



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

APLICACIONES LINEALES QUE PRESERVAN LA
INVERSA DRAZIN

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA

LIC. BRENDA LIZBETH CUEVAS JUÁREZ

DIRECTOR DE TESIS

DR. GABRIEL KANTÚN MONTIEL

PUEBLA, PUE.

NOVIEMBRE DE 2018

Aplicaciones lineales que preservan la inversa
Drazin

Brenda Lizbeth Cuevas Juárez

Noviembre de 2018

Introducción

En el análisis matricial, a menudo, estamos interesados en estudiar el comportamiento de las transformaciones entre subconjuntos de matrices. Por ejemplo, al considerar un sistema de ecuaciones nos gustaría poder usar una transformación que simplifique el sistema. Como los espacios de matrices son espacios lineales, es natural considerar transformaciones lineales. Algunas de las transformaciones que resultan ser útiles son aquellas que son sencillas y que preservan en algún sentido las propiedades que nos interesan.

El problema de preservadores lineales consiste en caracterizar las transformaciones lineales que dejan invariantes ciertas funciones, subconjuntos, relaciones, etc. Por ejemplo, consideremos el conjunto M_n de matrices complejas $n \times n$ y una transformación $\phi : M_n \rightarrow M_n$ definida por $\phi(A) = MAN$ o por $\phi(A) = MA^tN$, donde $M, N \in M_n$ no son singulares. Se conoce que ϕ preserva el rango de las matrices, lo que es sorprendente es que cualquier transformación lineal que preserve el rango de una matriz debe ser de esta forma.

Antecedentes

Uno de los primeros en mostrar el fenómeno anterior fue Ferdinand Georg Frobenius (1849 - 1917) . Supongamos que $M, N \in M_n$ son tales que $\det(MN) = 1$. Luego la aplicación $\phi : M_n \rightarrow M_n$ definida por $\phi(A) = MAN$ es lineal y cumple que $\det(\phi(A)) = \det(A)$ para todo $A \in M_n$. En este caso, decimos que ϕ preserva determinantes. Notemos que como

II

$\det(A) = \det(A^t)$ tenemos que si $\det(MN) = 1$, entonces el operador lineal definido por $\varphi(A) = MA^tN$ también preserva el determinante. En 1897 Frobenius probó en [7] que cada transformación lineal $\phi : M_n \rightarrow M_n$ que preserva determinantes tiene la forma $\phi(A) = MAN$ o bien $\phi(A) = MA^tN$ con $M, N \in M_n$ tales que $\det(MN) = 1$, .

Como el espacio de matrices M_n es un álgebra de Banach, vamos a considerar el caso más general de un álgebra de Banach arbitraria \mathcal{A} . Podemos plantear los siguientes problemas de preservadores lineales:

- a) Dada una función (escalar, vectorial o de conjuntos) F en \mathcal{A} , caracterizar las aplicaciones lineales ϕ en \mathcal{A} que satisfagan $F(\phi(x)) = F(x)$ para todo $x \in \mathcal{A}$.
- b) Sea S un subconjunto dado de \mathcal{A} . Caracterizar las aplicaciones lineales ϕ en \mathcal{A} para las cuales $x \in S$ implica $\phi(x) \in S$ para todo $x \in \mathcal{A}$.
- c) Sea R una relación en \mathcal{A} . Caracterizar las aplicaciones lineales ϕ en \mathcal{A} para las cuales xRy implica $\phi(x)R\phi(y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$.
- d) Dada una aplicación $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, caracterizar las aplicaciones lineales ϕ en \mathcal{A} que cumplan $F(\phi(x)) = \phi(F(x))$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

En particular, estamos interesados en preservadores lineales para el caso del álgebra de Banach (con unidad) de los operadores lineales acotados. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert, y denotemos por $B(\mathcal{H})$ el conjunto de los operadores lineales acotados en \mathcal{H} . Varias de las preguntas que consideramos más adelante se vuelven triviales cuando $\dim \mathcal{H} < \infty$, por lo que consideraremos que \mathcal{H} es de dimensión infinita.

Sorour probó en 1996 en [16], que una aplicación lineal biyectiva $\phi : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H})$ preserva invertibilidad si y solo si $\phi(T) = ATB$ o $\phi(T) = CT^*D$ para cada $T \in B(\mathcal{H})$, donde A,B,C,D son operadores lineales acotados y T^* es el operador adjunto de T .

Existen varias aproximaciones a la noción de inversa generalizada. En este trabajo estamos interesados en la generalización que propuso M.P. Drazin en 1958: diremos que $T \in B(\mathcal{H})$ es invertible Drazin si existe $S \in B(\mathcal{H})$ tal que $STS = S$, $TS = ST$, $T^{n+1}ST^n$ y para algún $n \in \mathbb{N}$. Aquí, T^n denota la composición de T consigo mismo n veces cuando es n un número natural, y $T^0 = I$, donde I es el operador identidad. La transformación S es única, si existe. Esta se llamará inversa de Drazin y se denotará por T^D .

Planteamiento de problema

Decimos que una aplicación $\phi : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H})$ preserva la inversa Drazin si $\phi(T^D) = \phi(T)^D$ para cada operador $T \in B(\mathcal{H})$ invertible Drazin. En este trabajo atacamos el problema de determinar la estructura de las aplicaciones lineales en $B(\mathcal{H})$ que preservan la inversa Drazin.

Objetivos

Objetivo General

Caracterizar las transformaciones lineales que preservan la inversa Drazin entre espacios de operadores.

Objetivos específicos

- Estudiar preservadores lineales entre espacios de matrices.

- Determinar condiciones para la existencia de la inversa Drazin.
- Caracterizar las transformaciones aditivas que preservan la inversa Drazin.

Resultados

En este trabajo se realiza un compendio de estudios sobre preservadores lineales de inversas generalizadas. Específicamente se considera la inversa Drazin y las aplicaciones aditivas que la preservan. De entre los resultados obtenidos, se destacan los siguientes:

- a) Se detallan las demostraciones de resultados clásicos sobre preservadores lineales de determinantes para el caso de aplicaciones entre espacios de matrices. Se presentaron resultados sobre preservadores lineales de idempotentes.
- b) Se organizan resultados conocidos sobre la inversa Drazin que se hallan dispersos en la literatura.
- c) Se presenta la estructura de las aplicaciones aditivas que preservan la inversa Drazin en el álgebra de los operadores lineales acotados.

Índice general

Introducción	I
1. Preservadores lineales en espacios de matrices	1
1.1. Preliminares	1
1.2. Preservadores de determinantes	5
1.3. Preservadores de idempotentes	15
2. La inversa generalizada de Drazin	24
2.1. Inversa Drazin	25
2.2. Ascenso y descenso	32
2.3. Descomposición en subespacios	37
2.4. El espectro	39
2.4.1. Idempotentes	44
2.4.2. Idempotentes mínimos	52
3. Preservadores aditivos de la inversa Drazin	54
Conclusión	63
Bibliografía	65

Capítulo 1

Preservadores lineales en espacios de matrices

De manera histórica, el estudio del problema de los preservadores lineales inició en el contexto de espacios de matrices. Dedicamos este capítulo a presentar algunos resultados clásicos que ilustran las técnicas empleadas.

1.1. Preliminares

En esta sección recordamos algunas definiciones y propiedades básicas de matrices y vectores.

Una matriz es un arreglo bidimensional de números (llamados entradas de la matriz) ordenados en filas y columnas. A una matriz con m filas y n columnas se le denomina matriz $m \times n$. El conjunto de las matrices de tamaño $m \times n$ se representa como $M_{m \times n}(\mathbb{F})$, donde \mathbb{F} es el campo al cual pertenecen las entradas. Si $n = m$ entonces diremos que es una matriz cuadrada.

Es usual representar a una matriz por sus entradas, es decir, $A := (a_{ij})$.

Definición 1.1.1. Una matriz elemental de orden n es una matriz que se obtiene a partir de la matriz identidad I_n , donde I_n es la matriz identidad $n \times n$, aplicando solo una operación elemental de fila o columna, es decir:

- Por escalamiento (producto por un escalar).
- Producto de una fila por un escalar o suma de una fila con una combinación lineal de otras (eliminación).
- Por permutación (intercambio de filas).

Las filas o columnas independientes de una matriz son aquellas que no pueden expresarse como una combinación de las demás.

Algunos tipos de matrices merecen un nombre especial, ahora señalamos unos pocos que serán útiles para este trabajo:

- La transpuesta A^T de una matriz A de $m \times n$ es la matriz de $n \times m$ obtenida a partir de A mediante el intercambio de renglones con columnas.
- Se dice que A es una matriz simétrica si es una matriz cuadrada y cumple que $A^T = A$.
- Se dice que A es una matriz ortogonal si $AA^T = I$.
- Una matriz A es idempotente si cumple que $A^2 = A$.
- Una matriz A es antisimétrica si es opuesta (es decir, inversa aditiva) a su transpuesta:

$$A^T = -A.$$

- Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Se dice que A y B son similares (o semejantes) si existe una matriz $P \in M_n(\mathbb{F})$ tal que P es invertible y

$$P^{-1}AP = B.$$

La noción de invertibilidad juega un papel central para este trabajo.

Definición 1.1.2. Se dice que una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ es una matriz invertible, o que es una matriz no singular, si existe una matriz $B \in M_n(\mathbb{F})$, que llamaremos la matriz inversa de A , que cumple

$$BA = AB = I$$

La inversa de A es única, si existe, y la denotaremos por A^{-1} .

Proposición 1.1.1. *El producto de matrices invertibles es invertible.*

Demostración. Supongamos que $A, U \in M_n(\mathbb{F})$ son invertibles con inversas A^{-1} y U^{-1} respectivamente. Así, un cálculo directo muestra que $(AU)^{-1} = U^{-1}A^{-1}$.

□

Ahora hablaremos un poco sobre determinantes de matrices, ya que algunas de sus propiedades se utilizan en este trabajo.

Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$. El determinante es una función que le asigna a A un único número real. Al determinante de A , lo denotaremos por $\det(A)$.

Definición 1.1.3. Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$ se define el determinante de A como:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n!} (-1)^\sigma \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

Donde:

- (j_1, j_2, \dots, j_n) es una de las $n!$ permutaciones del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.
- σ es el número de transposiciones o cambios requeridos para reordenar la permutación $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ en el orden de $\{1, 2, \dots, n\}$.

Teorema 1.1.1. *El determinante de una matriz A cumple las siguientes propiedades:*

- Si B es una matriz obtenida a partir de A al multiplicar cada elemento de un mismo renglón de A por un escalar c , entonces $\det(B) = c \det(A)$.
- Si dos renglones de A son idénticos, entonces $\det(A) = 0$.
- Si B es una matriz obtenida a partir de A intercambiando dos renglones, entonces $\det(B) = -\det(A)$.
- Si un renglón de A consta totalmente de elementos nulos, entonces $\det(A) = 0$.
- A es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$.
- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Un concepto que también debemos recordar es el característico de un campo \mathbb{F} .

Definición 1.1.4. El característico de un campo \mathbb{F} , denotado por $\text{char}\mathbb{F}$, es definido como el entero positivo n más pequeño, tal que $n \cdot 1_{\mathbb{F}} = 0$, si n existe de lo contrario es definido como 0, donde $1_{\mathbb{F}}$ es la unidad en \mathbb{F} .

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ invertible puede ser escrita como producto de una matriz $P \in M_n(\mathbb{F})$ positiva y $U \in M_n(\mathbb{F})$ ortogonal, es decir $A=PU$, esta factorización se denomina *descomposición polar*

A continuación recordamos conceptos que se utilizan en la tesis.

Primero veamos que es una sucesión de Cauchy:

Definición 1.1.5. Se dice que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe un $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$, entonces $|x_n - x_m| < \epsilon$.

Se dice que $(\mathcal{H}, \langle, \rangle)$ es un espacio de Hilbert si es completo, es decir, si toda sucesión de Cauchy en \mathcal{H} converge (respecto a la norma asociada al producto interior) a un elemento $x \in \mathcal{H}$.

Definición 1.1.6. Si E es un espacio normado decimos que un conjunto $A \subset E$ es precompacto en E (o relativamente compacto), cuando $cl(A)$ es un conjunto compacto.

Sean X, Y espacios normados. Un operador lineal $T : X \rightarrow Y$ es compacto (o completamente continuo) si manda conjuntos acotados de X en conjuntos precompactos de Y .

1.2. Preservadores de determinantes

En esta sección presentaremos algunos resultados sobre aplicaciones lineales que preservan algunas propiedades sobre matrices.

Sea \mathbb{C} el campo de los números complejos. Denotaremos por $M_n(\mathbb{C})$ y $S_n(\mathbb{C})$ los espacios vectoriales de matrices y matrices simétricas sobre \mathbb{C} , respectivamente, todas de tamaño $n \times n$. Primero mencionamos algunos lemas.

Lema 1.2.1 ([17], lema 1.2). *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ de rango r , luego existen matrices invertibles $U, V \in M_n(\mathbb{C})$ tales que*

$$A = U(E_{11} + E_{22} + \cdots + E_{rr})V,$$

donde $E_{ij} = e_i e_j^T$ es la matriz $n \times n$ con 1 en la entrada (i, j) y ceros en todas la demás entradas.

Demostración. Sabemos que cada operación de fila realiza el mismo resultado que la multiplicación por la izquierda por una cierta matriz elemental, tenemos que:

$$A = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 R, \quad \text{donde} \quad R = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \\ 0^T \\ \vdots \\ 0^T \end{bmatrix}$$

es el escalonado reducido de A , y E_i son matrices elementales. Además cada E_i es invertible, así el producto $U = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1$ también lo es.

