



**BUAP**

**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

Facultad de Ingeniería

Secretaría de Investigación y Estudios de Posgrado

**“MODELADO DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN  
MULTICONDUCTORA EN EL DOMINIO DE LA  
FRECUENCIA”**

TESIS

Que para obtener el grado de

**MAESTRO EN INGENIERÍA CON OPCIÓN TERMINAL  
EN SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA**

Presenta:

**Ing. Paola Rojas Gómez**

Asesor de tesis:

**Dr. Juan Carlos Escamilla Sánchez**

Puebla, Puebla

Diciembre 2018

# Índice

Capítulo 1 Generalidades.....	1
1.1. Introducción.....	1
1.2. Potencia natural de la línea de transmisión.....	3
1.3. Límites de Líneas de Transmisión .....	5
1.4. Flujos de potencia .....	6
1.4.1. Método Gauss-Seidel .....	11
1.4.2. Método Newton-Raphson .....	17
1.5. Clasificación de los modelos de líneas de transmisión .....	19
1.6. Modelos de líneas de transmisión .....	21
Capítulo 2 Modelado de la línea de transmisión monofásica .....	24
2.1. Introducción.....	24
2.2. Ecuaciones del Telegrafista .....	24
2.3. Modelo de dos puertos de la línea de transmisión monofásica en el dominio de la frecuencia .....	28
2.3.1. Matriz de transferencia y matriz cadena .....	28
2.3.2. Matriz de admitancia.....	30
2.4. Parámetros de la línea de transmisión monofásica.....	31
2.4.1. Cálculo de la Inductancia en una línea par abierto .....	31
2.4.2. Cálculo de la Capacitancia en una línea par abierto.....	34
2.4.3. Cálculo de la Inductancia, considerando el Efecto del Suelo.....	37
2.4.4. Cálculo de la Capacitancia, considerando el Efecto del Suelo .....	39
2.4.5. Inductancia debida al retorno por tierra .....	40
2.4.6. Impedancia interna del conductor .....	42
2.4.7. Impedancia serie generalizada .....	43
2.4.8. Admitancia en derivación generalizada .....	43
Capítulo 3 Modelado de la línea de transmisión multiconductora .....	45

3.1. Solución de las ecuaciones del telegrafista para una línea multiconductora en el dominio de la frecuencia .....	45
3.2. Modelo de dos puertos de la línea de transmisión en forma nodal o YBUS 51	
3.3. Método de las imágenes .....	53
3.4. Matriz de Impedancia de retorno por tierra propia .....	54
3.5. Matriz de Impedancia de retorno por tierra mutua .....	55
3.6. Distancias geométricas y de retorno por tierra.....	56
3.7. Impedancia $Z_c$ .....	57
3.8. Matriz de Capacitancias .....	58
3.9. Matriz de admitancia en derivación generalizada .....	59
Capítulo 4 Aplicación del modelo de la Línea de Transmisión .....	60
4.1. Introducción.....	60
4.2. Caso 1 .....	63
4.2.1. Simulación de cierre .....	63
4.2.2. Simulación de descarga.....	64
4.2.3. Simulación con función escalón.....	65
4.2.4. Simulación con variación de carga al final de la línea.....	66
4.2.5. Energización de una sola fase .....	67
4.3. Caso 2.....	68
4.3.1. Simulación de cierre .....	68
4.3.2. Simulación de descarga.....	69
4.3.3. Simulación con función escalón.....	70
4.3.4. Simulación con variación de carga al final de la línea.....	71
4.3.5. Energización de una sola fase .....	72
Capítulo 5 Conclusiones y trabajos futuros .....	73
5.1. Conclusiones.....	73
5.2. Trabajos futuros .....	74
Bibliografía .....	75

# Lista de figuras

Figura 1.1 Representación del circuito $\Pi$ equivalente .....	4
Figura 1.2 Comportamiento del SIL.....	5
Figura 1.3 Notación para la potencia activa en una barra para los estudios de flujo de potencia.....	8
Figura 1.4 Notación para la potencia reactiva en una barra para los estudios de flujo de potencia .....	9
Figura 1.5 Circuito equivalente del segmento de línea $\Delta\zeta$ .....	21
Figura 2.1 Circuito equivalente en Por Unidad .....	25
Figura 2.2 Condiciones frontera .....	29
Figura 2.3 Modelo de la matriz de admitancias de una línea monofásica .....	30
Figura 2.4 Representación de línea a par abierto .....	31
Figura 2.5 Representación de línea de par abierto .....	34
Figura 2.6 Densidad de superficie formada por efecto del suelo.....	37
Figura 2.7 Distancias para el cálculo de la inductancia geométrica .....	40
Figura 2.8 Parámetros de la línea de transmisión .....	44
Figura 3.1 Condiciones frontera .....	52
Figura 3.2 Método de las imágenes (izq) y Método de las imágenes complejas (der).....	54
Figura 3.3 Cálculo de distancias reales.....	56
Figura 4.1 Diagrama de análisis de problemas de sistemas eléctricos .....	61
Figura 4.2 Torres de simulación, Izq. Caso 1. Der. Caso 2.....	62
Figura 4.3 Inducción de las fases por energización .....	63
Figura 4.4 Respuesta de la línea a la descarga atmosférica.....	64
Figura 4.5 Aplicación de una fuente como función escalón .....	65
Figura 4.6 Amortiguación de transitorios en la línea de transmisión .....	66
Figura 4.7 Energización de fase A .....	67
Figura 4.8 Inducción de las fases por energización Caso 2 .....	68
Figura 4.9 Respuesta de la línea a la descarga atmosférica Caso 2 .....	69

Figura 4.10 Aplicación de una fuente como función escalón Caso 2 .....	70
Figura 4.11 Amortiguación de transitorios en la línea de transmisión Caso 2.....	71
Figura 4.12Energización de fase A Caso 2 .....	72

# Capítulo 1 Generalidades

## 1.1.Introducción

Para abastecer a los usuarios de energía eléctrica es necesario transportarla desde los centros de generación, ubicados generalmente muy lejos del punto donde se requiere, por lo tanto para poder cumplir con la demanda es necesaria la implementación de sistemas eléctricos de potencia, los cuales tienen como punto de inicio a las plantas generadoras que convierten energía mecánica a energía eléctrica; ésta energía es entonces transmitida a grandes distancias hacia los centros de consumo mediante sistemas de transmisión; finalmente, es entregada a los usuarios mediante redes de distribución. En algunos casos, el costo de la transmisión se puede disminuir y la confiabilidad incrementar a través del uso de la generación distribuida (numerosos y pequeños generadores ubicados en puntos estratégicamente seleccionados dentro del sistema de potencia, cercanos a los clientes), esta y otras fuentes distribuidoras (nombradas así porque ellas distribuyen a través del sistema muy cerca de los clientes), incluyendo sistemas de almacenamiento y manejos del lado de la demanda, algunas veces proporcionan grandes beneficios.

Esta alimentación debe de ser confiable, para que proporcione un flujo ininterrumpido de potencia estable a los clientes. La confiabilidad del sistema de distribución tiene la finalidad de distribuir toda la energía eléctrica demandada en un instante dado, no solo una parte de la energía. (1)

En el análisis de un sistema eléctrico se distinguen dos estados de operación, el estado estable y el dinámico o transitorio. Se dice que el sistema es estable cuando sus variables, voltajes, corrientes, etc., no varían en el tiempo, como en los sistemas de CD, o cuando son funciones periódicas en función del tiempo, circuitos de CA. Por lo tanto en el estado transitorio las variables del sistema no son periódicas, pero se amortiguan con el tiempo llegando a un nuevo estado estable. (2)

Entonces un transitorio eléctrico ocurre en un sistema de potencia cuando la red cambia de estado estable a otro. Esto puede ser provocado, por ejemplo, cuando una descarga atmosférica cae cerca de una línea de transmisión o directamente dentro de una subestación. Sin embargo, la mayoría de transitorios eléctricos se da como resultado de un cambio en las condiciones de la red derivado de cierres o aperturas de interruptores. A partir de esto se puede clasificar a los transitorios electromagnéticos en (2) (3) (4):

- Externos, debido a descargas atmosféricas y fallas en la red.
- Internos, causados por maniobras de interruptores.

La importancia de su estudio recae en el hecho de que, a pesar de que su duración oscila entre los micro y milisegundos, los fenómenos transitorios pueden ocasionar daños severos al sistema. Las características de estas sobretensiones, su amplitud, frecuencia y puntos de ocurrencia afectan el diseño del aislamiento de las líneas de transmisión, la selección de los equipos, ajustes de protecciones y la operación del sistema.

Los transitorios, según la energía que los genera, se dividen en electromecánicos, generados por la interacción de la energía mecánica de las máquinas rotatorias y la energía eléctrica del sistema, y en electromagnéticos, que son causados por la interacción entre la energía magnética almacenada en los inductores y la energía eléctrica almacenada en los capacitores. Estos últimos se manifiestan por medio de:

- Sobretensiones: Originadas por maniobras de interruptores, sobretensiones temporales (energización de líneas, cambios bruscos de carga, sobretensiones por falla, ferresonancia, conductor abierto) o por descargas atmosféricas.
- Sobrecorrientes: Son causadas por fallas en los aislamientos de los sistemas.
- Fenómenos electromecánicos: Analizados con estudios de estabilidad transitoria y resonancia subsíncrona.

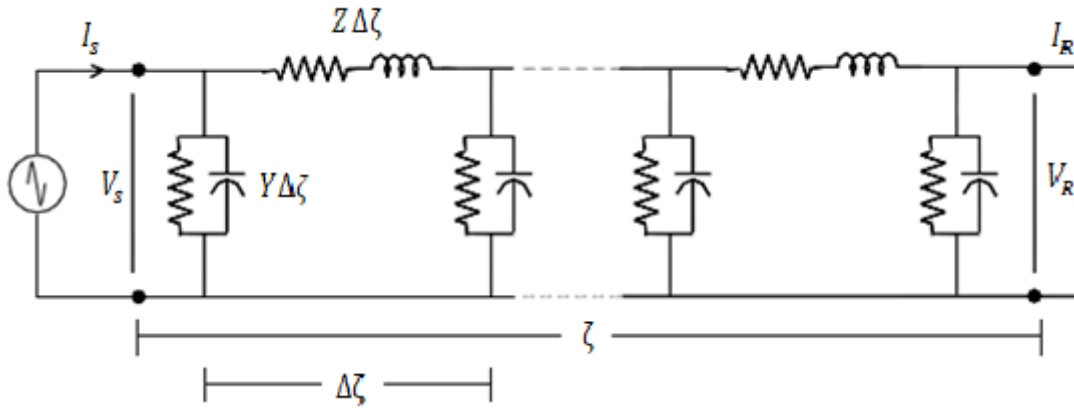
Para los estudios de estabilidad transitoria, el interés se centra en las ecuaciones electromecánicas del movimiento en contra parte para estudios de transitorios electromagnéticos se consideran la relación que existe entre campos eléctricos y magnéticos y su respuesta en tiempos muy cortos involucrando altas frecuencias. El problema se simplifica clasificando el comportamiento dinámico en dominios, y seleccionando los modelos matemáticos que representen de manera adecuada, la respuesta de los componentes para el dominio que interesa estudiar. Los estudios de estabilidad. Con base en los tiempos de respuesta de los componentes del sistema, se pueden clasificar en las siguientes tres categorías:

- Estabilidad transitoria, (pocos segundos)
- Regulación primaria, (varios segundos o pocos minutos) y
- Dinámica de calderas y controles, (varios minutos).

## **1.2.Potencia natural de la línea de transmisión**

Para la operación de los sistemas eléctricos, es importante conocer con la mayor exactitud posible los recursos de transmisión con que cuentan, esto les permite tomar decisiones más acertadas sobre la redistribución de flujos de potencia y medidas operativas adecuadas.

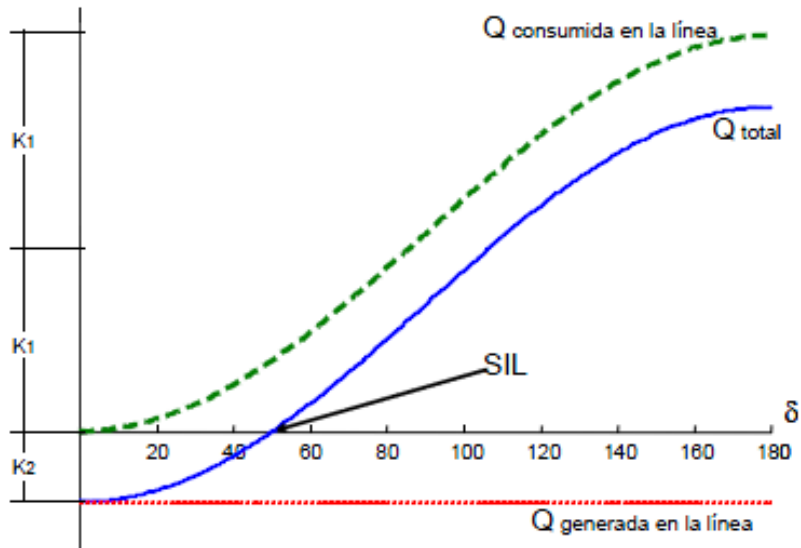
Las líneas de transmisión cortas se pueden modelar por medio de un circuito sencillo por medio de los parámetros concentrados, R, L y C. En cambio para líneas de longitud considerable comúnmente se utiliza la suposición de que la línea está compuesta por “n” circuitos  $\Pi$  equivalentes conectados en cascada, como se muestra en la figura 1.1:



**Figura 1.1 Representación del circuito  $\Pi$  equivalente**

Un concepto importante en sistemas de transmisión es la potencia natural de la línea. En la Figura 1.2 se observa que para ángulos de potencia pequeños, esto es, cuando no se transmite grandes cantidades de energía, la línea genera más potencia reactiva capacitiva que la potencia reactiva inductiva que consume. Al aumentar el ángulo de potencia se llega a un punto de equilibrio en el que la línea, observada desde sus extremos, no genera ni consume reactivos. A la potencia activa que se transmite en esta condición se le conoce como potencia natural de la línea SIL la cual está en función del voltaje de transmisión y de la impedancia característica como se define en la siguiente ecuación.

$$SIL = \frac{V^2}{Z_c}$$



**Figura 1.2 Comportamiento del SIL**

Para ángulos de potencia mayores, se transmite mayor cantidad de energía, la línea consume más potencia reactiva inductiva que la que se produce por efecto capacitivo. La máxima potencia se transmite para un ángulo de  $90^\circ$ .

### **1.3.Límites de Líneas de Transmisión**

En el caso de las líneas de transmisión la capacidad varía de acuerdo a la condición operativa. Cuando ocurre una falla en alguna línea de transmisión, si las protecciones operan correctamente y la línea sale de operación, la redistribución de los flujos de potencia puede llevar a rebasar los límites de otra u otras líneas del sistema y provocar que también operen sus protecciones. Una nueva redistribución de flujos provocaría seguramente en alguna otra línea del sistema problemas similares y así sucesivamente hasta llegar a una desarticulación del sistema. El escenario descrito requiere establecer límites de cargabilidad para las principales líneas de transmisión del sistema. Los cuales se clasifican como:

- Límite térmico de la línea: se basa en la corriente máxima que puede circular a través del conductor sin que el calentamiento producido por efecto Joule altere las características mecánicas y eléctricas.

- Limite por caída de voltaje máxima permisible en la línea: Este índice se relaciona con el servicio a los usuarios, ya que se debe mantener la magnitud de voltaje en los extremos de envío y de recepción, dentro de una banda de valores respecto al voltaje nominal de operación.
- Limite por el margen de estabilidad establecido para la operación segura del sistema: Este límite está dado por un margen de seguridad que permita al sistema soportar contingencias sin llegar a la pérdida de sincronismo, éste margen conocido como margen de estabilidad de estado estable (ME).

### 1.4. Flujos de potencia

El análisis de flujos de potencia tiene como objetivo encontrar los valores de voltaje nodal. Con estas variables conocidas, se determinan los flujos en las líneas de transmisión dados los niveles de demanda y generación, esta es una herramienta esencial para el análisis, planeación y diseño tanto de sistemas eléctricos, como la operación y control de los mismos.

Para resolver el problema de flujos de potencia, se pueden usar las admitancias propias y mutuas que componen la matriz de admitancias de barra  $Y_{bus}$  o las impedancias de que construyen  $Z_{bus}$ .

El punto de partida en la obtención de los datos que deben ser conocidos son: el diagrama unifilar del sistema, admitancias de las líneas, cargas en buses y generación en MW de los buses correspondientes. Para sistemas de transmisión las líneas se representan en diagrama unifilar (equivalente monofásico) en circuito nominal  $\pi$ .

Los valores numéricos para la admitancia total de la línea  $Y$  son necesarios para cada línea, de forma se pueda determinar todos los elementos de la matriz de admitancias de barra  $Y_{bus}$  de  $N \times N$  nodos, de la que un típico elemento  $Y_{ij}$  tiene la forma:

$$Y_{ij} = |Y_{ij}| \angle \theta_{ij} = |Y_{ij}| \cos \theta_{ij} + j|Y_{ij}| \sen \theta_{ij} = G_{ij} + jB_{ij} \quad (1-1)$$

donde  $G$  y  $B$  representan la conductancia y la suceptancia, respectivamente.

El voltaje en una barra típica  $i$  del sistema está dado en coordenadas polares como:

$$V_i = |V_i| \angle \delta_i = |V_i| (\cos \delta_i + j \sen \delta_i) \quad (1-2)$$

La corriente total que se inyecta en la red a través de la barra  $i$  en términos de los elementos  $Y_{in}$  de  $Y_{bus}$ , está dada por la sumatoria:

$$I_i = Y_{i1}V_1 + Y_{i2}V_2 + \dots + Y_{iN}V_N = \sum_{n=1}^N Y_{in}V_n \quad (1-3)$$

Sean  $P_i$  y  $Q_i$  las potencias real y reactiva totales que entran a la red a través de la barra  $i$ . Entonces, el complejo conjugado de la potencia que se inyecta a la barra  $i$  es:

$$P_i - Q_i = V_i^* \sum_{n=1}^N Y_{in}V_n \quad (1-4)$$

En la que se sustituyen las ecuaciones 1-1 y 1-2 para obtener:

$$P_i - Q_i = V_i^* \sum_{n=1}^N |Y_{in}V_iV_n| \angle (\theta_{in} + \delta_n - \delta_i) \quad (1-5)$$

Al expandir la ecuación 1-5 e igualar las partes real y reactiva, se obtiene:

$$P_i = \sum_{n=1}^N |Y_{in}V_iV_n| \cos(\theta_{in} + \delta_n - \delta_i) \quad (1-6)$$

$$Q_i = - \sum_{n=1}^N |Y_{in}V_iV_n| \sen(\theta_{in} + \delta_n - \delta_i) \quad (1-7)$$

Las ecuaciones 1-6 y 1-7 constituyen la forma polar de las ecuaciones de flujo de potencia; ellas dan valores calculados para la potencia real  $P_i$  y la potencia reactiva  $Q_i$  totales que entran a la red a través de una barra típica  $i$ .

Sea  $P_{gi}$  la potencia programada que se esta generando en la barra  $i$  y  $P_{di}$  la potencia programada que demanda la carga en esa barra. Entonces la expresión  $P_{jprog} = P_{gi} - P_{di}$  da la potencia programada total que está siendo inyectada dentro de la red en la barra  $i$ .

