Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Masa y espín relativistas de un agujero negro de Kerr en términos de observaciones

TESIS

Presentada para obtener el título de
Licenciatura en Física

Presenta
Raúl Antonio Lizardo Castro

Director de tesis: Dr. Alfredo Herrera Aguilar

Puebla, Pue. 10 de Septiembre de 2018

Título: Masa y espín relativistas de un agujero negro de Kerr en términos de observaciones.

Estudiante: Raúl Antonio Lizardo Castro

JURADO

Dr. Gerardo FranciscoTorres del Castillo
Presidente

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Secretario

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
Vocal

Dr. Ulises Nucamendi Gómez
Suplente

Dr. Alfredo Herrera Aguilar
Director de tesis

A mis abuelas, María y Reyes.

Agradecimientos

Esta investigación fue realizada gracias al apoyo del Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Puebla.

Agradezco profundamente todo el apoyo que mis padres me brindaron a lo largo de estos años, también agradezco a mi tía Lilian, mi prima Silvia y mi abuela María por su ayuda incondicional desde que nací y a mis hermanos por los buenos momentos. Además, agradezco por los gratos momentos a mis amigos que conocí durante la carrera en especial a Ricardo, Julio, Oswaldo y Marco. También estoy muy agradecido con Rosa Lechuga con quien compartí increíbles momentos juntos y por escucharme, con gran entusiasmo, hablar de los temas que me apasionan. Por último, agradezco al Dr. Gerardo y al Dr. Gilberto porque marcaron mi vida por sus conocimientos y sus filosofías de vida, como también a mi asesor, el Dr. Alfredo, por su paciencia y sus enseñanzas que me llevaron a dar mis primeros pasos en mi carrera científica.

Índice general

1 Introducción **11**

1.1. Antecedentes observacionales 15

1.2. Antecedentes teóricos 17

2 La masa M y el parámetro de rotación a en términos de observaciones **31**

2.1. M en términos de los corrimientos de fotones emitidos por tres partículas orbitantes 31

2.2. M y a en términos de los corrimientos de fotones emitidos por dos partículas orbitantes 33

2.3. M y a en términos de los corrimientos de fotones emitidos por una sola partícula 36

3 Conclusiones **41**

Bibliografía **43**

Resumen

En este trabajo se presentan expresiones analíticas para la masa M y el parámetro de rotación a de un agujero negro (AN) de Kerr en términos de los corrimientos de fotones emitidos por partículas geodésicas que orbitan, circularmente y en el plano ecuatorial, alrededor de éste para distintas configuraciones (1, 2 y 3 partículas masivas orbitando al AN). Estas fórmulas se obtienen aprovechando las simetrías del espacio-tiempo de Kerr, con el mínimo de suposiciones, mediante la implementación de los campos vectoriales y tensorial de Killing como también de las condiciones para órbitas estables y circulares.

Palabras clave: Relatividad General, Agujero negro de Kerr, masa y espín, corrimientos al rojo y al azul.

TESIS

10 de Septiembre de 2018

Capítulo 1

Introducción

La teoría de Einstein es la herramienta más precisa para describir los efectos gravitacionales ocasionados por objetos masivos y compactos que curvan el espacio-tiempo. Este marco teórico predice objetos tan pesados y compactos que provocan una singularidad en el espacio-tiempo y la singularidad producida es cubierta por una superficie nula llamada horizonte de eventos. El horizonte de eventos impide ver la singularidad para observadores exteriores (partículas fuera de esta superficie) y los observadores interiores (partículas que se encuentren dentro del horizonte de eventos o que hayan cruzado el mismo) jamás podrán salir de esta. El conjunto de las anteriores propiedades de una región compacta del espacio-tiempo es lo que define, a grandes rasgos, un agujero negro (AN) [1].

Un ejemplo claro de la creación de estos enigmáticos objetos es el colapso gravitacional de una estrella. Durante la vida de una estrella se realizan fusiones nucleares en su interior, cuando su combustible nuclear se acaba la estrella se contrae y si la estrella es suficientemente masiva, la fuerza gravitacional vence a la presión provocando que la estrella colapse hacia su interior en un punto de densidad infinita.

Por otro lado, la existencia del teorema de no pelo [2] nos indica que los agujeros negros estacionarios, rotantes (con respecto a un eje de simetría) y neutros se caracterizan por únicamente dos parámetros: la masa M y su momento angular

$J = aM$ (en unidades naturales) [3]-[7].

Recientemente, con la detección de las ondas gravitacionales [8]-[12] se ha comenzado una nueva era dorada para el estudio de agujeros negros astrofísicos con el uso completo de la Relatividad General. Por otro lado, en las últimas décadas ya se han estudiado objetos compactos muy masivos utilizando diferentes métodos experimentales para determinar los parámetros M, a y la distancia R entre estos objetos y el sistema solar [13]-[16]. A pesar de estos análisis, todos utilizan métodos newtonianos para establecer el valor de la masa del agujero negro M y la distancia R. Además, pese a que uno supondría que estos objetos son poco comunes en nuestro universo por la extrañeza de sus descripciones matemáticas, resulta ser que hay evidencia observacional de la existencia de millones de agujeros negros de masa intermedia ($\approx 10^3 M_\odot$; es decir, miles de masas solares) en cada Galaxia y agujeros negros súper-masivos (mayores a $10^6 M_\odot$) en el centro de cada una, como el objeto súper-masivo en el centro de la vía Láctea, llamado SgrA* [17].

Adicionalmente, los efectos relativistas son detectables inclusive en sistemas que se encuentran en el régimen de campo gravitacional débil como lo es nuestro sistema solar (precesión de Mercurio), y es de esperarse que en la cercanía de un agujero negro súper-masivo como Sgr A*, los efectos relativistas de las órbitas de sus estrellas cercanas sean notables como lo reportado recientemente en [18]. Por lo anterior, es necesario tener expresiones relativistas para M y a en términos de cantidades observacionales para una mejor estimación de los parámetros de estos enigmáticos objetos.

Motivados por un trabajo previo [19] , donde los autores tomaron la solución de un agujero negro de Kerr y haciendo uso de las simetrías de este espacio-tiempo con un número reducido de suposiciones físicas, encontraron los corrimientos al rojo y al azul de fotones emitidos por las estrellas que orbitan alrededor del

agujero negro de Kerr en términos de la masa M y el parámetro de espín a del agujero negro, como también del radio orbital de la partícula de prueba vecina al agujero negro. Nosotros en este trabajo encontramos soluciones al sistema de ecuaciones obtenidas en [19] y hallamos soluciones analíticas para la masa M y el parámetro de rotación a, para diferentes sistemas de partículas orbitantes en torno al agujero negro. Las fórmulas obtenidas son novedosas debido a que, en comparación con los métodos newtonianos actuales, son obtenidas en el marco de la teoría de la Relatividad General y se encuentran expresadas en términos de invariantes relativistas, los cuales son los corrimientos de los fotones emitidos por las estrellas que orbitan circularmente alrededor del agujero negro en el plano ecuatorial.

Los resultados de esta tesis serán de mucha utilidad cuando se estudien, en una primera aproximación, sistemas como el conjunto de estrellas vecinas a Sgr A*, llamado conjunto S de estrellas. En principio, este método también se puede aplicar, con relativa facilidad, al estudio de otros centros galácticos con agujeros negros súper-masivos, como el centro de Andrómeda (M31), la cual hospeda un agujero negro de masa $M_\bullet \approx 1{,}4 \times 10^8 M_\odot$ [20], y al Núcleo Galáctico Activo de Cen A, la cual tiene un agujero negro de $M_\bullet \approx 5 \times 10^7 M_\odot$ [21] (también veáse [22]).

Esta tesis se divide de la siguiente forma: en el Capítulo 2 damos a conocer con mayor exactitud los antecedentes observacionales y teóricos que son la base de esta tesis. En el Capítulo 3 mostramos que se pueden encontrar fórmulas exactas para los parámetros de un agujero negro tipo Kerr empleando distintas configuraciones (diferente número partículas de prueba orbitantes) de un sistema que tiene como centro un agujero negro de Kerr. Finalmente en el Capítulo 4 discutimos los resultados obtenidos, así como las aplicaciones de nuestros resultados en futuros experimentos y en distintas situaciones astrofísicas.

Antecedentes generales

En este Capítulo explicaré con detenimiento los resultados previos que se han conseguido en distintos trabajos observacionales y teóricos para entender el desarrollo de esta investigación.

1.1. Antecedentes observacionales

Durante las últimas décadas se ha incrementado el interés en la búsqueda de agujeros negros astrofísicos, como también en métodos y herramientas cada vez más precisos para estimar sus parámetros. Uno de los métodos más utilizados en la astrofísica es la espectroscopía cercana al infrarrojo de alta resolución para el monitoreo de las trayectorias de estrellas orbitantes alrededor de un objeto compacto como un agujero negro, este método es utilizado para describir el movimiento del conjunto de estrellas alrededor de Sgr A* [23], llamada S o S0. Con el uso de este método se logran estimar los corrimientos al rojo y al azul de fotones emitidos por las estrellas en el conjunto S0. Después, el corrimiento al rojo o al azul, de alguna estrella orbitante, se aproximan, en el régimen newtoniano, a la velocidad radial de la estrella ($v_r \approx zc$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío) [24], esta velocidad se define como la rapidez de la estrella con la que se aleja o se acerca a nosotros.