Por la forma de R tenemos que $\{v_1, \dots, v_r\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en \mathbb{C}^n , y puede ser extendida a $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ una base de \mathbb{C}^n .

$$\text{Sea } V = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \\ v_{r+1}^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}, \text{ luego para cada } i = 1, \dots, r \text{ tenemos}$$

$$E_{ii}V = e_i e_i^T \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \\ v_{r+1}^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} = e_i v_i^T = \begin{bmatrix} 0^T \\ \vdots \\ v_i^T \\ 0^T \\ \vdots \\ 0^T \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$(E_{11} + \dots + E_{rr})V = E_{11}V + \dots + E_{rr}V = \begin{bmatrix} v_1^T \\ 0^T \\ \vdots \\ 0^T \\ 0^T \\ \vdots \\ 0^T \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0^T \\ 0^T \\ \vdots \\ v_r^T \\ 0^T \\ \vdots \\ 0^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_r^T \\ 0^T \\ \vdots \\ 0^T \end{bmatrix} = R.$$

Así tenemos que, $U(E_{11} + \dots + E_{rr})V = UR = A$ con matrices invertibles $U, V \in M_n(\mathbb{C})$.

□

Lema 1.2.2 ([17], L.1.3). *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ de rango r , luego existe $B \in M_n(\mathbb{C})$ de rango $n-r$, tal que $A+B$ es invertible.*

Demostración.

Por el lema 1.2.1 tenemos que $A = U(E_{11} + \dots + E_{rr})V$ para algunas matrices invertibles U y V . Sea $B = U(E_{r+1,r+1} + \dots + E_{nn})V$. Luego B es de rango $n - r$, y

$$A + B = U(E_{11} + \dots + E_{rr})V + U(E_{r+1,r+1} + \dots + E_{nn})V = UV$$

Como U y V son matrices invertibles sabemos que UV también lo es, por lo tanto $A+B$ es invertible.

□

Ahora podemos presentar un primer resultado sobre preservadores: las transformaciones lineales que preservan rango 1 no son totalmente arbitrarias, sino que se pueden caracterizar como sigue:

Teorema 1.2.1. (Marcus y Moyls,[17]).

Sea $T : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ un operador lineal. Supongamos que para cualquier $A \in M_n(\mathbb{C})$ de rango 1, tenemos que $\text{rango}(T(A))=1$. Entonces existen matrices invertibles $P, Q \in M_n(\mathbb{C})$ de tal manera que para todo $A \in M_n(\mathbb{C})$

$$T(A) = PAQ$$

o

$$T(A) = PA^TQ.$$

Demostración. Para cada $i, j = 1, 2, \dots, n$, $E_{ij} = e_i e_j^T$ es de rango uno, así $T(E_{ij})$ es de rango 1. Podemos escribir

$$T(E_{ij}) = u_{ij} v_{ij}^T$$

para algunos vectores no cero u_{ij} y v_{ij} en \mathbb{C}^n . Demostremos primero que para cada j y k , se cumple $u_{ij} \parallel u_{ik}$, es decir u_{ij} es paralelo a u_{ik} , o $v_{ij} \parallel v_{ik}$.

Dado que $E_{ij} + E_{ik}$ tienen rango 1, entonces

$$T(E_{ij} + E_{ik}) = u_{ij}v_{ij}^T + u_{ik}v_{ik}^T = \begin{bmatrix} u_{ij} & u_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ij}^T \\ v_{ik}^T \end{bmatrix}$$

también tiene rango 1. Supongamos que $u_{ij} \not\parallel u_{ik}$. Luego existen $w_3, w_4, \dots, w_n \in \mathbb{C}^n$ tales que $\{u_{ij}, u_{ik}, w_3, \dots, w_n\}$ es una base en \mathbb{C}^n . Sea

$$U = \begin{bmatrix} u_{ij} & u_{ik} & w_3 & \cdots & w_n \end{bmatrix}.$$

Note que $U \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ij} & u_{ik} \end{bmatrix}$. Luego

$$T(E_{ij} + E_{ik}) = \begin{bmatrix} u_{ij} & u_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ij}^T \\ v_{ik}^T \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ij}^T \\ v_{ik}^T \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} v_{ij}^T \\ v_{ik}^T \\ 0^T \\ \vdots \\ 0^T \end{bmatrix}$$

es de rango 1. Por lo tanto, $v_{ij} \parallel v_{ik}$.

Ahora mostremos que, dado i , se tiene que $u_{i1} \parallel u_{i2} \parallel \dots \parallel u_{in}$ o $v_{i1} \parallel v_{i2} \parallel \dots \parallel v_{in}$.

Supongamos $u_{i1} \not\parallel u_{ik}$ para algún $k \neq 1$. Luego por la parte anterior, sabemos que $v_{i1} \parallel v_{ik}$. Afirmamos que se cumple $v_{i1} \parallel v_{i2} \parallel \dots \parallel v_{in}$, en efecto, si $v_{i1} \not\parallel v_{im}$ para algún m , entonces $v_{ik} \not\parallel v_{im}$, así $v_{i1} \not\parallel v_{im}$ y $u_{ik} \parallel u_{im}$, por lo tanto, $u_{i1} \parallel u_{ik}$ lo cual contradice nuestra suposición.

Supongamos que para un i fijo, $u_{i1} \parallel u_{i2} \parallel \dots \parallel u_{in}$, es decir, $u_{ij} = k_{ij}u_{i1}$ para algún $k_{ij} \in \mathbb{C}$ distinto de cero, $j = 1, \dots, n$.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir $u_{i1} = u_{i2} = \dots = u_{in}$. Por otro lado, podemos reemplazar u_{ij} y v_{ij} por $k_{ij}^{-1}u_{ij}$ y $k_{ij}v_{ij}$ respectivamente.

Similarmente, si $v_{i1} \parallel v_{i2} \parallel \dots \parallel v_{in}$, entonces podemos suponer que $v_{i1} = v_{i2} = \dots = v_{in}$.

Ahora, supongamos que existe i tal que $u_{i1} = u_{i2} = \dots = u_{in}$. Afirmamos que v_{i1}, \dots, v_{in} son linealmente independientes. Supongamos lo contrario, que $\alpha_1 v_{i1} + \alpha_2 v_{i2} + \dots + \alpha_n v_{in} = 0$ para algunos escalares en \mathbb{C} no todos cero, de esta forma

$$\begin{aligned} T(\alpha_1 E_{i1} + \alpha_2 E_{i2} + \dots + \alpha_n E_{in}) &= \alpha_1 u_{i1} v_{i1}^T + \alpha_2 u_{i2} v_{i2}^T + \dots + \alpha_n u_{in} v_{in}^T \\ &= u_{i1} (\alpha_1 v_{i1}^T + \alpha_2 v_{i2}^T + \dots + \alpha_n v_{in}^T) \\ &= u_{i1} 0^T = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, el operador T manda a una matriz de rango 1 en 0, lo cual es una contradicción. Así, v_{i1}, \dots, v_{in} son linealmente independientes. En particular, $u_{ij} = u_{ik}$ implica que $v_{ij} \not\parallel v_{ik}$.

Ahora, demostremos que $u_{i1} = u_{i2} = \dots = u_{in}$ o $v_{i1} = v_{i2} = \dots = v_{in}$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Supongamos que $u_{i1} = u_{i2} = \dots = u_{in}$ y $v_{k1} = v_{k2} = \dots = v_{kn}$ para algún $i \neq k$. Notemos que $u_{ik} \parallel u_{kk}$ o $v_{ik} \parallel v_{kk}$ pero no ambos. Supongamos que pasa el primer caso, es decir, $u_{kk} = \alpha u_{ik} = \alpha u_{i1}$ para algún $\alpha \neq 0$. Así

$$\begin{aligned} T(E_{ii} + E_{ki} + \beta E_{ik} + \beta E_{kk}) &= u_{ii} v_{ii}^T + u_{ki} v_{ki}^T + \beta u_{ik} v_{ik}^T + \beta u_{kk} v_{kk}^T \\ &= u_{i1} v_{ii}^T + u_{ki} v_{k1}^T + \beta u_{i1} v_{ik}^T + \beta \alpha u_{i1} v_{k1}^T \\ &= u_{i1} (v_{ii}^T + \beta v_{ik}^T + \beta \alpha v_{kk}^T) + u_{ki} v_{k1}^T, \end{aligned}$$

es de rango 1 para cada $\beta \in \mathbb{C}$. Ahora $u_{i1} = u_{ik} \parallel u_{kk} \not\parallel u_{ki}$ y que $v_{kk} = v_{ki}$,

luego debe haber $(v_{ii} + \beta v_{ik} + \alpha \beta v_{k1}) \parallel v_{k1}$. Notemos que $(\alpha \beta v_{k1}) \parallel v_{k1}$, así $(v_{ii} + \beta v_{ik}) \parallel v_{k1}$ para algún $\beta \in \mathbb{C}$, esto implica $v_{ik} \parallel v_{k1}$.

Sin embargo, de nuestra suposición $u_{ik} \parallel u_{kk}$ se tiene que $v_{ik} \not\parallel v_{kk} = v_{k1}$. Lo que es una contradicción .

Hemos demostrado que para todo $i = 1, \dots, n$

$$u_{i1} = u_{i2} = \dots = u_{in} \text{ o } v_{i1} = v_{i2} = \dots = v_{in}$$

pero no ambos.

Supongamos que $u_{i1} = u_{i2} = \dots = u_{in} = u_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Afirmamos que $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ es una base de \mathbb{C}^n .

Supongamos que $u_i \parallel u_k$ para algún $i \neq k$, es decir, $u_k = cu_i$ ($c \neq 0$). Notemos que $\{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}\}$ y $\{v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_{kn}\}$ son bases de \mathbb{C}^n . Así $V_i = [v_{i1} \dots v_{in}]$ y $V_k = [v_{k1} \dots v_{kn}]$ son matrices invertibles. Luego

$$\begin{aligned} & T[(b_1 E_{i1} + \dots + b_n E_{in}) + \lambda(b_1 E_{k1} + \dots + b_n E_{kn})] \\ &= u_i [b_1 v_{i1}^T + \dots + b_n v_{in}^T + \lambda c (b_1 v_{k1}^T + \dots + b_n v_{kn}^T)] \\ &= u_i [b_1 (v_{i1}^T + \lambda c v_{k1}^T) + \dots + b_n (v_{in}^T + \lambda c v_{kn}^T)] \\ &= u_i (V_i + c \lambda V_k) b. \end{aligned}$$

es de rango 1 para todo escalar λ y vector $b \neq 0$. Sin embargo, podemos encontrar un λ no cero tal que $V_i + c \lambda V_k$ no sea invertible y podemos tomar b distinto de cero en su espacio nulo. Lo cual es una contradicción!.

Así, $u_i \not\parallel u_k$, luego $v_{ij} \parallel v_{kj}$, para toda j , es decir, $v_{1j} \parallel v_{2j} \parallel \dots \parallel v_{nj}$, así u_1, u_2, \dots, u_n son linealmente independientes.

Ahora si escribimos $v_j = v_{1j}$ para cada j , entonces $v_{ij} = c_{ij} v_j$ para algunos escalares distintos de cero $c_{ij} \in \mathbb{C}$. Pero usando el argumento anterior, tenemos que v_1, v_2, \dots, v_n también son linealmente independientes.

$$\text{Sea } c_j = \begin{bmatrix} 1 \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix}, \text{ luego para cada } j = 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned} & T(E_{11} + \dots + E_{n1} + E_{1j} + \dots + E_{nj}) \\ &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} v_{11}^T \\ v_{21}^T \\ \vdots \\ v_{n1}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1j}^T \\ v_{2j}^T \\ \vdots \\ v_{nj}^T \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} (c_1 v_1^T + c_j v_j^T) \end{aligned}$$

es de rango 1.

Como $v_1 \nparallel v_j$ tenemos que $c_1 \parallel c_j$, así $c_j = c = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}^T$ para todo j .

Por lo tanto, $T(E_{ij}) = u_i c_i v_j^T$ para todo $i, j = 1, \dots, n$. Sean

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1 & c_2 u_2 & \cdots & c_n u_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y

$$Q = \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}.$$

Podemos notar que P y Q son invertibles y $T(E_{ij}) = (Pe_i)(e_j^T Q) = PE_{ij}Q$ para todo i, j .

Por lo tanto por linealidad, para toda $A \in M_n(\mathbb{C})$, tenemos

$$T(A) = PAQ.$$

De forma análoga, si $v_{i1} = v_{i2} = \dots = v_i$ para $i = 1, \dots, n$, entonces podemos deducir que para toda $A \in M_n(\mathbb{C})$ tenemos que

$$T(A) = PA^T Q.$$

□

El teorema anterior resulta muy útil, pues si podemos demostrar que una transformación preserva rango 1, ya tendríamos la caracterización que nos interesa. Un ejemplo de esta técnica es la demostración de los preservadores de determinante, que se muestra a continuación.

Teorema 1.2.2 ([17], Lema 1.4). *Sea T un operador lineal en $M_n(\mathbb{C})$ que preserva el determinante de cada matriz, es decir, $\det(T(A)) = \det(A)$ para toda $A \in M_n(\mathbb{C})$. Luego existen matrices invertibles P y Q con $\det(PQ) = 1$ de tal manera que para toda $A \in M_n(\mathbb{C})$ tenemos que:*

$$T(A) = PAQ$$

o

$$T(A) = PA^T Q.$$

Demostración. Primero veamos que T es invertible, para ello veamos que $N(T) = \{0\}$. Supongamos que $T(A) = 0$ para una matriz A de rango r . Por el lema 1.2.2, existe una matriz B de rango $n - r$ tal que $A + B$ es invertible. Entonces:

$$\det(B) = \det(T(B)) = \det(T(A) + T(B)) = \det(T(A + B)) = \det(A + B) \neq 0$$

Por lo tanto, B es invertible y el rango de B es n , así rango de A es 0 y tenemos que $A = 0$. Por lo tanto $N(T) = \{0\}$.

