2 \pmod{p^3 \mathbb{Z}_p}$$

cuando tenemos los siguientes casos:

r_{2_1}) $l = 3$.

r_{2_2}) $l = 4$.

r_{2_3}) $l = 5$.

r_{2_1}) supongamos que $\underbrace{l=3}$, de aquí $s_3 = 0$, $s_4 = 0$ y $s_5 = 1$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1} s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), p^2) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{k-2}(s_1 + ps_2) - p^2 \in p^2 \mathbb{Z}_p.$$

En consecuencia, tenemos los siguientes casos:

$$r_{2_{1_1}}) \ s_1 = 0 = s_2.$$

$$r_{2_{1_2}}) \ s_1 = 0 \text{ y } s_2 \in \{1, \dots, p-1\}.$$

$$r_{2_{1_3}}) \ s_1 \neq 0 \text{ y } s_2 \in \{0, \dots, p-1\}.$$

$r_{2_{1_1}})$ supongamos que $\underline{s_1 = 0 = s_2}$, entonces $k \geq 2$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, 0, p^2) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - 0 \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{2_{1_{1_1}}}) \ s_0 = 0.$$

$$r_{2_{1_{1_2}}}) \ s_0 \neq 0.$$

$r_{2_{1_{1_1}}})$ supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Entonces

$$I = (0, 0, p^2, p^2) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^3\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, p^k v, p^2 M, p^2 N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2 z + pw$ y $N = x + py + p^2 z + p^3 t$.

$$= (p^m, p^k, p^2, p^2) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - w \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$ y $k \geq 2$.

$r_{2_{1_{1_2}}})$ supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, 0, p^2, p^2) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^3\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0[x + pu], p^k v, p^2 M, p^2 N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2 z + pw$ y $N = x + py + p^2 z + p^3 t$.

$$= (p^{m-1}s_0, p^k, p^2, p^2) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - u \text{ y } t - w \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 2$ y $s_0 \in \{1, \dots, p-1\}$.

$r_{2_{1_2}})$ supongamos que $\underline{s_1 = 0 \text{ y } s_2 \in \{1, \dots, p-1\}}$, entonces $k \geq 3$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^2) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - p^{k-1}s_2 \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{2_{1_{2_1}}}) \quad s_0 = 0.$$

$$r_{2_{1_{2_2}}}) \quad s_0 \neq 0.$$

$r_{2_{1_{2_1}}})$ supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Entonces

$$I = (0, p^{k-1}s_2, p^2, p^2) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^3\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, p^{k-1}s_2[x + py + pv], p^2 M, p^2 N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2 z + pw$ y $N = x + py + p^2 z + p^3 t$.

$$= (p^m, p^{k-1}s_2, p^2, p^2) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v \text{ y } t - w \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 3$ y $s_2 \in \{1, \dots, p-1\}$.

$r_{2_{1_{2_2}}})$ supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^2, p^2) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^3\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0[x + pu], p^{k-1}s_2[x + py + pv], p^2 M, p^2 N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2 z + pw$ y $N = x + py + p^2 z + p^3 t$.

$$= (p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^2, p^2) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u, w - v, t - w \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 3$ y $s_0, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}$.

$r_{2_{1_3}})$ supongamos que $\underline{s_1 \neq 0 \text{ y } s_2 \in \{0, \dots, p-1\}}$, entonces $k \geq 4$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), p^2) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - p^{k-2}(s_1 + ps_2) \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{2_{1_{3_1}}}) \quad s_0 = 0.$$

$$r_{2_{1_{3_2}}}) \quad s_0 \neq 0.$$

$r_{2_{13_1}}$) supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Llamemos $A = (s_1 + ps_2)$, entonces

$$I = (0, p^{k-2}A, p^2, p^2) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^3\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, p^{k-2}A[x + py + p^2v], p^2M, p^2N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + pw$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^m, p^{k-2}A, p^2, p^2) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v \in p\mathbb{Z}_p \text{ y } t - v \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 4$, $s_1 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{2_{13_2}}$) supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, p^{k-2}A, p^2, p^2) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^3\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0[x + pu], p^{k-2}A[x + py + p^2v], p^2M, p^2N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + pw$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^{m-1}s_0, p^{k-2}A, p^2, p^2) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u, w - v \in p\mathbb{Z}_p, t - v \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 4$, $s_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.

r_{2_2}) supongamos que $\underline{l = 4}$, de aquí $s_3 = 0$, $s_4 = 1$ y $s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$. Sustituyendo en α ,

tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), p^2(1 + ps_5)) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{k-2}(s_1 + ps_2) - p^2(1 + ps_5) \in p^2\mathbb{Z}_p.$$

En consecuencia, tenemos los siguientes casos:

$$r_{2_{2_1}}) \quad s_1 = 0 = s_2.$$

$$r_{2_{2_2}}) \quad s_1 = 0 \text{ y } s_2 \in \{1, \dots, p-1\}.$$

$$r_{2_{2_3}}) \quad s_1 \neq 0 \text{ y } s_2 \in \{0, \dots, p-1\}.$$

$r_{2_{2_1}}$) supongamos que $\underline{s_1 = 0 = s_2}$, entonces $k \geq 2$. Además, llamemos $B = 1 + ps_5$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, 0, p^2B) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - 0 \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{2_{2_{1_1}}}) \quad s_0 = 0.$$

$$r_{2_{2_{1_2}}}) \quad s_0 \neq 0.$$

$r_{2_{2_{1_1}}}$) supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Entonces

$$I = (0, 0, p^2B, p^2) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^4\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, p^k v, p^2 BM, p^2 N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + p^2w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^m, p^k, p^2B, p^2) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 2$ y $s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{2_{2_{1_2}}}$) supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, 0, p^2B, p^2) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^4\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0[x + pu], p^k v, p^2 BM, p^2 N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + p^2w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^{m-1}s_0, p^k, p^2B, p^2) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - u \in p\mathbb{Z}_p, t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 2$, $s_0 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{2_{2_2}}$) supongamos que $\underline{s_1 = 0}$ y $s_2 \in \{1, \dots, p-1\}$, entonces $k \geq 3$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^2B) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - p^{k-1}s_2 \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{2_{22_1}}) \ s_0 = 0.$$

$$r_{2_{22_2}}) \ s_0 \neq 0.$$

$r_{2_{22_1}}$) supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Entonces

$$I = (0, p^{k-1}s_2, p^2B, p^2) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^4\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, p^{k-1}s_2[x + py + pv], p^2BM, p^2N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + p^2w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^m, p^{k-1}s_2, p^2B, p^2) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v \in p\mathbb{Z}_p, t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 3$, $s_2 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{2_{22_2}}$) supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^2B, p^2) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^4\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0[x + pu], p^{k-1}s_2[x + py + pv], p^2BM, p^2N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + p^2w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^2B, p^2) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u, w - v \in p\mathbb{Z}_p, t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 3$, $s_0, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{2_{23}}$) supongamos que $\underline{s_1 \neq 0}$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$, entonces $k \geq 4$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), p^2B) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - p^{k-2}(s_1 + ps_2) \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{2_{23_1}}) \ s_0 = 0.$$

$$r_{2_{23_2}}) \ s_0 \neq 0.$$

$r_{2_{2_{3_1}}}$) supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Llamemos $A = (s_1 + ps_2)$, entonces

$$I = (0, p^{k-2}A, p^2B, p^2) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^4\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, p^{k-2}A[x + py + p^2v], p^2BM, p^2N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + p^2w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^m, p^{k-2}A, p^2B, p^2) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v \text{ y } t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 4$, $s_1 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{2_{2_{3_2}}}$) supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, p^{k-2}A, p^2B, p^2) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^4\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0[x + pu], p^{k-2}A[x + py + p^2v], p^2BM, p^2N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + p^2w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^{m-1}s_0, p^{k-2}A, p^2B, p^2) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u \in p\mathbb{Z}_p, w - v, t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 4$, $s_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

r_{2_3}) supongamos que $\underline{l=5}$, de aquí $s_3 = 1$ y $s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$. Sustituyendo en α ,

tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), p^2(1 + ps_4 + p^2s_5)) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{k-2}(s_1 + ps_2) - p^2(1 + ps_4 + p^2s_5) \in p^2\mathbb{Z}_p.$$

En consecuencia, tenemos los siguientes casos:

$$r_{2_{3_1}}) \quad s_1 = 0 = s_2.$$

$$r_{2_{3_2}}) \quad s_1 = 0 \text{ y } s_2 \in \{1, \dots, p-1\}.$$

$$r_{2_{3_3}}) \quad s_1 \neq 0 \text{ y } s_2 \in \{0, \dots, p-1\}.$$

$r_{2_{3_1}}$) supongamos que $\underline{s_1 = 0 = s_2}$, entonces $k \geq 2$. Además, llamemos $B = 1 + ps_4 + p^2s_5$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, 0, p^2B) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - 0 \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{2_{3_{1_1}}}) \quad s_0 = 0.$$

$$r_{2_{3_{1_2}}}) \quad s_0 \neq 0.$$

$r_{2_{3_{1_1}}})$ supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Entonces

$$I = (0, 0, p^2B, p^2) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^5\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^mu, p^kv, p^2BM, p^2N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + p^3w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^m, p^k, p^2B, p^2) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - w \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 2$ y $s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{2_{3_{1_2}}})$ supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, 0, p^2B, p^2) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^5\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0[x + pu], p^kv, p^2BM, p^2N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + p^3w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^{m-1}s_0, p^k, p^2B, p^2) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - u \in p\mathbb{Z}_p, t - w \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 2$, $s_0 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{2_{3_2}})$ supongamos que $\underline{s_1 = 0}$ y $\underline{s_2 \in \{1, \dots, p-1\}}$, entonces $k \geq 3$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^2B) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - p^{k-1}s_2 \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{2_{3_{2_1}}}) \ s_0 = 0.$$

$$r_{2_{3_{2_2}}}) \ s_0 \neq 0.$$

$r_{2_{3_{2_1}}})$ supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Entonces

$$I = (0, p^{k-1}s_2, p^2B, p^2) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^5\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, p^{k-1}s_2[x + py + pv], p^2BM, p^2N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + p^3w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^m, p^{k-1}s_2, p^2B, p^2) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v \in p\mathbb{Z}_p, t - w \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 3$, $s_2 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{2_{3_{2_2}}})$ supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^2B, p^2) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^5\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0[x + pu], p^{k-1}s_2[x + py + pv], p^2BM, p^2N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + p^3w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^2B, p^2) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u, w - v \in p\mathbb{Z}_p, t - w \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 3$, $s_0, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{2_{3_3}})$ supongamos que $\underline{s_1 \neq 0}$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$, entonces $k \geq 4$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), p^2B) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - p^{k-2}(s_1 + ps_2) \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{2_{3_{3_1}}}) \ s_0 = 0.$$

$$r_{2_{3_{3_2}}}) \ s_0 \neq 0.$$

$r_{2_{3_{3_1}}}$) supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Llamemos $A = (s_1 + ps_2)$, entonces

$$I = (0, p^{k-2}A, p^2B, p^2) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^5\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^mu, p^{k-2}A[x + py + p^2v], p^2BM, p^2N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + p^3w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^m, p^{k-2}A, p^2B, p^2) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v \in p^2\mathbb{Z}_p \text{ y } t - w \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 4$, $s_1 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{2_{3_{3_2}}}$) supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, p^{k-2}A, p^2B, p^2) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^5\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0[x + pu], p^{k-2}A[x + py + p^2v], p^2BM, p^2N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + p^3w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^{m-1}s_0, p^{k-2}A, p^2B, p^2) B_p(C_{p^3})$$

con $m \geq 2$, $k \geq 4$, $s_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

Supongamos que $r \geq 3$, de aquí

$$p^{l-3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5) \equiv 0 \pmod{p^3\mathbb{Z}_p}$$

cuando tenemos los siguientes casos:

$$r_{3_1}) \quad s_3 = s_4 = s_5 = 0.$$

$$r_{3_2}) \quad s_3 = 0 = s_4 \text{ y } s_5 \in \{1, \dots, p-1\}.$$

$$r_{3_3}) \quad s_3 = 0, \quad s_4 \in \{1, \dots, p-1\} \text{ y } s_5 \in \{0, \dots, p-1\}.$$

$$r_{3_4}) \quad s_3 \neq 0 \text{ y } s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$$

r_{3_1}) supongamos que $\underline{s_3 = s_4 = s_5 = 0}$, de aquí $l \geq 3$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), 0) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{k-2}(s_1 + ps_2) - 0 \in p^2\mathbb{Z}_p.$$

En consecuencia, tenemos los siguientes casos:

$$r_{3_{1_1}}) \quad s_1 = 0 = s_2.$$

$$r_{3_{1_2}}) \quad s_1 = 0 \text{ y } s_2 \in \{1, \dots, p-1\}.$$

$$r_{3_{1_3}}) \quad s_1 \neq 0 \text{ y } s_2 \in \{0, \dots, p-1\}.$$

$r_{3_{1_1}})$ supongamos que $\underline{s_1 = 0 = s_2}$, entonces $k \geq 2$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, 0, 0) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - 0 \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{3_{1_{1_1}}}) \quad s_0 = 0.$$

$$r_{3_{1_{1_2}}}) \quad s_0 \neq 0.$$

$r_{3_{1_{1_1}}})$ supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Entonces

$$I = (0, 0, 0, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, p^k v, p^l w, p^r N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

$$\text{donde } N = x + py + p^2z + p^3t.$$

$$= (p^m, p^k, p^l, p^r)\mathbb{Z}_p^4$$

con $m \geq 1$, $k \geq 2$, $l \geq 3$ y $r \geq 3$.

