Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN MATEMÁTICAS

UN ESTUDIO DE LA LÓGICA $\mathbf{CG}'_3$

TESIS

presentada para obtener el título de:
Doctorado en Ciencias (Matemáticas)

Presenta:
Miguel Pérez Gaspar

Directores de Tesis:
Dr. David Villa Hernández
Dr. José Ramón Enrique Arrazola Ramírez

Puebla, Pue. Septiembre 2018

A mi Madre

Introducción

La *Paraconsistencia* remite al enfoque lógico-deductivo que se aplica al análisis y el estudio de contextos teóricos y racionales, los cuales pueden venir a contener inconsistencias (contradicciones) sin que esto implique su trivialización inmediata o falsificación. Los sistemas deductivos subyacentes a estos contextos, capaces de codificar lógicamente tal condición, son dichos sistemas lógicos paraconsistentes. Un punto de partida fundamental para ese proyecto, no obstante, y el análisis del desarrollo lógico-formal y conceptual de la ley lógica, conocida por su adagio latino, *ex falso sequitur quodlibet*, la cual establece que se puede admitir lícitamente cualquier conclusión mediante inconsistencia o contradicción lógica. Esta ley lógica funciona como divisor de aguas y codifica la cláusula fundamental del fenómeno lógico de la trivialización formal. De hecho, es válida en la Lógica Clásica y en la Intuicionista. No es válida, en general en cualquier clase de lógicas paraconsistentes. De su importancia como indicador inicial de posturas lógico-teóricas de carácter paraconsistente; que es una piedra de toque, esa regla es decisiva en la identificación de autores que fueron favorables o desfavorables a un enfoque que hoy puede ser considerado paraconsistente, ya sea en un sentido amplio o en un sentido estricto [18].

El objetivo principal de esta tesis es buscar una semántica de tipo Kripke y una axiomatización tipo Hilbert para la Lógica Paraconsistente $\mathbf{CG_3'}$.

En el Capítulo 1 se presenta una breve Historia de la lógica, partiendo de los principios fundamentales de la deducción lógica para posteriormente hablar de la Lógica Clásica, las Lógicas Multivaluadas, la Lógica Intuicionista y culminando con las Lógicas Paraconsistentes.

En el Capítulo 2 se fija un Lenguaje Proposicional que contiene conectivos y variables proposicionales para luego definir una Lógica Proposicional. Nuestro interés se centra en el estudio de una semántica de tipo Kripke y un sistema tipo Hilbert para la Lógica Paraconsistente $\mathbf{CG_3'}$ para ello se definen algunos conceptos básicos de la teoría de prueba y de la semántica de Kripke.

El Capítulo 3 se enfoca a estudiar algunas lógicas básicas, se comienza presentando a la Lógica Positiva, se sigue con la Lógica **Cw**. Después se presenta la axiomática y la semántica de tipo Kripke de la Lógica Intuicionista, la Lógica $\mathbf{G_3}$ y se finaliza con la Lógica **daC**.

El Capítulo 4 se dedica al estudio de la Lógica $\mathbf{G'_3}$. Primero desde el punto de vista de la semántica multivaluada, para posteriormente presentar la semántica de tipo Kripke para $\mathbf{G'_3}$, considerando que los modelos de Kripke en $\mathbf{G'_3}$ son un subconjunto de esos modelos de **daC**. Así también se presenta una teoría forma axiomática $\mathbf{G3'_h}$ para $\mathbf{G'_3}$ y se examinan algunas propiedades interesantes de $\mathbf{G3'_h}$. Se finaliza el capítulo probando que $\mathbf{G3'_h}$ es robusta y completa con respecto a $\mathbf{CG'_3}$.

Finalmente, en el Capítulo 5 se presenta a la Lógica $\mathbf{CG'_3}$. Primero desde el punto de vista de la semántica multivaluada, para posteriormente presentar la semántica de tipo Kripke para $\mathbf{CG'_3}$, de dos maneras diferentes. La primera se basa en la semántica de tipo Kripke de la Lógica $\mathbf{G'_3}$. La segunda noción de semántica de tipo Kripke se logra cambiando la definición de validez; se propone una forma alternativa de definir la relación de modelado considerando que los modelos de Kripke en $\mathbf{CG'_3}$ son un subconjunto de esos modelos de $\mathbf{G'_3}$ validando existencialmente las fórmulas. Posteriormente se presenta una teoría forma axiomática $\mathbb{L}$ para $\mathbf{CG'_3}$ y se examinan algunas propiedades interesantes de $\mathbb{L}$. Se prueba que $\mathbb{L}$ es robusta y completa con respecto a $\mathbf{CG'_3}$. Se concluye el capítulo examinando la propiedad de sustitución en $\mathbf{CG'_3}$ y comparando a $\mathbf{CG'_3}$ con algunas lógicas multivaluadas.

Los resultados presentados en los Capítulos 4 y 5 son propios y se encuentran publicados en [8, 9, 15, 32].

Al final de la tesis se incluyen algunos apéndices complementarios. En el Apéndice A y B se presentan las demostraciones de las afirmaciones de la semántica de tipo Kripke así como los teoremas que se cumplen en $\mathbf{G'_3}$ y $\mathbf{CG'_3}$, respectivamente.

Miguel Pérez Gaspar
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, BUAP
Puebla, Puebla, México
13 de septiembre 2018

Índice general

Introducción I

1. Historia **1**
1.1. Lógica Clásica . . . 2
1.2. Lógicas Multivaluadas . . . 2
1.3. Lógica Intuicionista . . . 3
1.4. Lógicas Paraconsistentes . . . 5

2. Conceptos Básicos **9**
2.1. Teoría de Prueba . . . 11
2.1.1. Sistema tipo Hilbert . . . 11
2.2. Semánticas . . . 12
2.2.1. Semántica Multivaluada . . . 13
2.2.2. Semántica de Kripke . . . 14

3. Algunas lógicas básicas **17**
3.1. Lógica Positiva . . . 17
3.2. Lógica $\mathbf{C}_\omega$ . . . 18
3.3. Lógica **Int** . . . 18
3.3.1. Semántica de Kripke para **Int** . . . 19
3.4. Lógica $\mathbf{G_3}$ . . . 20
3.4.1. Semántica de Kripke para $\mathbf{G_3}$ . . . 21
3.5. Lógica **daC** . . . 21
3.5.1. Semántica de Kripke para **daC** . . . 22

4. Lógica $\mathbf{G_3'}$ **25**
4.1. Semántica Multivaluada para $\mathbf{G_3'}$ . . . 25
4.2. Semántica de Kripke para $\mathbf{G_3'}$ . . . 25

4.3. Sistema deductivo de tipo Hilbert para $\mathbf{G'_3}$ 27
4.3.1. Teoremas de Robustez y Completitud 32

5. Lógica $\mathbf{CG'_3}$ 37
5.1. Semántica Multivaluada para $\mathbf{CG'_3}$ 37
5.2. Semántica de Kripke para $\mathbf{CG'_3}$ 37
5.2.1. Semántica basada en $\mathbf{G'_3}$ 38
5.2.2. Semántica cambiando la noción de validez 38
5.3. Sistema deductivo de tipo Hilbert para $\mathbf{CG'_3}$ 39
5.3.1. Teorema de Robustez y Completitud 42
5.3.2. Teorema de Substitución 47
5.4. Comparaciones de $\mathbf{CG'_3}$ con otras lógicas 48

Conclusión 52

A. Pruebas de la Lógica $\mathbf{G'_3}$ 55
A.1. Semántica tipo Kripke 55
A.2. Teoría de Prueba 58

B. Pruebas de la Lógica $\mathbf{CG'_3}$ 69
B.1. Semántica tipo Kripke 69
B.2. Teoría de Prueba 72

Bibliografía 93

Un estudio de la Lógica CG'_3

Miguel Pérez Gaspar

13 de septiembre 2018

Capítulo 1

Historia

Los principios fundamentales de la lógica fueron establecidos por Aristóteles hace más de 2300 años. Estos principios son tres:

I. **Principio de identidad**. Afirma que todo objeto es igual a sí mismo: A es A.

II. **Principio del tercero excluido**. Se formulo en la lógica tradicional así: o bien P es verdadera, o bien su negación $(\neg P)$ lo es.

III. **Principio de no-contradicción**. Ninguna cosa puede ser y no ser: dos proposiciones contradictorias P y $\neg P$ no pueden ser ambas verdaderas.

Estos principios fundamentales de la lógica se identificaron con las leyes del pensamiento y, por lo tanto, no se cuestionaban. Así como la Geometría Euclidiana es la única geometría evidentemente posible y asombra por su exacta aplicabilidad a la realidad, estas leyes aristotélicas describían con exactitud la que parecía ser la única manera correcta de razonar. Sin embargo, en la primera mitad del siglo XIX, después de una complicada serie de intentos de demostrar el famoso postulado de las paralelas, suponiendo solamente cuatro postulados, (postulado 5 del Libro I de Euclides), el matemático ruso Nicolás Ivanovich Lobachevski construyó una geometría en la que resultaba falso el quinto postulado de Euclides. El descenso de la categoría de "única" de la geometría euclidiana minó el estatus de invulnerabilidad del que gozaba la Lógica Clásica, pues algunos lógicos comenzaron a pensar que, aun cuando estas tres sencillas leyes correspondiesen con exactitud a nuestra manera de razonar, eso no las revestía de algún carácter especial.

1.1. Lógica Clásica

La Lógica Clásica fue ideada originalmente para estudiar la verdad de las proposiciones, es decir que su objetivo sólo es decidir si una proposición es verdadera o falsa. Durante muchos años la lógica fue dominada por estudios relativos a fundamentos matemáticos; sin embargo, las exigencias en diversos campos del conocimiento hicieron notar que la Lógica Clásica era insuficiente para la representación del razonamiento “común” del ser humano.

En los inicios del siglo XX surgen nuevos sistemas lógicos, por un lado, rechazando uno o varios de los principios de la Lógica Clásica y por otro extendiéndola para obtener lógicas con mayor expresividad [34]. Para formalizar el estudio de estos sistemas, conocidos como lógicas no clásicas, surgieron herramientas en la teoría de prueba como: cálculo tipo Hilbert, cálculo de secuentes, deducción natural, &c. También se desarrollaron herramientas para estudiar la semántica tales como: semánticas de Kripke, matrices lógicas y tablas analíticas, entre otras.

1.2. Lógicas Multivaluadas

En la Lógica Clásica todo enunciado tiene uno y sólo un valor de verdad que se elige entre dos posibles: verdadero o falso. El Principio del tercero excluido hace bivalente a la Lógica Clásica. A principios de los años veinte, algunos lógicos como Emil Post, Jan Łukasiewicz junto con Alfred Tarski hicieron a un lado el Principio del tercero excluido y mostraron que era posible construir sistemas lógicos trivalentes perfectamente consistentes. Junto a estas lógicas trivalentes que se presentaron como extensiones semánticas de la Lógica Clásica apareció una en especial a la que denominaron Lógica Intuicionista, la cual fue construida por el matemático y filósofo holandés Luitzen Egbertus Jan Brouwer, de la que hablamos en seguida.

1.3. Lógica Intuicionista

Una de las lógicas no clásicas más importantes es la Lógica Intuicionista [22]. Alrededor de 1930 Arend Heyting (1898-1980) crea el primer sistema de prueba tipo Hilbert para la Lógica Intuicionista. El objetivo de Heyting fue dar una base formal al Intuicionismo Matemático o Constructivismo Matemático propuesto previamente por su maestro Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) alrededor de 1907. De acuerdo a Brower el Principio del tercero excluido $\varphi \vee \neg\varphi$ (*tertium non datur* **TND**) no debe ser aplicado en la matemática clásica. Esto último debido a que Brower rechazaba el uso de una lógica bivaluada, por ejemplo, la Lógica Clásica, como base de la matemática. Varios lógicos desarrollaron otros formalismos para la Lógica Intuicionista, primero Kurt Gödel y Gerard Gentzen en la década de 1930 y más tarde en 1952 Stephen Kleene.

Empleando una formalización tipo Hilbert, la Lógica Intuicionista se puede definir con los axiomas **Pos1-Pos8** y Modus Ponens como única regla de inferencia, junto con los axiomas siguientes:

Int1: $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$
Int2: $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$

Estos dos axiomas modelan el comportamiento de la negación. Por una parte, nos permiten realizar demostraciones por contradicción, de manera un poco limitada; pero por otra no permiten hacer demostraciones por casos.

La Lógica Intuicionista no niega el Principio del tercero excluido ni evita la introducción de la doble negación, por ejemplo:

$$\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \quad \text{y} \quad \varphi \to \neg(\neg\varphi)$$

son demostrables en intuicionismo. Sin embargo,

$$(\varphi \vee \neg\varphi) \quad \text{y} \quad \neg(\neg\varphi) \to \varphi$$

no lo son. Más aún, la triple negación de una proposición sí es equivalente a su negación,

$$\neg(\neg(\neg\varphi)) \leftrightarrow \neg\varphi.$$

Partiendo de la Lógica Intuicionista se crearon diversas lógicas proposicionales que la extienden de algún modo. A esta familia de lógicas se le conoce como Lógicas Súper-Intuicionistas. La Lógica Clásica es la lógica Súper-Intuicionista más fuerte con la propiedad de ser consistente. Entonces las Lógicas Súper-Intuicionistas consistentes se encuentran en medio de la Lógica Intuicionista y de la Lógica Clásica, es por ello que se les conoce como Lógicas Intermedias.

En 1933 Gödel creó una sucesión infinita de Lógicas Intermedias $\mathbf{G_i}$, con $i \in \mathbb{N}$; cada una más débil que la anterior. El objetivo de Gödel al crear esta familia de lógicas fue mostrar que la Lógica Intuicionista no tiene una matriz lógica finita; es decir, no existe una interpretación adecuada para la Lógica Intuicionista con un número finito de valores de verdad.

Cada una de estas Lógicas Intermedias se obtiene agregando algunos axiomas extras a la Lógica Intuicionista, por ejemplo, agregando el axioma:

$$\mathbf{G3}\text{: } (\neg\psi \to \varphi) \to (((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi)$$

se obtiene la lógica trivaluada de Gödel $\mathbf{G_3}$, la cual es una de las Lógicas Intermedias más conocidas. A esta lógica también se le denomina como lógica Here and There (**HT**).

Gabbay y de Jongh propusieron en 1974 otra familia infinita de Lógicas Intermedias interesantes $\mathbf{D_i}$, con $i \in \mathbb{N}$. Cada una de estas lógicas es finitamente axiomatizable y a diferencia de las lógicas de Gödel satisfacen la propiedad de la disyunción; es decir que, si $\varphi \vee \psi$ es demostrable en un sistema, entonces al menos una de las proposiciones φ y ψ debe ser demostrable en ese sistema también.

Así como las lógicas de Gödel o las de Gabbay y Jongh podríamos citar muchas otras Lógicas Intermedias, por ejemplo: la lógica de Jankov **KC**, la lógica de Gödel-Dummett, la de Kreisel-Putnam, la de Medvedev o la de Scott. Cada uno de estos sistemas extiende la Lógica Intuicionista con la adición de algún principio, dependiendo del fin para el cual fue creada. Algunas de ellas han encontrado diversas aplicaciones a pesar de que fueron concebidas sólo como un contraejemplo teórico, tal es el caso de las lógicas de Gödel. Las aplicaciones de estas lógicas en la actualidad no se limita a la lógica misma, también incluyen la solución de problemas dentro de la matemática, la computación o la filosofía.

1.4. Lógicas Paraconsistentes

Desde Aristóteles las contradicciones no tienen cabida en la Lógica Clásica, ya que, si se las admite, la lógica se torna trivialmente inconsistente, es decir, en ellas es posible deducir cualquier afirmación. Duns Escoto fue el primero en expresar esta idea mediante el Principio de Explosión, *ex contradictione quodlibert* **ECQ**: $p, \neg p \vdash p$, y el primero en criticarlo fue el lógico ruso N. A. Vasilév (1910). Una vez finalizada la Segunda Guerra Mundial, los primeros sistemas de Lógica Paraconsistente aparecieron en lugares distintos de manera independiente unos de otros y motivados por distintas razones. El primer sistema fue creado por el lógico polaco S. Jaskowski (1949) y otros se deben a F. G. Asenjo (Argentina, 1954), N. C. A da Costa (Brasil, 1958), T. J. Smiley (Reino Unido, 1959), Belnap, Dunn y Meyer en Estados Unidos. El término *paraconsistente* fue propuesto por el peruano F. Miró Quesada en el 3er. Simposio Latinoamericano sobre lógica matemática (1976).

Las Lógicas Paraconsistentes son sistemas lógicos que tienen la propiedad de aceptar contradicciones sin llegar a ser triviales, en este sentido decimos que son "tolerantes a la inconsistencia". Aunque no existe un consenso general sobre la definición de una Lógica Paraconsistente, en Analysis of the paraconsistency in some logics, podemos encontrar una discusión exhaustiva sobre la paraconsistencia y algunos ejemplos de sistemas paraconsistentes se pueden encontrar en [1].

En términos generales, podemos decir que las Lógicas Paraconsistentes son sistemas que no satisfacen el principio **ECQ**, este principio establece que, a partir de una proposición contradictoria, se puede deducir cualquier otra proposición. Para otros autores, una lógica es paraconsistente cuando el Principio de no-contradicción **LNC** $\neg(p \wedge \neg p)$ no es válido.

En [31] Palau señala que una familia de sistemas paraconsistentes muy conocida es la constituida por los sistemas $\mathbf{C_n}$ $(1 \leq n \leq \omega)$, formulados por N. C. A. da Costa en 1974 y por A. I. Arruda en 1980. Esta familia tiene una estructura jerárquica de tal forma que si n es igual a 1, entonces $\mathbf{C_1}$ es la Lógica Clásica. Los siguientes sistemas se construyen debilitando la negación de la Lógica Clásica hasta que la regla ECQ resulte inválida, pero de forma tal que continúen siendo válidas las leyes clásicas que rigen los restantes conectivos proposicionales.