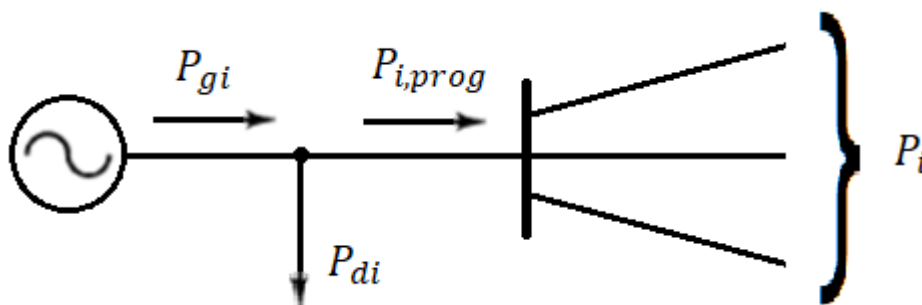


Figura 1.3 Notación para la potencia activa en una barra para los estudios de flujo de potencia

Se nombra al valor calculado de  $P_i$  como  $P_{i,cal}$  y se llega a la definición de error  $\Delta P_i$  como el valor programado  $P_{i,prog}$  menos el valor calculado  $P_{i,cal}$ :

$$\Delta P_i = P_{i,prog} - P_{i,cal} = (P_{gi} - P_{di}) - P_{i,cal} \quad (1-8)$$

Cuando ya se llegue a la solución el error será aproximadamente cero, por lo que:

$$0 \approx error_{tol} = \Delta P_i = P_{i,prog} - P_{i,cal}$$

$$0 = P_{i,prog} - P_{i,cal} \quad P_{i,prog} = P_{i,cal} \quad P_{gi} = P_{i,calc} + P_{di}$$

$P_{i,calc}$  se calcula por la ecuación 1-6

$$P_{i,calc} = P_i = \sum_{n=1}^N |Y_{in} V_i V_n| \cos(\theta_{in} + \delta_n - \delta_i)$$

de la misma manera, para la potencia reactiva en la barra  $i$  se tiene:

$$\Delta Q_i = Q_{i,prog} - Q_{i,cal} = (Q_{gi} - Q_{di}) - Q_{i,cal} \quad (1-9)$$

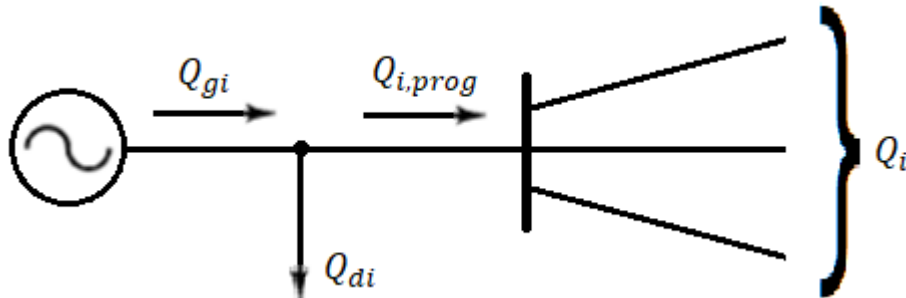


Figura 1.4 Notación para la potencia reactiva en una barra para los estudios de flujo de potencia

Los errores ocurren durante el desarrollo de la solución de un problema de flujos de potencia, cuando los valores calculados de  $P_i$  y  $Q_i$  no coinciden con los valores programados. Si los valores calculados  $P_{ical}$  y  $Q_{ical}$  igualan perfectamente a los valores programados  $P_{i,prog}$  y  $Q_{i,prog}$ , se dice que los errores  $\Delta P_i$  y  $\Delta Q_i$  son cero en la barra  $i$  y se tienen las siguientes ecuaciones de balance de potencia:

$$g_i' = P_i - P_{i,prog} = P_i - (P_{gi} - P_{di}) = 0 \quad (1-10)$$

$$g_i'' = Q_i - Q_{i,prog} = Q_i - (Q_{gi} - Q_{di}) = 0 \quad (1-11)$$

Las funciones  $g_i'$  y  $g_i''$  son convenientes, como se verá al formular el método de Newton Raphson, para escribir ciertas ecuaciones que incluyen los errores  $\Delta P_i$  y  $\Delta Q_i$ .

Si la barra  $i$  no tiene generación o carga, los términos correspondientes son iguales a cero en las ecuaciones 1-10 y 1-11. Cada barra de la red tiene dos de estas ecuaciones y el problema de flujos de potencia consiste en resolver las ecuaciones 1-6 y 1-7 para valores de voltajes de barra desconocidos que originen que las ecuaciones 1-10 y 1-11 se satisfagan numéricamente en cada barra.

Si no hay un valor programado  $P_{i,prog}$  para la barra  $i$  entonces no se puede definir el error  $\Delta P_i = P_{i,prog} - P_{i,cal}$  y no hay requisito que deba satisfacer la ecuación 1-10 correspondiente en el desarrollo del proceso de solución del problema de flujos de potencia. De manera similar si no se especifica  $Q_{i,prog}$  en la barra  $i$ , entonces no se tiene que satisfacer la ecuación 1-11.

Cuatro cantidades potencialmente desconocidas que se asocian con cada barra  $i$  son  $P_i$ ,  $Q_i$ , el ángulo del voltaje  $\delta_i$  y la magnitud del voltaje  $|V_i|$ . A lo más hay dos ecuaciones como las ecuaciones 1-10 y 1-11 disponibles para cada nodo y así, se debe considerar como se puede reducir el número de cantidades desconocidas para que se tenga el mismo número de ecuaciones disponibles antes de empezar a resolver el problema de flujos de potencia.

Para este estudio se consideran ecuaciones no lineales, debido a que la potencia eléctrica es el resultado del producto de  $V \cdot I$ , las cuales son cantidades complejas.

Los buses del sistema se clasifican en tres clases, que son:

1. Bus de referencia o compensador (en inglés “swing” o “slack”), es una referencia fasorial, este tomará los valores requeridos para que se cumpla el balance de las potencias en el sistema.
2. Bus PQ, también llamado bus de carga, en este se especifican las potencias inyectadas al bus, tanto activa como reactiva, quedando libre la magnitud y el ángulo de voltaje.
3. Bus PV, a veces denominado bus de generación, en este se especifican la potencia activa inyectada al bus y la magnitud del voltaje.

Las ecuaciones nodales  $I = Y_{bus}V$  son un conjunto de ecuaciones lineales análogas a  $y = Ax$ , este sistema de ecuaciones se resuelve, invariablemente, usando métodos iterativos, como Gauss-Seidel y Newton-Raphson

### 1.4.1. Método Gauss-Seidel

La complejidad de obtener una solución para el flujo de potencia en un sistema eléctrico se debe a las diferencias en el tipo de datos especificados para las diferentes clases de barra.

Las soluciones digitales de los problemas de flujos de potencia siguen un proceso iterativo al asignar valores estimados a los voltajes de barra desconocidos y calcular nuevos valores para cada voltaje de barra, a partir de los estimados en otras barras y de las potencias real y reactiva especificadas. Así se obtiene un nuevo conjunto de valores de barra. A cada cálculo de un nuevo conjunto de valores se le llama iteración. El proceso iterativo se repite hasta que los cambios en cada barra son menores que un valor mínimo especificado.

Para una mejor comprensión se desarrollaran ecuaciones para un sistema de 4 barras y después se escribirán las ecuaciones generales. Se denomina la barra de compensación con el número 1 y los cálculos comienzan con la barra número 2.

Si  $P_{i,prog}$  y  $Q_{i,prog}$  son las potencias real y reactiva programadas, respectivamente, que entran en la red en la barra 2, se obtiene la ecuación 1-12 con  $i$  igual a 2 y  $N$  igual a 4.

$$\frac{P_{2,prog} - Q_{2,prog}}{V_2^*} = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3 + Y_{24}V_4 \quad (1-12)$$

Al despejar  $V_2$  se tiene:

$$V_2 = \frac{1}{Y_{22}} \left[ \frac{P_{2,prog} - Q_{2,prog}}{V_2^*} - (Y_{21}V_1 + Y_{23}V_3 + Y_{24}V_4) \right] \quad (1-13)$$

Suponga que la barra 3 es también barra de carga con potencia real y reactiva especificadas. Una expresión similar a la ecuación 1-13 se puede escribir para cada barra, en la barra 3 se tiene:

$$V_3 = \frac{1}{Y_{33}} \left[ \frac{P_{2,prog} - Q_{3,prog}}{V_3^*} - (Y_{31}V_1 + Y_{32}V_2 + Y_{34}V_4) \right] \quad (1-14)$$

La solución se obtiene por la iteración que se basa en las potencias real y reactiva programadas en las barras 2, 3, y 4, el voltaje en la barra de compensación programado  $V_1 = |V_1| \angle \delta_1$  y las estimaciones iniciales de voltaje  $V_2^{(0)}$ ,  $V_3^{(0)}$  y  $V_4^{(0)}$  en las otras barras.

La solución de la ecuación 1-13 da el voltaje corregido  $V_2^{(1)}$  calculado de la ecuación:

$$V_2^{(1)} = \frac{1}{Y_{22}} \left[ \frac{P_{2,prog} - Q_{2,prog}}{V_2^{(0)*}} - (Y_{21}V_1 + Y_{23}V_3^{(0)} + Y_{24}V_4^{(0)}) \right] \quad (1-15)$$

En la que todas las cantidades en la expresión del lado derecho son especificaciones fijas o estimaciones iniciales. El valor calculado de  $V_2^{(1)}$  y el valor estimado  $V_2^{(0)}$  no serán iguales. La igualdad se alcanzara con un buen grado de exactitud después de varias iteraciones y podría ser el valor correcto de  $V_2$  con los voltajes estimados, pero sin considerar las potencias en las otras barras.

Sin embargo, este valor podría *no* ser la solución para  $V_2$  en las condiciones de flujos de potencia especificadas, porque los voltajes sobre los que se basa el cálculo de  $V_2$  son valores estimados de  $V_3^{(0)}$  y  $V_4^{(0)}$  en las otras barras y no se conocen todavía los voltajes reales.

A medida que se encuentra el voltaje en cada barra, su valor se va usando para calcular el voltaje en la siguiente barra.

Por lo tanto al sustituir  $V_2^{(1)}$  en la ecuación 1-4 se obtiene, se obtiene el primer valor calculado en la barra 3 y queda como sigue:

$$V_3^{(1)} = \frac{1}{Y_{33}} \left[ \frac{P_{2,prog} - Q_{3,prog}}{V_3^{(0)*}} - (Y_{31}V_1 + Y_{32}V_2^{(1)} + Y_{34}V_4^{(0)}) \right] \quad (1-16)$$

El proceso se repite en la barra 4 y en cada barra de manera consecutiva a través de la red (con la excepción de la barra de compensación) hasta completar la primera iteración en la que se encontraron valores calculados para cada variable de estado.

Entonces, se lleva a cabo una y otra vez el proceso completo hasta que la cantidad por corregir en el voltaje en cada barra es menor que algún índice de precisión determinado previamente. A este proceso de solución de las ecuaciones de flujos de potencia se le conoce como el *método iterativo de Gauss-Seidel*.

Para evitar la convergencia sobre una solución errónea, los valores iniciales son de magnitud razonable y no difieren demasiado en fase. Seleccionar los estimados iniciales de los voltajes desconocidos en todas las barras de carga iguales a  $1 \angle 0$  p. u., es una práctica común. A tal inicio se le conoce como *inicio plano* debido a la suposición del perfil uniforme de voltajes.

La ecuación general para el voltaje calculado en cualquier barra  $i$  de un sistema de  $N$  barras donde se programan  $P$  y  $Q$  es:

$$V_i^{(k)} = \frac{1}{Y_{ii}} \left[ \frac{P_{i,prog} - Q_{i,prog}}{V_i^{(k-1)*}} - \sum_{j=1}^{i-1} Y_{ij} V_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^N Y_{ij} V_j^{(k-1)} \right] \quad (1-17)$$

El superíndice  $(k)$  indica el número de la iteración en la que se está calculando el voltaje y  $(k - 1)$  indica el número de la iteración que le precede. Así, se observa que los valores para los voltajes de la sumatoria en el lado izquierdo de esta ecuación son los valores calculados más recientes para las barras correspondientes. Como la ecuación 1-17 solamente se aplica a las barras de carga donde se especifican las potencias real y reactiva, sería necesaria una etapa adicional en el caso de las barras de voltaje controlado donde la magnitud del voltaje se mantiene constante.

La experiencia con el método de Gauss-Seidel para la solución de flujos de potencia ha mostrado que se puede reducir el número de iteraciones requeridas si

la corrección en el voltaje de cada barra se multiplica por alguna constante que incremente la cantidad de cantidad de corrección para que el voltaje sea más cercano al valor al que se está aproximando. El multiplicador que lleva a cabo esta convergencia mejorada se llama *factor de aceleración*. La diferencia entre el valor de voltaje que recientemente se ha calculado y el mejor que previamente se evaluó en la barra, se multiplica por el factor de aceleración apropiado para obtener una mejor corrección que se añadirá al valor previo.

La barra 4 debe tratarse de manera diferente puesto que es de voltaje controlado. Cuando en una barra  $i$  se especifica la magnitud del voltaje en lugar de la potencia reactiva, las componentes real e imaginaria del voltaje para cada iteración se encuentran calculando primeramente un valor para la potencia reactiva. De la ecuación 1-4 se tiene:

$$Q_i = -Im \left\{ V_i^* \sum_{j=1}^N Y_{ij} V_j \right\} \quad (1-18)$$

que tiene la expresión algorítmica equivalente:

$$Q_i^{(k)} = -Im \left\{ V_i^{(k-1)*} \left[ \sum_{j=1}^{i-1} Y_{ij} V_j^{(k)} + \sum_{j=1}^N Y_{ij} V_j^{(k-1)} \right] \right\} \quad (1-19)$$

Donde  $Im$  denota “parte imaginaria de” y los superíndices indican la iteración apropiada. La potencia reactiva  $Q_i^{(k)}$  se evalúa por medio de la ecuación 1-19, este valor de  $Q_i^{(k)}$ , se sustituye en la ecuación 1-17 para encontrar un nuevo valor de  $V_i^{(k)}$ . En el ejemplo de las 4 barras la barra 4 es de voltaje controlado la ecuación 1-19 da el siguiente valor calculado:

$$Q_4^{(1)} = -Im \left\{ V_4^{(0)*} \left[ Y_{41} V_1 + Y_{42} V_{2,\alpha}^{(1)} + Y_{43} V_{3,\alpha}^{(1)} + Y_{44} V_4^{(0)} \right] \right\} \quad (1-20)$$

donde los voltajes calculados de las barras 2 y 3 son valores acelerados de la primera iteración.

Al sustituir  $Q_4^{(1)}$  por  $Q_{4,prog}$  en la ecuación 1-17 aplicada a la barra 4, se tiene:

$$V_4^{(1)} = \frac{1}{Y_{44}} \left[ \frac{P_{4,prog} - Q_4^{(1)}}{V_4^{(0)*}} - (Y_{41}V_1 + Y_{42}V_2^{(1)} + Y_{43}V_3^{(1)}) \right] \quad (1-21)$$

Y ahora todas las cantidades del lado derecho son conocidas. Como  $|V_4|$  es una cantidad especificada, se corrige la magnitud de  $V_4^{(1)}$  de la siguiente forma:

$$V_{4,corr}^{(1)} = |V_4| \frac{V_4^{(1)}}{|V_4|} \quad (1-22)$$

y se continua con el valor almacenado de  $V_{4,corr}^{(1)}$  de la barra 4.

Una vez finalizado el proceso iterativo ya se cuentan con los voltajes y ángulos en cada barra del sistema, entonces se procede a calcular la potencia inyectada a la red por las barras de generación con las ecuaciones 1-6 y 1-7. En concordancia con la ecuación 1-10 y 1-11, a la potencia inyectada se le suma la potencia de carga para obtener la potencia total generada en la barra, en este ejemplo se calculan  $P_1$ ,  $Q_1$  y  $Q_4$ . Para  $P_1$  1-6 quedaría de la siguiente manera:

$$P_{1,iny} = |Y_{11}V_1V_1| \cos(\theta_{11} + \delta_1 - \delta_1) + |Y_{12}V_1V_2| \cos(\theta_{12} + \delta_2 - \delta_1) + |Y_{13}V_1V_3| \cos(\theta_{13} + \delta_3 - \delta_1) + |Y_{14}V_1V_4| \cos(\theta_{14} + \delta_4 - \delta_1) \quad (1-23)$$

$$P_{1,total} = P_{1,iny} + P_{1,carga} \quad (1-24)$$

Para obtener los MW y MVARs producidos, la potencia se le multiplica por los  $MVA_{base}$  del sistema para  $P_1$ , quedaría de la siguiente manera:

$$P_{1,total,MW} = P_{1,total} * MVA_{base} \quad (1-25)$$

Con un procedimiento similar que el anterior se obtiene  $Q_1$ , a partir de las ecuaciones 1-7 y 1-11:

$$Q_{1,iny} = -|Y_{11}V_1V_1| \text{sen}(\theta_{11} + \delta_1 - \delta_1) - |Y_{12}V_1V_2| \text{sen}(\theta_{12} + \delta_2 - \delta_1) + |Y_{13}V_1V_3| \text{sen}(\theta_{13} + \delta_3 - \delta_1) \quad (1-26)$$

$$Q_{1,total} = Q_{1,iny} + Q_{1,carga} \quad (1-27)$$

$$Q_{1,total,MW} = Q_{1,total} * MVA_{base} \quad (1-28)$$

Para calcular las pérdidas de potencia en el sistema se realiza la sumatoria de la *potencia total generada* en cada barra, menos la sumatoria de las cargas del sistema, con la ecuación 1-12 y 1-13 respectivamente. En este ejemplo se suman la potencia real generada en las barras 1 y 4 menos la sumatoria de la potencia real de carga en todas las barras. Con lo cual quedaría de la como:

$$P_{pérdidas,MW} = (P_{1,total,MW} + P_{4,total,MW}) - (P_{1,carga} + P_{2,carga} + P_{3,carga} + P_{4,carga}) \quad (1-29)$$

También una vez finalizado el proceso iterativo se pueden calcular los flujos de potencia entre las barras, teniendo en cuenta que ya se conoce el voltaje en cada barra del sistema. Este flujo de potencia se calcula con la siguiente ecuación:

$$P_{ij} - jQ_{ij} = V_i^*(V_i - V_j)y_{ij} + V_i^*V_i \frac{y_{ij}}{2} \quad (1-30)$$

donde  $\frac{y_{ij}}{2}$  es la admitancia en paralelo.

### 1.4.2. Método Newton-Raphson

Para este caso se expresan los voltajes de barra y las admitancias de línea en forma polar para aplicarlo a la solución de ecuaciones de flujo de potencia. Cuando en las ecuaciones 1-6 y 1-7  $n$  se hace igual a  $i$  y los términos correspondientes de separan de las sumatorias se obtiene:

$$P_i = |V_i|^2 G_{ii} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N |Y_{in} V_i V_n| \cos(\theta_{in} + \delta_n - \delta_i) \quad (1-31)$$

$$Q_i = -|V_i|^2 B_{ii} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N |Y_{in} V_i V_n| \sen(\theta_{in} + \delta_n - \delta_i) \quad (1-32)$$

Estas ecuaciones se pueden derivar fácilmente con respecto a los ángulos y a las magnitudes de voltaje. Los términos que incluyen  $G_{ii}$  y  $B_{ii}$  surgen de la definición de  $Y_{ij}$  de 1-1 y del hecho de que el ángulo  $(\delta_n - \delta_i)$  sea cero cuando  $n = i$ .