$r_{3_{1_{1_2}}})$ supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, 0, 0, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0[x + pu], p^k v, p^l w, p^r N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

$$\text{donde } N = x + py + p^2z + p^3t.$$

$$= (p^{m-1}s_0, p^k, p^l, p^r) \{ (u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - u \in p\mathbb{Z}_p \}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 2$, $l \geq 3$, $r \geq 3$ y $s_0 \in \{1, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{1_2}}$) supongamos que $\underline{s_1 = 0 \text{ y } s_2 \in \{1, \dots, p-1\}}$., entonces $k \geq 3$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, 0) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - p^{k-1}s_2 \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{3_{1_{2_1}}}) \quad s_0 = 0.$$

$$r_{3_{1_{2_2}}}) \quad s_0 \neq 0.$$

$r_{3_{1_{2_1}}}$) supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Entonces

$$I = (0, p^{k-1}s_2, 0, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{ (p^m u, p^{k-1}s_2[x + py + pv], p^l w, p^r N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p \}$$

donde $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^m, p^{k-1}s_2, p^l, p^r) \{ (u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - v \in p\mathbb{Z}_p \}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 3$, $l \geq 3$, $r \geq 3$ y $s_2 \in \{1, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{1_{2_2}}}$) supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, 0, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{ (p^{m-1}s_0[x + pu], p^{k-1}s_2M, p^l w, p^r N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p \}$$

donde $M = x + py + pv$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^l, p^r) \{ (u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u, t - v \in p\mathbb{Z}_p \}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 3$, $l \geq 3$, $r \geq 3$ y $s_0, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{1_3}}$) supongamos que $\underline{s_1 \neq 0 \text{ y } s_2 \in \{0, \dots, p-1\}}$, entonces $k \geq 4$. Además, llamemos $A = s_1 + ps_2$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-2}A, 0) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - p^{k-2}A \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{3_{13_1}}) \quad s_0 = 0.$$

$$r_{3_{13_2}}) \quad s_0 \neq 0.$$

$r_{3_{13_1}}$) supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Entonces

$$I = (0, p^{k-2}A, 0, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, p^{k-2}AM, p^l w, p^r N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2v$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^m, p^{k-2}A, p^l, p^r) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - v \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 4$, $l \geq 3$, $r \geq 3$, $s_1 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{13_2}}$) supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, p^{k-2}A, 0, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m s_0[x + pu], p^{k-2}AM, p^l w, p^r N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2v$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^{m-1}s_0, p^{k-2}A, p^l, p^r) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u \in p\mathbb{Z}_p, t - v \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 4$, $l \geq 3$, $r \geq 3$, $s_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.

r_{3_2}) supongamos que $\underbrace{s_3 = 0 = s_4, s_5 \in \{1, \dots, p-1\}}$, de aquí $l \geq 4$ Sustituyendo en α , tene-

mos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), p^{l-1}s_5) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{k-2}(s_1 + ps_2) - p^{l-1}s_5 \in p^2\mathbb{Z}_p.$$

En consecuencia, tenemos los siguientes casos:

$$r_{3_{2_1}}) \quad s_1 = 0 = s_2.$$

$r_{3_{2_2}})$ $s_1 = 0$ y $s_2 \in \{1, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{2_3}})$ $s_1 \neq 0$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{2_1}})$ supongamos que $\underline{s_1 = 0 = s_2}$, entonces $k \geq 2$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, 0, p^{l-1}s_5) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - 0 \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$r_{3_{2_{1_1}}})$ $s_0 = 0$.

$r_{3_{2_{1_2}}})$ $s_0 \neq 0$.

$r_{3_{2_{1_1}}})$ supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Entonces

$$I = (0, 0, p^{l-1}s_5, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^mu, p^kv, p^{l-1}s_5M, p^rN) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + pw$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^m, p^k, p^{l-1}s_5, p^r) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - w \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 2$, $l \geq 4$, $r \geq 3$ y $s_5 \in \{1, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{2_{1_2}}})$ supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, 0, p^{l-1}s_5, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0[x + pu], p^kv, p^{l-1}s_5M, p^rN) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + pw$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^{m-1}s_0, p^k, p^{l-1}s_5, p^r) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - u, t - w \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 2$, $l \geq 4$, $r \geq 3$ y $s_0, s_5 \in \{1, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{2_2}})$ supongamos que $\underline{s_1 = 0}$ y $s_2 \in \{1, \dots, p-1\}$., entonces $k \geq 3$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^{l-1}s_5) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - p^{k-1}s_2 \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{3_{22_1}}) \ s_0 = 0.$$

$$r_{3_{22_2}}) \ s_0 \neq 0.$$

$r_{3_{22_1}}$) supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Entonces

$$I = (0, p^{k-1}s_2, p^{l-1}s_5, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, p^{k-1}s_2[x + py + pv], p^{l-1}s_5 M, p^r N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + pw$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^m, p^{k-1}s_2, p^{l-1}s_5, p^r) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v, t - w \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 3$, $l \geq 4$, $r \geq 3$ y $s_2, s_5 \in \{1, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{22_2}}$) supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^{l-1}s_5, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0[x + pu], p^{k-1}s_2L, p^{l-1}s_5M, p^rN) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $L = x + py + pv$, $M = x + py + p^2z + pw$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^{l-1}s_5, p^r) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u, w - v, t - w \in p\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 3$, $l \geq 4$, $r \geq 3$ y $s_0, s_2, s_5 \in \{1, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{23}}$) supongamos que $\underline{s_1 \neq 0}$ y $\underline{s_2 \in \{0, \dots, p-1\}}$., entonces $k \geq 4$. Llamemos $A = s_1 + ps_2$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-2}A, p^{l-1}s_5) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - p^{k-1}A \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{3_{23_1}}) \ s_0 = 0.$$

$$r_{3_{23_2}}) \ s_0 \neq 0.$$

$r_{3_{2_{3_1}}}$) supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Entonces

$$I = (0, p^{k-2}A, p^{l-1}s_5, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, p^{k-2}A[x + py + p^2v], p^{l-1}s_5M, p^rN) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + pw$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^m, p^{k-2}A, p^{l-1}s_5, p^r) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v \in p\mathbb{Z}_p, t - v \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 4$, $l \geq 4$, $r \geq 3$, $s_1, s_5 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{2_{3_2}}}$) supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, p^{k-2}A, p^{l-1}s_5, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0[x + pu], p^{k-2}AL, p^{l-1}s_5M, p^rN) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $L = x + py + p^2v$, $M = x + py + p^2z + pw$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^{m-1}s_0, p^{k-2}A, p^{l-1}s_5, p^r) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u, w - v \in p\mathbb{Z}_p, t - v \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 4$, $l \geq 4$, $r \geq 3$, $s_0, s_1, s_5 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$.

r_{3_3}) supongamos que $\underline{s_3 = 0, s_4 \neq 0, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}}$, de aquí $l \geq 5$. LLamemos $B = s_4 +$

ps_5 Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), p^{l-2}B) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{k-2}(s_1 + ps_2) - p^{l-2}B \in p^2\mathbb{Z}_p.$$

En consecuencia, tenemos los siguientes casos:

$$r_{3_{3_1}}) \quad s_1 = 0 = s_2.$$

$$r_{3_{3_2}}) \quad s_1 = 0 \text{ y } s_2 \in \{1, \dots, p-1\}.$$

$$r_{3_{3_3}}) \quad s_1 \neq 0 \text{ y } s_2 \in \{0, \dots, p-1\}.$$

$r_{3_{3_1}}$) supongamos que $\underline{s_1 = 0 = s_2}$, entonces $k \geq 2$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, 0, p^{l-2}B) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - 0 \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{3_{3_{1_1}}}) \quad s_0 = 0.$$

$$r_{3_{3_{1_2}}}) \quad s_0 \neq 0.$$

$r_{3_{3_{1_1}}})$ supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Entonces

$$I = (0, 0, p^{l-2}B, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^mu, p^kv, p^{l-2}BM, p^rN) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + p^2w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^m, p^k, p^{l-2}B, p^r) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 2$, $l \geq 5$, $r \geq 3$, $s_4 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{3_{1_2}}})$ supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, 0, p^{l-2}B, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0[x + pu], p^kv, p^{l-2}BM, p^rN) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + p^2w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^{m-1}s_0, p^k, p^{l-2}B, p^r) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - u \in p\mathbb{Z}_p, t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 2$, $l \geq 5$, $r \geq 3$, $s_0, s_4 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{3_2}})$ supongamos que $\underline{s_1 = 0}$ y $s_2 \in \{1, \dots, p-1\}$., entonces $k \geq 3$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^{l-2}B) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - p^{k-1}s_2 \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{3_{3_{2_1}}}) \ s_0 = 0.$$

$$r_{3_{3_{2_2}}}) \ s_0 \neq 0.$$

$r_{3_{3_{2_1}}})$ supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Entonces

$$I = (0, p^{k-1}s_2, p^{l-2}B, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, p^{k-1}s_2[x + py + pv], p^{l-2}BM, p^r N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + p^2w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^m, p^{k-1}s_2, p^{l-2}B, p^r) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v \in p\mathbb{Z}_p, t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 3$, $l \geq 5$, $r \geq 3$, $s_2, s_4 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{3_{2_2}}})$ supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^{l-2}B, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0[x + pu], p^{k-1}s_2L, p^{l-2}BM, p^r N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $L = x + py + pv$, $M = x + py + p^2z + p^2w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^{l-2}B, p^r) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u, w - v \in p\mathbb{Z}_p, t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 3$, $l \geq 5$, $r \geq 3$, $s_0, s_2, s_4 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{3_3}})$ supongamos que $\underline{s_1 \neq 0}$ y $\underline{s_2 \in \{0, \dots, p-1\}}$., entonces $k \geq 4$. Llamemos $A = s_1 + ps_2$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-2}A, p^{l-2}B) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - p^{k-2}A \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{3_{3_{3_1}}}) \ s_0 = 0.$$

$$r_{3_{3_{3_2}}}) \ s_0 \neq 0.$$

$r_{3_{3_1}}$) supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Entonces

$$I = (0, p^{k-2}A, p^{l-2}B, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, p^{k-2}A[x + py + p^2v], p^{l-2}BM, p^r N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + p^2w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^m, p^{k-2}A, p^{l-2}B, p^r) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v, t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 4$, $l \geq 5$, $r \geq 3$, $s_1, s_4 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{3_2}}$) supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, p^{k-2}A, p^{l-2}B, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0[x + pu], p^{k-2}AL, p^{l-2}BM, p^r N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $L = x + py + p^2v$, $M = x + py + p^2z + p^2w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^{m-1}s_0, p^{k-2}A, p^{l-2}B, p^r) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u, w - v, t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 4$, $l \geq 5$, $r \geq 3$, $s_0, s_1, s_4 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

r_{3_4}) supongamos que $\underline{s_3 \neq 0, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}}$, de aquí $l \geq 6$. LLamemos $B = s_3 +$