Ahora, sea A una matriz de rango 1 y supongamos que $T(A)$ es de rango r . En el lema 1.2.1 se mostró que existen matrices invertibles U_1, V_1 y U_2, V_2 tales que $A = U_1 E_{11} V_1$ y $T(A) = U_2 (E_{11} + E_{22} + \dots + E_{rr}) V_2$

Como T es sobreyectivo, existe $C \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $T(C) = U_2 (E_{11} + 2E_{22} + \dots + nE_{nn}) V_2$.

Consideremos el siguiente polinomio,

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det(\lambda A + C) \\ &= \det(U_1(\lambda E_{11} + U_1^{-1} C V_1^{-1}) V_1) \\ &= \det(U_1 V_1) \det(\lambda E_{11} + U_1^{-1} C V_1^{-1}) \end{aligned}$$

Notemos que f no es el polinomio cero porque como $T(C)$ es invertible tenemos $f(0) = \det(C) = \det(T(C)) \neq 0$. Además f es de grado a lo más 1 , entonces existe a lo más un λ_0 tal que $f(\lambda_0) = 0$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 f(\lambda) &= \det(\lambda A + C) \\
 &= \det(T(\lambda A + C)) = \det(\lambda T(A) + T(C)) \\
 &= \det(U_2 V_2) \det[\lambda(E_{11} + \dots + E_{rr}) + (E_{11} + \dots + nE_{nn})] \\
 &= \det(U_2 V_2) (\lambda + 1) \dots (\lambda + r) [(1 + r) \dots (n - 1)n]
 \end{aligned}$$

tiene ceros cuando $\lambda = -1, -2, \dots, -r$. Por lo tanto, como f solo tiene un cero tenemos que $r = 1$, es decir, el rango de $T(A)$ es uno, entonces T preserva matrices de rango 1.

Luego por el teorema 1.2.1 existen P y Q tales que para todo $A \in M_n(\mathbb{C})$, $T(A) = PAQ$ o $T(A) = PA^T Q$ y para cada caso tenemos que

$$\det(T(A)) = \det(PAQ) = \det(A) \det(PQ)$$

así

$$\det(PQ) = \frac{\det(T(A))}{\det(A)} = 1$$

Ya que T preserva determinantes.

□

1.3. Preservadores de idempotentes

En esta sección hablamos de la caracterización que tienen los operadores lineales que preservan matrices idempotentes.

Primero veamos un poco sobre la topología de Zariski ya que nos será útil más adelante. Sea $M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ un campo.

Sea \mathbb{K} un campo. Para cada polinomio $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ su conjunto de ceros es $Z(Q(X)) = \{x \in \mathbb{K}^n | Q(x) = 0\}$.

Un conjunto $A \subset \mathbb{K}^n$ es algebraico si existe un conjunto de polinomios $\mathcal{Q} \subset \mathbb{K}[\mathbf{X}]$ tal que $A = Z(\mathcal{Q})$.

La topología de Zariski de \mathbb{K}^n es la que tiene como conjuntos abiertos a los complementos de conjuntos algebraicos.

A continuación damos la definición de matriz ortogonal idempotente.

Definición 1.3.1. ([14]) Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ idempotentes. Diremos que A y B son ortogonales si $AB = 0$ y $BA = 0$.

Lema 1.3.1 ([9], L.2). *Sea U un subespacio de $M_n(\mathbb{F})$, donde $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$. Si T es una aplicación lineal sobre U que preserva matrices idempotentes, entonces T también preserva matrices ortogonales idempotentes.*

Demostración. Primero demostramos la siguiente afirmación: Sean A_1 y A_2 matrices idempotentes, entonces $A_1 + A_2$ es idempotente si y sólo si A_1 y A_2 son matrices ortogonales.

\Rightarrow) Supongamos que $A_1 + A_2$ es idempotente entonces tenemos que:

$$A_1 + A_2 = (A_1 + A_2)^2$$

$$A_1 + A_2 = (A_1)^2 + A_1A_2 + A_2A_1 + (A_2)^2$$

$$A_1 + A_2 = A_1 + A_1A_2 + A_2A_1 + A_2$$

$$0 = A_1A_2 + A_2A_1$$

$$A_1A_2 = -A_2A_1$$

Y como A_1 y A_2 son idempotentes tenemos que $A_1A_2 = A_2A_1$ entonces $2A_1A_2 = 0$, así $A_1A_2 = 0$. Análogamente, $A_2A_1 = 0$.

Por lo tanto, A_1 y A_2 son matrices ortogonales.

\Leftarrow) Supongamos que A_1 y A_2 son ortogonales entonces:

$$\begin{aligned}(A_1 + A_2)^2 &= (A_1)^2 + A_1A_2 + A_2A_1 + (A_2)^2 \\ &= A_1 + A_1A_2 + A_2A_1 + A_2 \\ &= A_1 + A_2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $A_1 + A_2$ es idempotente.

Ahora, sean A_1 y A_2 son matrices idempotentes, entonces $T(A_1 + A_2)$ es idempotente y $T(A_1 + A_2) = T(A_1) + T(A_2)$.

Así $T(A_1) + T(A_2)$ es idempotente y por la afirmación tenemos que $T(A_1)$ y $T(A_2)$ son ortogonales idempotentes.

□

Teorema 1.3.1. *Si dos matrices complejas simétricas o antisimétricas u ortogonales son similares:*

$$B = T^{-1}AT. \quad (1.1)$$

Entonces son ortogonalmente similares; es decir, existe una matriz ortogonal Q tal que:

$$B = Q^{-1}AQ. \quad (1.2)$$

Demostración. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Con las hipótesis de el teorema tenemos que existe un polinomio $q(\lambda)$ tal que:

$$A^T = q(A), \quad B^T = q(B). \quad (1.3)$$

En el caso de que $A, B \in S_n(\mathbb{C})$ el polinomio $q(\lambda)$ es idénticamente igual a λ y si $A, B \in K_n(\mathbb{C})$, entonces $q(\lambda)$ es idénticamente igual a $-\lambda$.

Si A, B son matrices ortogonales, entonces $q(\lambda)$ es la interpolación para $1/\lambda$ en el espectro de A y B .

De (1.1) deducimos que

$$q(B) = T^{-1}q(A)T$$

y por (1.3)

$$B^T = T^{-1}A^T T.$$

Por lo tanto,

$$B = (T^{-1}A^T T)^T = T^T (T^{-1}A^T)^T = T^T A (T^T)^{-1}.$$

Igualando con la ecuación (1.1), tenemos que

$$T^{-1}A^T T = T^T A (T^T)^{-1},$$

$$\text{entonces } AT = TT^T A (T^T)^{-1},$$

$$\text{entonces } ATT^T = TT^T A. \quad (1.4)$$

Aplicamos la descomposición polar a la matriz no singular T :

$$T = SQ \quad (S = S^T y Q = Q^T).$$

Luego por (1.4) la matriz TT^T conmuta con A , la matriz S también conmuta con A . Por lo tanto cuando sustituimos el producto SQ por T en (1.1) tenemos que

$$B = Q^{-1}S^{-1}ASQ = Q^{-1}AQ.$$

□

Lema 1.3.2. *Para cada $A \in S_n(\mathbb{R})$ distinta de cero, existe $B \in S_n(\mathbb{R})$ tal que B y $A+B$ no tienen valores propios en común.*

Demostración. Podemos asumir que $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donde $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Si A no es singular, elegimos $B = 0$. Supongamos que $\text{rango } A = r < n$. Sea

$$A_1 = \text{diag}(\lambda_r, 0, \dots, 0) \in S_{n-k+1}(\mathbb{R}).$$

Sean c_1, \dots, c_{n-r} $n - r$ números reales distintos y

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & c_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & c_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Sean $f(\lambda)$ y $g(\lambda)$ los polinomios característicos de B_1 y $A_1 + B_1$ respectivamente. Entonces $g(\lambda) = f(\lambda) + \lambda_r \prod_{i=2}^{n-r} (c_i - \lambda)$. Si $f(a) = g(a) = 0$ para algún $a \in \mathbb{R}$, entonces $a = c_i$ para algún i , lo cual es una contradicción, ya que $f(c_i) = \pm \prod_{j \neq i} (c_j - c_i) \neq 0$. Por lo tanto $A_1 + B_1$ y B_1 no tienen valores propios en común. Si $r > 1$, entonces existen b_1, b_2, \dots, b_{r-1} números reales tales que $g(b_i) \neq 0$ y $f(\lambda + b_i) \neq 0$ para todo i . Sea

$$B = \text{diag}(b_1, \dots, b_{r-1}) \oplus B_1.$$

Por lo tanto B y $A + B$ no tienen valores propios en común. \square

Primero veamos qué sucede con una aplicación lineal que preserva matrices idempotentes simétricas, recordemos que una matriz simétrica coincide con su transpuesta.

Teorema 1.3.2 ([9], teorema 5). *Sea T una aplicación lineal sobre $S_n(\mathbb{C})$ que preserva matrices idempotentes. Si $T(I_n) = I_n$, donde I_n es la matriz identidad en $M_n(\mathbb{C})$, entonces existe P una matriz compleja ortogonal tal que $T(A) = PAP^t$ para todo $A \in S_n(\mathbb{C})$.*

Demostración. Sea $A \in S_n(\mathbb{C})$ diagonalizable y no singular. Por el teorema 1.3.1 tenemos que existe una matriz compleja ortogonal Q tal que

$$Q^t A Q = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_{ii}, \quad \lambda \neq 0, i = 1, \dots, n.$$

Dado que Q es ortogonal tenemos que $Q^t = Q^{-1}$, así

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i (Q E_{ii} Q^t) \quad \text{por lo tanto } T(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i L(Q E_{ii} Q^t).$$

Dado que $Q E_{ij} Q^t$ son matrices ortogonales idempotentes y T preserva matrices idempotentes, por el lema 1.3.1, T preserva ortogonales idempotentes, entonces $T(Q E_{ii} Q^t)$, $i = 1, \dots, n$ es un sistema ortogonal de matrices idempotentes. Ya que

$$\sum_{i=1}^n T(Q E_{ii} Q^t) = T\left(\sum_{i=1}^n (Q E_{ii} Q^t)\right) = T\left(Q \sum_{i=1}^n E_{ii} Q^t\right) = L(I_n) = I_n,$$

se sigue que $T(A)$ es no singular.

Ahora supongamos que $A \in S_n(\mathbb{C})$ idempotente y de rango 1. Demostremos que $T(A)$ también es de rango uno. Ya que A es ortogonalmente similar a E_{11} , podemos asumir que $A = E_{11}$. Supongamos que $T(A) = 0$. Por el lema 1.3.2, existe $B \in S_n(\mathbb{R})$ tal que B y $A + B$ no tienen valores propios en común.

Para algún $C \in S_n(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, $C - \lambda I_n$ es diagonalizable, por lo tanto

$$\det(C - \lambda I_n) \neq 0 \Rightarrow \det(T(C) - \lambda I_n) \neq 0.$$

Con esto mostramos que cualquier eigenvalor de $T(A + B)$ es un eigenvalor de $A + B$ y B , ya que $T(B) = T(B) + 0 = T(B) + T(A) = T(A + B)$, es una contradicción de como elegimos B . Por lo tanto $T(E_{11}) \neq 0$. Como $T(E_{11}), \dots, T(E_{nn})$ es un sistema ortogonal de n matrices idempotentes y $T(E_{ii}) \neq 0$ para cada i , así tenemos que $T(E_{11})$ es de rango 1.

Ahora sea $A \in S_n(\mathbb{C})$ de rango 1 la cual no es un múltiplo escalar de una matriz idempotente, entonces $A = u^t u$ para algún vector fila no cero $u = (u_1, \dots, u_n)$ con $u^t u \neq 0$. Podemos asumir que $u_1 \neq 0$. Sea $\{\varepsilon_m\}$ una sucesión de números reales tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$ y $2u_1 + \varepsilon_m \neq 0$ para cualquier m .

Sea $A_m = v_m^t v_m$ donde $v_m = (\varepsilon_m + u_1, u_2, \dots, u_n)$, entonces $A_m^2 = \lambda_m A_m \neq 0$ y por lo tanto $T(A_m)$ es de rango 1. Ya que $\{A_m\}$ converge a A , luego $\{T(A_m)\}$ converge a $T(A)$.

Sea P el conjunto de todas las matrices en $S_n(\mathbb{C})$ con rango menor o igual a 1. Entonces P es un conjunto cerrado en la topología de Zariski en $S_n(\mathbb{C})$, como $T(A_m) \in P$ para todo m , tenemos que $T(A) \in P$. Por lo tanto $T(P) \subseteq P$. Esto muestra que la aplicación T manda el conjunto de matrices singulares en él mismo. Supongamos ahora que $T(A) = 0$, podemos ver que A es una matriz ortogonalmente similar a la matriz

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \oplus 0.$$

Ahora es fácil la construcción de la matriz D de rango $n - 1$ en $S_n(\mathbb{C})$ tal que $A + D$ tiene n valores propios distintos que no son ceros. Por lo tanto, $T(D) = T(D) + 0 = T(D) + T(A) = T(A + D)$ es singular, lo cual es una contradicción a la primera parte de nuestra demostración. Por lo tanto, $T(A)$

es de rango 1. Así tenemos que T preserva matrices de rango 1.