Una Lógica Paraconsistente de reciente creación es la lógica $\mathbf{CG'_3}$, introducida en [29]. Esta lógica se define en términos de una semántica multivaluada y tiene la propiedad de contener a la lógica $\mathbf{G'_3}$ [17], los autores definen a $\mathbf{CG'_3}$ usando las tablas de verdad de $\mathbf{G'_3}$ pero cambian el conjunto de valores de verdad designados. En [17] los autores presentan un estudio entre la relación que tiene $\mathbf{CG'_3}$ y algunas otras lógicas usando un cálculo tipo Hilbert, sin embargo, ellos no presentan un cálculo tipo Hilbert o una Semántica de tipo Kripke para esta lógica.

En la actualidad las lógicas no clásicas, particularmente la Lógica Intuicionista y las Lógicas Paraconsistentes, se han convertido en una herramienta fundamental para la representación del conocimiento y razonamiento humano. En general existen muchas aplicaciones de estas lógicas en distintas áreas del conocimiento como lo podemos constatar en publicaciones como [3, 4], de ahí la importancia de su estudio.

Independientemente del sistema lógico que se desee estudiar es posible adoptar dos enfoques: sintáctico (empleando cálculo tipo Hilbert, cálculo de secuentes, deducción natural, &c.) o semántico (usando semánticas de Kripke, matrices lógicas, semánticas algebraicas o topológicas, o tablas analíticas entre otras). Los métodos sintácticos y semánticos de la lógica formal son métodos alternativos para detectar las verdades lógicas, así como las relaciones de consecuencia de un sistema lógico dado.

En [7] Borja Macías puntualiza que las Lógicas Paraconsistentes son sistemas lógicos que tratan las contradicciones de forma atenuada, es decir que son "tolerantes a la inconsistencia". Aun cuando no existe un consenso en la definición de lo que es una Lógica Paraconsistente, en [1] podemos encontrar una discusión sobre el concepto de paraconsistencia y algunos ejemplos de Lógicas Paraconsistentes. De manera general podemos decir que las Lógicas

Paraconsistentes son aquellas lógicas en las que se permiten teorías inconsistentes pero no triviales es decir, estos sistemas no satisfacen el Principio de Explosión **ECQ**. Recordemos que el Principio **ECQ** establece que de una proposición contradictoria se puede deducir cualquier otra proposición. Para otros autores una lógica es paraconsistente cuando el Principio **LNC**: $\neg(p \wedge \neg p)$ no es válido.

Capítulo 2

Conceptos Básicos

En este capítulo introducimos la sintaxis de las fórmulas lógicas consideradas en este trabajo además de algunas definiciones y conceptos básicos.

Definición 2.1. *Un* ***lenguaje proposicional*** $\mathcal{L}$ *se define como una pareja* $\langle \mathcal{A}_{\mathcal{L}}, \mathcal{S}_{\mathcal{L}} \rangle$ *formada por el alfabeto* $\mathcal{A}$ *y la sintaxis* $\mathcal{S}$ *del lenguaje donde:*

- *El* ***alfabeto*** $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ *está conformado por la terna* $\langle P, C, A \rangle$
  - P *es un conjunto de letras proposicionales.*
  - C *es un conjunto de conectivos.*
  - A *es el conjunto de símbolos auxiliares* $\{(,), \mathbf{,}\}$.
- *La* ***sintaxis*** $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ *es el conjunto de reglas que definen el concepto de fórmula bien formada. Como consideramos lógicas proposicionales, una fórmula bien formada en el lenguaje* $\mathcal{L}$ *es una secuencia de símbolos del alfabeto que podemos definir recursivamente mediante el siguiente conjunto de reglas:*
  1. *Las letras proposicionales del alfabeto* $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ *son fórmulas bien formadas y son llamadas fórmulas atómicas.*
  2. *Si* $*$ *es un conectivo n-ario del alfabeto* $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ *y* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *son fórmulas bien formadas entonces* $*(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *también es una fórmula bien formada.*
  3. *Toda secuencia de símbolos producida por la aplicación de los pasos 1 y 2 en cualquier orden, constituyen una fórmula bien formada.*

4. Ninguna otra secuencia de símbolos es una fórmula bien formada.

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional, con $Form(\mathcal{L})$ denotamos al conjunto de fórmulas bien formadas del lenguaje $\mathcal{L}$. Los elementos de $Form(\mathcal{L})$ serán denotados por letras minúsculas del alfabeto griego $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, a los subconjuntos de $Form(\mathcal{L})$ también denominados teorías los denotamos por letras mayúsculas del alfabeto griego $(\Gamma, \Delta, \ldots)$, a las letras proposicionales las denotamos por letras minúsculas $(p, q, r, \ldots)$ y al conjunto de fórmulas atómicas lo denotamos por $atom(\mathcal{L})$.

Definición 2.2. *Una **substitución** σ en un lenguaje $\mathcal{L}$ es un conjunto que tiene la forma $\{p_1/\beta_1, p_2/\beta_2, \ldots, p_n/\beta_n\}$ donde $p_i \in atom(\mathcal{L})$, $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$ y $\beta_i \in Form(\mathcal{L})$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. La sustitución σ aplicada a una fórmula bien formada α, denotada por $\sigma(\alpha)$ o por $\alpha[p_1/\beta_1, p_2/\beta_2, \ldots, p_n/\beta_n]$, es la fórmula que se obtiene al reemplazar cada ocurrencia de p_i en α por la fórmula β_i para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ de manera simultánea. La sustitución σ aplicada a un conjunto de fórmulas bien formadas Γ es el conjunto $\sigma(\Gamma) = \{\sigma(\alpha) | \alpha \in \Gamma\}$.*

Definición 2.3. *Dado un lenguaje $\mathcal{L}$, una **lógica** es un conjunto de fórmulas $\mathbf{L} \subset Form(\mathcal{L})$ tal que satisface las siguientes condiciones:*

1. *$\mathbf{L}$ es cerrado bajo la regla Modus Ponens* **MP***: ψ es consecuencia directa de $\varphi \to \psi$ y φ;*

2. *$\mathbf{L}$ es cerrado bajo la regla de substitución.*

A los elementos de $\mathcal{L}$ se les denomina teoremas. Habitualmente la notación $\vdash_{\mathbf{L}} \alpha$ se emplea para establecer que α es un teorema de $\mathbf{L}$, es decir, $\alpha \in \mathbf{L}$.

Definición 2.4. *Dados dos lenguajes $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ tal que el conjunto de conectivos de $\mathcal{L}_1$ está contenido en el conjunto de conectivos de $\mathcal{L}_2$ y dos lógicas $\mathbf{L}_1$ en $\mathcal{L}_1$ y $\mathbf{L}_2$ en $\mathcal{L}_2$, respectivamente. Se dice que $\mathbf{L}_2$ es una **extensión** de $\mathbf{L}_1$, si $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_2$*

Definición 2.5. *Dados dos lenguajes $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ tal que el conjunto de conectivos de $\mathcal{L}_1$ está contenido en el conjunto de conectivos de $\mathcal{L}_2$ y dos lógicas $\mathbf{L}_1$ en $\mathcal{L}_1$ y $\mathbf{L}_2$ en $\mathcal{L}_2$ respectivamente, se dice que $\mathbf{L}_2$ es una **extensión conservativa** de $\mathbf{L}_1$: si $\mathbf{L}_2$ es una extensión de $\mathbf{L}_1$ y cualquier teorema de $\mathbf{L}_2$ en el lenguaje $\mathcal{L}_1$ es un teorema en $\mathbf{L}_1$.*

2.1. Teoría de Prueba

La Teoría de la Demostración o Teoría de la Prueba es una rama de la Lógica Matemática que trata a las demostraciones como objetos matemáticos, facilitando su análisis mediante técnicas matemáticas. Las demostraciones suelen presentarse como estructuras de datos inductivamente definidas que se construyen de acuerdo con los axiomas y reglas de inferencia de los sistemas lógicos.

2.1.1. Sistema tipo Hilbert

Un sistema axiomático o sistema tipo Hilbert consiste en un conjunto de axiomas que se utilizan, mediante deducciones y reglas de inferencia, para demostrar teoremas. Ejemplos de sistemas axiomáticos deductivos son la geometría euclidiana compilada por Euclides en los Elementos y el sistema axiomático de la lógica proposicional.

Definición 2.6. *Dado un lenguaje $\mathcal{L}$ y una fórmula cualquiera $\alpha \in Form(\mathcal{L})$, una* ***instancia*** *de α es cualquier fórmula $\sigma(\alpha) \in Form(\mathcal{L})$ donde σ es una sustitución en $\mathcal{L}$.*

Definición 2.7. *Dados un lenguaje $\mathcal{L}$ y dos conjuntos $\Gamma, \Delta \subset Form(\mathcal{L})$ finitos una* ***regla de inferencia*** *R es un subconjunto de $\mathcal{P}(Form(\mathcal{L})) \times \mathcal{P}(Form(\mathcal{L}))$, tal que $(\Gamma, \Delta) \in R$ y para cualquier sustitución σ se tiene que $(\sigma(\Gamma), \sigma(\Delta)) \in R$. Si $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ y $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ habitualmente la regla R se denota por $\dfrac{\gamma_1 \cdots \gamma_n}{\delta_1 \cdots \delta_m} R$.*

Definición 2.8. *Dado un lenguaje $\mathcal{L}$, una* ***axiomática*** *o un* ***sistema de prueba tipo Hilbert*** *o simplemente un* ***sistema de Hilbert*** *es una pareja $A = \langle \Lambda, \mathcal{R} \rangle$ donde $\Lambda \subset Form(\mathcal{L})$ es un conjunto de fórmulas bien formadas denominadas esquemas de axioma y $\mathcal{R}$ es un conjunto de reglas de inferencia.*

Definición 2.9. *Una* ***demostración*** *o* ***prueba*** *para una fórmula α en una axiomática A es una sucesión finita de fórmulas $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ donde $\beta_n = \alpha$ y cada β_i es una instancia de un esquema de axioma en A o es consecuencia de fórmulas previas aplicando alguna regla de inferencia en A. Si existe una demostración para α en A decimos que α es un* ***teorema*** *en A y lo denotamos por $\vdash_A \alpha$.*

Dado un sistema de prueba tipo Hilbert y la definición de demostración se tiene una manera sintáctica para definir lógica.

Definición 2.10. *Dado un lenguaje $\mathcal{L}$ y una axiomática A, la* ***lógica generada*** *por ésta es el conjunto*

$$\mathbf{A} := \{\alpha \in Form(\mathcal{L}) : \ \vdash_A \alpha\}$$

Definición 2.11. *Una fórmula α es* ***consecuencia lógica*** *de un conjunto de fórmulas Γ en una axiomática A si existe una sucesión finita de fórmulas $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ donde $\beta_n = \alpha$ y cada β_i es una instancia de un esquema de axioma, es una instancia de una fórmula en Γ o es consecuencia de fórmulas previas aplicando alguna regla de inferencia en A y lo denotamos por $\Gamma \vdash_A \alpha$.*

Definición 2.12. *Un* ***sistema de Hilbert restringido*** *es un sistema de Hilbert en el que $\Gamma \vdash_X \alpha$ denota $\vdash_X \gamma_1 \to (\cdots(\gamma_n \to \alpha)\cdots)$ donde $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \subseteq \Gamma$ y $n \in \mathbb{N}$.*

2.2. Semánticas

Como señala Béziau en [6] las semánticas multivaluadas y de tipo Kripke son dos generalizaciones de la semántica clásica en dos formas diferentes, incluso podemos decir que “opuestas”. La semántica multivaluada trata de mantener la idea de homomorfismos entre la estructura de la lengua y un álgebra de funciones de verdad, pero el dominio del álgebra puede tener más de dos valores. La semántica de Kripke mantiene sólo dos valores, pero se introduce una relación entre bivaluaciones. Estas dos semánticas pueden ser filosóficamente controversiales, pero son herramientas técnicas muy útiles y potentes que se pueden utilizar para dar una explicación matemática de nociones filosóficas básicas.

La existencia de un tipo de semántica para un sistema lógico no garantiza la existencia de otros tipos de semántica para ese mismo sistema. El hecho de que existan semánticas de algún tipo para una lógica dada tampoco garantiza que otros sistemas “parecidos” también lo tengan.

Existen diferentes formas de definir la semántica de una lógica, para el caso de las lógicas no clásicas la gama es muy amplia. A continuación, se presenta la semántica multivaluada.

2.2.1. Semántica Multivaluada

Una forma usual de definir la semántica multivaluada de una lógica es mediante el uso de matrices.

Definición 2.13. *Dada una lógica* $\mathbf{L}$ *en el lenguaje* $\mathcal{L}$*, la* ***matriz*** *de* $\mathbf{L}$ *es una estructura* $M := \langle D, D^*, F\rangle$ *donde:*

- D *un conjunto de valores de verdad (dominio).*
- D^* *un subconjunto no vacío de* D *(conjunto de valores designados).*
- $F := \{f_c | c \in \mathcal{C}\}$ *un conjunto de funciones de verdad, con una función para cada conectivo lógico en* $\mathcal{L}$*.*

Definición 2.14. *Dada una lógica* $\mathbf{L}$ *en el lenguaje* $\mathcal{L}$*, una* ***valuación*** *o* ***interpretación*** *es una función* $t : atom(\mathcal{L}) \to D$ *que mapea los átomos a elementos en el dominio.*

Una interpretación t se puede extender a una función $\hat{t} : Form(\mathcal{L}) \to D$ como es habitual, es decir aplicando de manera recursiva las funciones de verdad de los conectivos lógicos en F. Las interpretaciones nos permiten definir la noción de validez para este tipo de semántica del siguiente modo:

Definición 2.15. *Dada una fórmula* φ *y una interpretación* t *en una lógica* $\mathbf{L}$ *decimos que la fórmula* φ *es* ***válida*** *bajo la interpretación* t *en la lógica* $\mathbf{L}$ *si* $t(\varphi) \in D^*$ *y lo denotamos por* $t \Vdash\!\!\models_{\mathbf{L}} \varphi$*.*

En este caso la validez depende de la interpretación, pero si deseamos encontrar las "verdades lógicas" del sistema entonces tenemos que:

Definición 2.16. *Dada una fórmula* φ *en el lenguaje de una lógica* $\mathbf{L}$*, decimos que esta es una* ***tautología*** *en* $\mathbf{L}$ *(o simplemente que es válida), si para cada posible interpretación, la fórmula* φ *es válida y lo denotamos por* $\Vdash\!\!\models_{\mathbf{L}} \varphi$*.*

Cuando definimos una lógica vía una semántica multivaluada lo que se hace habitualmente es definir al conjunto de teoremas de la lógica como el conjunto de las tautologías que se obtienen a partir de la semántica multivaluada, es decir $\varphi \in \mathbf{L}$ si y sólo si $\Vdash\!\!\models_{\mathbf{L}} \varphi$.

2.2.2. Semántica de Kripke

Las semánticas de Kripke se conocen también como Semánticas Relacionales, Semánticas de Marcos o Semánticas de los mundos posibles. Estas fueron desarrolladas por Saul Kripke y André Joyal a finales de la década de 1950. Primero se creó la versión para las lógicas modales y posteriormente para la Lógica Intuicionista e Intermedias. En realidad, la creación de este tipo de semánticas fue un parteaguas en el estudio de la teoría de modelos para las lógicas, en particular el estudio de Teoría de Modelos par las no clásicas.

Definición 2.17. *Un **Modelo de Kripke** es una terna $\mathcal{M} = \langle W, R, v \rangle$ donde:*

- *W es un conjunto no vacío (universo).*
- *R una relación binaria en W (relación de accesibilidad).*
- *v es una **valuación** en $\mathcal{M}$ es decir es una función $v : atom(\mathcal{L}) \to \mathcal{P}(W)$.*

Una vez que se ha definido el modelo es necesario establecer una relación entre este y las fórmulas de tal manera que establezca qué fórmulas son válidas por el modelo establecido y cuáles no.

Definición 2.18. *Dados un átomo p en una lógica $\mathbf{L}$ y un punto w en un modelo $\mathcal{M}$, p **es verdadera en el punto** w **del modelo** $\mathcal{M}$ si $w \in v(p)$ y se denota por:*

$$(\mathcal{M}, w) \models_{\mathbf{L}} p.$$

*Para $\varphi \in Form(\mathcal{L})$ la **relación de modelado** está definida recursivamente dependiendo de los conectivos en $\mathcal{L}$ y de la lógica en cuestión.*

En general la noción de modelado es sólo un paso intermedio para definir la noción de validez en este tipo de semánticas.

Definición 2.19. *Una fórmula φ se dice que es **válida en un modelo** $\mathcal{M}$ para una lógica $\mathbf{L}$ si φ es válida en todos los puntos x en $\mathcal{M}$ y lo denotaremos por $\mathcal{M} \models_{\mathbf{L}} \varphi$.*

Dependiendo de la lógica que deseemos caracterizar se impondrán distintas condiciones sobre:

- Universo (W).
- Relación de accesibilidad (R).
- Valuación (v).
- Relación de modelado ($\models$).

Del mismo modo que se establecen condiciones diferentes para los modelos, dependiendo de la lógica en cuestión, la noción de validez de una fórmula será definida de modo diferente, dependiendo de la lógica.

Capítulo 3

Algunas lógicas básicas

En esta tesis trabajamos con varias lógicas por lo que es pertinente especificar los nombres que emplearemos para algunos sistemas a los cuales haremos referencia:

3.1. Lógica Positiva

La Lógica Positiva **Pos** es una lógica en el lenguaje $\mathcal{L}_+ = \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ y una axiomática para ella es $\langle\{\mathbf{Pos1}, \ldots, \mathbf{Pos8}\}, \{\mathbf{MP}\}\rangle$[1] donde:

Pos1 : $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

Pos2 : $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$

Pos3 : $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$

Pos4 : $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$

Pos5 : $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$

Pos6 : $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$

Pos7 : $\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$

Pos8 : $(\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \sigma))$

[1] Con el símbolo Λ_+ se denota al conjunto de fórmulas $\{\mathbf{Pos1}, \ldots, \mathbf{Pos8}\}$.