$ps_4 + p^2s_5$ Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), p^{l-3}B) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{k-2}(s_1 + ps_2) - p^{l-3}B \in p^2\mathbb{Z}_p.$$

En consecuencia, tenemos los siguientes casos:

$$r_{3_{4_1}}) \quad s_1 = 0 = s_2.$$

$$r_{3_{4_2}}) \quad s_1 = 0 \text{ y } s_2 \in \{1, \dots, p-1\}.$$

$$r_{3_{4_3}}) \quad s_1 \neq 0 \text{ y } s_2 \in \{0, \dots, p-1\}.$$

$r_{3_{4_1}}$) supongamos que $\underline{s_1 = 0 = s_2}$, entonces $k \geq 2$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, 0, p^{l-3}B) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - 0 \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{3_{4_{1_1}}}) \quad s_0 = 0.$$

$$r_{3_{4_{1_2}}}) \quad s_0 \neq 0.$$

$r_{3_{4_{1_1}}}$) supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Entonces

$$I = (0, 0, p^{l-3}B, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, p^k v, p^{l-3}BM, p^r N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + p^3w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^m, p^k, p^{l-3}B, p^r) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - w \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 2$, $l \geq 6$, $r \geq 3$, $s_3 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{4_{1_2}}}$) supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, 0, p^{l-3}B, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0[x + pu], p^k v, p^{l-3}BM, p^r N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + p^3w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^{m-1}s_0, p^k, p^{l-3}B, p^r) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - u \in p\mathbb{Z}_p, t - w \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 2$, $l \geq 6$, $r \geq 3$, $s_0, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{4_2}}$) supongamos que $\underline{s_1 = 0}$ y $s_2 \in \{1, \dots, p-1\}$., entonces $k \geq 3$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^{l-3}B) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - p^{k-1}s_2 \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{3_{4_{2_1}}}) \ s_0 = 0.$$

$$r_{3_{4_{2_2}}}) \ s_0 \neq 0.$$

$r_{3_{4_{2_1}}})$ supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Entonces

$$I = (0, p^{k-1}s_2, p^{l-3}B, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, p^{k-1}s_2[x + py + pv], p^{l-3}BM, p^r N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + p^3w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^m, p^{k-1}s_2, p^{l-3}B, p^r) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v \in p\mathbb{Z}_p, t - w \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 3$, $l \geq 6$, $r \geq 3$, $s_2, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{4_{2_2}}})$ supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^{l-3}B, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0[x + pu], p^{k-1}s_2L, p^{l-3}BM, p^r N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $L = x + py + pv$, $M = x + py + p^2z + p^3w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^{m-1}s_0, p^{k-1}s_2, p^{l-3}B, p^r) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u, w - v \in p\mathbb{Z}_p, t - w \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 2$, $k \geq 3$, $l \geq 6$, $r \geq 3$, $s_0, s_2, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{4_3}})$ supongamos que $\underline{s_1 \neq 0 \text{ y } s_2 \in \{0, \dots, p-1\}}$, entonces $k \geq 4$. Llamemos $A = s_1 + ps_2$. Sustituyendo en α , tenemos que

$$(p^{m-1}s_0, p^{k-2}A, p^{l-3}B) \in B_p(C_{p^2}),$$

con lo que

$$p^{m-1}s_0 - p^{k-2}A \in p\mathbb{Z}_p.$$

Así, se dan los siguientes casos:

$$r_{3_{4_{3_1}}}) \ s_0 = 0.$$

$$r_{3_{4_{3_2}}}) \ s_0 \neq 0.$$

$r_{3_{4_{3_1}}}$) supongamos que $\underline{s_0 = 0}$, con lo cual $m \geq 1$. Entonces

$$I = (0, p^{k-2}A, p^{l-3}B, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^m u, p^{k-2}A[x + py + p^2v], p^{l-3}BM, p^r N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $M = x + py + p^2z + p^3w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^m, p^{k-2}A, p^{l-3}B, p^r) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v \in p^2\mathbb{Z}_p, t - w \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

con $m \geq 1$, $k \geq 4$, $l \geq 6$, $r \geq 3$, $s_1, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

$r_{3_{4_{3_2}}}$) supongamos que $\underline{s_0 \neq 0}$, con lo cual $m \geq 2$. Entonces

$$I = (p^{m-1}s_0, p^{k-2}A, p^{l-3}B, p^r) B_p(C_{p^3}) + (p^m\mathbb{Z}_p, p^k\mathbb{Z}_p, p^l\mathbb{Z}_p, 0)$$

$$= \{(p^{m-1}s_0[x + pu], p^{k-2}AL, p^{l-3}BM, p^r N) \in \mathbb{Z}_p^4 : x, y, z, u, v, w, t \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $L = x + py + p^2v$, $M = x + py + p^2z + p^3w$ y $N = x + py + p^2z + p^3t$.

$$= (p^{m-1}s_0, p^{k-2}A, p^{l-3}B, p^r) B_p(C_{p^3})$$

con $m \geq 2$, $k \geq 4$, $l \geq 6$, $r \geq 3$, $s_0, s_1, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

En resumen, los ideales de la forma $I = (\alpha, p^r)B_p(C_{p^3}) + (J, 0)$ con

$$\alpha = (p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), p^{l-3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5))$$

$$J = (p^m, p^k, p^l) \mathbb{Z}_p^3.$$

Se pueden reescribir en:

$$(p^m s_0, p^k(s_1 + ps_2), p^l(s_3 + ps_4 + p^2s_5), p^r) J' \text{ con: } J' =$$

1) $B_p(C_{p^3})$

- $m \geq 1$, $k \geq 2$, $l \geq 3$, $r \geq 3$, $s_0, s_1, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.
- $m \geq 1$, $k \geq 2$, $l = r = 2$, $s_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}$, $s_3 = 1$ y $s_2, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.
- $m \geq 1$, $k = l = r = 1$, $s_0 \in \{1, \dots, p-1\}$, $s_1 = s_3 = 1$ y $s_2, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$, $s_4 = 0$.
- $m = k = l = r = 1$, $s_0 = s_1 = s_3 = 1$ y $s_2 = s_4 = s_5 = 0$.

- 2) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v \in p^2\mathbb{Z}_p, t - w \in p^3\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3, s_0 = 1; s_1, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_0 = s_3 = 1; s_1 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.
 - $m \geq 1, k = l = r = 1, s_0 = s_1 = s_3 = 1$ y $s_2, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_4 = 0$.
- 3) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u, w - v \in p\mathbb{Z}_p, t - w \in p^3\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3, s_0, s_2, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_1 = 0$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_0, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_1 = 0, s_3 = 1$.
 - $m \geq 1, k = l = r = 1, s_0 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_1 = s_3 = 1, s_2 = s_4 = 0$.
- 4) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v \in p\mathbb{Z}_p, t - w \in p^3\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3, s_0 = 1; s_2, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_1 = 0$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_1 = 0, s_0 = s_3 = 1$.
 - $m \geq 1, k = l = r = 1, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_0 = s_1 = s_3 = 1, s_2 = s_4 = 0$.
- 5) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - u \in p\mathbb{Z}_p, t - w \in p^3\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_1 = 1, s_2 = 0$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_0 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_1 = s_3 = 1, s_2 = 0$.
- 6) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - w \in p^3\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_3 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_0 = s_1 = 1, s_2 = 0$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_0 = s_1 = s_3 = 1, s_2 = 0$.
- 7) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u \in p\mathbb{Z}_p, w - v, t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0, s_1, s_4 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_3 = 0$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_3 = 1, s_4 = 0$.
 - $m \geq 1, k = l = r = 1, s_0 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_1 = s_3 = 1, s_4 = s_5 = 0$.
- 8) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v, t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_1, s_4 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_0 = 1, s_3 = 0$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_0 = s_3 = 1, s_4 = 0$.
 - $m \geq 1, k = l = r = 1, s_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_0 = s_1 = s_3 = 1, s_4 = s_5 = 0$.
- 9) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u, w - v \in p\mathbb{Z}_p, t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0, s_2, s_4 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_1 = s_3 = 0$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_0, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_1 = s_4 = 0, s_3 = 1$.
 - $m \geq 1, k = l = r = 1, s_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_1 = s_3 = 1, s_2 = s_4 = s_5 = 0$.
- 10) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v \in p\mathbb{Z}_p, t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_2, s_4 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_1 = s_3 = 0, s_0 = 1$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_1 = s_4 = 0, s_0 = s_3 = 1$.
 - $m \geq 1, k = l = r = 1, s_0 = s_1 = s_3 = 1, s_2 = s_4 = s_5 = 0$.
- 11) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - u \in p\mathbb{Z}_p, t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0, s_4 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_1 = s_2 = s_3 = 0$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_2 = s_4 = 0, s_1 = s_3 = 1$.
- 12) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_4 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_2 = s_3 = 0, s_1 = s_0 = 1$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_2 = s_4 = 0, s_0 = s_1 = s_3 = 1$.
- 13) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u, w - v, t - w \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_2, s_0, s_5 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_1 = s_3 = s_4 = 0$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_0, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}, s_1 = s_4 = s_5 = 0, s_3 = 1$.
- 14) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v, t - w \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_2, s_5 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_1 = s_3 = s_4 = 0, s_0 = 1$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}, s_1 = s_4 = s_5 = 0, s_0 = s_3 = 1$.
- 15) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - u, t - w \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0, s_5 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2 = s_3 = s_4 = 0, s_1 = 1$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_1 = s_3 = 1$.

- 16) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - w \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_5 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2 = s_3 = s_4 = 0, s_0 = s_1 = 1$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_0 = s_1 = s_3 = 1$.
- 17) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u, w - v \in p\mathbb{Z}_p, t - v \in p^2\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0, s_1, s_5 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_4 = s_3 = 0$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_5 = s_4 = 0, s_3 = 1$.
- 18) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : w - v \in p\mathbb{Z}_p, t - v \in p^2\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_1, s_5 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_4 = s_3 = 0, s_0 = 1$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_5 = s_4 = 0, s_0 = s_3 = 1$.
- 19) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u \in p\mathbb{Z}_p, t - v \in p^2\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_1, s_0 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_4 = s_5 = 0, s_3 = 1$.
- 20) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - v \in p^2\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_1 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_4 = s_5 = 0, s_0 = s_3 = 1$.
- 21) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - u, t - v \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_1 = s_4 = s_5 = 0, s_3 = 1$.
- 22) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - v \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_2 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_1 = s_4 = s_5 = 0, s_0 = s_3 = 1$.
- 23) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : t - u \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_2 = s_4 = s_5 = 0, s_1 = s_3 = 1$.
- 24) $\mathbb{Z}_p^4$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0 = s_1 = s_3 = 1, s_2 = s_4 = s_5 = 0$.

Ahora, si consideremos el caso $J = (p^m, p^k \mathbf{w}_0, p^l) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 | v - u \in p\mathbb{Z}_p\}$, mediante un argumento similar al hecho anteriormente, podemos tomar α de la siguiente forma:

$$\alpha = (p^m s_0, p^{k-1} \mathbf{w}_0(s_1 + ps_2), p^{l-3}(s_3 + ps_4 + p^2 s_5)),$$

donde $s_i \in \{0, \dots, p-1\}$ para $i = 1, \dots, 5$.

De esta manera, los ideales para este J son de la siguiente forma:

$$I = (p^m s_0, p^{k-1} \mathbf{w}_0 A, p^{l-3} B, p^r) B_p(C_{p^3}) + \\ \{(p^m u, p^k \mathbf{w}_0(u + pv), p^l w, 0) \in \mathbb{Z}_p^4 : u, v, w \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $A = s_1 + ps_2$ y $B = s_3 + ps_4 + p^2 s_5$.