□

Ahora tomando las matrices cuadradas complejas tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.3.3 ([8], teorema 6). *Sea T una aplicación en $M_n(\mathbb{C})$ que preserva matrices idempotentes. Si $T(I_n) = I_n$, entonces existe una matriz no singular $P \in M_n(\mathbb{C})$ tal que para toda $A \in M_n(\mathbb{C})$*

$$T(A) = PAP^{-1}$$

o

$$T(A) = PA^tP^{-1}.$$

Demostración. Por el teorema 1.3.2 existe una matriz P ortogonal compleja tal que $T(A) = PAP^t$ para cualquier $A \in S_n(\mathbb{C})$. Y como A es ortogonal coincide con su inversa.

Sea $L : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ definida por $L(A) = P^{-1}AP$ para toda $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Afirmamos que L preserva idempotentes, en efecto, sea $A \in M_n(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} L(A)^2 &= (P^{-1}T(A)P)(P^{-1}T(A)P) \\ &= P^{-1}T(A)PP^{-1}T(A)P \\ &= P^{-1}T(A)^2P = P^{-1}T(A)P \\ &= L(A). \end{aligned}$$

Además, la restricción en $S_n(\mathbb{C})$ es la identidad.

Ahora demostramos que L es la identidad o la aplicación transposición.

Sean $B, D \in M_n(\mathbb{C})$. Si B y $B + D$ son idempotentes entonces $L(B)$ y $L(B + D)$ también lo son. Así

$$\text{si } L(B + D) = L(B + D)^2,$$

$$\text{entonces } L(B) + L(D) = L(B^2) + L(B)L(D) + L(D)L(B) + L(D)^2,$$

$$\text{entonces } L(D) - L(D)^2 = L(B)L(D) + L(D)L(B).$$

Para $i \neq j$ elejimos $D = E_{ij}$ y $B = E_{ii}$ o E_{jj} y tenemos que:

$$\begin{aligned} E_{ii}L(E_{ij}) + L(E_{ij})E_{ii} &= L(E_{ij}) + L(E_{ij})^2, \\ E_{jj}L(E_{ij}) + L(E_{ij})E_{jj} &= L(E_{ij}) + L(E_{ij})^2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Así

$$(E_{ii} - E_{jj})L(E_{ij}) + L(E_{ij})(E_{ii} - E_{jj}) = 0. \quad (1.6)$$

Sea $L(E_{ij}) = (x_{st})$. Igualando los componentes de (1.6), tenemos que $L(E_{ij}) = x_{ij}E_{ij} + x_{ji}E_{ji}$. Sustituyendo en (1.5) obtenemos que $x_{ij}x_{ji} = 0$. Así, $L(E_{ji}) = y_{ij}E_{ij} + y_{ji}E_{ji}$ donde $y_{ij}y_{ji} = 0$.

Dado que $E_{ij} + E_{ji} \in S_n(\mathbb{C})$ tenemos que $L(E_{ij} + E_{ji}) = L(E_{ij}) + L(E_{ji})$.

Así, si $x_{ij} + y_{ij} = x_{ji} + y_{ji} = 1$, entonces $L(E_{ij}) = E_{ij}$ o $L(E_{ji}) = E_{ji}$ y $L(E_{ij})^t = L(E_{ij})$ para todo $i \neq j$.

Si $n = 2$, demostramos que $L(A) = A$ o A^t para cualquier $A \in M_2(\mathbb{C})$.

Si $n > 2$, para distintos i, j, k , $E_{ii} + E_{ij} + E_{ik}$ y $L(E_{ii} + E_{ij} + E_{ik})$ son idempotentes. Se deduce que las entradas distintas de cero de $L(E_{ii} + E_{ij} + E_{ik})$ están en la misma fila o la misma columna.

Por lo tanto, $L(E_{ij}) = E_{ij}$ si solo si $L(E_{ik}) = E_{ik}$. Por lo tanto, L es la identidad o la transpuesta.

□

Capítulo 2

La inversa generalizada de Drazin

La generalización de la noción de inversa para transformaciones lineales no invertibles ha sido estudiada por numerosos investigadores en los últimos años.

Así, han sido definidas varias “pseudoinversas” para las matrices no invertibles. Dentro de éstas, la inversa de Moore-Penrose, definida independientemente por Moore (1920) y por Penrose (1955), nos aporta la solución por mínimos cuadrados de norma mínima de un sistema singular lineal de ecuaciones algebraicas. Sin embargo, tal inversa no posee propiedades del tipo $GA = AG$; si λ es un autovalor de A , entonces $1/\lambda$ es un autovalor de G y, si A es semejante a G entonces A y G tienen los mismos valores singulares, donde G es la inversa de Moore-Penrose de A . En 1958, M. P. Drazin introdujo, a partir de una definición algebraica, un nuevo tipo de inversa generalizada, la inversa de Drazin, que denotaremos por A^D , la cual sí posee

las propiedades anteriores. En este trabajo nos centraremos en tal inversa. La inversa Drazin presenta variadas e importantes aplicaciones en la resolución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales y ecuaciones lineales en diferencias, en la criptografía, en la teoría del control óptimo y en las cadenas de Markov, pueden ser encontradas en la siguiente literatura [10], [11], [13] y [15].

2.1. Inversa Drazin

Sea X un espacio de Banach, $B(X)$ el conjunto de todos los operadores lineales y acotados.

Definición 2.1.1. [5] Sea $T \in B(X)$. Un operador $A \in B(X)$ es la inversa Drazin de T , si se cumple lo siguiente:

1. $ATA = A$,
2. $AT = TA$,
3. $T^{n+1}A = T^n$,

para algún entero n no negativo.

El menor n que cumple la definición anterior se llama el índice de T , y se denota por $ind_D(T)$.

Proposición 2.1.1. *Sea $T \in B(X)$. Si $A \in B(X)$ es inversa Drazin de T , entonces esta es única.*

Demostración. Como T tiene inversa Drazin, se cumple lo siguiente:

1. $ATA = A$,
2. $AT = TA$,
3. $T^{n+1}A = T^n$.

Ahora supongamos que S también es inversa Drazin de T , se cumple que

1. $STS = S$,
2. $ST = TS$,
3. $T^{n+1}S = T^n$.

Luego tenemos que $S = S^{n+1}T^n$ y $A = A^{n+1}T^n$. Así,

$$\begin{aligned}
 S &= S^{n+1}T^n \\
 &= S^{n+1}T^{n+1}A \\
 &= S^{n+1}T^{n+1}(A^{n+1}T^n) \\
 &= (S^{n+1}T^n)T^{n+1}A^{n+1} \\
 &= (ST^{n+1})A^{n+1} \\
 &= T^n A^{n+1} \\
 &= A.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si la inversa Drazin existe esta es única.

□

Notación 2.1. *Si existe la única inversa Drazin de T , entonces es denotada por T^D , y diremos que T es invertible Drazin.*

Observación 2.1.1. Si T es invertible Drazin, entonces TT^D y T^DT son idempotentes.

En efecto,

$$(TT^D)^2 = TT^D TT^D = T(T^D TT^D) = TT^D,$$

y

$$(T^DT)^2 = T^D TT^D T = (T^D TT^D)T = T^DT.$$

Definición 2.1.2. [5] Sea $T \in B(X)$ invertible Drazin. Si $\text{ind}_D(T) = 1$, entonces T^D se llama grupo inversa y la denotaremos por $T^\#$ y decimos que T es grupo invertible.

Proposición 2.1.2. [5] Si T es invertible Drazin y $\text{ind}_D(T) = n$, entonces T^n es grupo invertible.

Demostración. Supongamos que T es invertible Drazin. Veamos que se cumple 1), 2) y 3) de la definición 2.1.1:

1. Como $T^D = T^D TT^D$, entonces $(T^D)^n = (T^D TT^D)^n = (T^D)^n T^n (T^D)^n$.
2. Como $T^D T = TT^D$, entonces $(T^D)^n T^n = T^n (T^D)^n$.
3. $T^n = T^n (T^D) T = T^n (T^D)^n T^{n-1} T = T^n (T^D)^n T^n$.

□

Definición 2.1.3. $Q \in B(X)$ es nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $Q^k = 0$.

Definición 2.1.4. $Q \in B(X)$ es cuasinilpotente si para cualquier $x \in X$ se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q^n x\|^{1/n} = 0.$$

Proposición 2.1.3. *Si Q es nilpotente, entonces Q es cuasinilpotente.*

Demostración. Como Q es nilpotente tenemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $Q^k = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|Q^n x\|^{1/n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|Q^{k+n} x\|^{1/(k+n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|0\|^{1/(k+n)} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, Q es cuasinilpotente. □

Definición 2.1.5. [5] Un elemento $A \in B(X)$ es cuasipolar, si existe un idempotente $Q \in B(X)$ tal que

$$AQ = QA \quad \text{y} \quad A(I - Q) \quad \text{es cuasinilpotente}$$

Observación 2.1.2. *Si T es invertible Drazin tenemos que*

$$\begin{aligned} (I - TT^D)^2 &= (I - TT^D)(I - TT^D) \\ &= I^2 - 2TT^D + (TT^D)^2 \\ &= I - 2TT^D + TT^D \\ &= I - TT^D. \end{aligned}$$

por lo tanto $(I - TT^D)^2 = I - TT^D$, en general $(I - TT^D)^n = I - TT^D$.

Además $T(I - TT^D)$ es nilpotente pues

$$\begin{aligned} T^n &= T^{n+1}T^D \\ \Rightarrow T^n - T^{n+1}T^D &= 0 \\ \Rightarrow T^n(I - TT^D) &= 0 \\ \Rightarrow T^n(I - TT^D)^n &= 0 \\ \Rightarrow [T(I - TT^D)]^n &= 0. \end{aligned}$$

Definición 2.1.6. [5] Un operador $E \in B(X)$ es inversa Drazin generalizada de $T \in B(X)$, si se cumple los siguiente:

1. $ETE = E$,
2. $TE = ET$,
3. $T(I - TE)$ es cuasinilpotente.

Como todos los operadores nilpotentes son cuasinilpotentes, es claro que todo operador invertible Drazin es invertible generalizado.

Observación 2.1.3. *Si la inversa Drazin generalizada de T existe, entonces se denota por T^d y T es invertible Drazin generalizada.*

Proposición 2.1.4. [5] *Si $T \in B(X)$ es invertible Drazin, entonces $T = T^2A + T(I - TA)$, donde $T(I - TA)$ es nilpotente.*

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} T^2A + T(I - TA) &= T^2A + T - TTA \\ &= T^2A + T - T^2A \\ &= T. \end{aligned}$$

Además $T(I - TA)$ es nilpotente, ya que

$$\begin{aligned} [T(I - TA)]^n &= T^n(I - TA)^n \\ &= T^n - T^{n+1}A \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Consideremos \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Sabemos a partir de la definición de inversa Drazin, que un operador $T \in B(\mathcal{H})$ tiene inversa T^D y $\text{ind}_D(T) = k$, entonces $T^{k+1}T^D = T^k$, lo cual implica que $T^k(T^D)^k T^k = T^k$ por lo tanto $R(T^k)$ es cerrado. A continuación damos un ejemplo de un operador que no es invertible Drazin.

Ejemplo 2.1.1. *Mostraremos que el operador Volterra definido por $V(f) = \int_0^x f(t)dt$ en $L^2[0, 1]$ es compacto pero no autoadjunto, es decir el espectro es $\{0\}$, y no tiene valores propios, con esto tendremos que $V(f)$ es cerrado pero no acotado.*

Si $Vf = \lambda \cdot f$ para $f \in L^2[0, 1]$ y $\lambda \neq 0$ implica que f es continua:

$$|\lambda| \cdot |f(x+h) - f(x)| = |Vf(x+h) - Vf(x)| \leq \int_x^{x+h} 1 \cdot |f(t)|dt \leq |h|^{\frac{1}{2}} \cdot \|f\|_{L^2}$$

El teorema fundamental del cálculo implicaría que f es continuamente diferenciable y $\lambda \cdot f' = (Vf)' = f$. Así, f sería un múltiplo constante de $e^{x/\lambda}$, por el teorema del valor medio. Sin embargo, por Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky, para λ una función propia

$$|\lambda| \cdot |f(x)| \leq |x|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2}.$$

Ningún múltiplo distinto de cero de la exponencial satisface esto. Así, no hay vectores propios para valores propios distintos de cero.

Para $f \in L^2[0, 1]$ y $Vf = 0 \in L^2[0, 1]$, Vf es cero casi donde sea. Como $x \rightarrow Vg(x)$ es continua, $Vf(x)$ es 0 para toda x . Así, para toda x, y en el intervalo,

$$0 = 0 - 0 = Vf(y) - Vf(x) = \int_x^y f(t)dt$$

Esto es, $x \rightarrow Vf(x)$ es ortogonal en $L^2[0, 1]$ a todas las funciones características de los intervalos. Combinaciones lineales de estos son densas en

$C^0[0, 1]$ en la topología $L^2[0, 1]$, y $C^0[0, 1]$ es denso en $L^2[0, 1]$. Así $f = 0$, y no hay vectores propios para el operador de Volterra.

Para ver que V es compacto, reescribimos el operador dado por una transformada integral $K(x, y)$:

$$Vf(x) = \int_0^x f(y)dy = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy \quad (\text{con } K(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq y < x \\ 1, & \text{si } x < y \leq 1 \end{cases})$$

Así, V es Hilbert-Schmidt, y compacto. El adjunto V^* está dado por la transformada integral $K^*(x, y) = \overline{K(x, y)}$, visiblemente diferente de $K(x, y)$, entonces V no es autoadjunto.