Los errores de potencia para una barra típica de carga  $i$  en este método son similares a las ecuaciones 1-8 y 1-9:

$$\Delta P_i = P_{i,prog} - P_{i,cal} = (P_{gi} - P_{di}) - P_{i,cal} \quad (1-33)$$

$$\Delta Q_i = Q_{i,prog} - Q_{i,cal} = (Q_{gi} - Q_{di}) - Q_{i,cal} \quad (1-34)$$

Por simplicidad ahora se desarrollaran las ecuaciones de error para un sistema de 4 barras. En el desarrollo de 1-35 se toma en cuenta que las variables de estado son  $|V_i|$  y  $\delta_i$ . Para la potencia  $P$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta P_i = & \frac{\partial P_i}{\partial \delta_2} \Delta \delta_2 + \frac{\partial P_i}{\partial \delta_3} \Delta \delta_3 + \frac{\partial P_i}{\partial \delta_4} \Delta \delta_4 + \frac{\partial P_i}{\partial |V_2|} \Delta |V_2| + \frac{\partial P_i}{\partial |V_3|} \Delta |V_3| \\ & + \frac{\partial P_i}{\partial |V_4|} \Delta |V_4| \end{aligned} \quad (1-35)$$

Los últimos tres términos de la ecuación anterior, 1-35, se pueden multiplicar por sus respectivas magnitudes de voltaje sin alterar sus valores, obteniendo:

$$\Delta P_i = \frac{\partial P_i}{\partial \delta_2} \Delta \delta_2 + \frac{\partial P_i}{\partial \delta_3} \Delta \delta_3 + \frac{\partial P_i}{\partial \delta_4} \Delta \delta_4 + |V_2| \frac{\partial P_i}{\partial |V_2|} \frac{\Delta |V_2|}{|V_2|} + |V_3| \frac{\partial P_i}{\partial |V_3|} \frac{\Delta |V_3|}{|V_3|} + |V_4| \frac{\partial P_i}{\partial |V_4|} \frac{\Delta |V_4|}{|V_4|} \quad (1-36)$$

De manera similar se obtiene:

$$\Delta Q_i = \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_2} \Delta \delta_2 + \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_3} \Delta \delta_3 + \frac{\partial Q_i}{\partial \delta_4} \Delta \delta_4 + |V_2| \frac{\partial Q_i}{\partial |V_2|} \frac{\Delta |V_2|}{|V_2|} + |V_3| \frac{\partial Q_i}{\partial |V_3|} \frac{\Delta |V_3|}{|V_3|} + |V_4| \frac{\partial Q_i}{\partial |V_4|} \frac{\Delta |V_4|}{|V_4|} \quad (1-37)$$

Así, cada barra en el sistema que no es de compensación tiene dos ecuaciones parecidas a  $\Delta P_i$  y  $\Delta Q_i$ . Al juntar todas las ecuaciones de error de una matriz vector se llega a:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial \delta_4} & |V_2| \frac{\partial P_2}{\partial |V_2|} & \dots & |V_4| \frac{\partial P_2}{\partial |V_4|} \\ \vdots & J_{11} & \vdots & \vdots & J_{12} & \vdots \\ \frac{\partial P_4}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial P_4}{\partial \delta_4} & |V_2| \frac{\partial P_4}{\partial |V_2|} & \dots & |V_4| \frac{\partial P_4}{\partial |V_4|} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_4} & |V_2| \frac{\partial Q_2}{\partial |V_2|} & \dots & |V_4| \frac{\partial Q_2}{\partial |V_4|} \\ \vdots & J_{21} & \vdots & \vdots & J_{22} & \vdots \\ \frac{\partial Q_4}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial Q_4}{\partial \delta_4} & |V_2| \frac{\partial Q_4}{\partial |V_2|} & \dots & |V_4| \frac{\partial Q_4}{\partial |V_4|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\Delta \delta_2}{1} \\ \vdots \\ \frac{\Delta \delta_4}{1} \\ \frac{\Delta |V_2|}{|V_2|} \\ \vdots \\ \frac{\Delta |V_4|}{|V_4|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta P_2}{1} \\ \vdots \\ \frac{\Delta P_4}{1} \\ \frac{\Delta Q_2}{1} \\ \vdots \\ \frac{\Delta Q_4}{1} \end{bmatrix} \quad (1-38)$$

Debido a que  $\Delta P_1$  y  $\Delta Q_1$  están indefinidos cuando  $P_1$  y  $Q_1$  no se programan y que ambas correcciones son cero en la barra de compensación no se pueden incluir los errores para esta barra. La matriz anterior hace énfasis en los cuatro tipos diferentes de derivadas parciales que están en la *jacobiana J*

El proceso de solución de la ecuación 1-37 se encuentra por iteración de la siguiente manera:

1. Estimar valores  $\delta_i^{(0)}$  y  $|V_i^{(0)}|$  para las variables de estado.
2. Usar los estimados para calcular:

- a.  $P_{i,calc}^{(0)}$  y  $Q_{i,calc}^{(0)}$
  - b. Los errores  $\Delta P_i^{(0)}$  y  $\Delta Q_i^{(0)}$  de las ecuaciones
  - c. Los elementos de las derivadas parciales de la *matriz jacobiana*  $J$
3. Resolver la ecuación 1-37 para las corrientes iniciales.
  4. Sumar las correcciones encontradas a los estimados iniciales para obtener:

$$\delta_i^{(1)} = \delta_i^{(0)} + \Delta\delta_i^{(0)} \quad (1-39)$$

$$|V_i|^{(1)} = |V_i|^{(0)} + \Delta|V_i|^{(0)} = |V_i|^{(0)} \left( 1 + \frac{\Delta|V_i|^{(0)}}{|V_i|^{(0)}} \right) \quad (1-40)$$

5. Usar los nuevos valores de  $\delta_i^{(1)}$  y  $|V_i|^{(1)}$  como valores iniciales de la iteración 2 y continuar el proceso hasta alcanzar un error menor a una tolerancia determinada.

Para el caso de las barras de voltaje controlado se pueden tomar en cuenta si se tiene la forma polar de las ecuaciones de flujos de potencia. Por ejemplo, si la barra 4 del sistema de cuatro barras es una de voltaje controlado, entonces la  $|V_4|$  tiene un valor constante especificado y la corrección del voltaje  $\Delta|V_4|/|V_4|$  siempre deben ser cero. En consecuencia, la sexta columna de la jacobiana de la ecuación 1-37 siempre se multiplicara por cero y así puede ser eliminada.

Además como no se especifica a  $Q_4$ , no se puede definir el error  $\Delta Q_4$  y así se puede omitir la sexta fila de la ecuación 1-37 que corresponde a  $Q_4$ . Por supuesto,  $Q_4$  se puede calcular después de que se tiene disponible la solución del flujo de potencia.

### 1.5. Clasificación de los modelos de líneas de transmisión

Para el análisis de un sistema de transmisión eficiente de potencia de punto a punto se ocupan principalmente tres modelos de dos conductores, línea de transmisión de placas paralelas, líneas de transmisión de dos alambres y líneas de transmisión coaxial.

En el modelo de líneas de transmisión de dos alambres se considera una línea de transmisión uniforme que consiste en dos conductores perfectos en paralelo. La distancia de separación entre los dos conductores es pequeña en comparación con la longitud de onda de la señal que se propaga.

Las líneas de transmisión difieren de las redes eléctricas ordinarias en un aspecto fundamental: las dimensiones físicas de las redes eléctricas son mucho más pequeñas que la longitud de onda que se propaga, pero las líneas de transmisión normalmente son una fracción considerable de la longitud de onda e incluso su longitud puede ser de varias longitudes de onda. Los circuitos en una red eléctrica ordinaria se consideran discretos, y como tales pueden describirse con parámetros concentrados. Se supone que las corrientes que fluyen por elementos de circuito concentrado varían espacialmente de un elemento a otro y que no existen ondas estacionarias. Por otra parte, una línea de transmisión es una red de parámetros distribuidos y por consiguiente debe describirse con parámetros de circuitos concentrados a lo largo de ella (5).

Los parámetros que describen al modelo circuital son:

- Una resistencia, en  $\Omega$ , debido al material del conductor ( $R$ ).
- Una inductancia, en  $H$ , debido al campo magnético creado por las cargas en movimiento dentro de los conductores ( $L$ ).
- Una capacitancia, en  $F$ , la cual se debe al hecho de tener dos conductores a una cierta distancia con un dieléctrico, o bien, entre un conductor y el plano de tierra. ( $C$ )
- Una conductancia, en  $S$ , debido a las pérdidas en el dieléctrico. ( $G$ )

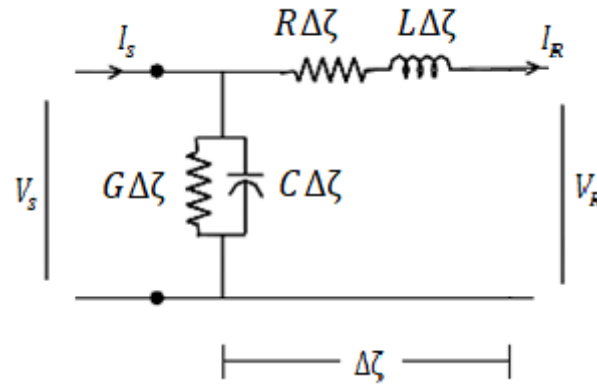


Figura 1.5 Circuito equivalente del segmento de línea  $\Delta\zeta$

Para incluir las pérdidas que se generan a lo largo de la línea, producidas por la resistencia del conductor, efecto piel, pérdidas en el dieléctrico, la influencia de la resistencia de tierra, el efecto corona, etc., se utiliza el modelo de parámetros distribuidos por lo cual la longitud total de la línea ( $\zeta$ ) se divide en un número infinito de secciones de longitud  $\Delta\zeta$ , así cada parámetro representa una porción infinitesimal del sistema y los valores de  $R\Delta\zeta$ ,  $L\Delta\zeta$ ,  $C\Delta\zeta$  y  $G\Delta\zeta$  son resistencia por unidad de longitud ( $\Omega/m$ ), inductancia por unidad de longitud ( $H/m$ ), capacitancia por unidad de longitud ( $F/m$ ) y conductancia por unidad de longitud ( $S/m$ ), respectivamente (6).

Los sistemas de parámetros concentrados sólo tienen una variable independiente, el tiempo  $t$ , por lo tanto se resuelven por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias, sin embargo los sistemas de parámetros distribuidos cuentan con dos variables independientes, el tiempo  $t$  y la posición a lo largo de la línea  $\zeta$ , y para resolverlos se ocupan ecuaciones diferenciales parciales (7).

### 1.6. Modelos de líneas de transmisión

El análisis de los sobretensiones transitorias se resuelven ocupando diversos métodos y modelos en el dominio del tiempo y de la frecuencia, en sus inicios fue a través de métodos gráficos, los más conocidos son el método de Bewley y el de Bergeron, el primero también conocido como diagrama de lattice adaptado a partir

de sistemas hidráulicos a sistemas eléctricos de potencia pero sólo se realizaba el estudio con cargas resistivas y líneas sin pérdidas (8). Posteriormente Weedy adapta este método para relacionar las conexiones entre los nodos y los valores de tiempo de viaje de onda por medio de tablas (7). El segundo considera la línea sin pérdidas y sin distorsión, es decir, la onda no cambia de magnitud durante su recorrido en la línea, sino hasta el momento en que llega a un nodo de transición (8).

En 1968 H. W. Dommel desarrolló un programa con simulación digital en el dominio del tiempo llamado "Electromagnetic Transient Program" (EMTP), el cual incluye modelos de parámetros concentrados y distribuidos de los diferentes elementos que conforman el sistema eléctrico. (20). S. Meyer en 1974 y D. Woodford en 1975 desarrollan otros modelos alternos como el "Alternative Transient Program" (ATP) y el "ElectroMagnetic Transients for Direct Current" (EMTDC), respectivamente.

Posteriormente surgieron los primeros modelos de líneas monofásicas en donde se incluye la dependencia frecuencial en sus parámetros, desarrollados por Budner y Snelson en 1970 y 1972 respectivamente. En 1975 H. W. Dommel y Meyer aplicaron la técnica desarrollada por Snelson en el EMTP para considerar la dependencia frecuencial en los parámetros de la línea de transmisión, resolviendo las convoluciones mediante el uso de la regla de integración trapezoidal. También en 1975 A. Dabuleanu y A. Semlyen propusieron la solución recursiva de las convoluciones, con este planteamiento y haciendo uso del análisis modal se extendió el análisis al caso multiconductor.

A principios de los 80's J. Martí desarrollo un modelo que representa la impedancia característica de la línea para un rango de frecuencias, la cual se obtiene por medio de una aproximación racional a partir de la representación de Foster, mientras que los polos cero se obtienen a partir del método de Bode. Este modelo considera matrices de transformación reales y constantes. Gustavsen y Semlyen proponen, en 1998, el estudio directo en dominio de fases de la matriz de admitancia característica y la función de propagación y con técnica denominada

ajuste vectorial (Vector Fitting). Otro modelo en el dominio de fases fue propuesto por Morched, Gustavsen y Tartibi en 1999, el cual surge por la necesidad de simular sistemas con alta dependencia frecuencial donde se ajusta la admitancia característica y la función de propagación por medio de una aproximación racional con lo cual este modelo se considera el más avanzado y preciso en el dominio del tiempo.

Todos los modelos descritos anteriormente son análisis en el dominio del tiempo, en los cuales se realizan aproximaciones y ajustes en el cálculo de los parámetros de línea cuando se considera el efecto superficial, lo que produce errores en el análisis de sistemas altamente dependientes de la frecuencia.

S. J. Day, *et al.* y L. M. Wedepohl, en los años 60's, presentan trabajos utilizando la Transformada Numérica de Laplace para obtener la respuesta en el dominio de la frecuencia, lo cual resuelve el problema de trabajar con elementos no lineales, debido a que los métodos en el dominio de la frecuencia requieren que el sistema sea lineal e invariante en el tiempo.

En 1999, Gutierrez, *et. al.* utilizó el método de características y esquemas de diferencias finitas para resolver las ecuaciones diferenciales parciales de una frecuencia independiente de una sola fase (9). Davila *et. al.* extendió este método en 2002 para considerar tanto la frecuencia y la dependencia del espacio (10).

En 2001, M. S. Mamis y M. Köksal, publicaron un modelo para líneas de transmisión monofásicas no uniformes en el dominio de la frecuencia " $s$ " (11).

# Capítulo 2 Modelado de la línea de transmisión monofásica

## 2.1.Introducción

En estado estable el estudio de las líneas de transmisión considera que la energización de toda la línea es en el instante en que se cierra el interruptor, por lo tanto no importa la longitud de la línea, ni el tiempo en que se desplaza la energía de un punto a otro. Sin embargo, para estudio de transitorios electromagnéticos la línea de transmisión requiere ser modelada a través de representación de parámetros distribuidos. En este capítulo se presenta la descripción física y matemática de cada uno de los parámetros de la línea, así como la solución de las ecuaciones del telegrafista en el dominio de la frecuencia obteniendo su representación en un modelo nodal de dos puertos.

## 2.2.Ecuaciones del Telegrafista

Las ecuaciones generales que describen a una línea de transmisión son llamadas ecuaciones del telegrafista, las cuales fueron propuestas por Oliver Heaviside mientras trabajaba en una compañía de telégrafos y solía investigar las perturbaciones en los cables telefónicos y están desarrolladas a partir de las leyes de Maxwell (2).

El flujo eléctrico  $\psi$  y el flujo magnético  $\Phi$  creados por una onda electromagnética causan un voltaje instantáneo  $v(\zeta, t)$ , y una corriente instantánea  $i(\zeta, t)$ , las cuales se representan como:

$$d\psi(t) = v(\zeta, t)C\Delta\zeta \quad (2-1)$$

Y

$$d\Phi(t) = i(\zeta, t)L\Delta\zeta \quad (2-2)$$

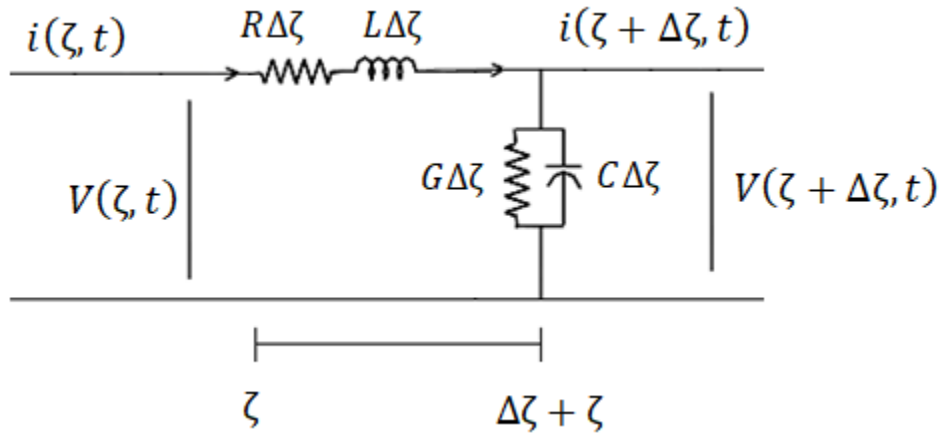


Figura 2.1 Circuito equivalente en Por Unidad

Considerado una sección de la línea de longitud  $\Delta\zeta$  como la que se muestra en la Figura 2.1, y aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff, se obtiene:

$$v(\zeta, t) - v(\zeta + \Delta\zeta, t) = -\Delta v = i(\zeta, t)R\Delta\zeta + \frac{\partial}{\partial t}d\Phi(t) = \left(R + L \frac{\partial}{\partial t}\right) i(\zeta, t)\Delta\zeta \quad (2-3)$$

Cuando el diferencial de distancia tiende a 0,  $\Delta\zeta \rightarrow 0$ , la ecuación 2-3 de voltaje puede expresarse c:

$$\frac{\partial v(\zeta, t)}{\partial \zeta} = -L \frac{\partial i(\zeta, t)}{\partial t} - Ri(\zeta, t) \quad (2-4)$$

De la misma manera se ocupa la Ley de Corrientes de Kirchhoff para la corriente que pasa a través de los parámetros  $G$  y  $C$ .

$$i(\zeta, t) - i(\zeta + \Delta\zeta, t) = -\Delta i = v(\zeta, t)G\Delta\zeta + \frac{\partial}{\partial t}d\psi(t) = \left(G + C \frac{\partial}{\partial t}\right) v(\zeta, t)\Delta\zeta \quad (2-5)$$

Cuando el límite  $\Delta\zeta \rightarrow 0$ , la ecuación 2-5 se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{\partial i(\zeta, t)}{\partial \zeta} = -C \frac{\partial v(\zeta, t)}{\partial t} - Gv(\zeta, t) \quad (2-6)$$