Con esta suposición se pueden hacer uso de las leyes de conservación de energía ($T_p + V_g(p) = T_a + V_g(a)$) y momento angular ($L_p = L_a$) en los distintos puntos de la órbita (en particular en el periastro y el apastro) de una partícula orbitante, que se encuentra en la FIG. 1.1, para encontrar el semieje mayor L y utilizar la tercera ley de Kepler con el periodo de la órbita τ:

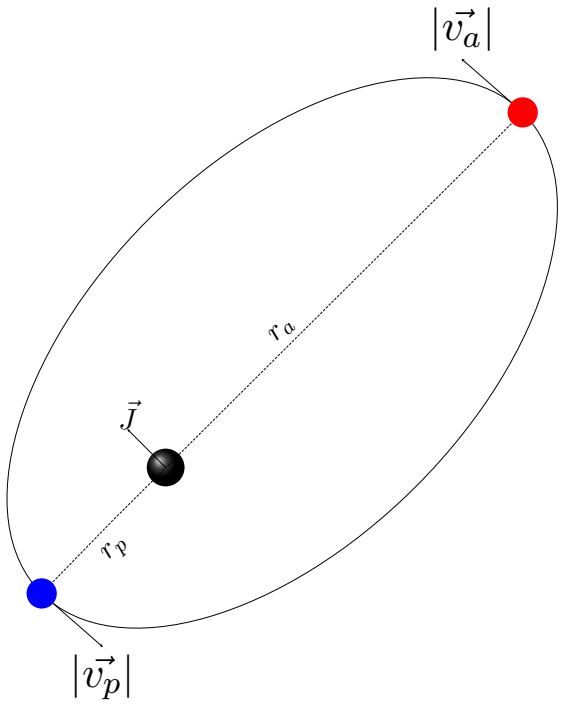

Figura 1.1: La dirección de la velocidad en el periastro $\vec{v_p}$ es paralela a la dirección de la velocidad en el apastro $\vec{v_a}$ pero el sentido opuesto. Además, el observador se encuentra muy lejano del sistema y la línea de visión del observador es paralela con la dirección de las velocidadades en el periastro $\vec{v_p}$ y en el apastro $\vec{v_a}$. El momento angular $\vec{J}$ apunta en dirección perpedincular al plano de la órbita

$$\tau^2 = \frac{4\pi}{GM_{AN}} L^3, \tag{1.1}$$

con G como la constante gravitacional de Newton y M_{AN} es la masa del AN. Con lo anterior, los astrónomos calculan la masa del agujero negro con el periodo y el semieje mayor de sus estrellas vecinas de manera newtoniana. Para el caso de Sgr A* se estima una masa $M \approx 4{,}31 \times 10^6 M_\odot$ con el análisis de la órbita de la estrella S0-2 [25]. Además, se agregan correcciones relativistas debido a la precesión de la estrella S0-2 con un potencial de la métrica de Schwarzschild (agujero negro estático) con lo cual obtienen un valor de la masa $M \approx 4{,}28 \times 10^6 M_\odot$ [26]. Sin embargo, con el acercamiento newtoniano no se puede estimar el parámetro de espín de SgrA* ya que solamente se toma en cuenta el movimiento relativo entre el agujero negro y la estrella. A pesar de esto, existen técnicas que logran acotar el parámetro de rotación como el análisis de las emisiones de llamaradas

en las cercanías (horizonte de eventos) de Sgr A*, que acotan el parámetro de espín por la siguiente estimación $0{,}70 \pm 0{,}11\, M \leq a \leq M$ [27], o las oscilaciones cuasi-periódicas de alta frecuencia aplicadas al disco de acreción, lo cual da un valor aproximado del espín en la siguiente manera $a \approx 0{,}996M$ [28]-[30]. Debido a que el parámetro de espín de Sgr A* es cercano a M (valor máximo), la implementación de espacio-tiempos estáticos (Schwarzschild) para modelar el objeto compacto que se hospeda en el Centro Galáctico no son precisos y se deben emplear espacio-tiempos axisimétricos.

Por otro lado, un gran número de proyectos trabajarán en conjunto para estudiar al agujero negro (AN) súper-masivo de nuestro Centro Galáctico, este es el caso de BlackHole Cam [31], el cual aprovechará las sinergias de tres diferentes experimentos: Event Horizon Telescope [32] que se enfocará en el horizonte de eventos del AN buscando las emisiones del disco de acreción de Sgr A*; GRAVITY [33], que rastreará las órbitas del conjunto S con interferometría cercana al infrarrojo y un conjunto de radiotelescopios que estudiarán un radio púlsar cercano a Sgr A* con la finalidad de medir los parámetros de Sgr A* con alta precisión. Además, el proyecto MICADO analizará el perfil de velocidades y el movimiento propio del conjunto S0 mediante un arreglo de 4×4 de detectores infrarrojos sensibles en un rango de longitud de onda $0{,}8 - 2{,}5\mu$m, con una precisión cinco veces mayor que la del Very Large Telescope (VLT) [34].

1.2. Antecedentes teóricos

La Relatividad General es la teoría del espacio, el tiempo y la gravitación formulada por Albert Einstein y que vino a generalizar su Teoría de la Relatividad Especial propuesta en 1905. Esta teoría comenzó con la publicación de las ecuaciones de campo de Einstein, seguida por una serie de artículos sobre sus fundamentos y sus múltiples confirmaciones experimentales (precesión del perihelio de Mercurio, deflexión de la luz debido al Sol, etc).

Unos meses después de su postulación, Schwarzschild encontró soluciones a las

ecuaciones de Einstein para un objeto esféricamente simétrico y estático. Esta solución representa un agujero negro estático que tiene un horizonte de eventos cuando la coordenada radial es $r = 2M$ (con unidades naturales) y cubre una singularidad en el origen $r = 0$.

Por otro lado, la mayoría de los objetos astrofísicos conocidos rotan en su sistema inercial local (relativo a otros objetos vecinos), por lo que su campo gravitacional no es descrito por la solución de Schwarzschild.

Casi 50 años después de su formulación, Kerr [35] encontró una solución a las ecuaciones de Einstein para describir el campo gravitacional de un objeto estacionario y rotatorio con respecto a un eje de simetría, dado por la siguiente métrica:

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2, \tag{1.2}$$

donde las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, en las coordenadas Boyer-Lindquist (t,r,θ,ϕ), son:

$$\begin{gathered} g_{tt} = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right), \quad g_{t\phi} = -\left(\frac{2Mar\sin^2\theta}{\Sigma}\right), \quad g_{rr} = \frac{\Sigma}{\Delta}, \\ g_{\phi\phi} = \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2r\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta, \qquad g_{\theta\theta} = \Sigma, \\ \Delta = r^2 + a^2 - 2Mr\,, \qquad \Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta, \end{gathered} \tag{1.3}$$

M es la masa del agujero negro y a es el parámetro de rotación (espín).

La métrica (1.3) es no degenerada y no singular en todos lados excepto cuando $\Sigma = 0$ y $\Delta = 0$. Al calcular el invariante de Kretschmann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$, donde $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ es el tensor de curvatura de Riemann, nos muestra que $\Delta = 0$ es una singularidad aparante y:

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos\theta^2 = 0 \tag{1.4}$$

es una verdadera singularidad. Para analizar esta singularidad es necesario realizar el siguiente cambio de coordenadas:

$$x + iy = (r + ia)\sin\theta e^{i\int\left(d\phi + a\Delta^{-1}dr\right)}, \tag{1.5}$$

$$z = r\cos\theta, \tag{1.6}$$

$$t = \int\left[dt + \left(r^2 + a^2\right)\Delta^{-1}dr\right] - r. \tag{1.7}$$

Con las Ecs. (1.5)-(1.7) se puede determinar r implícitamente en términos de (x, y, z) por:

$$r^4 - \left(x^2 + y^2 + z^2 - a^2\right)r^2 - a^2z^2 = 0. \tag{1.8}$$

El escalar de Kretschmann $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ diverge cuando $z = 0$, lo cual arroja la siguiente expresión:

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{1.9}$$

La Ec. (1.9) es conocida como la singularidad de anillo en la métrica de Kerr que se ubica en el plano $z = 0$ (véase pág. 162 en [36]).

Como ya se mencionó, la singularidad $\Delta = 0$ es aparante; esta igualdad tiene como soluciones dos superfices:

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \tag{1.10}$$

Si tomamos el caso $a = 0$ con r_+, se recupera el horizonte de eventos de un agujero negro de Schwarzschild ($r = 2M$). Para esta superficie, las partículas y los fotones son capaces de cruzarla pero no podrán escapar del interior; es decir, cualquier evento que ocurra en $r < r_+$, no podrá ser medido por un observador externo. Esta superficie es conocida como el horizonte de eventos exterior. Dentro de la superficie con r_+ existe otra superficie con r_-, la cual no tiene sentido físico y es conocida como el horizonte de eventos interior.