Para ver que el espectro es a lo más $\{0\}$, mostraremos que el radio espectral es 0:

$$\begin{aligned} V^n f(x) &= \int_0^x \int_0^{x_{n-1}} \dots \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} f(t) dt dx_1 \dots dx_{n-1} \\ &= \int_0^x f(t) \left(\int_t^x \int_t^{x_{n-1}} \dots \int_t^{x_2} dx_1 \dots dx_{n-1} \right) dt \\ &= \int_0^x f(t) \cdot \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \end{aligned}$$

De esto, $|V^n|_{op} \leq \frac{1}{n!}$, y

$$\begin{aligned}
\log \lim_{2n} \left(\frac{1}{(2n)!} \right)^{\frac{1}{2n}} &= -\lim_{2n} \cdot \log(2n)! = -\lim_{2n} \sum_{1 \leq k \leq 2n} \log k \\
&= -\lim_{2n} \sum_{1 \leq k \leq 2n} (\log k + \log(2n - k + 1)) \\
&\leq -\lim_{2n} \frac{1}{2n} \sum_{1 \leq k \leq \frac{n}{k}} (\log k + \log(2n - k + 1)) \\
&\leq -\lim_{2n} \frac{1}{2n} \sum_{1 \leq k \leq \frac{n}{k}} \log 2n \\
&= -\lim_{2n} \left(\frac{\log 2n}{2} \right) = -\infty
\end{aligned}$$

como $2n \leq k(2n-k)$ para $1 \leq k \leq n$, observado el signo. Esto es $\lim_n |V^n|_{op}^{\frac{1}{n}} = 0$, así el radio espectral es 0.

Como el espectro es no vacío, debe ser exactamente $\{0\}$.

2.2. Ascenso y descenso

Sea X un espacio lineal y $T \in B(X)$. Definamos $T^0 = I$, $T^1 = T$, $T^2 = T \circ T$, ..., $T^n = T \circ T \circ T \circ \dots \circ T$ (n veces). Tenemos la siguiente cadena de contenciones para el rango de T :

$$X = R(T^0) = R(I) \supset R(T) \supset R(T^2) \supset \dots \supset R(T^n) \supset R(T^{n+1}) \dots$$

en efecto,

$$\begin{aligned}
\text{si } x \in R(T^{n+1}) &\Rightarrow T^{n+1}x = T^n(Tx) \in R(T^n) \\
&\Rightarrow R(T^{n+1}) \subset R(T^n).
\end{aligned}$$

Si existe un n tal que $R(T^{n+1}) = R(T^n)$ decimos que T tiene descenso finito. En este caso el menor n que cumple esto se denota por $d(T)$, si dicho n no existe, definimos $d(T) := \infty$.

Del mismo modo consideramos las contenciones para el núcleo de T :

$$\{0\} = N(I) \subset N(T) \subset N(T^2) \subset \dots \subset N(T^n) \subset N(T^{n+1}) \dots$$

en efecto, si tomamos $x \in N(T^n)$ entonces $T^n x = 0$, luego $T^{n+1} x = T(T^n x) = T(0) = 0$. Por lo tanto $N(T^n) \subset N(T^{n+1})$.

Si existe un n tal que $N(T^{n+1}) = N(T^n)$ decimos que T tiene ascenso finito. En este caso el menor n que cumple esto se denota por $a(T)$, si dicho n no existe, definimos $a(T) := \infty$.

Proposición 2.2.1. [3] Sea $T \in B(X)$ que tiene descenso finito y sea $n = d(T)$, entonces para cualquier $r \in \mathbb{N}$, $R(T^n) = R(T^{n+r})$.

Demostración. (Por inducción) Sea $T \in B(X)$ y $d(T) = n$. Si $r=1$, se cumple que $R(T^{n+1}) = R(T^n)$ ya que $d(T) = n$.

Ahora supongamos que se cumple para $r-1$, es decir, $R(T^n) = R(T^{n+r-1})$.

Sea $x \in X$, por hipótesis de inducción tenemos que $T^n(x) = T^{n+r-1}x$, luego $T(T^n(x)) = T(T^{n+r-1}x)$ así, $T^{n+1}x = T^{n+r}x$ pero por hipótesis tenemos que $R(T^{n+1}) = R(T^n)$. Por lo tanto, $T^n x = T^{n+r} x$.

Por lo tanto, para $r \in \mathbb{N}$, $R(T^n) = R(T^{n+r})$.

□

Proposición 2.2.2. [3] Sea $T \in B(X)$ que tiene ascenso finito y sea $n = a(T)$, entonces para cualquier $r \in \mathbb{N}$, $N(T^n) = N(T^{n+r})$.

Demostración. Como $a(T) = n$ tenemos que $N(T^n) = N(T^{n+1})$.

Veamos que $N(T^{n+1}) = N(T^{n+2})$.

Sabemos que siempre se cumple que $N(T^{n+1}) \subset N(T^{n+2})$.

Ahora veamos la otra contención,

$$\begin{aligned}
 \text{sea } x &\in N(T^{n+2}) \\
 &\Rightarrow T^{n+2}x = 0 \\
 &\Rightarrow T^{n+1}(Tx) = 0 \\
 &\Rightarrow Tx \in N(T^{n+1}) = N(T^n) \\
 &\Rightarrow T^n(Tx) = 0 \\
 &\Rightarrow T^{n+1}x = 0 \\
 &\Rightarrow x \in N(T^{n+1}).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $N(T^{n+1}) = N(T^{n+2})$, además $N(T^n) = N(T^{n+2})$.

Siguiendo la misma idea tendremos que $N(T^n) = N(T^{n+r})$ para cualquier $r \in \mathbb{N}$.

□

Proposición 2.2.3. Sean $S, T \in B(X)$, entonces $R(ST) \subset R(S)$.

Demostración. Sea $y \in R(ST)$, entonces existe $x \in X$ tal que $y = STx = S(Tx)$. Por lo tanto $y \in R(S)$. Así, $R(ST) \subset R(S)$.

□

Proposición 2.2.4. Sean $S, T \in B(X)$, entonces $N(T) \subset N(ST)$.

Demostración. Sea $x \in N(T)$, entonces $Tx = 0$, entonces $S(Tx) = S(0) = 0$, entonces $x \in N(ST)$. Por lo tanto $N(T) \subset N(ST)$.

□

Lema 2.2.1. [3] Si $d(T) = 0$ y $a(T) < \infty$, entonces $a(T) = 0$.

Demostración. (Por contradicción) Supongamos que $d(T) = 0$, $a(T) < \infty$ y $a(T) \neq 0$. Entonces existe $x_1 \in X$, $x_1 \neq 0$ con $T(x_1) = 0$. Ya que $R(T) = X$, existe $x_2 \in X$ con $T(x_2) = x_1$. Luego por inducción definimos una sucesión $\{x_n\} \in X$ mediante $T(x_{n+1}) = x_n$ para cada $n \geq 1$, entonces

$$T^n(x_{n+1}) = T^{n-1}(T(x_{n+1})) = T^{n-1}(x_n) = \cdots = T(x_2) = x_1$$

y

$$T^{n+1}(x_{n+1}) = T^n(T(x_{n+1})) = T^n(x_n) = \cdots = T(x_1) = 0.$$

Así, $x_{n+1} \in N(T^{n+1})$ y $x_{n+1} \notin N(T^n)$ para cada n , lo cual es una contradicción ya que $a(T) \neq 0$.

Por lo tanto, si $d(T) = 0$ y $a(T) < \infty$, entonces $a(T) = 0$.

□

Lema 2.2.2. [3] Si $d(T) < \infty$ y $a(T) < \infty$, entonces $a(T) = d(T)$.

Demostración. Sea $Z = R(T^j)$ para algún $j \geq d(T)$. Sea $T_0 = T|_{R(T^j)}$, entonces T_0 es un operador lineal en Z . Como T_0 es un operador lineal en Z , se cumple que $d(T_0) = 0$ y como $a(T) < \infty$ y por el lema 1.2.1 tenemos que $a(T_0) = 0$, además es espacio lineal isomorfo de Z sobre Z , ya que

$$R(T_0) = R(T_0^0) = R(I) = X$$

y

$$N(T_0) = N(T_0^0) = N(I) = \{0\}.$$

Por conveniencia escribimos $d = d(T)$. Demostremos que $a(T) \leq d$.

Sabemos que siempre sucede que $N(T^d) \subset N(T^{d+1})$. Luego demostramos que $N(T^{d+1}) \subset N(T^d)$.

Consideremos $x \in N(T^{d+1})$ y $y = T^d(x)$, entonces $T(y) = T^{d+1}(x) = 0$, ya que $y \in Z$ tenemos que $y = 0$. Así $x \in N(T^d)$. Por lo tanto $a(T) \leq d = d(T)$.

Ahora demostremos que $d \leq a(T)$. Podemos suponer que $d \geq 1$, luego existe $y \in R(T^{d-1})$, donde $y \notin R(T^d)$ y podemos escribir $y = T^{d-1}x$.

Sea $z = T(y) = T^d(x)$. Recordemos que T y todas sus iteraciones son isomorfismos en Z . Entonces existe $w \in Z$ con la propiedad $T^d(w) = z$, ahora examinemos el elemento $u = x - w$.

Dado que T es lineal tenemos que $T^d(u) = T^d(x) - T^d(w) = z - z = 0$, luego $T^{d-1}(u) = T^{d-1}(x) - T^{d-1}(w) = y - T^{d-1}(w)$, notemos que $w \in Z = R(T^d)$, entonces $T^{d-1}[R(T^d)] = R(T^{2d-1}) \subset R(T^d)$, así $T^{d-1}(u) \neq 0$.

Luego, $u \in N(T^d)$ y $u \notin N(T^{d-1})$, por lo tanto $a(T) \geq d$.

□

Teorema 2.2.1. *Si $T \in B(X)$ es un operador invertible Drazin, entonces T es de ascenso y descenso finito. Aún más, si el índice de T es $ind_D(T) = n$, entonces $a(T) = d(T) = n$.*

Demostración. Supongamos que $T \in B(X)$ es invertible Drazin y que $ind_D(T) = n$. Como T es Drazin invertible se cumple que $T^n = T^{n+1}T^D$, entonces

$$R(T^n) = R(T^{n+1}T^D) \subset R(T^{n+1}) \subset R(T^n)$$

Por lo tanto, $R(T^n) = R(T^{n+1})$.

Análogamente para el núcleo de T ,

$$N(T^n) = N(T^{n+1}T^D) = N(T^D T^{n+1}) \supset N(T^{n+1}) \supset N(T^n)$$

Por lo tanto, $N(T^n) = N(T^{n+1})$.

□

2.3. Descomposición en subespacios

Definición 2.3.1. Sea X un espacio de Banach y sean M y N subespacios cerrados de X tales que $M \cap N = \emptyset$. Si para cada $x \in X$ existen $u \in M$ y $v \in N$ tales que $x = u + v$, decimos que X es la suma directa de M y N . Esto se denota como $X = M \oplus N$.

Definición 2.3.2. Sea $T \in B(X)$, y sea $M \subset X$ subespacio. La restricción de T a M es el operador $T|_M : M \rightarrow X$ definido mediante $T|_M(x) = Tx$.

Teorema 2.3.1. Sea $T \in B(X)$. Si T es invertible Drazin con $\text{ind}_D(T) = p$, entonces

i) X puede ser escrito como

$$X = R(T^p) \oplus N(T^p),$$

ii) Los subespacios $R(T^p)$ y $N(T^p)$ son cerrados e invariantes bajo T ,

iii) $T|_{R(T^p)}$ es invertible y $T|_{N(T^p)}$ es nilpotente.

Demostración. Como T es invertible Drazin con $\text{ind}_D(T) = p$, entonces $a(T) = d(T) = p$.

i) Primero veamos que $R(T^p) \cap N(T^p) = \{0\}$. Sea $x \in R(T^p) \cap N(T^p)$, entonces $x = T^p(y)$ para algún $y \in X$ y también $T^p(x) = 0$. Por lo tanto $T^{2p}(y) = T^p(T^p(x)) = T^p(0) = 0$, por lo que $y \in N(T^{2p}) = N(T^p)$ (porque $a(T) = d(T) = p$), es decir, $T^p(y) = 0 = x$. Por lo tanto $R(T^p) \cap N(T^p) = \{0\}$.

Ahora vemos que $T(R(T^p)) \subset R(T^p)$ y $T(N(T^p)) \subset N(T^p)$.

Si $x \in T(R(T^p))$, entonces existe $y \in R(T^p)$, tal que

$$x = T(y) = T(T^p(z)) = T^{p+1}(z)$$

así, $x \in R(T^{p+1}) = R(T^p)$.

Si $x \in T(N(T^p))$, entonces existe $y \in N(T^p)$, tal que $x = T(y)$. Como $y \in N(T^p)$ tenemos que $T^p(y) = 0$. Luego

$$T^p(x) = T^p(T(y)) = T(T^p(y)) = T(0) = 0.$$

Por lo tanto $x \in N(T^p)$.

Sea T_1 la restricción de T a $R(T^p)$ entonces por lo anterior tenemos que $T_1 : R(T^p) \rightarrow R(T^p)$, en efecto $R(T_1^p) = R(T^p)$.

Por lo tanto, dado $x \in X$, existe $x_1 \in R(T^p)$ tal que $T^p(x) = T_1^p(x_1)$. Reescribiendo tenemos que $T^p(x) = T^p(x_1)$ y definimos $x_2 = x - x_1$, así $x_2 \in N(T^p)$. Por lo tanto, $x = x_1 + x_2$ donde $x_1 \in R(T^p)$ y $x_2 \in N(T^p)$, así $X = R(T^p) \oplus N(T^p)$.

ii) en la prueba de *i)* demostramos que $R(T^p)$ y $N(T^p)$ son invariantes bajo T . Ya que $N(T)$ es cerrado entonces $N(T^p)$ también lo es y como $X = R(T^p) \oplus N(T^p)$, entonces $R(T^p)$ es cerrado.

iii) Ya observamos que T manda $R(T^p)$ sobre si mismo. Mostremos que es inyectiva, supongamos $T_1(x) = 0$ para algún $x \in R(T^p)$.