Las ecuaciones 2-4 y 2-6 son las ecuaciones del Telegrafista las cuales permiten conocer el comportamiento en estado transitorio de la energía eléctrica, así como

su efecto de propagación a lo largo de la línea de transmisión. Existen variaciones en el desarrollo para la solución de estas ecuaciones tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. En este trabajo se obtiene una representación en el dominio de la frecuencia que permite obtener una solución sin el requerimiento de aproximar algún parámetro eléctrico. Sustituyendo  $\partial/\partial t$  de 2-4 y 2-6 por el operador  $s$  de Laplace, se obtiene:

$$-\frac{dV(\zeta, s)}{d\zeta} = (R + sL)I(\zeta, s) \quad (2-7)$$

$$-\frac{dI(\zeta, s)}{d\zeta} = (G + sC)V(\zeta, s) \quad (2-8)$$

Sustituyendo los parámetros eléctricos

$$Z(s) = R + sL \quad (2-9)$$

$$Y(s) = G + sC \quad (2-10)$$

se obtiene:

$$-\frac{dV(\zeta, s)}{d\zeta} = Z(s)I(\zeta, s) \quad (2-11)$$

$$-\frac{dI(\zeta, s)}{d\zeta} = Y(s)V(\zeta, s) \quad (2-12)$$

2-11 y 2-12 en forma matricial se representan como:

$$-\frac{d}{d\zeta} \begin{bmatrix} V(\zeta, s) \\ I(\zeta, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -Z(s) \\ -Y(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(\zeta, s) \\ I(\zeta, s) \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

Derivando las ecuaciones acopladas de primer orden definidas en 2-13 se obtiene:

$$-\frac{dV^2(\zeta, s)}{d\zeta^2} = Z(s) \frac{dI(\zeta, s)}{d\zeta} \quad (2-14)$$

$$-\frac{dI^2(\zeta, s)}{d\zeta^2} = Y(s) \frac{dV(\zeta, s)}{d\zeta} \quad (2-15)$$

Estas ecuaciones representan un sistema desacoplado de segundo orden, también conocidas como ecuaciones de onda, reagrupando términos se puede obtener:

$$\frac{dV^2(\zeta, s)}{d\zeta^2} = Z(s)Y(s)V(\zeta, s) \quad (2-16)$$

$$\frac{dI^2(\zeta, s)}{d\zeta^2} = Y(s)Z(s)I(\zeta, s) \quad (2-17)$$

En forma matricial:

$$\frac{d^2}{d\zeta^2} \begin{bmatrix} V(\zeta, s) \\ I(\zeta, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(s)Y(s) & 0 \\ 0 & Y(s)Z(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(\zeta, s) \\ I(\zeta, s) \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

la solución general para el voltaje y la corriente es:

$$V(\zeta, s) = C_1 e^{-\gamma\zeta} + C_2 e^{\gamma\zeta} \quad (2-19)$$

$$I(\zeta, s) = C_3 e^{-\gamma\zeta} + C_4 e^{\gamma\zeta} \quad (2-20)$$

Donde  $\gamma$  es la constante de propagación de la línea de transmisión y está definida por:

$$\gamma_{1,2} = \pm\sqrt{ZY} = \pm(\alpha + j\beta) \quad (2-21)$$

donde:

$\alpha$  Es la constante de atenuación

$\beta$  Es la constante de fase

Para definir una relación entre la solución de Voltaje con la de Corriente se deriva respecto a  $\zeta$  la ecuación 2-17:

$$\frac{d}{d\zeta} V(\zeta, s) = -\gamma C_1 e^{-\gamma\zeta} + \gamma C_2 e^{\gamma\zeta} \quad (2-22)$$

Sustituyendo en la ecuación 2-9 y despejando el valor de corriente:

$$I(\zeta, s) = Z^{-1}\gamma C_1 e^{-\gamma\zeta} - Z^{-1}\gamma C_2 e^{\gamma\zeta} \quad (2-23)$$

A partir de esta ecuación se define la admitancia característica de la línea  $Y_0$  y posteriormente la impedancia característica de la línea  $Z_0$ :

$$Y_0 = \frac{\gamma}{Z} = \frac{\sqrt{ZY}}{Z} = \sqrt{\frac{Y}{Z}} \quad (2-24)$$

$$Z_0 = \frac{1}{Y_0} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \quad (2-25)$$

Así la ecuación 2-23 queda:

$$I(\zeta, s) = Y_0(C_1 e^{-\gamma\zeta} - C_2 e^{\gamma\zeta}) \quad (2-26)$$

## 2.3. Modelo de dos puertos de la línea de transmisión monofásica en el dominio de la frecuencia

### 2.3.1. Matriz de transferencia y matriz cadena

Aplicando las condiciones fronteras presentadas en la Figura 2.2 a las ecuaciones 2-17 y 2-18, se tiene:

Para  $\zeta = 0$ :

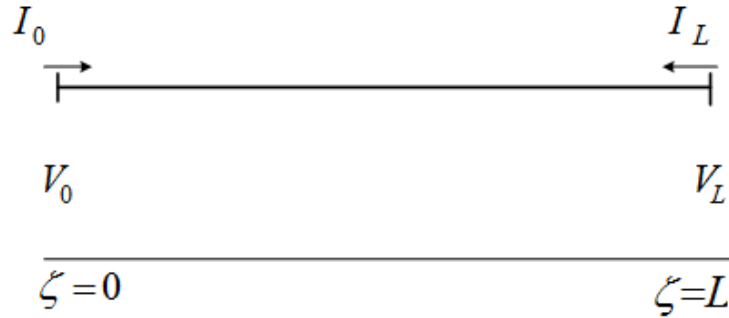
$$V(0, s) = C_1 + C_2 = V_0 \quad (2-27)$$

$$I(0, s) = Y_0(C_1 - C_2) = I_0 \quad (2-28)$$

Resolviendo las ecuaciones simultáneas 2-27 y 2-28 se calculan las constantes como:

$$C_1 = \frac{V_0 + Z_0 I_0}{2} \quad (2-29)$$

$$C_2 = \frac{V_0 - Z_0 I_0}{2} \quad (2-30)$$



**Figura 2.2 Condiciones frontera**

Para  $\zeta = l$ :

$$V(l, s) = C_1 e^{-\gamma l} + C_2 e^{\gamma l} = V_l \quad (2-31)$$

$$I(l, s) = Y_0 (C_1 e^{-\gamma l} - C_2 e^{\gamma l}) = -I_l \quad (2-32)$$

Sustituyendo las evaluaciones 2-29 y 2-30 en 2-31 y 2-32 y empleando identidades hiperbólicas, se tiene:

$$V_l = \cosh(\gamma l) V_0 - Z_0 \sinh(\gamma l) I_0 \quad (2-33)$$

$$I_l = Y_0 \sinh(\gamma l) V_0 - \cosh(\gamma l) I_0 \quad (2-34)$$

Ordenando en forma matricial queda:

$$\begin{bmatrix} V_l \\ I_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & -Z_0 \sinh(\gamma l) \\ Y_0 \sinh(\gamma l) & -\cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} \quad (2-35)$$

Definiendo los coeficientes como:

$$A = \cosh(\gamma l) \quad (2-36)$$

$$B = -Z_0 \sinh(\gamma l) \quad (2-37)$$

$$C = Y_0 \sinh(\gamma l) \quad (2-38)$$

$$D = -\cosh(\gamma l) \quad (2-39)$$

$V_0, I_0, V_L$  e  $I_L$  son las tensiones en el extremo emisor y receptor de la línea respectivamente y  $l$  es su longitud.

### 2.3.2. Matriz de admitancia

Para relacionar las tensiones nodales en los extremos de la línea con las corrientes inyectadas en los extremos, se parte de la matriz de transferencia, tomando en cuenta el modelo de la línea como se muestra en la Figura 2.3, obteniendo:

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{SS} & -Y_{RS} \\ -Y_{RS} & Y_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_L \end{bmatrix} \quad (2-40)$$

donde:

$$Y_{SS} = Y_{RR} = Y_0 \coth(\gamma l) \quad (2-41)$$

$$Y_{SR} = Y_{RS} = Y_0 \operatorname{csch}(\gamma l) \quad (2-42)$$

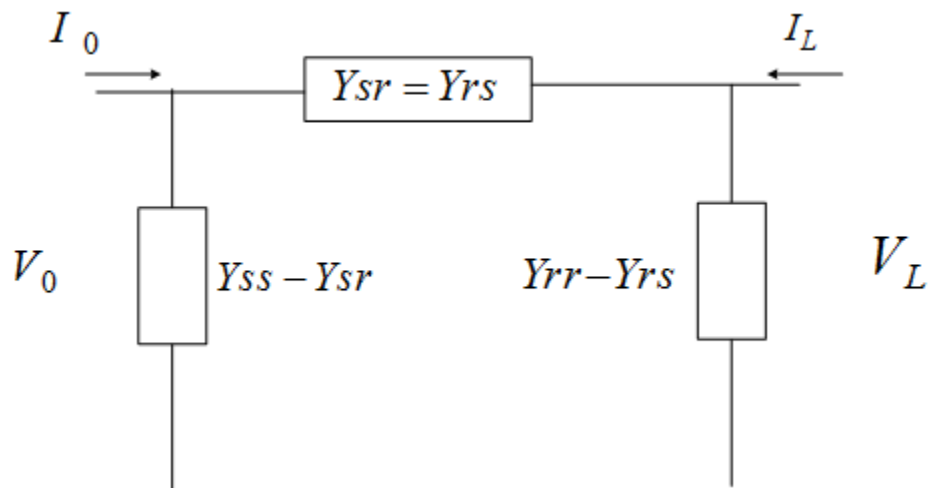


Figura 2.3 Modelo de la matriz de admitancias de una línea monofásica

## 2.4. Parámetros de la línea de transmisión monofásica

El cálculo de los parámetros eléctricos de resistencia, inductancia, conductancia y capacitancia se obtiene por unidad de longitud, los cuales son necesarios para incluirse en el modelo de parámetros distribuidos que se presenta.

### 2.4.1. Cálculo de la Inductancia en una línea par abierto

Para llegar a la ecuación que define la inductancia en una línea monofásica se parte de la densidad de superficie de flujo magnético ( $\psi$ ), esta relaciona al campo magnético con la corriente que circula a través de los conductores. Para un conductor circular la densidad de superficie está dado por:

$$\psi = \iint B \cdot ds = \iint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr \quad (2-43)$$

donde:

$\mu_0$  = permeabilidad magnética en vacío =  $4\pi \times 10^{-7} (H/m)$ .

$I$  = corriente en la línea.

En la Figura 2.2 se considera la geometría que representa la línea de monofásica de par abierto (ideal), en la cual se considera que la línea no tiene fronteras.

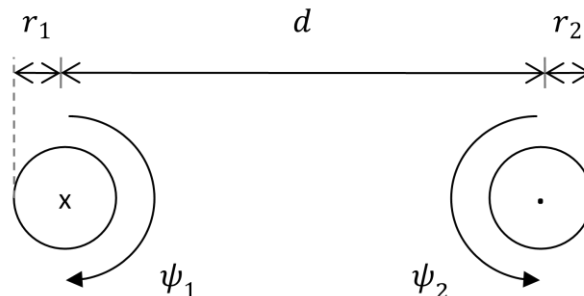


Figura 2.4 Representación de línea a par abierto

La densidad de superficie total, estará definida como la suma de la densidad de flujo magnético de cada conductor:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad (2-44)$$

Para los límites de integración se considera que el campo magnético parte de la superficie del conductor 1 hasta llegar a la superficie del conductor 2.

$$\psi_1 = \int_{r_1}^{d-r_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr \quad (2-45)$$

Resolviendo la integral y simplificando se obtiene:

$$\psi_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{d - r_2}{r_1} \right) \right] \quad (2-46)$$

De manera similar al primer conductor, para el retorno ahora se integra desde la superficie del conductor de retorno (•) hacia la superficie de (x):

$$\psi_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{d - r_1}{r_2} \right) \right] \quad (2-47)$$

Sustituyendo las expresiones 2-46 y 2-47 en 2-44

$$\psi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{d - r_2}{r_1} \right) \right] + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{d - r_1}{r_2} \right) \right] \quad (2-48)$$

Factorizando:

$$\psi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{d - r_2}{r_1} \right) + \ln \left( \frac{d - r_1}{r_2} \right) \right] \quad (2-49)$$

Aplicando leyes de los logaritmos ( $\ln a + \ln b = \ln(a * b)$ ) se obtiene:

$$\psi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{(d - r_2)(d - r_1)}{r_1 r_2} \quad (2-50)$$

Considerando que los conductores son geoméricamente iguales la distancia entre conductores es mucho mayor que su radio de tal manera que:

$$r_1 = r_2 = r \quad (2-51)$$

$$d \gg r \therefore \text{para } (d - r_2) \approx d \quad (2-52)$$

Reescribiendo la ecuación 2-50 tomando en cuenta las consideraciones establecidas en 2-51 y 2-52

$$\psi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{d}{r} \right)^2 \quad (2-53)$$

Aplicando leyes de los logaritmos ( $\ln a^n = n \ln a$ ).

$$\psi = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \left( \frac{d}{r} \right) \quad (2-54)$$

Finalmente para obtener la inductancia se parte de la relación siguiente:

$$\psi = LI \quad (2-55)$$

Sustituyendo 2-54 en 2-55, y despejando

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left( \frac{d}{r} \right) \dots \left[ \frac{H}{m} \right] \quad (2-56)$$

donde:

$L$  = inductancia geométrica de la línea (H/m).

$\mu_0$  = permeabilidad magnética en vacío (H/m).

$r$  = radio de los conductores (m).

$d$  = distancia entre conductores (m).

Se define a la ecuación 2-56 como la inductancia geométrica de la línea.

### 2.4.2. Cálculo de la Capacitancia en una línea par abierto

De manera análoga a la inductancia, la capacitancia puede ser calculada con las líneas de fuerza asociadas a las líneas de campo eléctrico. Existe un campo eléctrico en la región del espacio que rodea a un objeto con carga, la carga fuente ( $+q$ ), cuando otro objeto con carga, la carga de prueba ( $-q$ ), entra en este campo eléctrico, una fuerza eléctrica actúa sobre él.

En la Figura 2.7 se muestra la representación de la línea monofásica a par abierto y el campo eléctrico asociado.

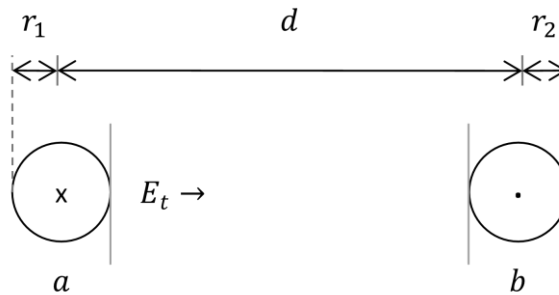


Figura 2.5 Representación de línea de par abierto

Donde se puede definir:

$$V_{ab} = -V_{ba} \quad (2-57)$$

El campo eléctrico transversal para un conductor cilíndrico se define con la ecuación:

$$E_t = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (2-58)$$

donde:

$E_t$  = campo eléctrico transversal.

$q$  = carga presente en el conductor.

$\epsilon_0$  = permitividad del medio en vacío =  $8.854 \times 10^{-12}$  (F/m).

$r$  = radio del conductor.

La capacitancia está asociada al campo eléctrico que se origina entre dos conductores a partir de una diferencia de potencial inducida, por lo que es necesario conocer el voltaje existente entre la superficie de los conductores ( $V_{ab}$ ), este se define por la expresión:

$$V_{ab} = - \int_b^a E_t dl \quad (2-59)$$

Sustituyendo 2-59 en 2-58 y cambiando los límites de integración:

$$V_{ab} = - \int_{d-r_2}^{r_1} \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} dr \quad (2-60)$$

Resolviendo:

$$V_{ab} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( \frac{d-r_2}{r_1} \right) \right] \quad (2-61)$$

Teniendo en cuenta la ecuación 2-57, donde define que los conductores deben tener el mismo potencial y con signo contrario, se tiene:

$$V_{ba} = \int_a^b E_t dl \quad (2-62)$$

Resolviendo:

$$V_{ba} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( \frac{d-r_1}{r_2} \right) \right] \quad (2-63)$$

Se puede decir que el potencial total debido a las cargas en los conductores estará definido por:

$$V = V_{ab}^+ + V_{ba}^- \quad (2-64)$$

Por lo tanto:

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( \frac{d-r_2}{r_1} \right) \right] + \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( \frac{d-r_1}{r_2} \right) \right] \quad (2-65)$$

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{(d-r_1)(d-r_2)}{(r_1)(r_2)} \right] \quad (2-66)$$

Considerando que los conductores son geoméricamente iguales la distancia entre conductor es mucho mayor que el radio de los conductores por lo tanto:

$$r_1 = r_2 = r \quad (2-67)$$

$$\text{Si } d \gg r \therefore \text{para } (d-r_1) \approx d \text{ y } (d-r_2) \approx d \quad (2-68)$$

Sustituyendo en 2-66 se obtiene:

$$V = \frac{q}{\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{d}{r} \right) \quad (2-69)$$

La capacitancia se define con la ecuación 2-70 y sustituyendo en ella 2-69 se tiene:

$$C = \frac{q}{V} \quad (2-70)$$

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \left( \frac{d}{r} \right)} \dots \left[ \frac{F}{m} \right] \quad (2-71)$$

donde:

$C$  = capacitancia de la línea monofásica (F/m).

$\epsilon_0$  = permitividad del medio en vacío (F/m).

$r$  = radio de los conductores (m).

$d$  = distancia entre conductores (m).

### 2.4.3. Cálculo de la Inductancia, considerando el Efecto del Suelo

Las expresiones anteriores están determinadas en base a una línea de par abierto, es decir, una línea ideal; en la realidad tal expresión no es del todo válida, debido a que la inductancia de la línea se ve afectada por la distancia existente entre esta y tierra.

Para considerar el cambio de la magnitud de la inductancia debida al efecto del suelo se recurre al método de las imágenes el cual implica la conversión de un campo eléctrico en otro equivalente. En ciertos casos es posible sustituir un conductor por una o más cargas puntuales, de modo que las superficies conductoras se sustituyen por superficies equipotenciales a los mismos potenciales. Como se muestra en la Figura 2.8

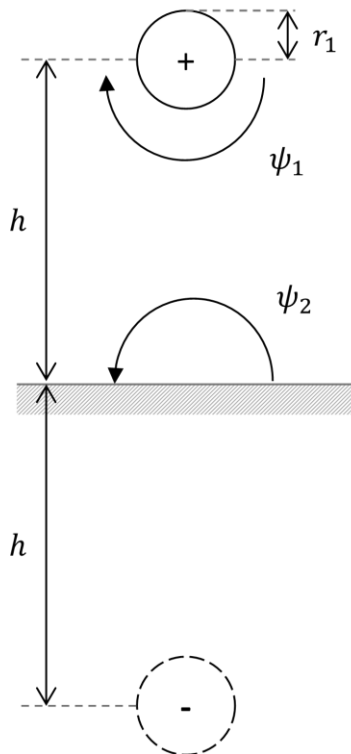


Figura 2.6 Densidad de superficie formada por efecto del suelo

donde:

$h$  = altura del conductor con respecto al suelo.

$r_1$  = radio del conductor 1.

$\psi_1$  = densidad de superficie del conductor 1.

$\psi_2$  = densidad de superficie debida al efecto del suelo.

Para el conductor con radio  $r_1$  se tiene la expresión 2-72 que representa la densidad de superficie de flujo magnético.

$$\psi_1 = \int_{r_1}^h \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr \quad (2-72)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que se utilizó para resolver la inductancia en la línea de par abierto, se tiene la siguiente expresión:

$$\psi_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \ln \frac{h}{r_1} \quad (2-73)$$

Ahora para el conductor imagen:

$$\psi_2 = \int_h^{2h-r_1} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr \quad (2-74)$$

$$\psi_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \ln \frac{2h - r_1}{h} \quad (2-75)$$

Realizando la suma de la densidad de superficie de los conductores, se tiene la ecuación que permitirá conocer la inductancia debida al efecto del suelo.