Luego, al ver que

$$g_1(\alpha) \equiv p^r \pmod{p^3 \mathbb{Z}_p},$$

se tiene que, los ideales se pueden reescribir en:

$$(p^m, p^k \mathbf{w}_0, p^l(s_3 + ps_4 + p^2 s_5)[\mathbf{w}_1 + p\mathbf{w}_2]^{-1}, p^r[\mathbf{w}_3 + p\mathbf{w}_4]^{-1}) J' \text{ con: } J' =$$

$$25) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pu - v + t \in p^2 \mathbb{Z}_p, t - w \in p^3 \mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3, s_3, \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5, \mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_3$ y $\mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_2$.
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_3 = 1; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5, \mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_2$.
- $m \geq 1, k = l = r = 1, s_3 = 1, s_4 = 0; \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_5, \mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_0^{-1}$ y $\mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_2$.

$$26) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u - v + t \in p \mathbb{Z}_p, t - w \in p^3 \mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3, s_3, \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_2 = 0$ y $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_3$.
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_3 = 1; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_4 = 0$ y $\mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_1$.

$$27) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u - v \in p \mathbb{Z}_p, t - w \in p^3 \mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3, s_3, \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_2 = 0$ y $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_3 = 1$.
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_4 = 0$ y $\mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_1 = s_3 = 1$.

$$28) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pu - v + t, t - w \in p^2 \mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3, s_3, \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, \mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_5 = 0, \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_3$ y $\mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_2$.
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_3 = 1; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, \mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_5 = 0, \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_2$.
- $m \geq 1, k = l = r = 1, s_3 = 1, s_4 = 0 = s_5; \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_0^{-1}$ y $\mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_2$.

$$29) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u - v + t \in p \mathbb{Z}_p, t - w \in p^2 \mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3, s_3, \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_2 = 0 = s_5 \text{ y } \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_3.$
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_3 = 1; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_4 = 0 = s_5 \text{ y } \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_1.$

30) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u - v \in p\mathbb{Z}_p, t - w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3, s_3, \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_2 = 0 = s_5 \text{ y } \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_3 = 1.$
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_4 = 0 = s_5 \text{ y } \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_1 = s_3 = 1.$

31) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pu - v + t \in p^2\mathbb{Z}_p, t - w \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_3, \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_4 = 0 = s_5, \mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_2 \text{ y } \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_3.$
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_3 = 1; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_4 = 0 = s_5, \mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_2 \text{ y } \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_3.$

32) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u - v + t, t - w \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_3, \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 = \mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_2 = 0 = s_5 \text{ y } \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_3.$
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; s_3 = 1, \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_4 = 0 = s_5 = s_4 \text{ y } \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_1.$

33) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u - v, t - w \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_3, \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 = \mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_2 = 0 = s_5 \text{ y } \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_3 = 1.$
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_4 = 0 = s_5 = s_4 \text{ y } \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_1 = s_3 = 1.$

34) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pu - v + t \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_3 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 = 0 = s_5 = \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4 \in \{0, \dots, p-1\} \text{ y } \mathbf{w}_1 = s_3 = 1.$

35) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u - v + t \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_3 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 = \mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_2 = 0 = s_5 \text{ y } \mathbf{w}_1 = s_3 = 1.$

36) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u - v \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 = \mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_2 = 0 = s_5 \text{ y } \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_3 = 1 = s_3.$

Ahora, si consideremos el caso $J = (p^m \mathbf{w}_0, p^k, p^l) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 \mid w - u \in p\mathbb{Z}_p\}$, mediante un argumento similar al hecho anteriormente, podemos tomar α de la siguiente forma:

$$\alpha = (p^m s_0 \mathbf{w}_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), p^{l-2}(s_3 + ps_4 + p^2 s_5)),$$

donde $s_i \in \{0, \dots, p-1\}$ para $i = 1, \dots, 5$.

De esta manera, los ideales para este J son de la siguiente forma:

$$I = (p^m s_0 \mathbf{w}_0, p^{k-2}A, p^{l-2}B, p^r) B_p(C_{p^3}) + \{(p^m \mathbf{w}_0 u, p^k v, p^l(u + pw), 0) \in \mathbb{Z}_p^4 : u, v, w \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $A = s_1 + ps_2$ y $B = s_3 + ps_4 + p^2 s_5$.

Luego, al ver que

$$g_1(\alpha) \equiv p^r \pmod{p^3 \mathbb{Z}_p},$$

se tiene que, los ideales se pueden reescribir en:

$$(p^m \mathbf{w}_0, p^k(s_1 + ps_2)[s_3 + ps_4 + p^2 \mathbf{w}_1]^{-1}, p^l, p^r[s_6 + ps_7 + p^2 \mathbf{w}_2]^{-1}) J' \text{ con: } J' =$$

$$37) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : p^2 u - w + t \in p^3 \mathbb{Z}_p, t - v \in p^2 \mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_3, \mathbf{w}_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_2, \mathbf{w}_1 \in \{0, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2, s_6 = s_3 \text{ y } s_7 = s_4.$
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_3 = 1; \mathbf{w}_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_2, \mathbf{w}_1 \in \{0, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2, s_6 = s_3 \text{ y } s_7 = s_4.$
- $m \geq 1, k = l = r = 1, s_3 = 1 = s_1, s_4 = 0 = s_7; \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_2, \mathbf{w}_1 \in \{0, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 \text{ y } s_3 = s_6.$

$$38) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : p^2 u - w + t \in p^3 \mathbb{Z}_p, t - v \in p \mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_3, \mathbf{w}_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, \mathbf{w}_1 \in \{0, \dots, p-1\}, s_2 = 0, \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2, s_6 = s_3 \text{ y } s_7 = s_4.$
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_3 = 1; \mathbf{w}_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, \mathbf{w}_1 \in \{0, \dots, p-1\}, s_2 = 0, \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2, s_6 = s_3 \text{ y } s_7 = s_4.$
- $m \geq 1, k = l = r = 1, s_3 = 1 = s_1, s_4 = 0 = s_7 = s_2; \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_1 \in \{0, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 \text{ y } s_3 = s_6.$

$$39) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : p^2 u - w + t \in p^3 \mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, s_6 \in \{1, \dots, p-1\}, s_7, \mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_2 = 0 = \mathbf{w}_1 = s_4 \text{ y } s_3 = s_1 = 1.$
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_6 = 1 = s_3 = s_1; \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_7, \mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\} \text{ y } s_2 = 0 = \mathbf{w}_1 = s_4.$

- 40) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pu - w + t, t - v \in p^2\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_3, \mathbf{w}_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_6 = s_3, \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 = 0 \text{ y } s_4 = s_7.$
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; s_3 = 1; \mathbf{w}_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_6 = s_3, \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 = 0 \text{ y } s_4 = s_7.$
- 41) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pu - w + t \in p^2\mathbb{Z}_p, t - v \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_3, \mathbf{w}_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}, s_2 = 0 = \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2, s_6 = s_3 \text{ y } s_7 = s_4.$
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_3 = 1 = s_6; \mathbf{w}_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}, s_2 = 0 = \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 \text{ y } s_7 = s_4.$
- 42) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pu - w + t \in p^2\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, s_6 \in \{1, \dots, p-1\}, s_7 \in \{0, \dots, p-1\}, s_2 = 0 = \mathbf{w}_1 = s_4 = \mathbf{w}_2 \text{ y } s_3 = s_1 = 1.$
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_7 \in \{0, \dots, p-1\}, s_2 = 0 = \mathbf{w}_1 = s_4 = \mathbf{w}_2 \text{ y } s_3 = s_1 = 1 = s_6.$
- 43) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u - w + t \in p\mathbb{Z}_p, t - v \in p^2\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_3, \mathbf{w}_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_4 = s_7 = 0 = \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 \text{ y } s_6 = s_3.$
- 44) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u - w \in p\mathbb{Z}_p, t - v \in p^2\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_4 = s_7 = 0 = \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 \text{ y } s_6 = s_3 = 1.$
- 45) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u - w + t, t - v \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, s_1, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 = s_7 = s_2 = 0 = \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 \text{ y } s_6 = s_3.$
- 46) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u - w, t - v \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 = s_7 = s_2 = 0 = \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 \text{ y } s_6 = s_3 = 1.$
- 47) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u - w + t \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, s_6 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 = s_7 = s_2 = 0 = \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 \text{ y } s_1 = s_3 = 1.$
- 48) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u - w \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 = s_7 = s_2 = 0 = \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 \text{ y } s_1 = s_3 = 1 = s_6.$

Ahora, si consideremos el caso $J = (p^m, p^k \mathbf{w}_0, p^l) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 : w - v \in p\mathbb{Z}_p\}$, mediante un argumento similar al hecho anteriormente, podemos tomar α de la siguiente forma:

$$\alpha = (p^{m-1} s_0, p^{k-1} \mathbf{w}_0(s_1 + ps_2), p^{l-2}(s_3 + ps_4 + p^2 s_5)),$$

donde $s_i \in \{0, \dots, p-1\}$ para $i = 1, \dots, 5$.

De esta manera, los ideales para este J son de la siguiente forma:

$$I = (p^{m-1} s_0, p^{k-1} \mathbf{w}_0 A, p^{l-2} B, p^r) B_p(C_{p^3}) + \{(p^m u, p^k \mathbf{w}_0 v, p^l(v + pw), 0) \in \mathbb{Z}_p^4 : u, v, w \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $A = s_1 + ps_2$ y $B = s_3 + ps_4 + p^2 s_5$.

Luego, al ver que

$$g_1(\alpha) \equiv p^r \pmod{p^3 \mathbb{Z}_p},$$

se tiene que, los ideales se pueden reescribir en:

$$(p^m s_0, p^k[s_1 + ps], p^l \mathbf{w}_0[s_1 + ps], p^r[(s_2 - s_3) + ps_4 + p^2 s_5]^{-1}) J' \text{ con: } J' =$$

$$49) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pv - w + t \in p^3 \mathbb{Z}_p; v - \mathbf{w}_1 t, t - u \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0, \mathbf{w}_0, s_2, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_1 = 1$ y $s = s_3 = 0$.
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; s_0, \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_2 = s_1 = 1$ y $s = s_3 = 0$.
- $m \geq 1, k = l = r = 1, s_0, \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_2 = s_1 = 1, s = s_3 = 0$ y $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_0^{-1}$.

$$50) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pv - w + t \in p^3 \mathbb{Z}_p; v - \mathbf{w}_1 t \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, s_2, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_0 = s_1 = 1$ y $s = s_3 = 0$.
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_0 = s_1 = 1 = s_2$ y $s = s_3 = 0$.
- $m \geq 1, k = l = r = 1, \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_2 = s_1 = s_0 = 1, s = s_3 = 0, s_4 = -\mathbf{w}_0^{-1}$ y $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_0^{-1}$.

$$51) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : p^2 v - w + t \in p^3 \mathbb{Z}_p; t - u \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0, \mathbf{w}_0, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_1 = 1$ y $s = s_3 = 0$.
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; s_0, \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_2 = s_1 = 1$ y $s = s_3 = 0$.