Luego tenemos que

$$x \in N(T_1) \cap R(T^p) \subseteq N(T) \cap R(T^p) \subseteq N(T^p) \cap R(T^p) = \{0\}$$

Por lo tanto T_1 es inyectivo.

Luego, observamos que si $x \in N(T^p)$ entonces $T^p(x) = 0$, así que T restringido a $N(T^p)$ es nilpotente.

□

Lema 2.3.1. [6] Sea $T \in B(\mathcal{H})$ y $\text{ind}(T) = k$. Si T^D es la inversa Drazin de T , entonces

$$R(T^D) = R(T^k).$$

Demostración. Como $T^D T T^D = T^D$ y $T T^D = T^D T$, entonces $T^D = T^k (T^D)^{k+1}$, así $R(T^D) \subseteq R(T^k)$.

Por otro lado, como $T T^D = T^D T$ y $T^{k+1} T^D = T^k$, obtenemos que $T^k = T^D T^{k+1}$ y $R(T^k) \subseteq R(T^D)$. Por lo tanto, $R(T^D) = R(T^k)$.

□

2.4. El espectro

Para $T \in B(X)$ usamos $\sigma(T)$ y $r(T)$ para denotar el el espectro y el radio espectral de T respectivamente.

La norma que usamos en esta sección es la del operador, es decir, si $T \in B(X)$ y $x \in X$ tenemos que:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

Definición 2.4.1. Sea $T \in B(X)$ definimos el resolvente de T como el conjunto de todos los números complejos λ tal que $(\lambda I - T) \in B(X)$ es

invertible, es decir,

$$\begin{aligned}\rho(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T) \text{ es invertible}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : N(\lambda I - T) = 0 \text{ y } R(\lambda I - T) = X\}.\end{aligned}$$

El espectro de un operador T es el complemento del resolvente de T y lo definimos a continuación.

Definición 2.4.2. Sea $T \in B(X)$ definimos el espectro de T como el conjunto de todos los números complejos λ tal que $(\lambda I - T) \in B(X)$ no es invertible, es decir,

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T) \text{ no es invertible}\}.$$

Observación 2.4.1. Si $T \in B(X)$ es invertible y $T^{-1} \in B(X)$ entonces al conjunto de los operadores invertibles lo denotamos por $G(X)$.

Proposición 2.4.1. Sea $T \in B(X)$. Si $\lambda \in \rho(T)$, entonces $\delta = \|(\lambda I_T)^{-1}\|^{-1}$ es un número positivo. La bola abierta $B_\delta(\lambda)$ con centro en λ y radio δ está incluida en $\rho(T)$ y por lo tanto $\delta \leq d(\lambda, \sigma(T))$.

Demostración. Si $\lambda \in \rho$, entonces $(\lambda I - T) \in G(X)$ así que $(\lambda I - T)^{-1}$ es distinto de cero y acotado. Por lo tanto $\delta = \|(\lambda I_T)^{-1}\|^{-1} > 0$. Sea $B_\delta(0)$ la bola abierta no vacía con radio δ y centro en el origen en el plano complejo \mathbb{C} y tomemos $\mu \in B_\delta(0)$ de forma arbitraria. Como $|\mu| < \|(\lambda I_T)^{-1}\|^{-1}$, tenemos que $\|\mu(\lambda I_T)^{-1}\| < 1$, entonces

$$I - \mu(\lambda I_T)^{-1} \in G(X)$$

y así

$$(\lambda - \mu)I - T = (\lambda I - T)[I - \mu(\lambda I_T)^{-1}] \in G(X).$$

Por lo tanto, $\lambda - \mu \in \rho(T)$, entonces

$$B_\delta(\lambda) = B_\delta(0) + \lambda = \{v \in \mathbb{C} : v = \mu + \lambda \text{ para algún } \mu \in B_\delta(0)\} \subseteq \rho(T).$$

Además, $d(\lambda, \xi) = |\lambda - \xi| > \delta$ para cada $\xi \in \sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ y por lo tanto, $d(\lambda, \sigma(T)) = \inf_{\xi \in \rho(T)} |\lambda - \xi| \geq \delta$.

□

La proposición anterior nos dice que, si $T \in B(X)$, $\rho(T)$ es abierto y como $\sigma(T)$ es el complemento tenemos que es cerrado.

Utilizando la serie de Neumann demostramos que el conjunto de elementos invertibles $G(X)$ es abierto.

Teorema 2.4.1. *Sea X un espacio de Banach. Si $T \in B(X)$, $\|T\| < 1$, entonces $(I - T) \in B(X)^{-1}$ y $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.*

Demostración. Sea $T \in B(X)$ tal que $\|T\| < 1$. Tenemos que $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ para toda n ya que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. Como $\|x\| < 1$, tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|}$$

es decir, $\{\|T\|^n\}$ es sumable. Como $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n$ es convergente en $B(X)$, debido a que este espacio es completo, si tomamos $S_n = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ consideremos el producto

$$TS_n = S_n T = \sum_{n=0}^{\infty} T^{n+1}$$

entonces

$$(I - T)S_n = S_n - TS_n = 1 - T^{n+1}$$

Como la función producto es continua, tenemos que $(I - T) \sum_{n=0}^{\infty} T^n = I$ pues $S_n \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} T^n$. De manera similar $\sum_{n=0}^{\infty} T^n (I - T) = I$. Por lo tanto, $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.

□

Corolario 2.4.1. *Sea $T \in B(X)$. El conjunto resolvente de T , $\rho(T)$, es no vacío y abierto, además el espectro de T , $\sigma(T)$, es compacto.*

Demostración. Si $T \in B(X)$, entonces la expansión de Neumann nos asegura que $\lambda \in \rho(T)$ cuando $\|T\| < |\lambda|$. Ya que $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho$, esto es equivalente a

$$|\lambda| \leq \|T\| \text{ para cada } \lambda \in \sigma(T).$$

Así $\sigma(T)$ es acotado, por lo tanto $\rho(T) \neq \emptyset$. El corolario 2.4.1 dice que $\rho(T)$ incluye a la bola abierta no vacía centrada en cada uno de sus puntos, es decir, $\rho(T)$ es abierto por lo tanto $\sigma(T)$ es cerrado. En \mathbb{C} , un conjunto cerrado y acotado es compacto.

□

Teorema 2.4.2. *Sea $T \in B(X)$. Si T es invertible Drazin, entonces $\lambda = 0$ es un punto aislado de $\sigma(T)$.*

Demostración. Sabemos que $0 \in \rho(T_1)$ y $\rho(T_1)$ es abierto, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|\lambda| < \varepsilon$ entonces $\lambda \in \rho(T_1)$, por lo tanto $(\lambda I - T_1)$ es invertible.

Ahora sea $\lambda \neq 0$. Si $x \in N(\lambda I - T)$, entonces $(\lambda I - T)x = 0$, dado que T

es lineal tenemos $\lambda x = T(x)$, luego

$$x = T((1/\lambda)x) = T((1/\lambda)T((1/\lambda)x)) = T^2((1/\lambda)^2x) = \dots = T^k((1/\lambda)^kx)$$

Así obtenemos que $x \in R(T)$, $x \in R(T^2), \dots$, $x \in R(T^k)$, luego $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} R(T^k)$, por lo tanto $N(\lambda I - T) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} R(T^k) = R(T^p)$.

Veamos que $\lambda I - T$ es inyectivo.

Si $0 < |\lambda| < \varepsilon$, entonces

$$\{0\} = N(\lambda I - T_1) = N(\lambda I - T) \cap R(T^p) = N(\lambda I - T).$$

Así, si $0 < |\lambda| < \varepsilon$, entonces $\lambda I - T$ es inyectivo.

Veamos que $\lambda I - T$ es sobreyectivo.

Definimos $T_2 := T|_{N(T^p)}$, como T_2 es nilpotente tenemos que $T_2^p = 0$. Así $\sigma(T_2)^p = \sigma(T_2^p) = \sigma(0) = 0$, entonces $\sigma(T_2) = \{0\}$.

Luego si $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda \in \rho(T_2)$. Por lo tanto $\lambda I - T$ es invertible.

Por lo tanto $R(\lambda I - T_2) = N(T^p)$.

Ahora veamos que $R(\lambda I - T) = R(\lambda I - T_1) \oplus R(\lambda I - T_2)$.

“ \subseteq ” Sea $x \in R(\lambda I - T)$, luego existe $y \in X$ tal que $x = (\lambda I - T)y$. Dado que $X = R(T^p) \oplus N(T^p)$, existen únicos $u \in R(T^p)$ y $v \in N(T^p)$ tales que $x = u + v$, entonces $x = (\lambda I - T)u + (\lambda I - T)v$.

Además para todo $u \in R(T^p)$ y $v \in N(T^p)$, tenemos que $T(u) = T_1(x)$ y $T(v) = T_2(v)$. Por lo tanto $x = (\lambda I - T_1)u + (\lambda I - T_2)v$, donde $(\lambda I - T_1)u \in R(\lambda I - T_1)$ y $(\lambda I - T_2)v \in R(\lambda I - T_2)$.

Por lo tanto $R(\lambda I - T) \subseteq R(\lambda I - T_1) \oplus R(\lambda I - T_2)$.

“ \supseteq ” Si $x \in R(\lambda I - T_1) \oplus R(\lambda I - T_2)$, entonces existen únicos $u \in R(\lambda I - T_1)$ y $v \in R(\lambda I - T_2)$ tales que $x = u + v$.

Además, dado que $u \in R(\lambda I - T_1)$, existe $u' \in R(T^p)$ tal que $u = (\lambda I - T_1)u'$ y dado que $v \in R(\lambda I - T_2)$, existe $v' \in R(T^p)$ tal que $v = (\lambda I - T_2)v'$. Así,

$$\begin{aligned} x &= (\lambda I - T_1)u' + (\lambda I - T_2)v' \\ &= (\lambda I - T)u' + (\lambda I - T)v' \\ &= (\lambda I - T)(u' + v'), \end{aligned}$$

entonces $x \in R(\lambda I - T)$.

Por lo tanto $R(\lambda I - T) \supseteq R(\lambda I - T_1) \oplus R(\lambda I - T_2)$.

Por lo tanto $R(\lambda I - T) = R(\lambda I - T_1) \oplus R(\lambda I - T_2)$.

Así, si $0 < |\lambda| < \varepsilon$, $R(\lambda I - T) = R(\lambda I - T_1) \oplus R(\lambda I - T_2) = R(T^p) \oplus N(T^p) = X$. Por lo tanto $R(\lambda I - T) \supseteq R(\lambda I - T_1) \oplus R(\lambda I - T_2)$. es sobreyectivo.

Por lo tanto $\lambda I - T$ es invertible.

Ahora si $0 < |\lambda| < \varepsilon$, entonces $\lambda \in \rho(T)$. Por lo tanto 0 es un punto aislado de $\sigma(T)$.

□

2.4.1. Idempotentes

El conjunto de los operadores en $B(X)$ invertibles Drazin o Drazin generalizados, son denotados por $B(X)^D$ y $B(X)^d$, respectivamente. Si $T \in B(X)^D$, denotamos por $ind_D(T)$ al índice de T . Si $T \in B(X)^d \setminus B(X)^D$, entonces escribimos $ind_D(T) = \infty$.

Definición 2.4.3. Sea $P \in B(\mathcal{H})$, con \mathcal{H} un espacio de Hilbert, es un operador idempotente si cumple que $P^2 = P$.

Definición 2.4.4. Sea $P \in B(\mathcal{H})$, con \mathcal{H} un espacio de Hilbert, es un operador autoadjunto si cumple que $P^* = P$.

Definición 2.4.5. P es una proyección si $P^2 = P$ y $P^* = P$, es decir, P es idempotente y autoadjunto.

Teorema 2.4.3. [5] Sea $T \in B(X)$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

- a) $0 \notin \text{acc}\sigma(T)$
- b) Existe un idempotente $P \in B(X)$ que conmuta con T , tal que TP es nilpotente, y $T + P$ es invertible.

Demostración. a) \Rightarrow b): Si $0 \in \sigma(T)$, tomando $P = 0$ tenemos que se cumple b).

Si $0 \in \text{iso}(\sigma(T))$, entonces existen conjuntos abiertos U y V de \mathbb{C} , tal que $0 \in U$, $\sigma(T) \setminus \{0\} \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Definimos la función f en $U \cup V$ tal que $f(\lambda) = 0$ para $\lambda \in V$, y $f(\lambda) = 1$ para $\lambda \in U$. Luego $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$ y $f(T) = P$ es la proyección espectral de T correspondiente a $\{0\}$. Además P conmuta con algún A que conmuta con T . Sea $g(\lambda) = \lambda$ para $\lambda \in U \cup V$ y $g(T) = T$. Si $h(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$, entonces $h(\lambda) = 0$ para $\lambda \in V$, y $h(\lambda) = \lambda$ para $\lambda \in U$. Tenemos que $h(T) = TP$, por el teorema de mapeo espectral tenemos que $\sigma(TP) = \{0\}$, así TP es nilpotente.

Si $S(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda)$, entonces $S(\lambda) = \lambda$ para $\lambda \in V$, y $S(\lambda) = \lambda + 1$ para $\lambda \in U$. Observemos que $S(T) = T + P$. Usando de nuevo el teorema espectral obtenemos que $0 \notin \sigma(T + P)$, por lo tanto $T + P$ es invertible.

$b) \Rightarrow a)$: Si $P = 0$, entonces T es invertible y $0 \notin \sigma(T)$, así se cumple a).