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( \frac{2h}{r} \right) \dots \left[ \frac{H}{m} \right] \quad (2-76)$$

donde:

$L$  = inductancia de la línea debida al efecto del suelo.

$\mu_0$  = permeabilidad magnética en vacío.

$h$  = altura de la línea con respecto al suelo.

$r$  = radio del conductor.

#### 2.4.4. Cálculo de la Capacitancia, considerando el Efecto del Suelo

De forma análoga a la inductancia, la capacitancia se ve alterada por el efecto del suelo, para el cálculo de esta se retoman como referencia la Figura 2.8 pues el método de las imágenes para la capacitancia no cambia.

$$V_{ab} = - \int_h^{r_1} \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} dr \quad (2-78)$$

$$V_{ba} = \int_h^{2h-r_1} \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} dr \quad (2-78)$$

Resolviendo las dos ecuaciones anteriores, se tiene respectivamente:

$$V_{ab} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h}{r_1} \quad (2-79)$$

$$V_{ba} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h - r_1}{h} \quad (2-80)$$

Así, sustituyendo en 2-64 y posteriormente en 2-70, se obtiene el valor de la capacitancia, tomando en cuenta el efecto suelo:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{r}} \dots \left[ \frac{F}{m} \right] \quad (2-81)$$

### 2.4.5. Inductancia debida al retorno por tierra

Esta inductancia es función del campo magnético producido por las corrientes remolino que se forman en el plano tierra cuando los conductores se someten a una excitación de alta frecuencia.

Las corrientes de retorno por tierra se concentran en un plano ficticio a una distancia  $p_t$  de la superficie, como se muestra en la Figura 2.9, esta es función de la frecuencia a la que varía la excitación del conductor y se conoce como profundidad de penetración compleja  $p$ .

$$p = \sqrt{\frac{\rho}{j\omega\mu}} \quad (2-82)$$

donde  $\mu$  es la permeabilidad del suelo y  $\rho$  es la resistividad del terreno.

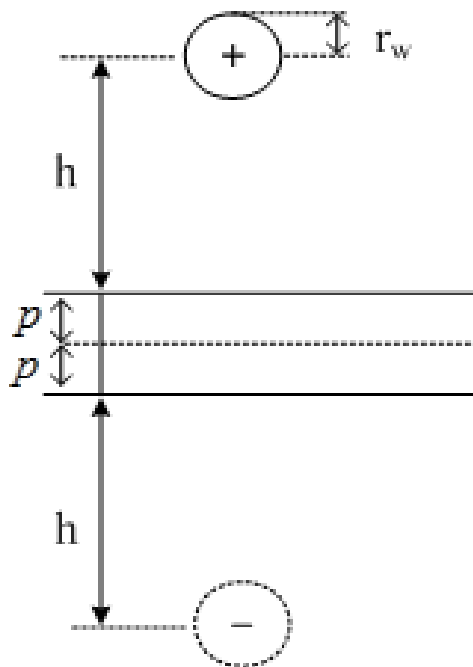


Figura 2.7 Distancias para el cálculo de la inductancia geométrica

La inductancia se determina, considerando el valor de penetración compleja y que  $h \gg r$ , por medio de:

$$L_{g,t} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left[ \frac{2(h+p)}{r_w} \right] \quad (2-83)$$

Esta inductancia representa el valor de la inductancia geométrica,  $L_g$ , y la debida al retorno por tierra,  $L_t$ .

$$L_{g,t} = L_g + L_t \quad (2-84)$$

De la ecuación 2-76 se obtiene el valor de  $L_g$ , y de 2-83  $L_{g,t}$ . Así que despejando  $L_t$  de la ecuación 2-84 y sustituyendo los valores queda:

$$L_t = \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \ln \left[ \frac{2(h+p)}{r_w} \right] - \ln \left[ \frac{2h}{r_w} \right] \right\} \quad (2-85)$$

Realizando la operación de los logaritmos,  $\ln a - \ln b = \ln (a/b)$ , se obtiene:

$$L_t = \frac{\mu_0}{2\pi} \left\{ \ln \left[ \frac{2(h+p)}{r_w} \right] \left[ \frac{r_w}{2h} \right] \right\} \quad (2-86)$$

Por último, simplificando:

$$L_t = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left[ 1 + \frac{p}{h} \right] \quad (2-87)$$

Multiplicando este valor por  $j\omega$  se obtiene la impedancia debida al retorno por tierra:

$$Z_t = j\omega L_t = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left[ 1 + \frac{p}{h} \right] = j\omega a + j\omega b \quad (2-88)$$

$$Z_t = R_t + j\omega L_t = -\omega b + j\omega a \quad (2-89)$$

donde:

$$R_t = -\omega b \quad (2-90)$$

$$L_t = a \quad (2-91)$$

$R_t$  es la resistencia aparente del terreno, es decir las pérdidas adicionales debido a las corrientes circulantes en la tierra y  $L_t$  es la inductancia producida por el efecto de las corrientes de retorno por tierra.

#### 2.4.6. Impedancia interna del conductor

Esta es generada debido al efecto piel, es decir, a la tendencia de la corriente alterna a circular por la superficie del conductor conforme aumenta la frecuencia. La profundidad de penetración compleja en la pared del conductor se define por:

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho_c}{j\omega\mu_c}} \quad (2-92)$$

donde  $\delta$  es la profundidad de penetración compleja,  $\rho_c$  es la resistividad del conductor y  $\mu_c$  es la permeabilidad del conductor.

A frecuencia cero la resistencia de un conductor cilíndrico, por unidad de longitud, se calcula como:

$$R_{cd} = \frac{\rho_c}{A} = \frac{\rho_c}{\pi r^2} \quad (2-93)$$

Para una corriente de alta frecuencia se tiene:

$$A_{dona} = \pi r^2 - \pi(r - \delta)^2 = 2\pi r\delta - \pi\delta^2 \quad (2-94)$$

Tomando en cuenta que a muy altas frecuencias  $r \gg \delta$ , entonces:

$$A_{dona} \sim 2\pi r\delta \quad (2-95)$$

Así la impedancia a alta frecuencia se define:

$$Z_{hf} = \frac{\rho_c}{2\pi r\delta} \quad (2-96)$$

Con esto se determina que la impedancia del conductor es:

$$Z_c = Z_{hf} + R_{cd} = \frac{\rho_c}{2\pi r \delta} + \frac{\rho_c}{\pi r^2} = R_c + j\omega L_c \quad (2-97)$$

$$Z_c = \sqrt{Z_{hf}^2 + R_{cd}^2} = R_c + j\omega L_c \quad (2-98)$$

### 2.4.7. Impedancia serie generalizada

También llamada impedancia de longitud, se obtiene a partir de la suma de todas las impedancias.

$$Z = Z_g + Z_t + Z_c \quad (2-99)$$

$$Z = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \ln \left[ \frac{2(h + P_t)}{r_c} \right] + \frac{\rho_c}{2\pi r_c^2} \sqrt{4p_c^2 + r_c^2} \quad (2-100)$$

### 2.4.8. Admitancia en derivación generalizada

Se define como:

$$Y = G + j\omega C \quad (2-101)$$

donde G es la conductancia por unidad de longitud.

En la mayoría de los estudios de líneas aéreas, las pérdidas por dieléctrico se consideran 0 (G=0) por que influye poco en la precisión del cálculo, además es difícil determinar su valor porque depende de las condiciones climatológicas y la contaminación. Con esta consideración y sustituyendo el valor de C, de la ecuación 2-81, se tiene:

$$Y = j\omega \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{r}} \quad (2-102)$$

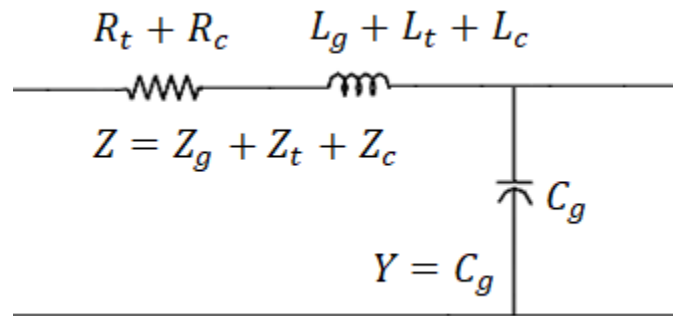


Figura 2.8 Parámetros de la línea de transmisión

Para una línea sin pérdidas se tiene que  $L_c, L_t, R, G = 0$ , así se reescriben las ecuaciones del Telegrafista en el dominio del tiempo como:

$$-\frac{\partial V(\zeta, t)}{\partial \zeta} = Ri(\zeta, t) + L_g \frac{\partial i(\zeta, t)}{\partial t} \quad (2-103)$$

$$-\frac{\partial i(\zeta, t)}{\partial \zeta} = -C \frac{\partial V(\zeta, t)}{\partial t} \quad (2-104)$$

# Capítulo 3 Modelado de la línea de transmisión multiconductora

## 3.1. Solución de las ecuaciones del telegrafista para una línea multiconductora en el dominio de la frecuencia

A partir de las ecuaciones del telegrafista, definidas en el capítulo anterior para el caso monofásico, se obtienen las ecuaciones para el caso multiconductor en el dominio de la frecuencia:

$$-\frac{dV(\zeta, s)}{d\zeta} = \mathbf{Z}(s)\mathbf{I}(\zeta, s) \quad (3-1)$$

$$-\frac{d\mathbf{I}(\zeta, s)}{d\zeta} = \mathbf{Y}(s)\mathbf{V}(\zeta, s) \quad (3-2)$$

$\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{Y}$  representan las matrices de impedancias y admitancias del arreglo multiconductor, estas son de orden  $n \times n$  donde  $n$  es el número de fases,  $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{V}$  representan a los vectores de corriente y voltaje del arreglo multiconductor.

De la misma forma que para el caso monofásico, se deriva con respecto al eje de propagación para desacoplar el sistema de ecuaciones:

$$-\frac{d^2\mathbf{V}}{d^2\zeta} = \mathbf{ZYV} \quad (3-3)$$

$$-\frac{d^2\mathbf{I}}{d^2\zeta} = \mathbf{YZI} \quad (3-4)$$

Para el caso de la línea con pérdidas, se cumple:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R} + j\omega(\mathbf{L}_g + \mathbf{L}_c + \mathbf{L}_t) \quad (3-5)$$

donde  $L_c$ ,  $L_t$  son las matrices de inductancias internas y de inductancias función de retorno por tierra del arreglo multiconductor y de orden  $n \times n$ . Por lo tanto:

$$\mathbf{ZY} \neq \mathbf{YZ} \quad (3-6)$$

Las matrices  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{Y}$  son simétricas, así que tienen la característica de ser igual a su transpuesta:

$$[\mathbf{ZY}]^t = \mathbf{Y}^t \mathbf{Z}^t = \mathbf{YZ} \quad (3-7)$$

Definiendo la matriz  $\mathbf{A}$ , y su transpuesta, como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{ZY} \quad (3-8)$$

$$\mathbf{A}^t = \mathbf{YZ} \quad (3-9)$$

Y se sustituyendo en 3-3 y 3-4:

$$-\frac{d^2 \mathbf{V}}{d^2 \zeta} = \mathbf{A} \mathbf{V} \quad (3-10)$$

$$-\frac{d^2 \mathbf{I}}{d^2 \zeta} = \mathbf{A}^t \mathbf{I} \quad (3-11)$$

Si  $\mathbf{A}$  es diagonalizable y aplicando análisis modal se obtiene:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} \boldsymbol{\lambda} \mathbf{M}^{-1} \quad (3-12)$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de vectores propios y  $\boldsymbol{\lambda}$  es la matriz diagonal de valores propios de  $\mathbf{A}$ . Al sustituir en la ecuación 3-10, y premultiplicando por  $\mathbf{M}^{-1}$ :

$$-\frac{d^2\mathbf{V}}{d^2\zeta}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{V} \quad (3-13)$$

definiendo el vector de voltajes modales como:

$$\mathbf{V}_m = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{V} \quad (3-14)$$

y el vector de voltajes de fase:

$$\mathbf{V} = \mathbf{M}\mathbf{V}_m \quad (3-15)$$

Se obtiene la ecuación:

$$-\frac{d^2\mathbf{V}_m}{d^2\zeta} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{V}_m \quad (3-16)$$

Debido a que  $\boldsymbol{\lambda}$  es una matriz diagonal, la ecuación 3-16 es un sistema de ecuaciones diferenciales desacopladas, así para el *i*-ésimo conductor se tiene:

$$-\frac{d^2V_{mi}}{d^2\zeta} = \lambda_i V_{mi} \quad (3-17)$$

Esto permite obtener una solución general para los voltajes modales la cual está definida por:

$$\mathbf{V}_{mi} = e^{-\gamma_i\zeta}C_{1i} + e^{\gamma_i\zeta}C_{2i} \quad (3-18)$$

donde:

$C_{1i}$  y  $C_{2i}$  son las constantes de integración en el *i*-ésimo modo

$\gamma = \sqrt{\lambda_i} = \alpha + j\beta$  es la constante de propagación en el modo independiente  $i$

De la ecuación 3-18 en forma matricial expandida se tiene:

$$\begin{bmatrix} V_{m1} \\ V_{m2} \\ \dots \\ V_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\gamma, \zeta} & 0 & \dots I & 0 \\ 0 & e^{-\gamma, \zeta} & \dots I & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots I & e^{-\gamma, \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1m_1} \\ C_{1m_2} \\ \dots \\ C_{1m_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{\gamma, \zeta} & 0 & \dots I & 0 \\ 0 & e^{\gamma, \zeta} & \dots I & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots I & e^{\gamma, \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{2m_1} \\ C_{2m_2} \\ \dots \\ C_{2m_n} \end{bmatrix} \quad (3-19)$$

Finalmente, su representación se expresa como:

$$\mathbf{V}_m = e^{-\Gamma \zeta} \mathbf{C}_{1m} + e^{\Gamma \zeta} \mathbf{C}_{2m} \quad (3-20)$$

donde  $\Gamma$  se define como:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots I & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots I & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots I & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots I & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots I & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots I & \gamma_n \end{bmatrix} \quad (3-21)$$

De manera similar a lo realizado con los voltajes modales en 3-13 y 3-14, se definen los valores de las constantes de propagación modales como:

$$\mathbf{C}_{1m} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_1 \quad (3-22)$$

$$\mathbf{C}_{2m} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_2 \quad (3-23)$$

Sustituyendo 3-18, 3-22 y 3-23 en 3-20 y, posteriormente, multiplicando por  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{V} = \mathbf{M} e^{-\Gamma \zeta} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_1 + \mathbf{M} e^{\Gamma \zeta} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_2 \quad (3-24)$$

Como  $\mathbf{A}$  es una matriz diagonalizable, por teorema se tiene:

$$f(\mathbf{A}) \equiv \mathbf{M}e^{-\Gamma\zeta}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_1 + \mathbf{M}e^{\Gamma\zeta}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_2 \quad (3-25)$$

Aplicando el teorema 3-26 y sustituyendo en 3-25

$$f(\mathbf{M}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{M}^{-1}) = f(\mathbf{A}) = \mathbf{M}f(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{M}^{-1} \quad (3-26)$$

$$\mathbf{V} = e^{(-\Psi\zeta)}\mathbf{C}_1 + e^{(\Psi\zeta)}\mathbf{C}_2 \quad (3-27)$$

donde:

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{M}^{-1} \quad (3-28)$$

Así, para las corrientes:

$$-\frac{d\mathbf{V}}{d\zeta} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \quad (3-29)$$

despejando

$$\mathbf{I} = -\text{inv}[\mathbf{Z}]\frac{d\mathbf{V}}{d\zeta} \quad (3-30)$$

de manera similar a los voltajes, se tiene para las corrientes:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_0[e^{(-\Psi\zeta)}\mathbf{C}_1 - e^{(\Psi\zeta)}\mathbf{C}_2] \quad (3-31)$$

donde

$$\mathbf{Y}_0 = \text{inv}[\mathbf{Z}]\boldsymbol{\Psi} \quad (3-32)$$

$$\mathbf{Z}_0 = \text{inv}[\mathbf{Y}_0] \quad (3-33)$$

Aplicando, como en el caso monofásico, condiciones iniciales:

Para  $\zeta = 0$ :

$$\mathbf{V}(0, s) = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 = \mathbf{V}_0 \quad (3-34)$$

$$\mathbf{I}(0, s) = \mathbf{Y}_0(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) = \mathbf{I}_0 \quad (3-35)$$

Resolviendo las ecuaciones simultáneas para las constantes

$$\mathbf{C}_1 = \frac{\mathbf{V}_0 + \mathbf{Z}_0 \mathbf{I}_0}{2} \quad (3-36)$$

$$\mathbf{C}_2 = \frac{\mathbf{V}_0 - \mathbf{Z}_0 \mathbf{I}_0}{2} \quad (3-37)$$

Para  $\zeta = l$ :

$$\mathbf{V}(l, s) = \mathbf{C}_1 e^{-\Psi l} + \mathbf{C}_2 e^{\Psi l} = \mathbf{V}_l \quad (3-38)$$

$$\mathbf{I}(l, s) = \mathbf{Y}_0(\mathbf{C}_1 e^{\Psi l} - \mathbf{C}_2 e^{-\Psi l}) = -\mathbf{I}_l \quad (3-39)$$

Sustituyendo 3-36 y 3-37, y agrupando términos:

$$\mathbf{V}_l = \left[ \frac{e^{\Psi l} + e^{-\Psi l}}{2} \right] \mathbf{V}_0 - \left[ \frac{e^{\Psi l} - e^{-\Psi l}}{2} \right] \mathbf{Z}_0 \mathbf{I}_0 \quad (3-40)$$

$$\mathbf{I}_l = \mathbf{Y}_0 \left[ \frac{e^{\Psi l} - e^{-\Psi l}}{2} \right] \mathbf{V}_0 - \mathbf{Y}_0 \left[ \frac{e^{\Psi l} + e^{-\Psi l}}{2} \right] \mathbf{Z}_0 \mathbf{I}_0 \quad (3-41)$$

y utilizando identidades hiperbólicas, se tiene:

$$V_l = \cosh(\Psi l) V_0 - Z_0 \sinh^t(\Psi l) I_0 \quad (3-42)$$

$$I_l = Y_0 \sinh(\Psi l) V_0 - \cosh^t(\Psi l) I_0 \quad (3-43)$$

Ordenando en forma matricial se obtiene la matriz de transferencia:

$$\begin{bmatrix} V_l \\ I_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} \quad (3-44)$$

donde:

$$A = \cosh(\Psi l) \quad (3-45)$$

$$B = -Z_0 \sinh^t(\Psi l) \quad (3-46)$$

$$C = Y_0 \sinh(\Psi l) \quad (3-47)$$

$$D = -\cosh^t(\Psi l) \quad (3-48)$$

### 3.2. Modelo de dos puertos de la línea de transmisión en forma nodal o YBUS

Partiendo de la matriz 3-44 se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$V_l = A V_0 + B I_0 \quad (3-49)$$

$$I_l = C V_0 + D I_0 \quad (3-50)$$

Despejando  $I_0$  de 3-49

$$I_0 = B^{-1}V_l - B^{-1}AV_0 \quad (3-51)$$

Sustituyendo 3-51 en 3-50

$$I_l = [C - DB^{-1}A]V_0 + DB^{-1}V_l \quad (3-52)$$

Escribiendo en forma matricial 3-51 y 3-52

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B^{-1}A & B^{-1} \\ C - DB^{-1}A & DB^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_l \end{bmatrix} \quad (3-53)$$

Aplicando las condiciones frontera de la figura 3.1



Figura 3.1 Condiciones frontera

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{ss} & -Y_{sr} \\ -Y_{rs} & Y_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_l \end{bmatrix} \quad (3-54)$$

donde:

$$Y_{ss} = -B^{-1}A = Y_0 \operatorname{ctgh}(\gamma l) \quad (3-55)$$

$$Y_{sr} = -B^{-1} = Y_0 \operatorname{csch}(\gamma l) \quad (3-56)$$

$$Y_{rs} = -C + DB^{-1}A = Y_0 \operatorname{csch}(\gamma l) \quad (3-57)$$

$$Y_{rr} = DB^{-1} = Y_0 \operatorname{ctgh}(\gamma l) \quad (3-58)$$

por lo tanto:

$$Y_{ss} = Y_{rr} = Y_0 \operatorname{ctgh}(\Psi l) \quad (3-59)$$

$$Y_{sr} = Y_{rs} = Y_0 \operatorname{csch}(\Psi l) \quad (3-60)$$

### 3.3.Método de las imágenes

En electrostática se presentan problemas con condiciones de frontera que son difíciles de resolver de manera directa por medio de la ecuación de Poisson o de Laplace, pero las condiciones sobre las superficies limitadoras de estos problemas pueden establecerse mediante imágenes adecuadas, pudiéndose entonces determinar determinando así las distribuciones de potencial de forma bastante sencilla. Este método de sustituir las superficies limitadoras por cargas de imagen apropiadas, en lugar de intentar una resolución formal de la ecuación de Poisson o de Laplace, se conoce como método de las imágenes.