Dicho de otra manera, la Lógica Positiva consta de ocho esquemas de axioma y una única regla de inferencia **MP**. Esta regla de inferencia estará presente en todos los sistemas lógicos que se definen en el trabajo.

3.2. Lógica $\mathbf{C}_\omega$

La Lógica $\mathbf{C}_\omega$ es una lógica en el lenguaje $\mathcal{L}_0 = \{\wedge, \vee, \to, \neg\}$ y una axiomática para ella es $\langle \Lambda_0, \{\mathbf{MP}\}\rangle$, en la cual Λ_0 se define como el conjunto $\Lambda_+ \cup \{\mathbf{Cw1}, \mathbf{Cw2}\}$ donde:

Cw1 : $\varphi \vee \neg\varphi$

Cw2 : $\neg\neg\varphi \to \varphi$

Es importante subrayar que $(\varphi \vee \neg\varphi)$ es un teorema en $\mathbf{C}_\omega$. Sin embargo, $((\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi)$ no lo es. Este último hecho permite hablar de *inconsistencias locales* sin inferir cualquier fórmula a partir de una inconsistencia. Esto es una de las motivaciones para el estudio de las Lógicas Paraconsistentes. $\mathbf{C}_\omega$ no puede definirse mediante multivaluaciones finitas, no obstante, puede definirse mediante un **cálculo de secuentes**.

3.3. Lógica Int

La lógica Intuicionista fue desarrollada originalmente por Arend Heyting para proporcionar una base formal para el proyecto intuicionista de Brouwer. Desde la perspectiva de la teoría de la prueba, el cálculo de Heyting es una restricción de la Lógica Clásica en donde la ley del tercero excluso y la eliminación de la doble negación son eliminadas del sistema.

La Lógica Intuicionista **Int** es una lógica en el lenguaje $\{\perp, \wedge, \vee, \to, \sim\}$ denotado por $\mathcal{L}_c$ y una axiomática para ella es $\langle \Lambda_c, \{\mathbf{MP}\}\rangle$ en el cual Λ_c se define como el conjunto $\Lambda_0 \cup \{\mathbf{Int1}, \mathbf{Int2}\}$ donde:

Int1 : $(p \to q) \to ((p \to \sim q) \to \sim p)$

Int2 : $\sim p \to (p \to q)$

La negación se define como $\sim \varphi = \varphi \to \perp$.

3.3.1. Semántica de Kripke para Int

Comenzaremos por definir los modelos de Kripke para la Lógica Intuicionista.

Definición 3.1. *Un* ***modelo de Kripke para*** **Int** *es una estructura* $\langle W, R, v \rangle$*, donde:*

- W *es un conjunto no vacío de mundos*
- R *es una relación sobre los mundos que es reflexiva, transitiva y antisimétrica*
- v *es una función valuación de* $atom(\mathcal{L})$ *a* $\mathcal{P}(W)$*. De tal modo que dado un punto* w *en* W *tenemos que para cada átomo* p

  $$v_w(p) = \begin{cases} 1 & \textit{si } w \in v(p) \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

  y satisface la restricción de que para cada átomo p*:*

  $$\textit{si } wRw' \textit{ y } v_w(p) = 1 \textit{ entonces } v_{w'}(p) = 1.$$

Esta última restricción sobre las valuaciones se denomina **propiedad hereditaria**. Como podemos observar en la Proposición 2.1 en [13] la propiedad hereditaria se extiende a todas las fórmulas.

Definición 3.2. *Sean* $M = \langle W, R, v \rangle$ *un modelo de Kripke para* **Int**, $w \in W$ *y* φ *una fórmula. La* ***relación de modelado para*** **Int** *se define de la siguiente manera:*

- *Si* $\varphi := p$ *es átomo, de la Definición 2.18 tenemos que:*

  $$(\mathcal{M}, w) \models_{\mathbf{Int}} p \textit{ sii } w \in v(p)$$

- *si* φ *no es átomo, la relación de modelado se define recursivamente como:*

Sean φ, ψ *fórmulas y para todo mundo* $w \in W$*:*

1. $(M, w) \models_{\mathbf{Int}} \varphi \wedge \psi$ *si y sólo si* $(M, w) \models_{\mathbf{Int}} \varphi$ *y* $(M, w) \models_{\mathbf{Int}} \psi$,
2. $(M, w) \models_{\mathbf{Int}} \varphi \vee \psi$ *si y sólo si* $(M, w) \models_{\mathbf{Int}} \varphi$ *o* $(M, w) \models_{\mathbf{Int}} \psi$,
3. $(M, w) \models_{\mathbf{Int}} \varphi \to \psi$ *si y sólo si para todo* w' *tal que* wRw', *si* $(M, w') \models_{\mathbf{Int}} \varphi$ *entonces* $(M, w') \models_{\mathbf{Int}} \psi$,
4. $(M, w) \models_{\mathbf{Int}} \sim \varphi$ *si y sólo si para todo* w' *tal que* wRw', $(M, w') \not\models_{\mathbf{Int}} \varphi$.

3.4. Lógica $\mathbf{G_3}$

Esta lógica de tres valores fue definida por Gödel, quien definió una familia de lógicas multivaluadas, $\mathbf{G_i}$, con valores de verdad en el dominio $D = \{0, 1, \ldots, i-1\}$ y $D^* = \{i-1\}$ como conjunto de valores designados.

La matriz de la lógica $\mathbf{G_3}$ está dada por: $M = \langle D, D^*, F \rangle$ donde: el dominio es $D = \{0, 1, 2\}$ y el conjunto de valores designados es $D^* = \{2\}$ y el conjunto F de funciones de verdad para los conectivos $\wedge$, $\vee$, $\to$ y $\neg$ está formado por las funciones mostradas en la Tabla 3.1.

$f_\wedge$	**0**	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$f_\vee$	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$f_\to$	**0**	**1**	**2**
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$f_\neg$	
0	2
1	0
2	0

Tabla 3.1: Funciones de verdad de los conectivos $\wedge$, $\vee$, $\to$ y $\neg$ en $\mathbf{G_3}$

La lógica $\mathbf{G_3}$, también conocida como la lógica de *Aquí y Allá* es una lógica en el lenguaje $\mathcal{L}_\perp = \{\perp, \wedge, \vee, \to\}$ y una axiomática para ella es $\langle \Lambda_\perp, \{\mathbf{MP}\} \rangle$ en el cual $\Lambda_\perp$ se define como el conjunto $\Lambda_c \cup \{\mathbf{G3}\}$ donde:

$\mathbf{G3}$: $(\sim \varphi \to \psi) \to (((\psi \to \varphi) \to \psi) \to \psi)$

La negación se define como $\sim \varphi = \varphi \to \perp$ y la equivalencia se define como $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

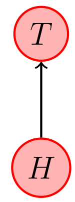

Figura 3.1: Modelo de Kripke para $\mathbf{G_3}$

3.4.1. Semántica de Kripke para $\mathbf{G_3}$

Es bien sabido que $\mathbf{G_3}$ es una extensión de **Int**, y la semántica de Kripke de ambos sistemas está relacionada, en efecto los modelos de Kripke para $\mathbf{G_3}$, es justamente un subconjunto de los modelos de Kripke para **Int**.

Definiremos ahora un modelo de Kripke para $\mathbf{G_3}$ de la manera siguiente.

Definición 3.3. *Un **modelo de Kripke para la lógica** $\mathrm{G_3}$ es un modelo de Kripke para* **Int**, *$M = \langle W, R, v\rangle$, con las restricciones siguientes:*

- *W es un conjunto de cardinalidad dos*
- *R es una relación de orden lineal*

Entonces un modelo de Kripke para $\mathbf{G_3}$ es una estructura como la que se muestra en la Figura 3.1.

3.5. Lógica daC

En [12] Castiglioni et al. presentan una axiomatización tipo Frege-Hilbert de la Lógica de da Costa **daC**, dicha axiomatización se utiliza para demostrar que la lógica tiene la *propiedad del modelo finito*. A continuación, se presenta un sistema de Hilbert restringido para **daC**.

Definición 3.4. *[24] El sistema de Hilbert restringido DC tiene como conjunto de axiomas a los esquemas de axioma de la lógica* **Pos** *agregando el esquema* **Cw1**. *Además de las siguientes reglas de inferencia:*

$$\frac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}\mathbf{MP} \qquad y \qquad \frac{\alpha \vee \beta}{\neg\alpha \to \beta}\boldsymbol{MG}$$

Teorema 3.5. *[24] El conjunto de teoremas de la lógica generada por la axiomática DC coincide con el conjunto de teoremas de la lógica* **daC**.

3.5.1. Semántica de Kripke para daC

En [33] Priest expone que una de las motivaciones de da Costa para construir la Lógica Paraconsistente $\mathbf{C}_\omega$ fue dualizar la negación de la Lógica Intuicionista. La Lógica Intuicionista es una lógica que permite *lagunas de valores de verdad*; por ejemplo, la Ley del Tercero Excluso falla. Debería ser posible construir una lógica de la misma forma, con excepción de que la negación se comporte de una forma dual de manera que la Ley de la No-Contradicción falle. La lógica $\mathbf{C}_\omega$ logra este cometido, aunque existan costos claros. Por ejemplo, la propiedad de sustitución en fórmulas equivalentes falla. Da Costa procede en una manera axiomática, preserva la parte positiva de intuicionismo y cambia los axiomas que involucran negación. Pero las diversas semánticas para Lógica Intuicionista sugieren otras maneras para conseguir los objetivos de da Costa. Muestra de ello es la Lógica Paraconsistente creada por Priest que surge al dualizar las condiciones de modelado para la negación en la semántica de Kripke para Intuicionismo. A este nuevo sistema se le denomina lógica de da Costa (**daC**), veamos la caracterización de esta lógica empleando modelos de tipo Kripke.

Definición 3.6. *Un* ***modelo de Kripke para la lógica daC*** *es una estructura $\langle \mathcal{W}, R, v\rangle$, en donde:*

- *W es un conjunto no vacío de mundos*
- *R es una relación sobre los mundos que es reflexiva y transitiva*
- *v es una función valuación de $atom(\mathcal{L})$ a $\mathcal{P}(W)$. De tal modo que dado un punto w en W tenemos que para cada átomo p*

$$v_w(p) = \begin{cases} 1 & si\ w \in v(p) \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

y satisface la restricción de que para cada átomo p:

$$si\ wRw'\ y\ v_w(p) = 1\ entonces\ v_{w'}(p) = 1.$$

Esta última restricción sobre las valuaciones se denomina propiedad hereditaria. Como podemos observar en [33] la propiedad hereditaria se extiende a todas las fórmulas.

En este caso la relación de modelado se define de la siguiente manera.

Definición 3.7. *Sean $M = \langle W, R, v\rangle$ un **modelo de Kripke** para **daC**, $w \in W$ y φ una fórmula.*

- *Si $\varphi := p$ es átomo, de la Definición 2.18 tenemos que:*

$$(\mathcal{M}, w) \models_{\mathbf{daC}} p \text{ sii } w \in v(p)$$

- *si φ no es átomo, la relación de modelado se define recursivamente como:*

Sean φ, ψ fórmulas y para todo mundo $w \in W$:

1. *$(M, w) \models_{\mathbf{daC}} \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $(M, w) \models_{\mathbf{daC}} \varphi$ y $(M, w) \models_{\mathbf{daC}} \psi$,*
2. *$(M, w) \models_{\mathbf{daC}} \varphi \vee \psi$ si y sólo si $(M, w) \models_{\mathbf{daC}} \varphi$ o $(M, w) \models_{\mathbf{daC}} \psi$,*
3. *$(M, w) \models_{\mathbf{daC}} \varphi \to \psi$ si y sólo si para todo w' tal que wRw', si*

   $(M, w') \models_{\mathbf{daC}} \varphi$ entonces $(M, w') \models_{\mathbf{daC}} \psi$,
4. *$(M, w) \models_{\mathbf{daC}} \neg\varphi$ si y sólo si existe w' tal que $w'Rw$, $(M, w') \models_{\mathbf{daC}} \varphi$.*

Como podemos observar en las definiciones de modelos de Kripke para **Int** y **daC**, la única diferencia se da en la condición de modelado para la negación, y una es el dual de la otra.

Capítulo 4

Lógica $\mathbf{G}_3'$

En [11] Carnielli y Marcos definen a $\mathbf{G_3'}$ como una herramienta para probar que $(\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi))$ no es un teorema de $\mathbf{C}_\omega$ (la más débil de las Lógicas Paraconsistentes definida por da Costa et. al [16]).

4.1. Semántica Multivaluada para $\mathbf{G}_3'$

La matriz de la lógica $\mathbf{G_3'}$ está dada por: $M = \langle D, D^*, F\rangle$ donde: el dominio es $D = \{0, 1, 2\}$ y el conjunto de valores designados es $D^* = \{2\}$ y el conjunto F de funciones de verdad para los conectivos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\neg$ está formado por las funciones mostradas en la Tabla 4.1.

$f_\wedge$	**0**	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$f_\vee$	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$f_\rightarrow$	**0**	**1**	**2**
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$f_\neg$	
0	2
1	2
2	0

Tabla 4.1: Funciones de verdad de los conectivos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\neg$ en $\mathbf{G_3'}$

4.2. Semántica de Kripke para $\mathbf{G}_3'$

En [17] Osorio et al. demuestran que la lógica $\mathbf{G_3'}$ es una extensión de la lógica **daC** por lo cual es natural considerar que los modelos de Kripke para

$\mathbf{G_3'}$ sean una subcolección de los modelos de Kripke para **daC**. Por otro lado, como hemos visto para el caso de $\mathbf{G_3}$ los modelos de Kripke son modelos de Kripke para la Lógica Intuicionista pero únicamente aquellos de cardinalidad dos con relación de tipo lineal. Combinando estas dos ideas tenemos ahora una semántica de Kripke para $\mathbf{G_3'}$.

Definición 4.1. *Un* ***modelo de Kripke para la lógica*** $\mathbf{G_3'}$ *es un modelo de Kripke para* **daC**, $M = \langle W, R, v \rangle$, *con las restricciones siguientes:*

- W *es un conjunto de cardinalidad dos.*
- R *es una relación de orden lineal.*

Observación 4.2. *La relación de modelado* $\models_{\mathbf{G_3'}}$ *queda entonces delimitada por las Definiciones 3.7 y 4.1.*

En analogía con la lógica $\mathbf{G_3}$, denominamos a los mundos en un modelo de Kripke para $\mathbf{G_3'}$ respectivamente como H (Here) y T (There).

Veamos ahora que en efecto el conjunto de tautologías de la lógica multivaluada $\mathbf{G_3'}$ corresponde con el conjunto de fórmulas validas de la clase de modelos de Kripke para $\mathbf{G_3'}$. Para ello tenemos la siguiente definición y proposición.

Definición 4.3. *Sea* $f : \mathcal{D} \to \mathcal{P}(W)$ *una función definida de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{lcl} f(0) & \to & \emptyset \\ f(1) & \to & \{T\} \\ f(2) & \to & \{H, T\} \end{array}$$

Observación 4.4. *La función* f *de la Definición 4.3 es una función biyectiva por lo cual existe su función inversa y esta es uno a uno.*

Proposición 4.5. *Existe una interpretación* t *tal que* $t(\varphi) = a$, *entonces existe una valuación* v *tal que* $v(\varphi) = f(a)$. *Y del mismo modo si existe una valuación* v *tal que* $v(\varphi) = b$, *entonces existe una interpretación* t *tal que* $t(\varphi) = f^{-1}(b)$.

Demostración. Ver Apéndice A. □

Teorema 4.6. *Sea φ una fórmula en el lenguaje de $\mathbf{G_3'}$, entonces $\Vdash_{\mathbf{G_3'}} \varphi$ si y sólo si para cualquier modelo de Kripke $\mathcal{M}$ para $\mathbf{G_3'}$ se tiene que $\mathcal{M} \models_{\mathbf{G_3'}} \varphi$.*

Demostración. Por contradicción empleando la Proposición 4.5. Dada una fórmula φ esta no es una tautología en $\mathbf{G_3'}$ si y sólo si existe un modelo en el cual la fórmula no es válida en todos los mundos. □

4.3. Sistema deductivo de tipo Hilbert para $\mathbf{G_3'}$

En esta sección se presenta un sistema deductivo tipo Hilbert para $\mathbf{G_3'}$ este sistema es presentado por M. Coniglio et al. en un trabajo aún inédito titulado *Some Remarks on logic G3'* [15].

Sea $\mathbf{G3_h'}$ una teoría axiomática formal para la lógica $\mathbf{G_3'}$ definida sobre el lenguaje $\Sigma = \{\bot, \wedge, \vee, \to, \neg\}$, además se definen otros conectivos, que son considerados como abreviaciones de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{rcll}
\sim\varphi & := & \varphi \to \bot & \text{(Negación intuicionista)} \\
\bullet\varphi & := & \sim\sim\varphi \wedge \neg\varphi & \text{(Operador de inconsistencia)} \\
\circ\varphi & := & \neg\bullet\varphi & \text{(Operador de consistencia)} \\
\varphi \leftrightarrow \psi & := & (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) & \text{(Equivalencia lógica)}
\end{array}
$$

Las tablas de verdad de los conectivos $\sim, \bullet$, $\circ$ y $\leftrightarrow$ pueden observarse en la Tabla 4.2, el conjunto de fórmulas bien formadas se construyen de la manera usual, y se denota mediante $Form(\mathcal{L})$.

	$\sim$	$\bullet$	$\circ$
0	2	0	2
1	0	2	0
2	0	0	2

$\leftrightarrow$	**0**	**1**	**2**
0	2	0	0
1	0	2	1
2	0	1	2

Tabla 4.2: Tablas de verdad de $\sim, \bullet, \circ$ y $\leftrightarrow$

Ahora se presenta el conjunto de esquemas de axioma y las reglas de inferencia para $\mathbf{G3'_h}$.