Campos vectoriales y tensorial de Killing

Las simetrías de un espacio con geometría Riemanniana son encontradas imaginando un campo vectorial ζ^μ en cada punto x^μ del espacio y preguntarse

cuáles condiciones mantienen a la métrica invariante bajo una traslación en dirección de ζ_μ. Para esto, hacemos uso del siguiente cambio infinitesimal para cualquier punto del espacio:

$$\overline{x^\mu} = x^\mu + \underbrace{\zeta^\mu(x^\omega)d\lambda}_{\delta x^\mu}, \tag{1.11}$$

donde λ es el parámetro infinitesimal y ζ^μ es el campo vectorial de Killing. Entonces, el elemento de línea en el punto x^μ y el punto cercano $\overline{x^\mu}$ son idénticos si tienen la siguiente expresión:

$$\delta(ds^2) = (\zeta^\omega \partial_\omega g_{\mu\nu} + g_{\omega\nu}\partial_\mu \zeta^\omega + g_{\omega\mu}\partial_\nu \zeta^\omega)dx^\mu dx^\nu d\lambda = 0. \tag{1.12}$$

Por lo tanto, una simetría está presente si la (1.12) se satisface independientemente de la dirección de x^μ; es decir, la suma de los términos entre paréntesis son cero. Esto se puede ver de la siguiente forma:

$$\nabla_\mu \zeta_\nu + \nabla_\nu \zeta_\mu = 0, \tag{1.13}$$

donde ∇_μ denota la derivada covariante. En el caso de la métrica de Kerr se encuentran dos campos vectoriales de Killing, con coordenadas:

$$\xi^\mu = (1, 0, 0, 0) \qquad \text{Campo vectorial de Killing temporal} \tag{1.14}$$

y

$$\psi^\mu = (0, 0, 0, 1) \qquad \text{Campo vectorial de Killing rotacional,} \tag{1.15}$$

estos dos campos vectoriales de Killing ξ^μ y ψ^μ conmutan entre sí. Al realizar la contracción de un campo vectorial de Killing ζ^μ con la 4-velocidad de una partícula geodésica $U^\mu = (U^t, U^r, U^\theta, U^\phi)$, nos lleva a una cantidad conservada. En este caso al tener ξ^μ y ψ^μ, tendremos dos cantidades conservadas para una partícula geodésica masiva con 4-velocidad U^α y otras dos para una partícula geodésica nula con 4-momento k^μ:

$$\bar{E} = -m_0 g_{\mu\nu}\xi^\mu U^\nu\,, \qquad E_\gamma = -g_{\mu\nu}\xi^\mu k^\nu \tag{1.16}$$

y

$$\bar{L} = m_0 g_{\mu\nu}\psi^\mu U^\nu\,, \qquad L_\gamma = g_{\mu\nu}\psi^\mu k^\nu, \tag{1.17}$$

donde $\bar{E}$ y $\bar{L}$ son la energía y el momento angular para una partícula masiva, con masa en reposo m_0, respectivamente. De igual forma, las cantidades E_γ y L_γ denotan la energía y el momento angular para partículas sin masa (fotones), respectivamente.

La métrica de Kerr presenta otra cantidad conservada $C = K_{\mu\nu}U^\mu U^\nu$ donde el campo tensorial de Killing $K_{\mu\nu}$ cumple la siguiente ecuación:

$$\nabla_\eta K_{\mu\nu} + \nabla_\mu K_{\eta\nu} + \nabla_\nu K_{\mu\eta} = 0, \tag{1.18}$$

donde C se relaciona con la constante de Carter Q [37] de la siguiente forma:

$$C \equiv (L\delta - aE\delta)^2 + Q. \tag{1.19}$$

Este tensor $K_{\mu\nu}$ se puede escribir en términos de campos vectoriales nulos (l_μ y n_μ) de la siguiente forma:

$$K_{\mu\nu} = 2\Sigma\left(l_\mu n_\nu + l_\nu n_\mu\right) + r^2 g_{\mu\nu}, \tag{1.20}$$

donde los vectores nulos son:

$$l^\mu = \frac{r^2+a^2}{\Delta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\mu + \frac{a}{\Delta}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^\mu + \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^\mu \tag{1.21}$$

y

$$n^\mu = \frac{r^2+a^2}{2\Sigma}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\mu + \frac{a}{2\Sigma}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^\mu - \frac{\Delta}{2\Sigma}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^\mu. \tag{1.22}$$

Además, estos vectores nulos cumplen las relaciones $l^\mu l_\mu = n^\mu n_\mu = 0$ y $l^\mu n_\mu = -1$.

Componentes de las 4-velocidades de partículas geodésicas y el parámetro aparente de impacto b

Las 4-velocidades de la partícula geodésica U^μ describirán la cinemática de una estrella, planeta o cualquier otro objeto astrofísico que se encuentre orbitando al AN de Kerr, ya sea el emisor de los fotones o el detector de los mismos.

Se debe encontrar U^μ en términos de los parámetros del AN, M, a, y las características de las órbitas de dichos objetos, dadas en términos de r y θ; para esto se emplearán las simetrías (campos vectoriales de Killing Ecs. (1.14)-(1.15)) de la métrica de Kerr.

Primero, haremos uso de la norma de U^μ al ser una partícula geodésica masiva para el caso más general:

$$-1 = g_{tt}\left(U^t\right)^2 + g_{rr}\left(U^r\right)^2 + g_{\phi\phi}\left(U^\phi\right)^2 + g_{\theta\theta}\left(U^\theta\right)^2 + 2g_{t\phi}U^tU^\phi. \tag{1.23}$$

Expandimos las Ecs. (1.16) y (1.17) para una partícula masiva:

$$E \equiv \frac{\bar{E}}{m_0} = -g_{tt}U^t - g_{t\phi}U^\phi \tag{1.24}$$

y

$$L \equiv \frac{\bar{L}}{m_0} = g_{\phi\phi}U^t + g_{t\phi}U^\phi, \tag{1.25}$$

con esto podemos despejar U^t y U^ϕ en términos de las componentes del tensor métrico, la energía por unidad de masa E y el momento angular por unidad de masa L, que son cantidades conservadas, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} U^t &= \frac{Eg_{\phi\phi} + Lg_{t\phi}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}} \\ &= \frac{1}{\Delta\Sigma}\left\{\left[(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2 \sin\theta^2\right]E - 2MarL\right\} \end{aligned} \tag{1.26}$$

y

$$\begin{aligned} U^\phi &= -\frac{Eg_{t\phi} + Lg_{tt}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}} \\ &= \frac{1}{\Delta\Sigma\sin^2\theta}\left[2Mar\sin\theta^2 E - \left(\Delta - a^2\sin\theta^2\right)L\right]. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Sustituyendo (1.26) y (1.27) en (1.23) obtenemos una ecuación que puede verse como una partícula con masa variable sometida a un potencial efectivo V_{ef}:

$$g_{rr}\left(U^r\right)^2 + \underbrace{g_{\theta\theta}\left(U^\theta\right)^2 + 1 - \frac{E^2g_{\phi\phi} + L^2g_tt + 2ELg_{t\phi}}{\left(g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}\right)}}_{V_{ef}} = 0. \tag{1.28}$$

Por otro lado, contrayendo el tensor de Killing con las 4-velocidades $K_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu}$, obtenemos una constante de movimiento C que está relacionada con la constante de Carter Q de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} C &= K_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu} = \frac{1}{\Delta}\left\{\left[\left(r^2+a^2\right)E - aL\right]^2 - \Sigma^2\left(U^r\right)^2 - \Delta r^2\right\} \\ &= (aE-L)^2 + Q. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Ahora podemos despejar la componente radial de la 4-velocidad:

$$\Sigma^2\left(U^r\right)^2 = \left[\left(r^2+a^2\right)E - aL\right]^2 - \Delta\left[r^2 + (aE-L)^2 + Q\right] \equiv R(r), \tag{1.30}$$

podemos notar que el segundo miembro de la Ec. (1.30) es una función que únicamente depende de la coordenada r y en la misma ecuación, la constante de Carter Q no tiene un significado físico o geométrico claro. Posteriormente, se puede susitituir (1.30) en (1.23) para obtener una expresión para la componente polar U^{θ} de la siguiente forma:

$$\Sigma^2\left(U^{\theta}\right)^2 = Q - \left[a^2\left(1-E^2\right) + \frac{L^2}{\operatorname{sen}\theta^2}\right]\cos^2\theta. \tag{1.31}$$

En la última expresión, volvemos a notar que U^{θ} únicamente depende de la coordenada polar θ. También se puede ver con facilidad que si $\theta = \pi/2$; es decir, si colocamos a la partícula en el plano ecuatorial, se tiene que $Q = 0$. La Ec. (1.31) nos da un significado geométrico de Q, la cual es una medida de cuánto la órbita de una partícula geodésica es oblicua con respecto al plano ecuatorial.