- 52) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : p^2v - w + t \in p^3\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_0 = s_1 = 1 \text{ y } s = s_3 = 0.$
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_0 = s_1 = 1 = s_2 \text{ y } s = s_3 = 0.$
- 53) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w \in p^2\mathbb{Z}_p; v - t, t - u \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0, \mathbf{w}_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s \in \{0, \dots, p-1\}, s_2 = 1 \text{ y } s_3 = s_4 = s_5 = 0.$
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; s_0, \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s \in \{0, \dots, p-1\}, s_2 = s_1 = 1 \text{ y } s_3 = s_4 = s_5 = 0.$
- 54) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w + pt \in p^2\mathbb{Z}_p; v - \mathbf{w}_1t, t - u \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0, \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_3 \in \{0, \dots, p-1\} - s_2, s = s_4 = s_5 = 0, s_1 = 1 \text{ y } \mathbf{w}_1 = s_6(s_2 - s_3)^{-1} \text{ con } s_6 \in \{1, \dots, p-1\}.$
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; s_0, \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_3 \in \{0, \dots, p-1\} - s_2, s = s_4 = s_5 = 0, s_1 = 1 \text{ y } \mathbf{w}_1 = (s_2 - s_3)^{-1}.$
- 55) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w + t \in p^2\mathbb{Z}_p; v - \mathbf{w}_1t, t - u \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0, \mathbf{w}_0, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}, s_3 \in \{1, \dots, p-1\} - s_2, s_4 \in \{0, \dots, p-1\} - s_2, s_1 = 1, s = s_5 = 0 \text{ y } \mathbf{w}_1 = s_3(s_2 - s_3)^{-1}. \text{ Observación } \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-2\}.$
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; s_0, \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_3 \in \{2, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\} - s_2, s = s_5 = 0 \text{ y } \mathbf{w}_1 = s_3(1 - s_3)^{-1}. \text{ Observación } \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-2\}.$
- 56) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w \in p^2\mathbb{Z}_p; v - t \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s \in \{0, \dots, p-1\}, s_0 = s_2 = 1 \text{ y } s_3 = s_4 = s_5 = 0.$
 - $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s \in \{0, \dots, p-1\}, s_0 = s_1 = s_2 = 1 \text{ y } s_3 = s_4 = s_5 = 0.$
- 57) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w + pt \in p^2\mathbb{Z}_p; v - \mathbf{w}_1t \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_3 \in \{0, \dots, p-1\} - s_2, s = s_4 = s_5 = 0, s_0 = s_1 = 1 \text{ y } \mathbf{w}_1 = s_6(s_2 - s_3)^{-1} \text{ con } s_6 \in \{1, \dots, p-1\}.$
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_3 \in \{0, \dots, p-1\} - s_2, s = s_4 = s_5 = 0, s_0 = s_1 = 1 \text{ y } \mathbf{w}_1 = (s_2 - s_3)^{-1}.$
- 58) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w + t \in p^2\mathbb{Z}_p; v - \mathbf{w}_1w \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}, s_3 \in \{1, \dots, p-1\} - s_2, s_4 \in \{0, \dots, p-1\} - s_2, s_0 = s_1 = 1, s = s_5 = 0 \text{ y } \mathbf{w}_1 = s_3(s_2 - s_3)^{-1}. \text{ Observación } \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-2\}.$

- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_3 \in \{2, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}$
 $s_0 = s_1 = s_2 = 1, s = s_5 = 0$ y $\mathbf{w}_1 = s_3(1 - s_3)^{-1}$. Observación $\mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-2\}$.

59) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pv - w + t \in p^2\mathbb{Z}_p; t - u \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0, \mathbf{w}_0, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}, s_1 = 1$ y
 $s = s_3 = s_5 = 0$.
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; s_0, \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}, s_1 = s_2 = 1$ y
 $s = s_3 = s_5 = 0$.

60) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pv - w + t \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}, s_0 = s_1 = 1$
y $s = s_3 = s_5 = 0$.
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}, s_0 = s_1 = s_2 = 1$ y
 $s = s_3 = s_5 = 0$.

61) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pw - v + t \in p^2\mathbb{Z}_p; t - u \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0, \mathbf{w}_0, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}, s_1 = 1$ y
 $s = s_3 = s_5 = 0$.

62) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pw - v + t \in p^2\mathbb{Z}_p\}$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}, s_0 = s_1 = 1$
y $s = s_3 = s_5 = 0$.

63) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w + t; t - u \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0, \mathbf{w}_0, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}, s_1 = 1$ y $s = s_3 = s_4 = s_5 = 0$.

64) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w + t \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, s_2 \in \{1, \dots, p-1\}, s_0 = s_1 = 1$ y $s = s_3 = s_4 = s_5 = 0$.

65) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w; t - u \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0, \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_1 = s_2 = 1$ y $s = s_3 = s_4 = s_5 = 0$.

66) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w \in p\mathbb{Z}_p\}$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_0 = s_1 = s_2 = 1$ y $s = s_3 = s_4 = s_5 = 0$.

Ahora, si consideremos el caso

$$J = (p^m, p^k(\mathbf{w}_0 + p\mathbf{w}_1), p^l) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 : w - v \in p^2\mathbb{Z}_p\},$$

mediante un argumento similar al hecho anteriormente, podemos tomar α de la siguiente forma:

$$\alpha = (p^{m-1}s_0, p^k(\mathbf{w}_0 + p\mathbf{w}_1)(s_1 + ps_2), p^{l-1}(s_3 + ps_4 + p^2s_5)),$$

donde $s_i \in \{0, \dots, p-1\}$ para $i = 1, \dots, 5$.

De esta manera, los ideales para este J son de la siguiente forma:

$$I = (p^{m-1}s_0, p^k(\mathbf{w}_0 + p\mathbf{w}_1)A, p^{l-1}B, p^r) B_p(C_{p^3}) + \{(p^mu, p^k(\mathbf{w}_0 + p\mathbf{w}_1)v, p^l(v + p^2w), 0) \in \mathbb{Z}_p^4 : u, v, w \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $A = s_1 + ps_2$ y $B = s_3 + ps_4 + p^2s_5$.

Luego, al ver que

$$g_1(\alpha) \equiv p^r \pmod{p^3\mathbb{Z}_p},$$

se tiene que, los ideales se pueden reescribir en:

$$(p^ms_0[s_1 + ps_2 + p^2s_3]^{-1}, p^k(\mathbf{w}_0 + p\mathbf{w}_1), p^l, p^r[s_4 + ps_5 + p^2s_6]^{-1}) J' \text{ con: } J' =$$

$$67) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pv - w + t \in p^3\mathbb{Z}_p, t - u \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0, \mathbf{w}_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_2, s_3, \mathbf{w}_1 \in \{0, \dots, p-1\}, s_4 = s_1, s_5 = s_2 \text{ y } s_6 = s_3.$
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_1 = 1 = s_4; \mathbf{w}_0, s_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_2, s_3, \mathbf{w}_1 \in \{0, \dots, p-1\}, s_2 = s_5 \text{ y } s_3 = s_6.$

$$68) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pv - w + t \in p^3\mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0 = s_1 = 1, \mathbf{w}_0, s_4 \in \{1, \dots, p-1\}, s_5, s_6, \mathbf{w}_1 \in \{0, \dots, p-1\} \text{ y } s_2 = s_3 = 0.$
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2, s_0 = s_1 = s_4 = 1; \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, s_5, s_6, \mathbf{w}_1 \in \{0, \dots, p-1\} \text{ y } s_2 = s_3 = 0.$

$$69) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w + t \in p^2\mathbb{Z}_p, t - u \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0, \mathbf{w}_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_2, \mathbf{w}_1 \in \{0, \dots, p-1\}, s_4 = s_1, s_5 = s_2 \text{ y } s_6 = s_3 = 0.$

$$70) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w + pt \in p^2\mathbb{Z}_p, t - u \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0, \mathbf{w}_0, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_1 \in \{0, \dots, p-1\}, s_4 = s_1 \text{ y } s_5 = s_2 = s_6 = s_3 = 0.$

$$71) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w \in p^2\mathbb{Z}_p, t - u \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0, \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_1 \in \{0, \dots, p-1\}, s_4 = s_1 = 1 \text{ y } s_5 = s_2 = s_6 = s_3 = 0.$

$$72) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w + t \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0 = s_1 = 1, \mathbf{w}_0, s_4 \in \{1, \dots, p-1\}, s_5, \mathbf{w}_1 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_2 = s_3 = s_6 = 0$.

$$73) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w + pt \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0 = s_1 = 1, \mathbf{w}_0, s_4 \in \{1, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_1 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_2 = s_3 = s_6 = s_5 = 0$.

$$74) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; s_0 = s_1 = s_4 = 1, \mathbf{w}_0 \in \{1, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_1 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_2 = s_3 = s_6 = s_5 = 0$.

Ahora, si consideremos el caso

$$J = (p^m \mathbf{w}_0, p^k \mathbf{w}_1, p^l) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 : v - u, w - v \in p\mathbb{Z}_p\},$$

mediante un argumento similar al hecho anteriormente, podemos tomar α de la siguiente forma:

$$\alpha = (p^m \mathbf{w}_0 s_0, p^{k-1} \mathbf{w}_1 (s_1 + ps_2), p^{l-2} (s_3 + ps_4 + p^2 s_5)),$$

donde $s_i \in \{0, \dots, p-1\}$ para $i = 1, \dots, 5$.

De esta manera, los ideales para este J son de la siguiente forma:

$$I = (p^m \mathbf{w}_0 s_0, p^{k-1} \mathbf{w}_1 A, p^{l-2} B, p^r) B_p(C_{p^3}) + \{(p^m \mathbf{w}_0 u, p^k \mathbf{w}_1 (u + pv), p^l (u + pw), 0) \in \mathbb{Z}_p^4 : u, v, w \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $A = s_1 + ps_2$ y $B = s_3 + ps_4 + p^2 s_5$.

Luego, al ver que

$$g_1(\alpha) \equiv p^r \pmod{p^3\mathbb{Z}_p},$$

se tiene que, los ideales se pueden reescribir en:

$$(p^m \mathbf{w}_0, p^k \mathbf{w}_1, p^l, p^r [s_3 + ps_4 + p^2 s_5]^{-1}) J' \text{ con: } J' =$$

$$75) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : p^2 u - w + t \in p^3\mathbb{Z}_p, pu - v + (s_1 + ps_2)t \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_3, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_2, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_2, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_3 = 1$.
- $m \geq 1, k = l = r = 1; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_2, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_3 = 1, s_4 = 0$ y $s_1 = \mathbf{w}_1^{-1}$.

$$76) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : p^2 u - w + t \in p^3\mathbb{Z}_p, u - v + s_1 t \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_3, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.

- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_3 = 1$.
- 77) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : p^2u - w + t \in p^3\mathbb{Z}_p, u - v \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_3 = 1$.
- 78) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pu - w + t \in p^2\mathbb{Z}_p, pu - v + (s_1 + ps_2)t \in p^2\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_3, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_5 = 0$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_5 = 0$ y $s_3 = 1$.
- 79) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pu - w + t \in p^2\mathbb{Z}_p, u - v + s_1t \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_3, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_5 = 0$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}, s_5 = 0$ y $s_3 = 1$.
- 80) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pu - w + t \in p^2\mathbb{Z}_p, u - v \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_5 = 0$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}, s_5 = 0$ y $s_3 = 1$.
- 81) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u - w + s_1t \in p\mathbb{Z}_p, pu - v + t \in p^2\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_3, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_5 = 0$.
- 82) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u - w \in p\mathbb{Z}_p, pu - v + t \in p^2\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_5 = 0$.
- 83) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u - w + t \in p\mathbb{Z}_p, u - v \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_4 = s_5 = 0$.
- 84) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u - w \in p\mathbb{Z}_p, u - v \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_3 = 1$ y $s_4 = s_5 = 0$.
- 85) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u - w + s_1t \in p\mathbb{Z}_p, u - v + t \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_3, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_4 = s_5 = 0$.
- 86) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : u - w \in p\mathbb{Z}_p, u - v + t \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s_4 = s_5 = 0$.

Ahora, si consideremos el caso

$$J = (p^m \mathbf{w}_0, p^k(\mathbf{w}_1 + p\mathbf{w}_2), p^l) B_p(C_{p^2})$$

mediante un argumento similar al hecho anteriormente, podemos tomar α de la siguiente forma:

$$\alpha = (p^m \mathbf{w}_0 s_0, p^k(\mathbf{w}_1 + p\mathbf{w}_2)(s_1 + ps_2), p^{l-1}(s_3 + ps_4 + p^2 s_5)),$$

donde $s_i \in \{0, \dots, p-1\}$ para $i = 1, \dots, 5$.

De esta manera, los ideales para este J son de la siguiente forma:

$$I = (p^m \mathbf{w}_0 s_0, p^k(\mathbf{w}_1 + p\mathbf{w}_2)A, p^{l-1}B, p^r) B_p(C_{p^3}) + \\ \{(p^m \mathbf{w}_0 u, p^k(\mathbf{w}_1 + p\mathbf{w}_2)(u + pv), p^l(u + pv + p^2 w), 0) \in \mathbb{Z}_p^4 : u, v, w \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $A = s_1 + ps_2$ y $B = s_3 + ps_4 + p^2 s_5$.