Esquemas de Axioma

Pos1 : $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

Pos2 : $(\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \gamma))$

Pos3 : $(\varphi \land \psi) \to \varphi$

Pos4 : $(\varphi \land \psi) \to \psi$

Pos5 : $\varphi \to (\psi \to (\varphi \land \psi))$

Pos6 : $\varphi \to (\varphi \lor \psi)$

Pos7 : $\psi \to (\varphi \lor \psi)$

Pos8 : $(\varphi \to \gamma) \to ((\psi \to \gamma) \to ((\varphi \lor \psi) \to \gamma))$

Cw1 : $\varphi \lor \neg\varphi$

Cw2 : $\neg\neg\varphi \to \varphi$

G3′-1: $\perp \to \varphi$

G3′-2: $\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \psi)$

G3′-3: $\neg \sim \varphi \to \sim\sim \varphi$

G3′-4: $\neg(\varphi \to \psi) \leftrightarrow ((\neg \sim \varphi \land \neg\psi) \land (\circ\varphi \lor \circ\psi))$

G3′-5: $\sim (\varphi \land \psi) \to (\sim \varphi \lor \sim \psi)$

Reglas de Inferencia

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\mathbf{MP}, \qquad \frac{\varphi \lor \psi \quad \neg\varphi \lor \psi}{\psi}\mathbf{exp}.$$

Decimos que φ es derivable de Γ en $\mathbf{G3'_h}$, denotado como $\Gamma \vdash_{\mathbf{G3'_h}} \varphi$, si existe una derivación de φ de Γ en $\mathbf{G3'_h}$.

Un resultado muy conocido afirma que en cualquier cálculo tipo Hilbert que satisface **Pos1** y **Pos2** y tal que **MP** es la única regla de inferencia entonces el *Teorema de la Deducción* se cumple [21]. En $\mathbf{G3'_h}$ se tienen dos reglas de inferencia, entonces el Teorema de la Deducción no se cumple en $\mathbf{G3'_h}$, pero se puede probar una versión restringida. Esta es la afirmación en la Proposición 4.7.

Proposición 4.7 (**Teorema de la Deducción Restringido**). *Suponga que* $\Gamma, \varphi \vdash \psi$*, tal que existe una derivación en* $\mathbf{G3'_h}$ *de la fórmula* ψ *de* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *que no usa la regla de inferencia* ***exp****, entonces* $\Gamma \vdash_{\mathbf{G3'_h}} \varphi \to \psi$.

A continuación, se enuncian algunos meta teoremas válidos en $\mathbf{G3'_h}$.

Teorema 4.8. *Sean* Γ, Δ *conjuntos de fórmulas y* φ, ψ *cualesquiera fórmulas, entonces las siguientes propiedades se cumplen en* $\mathbf{G3'_h}$.

Monotonía	*Si* $\Gamma \vdash_{\mathbf{G3'_h}} \varphi$ *entonces* $\Gamma \cup \Delta \vdash_{\mathbf{G3'_h}} \varphi$.
Corte	*Si* $\Gamma \vdash_{\mathbf{G3'_h}} \varphi$ *y* $\Delta, \varphi \vdash_{\mathbf{G3'_h}} \psi$ *entonces* $\Gamma \cup \Delta \vdash_{\mathbf{G3'_h}} \psi$.
R-AND	$\Gamma \vdash_{\mathbf{G3'_h}} \varphi \wedge \psi$ *si y sólo si* $\Gamma \vdash_{\mathbf{G3'_h}} \varphi$ *y* $\Gamma \vdash_{\mathbf{G3'_h}} \psi$.

Demostración.

Monotonía. Se sigue del hecho de que una deducción en $\mathbf{G3'_h}$ con Γ como hipótesis es también una deducción con $\Gamma \cup \Delta$ como hipótesis.

Corte. Se sigue del hecho de que una deducción de ψ con φ y Δ como hipótesis puede ser precedida con una deducción de φ con Γ como hipótesis para producir $\Gamma \cup \Delta \vdash_{\mathbf{G3'_h}} \psi$.

Rules-AND. La primera implicación se sigue de los axiomas **Pos3** y **Pos4**. La otra implicación se sigue del axioma **Pos5**.

$\square$

Proposición 4.9. *Para cualesquiera fórmulas* φ*,* ψ *y* γ *en* $Form(\mathcal{L})$*, la fórmula* $((\varphi \vee \gamma) \wedge ((\varphi \to \psi) \vee \gamma)) \to (\psi \vee \gamma)$ *es derivable en* $\mathbf{G3'_h}$.

Lema 4.10. *Sean p, p_1, p_2 variables proposicionales tales que p es diferente a p_1 y p_2. Entonces*

$$\frac{p_1 \vee p, (p_1 \to p_2) \vee p}{p_2 \vee p}\,\boldsymbol{MP*} \qquad y \qquad \frac{(p_1 \vee p_2) \vee p, (\neg p_1 \vee p_2) \vee p}{p_2 \vee p}\,\boldsymbol{exp*}$$

son derivables en $\mathbf{G3'_h}$.

Lema 4.11. *Sean $\Gamma \cup \{\varphi, \psi, \gamma\}$ un conjunto de fórmulas en $\mathbf{G3'_h}$ entonces la siguiente propiedad llamada* ***prueba por casos*** *se cumple en $\mathbf{G3'_h}$:*

$$\Gamma, \varphi \vdash_{\mathbf{G3'_h}} \gamma \text{ y } \Gamma, \neg\psi \vdash_{\mathbf{G3'_h}} \gamma \text{ si y sólo si } \Gamma \vdash_{\mathbf{G3'_h}} \gamma.$$

Lema 4.12. *Sean $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ un conjunto de fórmulas en $\mathbf{G3'_h}$ entonces la siguiente propiedad llamada* ***prueba fuerte por casos*** *se cumple en $\mathbf{G3'_h}$:*

$$\Gamma, \varphi \vdash_{\mathbf{G3'_h}} \psi \text{ y } \Gamma, \neg\varphi \vdash_{\mathbf{G3'_h}} \psi \text{ si y sólo si } \Gamma \vdash_{\mathbf{G3'_h}} \psi.$$

Lema 4.13. *Las siguientes fórmulas son teoremas en $\mathbf{G3'_h}$:*

(a) $\vdash \bot \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$

(b) $\vdash \sim \varphi \leftrightarrow (\varphi \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi))$

(c) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\sim \psi \to \sim \varphi)$

(d) $\vdash \sim (\varphi \vee \psi) \to (\sim \varphi \wedge \sim \psi)$

(e) $\vdash (\sim \varphi \wedge \sim \psi) \to \sim (\varphi \vee \psi)$

(f) $\vdash (\sim \neg\varphi \wedge \neg\varphi) \to \bot$

(g) $\vdash \sim \neg\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$

(h) $\vdash \sim\sim \varphi \to (\sim \psi \to \sim (\varphi \to \psi))$

(i) $\vdash \varphi \to (\sim \psi \to \sim (\varphi \to \psi))$

(j) $\vdash \sim \varphi \to (\varphi \to \psi)$

(k) $\vdash \sim \varphi \to \neg\varphi$

(l) $\vdash \sim (\psi \wedge \gamma) \leftrightarrow (\psi \to \sim \gamma)$ *y* $\vdash \sim (\psi \wedge \gamma) \leftrightarrow (\gamma \to \sim \psi)$

(m) $\vdash (\sim \varphi \vee \sim \psi) \to \sim (\varphi \wedge \psi)$

(n) $\vdash \sim (\varphi \to \psi) \to \sim (\varphi \wedge \psi)$

(ñ) $\vdash \sim (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sim \psi)$

Demostración. Ver Apéndice A. □

Proposición 4.14. *Si* $\varphi \vdash \bot$ *sin usar* ***exp****, entonces* $\vdash \neg\varphi$*.*

Demostración. Supongamos que existe una derivación en $\mathbf{G3'_h}$ de $\bot$ a partir de φ sin usar la regla de explosión. Entonces, por la Proposición 4.7 se sigue que $\vdash_{\mathbf{G3'_h}} \varphi \to \bot$. Esto último es $\vdash_{\mathbf{G3'_h}} \sim \varphi$. Finalmente, aplicando el Lema 4.13 (k) se tiene el resultado. □

El siguiente resultado es consecuencia de la Proposición 4.14, y del Teorema de la Deducción.

Corolario 4.15. *En* $\mathbf{G3'_h}$ *se cumple lo siguiente:*

(a) $\vdash \neg\bot$,

(b) $\vdash \circ\bot$

Demostración.

(a) Como $\bot \vdash \bot$ sin usar **exp**, entonces aplicando la Proposición 4.14 se tiene que $\vdash \neg\bot$.

(b) Como $\bot, \neg\bot \vdash \bot$ sin usar **exp** se sigue que $\bot \wedge \neg\bot \vdash \bot$ sin usar **exp**. Entonces $\vdash \sim (\bot \wedge \neg\bot)$ por el Meta-Teorema de la Deducción y la Definición de $\sim$. Esto es $\vdash \circ\bot$.

□

Proposición 4.16. *La regla de explosión con respecto a la negación* $\neg$

$$\frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\,(\textbf{\textit{R-exp}})$$

es derivable en $\mathbf{G3'_h}$.

4.3.1. Teoremas de Robustez y Completitud

En esta sección, se presenta la adecuación de $\mathbf{G3'_h}$ con respecto a la matriz semántica de $\mathbf{G3'}$. El primer resultado que se presenta es el Teorema de robustez de $\mathbf{G3'_h}$, este resultado relaciona aquellas fórmulas que son teoremas en $\mathbf{G3'_h}$ con las fórmulas que son tautologías en $\mathbf{G3'}$.

Teorema 4.17 (**Robustez de $\mathbf{G3'_h}$**). *Para cada $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form(\mathcal{L})$:*

$$\textit{si } \Gamma \vdash_{\mathbf{G3'_h}} \varphi \textit{ entonces } \Gamma \Vdash\!\!=_{\mathbf{G_3}'} \varphi.$$

Demostración. Cada esquema de axioma de $\mathbf{G3'_h}$ evalúa a 2, de acuerdo a las tablas de $\mathbf{G'_3}$, es decir, cada esquema de axioma es una tautología en $\mathbf{CG'_3}$. Resta ver que las reglas de inferencia **MP** y **exp** preservan tautologías. Primero, supongamos que ψ y $\psi \to \gamma$ son tautologías. Si γ toma el valor 0 para alguna tres-valuación. Como ψ es una tautología, debe tomar el valor 2. Por lo tanto, $\psi \to \gamma$ es forzada a tomar el valor 0 para esa valuación. Esto contradice la suposición que $\psi \to \gamma$ es una tautología. Entonces γ nunca toma el valor 0 y por lo tanto **MP** preserva validez.
Ahora supongamos que $(\varphi \vee \psi)$ y $(\neg\varphi \vee \psi)$ toman el valor de 2. Entonces ya sea que φ vale 2 o ψ vale 2 y por otro lado que $\neg\varphi$ tome el valor 2 o ψ tome el valor de 2. Si φ vale 2, entonces $\neg\varphi$ tiene un valor distinto a 2 y por lo tanto ψ vale 2 esto por la segunda condición. Ahora si φ toma un valor distinto a 2, entonces ψ vale 2, esto por la primera condición. En ambos casos se cumple que ψ vale 2 y por lo tanto **exp** preserva validez. □

Ahora para probar el teorema de completitud de $\mathbf{G3'_h}$ con respecto a $\mathbf{G3'}$, se necesitan algunas definiciones y resultados previos.

Definición 4.18. *Una lógica L es* ***Tarskiana****, si para cada conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \Delta \cup \{\alpha\} \subseteq Form(\mathcal{L})$, se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Si $\alpha \in \Gamma$ entonces $\Gamma \vdash \alpha$.*

2. *Si $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \subseteq \Delta$ entonces $\Delta \vdash \alpha$.*

3. *Si $\Delta \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \beta$ para cada $\beta \in \Delta$ entonces $\Gamma \vdash \alpha$.*
   Diremos que la lógica L, es finitaria si satisface la siguiente propiedad:

4. *Si $\Gamma \vdash \alpha$ entonces existe un subconjunto finito Γ_0 de Γ, tal que $\Gamma_0 \vdash \alpha$.*

Definición 4.19. *Sea L una lógica Tarskiana. Un conjunto de fórmulas* Γ *es* ***cerrado*** *en* $\mathcal{L}$ *si, para cada fórmula* ψ*:* $\Gamma \vdash \psi$ *si y sólo si* $\psi \in \Gamma$.

Definición 4.20. *Sea L una lógica Tarskiana y sea* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *un conjunto de fórmulas. Diremos que* Γ *es* φ*-**saturado*** *en* $\mathcal{L}$ *si,* $\Gamma \nvdash \varphi$ *pero* $\Gamma, \psi \vdash \varphi$ *para cualquier* $\psi \notin \Gamma$.

Teorema 4.21 (**Lindenbaum-Łos**)**.** *Sea L una lógica Tarskiana y finitaria sobre un lenguaje* $Form(\mathcal{L})$*. Sea* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form(\mathcal{L})$ *un conjunto de fórmulas tal que* $\Gamma \nvdash \varphi$*. Entonces, existe un conjunto de fórmulas* Δ *tal que* Δ *es* φ*-saturado en* $\mathcal{L}$ *y* $\Gamma \subseteq \Delta$.

$\mathbf{G3'_h}$ es una lógica Tarskiana y finitaria, ya que $\mathbf{G3'_h}$ está dada por un cálculo tipo Hilbert. Entonces, el Teorema 4.21 se puede aplicar. Por otro lado, las siguientes propiedades se cumplen:

Lema 4.22. *Sea* Δ *un conjunto* φ*-saturado en* $\mathbf{G3'_h}$*. Entonces para cualesquiera fórmulas* ψ *y* γ *en* $Form(\mathcal{L})$*,* Δ *satisface las siguientes propiedades:*

1. $\Delta \vdash_{\mathbf{G3'_h}} \psi$ *si y sólo si* $\psi \in \Delta$.
2. $(\psi \vee \gamma) \in \Delta$ *si y sólo si* $\psi \in \Delta$ *o* $\gamma \in \Delta$.
3. $(\psi \wedge \gamma) \in \Delta$ *si y sólo si* $\psi \in \Delta$ *y* $\gamma \in \Delta$.
4. $\psi \in \Delta$ *si y sólo si* $\neg\psi \notin \Delta$ *si y sólo si* $\neg\neg\psi \in \Delta$.
5. *Si* $\sim \psi \in \Delta$ *entonces* $\psi \notin \Delta$.
6. *Si* $\gamma \in \Delta$ *entonces* $\psi \to \gamma \in \Delta$.
7. $\sim (\gamma \wedge \psi) \in \Delta$ *si y sólo si* $(\sim \gamma \vee \sim \psi)$.
8. *Si* $\sim \psi \notin \Delta$ *entonces* $\sim\sim \psi \in \Delta$.
9. $\gamma \to \psi \in \Delta$ *si y sólo si* $(\sim \gamma \vee \psi) \vee (\bullet\gamma \wedge \bullet\psi) \in \Delta$.

Demostración. La prueba de los incisos 1, 2 y 3, puede verse en [10], se presenta ahora la demostración de los incisos restantes.

4. Supongamos que $\psi \in \Delta$. Si $\neg\psi \in \Delta$ entonces por **exp** se tiene que la fórmula $\varphi \in \Delta$, esto significa que $\Delta \vdash \varphi$, lo cual es una contradicción. Recíprocamente suponga que $\neg\psi \in \Delta$, entonces $\Delta, \neg\psi \vdash \varphi$, por otro lado, si $\psi \in \Delta$, entonces $\Delta, \psi \vdash \varphi$, finalmente aplicando **SPC** concluimos que $\Delta \vdash \varphi$, nuevamente tenemos una contradicción. La otra demostración es análoga usando el Axioma **G3′-2**.

5. Del Lema 4.13 (k) sabemos que la fórmula $\sim \psi \to \neg\psi \in \Delta$ si suponemos que $\sim \psi \in \Delta$ aplicando **MP** se tiene que $\neg\psi \in \Delta$ y por lo tanto $\psi \notin \Delta$.

6. Como $\psi \in \Delta$ y $\psi \to (\gamma \to \psi) \in \Delta$ por **MP** tenemos $\psi \to \gamma \in \Delta$.

7. Primero veremos que $(\sim \gamma \vee \sim \psi) \to \sim (\gamma \wedge \psi)) \in \Delta$. Por **Pos3** y **Pos4** sabemos que $(\gamma \wedge \psi) \to \gamma$ y $(\gamma \wedge \psi) \to \psi$, aplicándole a estas fórmulas el Lema 4.13 (c) y **MP** obtenemos que $\sim \gamma \to \sim (\gamma \wedge \psi)$ y $\sim \psi \to \sim (\gamma \wedge \psi)$. Finalmente aplicando **Pos8** y dos veces **MP** concluimos que $(\sim \gamma \vee \sim \psi) \to \sim (\gamma \wedge \psi)) \in \Delta$.

8. Supongamos que $\sim \psi \notin \Delta$ y aplicando el Lema 4.22 (4) se tiene que $\neg \sim \psi \in \Delta$. Luego por el axioma **G3′-3** sabemos que $\neg \sim \psi \to \sim\sim \psi$ y por una aplicación de **MP** concluimos que $\sim\sim \psi \in \Delta$.