Por otro lado, debemos tratar la trayectoria de los fotones ya que ésta tendrá codificada la información acerca de los parámetros del AN de Kerr. La norma del 4-momento de una partícula luxoide es:

$$0 = g_{tt}\left(k^t\right)^2 + g_{rr}\left(k^r\right)^2 + g_{\phi\phi}\left(k^{\phi}\right)^2 + g_{\theta\theta}\left(k^{\theta}\right)^2 + 2g_{t\phi}k^t k^{\phi}. \tag{1.32}$$

Nuevamente, a partir de las Ecs. (1.16) y (1.17) para fotones, encontramos las componentes t y ϕ del 4-momento k^{μ} en términos de las componentes del tensor

métrico $g_{\mu\nu}$, su energía E_γ y su momento angular L_γ, y sustituyendo en (1.32) se tiene una expresión similar a la Ec. (1.28):

$$0 = g_{rr}\left(k^r\right)^2 + g_{\theta\theta}\left(k^\theta\right)^2 - \frac{E^2 g_{\phi\phi} + L^2 g_{tt} + 2EL g_{t\phi}}{\left(g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}\right)}. \tag{1.33}$$

Ahora, encontramos el parámetro de impacto aparente máximo, el cual definimos como $b \equiv L_\gamma/E_\gamma$ que es considerado como la deflexión de la luz debido al campo gravitacional producido por el AN de Kerr (veáse pág. 144 de [38]). Al maximizar el parámetro de impacto aparente ocurre que $k^r = 0$. Además, tomamos θ =constante; es decir, que el movimiento de los fotones tiene lugar en un plano y por lo tanto k^θ=0. Entonces, la Ec. (1.33) adopta la siguiente forma:

$$b^2 g_{tt} + 2b g_{t\phi} + g_{\phi\phi} = 0. \tag{1.34}$$

Al resolver la Ec. (1.35) para b, obtenemos:

$$b_\pm = \frac{-g_{t\phi} \pm \sqrt{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}}{g_{tt}}, \tag{1.35}$$

la cual nos arroja dos valores diferentes del parámetro de impacto que corresponden a dos valores distintos del corrimiento al rojo o al azul, que a su vez corresponden a dos puntos en la órbita que representan las posiciones de mayor deflexión de la luz debido a que la distancia perpendicular entre la trayectoria del fotón y el origen del potencial central es máxima con respecto a un observador (veáse Fig. 1.2). Esto será de gran utilidad al calcular los corrimientos al rojo o al azul de los fotones emitidos por las partículas masivas orbitantes.

Óbitas circulares y acotadas en el plano ecuatorial

En la sección anterior, se hallaron las componentes de la 4-velocidad y el parámetro de impacto aparente en el caso más general, sin determinar E y L en términos de los parámetros del AN de Kerr. Por simplicidad, tomaremos el caso para órbitas circulares en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$), lo cual implica

que $U^r = 0 = U^\theta$ y, por lo tanto, $V_{ef} = 0$ (1.23); también impondremos la condición $dV_{ef}/dr = 0$ para garantizar las órbitas circulares a partir del mínimo del potencial efectivo.

Las últimas condiciones nos llevan a las siguiente relaciones:

$$E = \frac{r^{3/2} - 2Mr^{1/2} \pm aM^{1/2}}{r^{3/4}\left(r^{3/2} - 3Mr^{1/2} \pm 2aM^{1/2}\right)^{1/2}} \tag{1.36}$$

y

$$L = \pm\frac{M^{1/2}\left(r^2 \mp 2aM^{1/2}\, r^{1/2} + a^2\right)}{r^{3/4}\left(r^{3/2} - 3Mr^{1/2} \pm 2aM^{1/2}\right)^{1/2}}\,, \tag{1.37}$$

donde el signo superior indica que la partícula gira de manera corrotante y la contrarrotación de la partícula orbitante es el signo inferior (veáse [41] para el cáculo detallado de estas magnitudes). Finalmente, introduciendo (1.36) y (1.37) en (1.26) y (1.27), se llega a las siguientes expresiones:

$$U^t(r, \pi/2) \;=\; \frac{\left(r^{3/2} \pm aM^{1/2}\right)}{r^{3/4}\sqrt{r^{3/2} - 3Mr^{1/2} \pm 2aM^{1/2}}} \tag{1.38}$$

y

$$U^\phi(r, \pi/2) \;=\; \frac{\pm M^{1/2}}{r^{3/4}\sqrt{r^{3/2} - 3Mr^{1/2} \pm 2aM^{1/2}}}\,. \tag{1.39}$$

Para obtener expresiones más generales, ya sean órbitas elípticas o fuera del plano ecuatorial, será necesario imponer otras restricciones para las órbitas de las partículas, así como hacer uso de $Q \neq 0$. En el caso de Sgr A*, la mayoría de las órbitas elípticas del conjunto S0 tienen una gran excentricidad y se encuentran muy apartadas del plano ecuatorial. Sin embargo, las órbitas elípticas con poca excentricidad se pueden aproximar a estas expresiones, siempre y cuando se encuentren en el plano ecuatorial.

Además, las órbitas acotadas tienen la restricción que su energía debe ser $E < 1$ y $Q \geq 0$ [40], mientras que para las partículas luxoides se debe cumplir que $E > 1$. Otra restricción para las trayectorias circulares es el radio orbital máximo que las partículas vecinas que pueden alcanzar sin caer al agujero negro,

esta condición se encuentra cuando $E = 1$ de la Ec. (1.36) [40], que es dada de la siguiente forma:

$$r > 2M \mp a + 2\sqrt{M}\sqrt{M \pm a}. \tag{1.40}$$

Sumado a esto, se tiene otra condición para las órbitas estables, la cual se obtiene de la estabilidad $V''_{ef} > 0$ [39]:

$$\begin{aligned} r &\geq M\left[3 + Z_2 \mp \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)}\right], \\ Z_1 &\equiv 1 + \left(1 - \frac{a^2}{M^2}\right)^{1/3}\left[\left(1 + \frac{a}{M}\right)^{1/3} + \left(1 - \frac{a}{M}\right)^{1/3}\right] \\ Z_2 &\equiv \sqrt{3\frac{a^2}{M^2} + Z_1^2}, \end{aligned} \tag{1.41}$$

donde el signo superior equivale a corrotación y el signo inferior a la contrarrotación en las desigualdades (1.40) y (1.41).

Por último, el parámetro de impacto aparente en el plano ecuatorial, se deduce de la Ec. (1.35) con $\theta = \pi/2$, de la siguiente forma:

$$b_{\pm} = \frac{-2aM \pm r\sqrt{r^2 + a^2 - 2Mr}}{r - 2M}. \tag{1.42}$$

En esta expresión se obtienen dos valores distintos para los corrimientos al rojo (con b_-) y al azul (con b_+).

Corrimientos al rojo

En esta sección, repasaremos el trabajo previo [19] donde se obtuvo un formalismo relativista para lograr expresiones para la masa M y el parámetro de espín a del AN de Kerr en términos de los corrimientos de partículas geodésicas. En general, la frecuencia de un fotón medido por un observador con 4-velocidad U^{μ}_{P} en la posición P es:

$$\omega_P = -k_\mu U^\mu \mid_P, \tag{1.43}$$

donde P puede corresponder a la posición e del emisor o d del detector, lo cual nos lleva a dos frecuencias:

$$\omega_e = -k_\mu U^\mu \mid_e, \qquad \omega_d = -k_\mu U^\mu \mid_d, \tag{1.44}$$

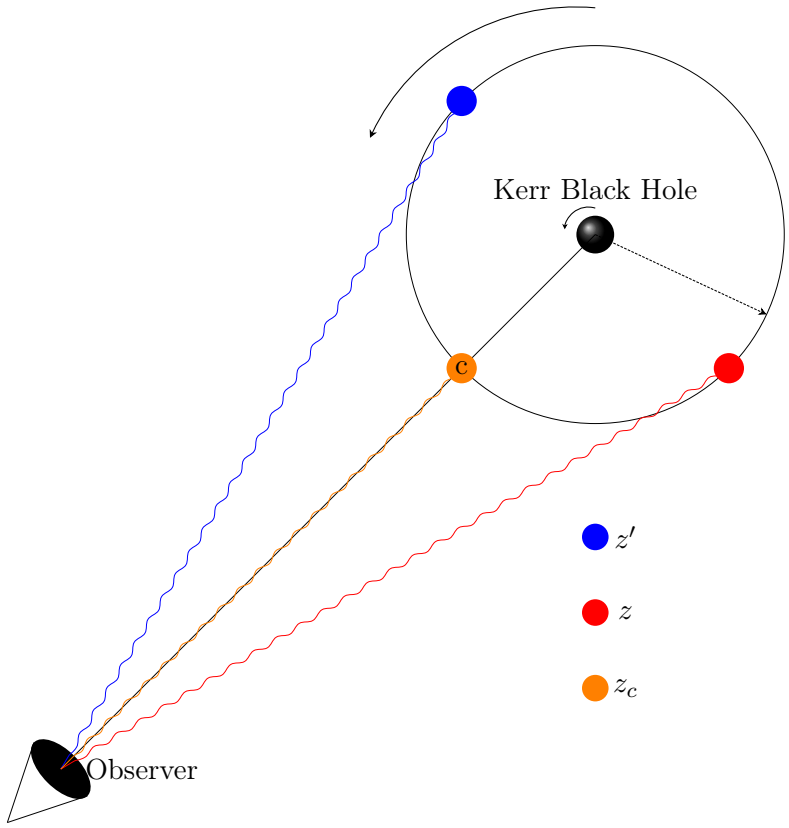

Figura 1.2: La distancia del observador al AN es r_d y la distancia del AN a un punto de la órbita es r_e. La onda naranja es el corrimiento z_c con el menor efecto Doppler en la línea de visión entre el observador y el AN. Las ondas roja y azul son los corrimientos con un parámetro de impacto máximo $b_\pm$.

donde $U^\mu \mid_e = U^\mu(r_e)$ y $U^\mu \mid_d = U^\mu(r_d)$, al igual que los 4-momentos de los fotones emitidos.