Luego, al ver que

$$g_1(\alpha) \equiv p^r \pmod{p^3 \mathbb{Z}_p},$$

se tiene que, los ideales se pueden reescribir en:

$$(p^m \mathbf{w}_0, p^k(\mathbf{w}_1 + p\mathbf{w}_2), p^l, p^r[s_1 + ps_2 + p^2 s_3]^{-1}) J' \text{ con: } J' =$$

$$87) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pv - w + t \in p^3 \mathbb{Z}_p, pu - w + (1 + p\mathbf{w}_3)t \in p^2 \mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, s_2, s_3 \in \{0, \dots, p-1\}$.
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, s_2, s_3 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_1 = 1$.

$$88) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w + pt \in p^2 \mathbb{Z}_p, u - w \in p \mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_2 = s_3 = 0$.

$$89) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w \in p^2 \mathbb{Z}_p, u - w \in p \mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_1 = 1$ y $s_2 = s_3 = 0$.

$$90) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w + t \in p^2 \mathbb{Z}_p, u - w \in p \mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2, s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_3 = 0$.

$$91) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w \in p^2 \mathbb{Z}_p, u - w + t \in p \mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_2 = s_3 = 0$.

- 92) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w + pt \in p^2\mathbb{Z}_p, u - w + \mathbf{w}_3 t \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_2 = s_3 = 0$.

- 93) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w + t \in p^2\mathbb{Z}_p, u - w + \mathbf{w}_3 t \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_3 = 0$.

Ahora, si consideremos el caso

$$J = (p^m, p^k \mathbf{w}_0, p^l \mathbf{w}_1) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 : u - v + w \in p\mathbb{Z}_p\},$$

mediante un argumento similar al hecho anteriormente, podemos tomar α de la siguiente forma:

$$\alpha = (p^m s_0, p^{k-1} \mathbf{w}_0(s_1 + ps_2), p^{l-2} \mathbf{w}_1(s_3 + ps_4 + p^2 s_5)),$$

donde $s_i \in \{0, \dots, p-1\}$ para $i = 1, \dots, 5$.

De esta manera, los ideales para este J son de la siguiente forma:

$$I = (p^m s_0, p^{k-1} \mathbf{w}_0 A, p^l \mathbf{w}_1 B, p^r) B_p(C_{p^3}) + \{(p^m u, p^k \mathbf{w}_0(u + w + pv), p^l \mathbf{w}_1 w, 0) \in \mathbb{Z}_p^4 : u, v, w \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $A = s_1 + ps_2$ y $B = s_3 + ps_4 + p^2 s_5$.

Luego, al ver que

$$g_1(\alpha) \equiv p^r \pmod{p^3 \mathbb{Z}_p},$$

se tiene que, los ideales se pueden reescribir en:

$$(p^m, p^k \mathbf{w}_0, p^l \mathbf{w}_1, p^r [(s_3 - s) + ps_4 + p^2 s_5]^{-1}) J' \text{ con: } J' =$$

- 94) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pv - w - p^2 u + t \in p^3 \mathbb{Z}_p, v - s_1 t \in p\mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_3, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s = 0$.
 - $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s = 0$ y $s_3 = \mathbf{w}_1^{-1}$.
 - $m \geq 1, k = l = r = 1; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s_3 = \mathbf{w}_1^{-1}, s_4 = -\mathbf{w}_0^{-1}, s = 0$ y $s_1 = \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_0^{-1}$.
- 95) $\{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : p^2 v - w - p^2 u + t \in p^3 \mathbb{Z}_p\}$
- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s = 0$.

- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5 \in \{0, \dots, p-1\}, s = 0$ y $s_3 = \mathbf{w}_1^{-1}$.

$$96) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w - pu + t \in p^2\mathbb{Z}_p, v - s_1t \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_3 \in \{1, \dots, p-1\} - \{s_1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s = s_5 = 0$.
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_3 \in \{1, \dots, p-1\} - \{\mathbf{w}_1^{-1}\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}, s = s_5 = 0$ y $s_1 = s_3^{-1}(-s_3 + \mathbf{w}_1^{-1})$.

$$97) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w - pu + pt \in p^2\mathbb{Z}_p, v - s_1t \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_3 \in \{0, \dots, p-1\}, s \in \{0, \dots, p-1\} - s_3$ y $s_4 = s_5 = 0$.
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_3 \in \{0, \dots, p-1\}, s \in \{0, \dots, p-1\} - s_3, s_1 = \mathbf{w}_1^{-1}(s - 3 - s)^{-1}$ y $s_4 = s_5 = 0$.

$$98) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w - pu \in p^2\mathbb{Z}_p, v - t \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s = s_5 = 0$.
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}, s = s_5 = 0$ y $s_3 = \mathbf{w}_1^{-1}$.

$$99) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pv - w - pu + t \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s = s_5 = 0$.
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}, s = s_5 = 0$ y $s_3 = \mathbf{w}_1^{-1}$.

$$100) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - pw - pu + t \in p^2\mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s = s_5 = 0$.

$$101) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w - u + t \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}$ y $s = s_4 = s_5 = 0$.

$$102) \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : v - w - u \in p\mathbb{Z}_p\}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_3 = 1$ y $s = s_4 = s_5 = 0$.

Ahora, si consideremos el caso

$$J = (p^m, p^k \mathbf{w}_0, p^l (\mathbf{w}_1 + p \mathbf{w}_2)^{-1}) \{(u, v, w) \in \mathbb{Z}_p^3 : pu - v + w \in p^2\mathbb{Z}_p\},$$

mediante un argumento similar al hecho anteriormente, podemos tomar α de la siguiente forma:

$$\alpha = (p^m \mathbf{w}' s_0, p^k \mathbf{w}_0 \mathbf{w}' (s_1 + ps_2), p^{l-1} (s_3 + ps_4 + p^2 s_5)) ,$$

donde $\mathbf{w}' = \mathbf{w}_1 + p\mathbf{w}_2$ y $s_i \in \{0, \dots, p-1\}$ para $i = 1, \dots, 5$.

De esta manera, los ideales para este J son de la siguiente forma:

$$I = (p^m \mathbf{w}' s_0, p^k \mathbf{w}_0 \mathbf{w}' A, p^{l-1} B, p^r) B_p(C_{p^3}) + \{(p^m \mathbf{w}' u, p^k \mathbf{w}_0 \mathbf{w}' (pu + w + p^2 v), p^l w, 0) \in \mathbb{Z}_p^4 : u, v, w \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $A = s_1 + ps_2$ y $B = s_3 + ps_4 + p^2 s_5$.

Luego, al ver que

$$g_1(\alpha) \equiv p^r \pmod{p^3 \mathbb{Z}_p} ,$$

se tiene que, los ideales se pueden reescribir en:

$$(p^m [\mathbf{w}_1 + p\mathbf{w}_2], p^k \mathbf{w}_0 [\mathbf{w}_1 + p\mathbf{w}_2], p^l, p^r [s_3 + ps_4 + p^2 s_5]^{-1}) J' \text{ con } J' =$$

$$103) \{ (u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pv - w - p^2 u + t \in p^3 \mathbb{Z}_p \}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5, \mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}.$
- $m \geq 1, k \geq 2, l = r = 2; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, s_5, \mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_3 = 1.$

$$104) \{ (u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pu + w - v + t \in p^2 \mathbb{Z}_p \}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}, s_4, \mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_5 = 0.$

$$105) \{ (u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pu + w - v + pt \in p^2 \mathbb{Z}_p \}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, s_3 \in \{1, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ y $s_4 = s_5 = 0.$

$$106) \{ (u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pu + w - v \in p^2 \mathbb{Z}_p \}$$

- $m \geq 1, k \geq 2, l \geq 3, r \geq 3; \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \{1, \dots, p-1\}, \mathbf{w}_2 \in \{0, \dots, p-1\}, s_3 = 1$ y $s_4 = s_5 = 0.$

Es importante notar que, los resultados anteriores nos han permitido obtener un método recursivo para la obtención de todos los ideales de índice finito para grupos cíclicos de orden P^n con $n \in \mathbb{N}$, lo cual nos lleva a tener mucho cuidado con el desarrollo de la obtención de dichos ideales.

Capítulo 3

Función zeta de $B(C_{p^3})$

Del ejemplo 18, se puede observar que $B_P = B_p(C_{p^3})$ es un orden sobre $\mathbb{Z}_p$; de modo que, a partir de la definición dada por Solomon de la función zeta de un orden Λ , podemos definir la función zeta local de B_p en s como:

$$\zeta_{B_p}(s) = \sum_{I \leq B_p} [B_p : I]^{-s},$$

donde s es una variable compleja y el índice de I en B_p ($[B_p : I]$) es finito.

En nuestro contexto, nos remitimos a llamar a la función zeta local de B_p simplemente la función zeta de B_p . Además, dicha función converge uniformemente en subconjuntos compactos del conjunto $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 1\}$. Este resultado puede ser visto para $B_p(G)$ en [8].

Notemos que, de la observación 19, se tiene que $B_p(G) = \mathbb{Z}_p \otimes B(G)$. Luego, Solomon muestra en [8, Lema. 6] que, si $\Lambda_p = \mathbb{Z}_p \otimes \Lambda$, entonces

$$\zeta_{\Lambda}(s) = \prod_{p-\text{primo}} \zeta_{\Lambda_p}(s).$$

Con lo cual, el cálculo de la función zeta de $B(C_{p^3})$ se reduce al caso local, es decir

$$\zeta_{B(C_{p^3})}(s) = \prod_{p-\text{primo}} \zeta_{B_p}(s).$$

Ahora, dado p un número primo, es necesario saber qué pasa con las funciones zeta de B_q , donde q es número primo, para ello tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.0.1. Sea G un grupo finito y $B(G)$ su anillo de Burnside. Si p es un número primo, entonces

$$\zeta_{B_p}(s) = f(p^{-s})\zeta_{\tilde{B}_p}(s),$$

donde $f(p^{-s})$ es un polinomio en $\mathbb{Z}[p^{-s}]$.

La demostración de este teorema se puede ser vista en [3, teorema 1]:

Observación 32. En nuestro caso $B_q(C_{p^3}) \subseteq \mathbb{Z}_q^4$. Ahora, si $q \neq p$, entonces para cada $(x, y, w, t) \in \mathbb{Z}_q^4$, tenemos que

$$p^3(x, y, w, t) \in B_q(C_{p^3}).$$

Luego, como p^3 es unidad de $B_q(C_{p^3})$, se tiene que $(x, y, w, t) \in B_q(C_{p^3})$. Por tanto,

$$B_q(C_{p^3}) = \mathbb{Z}_p^4.$$

En consecuencia, $f(p^{-s}) = 1$ siempre que $q \neq p$.

Por otro lado, $\zeta_{\mathbb{Z}_q^4}(s) = \frac{1}{(1-q^{-s})^4}$, con lo cual

$$\zeta_{B(C_{p^3})}(s) = f(p^{-s}) \prod_{q-\text{primo}} \frac{1}{(1-q^{-s})^4}.$$

Llamemos $\Gamma = \mathbb{Z}_p^4$. Del capítulo 2, sabemos que nuestros ideales de índice finito en B_p son de la forma

$$I = \alpha A \text{ donde } A \leq \Gamma \text{ y } \alpha \in \Gamma \subseteq \mathbb{Q}_p^4.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} [\Gamma : B_p] &= \prod_{H \in \mathcal{C}(C_{p^3})} [N_{C_{p^3}}(H) : H] \\ &= \prod_{H \in \mathcal{C}(C_{p^3})} \frac{|C_{p^3}|}{|H|} \\ &= p \times p^2 \times p^3 = p^6. \end{aligned}$$

Notemos que, vamos a encontrar casos donde $B_p \leq A \leq \Gamma$, con lo que tenemos que:

$$[\Gamma : B_p] = [\Gamma : A][A : B_p],$$

con lo cual

$$[A : B_p] = P^6[\Gamma : A].$$

Sabemos que el índice generalizado se puede definir sin ambigüedad si X contiene o no a Y , de la siguiente manera:

$$[X : Y] = \frac{[X : X \cap Y]}{[Y : X \cap Y]},$$

en consecuencia

$$[Y : X] = [X : Y]^{-1}.$$

De tal manera, que nos interesa calcular $[B_p : \alpha A_i]$ con $i = 1, \dots, 106$, ver capítulo 2 sección 2.5. Mediante métodos conocidos, se puede ver que

$$[B_p : \alpha A_i] = p^{m+k+l+r-6}[\Gamma : A_i],$$

donde $[\Gamma : A_i]$ puede ser alguno de $1, \dots, p^6$.