9. Parte necesaria. Supongamos que $(\gamma \to \psi) \in \Delta$, luego por el Lema 4.22 (4), $\neg(\gamma \to \psi) \notin \Delta$, y del axioma **G3′-4** sabemos que $\neg(\gamma \to \psi) \leftrightarrow ((\neg \sim \gamma \wedge \neg\psi) \wedge (\circ\gamma \vee \circ\psi))$, entonces $((\neg \sim \gamma \wedge \neg\psi) \wedge (\circ\gamma \vee \circ\psi)) \notin \Delta$, esto último implica que $(\neg \sim \gamma \wedge \neg\psi) \notin \Delta$ o $(\circ\gamma \vee \circ\psi) \notin \Delta$. En el primer caso, si $(\neg \sim \gamma \wedge \neg\psi) \notin \Delta$, entonces $\neg \sim \gamma \notin \Delta$ o $\neg\psi \notin \Delta$. Luego $(\sim \gamma \vee \psi) \in \Delta$. Y finalmente, $(\sim \gamma \vee \psi) \vee (\bullet\gamma \wedge \bullet\psi) \in \Delta$. En el segundo caso, si $(\circ\gamma \vee \circ\psi) \notin \Delta$, entonces por Definición de $\circ$ tenemos que $(\neg \bullet \gamma \vee \neg \bullet \psi) \notin \Delta$. Luego $\bullet\gamma \in \Delta$ y $\bullet\psi \in \Delta$. Por lo tanto $(\bullet\gamma \wedge \bullet\psi) \in \Delta$ y por ende $(\sim \gamma \vee \psi) \vee (\bullet\gamma \wedge \bullet\psi) \in \Delta$.
   Parte suficiente. Supongamos que $(\sim \gamma \vee \psi) \vee (\bullet\gamma \wedge \bullet\psi) \in \Delta$, entonces tenemos dos situaciones $(\neg \sim \gamma \wedge \neg\psi) \notin \Delta$ o $(\circ\gamma \vee \circ\psi) \notin \Delta$.

   a) $(\neg \sim \gamma \wedge \neg\psi) \notin \Delta$ y observando el axioma **G3′-4** se tiene que $\neg(\gamma \to \psi) \notin \Delta$.

   b) $(\circ\gamma \vee \circ\psi) \notin \Delta$ y de igual manera por el axioma **G3′-4** se obtiene que $\neg(\gamma \to \psi) \notin \Delta$.

En ambos casos se llegó a la siguiente conclusión, $\neg(\gamma \to \psi) \notin \Delta$. Aplicando el Lema 4.22 (4) tenemos que $(\gamma \to \psi) \in \Delta$, como se quería probar.

$\square$

Lema 4.23 (**Lema de la verdad**). *Sea Δ es un conjunto φ-saturado en $\mathbf{G3'_h}$ y $h : Form(\mathcal{L}) \to V$ una $\mathbf{G_3'}$-valuación tal que, para cada átomo p*

$$h(p) = \begin{cases} 0 & sii \quad p \notin \Delta, \sim p \in \Delta \\ 1 & sii \quad p \notin \Delta, \sim p \notin \Delta \\ 2 & sii \quad p \in \Delta \end{cases}$$

Entonces para toda $\alpha \in Form(\mathcal{L})$ se cumple:

$$h(\alpha) = \begin{cases} 0 & sii \quad \alpha \notin \Delta, \sim \alpha \in \Delta \\ 1 & sii \quad \alpha \notin \Delta, \sim \alpha \notin \Delta \\ 2 & sii \quad \alpha \in \Delta \end{cases}$$

Demostración. Véase el Apéndice A. $\square$

Observe que en la tercera condición se tiene que: $\sim \alpha \notin \Delta$, pues en caso contrario $\sim \alpha = \alpha \to \bot \in \Delta$, además de la propia condición tres tenemos que $\alpha \in \Delta$, ahora por una aplicación de **MP** concluimos que $\bot \in \Delta$, lo cual no puede ocurrir.

Ahora se prueba que $\mathbf{G3'}$ es completa con respecto a $\mathbf{G3'_h}$.

Teorema 4.24 (**Completitud fuerte de $\mathbf{G3'_h}$**). *Sea $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{L}_\Sigma$ un conjunto de fórmulas.*

$$si\ \Gamma \Vdash_{\mathbf{G_3'}} \varphi \ entonces\ \Gamma \vdash_{\mathbf{G3'_h}} \varphi.$$

Demostración. Supongamos que $\Gamma \nvdash_{\mathbf{G3'_h}} \varphi$, usando el Teorema 4.21, existe un conjunto de fórmulas Δ tal que Δ es φ-saturado en $\mathbf{G3'_h}$ y $\Gamma \subseteq \Delta$. Por el Lema 4.23, existe h una $\mathbf{G_3'}$-valuación tal que $h[\Gamma] \subseteq \{2\}$, pero $h(\varphi) \in \{0, 1\}$ (pues $\varphi \notin \Delta$). Por lo tanto, $\Gamma \nvDash_{\mathbf{G3'}} \varphi$ y el teorema se cumple por contrarecíproca. $\square$

Capítulo 5

Lógica $\mathbf{CG}_3'$

5.1. Semántica Multivaluada para $\mathbf{CG}_3'$

La lógica $\mathbf{CG}_3'$ es una Lógica Paraconsistente cuyos valores de verdad están en el dominio $D = \{0, 1, 2\}$ y el conjunto de valores de verdad designados es $D^* = \{1, 2\}$. Las funciones de verdad de los conectivos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\neg$ se definen como en el caso de $\mathbf{G}_3'$ y las podemos encontrar en la Tabla 5.1.

$f_\wedge$	**0**	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$f_\vee$	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$f_\rightarrow$	**0**	**1**	**2**
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$f_\neg$	
0	2
1	2
2	0

Tabla 5.1: Funciones de verdad de los conectivos $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ y $\neg$ en $\mathbf{CG}_3'$

5.2. Semántica de Kripke para $\mathbf{CG}_3'$

Dada la estrecha relación entre $\mathbf{G}_3'$ y $\mathbf{CG}_3'$ es natural pensar que de existir una semántica tipo Kripke para esta última, tendrá que ser muy parecida a la de $\mathbf{G}_3'$. En realidad, podemos definir una semántica de tipo Kripke para $\mathbf{CG}_3'$ de dos formas distintas. La primera basándonos en la semántica de $\mathbf{G}_3'$ y la segunda redefiniendo la noción de validez como veremos a continuación.

5.2.1. Semántica basada en $\mathbf{G'_3}$

Definición 5.1. *Sean $M = \langle W, R, v\rangle$ un modelo de Kripke para $\mathbf{G'_3}$, $w \in W$ y φ una fórmula. Definimos la **relación de modelado** denotada por $\models_{\mathbf{CG'_3}}$ de la manera siguiente:*

$$(M, w) \models_{\mathbf{CG'_3}} \varphi \textit{ si y sólo si existe } wRw' \textit{ tal que } (M, w') \models_{\mathbf{G'_3}} \varphi.$$

Teorema 5.2 (**Monotonía**)**.** *Sean $M = \langle W, R, v\rangle$ un modelo de Kripke para $\mathbf{G'_3}$, $x, y \in W$ y φ una fórmula.*

$$\textit{Si } (M, x) \models_{\mathbf{CG'_3}} \varphi \textit{ y } xRy, \textit{ entonces } (M, y) \models_{\mathbf{CG'_3}} \varphi.$$

Demostración. Ver Apéndice B. □

El siguiente teorema establece una equivalencia entre la semántica multivaluada y la semántica de Kripke para $\mathbf{CG'_3}$.

Proposición 5.3. *Sean φ una fórmula en lenguaje de $\mathbf{CG'_3}$ tenemos que existe una interpretación $t : \mathcal{L} \to \{0, 1, 2\}$ tal que $t(\varphi) = 0$ si y sólo si existe un modelo de Kripke para $\mathbf{CG'_3}$ cuya valuación v es tal que $v(\varphi) = \emptyset$.*

Demostración. Ver Apéndice B. □

Teorema 5.4 ([8])**.** *Sea φ una fórmula en el lenguaje de $\mathbf{CG'_3}$, entonces:*

$$|\!\models_{\mathbf{CG'_3}} \varphi \textit{ si y sólo si para cualquier modelo de Kripke para } \mathbf{CG'_3} \textit{ se tiene que } M \models_{\mathbf{CG'_3}} \varphi.$$

Demostración. Análogo al Teorema 4.5 empleando la Proposición 5.3. □

5.2.2. Semántica cambiando la noción de validez

Una manera alternativa de definir la relación de modelado para $\mathbf{CG'_3}$ es considerar que los modelos para $\mathbf{CG'_3}$ son aquellos para $\mathbf{G'_3}$ pero cambiando la Definición 2.19 por la siguiente.

Definición 5.5 ([8])**.** *Una fórmula φ se dice que es e-**válida**[1] en un modelo $\mathcal{M}$ para la lógica $\mathbf{CG'_3}$ si existe un punto x en $\mathcal{M}$ tal que $(\mathcal{M}, x) \models_{\mathbf{G'_3}} \varphi$.*

[1] El uso de la letra e en e-válida es para remarcar que la caracterización de la validez depende de un cuantificador existencial y para distinguirla de la noción de validez en la Definición 2.19

Lema 5.6 ([8])**.** *Sea φ una fórmula en el lenguaje de $\mathbf{CG}'_3$, entonces:*

$\Vdash_{\mathbf{CG}'_3} \varphi$ *si y sólo si para cualquier modelo de Kripke $\mathcal{M}$ para $\mathbf{CG}'_3$ se cumple que φ es e-válida.*

5.3. Sistema deductivo de tipo Hilbert para $\mathbf{CG}'_3$

En esta sección se presenta un sistema deductivo tipo Hilbert para $\mathbf{CG}'_3$ este sistema es presentado por M. Pérez-Gaspar et al. en un trabajo en proceso de revisión titulado *An axiomatic approach to CG'_3 logic* [32].

Sea $\mathbb{L}$ una teoría axiomática formal para la lógica $\mathbf{CG}'_3$ definida sobre el lenguaje $\Sigma = \{\wedge, \rightarrow, \neg\}$, además se definen otros conectivos, que son considerados como abreviaciones de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcll} \sim\varphi & := & \varphi \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi) & \text{(Negación fuerte)} \\ \nabla\varphi & := & \sim\sim\varphi \wedge \neg\varphi & \text{(Oper. inconsistencia)} \\ \varphi \vee \psi & := & ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \wedge ((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi) & \text{(Disyunción lógica)} \\ \varphi \leftrightarrow \psi & := & (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) & \text{(Equivalencia lógica)} \end{array}$$

Las tablas de verdad de los conectivos $\sim, \nabla, \vee$ y $\leftrightarrow$ pueden observarse en la Tabla 5.2, el conjunto de fórmulas bien formadas se construye de la manera usual, y se denota mediante $Form(\mathcal{L})$.

	$\sim$	∇
0	2	0
1	0	2
2	0	0

$\vee$	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\leftrightarrow$	**0**	**1**	**2**
0	2	0	0
1	0	2	1
2	0	1	2

Tabla 5.2: Tablas de verdad de $\sim, \nabla, \vee$ y $\leftrightarrow$

Ahora se presenta el conjunto de esquemas de axioma y las reglas de inferencia para $\mathbb{L}$.

Esquemas de Axioma

Pos1 : $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

Pos2 : $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$

Pos3 : $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$

Pos4 : $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$

Pos5 : $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$

Cw1 : $\varphi \vee \neg\varphi$

CG-1: $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$

CG-2: $\neg\neg(\varphi \to \psi) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \wedge (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi))$

CG-3: $\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)$

CG-4: $\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \psi)$

Reglas de Inferencia

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\mathbf{MP}$$

Decimos que φ es derivable de Γ en $\mathbb{L}$, denotado como $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}} \varphi$, si existe una derivación de φ de Γ en $\mathbb{L}$.

Como se puede observar, la lista de axiomas dada anteriormente contiene únicamente los cinco primeros axiomas del fragmento positivo de la Lógica Intuicionista, además de **Cw1**, **CG-1**, **CG-2**, **CG-3** y el axioma **CG-4**. El siguiente teorema muestra algunos de los meta-teoremas de la teoría formal $\mathbb{L}$.

Teorema 5.7. *Sean Γ, Δ conjuntos de fórmulas, y sean φ, ψ fórmulas arbitrarias, entonces las siguientes propiedades se cumplen en $\mathbb{L}$.*

Monotonía	*Si $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}} \varphi$ entonces $\Gamma \cup \Delta \vdash_{\mathbb{L}} \varphi$.*
Teo. de la Deducción	*$\Gamma, \varphi \vdash_{\mathbb{L}} \psi$ si y sólo si $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}} \varphi \to \psi$.*
Corte	*Si $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}} \varphi$ y $\Delta, \varphi \vdash_{\mathbb{L}} \psi$ entonces $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$.*
Reglas-AND	*$\Gamma \vdash_{\mathbb{L}} \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}} \varphi$ y $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}} \psi$.*

Demostración. La demostración de Monotonía, Corte y Reglas-AND, se sigue de manera similar a la demostración hecha en el caso de $\mathbf{CG'3_h}$ (véase Teorema 4.8). A continuación, se analiza la propiedad restante.

Teorema de la Deducción. Como se tienen los axiomas **Pos1**, **Pos2** y **MP** como la única regla de inferencia, entonces es verdad que si $\Gamma, \varphi \vdash_{\mathbb{L}} \psi$ entonces $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}} \varphi \to \psi$. El recíproco se obtiene aplicando Monotonía y **MP** a $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}} \varphi \to \psi$.

□

Lema 5.8. *Para cualesquiera fórmulas φ, ψ, σ y ξ, las siguientes fórmulas son teoremas en $\mathbb{L}$.*

(a) $\vdash \varphi \to \varphi$

(b) $\varphi \to \psi,\ \psi \to \sigma \vdash \varphi \to \sigma$

(c) $\varphi \to \psi,\ \sigma \to \xi \vdash (\varphi \wedge \sigma) \to (\psi \wedge \xi)$

(d) $\vdash (\varphi \to (\psi \to \gamma)) \to ((\varphi \wedge \psi) \to \gamma)$

(e) $\varphi \to (\psi \to \gamma) \vdash \psi \to (\varphi \to \gamma)$

(f) $\vdash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$

(g) $\vdash \varphi \to \Big((\varphi \to \psi) \to \psi\Big)$

(h) $\varphi \to \sigma, (\varphi \to \psi) \to \sigma, \sigma \to \psi \vdash \sigma$

Demostración. Cada inciso puede ser demostrado usando **Pos1**-**Pos5**, **MP** y Teorema de la Deducción. □

Vale la pena mencionar que en la lista de esquemas de axioma de $\mathbb{L}$ no se incluyen todos los axiomas de fragmento positivo de lógica Intuicionista, sin embargo, se pueden derivar de esta lista, así como de otros esquemas de axioma bien conocidos algunos de ellos se muestran en el siguiente lema, su prueba se puede encontrar en el Apéndice A.

Lema 5.9. *Las siguientes fórmulas son teoremas en $\mathbb{L}$.*

Pos6 :	$\varphi \to (\varphi \vee \psi)$
Pos7 :	$\psi \to (\varphi \vee \psi)$
Pos8 :	$(\varphi \to \sigma) \to \Big((\psi \to \sigma) \to (\varphi \vee \psi \to \sigma)\Big)$
Cw2 :	$\neg\neg\varphi \to \varphi$
CG′3 :	$\nabla\varphi \to \varphi$
E1:	$(\neg\varphi \to \neg\psi) \leftrightarrow (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi)$
ON :	$\neg\varphi \leftrightarrow \neg\neg\neg\varphi$

La importancia de la fórmula **CG′3** puede verse a lo largo de la prueba del teorema 5.19.

Teorema 5.10. *Sea Γ un conjunto de fórmulas y sean φ, ψ fórmulas arbitrarias, entonces la siguiente propiedad, **prueba fuerte por casos**, se cumple en $\mathbb{L}$.*

$$\Gamma, \varphi \vdash_{\mathbb{L}} \psi \text{ y } \Gamma, \neg\varphi \vdash_{\mathbb{L}} \psi \text{ si y sólo si } \Gamma \vdash_{\mathbb{L}} \psi.$$

Demostración. Supongamos que $\Gamma, \varphi \vdash_{\mathbb{L}} \psi$ y $\Gamma, \neg\varphi \vdash_{\mathbb{L}} \psi$. Usando Teorema de la Deducción tenemos que $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}} \varphi \to \psi$ y $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}} \neg\varphi \to \psi$, entonces aplicando **Pos8** obtenemos $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}} (\varphi \vee \neg\varphi) \to \psi$. Finalmente por el esquema de axioma **Cw1** y **MP**, tenemos que $\Gamma \vdash_{\mathbb{L}} \psi$, como es requerido. □

5.3.1. Teorema de Robustez y Completitud

Ahora se prueba que $\mathbf{CG'_3}$ es robusta con respecto a $\mathbb{L}$, es decir, los teoremas en $\mathbb{L}$ son tautologías en $\mathbf{CG'_3}$.

Teorema 5.11 (**Robustez de** $\mathbb{L}$)**.** *Sea φ una fórmula. Si φ es un teorema en $\mathbb{L}$ entonces φ es una tautología en $\mathbf{CG'_3}$, es decir, si $\vdash_{\mathbb{L}} \varphi$ entonces $\models_{\mathbf{CG'_3}} \varphi$.*

Demostración. Cada esquema de axioma de $\mathbb{L}$ evalúa a 1 o 2, de acuerdo a las tablas de $\mathbf{CG'_3}$, es decir, cada esquema de axioma es una tautología en $\mathbf{CG'_3}$. Resta ver que **MP** preserva tautologías. Supongamos que ψ y $\psi \to \gamma$ son tautologías. Si γ toma el valor 0 para alguna tres-valuación. Como ψ es una tautología, debe tomar el valor 1 o 2. Por lo tanto, $\psi \to \gamma$ es forzada a tomar el valor 0 para esa valuación. Esto contradice la suposición que $\psi \to \gamma$ es una tautología. Entonces γ nunca toma el valor 0. □

Para demostrar el Lema 5.16, que es esencial para demostrar el teorema de completitud se necesita el Lema 5.14, cuyas pruebas necesitan algunos resultados adicionales, a saber, Proposición 5.12 y Lema 5.13.