En sistemas de transmisión, la tierra afecta la forma del campo eléctrico bajo la línea, la tierra se considera una superficie equipotencial dado que asume su efecto considerando cargas imágenes, estas cargas se ubican con la misma distancia que se tiene desde el conductor real a tierra, pero partiendo de tierra a su interior, también están dadas con signo opuesto del conductor real. Para dos conductores se definen las imágenes como se muestra en la Figura 3.1.

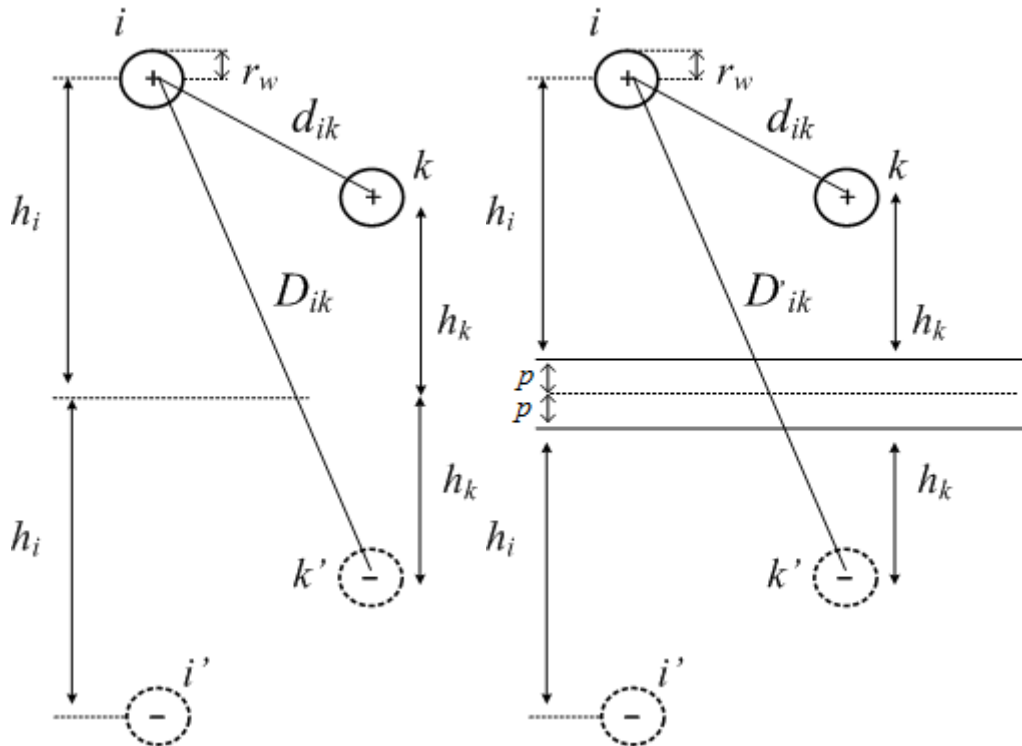


Figura 3.2 Método de las imágenes (izq) y Método de las imágenes complejas (der)

### 3.4. Matriz de Impedancia de retorno por tierra propia

Partiendo de las imágenes presentadas en la Figura 3.2, Método de las imágenes complejas, se determina la inductancia propia del  $i$ -ésimo conductor, según:

$$L_{g,t_{ii}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left[ \frac{2(h_i + p)}{r_i} \right] \quad (3-61)$$

Al igual que en el caso monofásico se tiene:

$$L_{g,t_{ii}} = L_{g_{ii}} + L_{t_{ii}} \rightarrow L_{t_{ii}} = L_{g,t_{ii}} - L_{g_{ii}} \quad (3-62)$$

Por lo tanto:

$$L_{g_{ii}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left[ \frac{2h_i}{r_i} \right] \quad (3-63)$$

Así de la diferencia de  $L_g$  y  $L_{t,g}$  se obtiene:

$$L_{t_{ii}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left[ 1 + \frac{p}{h_i} \right] = a_{ii} + jb_{ii} \quad (3-64)$$

Por lo tanto, la impedancia es:

$$Z_{t_{ii}} = j\omega L_{t_{ii}} = R_{t_{ii}} + j\omega L_{t_{ii}} \quad (3-65)$$

### 3.5. Matriz de Impedancia de retorno por tierra mutua

De la misma manera que en la impedancia por retorno por tierra propia, se parte del modelo de las imágenes complejas, por lo tanto:

$$L_{g,t_{ik}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left[ \frac{2D'_{ik}}{d_{ik}} \right] \quad (3-66)$$

Y

$$L_{g,t_{ik}} = L_{g_{ik}} + L_{t_{ik}} \quad (3-67)$$

debido a que :

$$D_{ik} \neq D'_{ik} \quad (3-68)$$

Entonces:

$$L_{g_{ik}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left[ \frac{2D'_{ik}}{D_{ik}} \right] \quad (3-69)$$

Del mismo modo que en la impedancia propia, de la diferencia de  $L_g$  y  $L_{t,g}$  se obtiene:

$$L_{tik} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left[ \frac{D'_{ik}}{D_{ik}} \right] \quad (3-70)$$

Y la matriz de impedancia completa con:

$$Z_{tik} = j\omega L_{tik} = R_{tik} + j\omega L_{tik} \quad (3-71)$$

### 3.6. Distancias geométricas y de retorno por tierra

Las distancias se definen partiendo del diagrama de la Figura 3.2

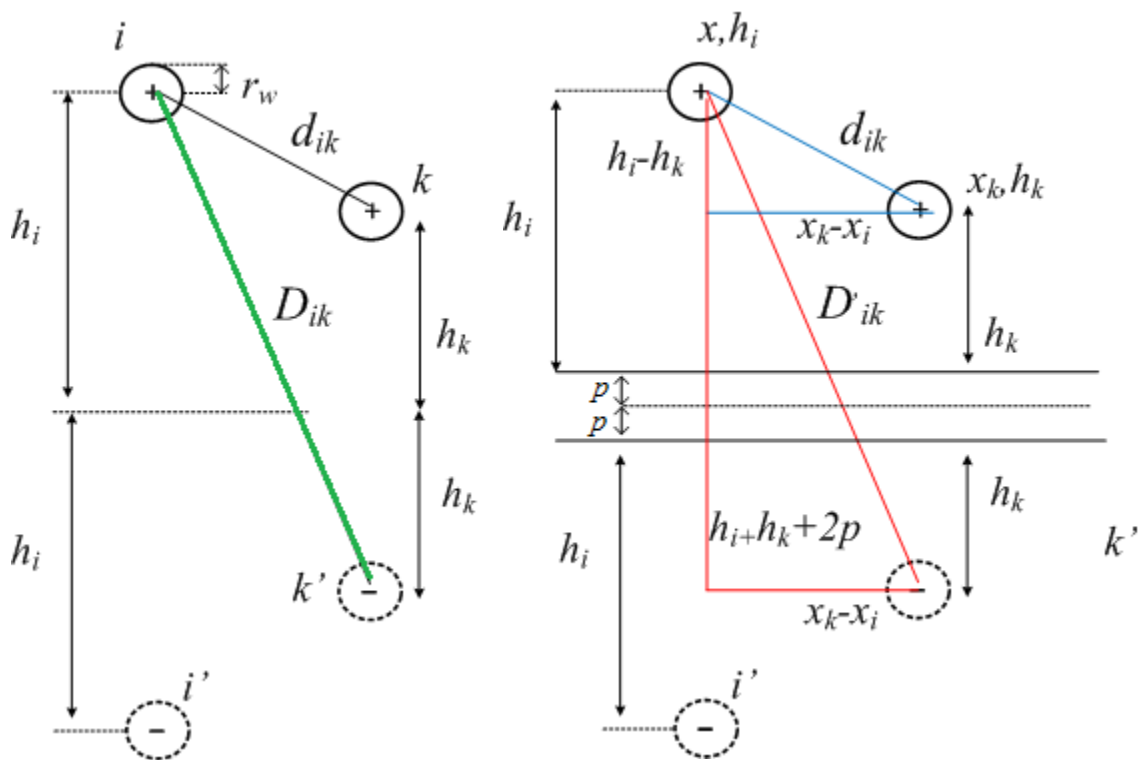


Figura 3.3 Cálculo de distancias reales

donde la distancia entre conductores es:

$$D_{ik} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (h_i + h_k)^2} \quad (3-72)$$

La distancia entre un conductor y su imagen, considerando la profundidad de penetración compleja:

$$D'_{ik} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (h_i + h_k + 2p)^2} \quad (3-73)$$

Y la distancia entre un conductor y su imagen es:

$$d_{ik} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (h_i - h_k)^2} \quad (3-74)$$

### 3.7. Impedancia $Z_c$

Del mismo modo que para el modelo monofásico, se tiene que, la matriz de impedancia serie generalizada, para una línea multiconductora se define como:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_g + \mathbf{Z}_t + \mathbf{Z}_c \quad (3-75)$$

o bien

$$\mathbf{Z} = j\omega(\mathbf{L}_g + \mathbf{L}_t) + \mathbf{R}_t + \mathbf{Z}_c \quad (3-76)$$

donde  $\mathbf{Z}_c$  es una matriz cuyos valores se calculan de igual manera que en el caso monofásico, pero aplicado a cada conductor del arreglo.

$$\mathbf{Z}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{c1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_{c2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Z}_{cn} \end{bmatrix} \quad (3-77)$$

### 3.8. Matriz de Capacitancias

La capacitancia,  $\mathbf{C}$ , se puede calcular a partir de  $\mathbf{L}_g$ . Del caso monofásico se tiene que:

$$L_g C = \mu_0 \epsilon_0 \quad (3-78)$$

Así, para el caso multiconductor:

$$\mathbf{L}_g \mathbf{C} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{U} \quad (3-79)$$

donde  $\mathbf{L}_g$  y  $\mathbf{C}$  son las matrices de inductancias geométricas y capacitancias del arreglo multiconductor, de orden  $n \times n$ , y  $\mathbf{U}$  es la matriz identidad

También de manera análoga, a partir de la capacitancia monofásica:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{r}} \quad (3-80)$$

Tomando las distancias de las imágenes, se tiene:

$$C_{ii} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h_i}{r_i}} \quad (3-81)$$

$$C_{ik} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{D_{ik}}{d_{ik}}} \quad (3-82)$$

### 3.9. Matriz de admitancia en derivación generalizada

En la línea multiconductora la carga del  $i$ -ésimo elemento está dada por:

$$q_1 = C_1 v_1 + C_2 v_2 + \dots + C_n v_n \quad (3-83)$$

En forma matricial definido por:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}\mathbf{V} \quad (3-84)$$

Donde el voltaje es:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}\mathbf{Q} \quad (3-85)$$

donde  $\mathbf{P}$  es la matriz del coeficiente de Maxwell,  $\mathbf{P}=\mathbf{C}^{-1}$ .

Así, el potencial del  $i$ -ésimo conductor es:

$$P_{ii} = \frac{1}{C} \approx \frac{\ln\left(\frac{2h}{r}\right)}{2\pi\epsilon_0} \quad (3-86)$$

y para el potencial mutuo:

$$P_{ik} \approx \frac{\ln\left(\frac{D_{ik}}{d_{ik}}\right)}{2\pi\epsilon_0} \quad (3-87)$$

Con lo anterior, la matriz de admitancias en derivación generalizada es:

$$\mathbf{Y} = j\omega\mathbf{C} \quad (3-88)$$

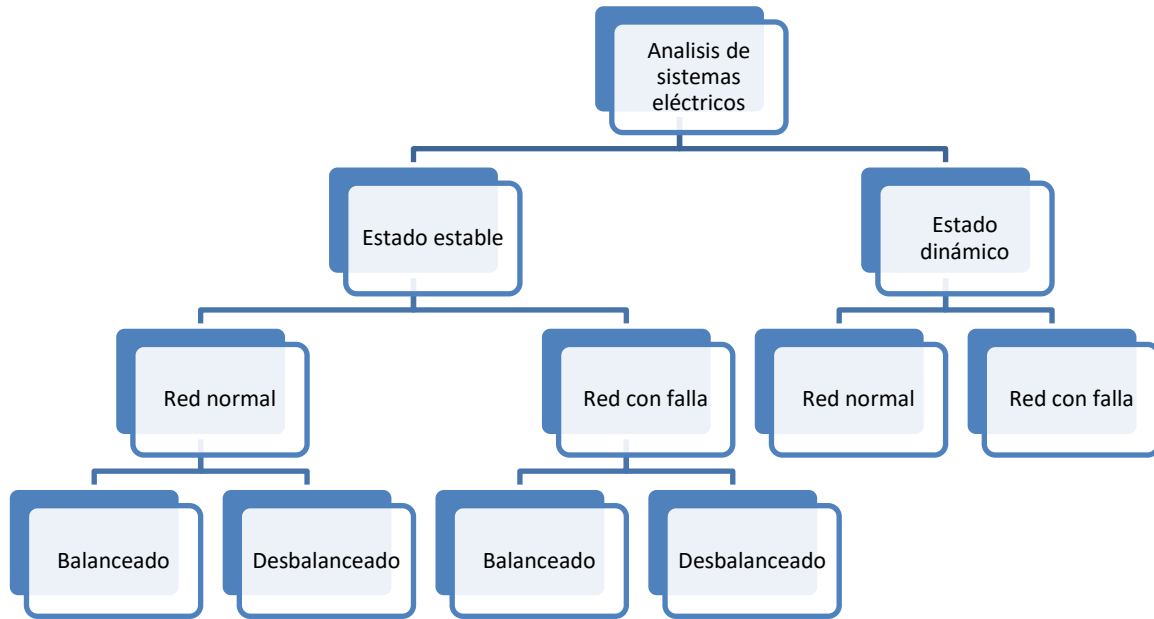
# Capítulo 4 Aplicación del modelo de la Línea de Transmisión

## 4.1.Introducción

El análisis de sistemas eléctricos generalmente implica el uso de programas computacionales para analizar una red bajo ciertas condiciones de voltajes y corrientes. Las herramientas computacionales se utilizan para obtener información para cierto propósito, por ejemplo, se puede determinar la corriente que fluye hacia tierra en una situación en particular para configurar un relevador de distancia. En la figura 4.1 se presenta una división de los problemas de sistemas eléctricos para abordarlos de manera correcta, los que se muestran de lado izquierdo se llaman de estado estable porque son resueltos por medio de ecuaciones algebraicas, esto no quiere decir que el sistema esté estático al momento del cálculo de la solución, es más como tomar fotografías del comportamiento del sistema bajo ciertas condiciones específicas. Este tipo de soluciones se ocupan, por ejemplo, para planear y determinar las protecciones que requiere el sistema.

Por otro lado, los problemas de dinámica, generalmente llamados problemas de estabilidad, resuelven un conjunto de ecuaciones diferenciales para determinar el comportamiento de voltajes, corrientes y otras variables en función del tiempo.

Debido al tamaño de los sistemas eléctricos, generalmente muy grandes, es relativamente imposible realizar una solución completa a mano debido al tamaño del problema, de ahí la importancia de combinar las herramientas computacionales con la teoría presentada.



**Figura 4.1 Diagrama de análisis de problemas de sistemas eléctricos**

El estudio de los sistemas eléctricos de potencia, por medio de simulaciones, es de gran interés en el campo de la ingeniería eléctrica debido a que nos ayuda a visualizar el comportamiento de este de una manera mucho más simple.

Con el modelo de línea presentado en el capítulo anterior, en los siguientes ejemplos, se realizan simulaciones de eventos transitorios. El objetivo de estos ejemplos es mostrar la diferencia del comportamiento de las tensiones transitorias que se presentan en las fases en una línea bajo diferentes condiciones, mediante un modelo implementado en el lenguaje de programación de MATLAB. El modelo obtenido puede aplicarse en general a cualquier tipo de línea modificando los datos correspondientes al cálculo de parámetros eléctricos, dichos parámetros eléctricos particularizan la línea de transmisión.

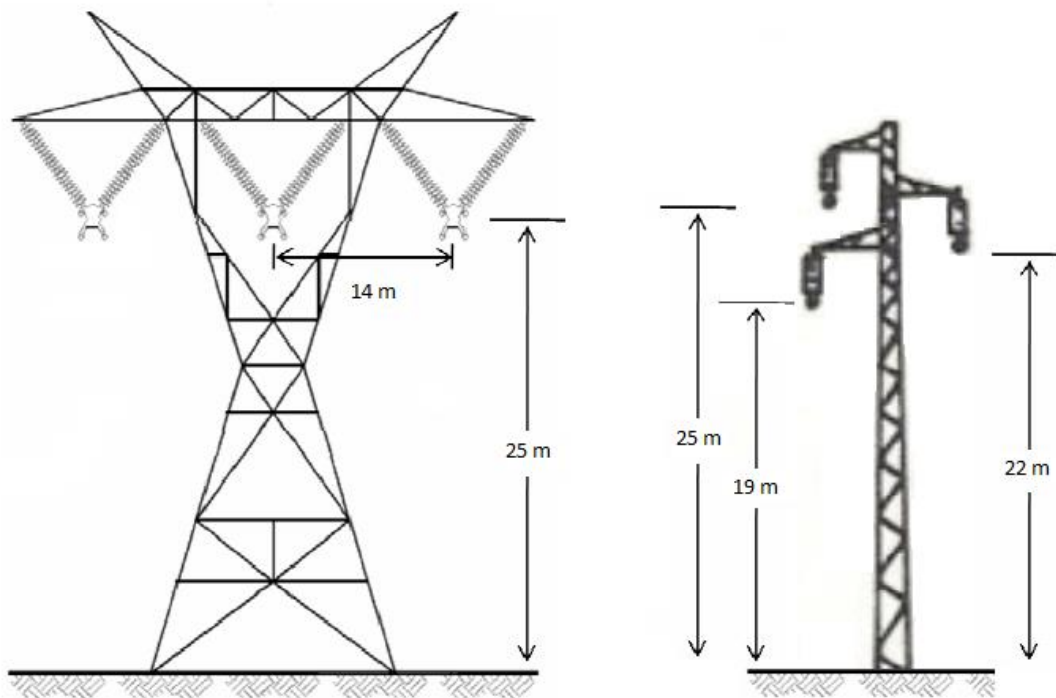
Para estas simulaciones se ocupa una línea con los datos que se muestran en la Figura 4.1. Para obtener los resultados de todos los ejemplos en el dominio del tiempo se utilizó la transformada numérica de Laplace.