Entonces, el cambio de frecuencia asociado a la emisión y detección de los fotones es en general dado por la siguiente relación:

$$\begin{aligned} 1+Z &= \frac{\omega_e}{\omega_d} \\ &= \frac{\left(E_\gamma U^t - L_\gamma U^\phi - g_{rr}U^r k^r - g_{\theta\theta}U^\theta k^\theta\right)\mid_e}{\left(E_\gamma U^t - L_\gamma U^\phi - g_{rr}U^r k^r - g_{\theta\theta}U^\theta k^\theta\right)\mid_d}, \end{aligned}$$

esta definición de corrimiento al rojo incluye la información de cualquier tipo de órbita (circular, elíptica, irregular, etc.). Además, ésta nos arroja el valor del corrimiento al rojo en cualquier posición de la órbita.

Para el caso de órbitas circulares en el plano ecuatorial, se tiene que $U^r =$

$0 = U^\theta$ para el emisor y el observador. Entonces, la Ec. (1.45) se convierte en:

$$1 + Z = \frac{\left(E_\gamma U^t - L_\gamma U^\phi\right)\big|_e}{\left(E_\gamma U^t - L_\gamma U^\phi\right)\big|_d} = \frac{U_e^t - b_e\, U_e^\phi}{U_d^t - b_d\, U_d^\phi} \quad , \tag{1.45}$$

debido a que la energía E_γ y el momento angular L_γ del fotón se conserva a lo largo de toda su trayectoria, se descarta cualquier tipo de interacción del fotón durante el trayecto entre el emisor y el detector. Asimismo, esta restricción de no interacción nos lleva a $b_e = b_d$, lo cual es una relación importante ya que conecta el radio del emisor r_e con el radio del detector r_d junto con los parámetros del AN de Kerr.

Por otro lado, cuando el observador se encuentra a una distancia tal que $r_d \gg M \geq a$, se tiene que las componentes de la 4-velocidad en el punto d tienden a $U_d^t \to 1$ y $U_d^\phi \to 0$. Entonces, realizando esta aproximación en la Ec. (1.45) obtenemos:

$$1 + Z = U_e^t - b_e\, U_e^\phi \quad . \tag{1.46}$$

Recordando los dos valores máximos del parámetro de impacto aparente, la relación nos arroja dos expresiones para el corrimiento al rojo:

$$1 + Z \equiv U_e^t - b_-\, U_e^\phi, \qquad 1 + Z' \equiv U_e^t - b_+\, U_e^\phi. \tag{1.47}$$

Posteriormente, tomamos en cuenta la posición donde la deflexión de la luz es mínima, es decir, cuando $b_e = 0$ que nos arroja el corrimiento central de la siguiente forma:

$$1 + z_c \equiv U_e^t = \frac{\left(r^{3/2} \pm aM^{1/2}\right)}{r^{3/4}\sqrt{r^{3/2} - 3Mr^{1/2} \pm 2aM^{1/2}}}, \tag{1.48}$$

este corrimiento corresponde al punto C en la Fig. 1.2. Ahora restamos la Ec. (1.48) de las expresiones (1.47) y de esa forma obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} z \equiv Z - z_c \;\; &= -U^\phi b_- \\ &= \frac{\pm M^{1/2}\left(2aM + r\sqrt{r^2 + a^2 - 2Mr}\right)}{r^{3/4}\,(r - 2M)\,\sqrt{r^{3/2} - 3Mr^{1/2} \pm 2aM^{1/2}}} \end{aligned} \tag{1.49}$$

y

$$z' \equiv Z' - z_c = -U^{\phi} b_{+} = \frac{\pm M^{1/2}\left(2aM - r\sqrt{r^2 + a^2 - 2Mr}\right)}{r^{3/4}\left(r - 2M\right)\sqrt{r^{3/2} - 3Mr^{1/2} \pm 2aM^{1/2}}}, \tag{1.50}$$

donde el signo superior significa la corrotación y el signo inferior es la contrarrotación. Las Ecs. (1.49) y (1.50) representan los corrimientos medidos desde los puntos que se muestran en la Fig. 1.1. Además, se puede notar que cuando la partícula es corrotante con el AN de Kerr, z es el corrimiento al rojo debido a que la partícula de prueba se aleja del observador y z' es el corrimiento al azul ya que se acerca al detector, y viceversa si el movimiento de la partícula es contrarrotante. También, podemos observar que si tomamos el caso de Schwarzschild ($a = 0$), las Ecs. (1.49) y (1.50) son $z = -z'$.
Definiendo $\alpha = (z + z')^2$ y $\beta = (z - z')^2$, se logra tener una expresión para el cuadrado de a:

$$a^2 = \frac{\alpha\, r^3\, (r - 2M)}{4\,\beta\, M^2 - \alpha\, r^2}. \tag{1.51}$$

Sin embargo, sustituyendo la Ec. (1.51) en alguna de las expresiones (1.49) o (1.50), se llega a obtener una ecuación polinomial de octavo grado para M:

$$\left[16\, r_e M^3 - \left(4\beta M^2 - \alpha r_e^2\right)\left(r_e - 2M\right)\left(r_e - 3M\right)\right]^2 = 4\alpha r_e^2 M\left(r_e - 2M\right)^3\left(4\beta M^2 - \alpha r_e^2\right), \tag{1.52}$$

la cual no tiene una solución algebraica exacta. A pesar de esto, es posible resolver numéricamente la Ec. (1.52), obteniendo ocho raíces de las que solo se tomarán en cuenta las raíces reales y positivas. Estas raíces serán soluciones físicas si cumplen las condiciones de circularidad (1.40), de estabilidad (1.41) y preservan el signo en la signatura de la métrica.

Capítulo 2

La masa M y el parámetro de rotación a en términos de observaciones

En este capítulo nos enfocaremos en la obtención de fórmulas relativistas para la masa M y el parámetro de rotación a del AN de Kerr en términos de cantidades observacionales, a saberse de: z, z' y z_c, como también del radio orbital r de la partícula orbitante.

2.1. M en términos de los corrimientos de fotones emitidos por tres partículas orbitantes

Empezaremos por considerar un sistema de tres partículas de prueba que rotan circularmente en el plano ecuatorial alrededor del AN de Kerr. Cada una de estas partículas tendrá un radio orbital: r_1, r_2 y r_3 que deberá cumplir con la restricción $r_1 < r_2 < r_3$ (ver Fig. 2.1).

Entonces, cada partícula, etiquetada con el índice i, tiene su expresión para $\alpha_i = (z_i + z_i')^2$ y $\beta_i = (z_i - z_i')^2$, y realizando el cociente entre estas dos cantidades obtenemos:

$$\gamma_i = \frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{4a^2M^2}{r_i^2\left[r_i^2 + a^2 - 2Mr_i\right]} \qquad i = 1, 2, 3. \tag{2.1}$$

Debido a que cada una de las partículas obedece la ecuación (2.1) y consideramos que únicamente interactúa con el AN de Kerr, estamos ignorando las pequeñas correcciones provenientes de la interacción entre las partículas de prueba.

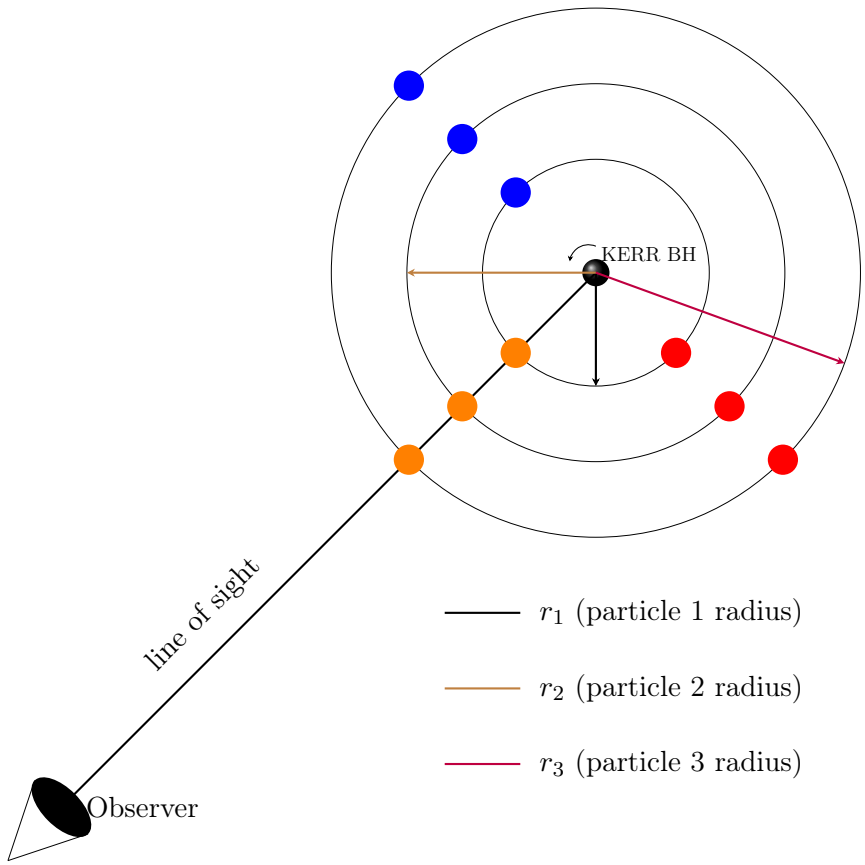

Figura 2.1: La línea del observador al Agujero Negro es $r_d >> r_e$. Las tres partículas orbitantes son tratadas como partículas puntuales y los puntos en color son las posiciones donde los corrimientos al rojo o al azul, como z_c, deben ser medidos.