Proposición 5.12. *Para cualesquiera fórmulas φ, ψ, las siguientes fórmulas son teoremas en $\mathbb{L}$.*

(a) $\vdash \sim \varphi \to (\varphi \to \psi)$

(b) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \sim \psi) \to (\varphi \to (\neg\psi \wedge \neg\neg\psi)))$

(c) $\vdash (\neg\psi \wedge \neg\neg\psi) \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$

(d) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \sim \psi) \to \sim \varphi)$

(e) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\sim \psi \to \sim \varphi)$

(f) $\vdash \sim\sim \psi \to (\sim \varphi \to ((\psi \to \varphi) \to (\sim \psi \wedge \sim\sim \psi)))$

(g) $\vdash (\sim \psi \wedge \sim\sim \psi) \to (\neg(\psi \to \varphi) \wedge \neg\neg(\psi \to \varphi))$

(h) $\vdash (\sim\sim \psi \wedge \sim \varphi) \to \sim (\psi \to \varphi)$

(i) $\vdash \sim\sim \varphi \to \sim\sim (\psi \to \varphi)$

(j) $\vdash \varphi \to \sim\sim \varphi$

(k) $\vdash \psi \to (\sim \varphi \to \sim (\psi \to \varphi))$

(l) $\vdash \sim\sim \varphi \to \varphi$

(m) $\vdash (\sim\sim \varphi \wedge \sim\sim \psi) \to \sim\sim (\varphi \wedge \psi)$

Lema 5.13. *Las siguientes fórmulas son teoremas en $\mathbb{L}$.*

(a) $\vdash \sim \varphi \to \neg\varphi$

(b) $\vdash \sim \neg\varphi \to \sim\sim \varphi$

(c) $\vdash \neg\neg\varphi \to \sim \neg\varphi$

(d) $\vdash \neg\neg\varphi \to \sim\sim \varphi$

(e) $\vdash \sim \varphi \to \neg\neg \sim \varphi$

(f) $\vdash \neg \sim \varphi \to \sim\sim \varphi$

(g) $\vdash \sim \varphi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)$

(h) $\vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\neg\varphi$

(i) $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$

(j) $\vdash (\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \to \sim\sim (\varphi \wedge \psi)$

(k) $\vdash (\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$

(l) $\vdash (\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi) \to \sim\sim (\varphi \to \psi)$

(m) $\vdash (\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi) \to (\neg\neg(\varphi \to \psi) \to \neg\neg\psi)$

(n) $\vdash (\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi) \to \neg(\varphi \to \psi)$

(ñ) $\vdash (\nabla\varphi \wedge \neg\neg\psi) \to \sim\sim (\varphi \wedge \psi)$

(o) $\vdash (\nabla\varphi \wedge \neg\neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$

Lema 5.14. *Las siguientes fórmulas son teoremas en $\mathbb{L}$.*

(a) $\vdash \neg\neg\varphi \to \sim \neg\varphi$

(b) $\vdash \nabla\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$

(c) $\vdash \sim \varphi \to \neg\neg\neg\varphi$

(d) $\vdash \sim \varphi \to \neg\neg(\varphi \to \psi)$

(e) $\vdash \neg\neg\psi \to \neg\neg(\varphi \to \psi)$

(f) $\vdash (\nabla\varphi \wedge \sim \psi) \to \sim (\varphi \to \psi)$

(g) $\vdash (\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \to \neg\neg(\varphi \to \psi)$

(h) $\vdash (\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi) \to \nabla(\varphi \to \psi)$

(i) $\vdash (\neg\neg\varphi \wedge \sim \psi) \to \sim (\varphi \to \psi)$

(j) $\vdash \sim \varphi \to \sim (\varphi \wedge \psi)$

(k) $\vdash (\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \to \nabla(\varphi \wedge \psi)$

(l) $\vdash (\nabla\varphi \wedge \neg\neg\psi) \rightarrow \nabla(\varphi \wedge \psi)$

Ahora se prueba que $\mathbf{CG}'_3$ es completa con respecto a $\mathbb{L}$. Para probar que cada tautología en $\mathbf{CG}'_3$ es un teorema en $\mathbb{L}$ se sigue la estrategia de la prueba de completitud utilizada para la Lógica Proposicional Clásica dada en [21] originalmente debido a Kalmar.

Definición 5.15. *Dada una tres-valuación v de $\mathbf{CG}'_3$ y una fórmula φ, se define la fórmula φ_v llamada la **imagen de** φ, como sigue:*

$$\varphi_v = \begin{cases} \neg\neg\varphi & si \;\; v(\varphi) = 2 \\ \nabla\varphi & si \;\; v(\varphi) = 1 \\ \sim\varphi & si \;\; v(\varphi) = 0 \end{cases}$$

Sea Φ un conjunto de fórmulas con Φ_v se denota al conjunto $\{\varphi_v | \varphi \in \Phi\}$.

Lema 5.16 (**Lema de Kalmar**). *Dada una fórmula φ y v una tres-valuación en $\mathbf{CG}'_3$, si $Atoms(\varphi)$ denota el conjunto de fórmulas en φ, entonces $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$.*

Demostración. Véase Apéndice B. □

El siguiente Lema resume algunos resultados importantes relacionados con los conectivos $\neg$ y $\sim$.

Lema 5.17. *Las siguientes fórmulas son teoremas en $\mathbb{L}$:*

(a) $\vdash \sim\varphi \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\neg\varphi)$

(b) $\vdash \neg\neg \sim\varphi \rightarrow \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$

(c) $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\neg\varphi)$

(d) $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$

(e) $\vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow \neg \sim\varphi$

(f) $\vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow \sim\sim\varphi$

(g) $\vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi$

(h) $\vdash (\neg\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)) \rightarrow \sim\varphi$

Demostración. Ver prueba en el Apéndice B. $\square$

Sólo se necesita un lema más para dar la prueba de completitud, este lema permite eliminar hipótesis una vez que se muestra que ellas son independientes de la derivación.

Lema 5.18. *Sean φ, ψ fórmulas y Γ un conjunto de fórmulas. Si $\Gamma, \neg\neg\varphi \vdash \psi$; $\Gamma, \nabla\varphi \vdash \psi$ y $\Gamma, \sim \varphi \vdash \psi$; entonces $\Gamma \vdash \psi$.*

Demostración. Aplicando el Teorema de la Deducción a $\vdash (\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$ tenemos que, $\varphi \to \neg\neg\varphi, \varphi \vdash \neg\neg\varphi$. Mediante **Corte** a esta última fórmula y la hipótesis $\Gamma, \neg\neg\varphi \vdash \psi$, obtenemos $\Gamma, (\varphi \to \neg\neg\varphi), \varphi \vdash \psi$. Por otro lado, del inciso h) del Lema 5.17, tenemos $\vdash (\neg\varphi \wedge (\varphi \to \neg\neg\varphi)) \to\sim \varphi$, ahora empleando el Lema 5.8, se deriva $\vdash (\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to\sim \varphi)$, y por el Teorema de la Deducción se obtiene $(\varphi \to \neg\neg\varphi), \neg\varphi \vdash\sim \varphi$, porque de esta fórmula y la hipótesis $\Gamma, \sim \varphi \vdash \psi$ usando **Corte**, se concluye que $\Gamma, (\varphi \to \neg\neg\varphi), \neg\varphi \vdash \psi$. En este momento, hemos demostrado: $\Gamma, (\varphi \to \neg\neg\varphi), \varphi \vdash \psi$ y $\Gamma, (\varphi \to \neg\neg\varphi), \neg\varphi \vdash \psi$, entonces aplicando Prueba Fuerte por Casos, se deriva $\Gamma, (\varphi \to \neg\neg\varphi) \vdash \psi$.

Por otro lado, aplicando Reglas-AND al inciso f) y g) del Lema 5.17, se obtiene $\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi) \vdash (\sim\sim \varphi \wedge \neg\varphi)$, equivalentemente, debido a la abreviatura de ∇, $\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi) \vdash \nabla\varphi$, entonces aplicando **Corte** a esta fórmula y la hipótesis $\Gamma, \nabla\varphi \vdash \psi$, se concluye que $\Gamma, \neg(\varphi \to \neg\neg\varphi) \vdash \psi$.

Por lo tanto, aplicando Prueba Fuerte por Casos a $\Gamma, (\varphi \to \neg\neg\varphi) \vdash \psi$ y $\Gamma, \neg(\varphi \to \neg\neg\varphi) \vdash \psi$ se concluye que $\Gamma \vdash \psi$. $\square$

Finalmente se tiene uno de los principales resultados de este capítulo. La demostración es consecuencia del Lema 5.16, Lema 5.18 y el Teorema 5.7.

Teorema 5.19 (**Completitud débil de $\mathbb{L}$**)**.** *Sea φ una fórmula. Si φ es una tautología en $\mathbf{CG'_3}$, entonces φ es un teorema en $\mathbb{L}$, es decir, si $\models_{\mathbf{CG'_3}} \varphi$ entonces $\vdash_{\mathbb{L}} \varphi$.*

Demostración. Suponga que φ es una tautología cuyo conjunto de fórmulas atómicas es Φ. Del Lema 5.16, se tiene que $\Phi_v \vdash \varphi_v$ para cada tres-valuación v. Entonces se tiene dos casos.

Caso 1: si $v(\varphi) = 2$, entonces $\Phi_v \vdash \neg\neg\varphi$.
Caso 2: si $v(\varphi) = 1$, entonces $\Phi_v \vdash \nabla\varphi$.

En el caso $\Phi_v \vdash \neg\neg\varphi$, por el axioma **Cw2** y Modus Ponens se tiene que $\Phi_v \vdash \varphi$. Sea p cualquier fórmula atómica en Φ y sea $\Gamma := \Phi \setminus \{p\}$, entonces se tiene que, $\Gamma_v, p_v \vdash \varphi$ para cualquier v valuación. Por lo tanto, se tiene que: $\Gamma_v, \neg\neg p \vdash \varphi$, $\Gamma_v, \nabla p \vdash \varphi$ y $\Gamma_v, \sim p \vdash \varphi$. Por el Lema 5.18 se tiene que $\Gamma_v \vdash \varphi$. Después de $|\Phi|$ pasos, finalmente se obtiene que $\vdash \varphi$.

En el caso $\Phi_v \vdash \nabla\varphi$, por la fórmula **CG′3** y Modus Ponens se tiene que $\Phi_v \vdash \varphi$. Sea p cualquier fórmula atómica en Φ y sea $\Gamma := \Phi \setminus \{p\}$, entonces se tiene que, $\Gamma_v, p_v \vdash \varphi$ para cualquier v valuación. Por lo tanto, se tiene que: $\Gamma_v, \neg\neg p \vdash \varphi$, $\Gamma_v, \nabla p \vdash \varphi$ y $\Gamma_v, \sim p \vdash \varphi$. Por el Lema 5.18 se tiene que $\Gamma_v \vdash \varphi$. Después de $|\Phi|$ pasos, finalmente se obtiene que $\vdash \varphi$. □

5.3.2. Teorema de Substitución

Vale la pena mencionar que el símbolo $\leftrightarrow$ no define una relación de congruencia entre fórmulas en $\mathbf{CG}'_3$. De hecho, es suficiente considerar que la fórmula $(p \to p) \leftrightarrow (p \vee \sim p)$ es un teorema; pero $\neg(p \to p) \leftrightarrow \neg(p \vee \sim p)$ no lo es. Siguiendo un tratamiento similar al propuesto en [2], puede definirse una noción fuerte de equivalencia, un nuevo conectivo $\Leftrightarrow$ como sigue. Escribimos $\varphi \Leftrightarrow \psi$ para denotar a la fórmula: $(\varphi \leftrightarrow \psi) \wedge (\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$.

Se puede verificar que $\varphi \leftrightarrow \psi$ es una tautología si y sólo si para cada valuación v uno de los siguientes casos es verificado; $v(\varphi) = v(\psi)$; $v(\varphi) = 2$ y $v(\psi) = 1$; $v(\varphi) = 2$ y $v(\psi) = 2$. Por otro lado, $\varphi \Leftrightarrow \psi$ es una tautología si y sólo si para cada valuación v, $v(\varphi) = v(\psi)$. Véase Tabla 5.3.

$\leftrightarrow$	**0**	**1**	**2**
0	2	0	0
1	0	2	1
2	0	1	2

$\Leftrightarrow$	**0**	**1**	**2**
0	2	0	0
1	0	2	0
2	0	0	2

Tabla 5.3: Tablas de verdad de la bicondicional en $\mathbf{CG}'_3$

Definición 5.20. *Para un par de fórmulas θ, φ y un átomo p, escribimos $\theta[\varphi/p]$ para representar la fórmula obtenida por reemplazar cada ocurrencia del átomo p en θ por la fórmula φ.*

Teorema 5.21 (**Teorema básico de Substitución**). *Sean φ, ψ, θ fórmulas y q un átomo q. Si $\varphi \Leftrightarrow \psi$ es una tautología, entonces $\theta[\varphi/q] \leftrightarrow \theta[\psi/q]$ es una tautología.*

Demostración. Si $\varphi \Leftrightarrow \psi$ es una tautología entonces para cada v, una $\mathbf{CG'_3}$-valuación, $v(\varphi) = v(\psi)$. Por lo tanto, $v(\theta[\varphi/q]) = v(\theta[\psi/q])$ así, $\theta[\varphi/q] \leftrightarrow \theta[\psi/q]$ es una tautología. □

Definición 5.22. *Sea φ una fórmula en el conjunto Γ y supongamos que damos una deducción $\psi_1, \ldots, \psi_n$ de Γ, junto con la justificación para cada paso en la deducción. Decimos que $\psi_\mathbf{i}$ **depende de** φ en esta prueba si y sólo si:*

1. *ψ_i es φ y la justificación para ψ_i es que pertenece a Γ, o*

2. *ψ_i está justificada como una consecuencia directa por **MP** de algunas fórmulas precedentes de la sucesión, donde al menos una de estas fórmulas precedentes depende de φ.*

Proposición 5.23. *Si la fórmula ψ no depende de φ en $\Gamma, \varphi \vdash_{\mathbf{CG'_3}} \psi$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathbf{CG'_3}} \psi$*

Demostración. La demostración es similar al proceso propuesto en [21]. □

Lema 5.24 (**Substitución**). *Sean φ_1 y φ_2 dos fórmulas en $\mathbf{CG'_3}$, tales que $\vdash_{\mathbf{CG'_3}} \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$, y tales que esta derivación no depende de $\nabla\varphi \to \varphi$. Sean θ una fórmula y p un átomo. Entonces $\vdash_{\mathbf{CG'_3}} \theta[\varphi_1/p] \leftrightarrow \theta[\varphi_2/p]$.*

Demostración. La prueba es similar a la propuesta en [25]. □

5.4. Comparaciones de $\mathbf{CG'_3}$ con otras lógicas

Vamos a comparar ahora $\mathbf{CG'_3}$ con otras lógicas. En este punto del análisis estamos en posición de tratar teoremas y tautologías en $\mathbf{CG'_3}$ de igual manera. Como se mencionó anteriormente, cualquier tautología en $\mathbf{G'_3}$ es una tautología en $\mathbf{CG'_3}$, por lo tanto, cualquier teorema en $\mathbf{G'_3}$ es un teorema en $\mathbf{CG'_3}$. Además de esto, tenemos que la fórmula:

$$(\varphi \to \sigma) \to (((\varphi \to \psi) \to \sigma) \to \sigma)$$

es un teorema en $\mathbf{CG_3'}$. Sin embargo, esta fórmula no es un teorema en $\mathbf{G_3'}$. Es un resultado notable, ya que confirma que $\mathbf{CG_3'}$ es una extensión propia de $\mathbf{G_3'}$.

Por otro lado, es bien sabido que, en algunas lógicas, como la lógica $\mathbb{Z}$, desarrollada por Béziau en [5]; en la lógica **daC** de da Costa y en la lógica $\mathbf{G_3'}$, la propiedad $\neg\neg$-necessitation se verificada, para más detalles véase [17]. Esta propiedad establece que, si φ es un teorema en la lógica X, entonces también $\neg\neg\varphi$ debe ser un teorema en X. Esta propiedad, sin embargo, no es verifica en $\mathbf{CG_3'}$, para ver esto basta con considerar a la fórmula $p \vee \sim p$, que es un teorema en $\mathbf{CG_3'}$, sin embargo, su doble negación $\neg\neg(p \vee \sim p)$ no lo es.

Otra fórmula importante es una de las leyes de De Morgan, a saber, la fórmula $(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \vee \psi)$, que es un teorema en $\mathbf{CG_3'}$ pero no es un teorema en $\mathbb{Z}$. Como un simple corolario de estos ejemplos se tiene que:

Corolario 5.25. $\mathbf{CG_3'}$ *y* $\mathbb{Z}$ *son incomparables.*

En la Figura 5.1 se presentan algunas lógicas relacionadas con $\mathbf{CG_3'}$, las flechas en la figura significan contención. $\mathbf{PH_1}$ es equivalente a S e $\mathbf{IPC}^{\sim}$. L_5 es equivalente a TCC_ω. Estas lógicas: S, $\mathbf{IPC}^{\sim}$ y TCC_ω se puede ver en [26]. $\mathcal{P}$-$\mathcal{FOUR}$ es una lógica 4-valuada y está definida en [27] y se estudia con más detalle en [28]. $\mathbf{daC}'$ se define debilitando una regla de inferencia satisfecha por la lógica **daC**. $\mathbb{Z}1$ y $\mathcal{P}$-$\mathcal{FOUR}'$ son extensiones de $\mathbb{Z}$. Estas lógicas $\mathbf{daC}'$, $\mathbb{Z}1$ y $\mathcal{P}$-$\mathcal{FOUR}'$ se puede ver en [30].

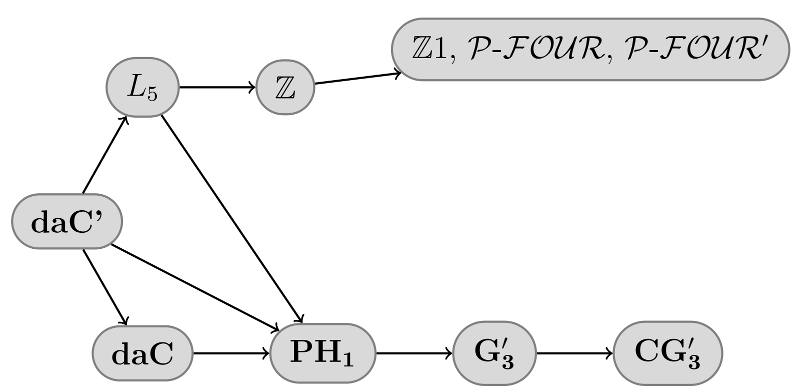

Figura 5.1: Relaciones entre lógicas cercanas a $\mathbf{CG_3'}$

Veamos ahora que la lógica de tres valores Ł3 de Łukasiewicz y $\mathbf{CG'_3}$ tienen el mismo poder expresivo. Para construir la lógica tres-valuada Ł3 de Łukasiewicz considérese un lenguaje proposicional $\mathcal{L}$, un conjunto numerable de fórmulas atómicas, el conjunto de conectivos binarios $\{\to_{\text{Ł3}}, \wedge_{\text{Ł3}}, \vee_{\text{Ł3}}\}$, el conjunto de conectivos de aridad uno $\{\neg_{\text{Ł3}}, \diamond_{\text{Ł3}}, \square_{\text{Ł3}}\}$ y la constante lógica $\perp_{\text{Ł3}}$.