Supongamos que existe algún idempotente $P \neq 0$, que satisface que $TP = PT$, TP es nilpotente y $T+P$ es invertible. Para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda I - T &= (\lambda I - TP)P + (\lambda I - T(I - P))(I - P) \\ &= (\lambda I - TP)P + (\lambda I - (T + P)(I - P))(I - P) \\ &= (\lambda I - TP)P + (\lambda I - (T + P))(I - P), \end{aligned}$$

ya que P es idempotente. Dado que $T + P$ es invertible, tenemos que $0 \notin \sigma(T + P)$, luego existe algún $r > 0$ tal que si $|\lambda| < r$, entonces $\lambda - (T + P)$ es invertible. Además como TP es nilpotente y tomando el polinomio $Q(z) = \lambda - z$ tenemos que

$$\sigma(\lambda I - TP) = \sigma(Q(TP)) = Q(\sigma(TP)) = Q(0) = \lambda,$$

por lo tanto $\lambda I - TP$ es invertible para toda $\lambda \neq 0$. Por lo tanto, para $0 < |\lambda| < r$, tenemos

$$(\lambda I - T)^{-1} = (\lambda I - TP)^{-1}P + (\lambda I - (T + P))^{-1}(I - P)$$

Sea C una curva alrededor de $\{0\}$, separando el punto 0 de el conjunto

$\sigma(T) \setminus \{0\}$. Tenemos

$$\begin{aligned}
 f_\lambda(T) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C (\lambda I - T)^{-1} d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_C [(\lambda I - TP)^{-1}P + (\lambda I - (T + P))^{-1}(I - P)] d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_C (\lambda I - TP)^{-1}P d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_C (\lambda I - (T + P))^{-1}(I - P) d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_C (\lambda I - TP)^{-1}P d\lambda + 0 \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{j=0}^{k-1} (TP)^j \lambda^{-(j+1)} d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi i} [P(2\pi i)] = P.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 2.4.4. [5] Sea $T \in B(X)$, entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:

- a) T es Drazin invertible generalizada.
- b) Existe un idempotente $P \in B(X)$ que conmuta con T , tal que TP es nilpotente, y $T + P$ es invertible.

Demostración.

a) \Rightarrow b): Sea $P = I - TT^d$, donde T^d es nuestra inversa generalizada de T que conmuta con T . Además

$$P^2 = (I - TT^d)(I - TT^d) = I - TT^d - TT^d + TT^d = I - TT^d = P,$$

y conmuta con T . También, $TP = T(I - TT^d)$ es nilpotente pues para algún

$k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} (TP)^k &= (T(I - TT^d))^k \\ &= (T - TTT^d)^k \\ &= (T - TT^dT)^k \\ &= (T - T)^k = 0. \end{aligned}$$

Tenemos que

$$(T + P)(T^d + P) = TT^d + TP + T^dP + P = I - TP \in B(X)^{-1}$$

ya que TP es nilpotente. Como $T + P$ conmuta con $(T^d + P)$ se sigue que $T + P$ es invertible. A partir de $(T + P)T^d = I - P$ obtenemos que $T^d = (T + P)^{-1}(I - P)$.

b) \Rightarrow a): Supongamos que P es un idempotente que satisface $TP = PT$, TP es nilpotente y $T + P$ es invertible. Si $B = (T + P)^{-1}(I - P)$, tenemos que $TB = T((T + P)^{-1}(I - P)) = (T + P)^{-1}(T - P) = (T + P)^{-1}(I - P)T = BT$. Luego

$$TB = T(T + P)^{-1}(I - P) = (T + P)(T + P)^{-1}(I - P) = I - P$$

y $TB^2 = (TB)B = (I - P)B = B$. Finalmente $T(I - TB) = TP$ es nilpotente. Por el teorema anterior tenemos que P es la proyección espectral de T correspondiente al conjunto espectral aislado de $\{0\}$. Así, P es único al igual que T^d .

□

Teorema 2.4.5. ([5]) *Un elemento $T \in B(X)$ es cuasipolar si y solo si $0 \notin \text{acc}\sigma(T)$*

Demostración.

\Rightarrow) Supongamos que T es cuasipolar y si $P = I - Q$, entonces existen $A, B \in B(X)$ tal que $I - P = AT = TB$, luego tenemos que:

$$\begin{aligned} (T + P)(ATB + P) &= TATB + TP + P = T(I - P)B + TP + P \\ &= (I - P)TB + TP + P = I + TP \\ &= (ATB + P)(T + P). \end{aligned}$$

Dado que $(I + TP) \in G(X)$ tenemos que $T + P \in G(X)$, entonces $0 \notin \text{acc}\sigma(T)$, por el teorema 2.4.3.

\Leftarrow) Sea $0 \notin \text{acc}\sigma(T)$, es decir, T es invertible Drazin generalizada. Denotamos con P el idempotente espectral de T correspondiente al punto 0. Dado que $(T + P)(I - P) = T(I - P)$, tenemos que

$$T(T + P)^{-1}(I - P) = I - P = (T + P)^{-1}(I - P)T.$$

Así, T es cuasipolar con $Q = I - P$.

□

Teorema 2.4.6. ([5]) Sea $T \in B(X)$. Entonces T es invertible Drazin generalizada si y solo si $0 \notin \text{acc}\sigma(T)$. Si T es Drazin invertible generalizado, P denota el idempotente espectral de T correspondiente al punto 0. Entonces $X = R(I - P) \oplus R(P)$, esta descomposición reduce completamente a T . La reducción $T_1 = T|_{R(I-P)} : R(I - P) \rightarrow R(I - P)$ es invertible, la reducción $T_2 = T|_{R(P)} : R(P) \rightarrow R(P)$ es nilpotente.

y

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(I - P) \\ R(P) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} R(I - P) \\ R(P) \end{bmatrix}$$

$$T^d = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(I - P) \\ N(I - P) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} R(I - P) \\ N(I - P) \end{bmatrix}.$$

Demostración.

\Leftarrow) Vamos a construir la inversa Drazin generalizada para $T \in B(X)$, partiendo de que $0 \notin \text{acc}\sigma(T)$.

También proporcionamos la forma de matriz de elementos invertibles Drazin generalizados.

Supongamos que $0 \notin \text{acc}\sigma(T)$, entonces existen conjuntos abiertos U y V de \mathbb{C} disjuntos tales que $0 \in U$ y $\sigma(T) \setminus \{0\} \subset V$.

Definimos $d(\lambda) = 0$ si $\lambda \in U$ y $d(\lambda) = \lambda^{-1}$ si $\lambda \in V$. Veamos que $d(T) = T^d$.

1. Supongamos que $d(T) \equiv 0$ entonces se satisfacen las condiciones de ser inversa Drazin generalizada.
2. Supongamos que $d(T) = T^{-1}$.
 - i) $T^{-1}TT^{-1} = IT^{-1} = T^{-1}$.
 - ii) $T^{-1}T = I = TT^{-1}$.
 - iii) $T(I - TT^{-1}) \equiv 0$ el cual es cuasinilpotente.

Luego T tiene la siguiente forma:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

donde $T_1 = T(TT^d)$ y $T_2 = T(I - TT^d)$.

Consideremos $C = TT^dB(X)TT^d$ y $D = (I - TT^d)B(X)(I - TT^d)$.

Tenemos que T_2 es nilpotente en $B(X)$, por lo tanto cuasinilpotente en $B(X)$ y también es cuasinilpotente en D .

Notemos que $T^d = T^dTT^d \in C$. Dado que $T_1T^d = TTT^dT^d = TT^d$ es la unidad de C , por lo tanto T_1 es invertible en C , y T^d es la inversa en C . Sin embargo, $T_1 = T^2T^d$ es un grupo invertible en $B(X)$ y $(T^2T^d)^\# = T^d$.

La descomposición (2.1) también es equivalente a:

$$T = T^2T^d + T(I - TT^d),$$

la cual es conocida en la literatura como la descomposición *core – cuasinilpotente* de T . Obtenemos la siguiente descomposición matricial práctica de T^d

$$T^d = \begin{bmatrix} T^d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (T^2T^d)^\#.$$

Si T es invertible Drazin, entonces T_2 es nilpotente, así la forma (2.1) en la literatura es llamada la descomposición *core – nilpotente* de T . En particular, si T es un grupo invertible, entonces $T_2 = 0$. Note que $P = I - TT^d$ es el idempotente espectral de T que corresponde al conjunto $\{0\}$.

\Rightarrow) Supongamos que T es Drazin invertible generalizada. Por el teorema 2.4.4, existe un idempotente $P \in B(X)$ que conmuta con T , tal que

TP es nilpotente, y $T + P$ es invertible y por el teorema 2.4.3 tenemos que $0 \notin \text{aac}\sigma(T)$.

□

2.4.2. Idempotentes mínimos

En esta sección vemos lo que son los idempotentes mínimos, para ello primero recordaremos lo que es un semigrupo.

Definición 2.4.6. Sea S un conjunto con una operación binaria. Se dice que S es un semigrupo si verifica la propiedad asociativa.

Sea S un semigrupo, denotaremos por $E(S)$ el conjunto de idempotentes de S . A continuación definiremos un orden parcial dentro de este conjunto.

Definición 2.4.7. En el conjunto $E(S)$ podemos definir la siguiente relación:

$$e \leq f \quad \text{si y solo si} \quad ef = fe = e$$

Observación 2.4.2. La relación definida anteriormente es un orden parcial ya que

- a) $e \leq e$ se cumple
- b) Si $e \leq f$ y $f \leq e$ entonces tenemos que $ef = fe = e$ y $fe = ef = f$ por lo tanto $f = e$.
- c) Si $e \leq f$ y $f \leq g$ tenemos que $ef = fe = e$ y $fg = gf = f$, así $e = ef = e(fg) = (ef)g = eg$ y $e = fe = (gf)e = g(fe) = ge$, por lo tanto $e \leq g$

Con esta relación podemos tener la siguiente definición:

Definición 2.4.8. En un semigrupo S , tenemos que

$$E_{min}(S) = \{e \in E(S) : e \text{ es m\u00ednimo en } (E(S), \leq)\}$$

Capítulo 3

Preservadores aditivos de la inversa Drazin

Supongamos que un operador T tiene inversa Drazin T^D e $\text{ind}_D(T) = k$. Como ya se mencionó en el capítulo anterior, $R(T^k)$ es un subespacio invariante, así el operador T tienen la siguiente forma matricial:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

con respecto a la descomposición del espacio $\mathcal{H} = R(T^k) \oplus R(T^k)^\perp$.

Definición 3.0.1. Sea $T \in B(\mathcal{H})$, T es nilpotente de grado 2 si $T^2 = 0$

Para conveniencia del lector, recordamos algunos resultados que se demostraron en el capítulo anterior.

Proposición 3.0.1. [4] Sea $T \in B(\mathcal{H})$, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. T es Drazin invertible e $\text{ind}_D(T) = k$.
2. Existe un entero positivo k tal que $\mathcal{H} = R(T^k) \oplus R(T^k)^\perp$.
3. Si $0 \in \sigma(T)$, entonces 0 es un punto aislado de $\sigma(T)$ y $T|_{E\{0\}}$ es nilpotente con $(T|_{E\{0\}})^k = 0$, donde $E\{0\}$ es la proyección espectral de T asociado con el conjunto espectral $\{0\}$.
4. T tiene representación matricial como en (3.1) con respecto a la descomposición $\mathcal{H} = R(T^k) \oplus R(T^k)^\perp$, donde T_{11} es un operador invertible en $R(T^k)$, T_{22} es un operador nilpotente en $R(T^k)^\perp$ y $T_{22}^k = 0$.

Proposición 3.0.2. [4] Supongamos que $T \in B(\mathcal{H})$ tiene inversa Drazin T^D e $\text{ind}_D(T) = k$. Si T tiene una matriz operador de la forma (3.1) con respecto a la descomposición del espacio $\mathcal{H} = R(T^k) \oplus R(T^k)^\perp$, luego, con respecto a tal descomposición del espacio,

$$T^D = \begin{bmatrix} T_{11}^{-1} & \sum_{i=1}^{k-1} T_{11}^{i-k-1} T_{12} T_{22}^{k-1-i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Demostración. Si T es invertible se cumple que $T^D = T^{-1}$, entonces el resultado se cumple. Ahora asumiremos que T no es invertible.

Si T tiene inversa Drazin T^D y $\text{ind}_D(T) = k$, por el lema 2.3.1, $R(T^D) = R(T^k)$.

Luego el operador T^D tiene siguiente forma matricial:

$$T^D = \begin{bmatrix} T_{11}^* & T_{12}^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

con respecto a la descomposición del espacio:

$$\mathcal{H} = R(T^k) \oplus R(T^k)^\perp = R(T^D) \oplus N((T^D)^*).$$

Dado que $T^D = T^D T T^D$, tenemos que

$$\begin{bmatrix} T_{11}^* T_{11} T_{11}^* & T_{11}^* T_{11} T_{12}^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^* & T_{12}^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Comparando ambos lados de la igualdad, tenemos que $T_{11}^* T_{11} T_{12}^* = T_{12}^*$ y $T_{11}^* T_{11} T_{11}^* = T_{11}^*$. Así con la primer ecuación tenemos que $R(T_{12}^*) \subseteq R(T_{11}^*)$ y $R(T_{11}^*) = R(T_{11}^*) + R(T_{12}^*) = R(T^D)$. Por otro lado, con la segunda ecuación tenemos que $T_{11}^* T_{11} = I_{R(T^D)}$, donde I_K denota la proyección ortogonal en el subconjunto cerrado K .