Entonces, dividiendo la expresión (2.1) para la partícula 1 entre esa misma expresión para la partícula 2 y realizando la misma operación entre la partícula 2 y la 3, obtenemos:

$$a^2 = \frac{\gamma_2 r_2^3(r_2 - 2M) - \gamma_1 r_1^3(r_1 - 2M)}{\gamma_1 r_1^2 - \gamma_2 r_2^2}\,, \tag{2.2}$$

$$a^2 = \frac{\gamma_3 r_3^3(r_3 - 2M) - \gamma_2 r_2^3(r_2 - 2M)}{\gamma_2 r_2^2 - \gamma_3 r_3^2}\,. \tag{2.3}$$

Las Ecs. (2.2) y (2.3) son expresiones analíticas para el parámetro de espín de la fuente central. Después, igualando (2.2) y (2.3), se llega a tener una ecuación lineal para la masa M del AN de Kerr en términos de los corrimientos al rojo

y al azul de tres partículas de prueba junto con sus radios orbitales:

$$M = \frac{1}{2}\frac{\sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}\gamma_i\gamma_j r_i^2 r_j^2 (r_j^2 - r_i^2)}{\sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}\gamma_i\gamma_j r_i^2 r_j^2 (r_j - r_i)} \,. \tag{2.4}$$

Una vez que la estimación de M se ha hecho con la Ec. (2.4), se debe ingresar ese valor en la Ec. (2.2) o (2.3) para obtener una estimación relativista para el valor del parámetro de espín del AN de Kerr. Por lo tanto, con este método hemos escrito expresiones relativistas para la masa M y el parámetro de rotación a en términos de doce datos observacionales de tres partículas orbitantes: tres diferentes corrimientos al rojo para cada partícula y tres radios orbitales, por lo que fue conveniente introducir más parámetros observacionales para reducir el grado del polinomio de la Ec. (1.52).

2.2. M y a en términos de los corrimientos de fotones emitidos por dos partículas orbitantes

Ahora consideramos un sistema de dos partículas orbitantes que siguen rotando circularmente en el plano ecuatorial alrededor del AN de Kerr con radios orbitales r_1 y r_2 (Ver Fig. 2.2). Para este sistema, será útil definir $r_1 = r$ y $r_2 = \lambda r$ tal que $\lambda \equiv r_2/r_1 > 1$. Para la primera partícula, la Ec. (1.51) tiene la forma:

$$a^2 = \frac{\alpha_1 r^3 (r - 2M)}{4\beta_1 M^2 - \alpha_1 r^2} \,, \tag{2.5}$$

y para la segunda partícula es:

$$a^2 = \frac{\alpha_2 (\lambda r)^3 (\lambda r - 2M)}{4\beta_2 M^2 - \alpha_2 (\lambda r)^2} \,. \tag{2.6}$$

Nuevamente consideramos que las partículas no interactúan entre sí y únicamente los efectos observables son debidos a cada partícula con el AN, por lo que podemos igualar (2.5) con (2.6):

$$\begin{aligned} &8(\alpha_1\beta_2 - \lambda^3\alpha_2\beta_1)\frac{M^3}{r^3} - 4(\alpha_1\beta_2 - \lambda^4\alpha_2\beta_1)\frac{M^2}{r^2} + \\ &2\lambda^2(\lambda - 1)\alpha_1\alpha_2\frac{M}{r} - \lambda^2(\lambda^2 - 1)\alpha_1\alpha_2 = 0 \,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

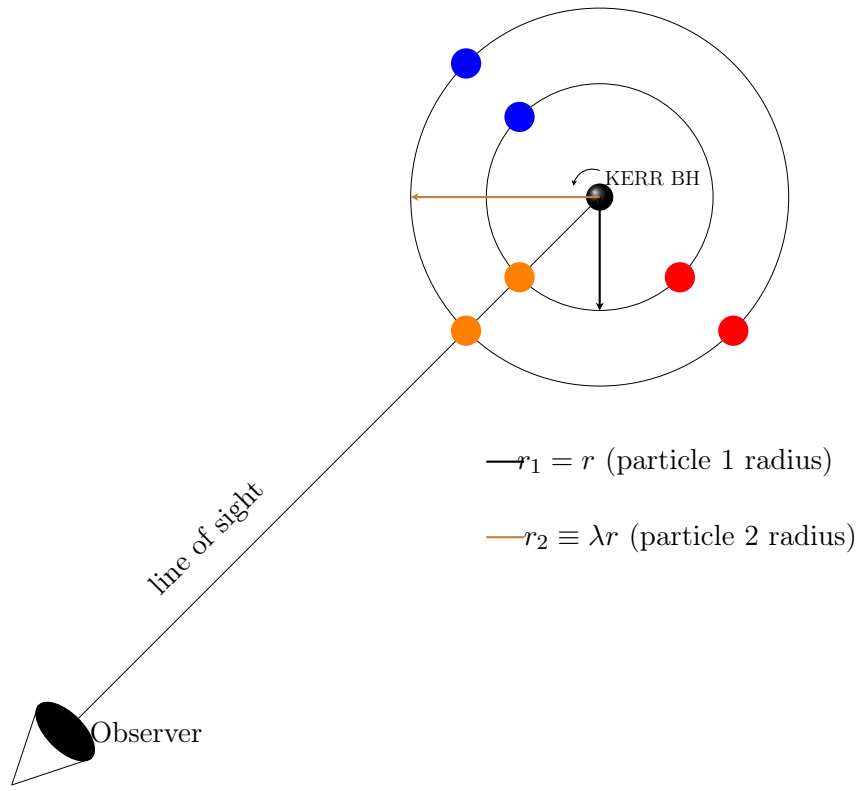

Figura 2.2: La distancia entre el observador y el AN $r_d >> r_e$. Los puntos de colores representan las mismas posiciones que en la Fig. 2. La corrotación o la contrarrotación de las partículas orbitantes no tiene relevancia en nuestro análisis

La Ec. (2.7) es un polinomio de tercer grado para M y tiene tres raíces, debido a esto se debe proceder a estudiar su discriminante Δ_3 para saber cuántas raíces reales tiene. Para ello es necesario definir las siguientes expresiones:

$$p_3 \equiv \alpha_1\beta_2 - \lambda^3\alpha_2\beta_1, \tag{2.8}$$

$$p_2 \equiv \alpha_1\beta_2 - \lambda^4\alpha_2\beta_1 \tag{2.9}$$

y

$$p_1 \equiv \lambda^2(\lambda - 1)\alpha_1\alpha_2. \tag{2.10}$$

Entonces, la Ec. (2.7) se convierte en:

$$8p_3\frac{M^3}{r^3} - 4p_2\frac{M^2}{r^2} + 2p_1\frac{M}{r} - (\lambda + 1)p_1 = 0\,. \tag{2.11}$$

A fin de mostrar que p_3, p_2 y p_1 son positivos uno debe considerar las expresiones $\alpha_1 = (z(r) + z'(r))^2$, $\beta_1 = (z(r) - z'(r))^2$, $\alpha_2 = (z(\lambda r) + z'(\lambda r))^2$ y $\beta_2 =$

$(z(\lambda r) - z'(\lambda r))^2$ para el corrimiento al rojo y al azul (1.49) y (1.50) en estas definiciones (2.8)-(2.10). Además va a ser útil mostrar que $p_3 > p_2$; para esto se comparan p_3 y p_2 tomando en cuenta las desigualdades (1.40), (1.41) y la invariancia de la signatura de la métrica de Kerr.