En consecuencia, sólo hay que calcular $[A_{24} : A_i]$, donde $i = \{1, \dots, 106\}$. Esto lo podemos hacer de dos maneras:

i) Buscando contenciones propias, por ejemplo:

$A_1 \subsetneq A_3 \subsetneq A_4 \subsetneq A_6 \subsetneq A_{12} \subsetneq A_{16} \subsetneq A_{24}$, de aquí que

$$[A_{24} : A_1] = p^6 \quad [A_{24} : A_3] = p^5 \quad [A_{24} : A_4] = p^4$$

$$[A_{24} : A_6] = p^3 \quad [A_{24} : A_{12}] = p^2 \quad [A_{24} : A_{16}] = p$$

$$[A_{24} : A_{24}] = 1$$

ii) No siempre podemos hacer contener propiamente A_1 en algún A_i , lo cual nos causa un problema al querer saber cómo son dichos índices, por ejemplo: A_1 no está contenido propiamente en A_{49} . Cuando tengamos estos casos, procedemos de la siguiente manera:

$$A_{49} = \{(u, v, w, t) \in \mathbb{Z}_p^4 : pv - w + t \in p^3\mathbb{Z}_p; v - \mathbf{w}_1 w \text{ y } t - u \in p\mathbb{Z}_p\}.$$

Notemos que, si miramos a A_{24} como grupo abeliano aditivo, entonces A_{49} es un subgrupo abeliano aditivo de A_{24} . Con lo cual, sólo basta tener un homomorfismo φ de grupos, sobreyectivo que tenga como $\text{Ker}(\varphi) = A_{49}$.

Tomemos

$$\varphi : A_{24} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}_p}{p^3\mathbb{Z}_p} \times \frac{\mathbb{Z}_p}{p\mathbb{Z}_p} \times \frac{\mathbb{Z}_p}{p\mathbb{Z}_p} \text{ tal que}$$

$$(u, v, w, t) \longmapsto ((pv - w + t) + p^3\mathbb{Z}_p, (v - \mathbf{w}_1 w) + p\mathbb{Z}_p, (t - u) + p\mathbb{Z}_p)$$

Es fácil, probar que φ está bien definida y es de grupos. Ahora, veamos que φ es sobreyectiva.

Sea

$$(x + p^3\mathbb{Z}_p, y + p\mathbb{Z}_p, z + p\mathbb{Z}_p) \in \frac{\mathbb{Z}_p}{p^3\mathbb{Z}_p} \times \frac{\mathbb{Z}_p}{p\mathbb{Z}_p} \times \frac{\mathbb{Z}_p}{p\mathbb{Z}_p}.$$

Tomemos

$$(x - \mathbf{w}_1^{-1}y - z, 0, -\mathbf{w}_1^{-1}y, x - \mathbf{w}_1^{-1}y) \in A_{24}.$$

Por tanto, φ es sobreyectiva. Claramente, el $\ker(\varphi) = A_{49}$. Con lo cual,

$$\left| \frac{A_{24}}{A_{49}} \right| = \left| \frac{\mathbb{Z}_p}{p^3 \mathbb{Z}_p} \times \frac{\mathbb{Z}_p}{p \mathbb{Z}_p} \times \frac{\mathbb{Z}_p}{p \mathbb{Z}_p} \right|.$$

De modo que,

$$[A_{24} : A_{49}] = p^5.$$

Ahora, podemos buscar contenciones propias de una manera similar a i), con lo cual:

$$[A_{24} : A_1] = p^6 \quad [A_{24} : A_2] = p^5 \quad [A_{24} : A_3] = p^5$$

$$[A_{24} : A_4] = p^4 \quad [A_{24} : A_5] = p^4 \quad [A_{24} : A_6] = p^3$$

$$[A_{24} : A_7] = p^5 \quad [A_{24} : A_8] = p^4 \quad [A_{24} : A_9] = p^4$$

$$[A_{24} : A_{10}] = p^3 \quad [A_{24} : A_{11}] = p^3 \quad [A_{24} : A_{12}] = p^2$$

$$[A_{24} : A_{13}] = p^3 \quad [A_{24} : A_{14}] = p^2 \quad [A_{24} : A_{15}] = p^2$$

$$[A_{24} : A_{16}] = p \quad [A_{24} : A_{17}] = p^4 \quad [A_{24} : A_{18}] = p^3$$

$$[A_{24} : A_{19}] = p^3 \quad [A_{24} : A_{20}] = p^2 \quad [A_{24} : A_{21}] = p^2$$

$$[A_{24} : A_{22}] = p \quad [A_{24} : A_{23}] = p \quad [A_{24} : A_{24}] = 1$$

$$[A_{24} : A_{25}] = p^5 \quad [A_{24} : A_{26}] = p^4 \quad [A_{24} : A_{27}] = p^4$$

$$[A_{24} : A_{28}] = p^4 \quad [A_{24} : A_{29}] = p^3 \quad [A_{24} : A_{30}] = p^3$$

$$[A_{24} : A_{31}] = p^3 \quad [A_{24} : A_{32}] = p^2 \quad [A_{24} : A_{33}] = p^2$$

$[A_{24} : A_{67}] = p^4$	$[A_{24} : A_{68}] = p^3$	$[A_{24} : A_{69}] = p^3$
$[A_{24} : A_{70}] = p^3$	$[A_{24} : A_{71}] = p^3$	$[A_{24} : A_{72}] = p^2$
$[A_{24} : A_{73}] = p^2$	$[A_{24} : A_{74}] = p^2$	$[A_{24} : A_{75}] = p^5$
$[A_{24} : A_{34}] = p^2$	$[A_{24} : A_{35}] = p$	$[A_{24} : A_{36}] = p$
$[A_{24} : A_{37}] = p^5$	$[A_{24} : A_{38}] = p^4$	$[A_{24} : A_{39}] = p^3$
$[A_{24} : A_{40}] = p^4$	$[A_{24} : A_{41}] = p^3$	$[A_{24} : A_{42}] = p^2$
$[A_{24} : A_{43}] = p^3$	$[A_{24} : A_{44}] = p^3$	$[A_{24} : A_{45}] = p^2$
$[A_{24} : A_{46}] = p^2$	$[A_{24} : A_{47}] = p$	$[A_{24} : A_{48}] = p$
$[A_{24} : A_{49}] = p^5$	$[A_{24} : A_{50}] = p^4$	$[A_{24} : A_{51}] = p^4$
$[A_{24} : A_{52}] = p^3$	$[A_{24} : A_{53}] = p^4$	$[A_{24} : A_{54}] = p^4$
$[A_{24} : A_{55}] = p^4$	$[A_{24} : A_{56}] = p^3$	$[A_{24} : A_{57}] = p^3$
$[A_{24} : A_{58}] = p^3$	$[A_{24} : A_{59}] = p^3$	$[A_{24} : A_{60}] = p^2$
$[A_{24} : A_{61}] = p^3$	$[A_{24} : A_{62}] = p^2$	$[A_{24} : A_{63}] = p^2$
$[A_{24} : A_{64}] = p$	$[A_{24} : A_{65}] = p^2$	$[A_{24} : A_{66}] = p$

$$\begin{array}{lll}
[A_{24} : A_{76}] = p^4 & [A_{24} : A_{77}] = p^4 & [A_{24} : A_{78}] = p^4 \\
[A_{24} : A_{79}] = p^3 & [A_{24} : A_{80}] = p^3 & [A_{24} : A_{81}] = p^3 \\
[A_{24} : A_{82}] = p^3 & [A_{24} : A_{83}] = p^2 & [A_{24} : A_{84}] = p^2 \\
[A_{24} : A_{85}] = p^2 & [A_{24} : A_{86}] = p^2 & [A_{24} : A_{87}] = p^5 \\
[A_{24} : A_{88}] = p^3 & [A_{24} : A_{89}] = p^3 & [A_{24} : A_{90}] = p^3 \\
[A_{24} : A_{91}] = p^3 & [A_{24} : A_{92}] = p^3 & [A_{24} : A_{93}] = p^3 \\
[A_{24} : A_{94}] = p^4 & [A_{24} : A_{95}] = p^3 & [A_{24} : A_{96}] = p^3 \\
[A_{24} : A_{97}] = p^3 & [A_{24} : A_{98}] = p^3 & [A_{24} : A_{99}] = p^2 \\
[A_{24} : A_{100}] = p^2 & [A_{24} : A_{101}] = p & [A_{24} : A_{102}] = p \\
[A_{24} : A_{103}] = p^3 & [A_{24} : A_{104}] = p^2 & [A_{24} : A_{105}] = p^2 \\
[A_{24} : A_{106}] = p^2
\end{array}$$

3.1. La función $\zeta_{B(C_{p^3})}(s)$.

Notemos que, tenemos todo lo necesario para saber cual es el valor de $[B_p : \alpha A_i]$ con $i = 1, \dots, 106$. En consecuencia, mediante la definición dada por Solomon, podemos calcular la función zeta de B_p . Para simplificar un poco los cálculos, hacemos $x = p^{-s}$ y resolvemos parcialmente para cada una de las 106 familias de ideales, para finalizar sumando dichos resultados.

Para A_1 , tenemos que $[B_p : \alpha A_1] = p^{m+k+l+r}$. Por otro lado, A_1 tiene cuatro incisos, ver capítulo 2, sección 2.5. Además, por cada α tenemos uno diferente, con lo cual:

$$\begin{aligned}
& p^3(p-1)^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=3}^{\infty} \sum_{r=3}^{\infty} x^{m+k+l+r} + p^3(p-1)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} x^{m+k+4} + p^2(p-1) \sum_{m=1}^{\infty} x^{m+3} + 1 \\
&= 1 - \frac{(-1+p)p^2x^4}{-1+x} + \frac{(-1+p)^2p^3x^7}{(-1+x)^2} + \frac{(-1+p)^3p^3x^9}{(-1+x)^4} \\
&= \frac{1}{(-1+x)^4} [1-4x+6x^2-4x^3+x^4(1-p^2+p^3)+3p^2x^5(1-p)+3p^2x^6(1-p)+p^2x^7(1-2p^2+p^3)+ \\
& 2p^3x^8(-1+2p-p^2)+p^4x^9(1-2p+p^2)].
\end{aligned}$$

Luego, para A_2 , tenemos que $[B_p : \alpha A_2] = p^{m+k+l+r-1}$. Por otro lado, A_2 tiene tres incisos, ver capítulo 2, sección 2.5. Además, por cada α tenemos uno diferente, con lo cual:

$$\begin{aligned}
& p^3(p-1)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=3}^{\infty} \sum_{r=3}^{\infty} x^{m+k+l+r-1} + p^3(p-1) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} x^{m+k+3} + p^2 \sum_{m=1}^{\infty} x^{m+2} \\
& - \frac{p^2x^3}{-1+x} + \frac{(-1+p)p^3x^6}{(-1+x)^2} + \frac{(-1+p)^2p^3x^8}{(-1+x)^4} \\
& \frac{p^2x^3 - 3p^2x^4 + 3p^2x^5 - p^2x^6(1+p-p^2) + 2p^3x^7(1-p) - p^4x^8(1-p)}{(-1+x)^4}
\end{aligned}$$