Dado que $T^D T = T T^D$, tenemos que

$$\begin{bmatrix} T_{11} T_{11}^* & T_{11} T_{12}^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^* T_{11} & T_{11}^* T_{12} + T_{12}^* T_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así, $T_{11} T_{11}^* = T_{11}^* T_{11} = I_{R(T^D)}$, con esto tenemos que T_{11} es invertible y que $T_{11}^* = T^{-1}$. En este caso

$$T T^D = \begin{bmatrix} T_{11} T_{11}^* & T_{11} T_{12}^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{R(T^D)} & T_{11} T_{12}^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dado que $T^{k+1} T^D = T^k$, tenemos que

$$\begin{bmatrix} T_{11}^k & T_{11}^{k+1} T_{12}^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^k & \sum_{i=0}^{k-1} T_{11}^i T_{12} T_{22}^{k-1-i} \\ 0 & T_{22}^k \end{bmatrix}.$$

Comparando ambos lados de la ecuación tenemos que $T_{22}^k = 0$ y

$$T_{11}^{k+1}T_{12}^* = \sum_{i=0}^{k-1} T_{11}^i T_{12} T_{22}^{k-1-i}. \text{ Así,}$$

$$T_{12}^* = T_{11}^{-k-1} \sum_{i=0}^{k-1} T_{11}^i T_{12} T_{22}^{k-1-i} = \sum_{i=0}^{k-1} T_{11}^{i-k-1} T_{12} T_{22}^{k-1-i}.$$

Por lo tanto,

$$T^D = \begin{bmatrix} T_{11}^{-1} & \sum_{i=1}^{k-1} T_{11}^{i-k-1} T_{12} T_{22}^{k-1-i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Observación 3.0.1. *De la proposición anterior, tenemos que*

$$TT^D = \begin{bmatrix} I & \sum_{i=0}^{k-1} T_{11}^{i-k} T_{12} T_{22}^{k-1-i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T^D T.$$

Así, si T tiene inversa Drazin T^D , entonces T y T^D son conmutativos además son idempotentes, en general, no son proyecciones ortogonales.

Ahora vamos a caracterizar la aplicación que preserve inversa Drazin. Sean \mathcal{H} y \mathcal{K} espacios reales o complejos de Hilbert, diremos que una aplicación $\phi : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{K})$ aditiva preserva la inversa Drazin si $(\phi(A))^D = \phi(A^D)$ para cada operador $A \in B(\mathcal{H})$ Drazin invertible.

Para $x, f \in \mathcal{H}$ distintos de cero, el operador $y \mapsto \langle y, f \rangle x$ de rango 1 lo denotamos por $x \otimes f$.

Lema 3.0.1. [4] Para cada idempotente $P \in B(\mathcal{H})$ se cumplen los siguientes resultados:

$$i) \quad \phi(I)\phi(P) = \phi(P)\phi(I).$$

$$ii) \quad \phi(P) = \phi(P)^2\phi(I) = \phi(P)\phi(I)^2.$$

Demostración. Para cada número racional α distinto de cero y cada idempotente $P \in B(\mathcal{H})$, tenemos que $I + (\alpha - 1)P$ es invertible, y $[I + (\alpha - 1)P]^{-1} = I + (\alpha^{-1} - 1)P$. Recordemos que si un operador $T \in B(\mathcal{H})$ es invertible, T es invertible Drazin y $T^D = T^{-1}$. Así

$$\phi(I + (\alpha - 1)P)^D = \phi((I + (\alpha - 1)P)^D) = \phi(I + (\alpha^{-1} - 1)P).$$

Por lo tanto, por la definición de inversa Drazin,

$$\phi(I + (\alpha - 1)P)\phi(I + (\alpha^{-1} - 1)P) = \phi(I + (\alpha^{-1} - 1)P)\phi(I + (\alpha - 1)P) \quad (3.3)$$

y

$$\phi(I + (\alpha - 1)P)\phi(I + (\alpha^{-1} - 1)P)\phi(I + (\alpha - 1)P) = \phi(I + (\alpha - 1)P). \quad (3.4)$$

Dado que ϕ es aditiva, luego desarrollando la ecuación (3.3) tenemos que

$$\phi(I)\phi(P) = \phi(P)\phi(I).$$

Notemos que, para cada idempotente $P \in B(\mathcal{H})$, P es invertible Drazin y $P^D = P$. Así $\phi(I)^3 = \phi(I)$ y $\phi(P)^3 = \phi(P)$. Se sigue de la ecuación (3.4) y del resultado *i)* que por cada número racional α distinto de cero, tenemos que

$$\left(2 - \frac{1}{\alpha}\right)\phi(P)\phi(I)^2 + \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)(\alpha - 1)\phi(P)^2\phi(I) = \left[1 + \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}\right]\phi(P).$$

Tomando $\alpha = 2$ y $\alpha = 1/2$ en la igualdad anterior, respectivamente, se obtiene $\phi(P) = \phi(P)\phi(I)^2$ y $\phi(P) = \phi(P)^2\phi(I)$.

□

El siguiente teorema se presenta sin demostración ya que la prueba se aleja de los temas presentados en este trabajo, el lector interesado puede encontrarlo en [4].

Teorema 3.0.1. [4] Sean \mathcal{H} y \mathcal{K} dos espacios de Hilbert de dimensión infinita reales o complejos y $\phi : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{K})$ una aplicación aditiva que preserva idempotentes. Supongamos que el rango ϕ contiene todos los idempotentes mínimos. Entonces ϕ elimina idempotentes mínimos, o existe una biyección $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ lineal acotada o conjugada tal que para cada $T \in B(\mathcal{H})$ tenemos que

$$\phi(T) = ATA^{-1}$$

o

$$\phi(T) = AT^tA^{-1},$$

donde T^t denota la transpuesta de T relativa a una base ortonormal arbitraria pero fija de \mathcal{H} (en el caso en que \mathcal{H} y \mathcal{K} sean reales, A es lineal.)

Observación 3.0.2. Notemos que para cada operador $T \in B(\mathcal{H})$ nilpotente de grado 2 y cada número α , $I + \alpha N$ es invertible y

$$(I + \alpha N)^D = (I + \alpha N)^{-1} = I - \alpha N,$$

así por definición de inversa Drazin, tenemos que

$$\phi(I + \alpha N)\phi(I - \alpha N) = \phi(I - \alpha N)\phi(I + \alpha N)$$

y

$$\phi(I - \alpha N)\phi(I + \alpha N)\phi(I - \alpha N) = \phi(I - \alpha N).$$

Por lo tanto para cada operador T nilpotente de grado 2 y cada número racional α ,

$$\phi(I)\phi(T) = \phi(T)\phi(I)$$

y

$$\alpha^2\phi(N)^3 + \phi(N) = \alpha\phi(N)^2\phi(I) + \phi(N)\phi(I)^2.$$

Así, $\phi(N)^2\phi(I) = 0$ y $\phi(N) = \phi(N)\phi(I)^2$. Note que cada operador lineal acotado en un espacio de Hilbert complejo infinito puede ser representado como una suma finita de operadores nilpotentes de grado 2.

Así $\phi(I)\phi(T) = \phi(T)\phi(I)$ y $\phi(T) = \phi(T)\phi(I)^2$ para cada operador T . Si ϕ es biyectiva entonces $\phi(I) = \pm I$ y ϕ preserva nilpotentes de grado 2.

A continuación presentamos nuestro resultado principal, el problema de preservadores aditivos lineales de la inversa Drazin.

Teorema 3.0.2. [4] Sean \mathcal{H} y \mathcal{K} dos espacios de Hilbert complejos o reales de dimensión infinita y $\phi : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{K})$ una aplicación aditiva. Supongamos que el rango de ϕ contiene todos los idempotentes mínimos en $B(\mathcal{K})$. Si $\phi(T^D) = (\phi(T))^D$ para cada operador invertible Drazin $T \in B(\mathcal{H})$, entonces ϕ elimina idempotentes mínimos, o existe una biyección lineal acotada o conjugada $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ tal que para cada $T \in B(\mathcal{H})$

$$\phi(T) = \xi ATA^{-1}$$

o

$$\phi(T) = \xi AT^t A^{-1},$$

donde $\xi = \pm 1$ y T^t denota la transpuesta de T a una base ortonormal de \mathcal{H} , arbitraria pero fija.

Demostración. Ya que cada espacio de Hilbert infinito tiene multiplicidad infinita, cada operador lineal acotado en un espacio de Hilbert infinito es una suma algebraica finita de idempotentes, como vimos en la observación 3.0.2.

Por i) y ii) en el lema 3.0.1, tenemos que para cada $T \in B(\mathcal{H})$,

$$\phi(I)\phi(T) = \phi(T)\phi(I) \quad (3.5)$$

o

$$\phi(T) = \phi(T)\phi(I)^2. \quad (3.6)$$

Dado que el rango de ϕ contiene las proyecciones de rango uno en $B(\mathcal{H})$. Se sigue de (3.5) y (3.6), respectivamente, que por cada vector unitario $x \in \mathcal{H}$,

$$\phi(I)x \otimes x = x \otimes x\phi(I)$$

y

$$x \otimes x = x \otimes x\phi(I)^2.$$

Las dos ecuaciones anteriores aseguran que $\phi(I) = \pm 1$. Sin pérdida de generalidad, asumimos que $\phi(I) = I$. Luego, se sigue de ii) en el lema 3.0.1 que ϕ preserva idempotencia. Y por el teorema 3.0.1 obtenemos que ϕ elimina idempotentes mínimos, o existe una biyección lineal acotada o conjugada $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ tal que para cada $T \in B(\mathcal{H})$

$$\phi(T) = \xi ATA^{-1}$$

o

$$\phi(T) = \xi AT^t A^{-1},$$

donde $\xi = \pm 1$ y T^t denota la transpuesta de T a una base ortonormal de \mathcal{H} , arbitraria pero fija.

□

Conclusión

El problema de preservadores lineales consiste en caracterizar las transformaciones lineales que dejan invariantes ciertas propiedades. El estudio de este problema comenzó en el contexto de espacios de matrices, por lo que en este trabajo se presentaron resultados de operadores lineales, definidos en dichos espacios, que preservan determinantes y matrices idempotentes. El objetivo de este trabajo es buscar una caracterización parecida a la que poseen los preservadores de determinantes para el caso de preservadores de la inversa generalizada de Drazin.

Se recopilaron y organizaron definiciones y resultados sobre las condiciones que tendrían que cumplir los operadores lineales para que existiera la inversa Drazin, la cual es única.

Por último se presentaron algunos resultados para llegar a la siguiente caracterización:

Sean \mathcal{H} y \mathcal{K} dos espacios de Hilbert complejos o reales de dimensión infinita y $\phi : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{K})$ una aplicación aditiva. supongamos que el rango de ϕ contiene todos los idempotentes mínimos en $B(\mathcal{K})$. Si $\phi(T^D) = \phi(T)^D$ para cada operador invertible Drazin $T \in B(\mathcal{H})$, entonces ϕ aniquila idempotentes mínimos, o existe una biyección lineal acotada o conjugada $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ tal que para cada $T \in B(\mathcal{H})$:

$$\phi(T) = \xi ATA^{-1}$$

o

$$\phi(T) = \xi AT^t A^{-1}$$

donde $\xi = \pm 1$ y T^t denota la transpuesta de T en una base ortonormal de \mathcal{H} , arbitraria pero fija.

Bibliografía

- [1] Ben-Israel A., Greville T., *Generalized inverses: theory and applications.*, Segunda edición, Springer-Verlag, Nueva York, 2003.
- [2] Campbell L. S. , Meyer D. C., *Generalized Inverses of Linear Transformations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2009.
- [3] Caradus, S.R., Pfaffenberger, W.E., Yood, B., *Calkin Algebras and Algebras of Operators on Banach Spaces*, Marcel Dekker, Inc. New York, 1974.
- [4] Cui J., *Additive Drazin inverse preservers*, Linear Algebra and its Applications 426, 448-453, 2007.
- [5] Djordjević S.D., RaKočević V., Greville T., *Lectures on Generalized Inverses*, Faculty of Science and Mathematics University of Niš, 2008.
- [6] Du H.-K., Deng C.-Y., *The representation and characterization of Drazin inverses of operators on a Hilbert space*, Linear Algebra and its Applications 407, 117–124, (2005)

-
- [7] Frobenius, G. *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutions*, Sitzungsber Deutsch. Akad. Wiss. Berlin 994-1015, 1897.
- [8] Gantmacher F. R., *The Theory of Matrices*, Vol. 2, Chelsea, New York, 1959.
- [9] Gin-Hor C., Ming-Huat L., Kok-Keong T., *Linear Preserves on Matrices*, Elsevier Science Publishing CO., Inc, Nueva York, 1987.
- [10] Hanke M., *Iterative consistency: a concept for the solution of singular linear system*, SIAM J. Matrix Anal. and Appl., 15. 569-577, 1994.
- [11] Hartwig R.E., Levine J., *Applications of the Drazin inverse to the Hill cryptographic system*, Part III, Cryptologia 5, 67-77, 1981.
- [12] Mbekhta M., Oudghiri M., Souilah K., *Additive maps Preserving Drazin Invertible Operators of Index One*, Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy 116A, 2016.
- [13] Meyer C.D. Jr, Shoaf J.M., *Updating finite Markov chains by using techniques of group inverse*, J. Statis. Comput. Simulation 11, 163-181, 1980.
- [14] Palmer T. W., *Banach algebras and the general theory *-algebras*, Vol. 1, Cambridge University Press, 1994.
- [15] Simeon B., Fuhrer C., Rentrop P., *The Drazin inverse in multi body system dynamics*, Numer, Math, 64, 521-539, 1993
- [16] Sorour, A.R., *Invertibility preserving linear maps on $L(X)$* . Transactions of the American Mathematical Society, 348 (1). 13—29, 1996.

- [17] Wang Fei, *Some Problems on Linear Preserves*, Department of Mathematics National University of Singapore, 2002/2003.