Radio del conductor	0.02675 m
Permeabilidad del terreno	$1.2566 \times 10^{-6}$ H/m
Permeabilidad del conductor	$1.2566 \times 10^{-6}$ H/m
Resistividad del suelo	100 $\Omega$ -m
Resistividad del conductor	$2.71 \times 10^{-8}$ $\Omega$ -m

**Tabla 4.1. Datos de la línea de transmisión.**

Se realizarán dos casos de simulación, la diferencia de ambos será la disposición de las fases, esto para observar las diferencias entre el uso de torres diferentes.

Para el primer caso, los conductores se encuentran en una torre tipo "Y", con una disposición como la mostrada en la parte izquierda de Figura 4.2, sin considerar los hilos de guarda de la línea, esto quiere decir que los conductores se encuentran a la misma altura y la misma distancia la fase A de la B que B de C. para el segundo caso se tomará una torre de suspensión, la cual cuenta de una disposición irregular, como la mostrada en la parte derecha de la figura.

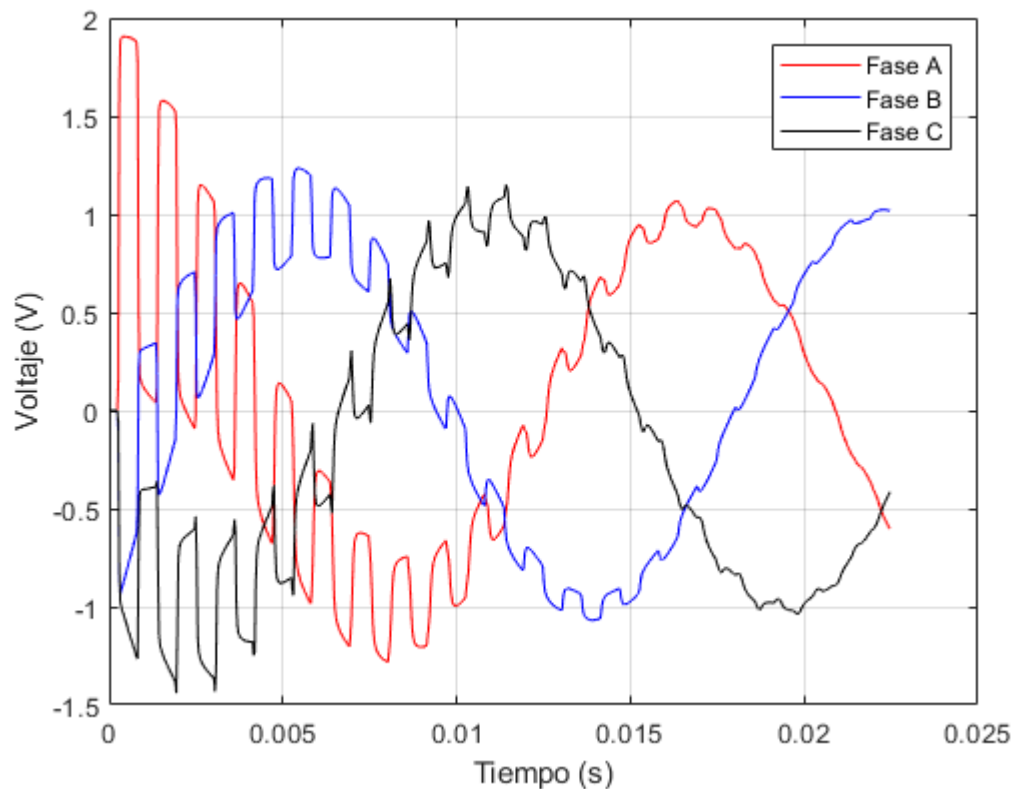


**Figura 4.2 Torres de simulación, Izq. Caso 1. Der. Caso 2.**

## 4.2. Caso 1

### 4.2.1. Simulación de cierre

En este programa se modela una línea trifásica, radial, con una carga resistiva alta al final de la línea. En el primer ejemplo de aplicación se alimenta la línea con una fuente cosenoidal, donde se observa la inducción entre fases al momento de la energización.



**Figura 4.3 Inducción de las fases por energización**

En la Figura 4.3 se observa el efecto que se tiene en la línea en el voltaje y como se amortiguan esas oscilaciones con el paso del tiempo.

### 4.2.2. Simulación de descarga

Para el segundo caso se elimina la fuente cosenoidal y se simula una descarga atmosférica en la fase A de la línea de transmisión, la cantidad de corriente producida por un rayo es una cantidad estadística, que depende de la energía existente en la nube y de la diferencia de la tensión entre ésta y la tierra al iniciarse la descarga. Se han llegado a registrar magnitudes de corriente de hasta 400 kA; sin embargo, aproximadamente el 50 % de todas las corrientes producidas por los rayos son menores a 20 kA, los resultados se muestran en la Figura 4.4, en la cual se disminuye el tiempo de observación para distinguir el efecto de la misma.

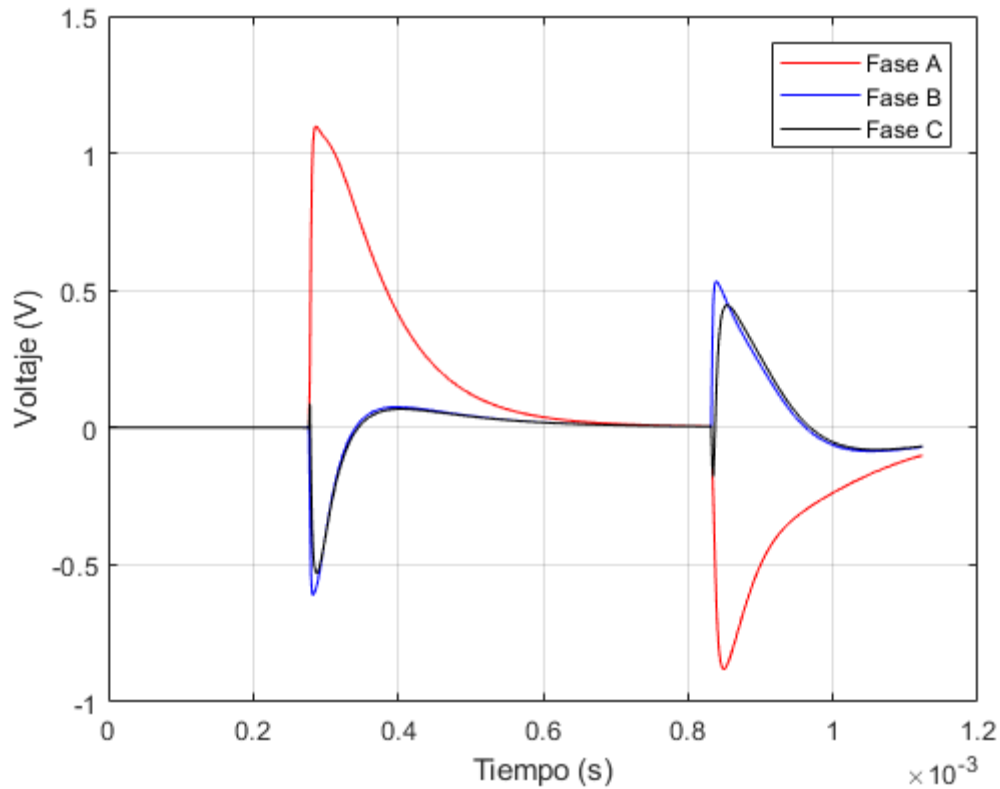


Figura 4.4 Respuesta de la línea a la descarga atmosférica

Debido a la velocidad de este efecto se disminuye el tiempo de observación, en esta gráfica se observa como la corriente administrada en la fase A se ve reflejada en las otras dos fases restantes.

### 4.2.3. Simulación con función escalón

Para el siguiente ejemplo se integra como fuente una función escalón en la fase A, para analizar el efecto en las fases adjuntas, los resultados se muestran en la Figura 4.5.

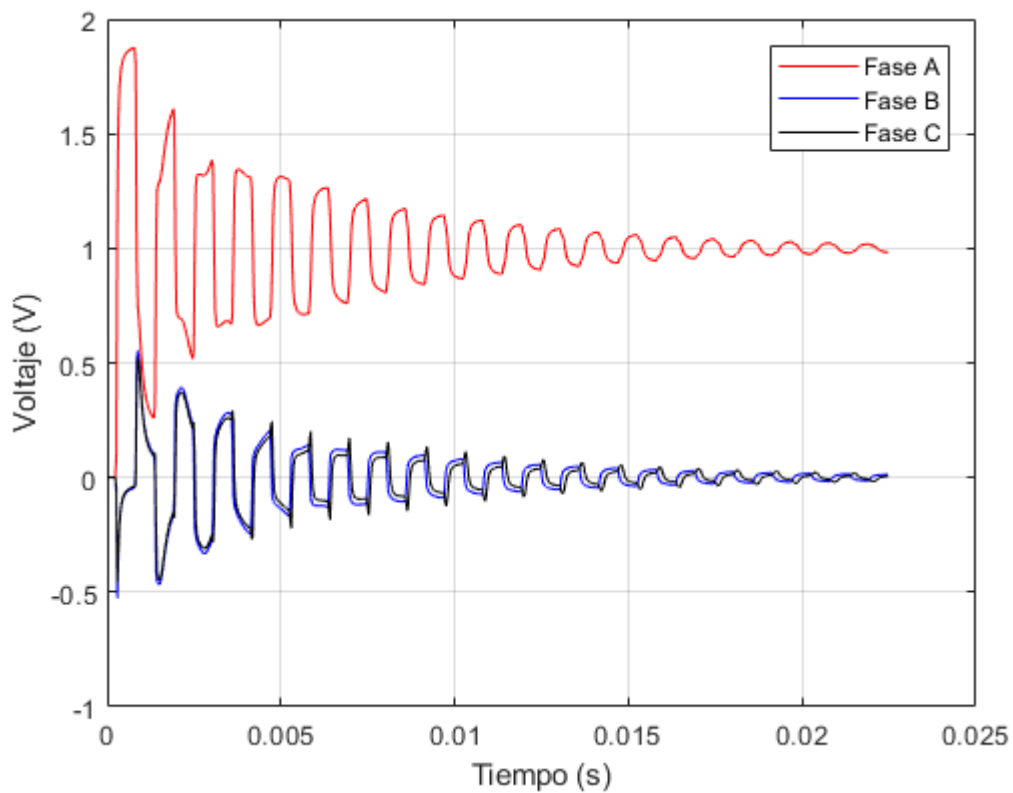
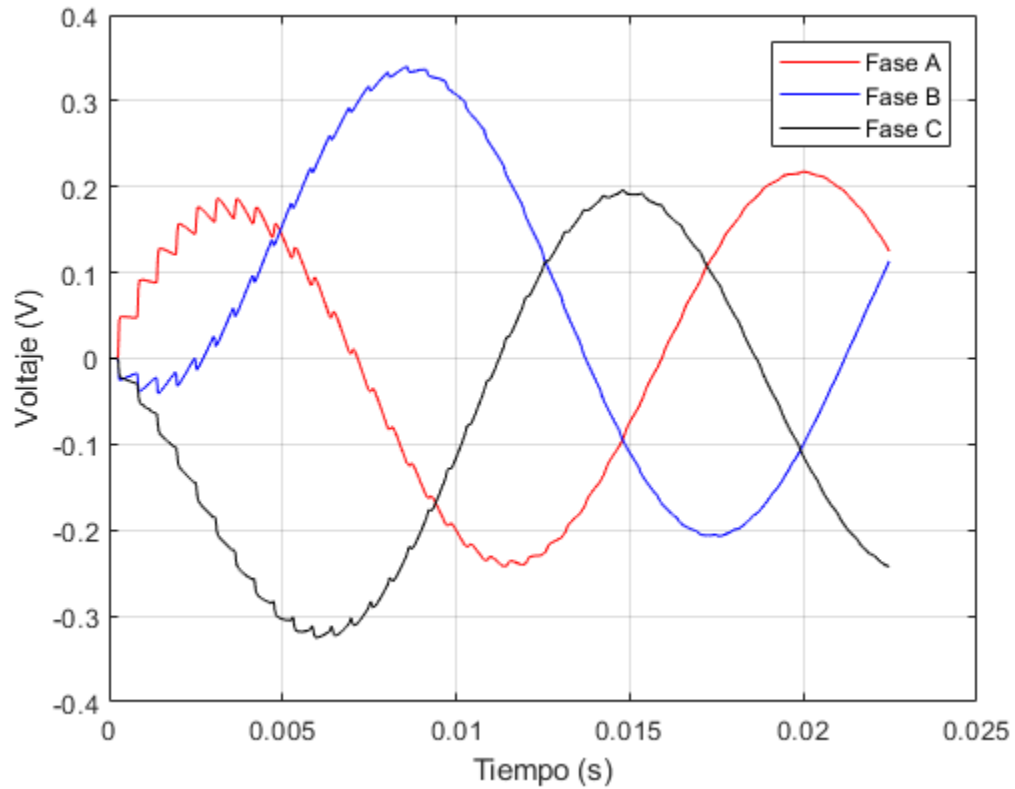


Figura 4.5 Aplicación de una fuente como función escalón

En el ejemplo se puede ver la respuesta de las fases B y C ante la corriente inyectada al inicio de la línea en la fase A.

#### 4.2.4. Simulación con variación de carga al final de la línea

Para este caso se cambia la carga resistiva al final de la línea por una carga muy pequeña, los resultados, en función del Voltaje, se muestran en la Figura 4.6.

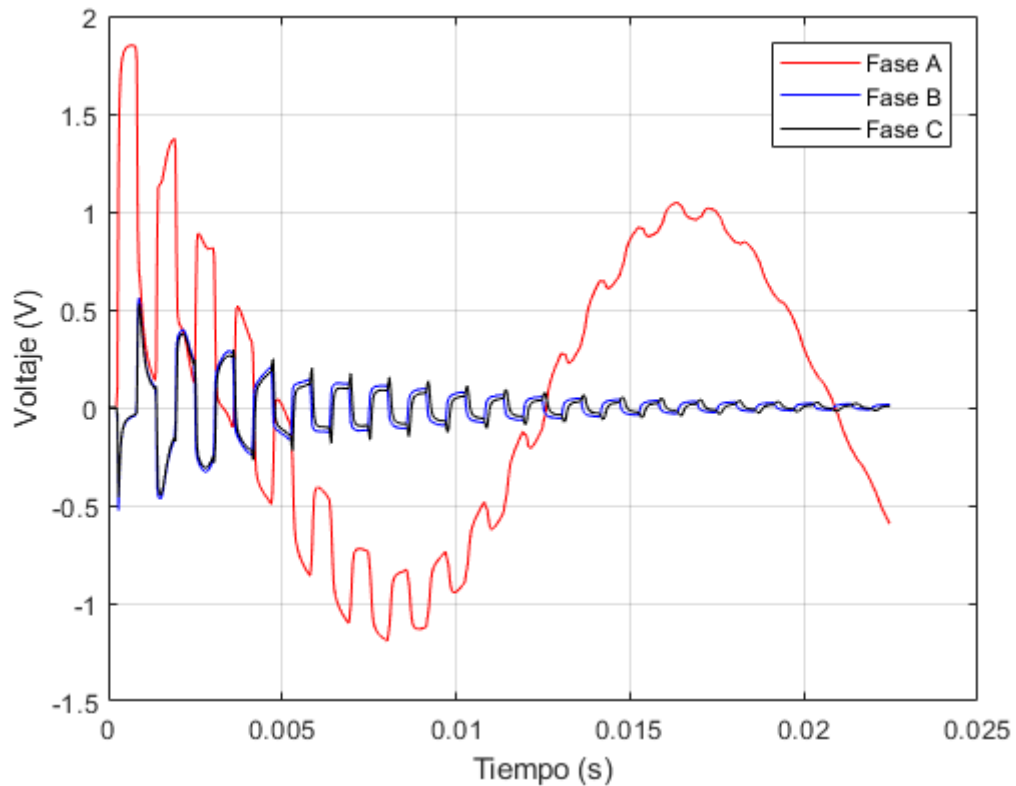


**Figura 4.6 Amortiguación de transitorios en la línea de transmisión**

En este ejemplo se nota como la carga amortigua el efecto de los transitorios en la línea.

#### 4.2.5. Energización de una sola fase

Por último se energiza únicamente la fase A para observar el efecto inductivo a las otras fases.



**Figura 4.7 Energización de fase A**

En la Figura 4.7 se observa como a las fases no energizadas se les induce un voltaje de hasta un poco más de 0.5 pu, debido a la cercanía de las fases.

## 4.3.Caso 2

### 4.3.1. Simulación de cierre

Con la simulación del Caso 2 se realizarán las mismas simulaciones presentadas anteriormente, iniciando con la energización de las tres fases, para observar las diferencias que se tienen en la inducción según la configuración de la estructura que soporta la línea. En la Figura 4.8 se observa que las oscilaciones para la fase A tomarán más tiempo en amortiguarse.

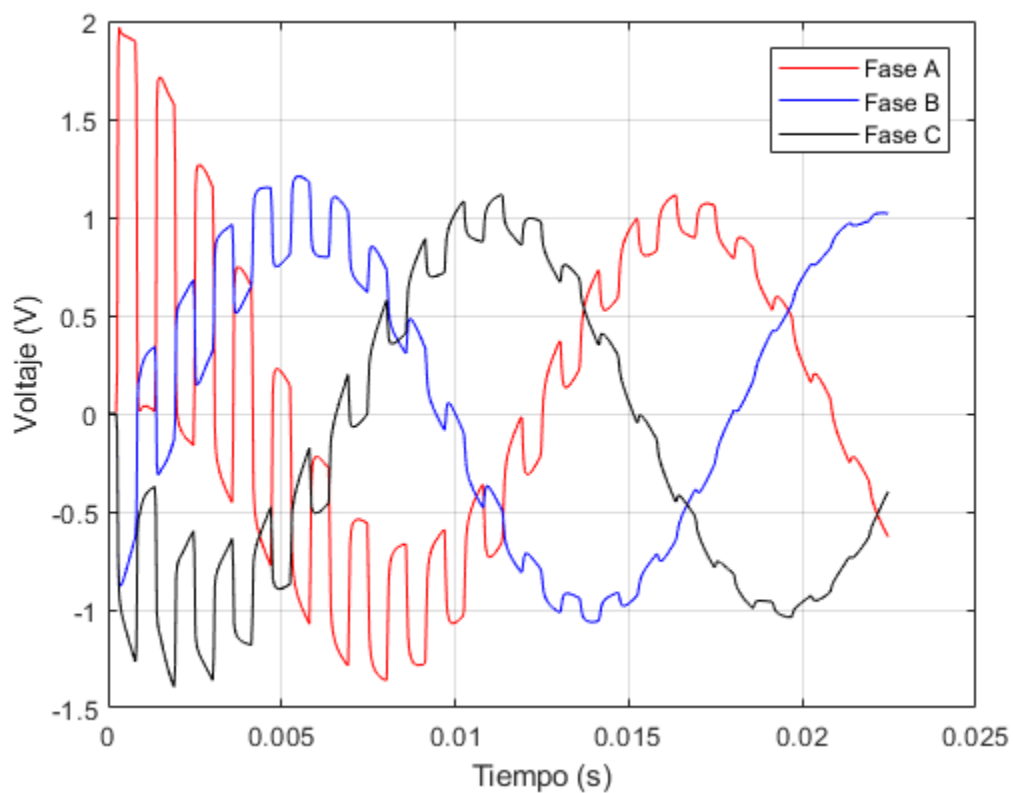


Figura 4.8 Inducción de las fases por energización Caso 2

### 4.3.2. Simulación de descarga

Con las mismas condiciones del caso anterior de descarga, se observa, en la Figura 4.9 un claro aumento en el nivel de voltaje en la Fase A, y un comportamiento más similar entre las Fases B y C que en el caso anterior.