Subsecuentemente, se puede expresar el discriminante Δ_3 de la expresión (2.11) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Delta_3 = 64p_1 \big[& p_2^2 p_1 - 4p_3 p_1^2 - 4(\lambda+1)p_2^3 \\ & -27(\lambda+1)^2 p_1 p_3^2 + 18(\lambda+1)p_3 p_2 p_1 \big] .\end{aligned} \tag{2.12}$$

Si el discriminante es negativo, entonces vamos a tener una única raíz real de la Ec. (2.7). Por lo tanto, supongamos que $\Delta_3 < 0$. Entonces la suma de los términos entre paréntesis en (2.12) debe ser negativa, lo cual nos arroja la siguiente desigualdad:

$$p_2^2 p_1 + 18(\lambda+1)p_3 p_2 p_1 < 4p_3 p_1^2 + 4(\lambda+1)p_2^3 + 27(\lambda+1)^2 p_1 p_3^2. \tag{2.13}$$

Después, comparamos ambos términos del primer miembro con el último del segundo miembro y expandiendo, tenemos:

$$p_2^2 + 18(\lambda+1)p_3 p_2 < 27p_3^2 + 27\lambda(\lambda+2)p_3^2. \tag{2.14}$$

Por último, se puede notar fácilmente que el primer término del primer miembro es menor que el primer término del segundo miembro y el segundo término del primer miembro es menor que el segundo del segundo miembro puesto que $\lambda > 1$ y $p_3 > p_2$. Por lo tanto, el discriminante es menor que cero y únicamente se tiene una raíz real dada de la siguiente forma:

$$M = \frac{\Psi + \left(\alpha_1\beta_2 - \lambda^4\alpha_2\beta_1\right)(4\chi)^{\frac{1}{3}} + (4\chi)^{\frac{2}{3}}}{6\left(\alpha_1\beta_2 - \lambda^3\alpha_2\beta_1\right)(4\chi)^{\frac{1}{3}}} r \tag{2.15}$$

donde tenemos que introducir las siguientes expresiones

$$\chi = \Phi + \sqrt{\Phi^2 - 4\Psi^3}\,, \tag{2.16}$$

$$\Psi = \alpha_1^2\beta_2\left[3\lambda^2(\lambda-1)\alpha_2-\beta_2\right]+2\lambda^4\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2- \lambda^5\alpha_2^2\beta_1\left[3(\lambda-1)\alpha_1+\lambda^3\beta_1\right], \tag{2.17}$$

y

$$\begin{aligned}\Phi = \quad & \left[\alpha_1\beta_2-\lambda^4\alpha_2\beta_1\right]\left[\alpha_1^2\beta_2\left(2\beta_2-9(\lambda-1)\lambda^2\alpha_2\right)\right. \\ & \left.+\lambda^5\alpha_2^2\beta_1\left(2\beta_1\lambda^3+9(\lambda-1)\alpha_1\right)-2\lambda^4\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\right] \\ & +27\lambda^2(\lambda^2-1)\left(\alpha_1^2\beta_2^2+\lambda^6\alpha_2^2\beta_1^2-2\lambda^3\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\right),\end{aligned} \tag{2.18}$$

proporcionando una fórmula relativista para la masa del AN de Kerr en términos de más datos observacionales.

Con esta expresión, es fácil obtener una fórmula para el parámetro de espín del AN de Kerr:

$$a^2=\frac{3\chi^{\frac{1}{3}}\epsilon\left(\Psi+\chi^{\frac{1}{3}}\Gamma\right)}{4^{\frac{2}{3}}\beta_1\left\{\Psi+\chi^{\frac{1}{3}}[\Gamma+3(\alpha_1\beta_2-\lambda^4\alpha_2\beta_1)]\right\}^2-9(4\chi)^{\frac{1}{3}}\epsilon}, \tag{2.19}$$

con

$$\Gamma = \chi^{1/3}-\epsilon-\lambda^4\alpha_2\beta_1, \tag{2.20}$$

donde $\epsilon \equiv \alpha_1\beta_2-\lambda^3\alpha_2\beta_1$.

Aquí se puede observar que no importa si una estrella o gas dado se encuentra orbitando de forma corrotante o contrarrotante al AN de Kerr debido a la dependencia cuadrática del parámetro de rotación a en las Ecs (2.5) y (2.6). Nuevamente, hemos reducido el problema original de una partícula con un polinomio de octavo grado para M con cuatro datos observacionales dado en [19], a una ecuación cúbica para M que necesita ocho datos observacionales en total.

2.3. M y a en términos de los corrimientos de fotones emitidos por una sola partícula

A pesar de los resultados previos en [19] para el caso de una partícula orbitante, uno puede conseguir un polinomio de tercer grado con las misma mediciones

observacionales requeridas en la Ec. (2.7). Para ello, es necesario utilizar el corrimiento central, i. e. el corrimiento con el menor efecto Doppler z_c. Elevemos al cuadrado la Ec. (1.48):

$$\kappa \equiv (1+z_c)^2 = \frac{\left(r^3 \pm 2aM^{1/2}r^{3/2} + a^2M\right)}{\left(r^3 - 3Mr^2 \pm 2aM^{1/2}r^{3/2}\right)}. \tag{2.21}$$

Además, realicemos el producto de las Ecs. (1.49) y (1.50):

$$\sigma \equiv zz' = -\frac{r^3 - (r+2M)a^2}{(r-2M)(r^3 - 3Mr^2 \pm 2ar^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}})}, \tag{2.22}$$

se puede notar que σ es negativo debido a que el término r^3 en el numerador es el dominante por la desigualdades enunciadas en el capítulo anterior. Entonces, despejando el término $\pm 2aM^{1/2}r^{3/2}$ en las Ecs. (2.21) y (2.22):

$$\pm 2ar^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}} = -\frac{r^3 - (r+2M)a^2 + \sigma(r-3M)(r-2M)r^2}{\sigma(r-2M)}, \tag{2.23}$$

$$\pm 2ar^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}} = \frac{r^3 + a^2M - \kappa(r-3M)r^2}{\kappa - 1} \tag{2.24}$$

e igualándolas obtenemos:

$$\begin{aligned} &[(\kappa-1)(r+2M) - \sigma(r-2M)]a^2 = \\ &3\sigma(r-2M)r^2 + (\kappa-1)r^3, \end{aligned} \tag{2.25}$$

debemos sustituir (1.51) para a^2 en Ec. (2.25) y conseguir un polinomio de tercer grado para M en términos de datos puramente observacionales:

$$\begin{aligned} &12\beta|\sigma|M^3 + 2\left[(\kappa - 1 - |\sigma|)(\alpha+\beta)\right. \\ &\left.-2\beta|\sigma|\right]M^2r + \alpha|\sigma|(M+r)r^2 = 0, \end{aligned} \tag{2.26}$$

donde $|\sigma| = -\sigma$. Una vez más se debe estudiar el discriminante Δ_3 para conocer el número de raíces reales que tiene la Ec. (2.26). Al escribir esta relación como:

$$12q_3\left(\frac{M}{r}\right)^3 + 2q_2\left(\frac{M}{r}\right)^2 + q_1\left(\frac{M}{r}+1\right) = 0. \tag{2.27}$$

Definimos los coeficientes q_3, q_2 y q_1 como el coeficiente cúbico, cuadrático y lineal en la Ec. (2.26), respectivamente. El correspondiente discriminante es dado por:

$$\Delta_3 = 4q_1\left[-8q_2^3 + q_2^2 q_1 - 972q_3^2 q_1 + 108q_1 q_2 q_3 - 12q_3 q_1^2\right]. \tag{2.28}$$

Es directo encontrar que:

$$q_3 > q_2 > q_1 > 0, \tag{2.29}$$

a partir de las definiciones de q_i. Por lo tanto, supongamos que $\Delta_3 < 0$; es decir, que la expresión entre corchetes es negativa:

$$108q_1 q_2 q_3 + q_2^2 q_1 < 972q_3^2 q_1 + 12q_3 q_1^2 + 8q_2^3. \tag{2.30}$$

Para demostrar que el discriminante $\Delta_3 < 0$, es necesario comparar los dos términos del primer miembro con el primer término en el segundo miembro de la desigualdad (2.30) de la siguiente manera:

$$0 < \left(486q_3^2 - q_2^2\right) + 54q_3\left(9q_3 - 2q_2\right) \tag{2.31}$$

Entonces por las desigualdades (2.29), podemos concluir que cada término entre paréntesis es positivo. Por lo tanto, el discriminante Δ_3 es negativo y la Ec. (2.26) tiene únicamente una raíz real dada por:

$$M = \frac{r}{18(2)^{\frac{1}{3}}\beta|\sigma|}\left\{(2)^{1/3}\left(-\Lambda + \frac{(2)^{1/3}\left[\Lambda^2 - 9\alpha\beta|\sigma|\right]}{\left[-\Lambda(\Lambda^2-\Xi) - \alpha\beta^2|\sigma|^3 + 9\beta\sqrt{3\alpha|\sigma|^3\Omega}\right]^{\frac{1}{3}}}\right)\right.$$
$$\left. + \left[-\Lambda(\Lambda^2-\Xi) - \alpha\beta^2|\sigma|^3 + 9\beta\sqrt{3\alpha|\sigma|^3\Omega}\right]^{\frac{1}{3}}\right\} \tag{2.32}$$

con las siguientes definiciones:

$$\Lambda \equiv [|\sigma| - (\kappa - 1)][\alpha + \beta] + 2|\sigma|\beta, \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}\Xi \equiv \quad & |\sigma|^2\beta(21\alpha - 8\beta) - \alpha^2(\kappa - 1 - |\sigma|)^2 \\ & -\beta^2(\kappa - 1 + |\sigma|)^2 - 2\alpha\beta(\kappa - 1)^2,\end{aligned} \tag{2.34}$$

y

$$\Omega \equiv 8\Lambda\Xi + 12(81\beta + \alpha)\beta\alpha|\sigma|^3\beta. \tag{2.35}$$