Lema 5.26. *En Ł3 si consideramos $\to_{Ł3}$ y $\perp_{Ł3}$ como conectivos primitivos podemos obtener el resto de conectivos como abreviaturas de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{lcl}
\varphi \vee_{Ł3} \psi & := & (\varphi \to_{Ł3} \psi) \to_{Ł3} \psi \\
\neg_{Ł3}\varphi & := & \varphi \to_{Ł3} \perp_{Ł3} \\
\varphi \wedge_{Ł3} \psi & := & \neg_{Ł3}(\neg_{Ł3}\varphi \vee_{Ł3} \neg_{Ł3}\psi) \\
\diamond_{Ł3}\varphi & := & \neg_{Ł3}\varphi \to_{Ł3} \varphi \\
\square_{Ł3}\varphi & := & \neg_{Ł3}(\varphi \to_{Ł3} \neg_{Ł3}\varphi)
\end{array}$$

Demostración. La prueba sigue se directamente de las tablas de verdad de Ł3. □

Lema 5.27. *Los conectivos de $\mathbf{CG'_3}$ son definibles en el lenguaje de los conectivos de Ł3.*

Demostración. Es suficiente mostrar que $\neg_{\mathbf{CG'_3}}$ y $\to_{\mathbf{CG'_3}}$ son definibles en términos de los conectivos en Ł3, ya que el resto de conectivos tienen las mismas tablas de verdad en ambas lógicas. Observe lo siguiente:

- $\neg_{\mathbf{CG'_3}}\varphi = \neg_L \square_L \varphi$
- $\varphi \to_{\mathbf{CG'_3}} \psi = \Bigg(\varphi \to_{\text{Ł3}} \psi\Bigg) \wedge_{\text{Ł3}} \square_{\text{Ł3}}\neg_{\text{Ł3}}\Bigg(\square_{\text{Ł3}}\neg_{\text{Ł3}}\Big(\square_{\text{Ł3}}\neg_{\text{Ł3}}(\square_{\text{Ł3}}\neg_{\text{Ł3}}\varphi) \to_{\text{Ł3}} \psi\Big)\Bigg)$

□

Lema 5.28. *La negación y la implicación Ł3 pueden ser expresadas en términos de los conectivos de $\mathbf{CG'_3}$.*

$$\neg_{Ł3}\varphi := (\varphi \to_{\mathbf{CG'_3}} (\varphi \wedge_{\mathbf{CG'_3}} \neg_{\mathbf{CG'_3}}\varphi)) \wedge_{\mathbf{CG'_3}} (\varphi \vee_{\mathbf{CG'_3}} (\varphi \to_{\mathbf{CG'_3}} \neg_{\mathbf{CG'_3}}\neg_{\mathbf{CG'_3}}\varphi))$$
$$\varphi \to_{Ł3} \psi := (\varphi \wedge_{\mathbf{CG'_3}} \neg_{\mathbf{CG'_3}}\varphi) \vee_{\mathbf{CG'_3}} (\varphi \to_{\mathbf{CG'_3}} \psi)$$

Observe que $\perp_{Ł3} := \neg_{Ł3}(\varphi \to_{Ł3} \varphi)$.

Teorema 5.29. *Los conectivos de Ł3 pueden ser expresados en términos de los conectivos de* $\mathbf{CG'_3}$ *y viceversa.*

Demostración. Directo de los Lemas 5.26, 5.27 y 5.28. $\square$

Conclusión

Las lógicas paraconsistentes son sistemas lógicos que intentan tratar las contradicciones en una manera cautelosa. También, las lógicas paraconsistentes se ocupan del estudio y desarrollo de sistemas tolerantes a la inconsistencia. Las lógicas tolerantes a la inconsistencia existen desde 1910, la palabra paraconsistente (*más allá de la consistencia*) fue propuesta por el filósofo Peruano Francisco Miró Quesada en 1976.

En este trabajo estudiamos algunas lógicas no clásicas desde un punto de vista semántico y sintáctico. Primero hicimos un estudio de algunas lógicas como **Int**, $\mathbf{G_3}$ y **daC**. Después de eso, nos enfocamos en $\mathbf{G_3'}$ y obtuvimos una caracterización en términos de los modelos de Kripke, posteriormente se dota a esta lógica de una teoría axiomática formal para desarrollar teoría de prueba. La técnica utilizada para obtener la axiomatización fue mediante conjuntos φ-saturados.

También, se proporciona una teoría axiomática formal para $\mathbf{CG_3'}$. La lógica $\mathbf{CG_3'}$ se definió en [11] por medio de semántica multivaluada. En este trabajo se da:

- Una caracterización de $\mathbf{CG_3'}$ usando los modelos de Kripke. Gracias a la semántica tipo Kripke para estas lógicas, obtuvimos una nueva herramienta que puede ayudarnos a tener una mejor comprensión de estas lógicas paraconsistentes.

- Una axiomatización tipo Hilbert para $\mathbf{CG_3'}$, este sistema axiomático satisface muchas propiedades, como las que se presentan en Lema 5.8 y Teorema 5.7. Entre estas propiedades podemos mencionar Teorema de Deducción, Transitividad, Reglas-AND, Corte, &c. En Lema 5.9 demostramos que esta axiomatización contiene el fragmento positivo de la Lógica Intuicionista, incluso más, el fragmento positivo de la Lógica Clásica está contenido en $\mathbb{L}$. Vale la pena mencionar que esta axiomatización es una extensión de la axiomatización para $\mathbf{C}_\omega$. Probamos que esta teoría axiomática formal es robusta y completa con respecto a $\mathbf{CG_3'}$, y estudiamos la propiedad de sustitución para esta lógica.

- Mediante esta axiomatización realizamos algunas comparaciones con otras lógicas como $\mathbb{Z}$ y $\mathbf{G'_3}$ y también mostramos que Ł3 y $\mathbf{CG'_3}$ tienen el mismo poder expresivo.

Como trabajo futuro, planeamos analizar si $\mathbf{CG'_3}$ es algebraizable en el sentido de Block y Pigozzi.

Apéndice A

Pruebas de la Lógica G_3'

A.1. Semántica tipo Kripke

Demostración de la Proposición 4.5

Haremos la prueba por inducción sobre la longitud de la fórmula φ.

- **Base.** Supongamos que $\varphi = p$, en donde p es una fórmula atómica, entonces el resultado se verifica directamente de la Definición 4.3.

  H.I. Supongamos que, si φ tiene longitud n, entonces la traducción se satisface.

  Paso inductivo. Sea φ de longitud $n+1$, entonces tenemos lo siguiente:

- **El caso de la disyunción:** si $\varphi = \psi \vee \gamma$.

  i) [$\Rightarrow$] [1] $t(\varphi) = 0$ si y sólo si $t(\psi) = t(\gamma) = 0$, en donde ψ y γ tienen longitud menor o igual que n, entonces por H.I. se tiene que $v(\psi) = v(\gamma) = \emptyset$. Por lo tanto, $v(\psi \vee \gamma) = v(\varphi) = \emptyset$.

     [$\Leftarrow$] Supongamos que $v(\psi \vee \gamma) = \emptyset$, esto implica que $v(\psi) = v(\gamma) = \emptyset$, entonces por H.I. se tiene que $t(\psi) = t(\gamma) = 0$. Por lo tanto, $t(\psi \vee \gamma) = 0$.

[1] Usaremos [$\Rightarrow$] como símbolo para indicar que demostraremos la parte necesaria de una proposición y [$\Leftarrow$] como símbolo para indicar que demostraremos la parte suficiente.

ii) $[\Rightarrow]$ $t(\varphi) = 1$ si y sólo si $max\{t(\psi), t(\gamma)\} = 1$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $t(\psi) = 1$, luego por hipótesis de inducción tenemos que $v(\psi) = \{T\}$, entonces $v(\psi \vee \gamma) = \{T\}$.

$[\Leftarrow]$ Supongamos que $v(\psi \vee \gamma) = \{T\}$, entonces $v(\psi) = \{T\}$ o $v(\gamma) = \{T\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $v(\psi) = \{T\}$, entonces $v(\gamma) = \{T\}$ o $v(\gamma) = \emptyset$, luego por hipótesis inductiva $t(\psi) = 1$ y $(t(\gamma) = 1$ o $t(\gamma) = 0)$. Así $t(\psi \vee \gamma) = 1$.

iii) $[\Rightarrow]$ $t(\varphi) = 2$ si y sólo si $max\{t(\psi), t(\gamma)\} = 2$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $t(\psi) = 2$, entonces $v(\psi) = \{H, T\}$, así $v(\psi \vee \gamma) = \{H, T\}$.

$[\Leftarrow]$ Supongamos que $v(\psi \vee \gamma) = \{H, T\}$, entonces $T \in v(\psi)$ o $T \in v(\gamma)$. Supongamos sin pérdida de generalidad $T \in v(\psi)$, entonces $v(\psi) = \{H, T\}$ luego por hipótesis inductiva $t(\psi) = 2$. Así $t(\psi \vee \gamma) = 2$.

- **El caso de la conjunción:** si $\varphi = \psi \wedge \gamma$.

i) $[\Rightarrow]$ $t(\varphi) = 0$ si y sólo si $min\{t(\psi), t(\gamma)\} = 0$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $t(\psi) = 0$, entonces $v(\psi) = \emptyset$. Así $v(\psi \wedge \gamma) = \emptyset$.

$[\Leftarrow]$ Supongamos que $v(\psi \wedge \gamma) = \emptyset$, entonces $H \notin v(\psi)$ o $H \notin v(\gamma)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $H \notin v(\psi)$, entonces $v(\psi) = \emptyset$, luego $t(\psi) = 0$, así $t(\psi \wedge \gamma) = 0$.

ii) $[\Rightarrow]$ $t(\varphi) = 1$ si y sólo si $min\{t(\psi), t(\gamma)\} = 1$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $t(\psi) = 1$, entonces $v(\psi) = \{T\}$ y $v(\gamma) = \{H, T\}$. Por lo tanto, $v(\psi \wedge \gamma) = \{H, T\}$.

$[\Leftarrow]$ Supongamos que $v(\psi \wedge \gamma) = \{T\}$, entonces $v(\psi) = \{T\}$ y $\emptyset \neq v(\gamma) \subset \{H, T\}$ o $v(\gamma) = \{T\}$ y $\emptyset \neq v(\psi) \subset \{H, T\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $v(\psi) = \{T\}$, entonces $v_H(\psi \wedge \gamma) = 0$, $v_T(\psi \wedge \gamma) = 1$. Así $v(\psi \wedge \gamma) = \{T\}$.

iii) $[\Rightarrow]$ $t(\varphi) = 2$ si y sólo si $t(\psi) = t(\gamma) = 2$ si y sólo si $v(\psi) = \{H, T\}$ y $v(\gamma) = \{H, T\}$. Por lo tanto, $v(\psi \wedge \gamma) = \{H, T\}$.

$[\Leftarrow]$ Supongamos que $v(\psi \wedge \gamma) = \{H, T\}$, entonces $v(\psi) = v(\gamma) = \{H, T\}$, por hipótesis inductiva tenemos que $t(\psi) = t(\gamma) = 2$. Por lo tanto, $t(\psi \wedge \gamma) = 2$.

- **El caso de la implicación:** si $\varphi = \psi \rightarrow \gamma$.

i) [$\Rightarrow$] $t(\varphi) = 0$ si y sólo si $t(\psi) \in \{1, 2\}$ y $t(\gamma) = 0$, entonces

a) $t(\psi) = 1$ y $t(\gamma) = 0$, entonces $v(\psi) = \{T\}$ y $v(\gamma) = \emptyset$, luego $v_H(\psi \to \gamma) = 0$ y $v_T(\psi \to \gamma) = 0$. Por lo tanto, $v(\psi \to \gamma) = \emptyset$.

b) $t(\psi) = 2$ y $t(\gamma) = 0$, entonces $v(\psi) = \{H, T\}$ y $v(\gamma) = \emptyset$, luego $v_H(\psi \to \gamma) = 0$ y $v_T(\psi \to \gamma) = 0$. Por lo tanto, $v(\psi \to \gamma) = \emptyset$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $v(\psi \to \gamma) = \emptyset$. $v_T(\psi \to \gamma) = 0$, entonces $v_T(\psi) = 1$ y $v_T(\gamma) = 0$, entonces $v(\gamma) = \emptyset$ y $\emptyset \neq v(\psi) \subseteq \{H, T\}$ por hipótesis inductiva $t(\gamma) = 0$ y $t(\psi) \in \{1, 2\}$, entonces $t(\psi \to \gamma) = 0$.

ii) [$\Rightarrow$] $t(\varphi) = 1$ si y sólo si $t(\psi) = 2$ y $t(\gamma) = 1$, entonces $v(\psi) = \{H, T\}$ y $v(\gamma) = \{T\}$, luego $v_H(\psi \to \gamma) = 0$ y $v_T(\psi \to \gamma) = 0$. Por lo tanto, $v(\psi \to \gamma) = \emptyset$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $v(\psi \to \gamma) = \{T\}$, entonces $v_H(\psi \to \gamma) = 0$, es decir que $v_H(\psi) = 1$ y $v_H(\gamma) = 0$ y $v_T(\psi \to \gamma) = 1$ además como $v_H(\psi) = 1$, entonces $v_T(\psi) = 1 = v_T(\gamma)$. Luego $v(\psi) = \{H, T\}$, $v(\gamma) = \{T\}$, así por hipótesis de inducción $t(\psi) = 2$ y $t(\gamma) = 1$. Por lo tanto, $t(\psi \to \gamma) = 1$.

iii) [$\Rightarrow$] Si $t(\varphi) = 2$ entonces tenemos cuatro subcasos:

a) $t(\psi) = t(\gamma) = 0$, entonces $v(\psi) = v(\gamma) = \emptyset$, entonces $v_H(\psi \to \gamma) = 1$ y $v_T(\psi \to \gamma) = 1$. Por lo tanto, $v(\psi \to \gamma) = \{H, T\}$.

b) $t(\psi) = 0$ y $t(\gamma) = 1$, entonces $v(\psi) = \emptyset$ y $v(\gamma) = \{T\}$, luego $v_H(\psi \to \gamma) = 1$ y $v_T(\psi \to \gamma) = 1$. Por lo tanto, $v(\psi \to \gamma) = \{H, T\}$.

c) $t(\psi) = 1$ y $t(\gamma) = 1$, entonces $v(\psi) = \{T\}$ y $v(\gamma) = \{T\}$, luego $v_H(\psi \to \gamma) = 1$ y $v_T(\psi \to \gamma) = 1$. Por lo tanto, $v(\psi \to \gamma) = \{H, T\}$.

d) $t(\psi) \in \{0, 1, 2\}$ y $t(\gamma) = 2$, entonces $v(\gamma) = \{H, T\}$. Por lo tanto, $v(\psi \to \gamma) = \{H, T\}$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $v(\psi \to \gamma) = \{H, T\}$, entonces $v_H(\psi \to \gamma) = 1$ y $v_T(\psi \to \gamma) = 1$.

a) Si $v(\psi) = \{H, T\}$, entonces $v(\gamma) = \{H, T\}$, entonces $t(\psi) = t(\gamma) = 2$. Así $t(\psi \to \gamma) = 2$.

b) Si $v(\psi) = \{H\}$, entonces $\emptyset \neq v(\gamma) \subseteq \{H, T\}$ y por hipótesis de inducción $t(\psi) = 1$ y $t(\gamma) \in \{1, 2\}$. Así $t(\psi \to \gamma) = 2$.

c) Si $v(\psi) = \emptyset$, entonces por hipótesis de inducción $t(\psi) = 0$ y $t(\psi \to \gamma) = 2$.

- **El caso de la negación:** si $\varphi = \neg\psi$.

  i) [$\Rightarrow$] Si $t(\varphi) = 0$, entonces $t(\psi) = 2$, luego por H.I. $v(\psi) = \{H, T\}$, luego $v_H(\neg\psi) = 0 = v_T(\neg\psi)$ ya ni que en H ni en T existe evidencia por abajo de ellos de que ψ sea falso.

     [$\Leftarrow$] Si $v(\varphi) = \emptyset$, entonces $v_H(\neg\psi) = v_T(\neg\psi) = F$, entonces no existe evidencia en H ni en T de que ψ sea falso. Por lo tanto, $v_H(\psi) = v_T(\psi) = V$ y $v(\psi) = \{H, T\}$, por H.I. $t(\psi) = 2$ y de la Definición $t(\neg\psi) = 0$.

  ii) [$\Rightarrow$] Si $t(\varphi) = 2$, entonces $t(\psi) \in \{0, 1\}$, luego por H.I. $v(\psi) = \emptyset$ o $v(\psi) = \{T\}$, entonces $v_H(\psi) = 0$. Por lo tanto, $v_H(\neg\psi) = v_T(\neg\psi) = 1$, luego $v(\neg\psi) = \{H, T\}$.

     [$\Leftarrow$] Si $v(\varphi) = \{H, T\}$, entonces en H y T existe evidencia por abajo de que ψ sea falso, entonces $v_H(\psi) = 0$, luego $v(\psi) = \emptyset$ y por H.I. $t(\psi) = 0$ y de la Definición tenemos $t(\varphi) = 2$.

  iii) No es posible que $v(\varphi) = \{T\}$ puesto que $v(\varphi) = \{T\}$ entonces $v_T(\neg\psi) = 1$ es decir, existe evidencia por abajo de T de que ψ es falsa, entonces $v_H(\psi) = 0$. Por lo tanto, $v_H(\neg\psi) = 1$. Así $v(\neg\psi) = \{H, T\}$.