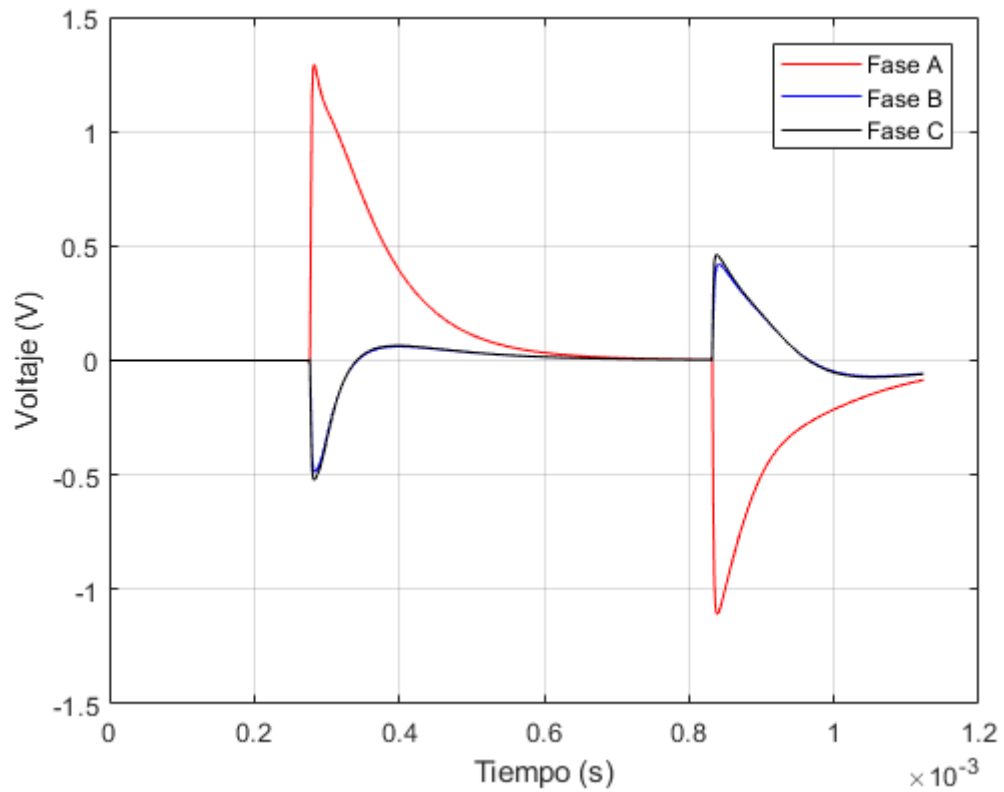


Figura 4.9 Respuesta de la línea a la descarga atmosférica Caso 2

### 4.3.3. Simulación con función escalón

En este caso se puede ver como la inducción hacia las fases adyacentes es menor con las disposición del Caso 2, como se puede observar en la Figura 4.10, siendo menor a 0.5 pu, pero también se nota que el amortiguamiento tomará más tiempo.

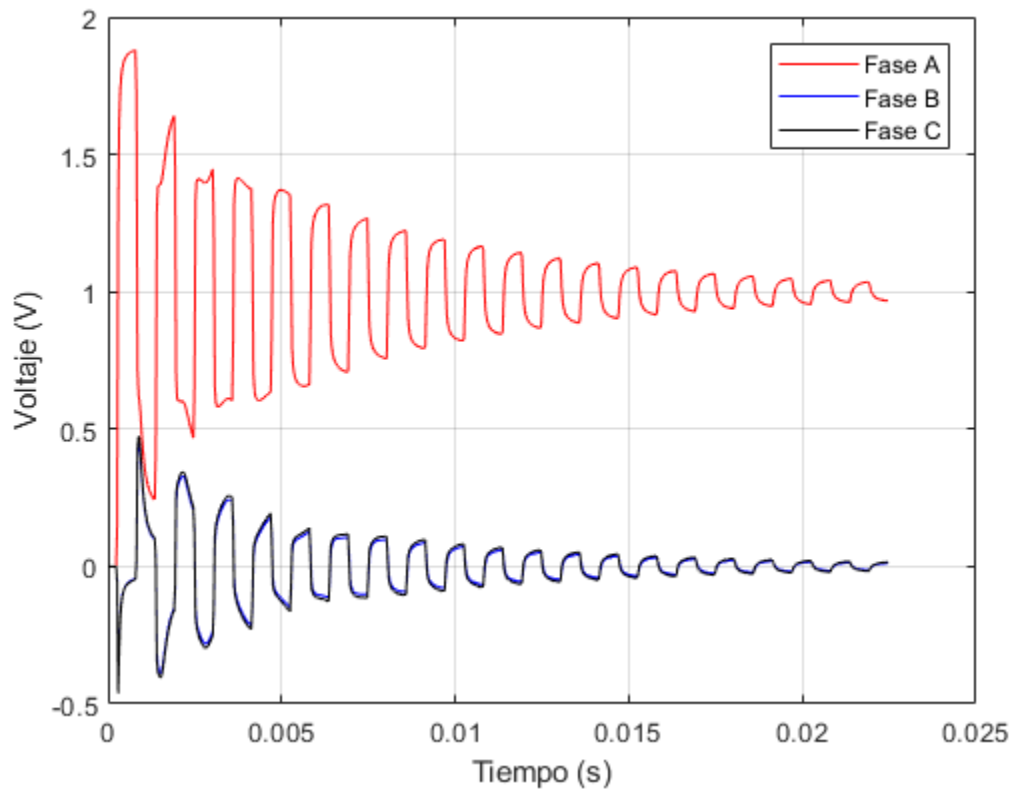


Figura 4.10 Aplicación de una fuente como función escalón Caso 2

#### 4.3.4. Simulación con variación de carga al final de la línea

En la figura 4.11 se ve una clara diferencia del efecto que se tiene entre el Caso 1 y el Caso 2, con una inducción mucho mayor para el Caso 2 y un tiempo de amortiguamiento mucho más largo.

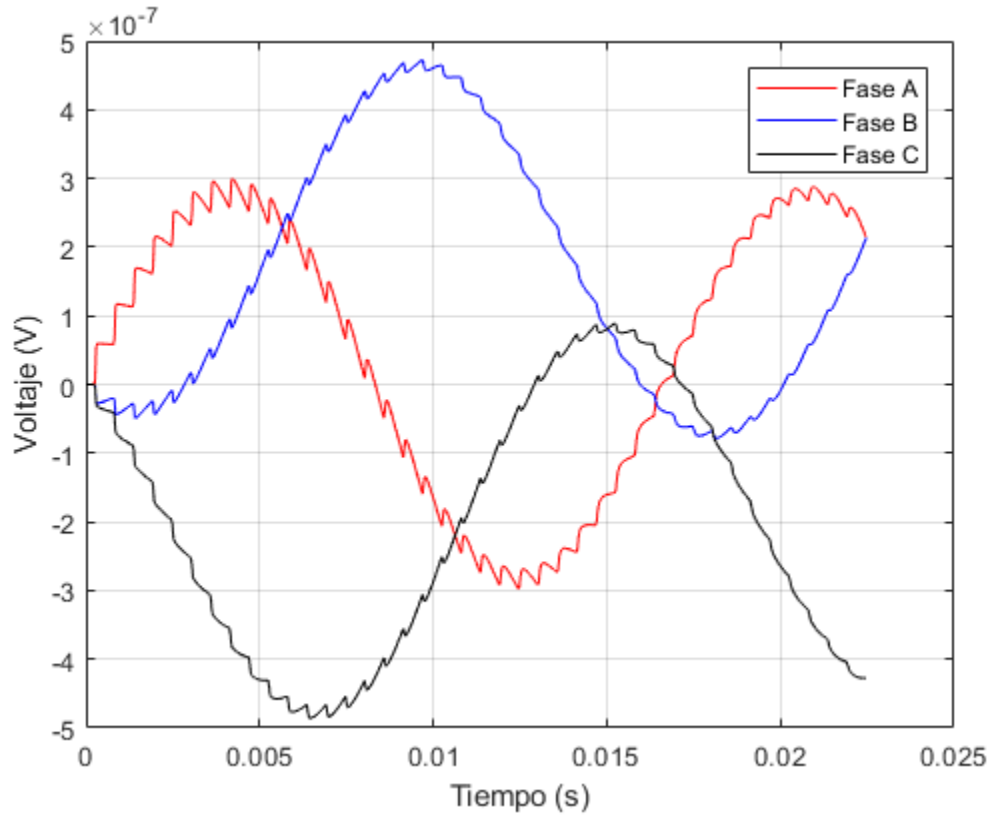


Figura 4.11 Amortiguación de transitorios en la línea de transmisión Caso 2

### 4.3.5. Energización de una sola fase

En el caso de la energización de una sola fase se distingue una inducción muy similar a las fases adyacentes, pero en la Figura 4.12 se puede ver que las oscilaciones de la Fase A no disminuyen tan rápido como en el Caso 1.

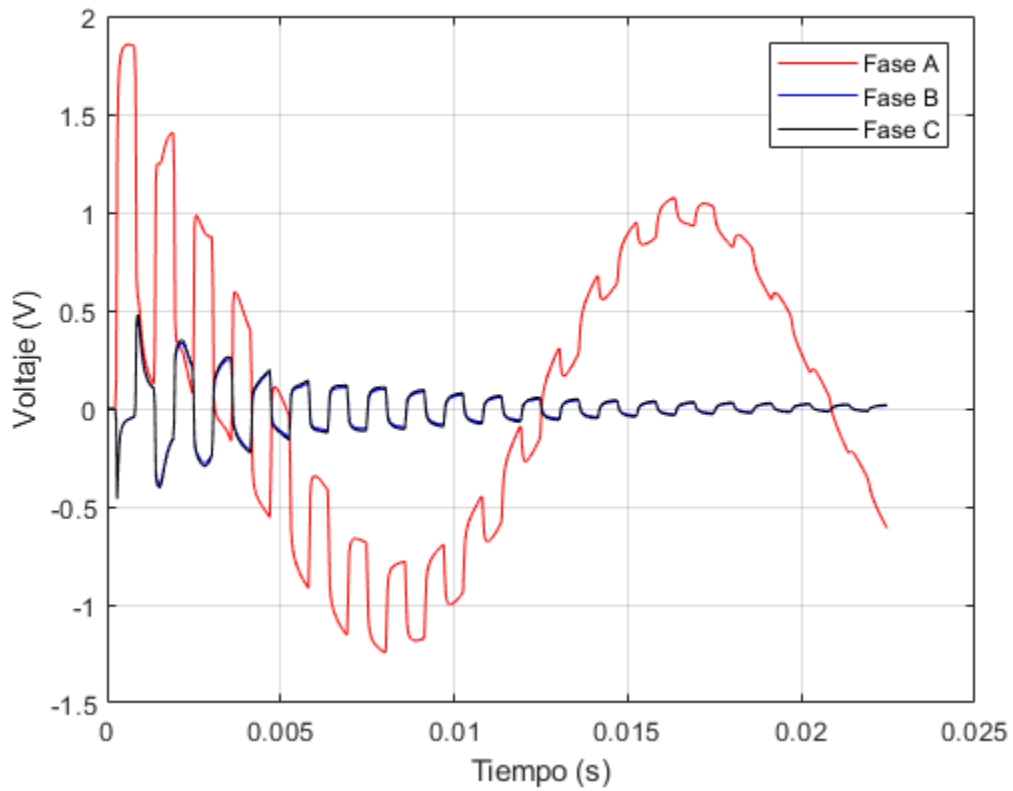


Figura 4.12 Energización de fase A Caso 2

# Capítulo 5 Conclusiones y trabajos futuros

## 5.1. Conclusiones

En este trabajo de tesis se presentó e implementó un modelo de parámetros distribuidos de la línea de transmisión para el análisis de sobretensiones transitorias, con parámetros eléctricos dependientes de la frecuencia y la respuesta en tiempo se obtuvo por medio de la aplicación de la Transformada Numérica de Laplace.

Las aportaciones más importantes de este trabajo son:

- Se propone el método en el dominio de la frecuencia empleando la Transformada Numérica de Laplace para análisis de las sobretensiones bajo diferentes escenarios.
- Implementación de una herramienta computacional para observar el comportamiento de las sobretensiones en las tres fases, bajo tres condiciones diferentes, energización de la línea, descarga atmosférica y la energización de una fase por una función escalón.
- En el modelo propuesto es mucho más sencillo considerar diferentes casos de aplicación que en programas comerciales de tipo EMTP, en los cuales la modificación de un caso requiere en ciertas ocasiones volver a definir todo el modelo de la línea.
- Comparación de los efectos inductivos entre fases considerando dos diferentes tipos de torres.

## **5.2. Trabajos futuros**

Como complemento para el modelo presentado en esta tesis, a continuación se proporcionan recomendaciones para trabajos futuros:

- Considerar en el modelo la interacción de la línea con los hilos de guarda,
- Ampliar el modelo para poder incluir un circuito adicional en la torre, teniendo así dos circuitos trifásicos por torre y ver el comportamiento en los seis conductores,
- E incorporar el modelo a una red anillada.

# Bibliografía

1. **Harper, Enriquez.** *Sistemas de Transmisión y Distribución de Potencia Eléctrica.*
2. **P. H Schavemaker, L. van der Sluis.** *Electrical Power System Essentials.* The Netherlands : John Wiley & Sons, 2001.
3. **Geenwood, A.** *Electrical Transients in Power Systems.* s.l. : John Wiley & Sons, 1991.
4. **CIGRE Working Group 02 (SC 33).** *Guidelines for Representation of Network Elements when Calculating Transients.* 1990.
5. **Cheng, D. K.** *Fundamentos de Electromagnetismo para Ingeniería.* s.l. : Addison Wesley Longman de México, 1998.
6. **Short, T. A.** *Electric Power Distribution Handbook.* s.l. : CRC Press, 2004.
7. **Paul, C. R.** *Analysis of Multiconductor Transmission Lines.* s.l. : John Wiley & Sons, 1994.
8. **Bewley, L. V.** *Traveling Waves on Transmission Systems.* s.l. : Wiley New York, 1951.
9. **J. A. Gutierrez, J. L. Naredo, L. Guardado, and P. Moreno.** *Transient Analysis of Nonuniform Transmission Lines through the Method of Characteristics.* London, U.K. : 11th International Symposium on High Voltage Engineering, 1999, Vol. 2.
10. **M. Davila, J. L. Naredo and P. Moreno.** *Transient Analysis of Power Lines Including Non Uniform and Frequency Dependent Effects.* Arizona, U.S.A. : North American Power Symposium, 2002.
11. **KöKsal, M. S. Mamis y M.** *Lightning Surge Analysis Using Nonuniform Single-Phase Line Model.* 2001, Vol. 148.
12. **Y. Aldana Debernardi,** *Restauración de sistemas eléctricos de potencia utilizando algoritmos genéticos,* Tesis de Maestría, Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, ESIME, Instituto Politécnico Nacional. México, D,F, 2003.
13. **E. K. Nielson, et al.,** *System Operations Challenges,* IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 3, No. 1, pp. 118-124, Febrero 1988.

14. **M. M. Adibi, et al.**, *Power System Restoration Issues*, IEEE Trans. on Power Systems, Vol. 4, No. 2, pp. 19-24, Abril 1991.
15. **H. W. Dommel**, *Digital computer solution of electromagnetic transients in single- and multi-phase networks*, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. 88, No. 2, pp. 734-741, Abril 1969.
16. **H. W. Dommel**, *Electromagnetic Transients Program, Reference Manual (EMTP Theory Book)*, Bonneville Power Administration, Portland, 1986.
17. **H. W. Dommel**, *Nonlinear and time-varying elements in digital simulation of electromagnetic transients*, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. 90, No. 6, pp. 2561-2567, Noviembre/Diciembre 1971.
18. **A. Budner**, *Introduction of Frequency Dependent Line Parameters into an Electromagnetic Transients Program*, IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-89, pp. 88-97, Enero 1970.
19. **J. K. Snelson**, *Propagation of Travelling Waves on Transmission Lines-Frequency Dependent Parameters*, IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-91, pp. 85-91, Enero/Febrero 1972.
20. **W. S. Meyer y H. W. Dommel**, *Numerical Modeling of Frequency-Dependent Transmission-Line Parameters in an Electromagnetic Transients Program*, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-93, pp. 1401-1409, Septiembre/Octubre 1974.
21. **P. Gómez, et al.**, *Frequency domain transient analysis of electrical networks including Non-linear conditions*, Electrical power and energy systems, No. 27, pp. 139-146, Septiembre 2004.
22. **J. L. Naredo, et al.**, *Frequency domain computation on transmission line closing transients*, IEEE Trans. on Power Delivery, Vol.6, No. 1, pp. 275-281, Enero 1991.
23. **J.J. Grainger, W.D. Stevenson Jr**, *Análisis de sistemas de potencia*, McGraw Hill, 1996.
24. **C. Gary**, *Análisis de la propagación a través de conductores múltiples en alta frecuencia utilizando matrices complejas*, Electricité de France.
25. **P. Gomez**, *Modelado del equipo eléctrico para transitorios electromagnéticos*, Notas del curso, SEPI- ESIME- IPN, 2006.
26. **J.D. Glover, M.S. Sarma**. *Power System Analysis and Design*, Limusa, 3ª Edic., 2004.

27. **C.R. Fuerte Esquivel, R.M. Palomino**, *Modelado de líneas aéreas de transmisión*, Reporte interno SGIE-RI-0493, Sección de Graduados e Investigación de la E.S.I.M.E., Instituto Politécnico Nacional, México, D.F., 1991.
28. **F. Castellanos, J. R. Martí**, “*Full Frequency-Dependent Phase-Domain Transmission Line Model*”, IEEE Trans. on Power Systems, vol. 12, no. 3, pp. 1331-1339, Agosto 1997.
29. **D. J. Wilcox**, “*Numerical Laplace Transformation and Inversion*”, Int. J. Elect. Enging. Educ., vol 15, pp. 247-265, 1978.
30. **H.W. Dommel**, *Electromagnetic Transients Program, Reference Manual (EMTP Theory Book)*, Boneville Power Administration, 1986.
31. **M. M. Adibi**, *Power System Restoration, methodologies and implementation strategies*, IEEE Series on Power Engineering, 2000.