Luego, para A_3 , tenemos que $[B_p : \alpha A_3] = p^{m+k+l+r-1}$. Por otro lado, A_3 tiene tres incisos, ver capítulo 2, sección 2.5. Además, por cada α tenemos uno diferente, con lo cual:

$$\begin{aligned}
& p^2(p-1)^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{l=3}^{\infty} \sum_{r=3}^{\infty} x^{m+k+l+r-1} + p^2(p-1)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} x^{m+k+3} + p(p-1) \sum_{m=1}^{\infty} x^{m+2} \\
& - \frac{(-1+p)px^3}{-1+x} + \frac{(-1+p)^2p^2x^6}{(-1+x)^2} + \frac{(-1+p)^3p^2x^8}{(-1+x)^4} \\
& \frac{1}{(-1+x)^4} [-px^3(1-p) + 3px^4(1-p) - 3px^5(1-p) + px^6(1-2p+p^3) - 2p^2x^7(1-2p+p^2) + \\
& p^3x^8(1-2p+p^2)].
\end{aligned}$$

Procediendo de una manera similar, para $A_4, \dots, A_{24}$, obtenemos su respectivo cociente. Luego, sumando y simplificando dichos cocientes, tenemos que el cociente obtenido es la suma de las primeras 24 familias de ideales; es decir, para los ideales de la forma $I = (\alpha', p^r)B_p(C_{p^3}) + (J, 0)$ con

$$\alpha' = (p^{m-1}s_0, p^{k-2}(s_1 + ps_2), p^{l-3}(s_3 + ps_4 + p^2s_5))$$

$$J = (p^m, p^k, p^l) \mathbb{Z}_p^3,$$

se tiene que, la suma es:

$$\frac{1}{(-1+x)^4} [1 - 3x + 3x^2(1+p) - x^3(1+8p-3p^2) + px^4(7-5p+p^2) - 2px^5(1-p^2) + 3p^2x^6(1-2p+p^2) - p^2x^7(1-3p+3p^2-p^3) - p^4x^8(1-p) + p^4x^9(1-2p+p^2)].$$

Para los ideales de la forma

$$I = (p^m s_0, p^{k-1} \mathbf{w}_0 A, p^{l-3} B, p^r) B_p(C_{p^3}) + \{(p^m u, p^k \mathbf{w}_0(u+pv), p^l w, 0) \in \mathbb{Z}_p^4 : u, v, w \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $A = s_1 + ps_2$ y $B = s_3 + ps_4 + p^2 s_5$.

Se tiene que, la suma es:

$$\frac{1}{(-1+x)^4} [-px^2(1-p) + px^3(2-3p+p^2) - px^4(1-2p+p^2) - 2p^3x^5(1-p) + p^3x^6(3-4p+p^2) - p^3x^7(1-p) + p^4x^8(1-2p+p^2)].$$

Para los ideales de la forma

$$I = (p^m s_0 \mathbf{w}_0, p^{k-2} A, p^{l-2} B, p^r) B_p(C_{p^3}) + \{(p^m \mathbf{w}_0 u, p^k v, p^l(u+pw), 0) \in \mathbb{Z}_p^4 : u, v, w \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $A = s_1 + ps_2$ y $B = s_3 + ps_4 + p^2 s_5$.

Se tiene que, la suma es:

$$\frac{1}{(-1+x)^4} [-px^2(1-p) + px^3(2-3p+p^2) - px^4(1-2p+p^2) + p^2x^5(1-3p+2p^2) - p^2x^6(1-3p+3p^2-p^3) + p^4x^8(1-2p+p^2)].$$

Para los ideales de la forma

$$I = (p^{m-1} s_0, p^{k-1} \mathbf{w}_0 A, p^{l-2} B, p^r) B_p(C_{p^3}) + \{(p^m u, p^k \mathbf{w}_0 v, p^l(v+pw), 0) \in \mathbb{Z}_p^4 : u, v, w \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $A = s_1 + ps_2$ y $B = s_3 + ps_4 + p^2 s_5$.

Se tiene que, la suma es:

$$\frac{1}{(-1+x)^4} [-px^2(1-p) + px^3(3-4p+p^2) - 3px^4(1-p) + px^5(1+3p-7p^2+3p^3) - p^2x^6(4-8p+5p^2+p^3) + p^2x^7(1-p-p^2+p^3) - p^3x^8(1-3p+3p^2+p^3)].$$

Para los ideales de la forma

$$I = (p^{m-1}s_0, p^k(\mathbf{w}_0 + p\mathbf{w}_1)A, p^{l-1}B, p^r) B_p(C_{p^3}) + \\ \{(p^m u, p^k(\mathbf{w}_0 + p\mathbf{w}_1)v, p^l(v + p^2w), 0) \in \mathbb{Z}_p^4 : u, v, w \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $A = s_1 + ps_2$ y $B = s_3 + ps_4 + p^2s_5$.

Se tiene que, la suma es:

$$\frac{-p^3x^4(1-p) + p^3x^5(2-3p+p^2) - p^3x^6(1-p) + p^4x^7(1-2p+p^2)}{(-1+x)^4}.$$

Para los ideales de la forma

$$I = (p^m\mathbf{w}_0s_0, p^{k-1}\mathbf{w}_1A, p^{l-2}B, p^r) B_p(C_{p^3}) + \\ \{(p^m\mathbf{w}_0u, p^k\mathbf{w}_1(u+pv), p^l(u+pw), 0) \in \mathbb{Z}_p^4 : u, v, w \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $A = s_1 + ps_2$ y $B = s_3 + ps_4 + p^2s_5$.

Se tiene que, la suma es:

$$\frac{1}{(-1+x)^4} [p^2x^3(1-2p+p^2) - 2p^2x^4(1-2p+p^2) + p^2x^5(1-3p^2+2p^3) - \\ p^3x^6(3-7p+5p^2-p^3) + p^3x^7(1-2p+p^2) - p^4x^8(1-3p+3p^2-p^3)].$$

Para los ideales de la forma

$$I = (p^m\mathbf{w}_0s_0, p^k(\mathbf{w}_1 + p\mathbf{w}_2)A, p^{l-1}B, p^r) B_p(C_{p^3}) + \\ \{(p^m\mathbf{w}_0u, p^k(\mathbf{w}_1 + p\mathbf{w}_2)(u+pv), p^l(u+pv+p^2w), 0) \in \mathbb{Z}_p^4 : u, v, w \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $A = s_1 + ps_2$ y $B = s_3 + ps_4 + p^2s_5$.

Se tiene que, la suma es:

$$\frac{-px^6(1-2p+3p^4-2p^5) - 2p^4x^7(1-2p+p^2) + p^5x^8(1-2p+p^2)}{(-1+x)^4}.$$

Para los ideales de la forma

$$I = (p^m s_0, p^{k-1} \mathbf{w}_0 A, p^l \mathbf{w}_1 B, p^r) B_p(C_{p^3}) + \\ \{(p^m u, p^k \mathbf{w}_0(u + w + pv), p^l \mathbf{w}_1 w, 0) \in \mathbb{Z}_p^4 : u, v, w \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $A = s_1 + ps_2$ y $B = s_3 + ps_4 + p^2 s_5$.

Se tiene que, la suma es:

$$\frac{1}{(-1+x)^4} [px^2(1-2p+p^2) - 2px^3(1-2p+p^2) + px^4(1-3p^2+2p^2) - p^2x^5(3-7p+5p^2-p^3) + \\ p^2x^6(1-2p+p^2) - p^3x^7(1-3p+3p^2-p^3)].$$

Para los ideales de la forma

$$I = (p^m \mathbf{w}' s_0, p^k \mathbf{w}_0 \mathbf{w}' A, p^{l-1} B, p^r) B_p(C_{p^3}) + \\ \{(p^m \mathbf{w}' u, p^k \mathbf{w}_0 \mathbf{w}'(pu + w + p^2 v), p^l w, 0) \in \mathbb{Z}_p^4 : u, v, w \in \mathbb{Z}_p\}$$

donde $A = s_1 + ps_2$ y $B = s_3 + ps_4 + p^2 s_5$.

Se tiene que, la suma es:

$$\frac{p^3 x^4(1-2p+p^2) - x^5(1-4p+6p^2-3p^3-p^4+p^5) + p^4 x^6(1-2p+p^2)}{(-1+x)^4}.$$

Ahora, estamos en condiciones de calcular la función zeta de B_p , lo único que hay que hacer es sumar los cocientes obtenidos, los cuales tienen un mismo factor común; de aquí que, después de una manipulación algebraica, tenemos que:

$$\zeta_{B_p}(s) = \\ \frac{1}{(-1+x)^4} [1-3x + (3+p+p^2+p^3)x^2 + (-1-2p+p^2)(1+p+p^2)x^3 + \\ p(3-p^3+p^4)x^4 + (-1+p)(1-2p+2p^2+3p^4)x^5 + \\ (-1+p)^2 p(-1-p+p^2+4p^3)x^6 + (-1+p)p^3(-1+2p)x^7 + \\ (-1+p)p^3(1-2p+2p^3)x^8 + (-1+p)^2 p^4 x^9].$$

Finalmente,

$$\zeta_B(s) = \\ (1-3p^{-s} + (3+p+p^2+p^3)p^{-2s} + (-1-2p+p^2)(1+p+p^2)p^{-3s} + \\ p(3-p^3+p^4)p^{-4s} + (-1+p)(1-2p+2p^2+3p^4)p^{-5s} + \\ (-1+p)^2 p(-1-p+p^2+4p^3)p^{-6s} + (-1+p)p^3(-1+2p)p^{-7s} + \\ (-1+p)p^3(1-2p+2p^3)p^{-8s} + (-1+p)^2 p^4 p^{-9s}) [\zeta_{\mathbb{Z}}(s)]^4,$$

donde $\zeta_{\mathbb{Z}}(s) = \prod_{q-\text{primo}} \frac{1}{(1-q^{-s})}$ es la función zeta usual de Riemman.

Conclusiones

Es importante notar, que se logró obtener la función zeta para el anillo de Burnside del grupo cíclico mencionado a lo largo de este trabajo.

Por otro lado, se puede observar que dicho cálculo depende fundamentalmente de la obtención de la colección finita de las clases de isomorfismo de sus ideales de índice finito, lo cual no necesariamente es sencillo. Además, cabe resaltar que la teoría aquí desarrollada, no necesariamente es sencilla, sólo basta observar el abuso de notación que se tiene que hacer en muchos casos.

Sin más, este trabajo queda en manos de quien desee hacer uso de él. Este trabajo, ha sido para mí una vivencia llena de esfuerzos muy gratificantes por los resultados matemáticos (en mí persona) obtenidos. Sé que este trabajo podrá tener una mejora en un futuro; puesto que, aquellos aspectos que no pudieron atenderse por la diversidad de conceptos que se manejan es muy difícil cubrir en una sola investigación.

Bibliografía

- [1] Andreas Dress. (1973). Contributions to the theory of induced representations. Lecture Notes in Math. Algebraic K-theory (Springer-Verlag).
- [2] Bouc S. (2000). Burnside Rings, Handbook of Algebra, Vol. 2, 739-804, North- Holland, Amsterdam.
- [3] Bushnell, C. J., Reiner, I. (1987b). Zeta functions of arithmetic orders and Solomon's conjectures. Math. Z. 173, 135-161.
- [4] Curtis, C. W., Reiner, I. (1987). Methods of representation theory with applications to finite groups and orders. Vol. 2, Chapter 2. Wiley-Interscience, New York, N. Y.
- [5] Reiner, I. (1975). Maximal Orders, London-New York. Academic Press.
- [6] Reiner, I. (1980). Zeta functions of integral representations. Communication in Algebra 8, pp. 911-925.
- [7] Rotman Joseph J. (2003). Advanced Modern Algebra, Prentice Hall, 2nd printing, 1040 pages, ISBN: 0130878685.
- [8] Solomon, L. (1977). Zeta Functions and Integral Representation Theory. Advances in Mathematics 26, 306-326.
- [9] Villa-Hernandez D. (2009). Zeta functions of Burnside rings of groups of order p and p^2 . Communications in Algebra, 37. pp 1758-1786.
- [10] Villa-Hernández D. (2011). The Zeta function of the Burnside ring for cyclic groups. International Journal of Algebra, Vol. 5, No. 26, 1255 - 1266.
- [11] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 5.2, Champaign, IL (2005).