Al sustituir la Ec. (2.32) en Ec. (1.51) para expresar el parámetro de rotación a en términos de mediciones experimentales, obtenemos:

$$a^2 = 18\alpha\beta|\sigma|\eta^{1/3}r^2 \times \frac{2^{1/3}\left[9\beta|\sigma|-\Lambda\right]\eta^{1/3}-\left[2^{2/3}\left(\Lambda^2-9\alpha\beta|\sigma|\right)+\eta^{2/3}\right]}{\beta\left[2^{1/3}\Lambda\eta^{1/3}-4^{1/3}\left(\Lambda^2-9\alpha\beta|\sigma|\right)+\eta^{2/3}\right]^2-162(2)^{1/3}\alpha\beta^2|\sigma|^2\eta^{2/3}}, \tag{2.36}$$

donde

$$\eta \equiv \Lambda(\Lambda^2-\Xi)-\alpha\beta^2|\sigma|^3+9\beta\sqrt{3\alpha|\sigma|^3\Omega}. \tag{2.37}$$

Debemos mencionar que a partir de Ec. (2.36), no es posible inferir si la fuente central rota en el sentido de las manecillas del reloj o en contra de las mismas, respecto a nuestro sistema de referencia, debido a la dependencia cuadrática para el parámetro de espín como en el caso de 2 y 3 partículas orbitantes.

De esta forma hemos obtenido expresiones analíticas para la masa y el parámetro de rotación del AN de Kerr en términos de cantidades observables: z, z', z_c y r_e.

Capítulo 3

Conclusiones

En esta tesis, logramos obtener fórmulas analíticas para la masa M y el parámetro de rotación a de un AN de Kerr en términos de invariantes relativistas que son los corrimientos al rojo o al azul de fotones emitidos por partículas orbitantes, en constraste con los análisis newtonianos, utilizados en [13]-[26], que hacen uso de variables dependientes de las coordenadas como las velocidades radiales ($v_r \approx cz$) y las velocidades tangenciales (proporcionales al movimiento propio del cuerpo celeste). Además, los astrónomos pueden hacer uso de los distintos métodos propuestos en esta tesis para reducir el error estadístico que se pueda generar con una sola configuración.

Por otro lado, este método puede ser considerado como otra prueba para la Teoría de la Relatividad General en el régimen de campo gravitacional fuerte, debido a que los corrimientos están acotados por las condiciones (1.40) y (1.41). Si los corrimientos al rojo medidos por los astrónomos no corresponden con estas cotas, será necesario utilizar teorías de gravedad modificada para modelar los objetos astrofísicos rotatorios (ver [42] para resultados de este formalismo en una teoría de gravedad modificada).

Finalmente, nuestro método puede ser aplicable a un gran número de objetos astrofísicos como al conjunto de estrellas orbitantes en Sgr A* como también a otras galaxias como Andrómeda (M31), donde tiene dos gigantes rojas (conocidas como P1 y P2) cuya cinemática corresponde a órbitas circulares que tienen como centro gravitatorio a un hipotético AN supermasivo [20]. Además,

este método puede ser utilizado para un AN de masa intermedia como los detectados cerca de nuestro Centro Galáctico [43], en ω Cen [44], entre muchos otros. Por último, modificaciones adecuadas de los métodos pueden aplicarse a sistemas binarios, discos de acreción y al Sistema Solar a fin de estimar sus masas y sus parámetros de rotación de manera relativista.

Bibliografía

[1] Hughston, L., & Tod, K. 1991. An Introduction to General Relativity, 1st ed., Cambridge: Cambridge University Press.

[2] B. Carter, Phys. Rev. Lett. **26***, 331 (1971).*

[3] Psaltis, D. 2008, Living Rev. Rel. 11, 9.

[4] Bambi, C. 2011, Mod. Phys. Lett. A 26, 2453.

[5] Berti, E., Barausse, E., Cardoso, V., et al. 2015, Class. Quant. Grav. 32, 243001.

[6] Johannsen, T. 2016, Class. Quant. Grav. **33***, 113001.*

[7] Yagi, K. & Stein, L.C. 2016, Class. Quant. Grav. **33***, 054001.*

[8] Abbott, B.P.. et al. (LIGO Scientific and Virgo Collaboration) 2016, Phys. Rev. Lett. **116***, 061102.*

[9] Abbott, B. P. et al. (LIGO Scientific and Virgo Collaboration) 2016, Phys. Rev. Lett. **116***, 241103.*

[10] Abbott, B. P. et al. (LIGO Scientific and Virgo Collaboration) 2017, Phys. Rev. Lett. **118***, 221101.*

[11] Abbott, B. P. et al. (LIGO Scientific and Virgo Collaboration) 2017, Astrophys. J. Lett. **851***, L35.*

[12] Abbott, B. P. *et al. (LIGO Scientific and Virgo Collaboration) 2017, Phys. Rev. Lett.* **119***, 141101.*

[13] Shen, Z. Q., Lo, K. Y., Liang, M.-C., Ho P. T. P. & Zhao J.-H. 2005, Nature (London) ***438****, 62.*

[14] Ghez, A. M., Salim, S., Weinberg, N. N. , Lu, J. R., et al. 2008, Astrophys. J. ***689****, 1044.*

[15] Morris, M. R., Meyer, L. & Ghez, A. M. 2012, Research in Astron. Astrophys. ***12****, 995.*

[16] Eckart, A. & Genzel, R. 1996, Nature (London) ***383****, 415.*

[17] Begelman, M. B. 2003, Science ***300****, 1898.*

[18] R. Abuter et al. [GRAVITY Collaboration], Astron. Astrophys. **615***, L15 (2018)*

[19] Herrera-Aguilar, A. & Nucamendi, U. 2015, Phys. Rev. D **92***, 045024.*

[20] Bender, R., et al. 2005, Astrophys. J. ***6****31, 280.*

[21] Neumayer, N., Cappellari, M., Reunanen, J., et. al. 2007, Astrophys. J. ***6****71, 1329.*

[22] Silge, J. D., Gebhardt, K., Bergmann, M. & D. Richstone, 2005, Astron. J. ***1****30, 406.*

[23] Lindegren L. & Dravins D. 2003, A. & A., **401** *1185.*

[24] Zhang, F., Lu, Y. and Yu, Q., 2015 Astrophys. J. **809***, no. 2, 127.*

[25] Gillessen, S., Eisenhauer, F., Trippe, S., et al. 2009, Astrophys. J. ***692****, 1075.*

[26] Gillessen, S., Plewa, P. M., Eisenhauer, F., et al. 2017, Astrophys. J. **837***, 30.*

[27] Trippe S., et al., 2007, Mon. Not. R. Ast. Soc. 375, 764.

[28] Aschenbach, B., Grosso, N., Porquet, D. & Predehl, P. 2004, Astron. & Astrophys. ***417****, 71.*

[29] Aschenbach, B. 2004, Astron. & Astrophys. ***425****, 1075.*

[30] Aschenbach, B. 2006, Chin. J. Astron. Astrophys. ***6****, 221.*

[31] C. Goddi, et al. 2016 , Int. J. Mod. Phys. D 26, 02, 1730001.

[32] Doeleman, S. S., Weintroub, J., Rogers, A. E. E., et al., 2008 Nature (London) ***455****, 78.*

[33] Eisenhauer, F., Perrin, G., Brandner, W., et al. 2009, in Science with the VLT in the ELT Era, ed. A. F. M. Moorwood (Springer, New York), 361.

[34] Trippe, S., Davies, R., Eisenhauer, et al. 2010 , Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **402***, 1126.*

[35] Kerr, R. P. 1963, Phys. Rev. Lett. **11***, 237.*

[36] Hawking S. W. & Ellis G. F. R. 1973, The Large Scale Structure of Space-Time, Cambridge University Press.

[37] Carter, B. 1968, Phys. Rev. D ***174****, 1559.*

[38] Wald, R. 1984, General Relativity, University of Chicago Press, Ltd, London.

[39] Bardeen, J. M., Press, W. H. & S. Teukolsky, A. 1972, Astrophys. J. ***178****, 347.*

[40] Wilkins, D. C. 1972, Phys. Rev. D ***5****, 814.*

[41] Chandrasekhar, S. 1992, The Mathematical Theory of Black Holes. Clarendon Press, Oxford.

[42] Sheoran, P., Herrera-Aguilar, A. & Nucamendi, U. 2018, Phys. Rev. D ***97****, 124049.*

[43] Maillard, J. P., Paumard, T., Stolovy, S. R. & Rigaut, F. 2004, A. & A., ***4****23 155-167.*

[44] Noyola, E., Gebhardt, K., Kissler-Patig, M., et al. 2010, Astrophys. J. ***7****19, L60.*

[45] Stephani H. 2004, An Introduction to Special and General Relativity, 3ra. ed., Cambridge University Press, New York.