A.2. Teoría de Prueba

A continuación, se presentan las pruebas de las afirmaciones que no se muestran en el cuerpo de la tesis. Usamos las siguientes abreviaturas: **TD** para Teorema de la Deducción, Hip para Hip, abrev. para Abreviación, Prop para Proposición, **R-AND** para Reglas-AND, **Mon** para Monotonía, **SPC** para Prueba Fuerte por Casos, Def para Definición y **Cut** para Corte.

Demostración del Lema 4.13 Se presenta la demostración de cada inciso:

(a) $\boldsymbol{\bot \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)}$

Por el Teorema de la Deducción restringido veamos lo siguiente:

$\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi \vdash \bot$

1.	$\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi$	Hip
2.	$\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \bot)$	**G3′-2**
3.	$(\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \to \bot$	
4.	$\bot$	**MP(1,3)**
5.	$\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi \vdash \bot$	1-4

$\bot \vdash (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$

1.	$\bot$	Hip
2.	$\bot \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	**G3′-1**
3.	$\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi$	**MP(1,2)**
4.	$\bot \vdash (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	1-3

(b) $\sim\varphi \vdash \varphi \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$

1.	$\sim\varphi$	Hip
2.	$\varphi \to \bot$	abrev. $\sim$
3.	$\varphi \vdash \bot$	**TD**
4.	$\bot \vdash \neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi$	Parte a)
5.	$\varphi \vdash (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	**Cut(3,4)**
6.	$\varphi \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	**TD**

$\varphi \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \vdash \sim\varphi$

1.	$\varphi \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	Hip
2.	φ	Hip
3.	$\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi$	**MP(1,2)**
4.	$\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi \vdash \bot$	Parte a)
5.	$\bot$	**MP(3,4)**

(c) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\sim\psi \to \sim\varphi)$

1.	$\varphi,\ \varphi \to \psi,\ \psi \to \bot \vdash \bot$	**MP**
2.	$\bot \vdash (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	Parte a)
3.	$\varphi,\ \varphi \to \psi,\ \psi \to \bot \vdash (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	**Cut(1,2)**
4.	$\varphi \to \psi,\ \psi \to \bot \vdash \varphi \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	**TD**
5.	$\varphi \to \psi,\ \sim\psi \vdash \sim\varphi$	abrev. $\sim$, (b)
6.	$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\sim\psi \to \sim\varphi)$	**TD**

(d) $\vdash \sim(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\sim\varphi \wedge \sim\psi)$

1.	$\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$	**Pos6**
2.	$\psi \rightarrow \varphi \vee \psi$	**Pos7**
3.	$\big(\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)\big) \rightarrow \big(\sim(\varphi \vee \psi) \rightarrow \sim\varphi\big)$	Parte c)
4.	$\big(\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)\big) \rightarrow \big(\sim(\varphi \vee \psi) \rightarrow \sim\psi\big)$	Parte c)
5.	$\sim(\varphi \vee \psi) \rightarrow \sim\varphi$	**MP(1,3)**
6.	$\sim(\varphi \vee \psi) \rightarrow \sim\psi$	**MP(2,4)**
7.	$\sim(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\sim\varphi \wedge \sim\psi)$	**R-AND(5,6)**

(e) $\sim\varphi \wedge \sim\psi \vdash \sim(\varphi \vee \psi)$

1.	$\sim\varphi \wedge \sim\psi$	Hip
2.	$(\sim\varphi \wedge \sim\psi) \rightarrow \sim\varphi$	**Pos3**
3.	$(\sim\varphi \wedge \sim\psi) \rightarrow \sim\psi$	**Pos4**
4.	$\sim\varphi$	**MP(1,2)**
5.	$\sim\psi$	**MP(1,3)**
6.	$\varphi \rightarrow \bot$	abrev. $\sim$
7.	$\psi \rightarrow \bot$	abrev. $\sim$
8.	$\big(\varphi \rightarrow \bot\big) \rightarrow \big((\psi \rightarrow \bot) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \bot)\big)$	**Pos8**
9.	$(\psi \rightarrow \bot) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \bot)$	**MP(5,6)**
10.	$(\varphi \vee \psi) \rightarrow \bot$	**MP(4,7)**
11.	$\sim(\varphi \vee \psi)$	abrev. $\sim$

(f) $\sim\neg\varphi, \neg\varphi \vdash \bot$

1.	$\sim\neg\varphi$	Hip
2.	$\neg\varphi$	Hip
3.	$\neg\varphi \rightarrow \bot$	abrev. $\sim$
4.	$\bot$	**MP(2,3)**

(g) $\sim\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi$

1.	$\sim\neg\varphi, \neg\varphi \vdash \bot$	Parte f)
2.	$\bot \vdash \neg\neg\varphi$	**Pos11, MP**
3.	$\sim\neg\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi$	**Cut(1,2)**
4.	$\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi$	$\varphi \vdash \varphi$
5.	$\sim\neg\varphi, \neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi$	**Mon**
6.	$\sim\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi$	**SPC(3,5)**

$\neg\neg\varphi \vdash \sim \neg\varphi$

1.	$\neg\neg\varphi$	Hip
2.	$\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\neg\varphi))$	**G3′-2**
3.	$\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\neg\varphi))$	
4.	$\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\neg\varphi)$	**MP(1,3)**
5.	$\sim \neg\varphi$	Parte b)

(h) $\boldsymbol{\sim\sim \varphi \to \Big(\sim \psi \to \sim (\varphi \to \psi)\Big)}$

Equivalentemente:

$\sim\sim \varphi, \sim \psi \vdash \sim (\varphi \to \psi)$

Aplicando la parte c) tenemos que:

$(\varphi \to \bot) \to \bot, \psi \to \bot \vdash (\varphi \to \psi) \to \bot$

1.	$\varphi \to \psi$	Hip
2.	$\psi \to \bot$	Hip
3.	$(\varphi \to \bot) \to \bot$	Hip
4.	$\varphi \to \bot$	Trans(1,2)
5.	$\bot$	**MP(3,4)**
6.	$\varphi \to \psi,\ \psi \to \bot,\ (\varphi \to \bot) \to \bot \vdash \bot$	1-5
7.	$\psi \to \bot,\ (\varphi \to \bot) \to \bot \vdash (\varphi \to \psi) \to \bot$	**TD**
8.	$\sim \psi,\ \sim\sim \varphi \vdash \sim (\varphi \to \psi)$	Def $\sim$

(i) $\boldsymbol{\vdash \varphi \to \Big(\sim \psi \to \sim (\varphi \to \psi)\Big)}$

Equivalentemente:

$\varphi, \sim \psi \vdash \sim (\varphi \to \psi)$

Equivalentemente:

$\varphi, \psi \to \bot \vdash (\varphi \to \psi) \to \bot$

1.	φ	Hip
2.	$\psi \to \bot$	Hip
3.	$\varphi \to \psi$	Hip
4.	ψ	**MP(1,3)**
5.	$\bot$	**MP(2,4)**

(j) $\vdash \sim \varphi \to (\varphi \to \psi)$

1.	$\varphi, \varphi \to \bot \vdash \bot$	**MP**
2.	$\bot \vdash \psi$	**G3′-1, MP**
3.	$\varphi, \varphi \to \bot \vdash \psi$	**Cut(1,2)**
4.	$\varphi, \sim \varphi \vdash \psi$	Def $\sim$
5.	$\sim \varphi \vdash (\varphi \to \psi)$	**TD**
6.	$\sim \varphi \to (\varphi \to \psi)$	**TD**

(k) $\vdash \sim \varphi \to \neg\varphi$

1.	$\sim \varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi$	**Mon**
2.	$\sim \varphi, \varphi \vdash \neg\varphi$	Parte j), **MP**
3.	$\sim \varphi \vdash \neg\varphi$	**SPC(1,2)**
4.	$\sim \varphi \to \neg\varphi$	**TD**

(l) $\sim (\psi \wedge \gamma) \vdash \psi \to \sim \gamma$

Equivalentemente:

$(\psi \wedge \gamma) \to \bot \vdash \psi \to (\gamma \to \bot)$

1.	$(\psi \wedge \gamma) \to \bot$	Hip
2.	ψ	Hip
3.	γ	Hip
4.	$(\psi \wedge \gamma)$	**R-AND(2,3)**
5.	$\bot$	**MP(1,4)**

$\psi \to \sim \gamma \vdash \sim (\psi \wedge \gamma)$

Equivalentemente:

$\psi, \gamma \to \bot \vdash (\psi \wedge \gamma) \to \bot$

1.	ψ	Hip
2.	$\gamma \to \bot$	Hip
3.	$(\psi \wedge \gamma)$	Hip
4.	$(\psi \wedge \gamma) \to \gamma$	**Pos4**
5.	γ	**MP(3,4)**
6.	$\bot$	**MP(2,5)**

$\sim (\sim (\psi \wedge \gamma) \dashv\vdash \gamma \to \sim \psi$

La demostración es similar al hecho en este inciso.

Observe que los incisos m, n y ñ son teoremas de **Int** y por lo tanto son derivables en $\mathbf{G3'_h}$.

Demostración del Lema 4.23

La demostración se hará por inducción sobre la complejidad de la fórmula α.

- **Base.** Supongamos que $\alpha = p$, donde p es una fórmula atómica, entonces se verifica por la Definición de h.

  H.I. Supongamos que la afirmación se verifica para cada fórmula de complejidad menor que la de α; esto es, si β es una fórmula que tiene complejidad menor que la de α, entonces se cumple que:

$$\begin{array}{lll} h(\beta)=0 & sii & \beta \notin \Gamma, \sim \beta \in \Gamma \\ h(\beta)=1 & sii & \beta \notin \Gamma, \sim \beta \notin \Gamma \\ h(\beta)=2 & sii & \beta \in \Gamma \end{array}$$

  Note que, es suficiente probar la parte "necesaria" de la afirmación, pues las tres condiciones del lado derecho son incompatibles por pares, además $h(\beta)$ sólo puede tomar uno de los siguientes valores $0, 1, 2$. Por ejemplo, si la primera condición del lado derecho de la afirmación se cumple para una fórmula β, entonces las otras dos condiciones son falsas y por lo tanto $h(\beta) \notin \{1, 2\}$. Así, $h(\beta)$ debe ser 0.

  Paso inductivo. Sea α de complejidad $n + 1$.

- **El caso de la negación:** si $\alpha = \neg\psi$.

  1. Supongamos que $h(\alpha) = 0$, debemos verificar dos cosas que $\alpha \notin \Delta$ y $\sim \alpha \in \Delta$. Como $0 = h(\alpha) = h(\neg\psi) = \neg h(\psi)$. Por la tabla de la negación ($\neg$) se tiene que $h(\psi) = 2$. Como ψ es de complejidad menor que la de α por H.I. se tiene que $\psi \in \Delta$ y por el Lema 4.22 (4), $\neg\neg\psi \in \Delta$. Además, por el Lema 4.13 (g), concluimos que $\sim \neg\psi \in \Delta$.

  2. Ahora, supongamos que $h(\alpha) = 1$. Por demostrar que $\alpha \notin \Delta$ y $\sim \alpha \notin \Delta$. Como $h(\alpha) = 1$, entonces $h(\neg\psi) = \neg h(\psi) = 1$. De la

tabla de la $(\neg)$ se ve que no hay posibilidad para alguna fórmula de que su negación tome el valor de 1. Por tanto, no es posible que $h(\alpha) = 1$.

3. Finalmente, supongamos que $h(\alpha) = 2$, debemos demostrar que $\alpha \in \Delta$. Como $2 = h(\alpha) = h(\neg\psi) = \neg h(\psi)$. Observe que de la tabla de la negación $(\neg)$ se tiene que $h(\psi) \in \{0, 1\}$. Como ψ es de complejidad menor que la de α por H.I. se tiene que $\psi \notin \Delta$, y por el Lema 4.22 (4) se concluye que $\neg\psi \in \Delta$.

- **El caso de la conjunción:** Si $\alpha = \beta \wedge \gamma$.

1. Primero, supongamos que $h(\alpha) = 0$. Por demostrar que $\alpha \notin \Delta$ y $\sim \alpha \in \Delta$. Como $h(\alpha) = 0$, entonces $h(\beta \wedge \gamma) = h(\beta) \wedge h(\gamma) = 0$, de acuerdo con la tabla de la conjunción $(\wedge)$, tenemos que: $h(\beta) = 0$ o $h(\gamma) = 0$. Analicemos ambos casos:

   a) $h(\beta) = 0$. Como β es de menor complejidad que α, aplicando H.I. tenemos que $\beta \notin \Delta$ y $\sim \beta \in \Delta$. Notemos que $(\beta \wedge \gamma) \notin \Delta$ pues en caso contrario si $(\beta \wedge \gamma) \in \Delta$ entonces por el Lema 4.22 (3) debería ser que $\beta \in \Delta$, lo cual es una contradicción. Por otro lado, como $\sim \beta \in \Delta$, por el Lema 4.22 (6) tenemos que $(\gamma \to \sim \beta) \in \Delta$. Finalmente, aplicando el Lema 4.22 (7) tenemos que $\sim (\beta \wedge \gamma) \in \Delta$.

   b) $h(\gamma) = 0$. Análogo al anterior.

2. Supongamos ahora que $h(\alpha) = 1$, en este caso debemos verificar dos cosas que: $\alpha \notin \Delta$ y $\sim \alpha \notin \Delta$. Dado que $h(\alpha) = 1$, se tiene que: $h(\beta \wedge \gamma) = h(\beta) \wedge h(\gamma) = 1$, observando la tabla de la conjunción $(\wedge)$ tenemos dos casos: ($h(\beta) = 1$ y $h(\gamma) \in \{1, 2\}$) o ($h(\beta) \in \{1, 2\}$ y $h(\gamma) = 1$).

   a) $h(\beta) = 1$ y $h(\gamma) \in \{1, 2\}$. Aquí tenemos dos subcasos:

      1) $h(\beta) = 1, h(\gamma) = 1$. Como a γ y β se les puede aplicar H.I. pues ambas fórmulas son de complejidad menor que

la de α, entonces tenemos que $\beta \notin \Delta$, $\sim \beta \notin \Delta$, $\gamma \notin \Delta$ y $\sim \gamma \notin \Delta$. Se debe cumplir que $(\beta \wedge \gamma) \notin \Delta$ pues en caso contrario $(\beta \wedge \gamma) \in \Delta$, entonces el Lema 4.22 (3) obligaría a que $\beta \in \Delta$, lo cual es una contradicción. También se cumple que $(\sim \beta \vee \sim \gamma) \notin \Delta$ en caso contrario tendríamos que $(\sim \beta \vee \sim \gamma) \in \Delta$ aplicando el Lema 4.22 (1) tenemos que $\sim \beta \in \Delta$ o $\sim \gamma \in \Delta$ nuevamente una contradicción. Por el Lema 4.22 (7) se concluye que $\sim (\beta \wedge \gamma) \notin \Delta$.

2) $h(\beta) = 1, h(\gamma) = 2$. Como γ y β son fórmulas de complejidad menor que la de α entonces por H.I. tenemos que $\beta \notin \Delta$, $\sim \beta \notin \Delta$ y $\gamma \in \Delta$. Supongamos que $(\beta \wedge \gamma) \in \Delta$ entonces por el Lema 4.22 (3), $\beta \in \Delta$ y $\gamma \in \Delta$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $(\beta \wedge \gamma) \notin \Delta$. Por otro lado, si suponemos que $\sim (\beta \wedge \gamma) \in \Delta$, entonces por el Lema 4.22 (7), $(\sim \gamma \vee \sim \beta) \in \Delta$. Aplicando el Lema 4.22 (1) tenemos que $\sim \beta \in \Delta$ o $\sim \gamma \in \Delta$, pero $\sim \beta \notin \Delta$ y como $h(\gamma) = 1$ entonces $\sim \gamma \notin \Delta$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\sim (\beta \wedge \gamma) \notin \Delta$.

b) $h(\beta) \in \{1, 2\}$ y $h(\gamma) = 1$. Este caso se verifica de manera análoga al anterior.

3. Supongamos que $h(\alpha) = 1$. Por demostrar que $\alpha \in \Delta$.

   Como $1 = h(\alpha) = h(\beta \wedge \gamma) = h(\beta) \wedge h(\gamma)$. Entonces $h(\beta) = 1 = h(\gamma)$. Como β y γ son de complejidad menor que la de φ por H.I. se tiene que $\beta \in \Delta$ y $\gamma \in \Delta$. Por lo tanto, aplicando el Lema 4.22 (3) $(\beta \wedge \gamma) \in \Delta$.

- **El caso de la disyunción:** Si $\alpha = \beta \vee \gamma$.

1. El primer caso es $h(\alpha) = 0$, en este caso tenemos que ver que se cumple lo siguiente: $\alpha \notin \Delta$ y $\sim \alpha \in \Delta$. Dado que $h(\varphi) = 0$ entonces $0 = h(\beta \vee \gamma) = h(\beta) \vee h(\gamma)$ se debe cumplir que $h(\beta) = 0$ y $h(\gamma) = 0$ y por ser β y γ de menor complejidad aplicando H.I.

se tiene que $\beta \notin \Delta, \sim \beta \in \Delta, \gamma \notin \Delta$ y $\sim \gamma \in \Delta$. Aplicando el Lema 4.22 incisos (1) y (3) tenemos que $(\beta \vee \gamma) \notin \Delta$ y $(\sim \beta \wedge \sim \gamma) \in \Delta$ y por el Lema 4.13 (e) sabemos que a partir de $(\sim \beta \wedge \sim \gamma) \in \Delta$ podemos construir una prueba de $\sim (\beta \vee \gamma)$. Por lo tanto, $\sim (\beta \vee \gamma) \in \Delta$.

2. Ahora supongamos que $h(\alpha) = 1$, para este caso tenemos que demostrar lo siguiente: $\alpha \notin \Delta$ y que $\sim \alpha \notin \Delta$. Como $1 = h(\varphi) = h(\beta \vee \gamma) = h(\beta) \vee h(\gamma)$ se debe cumplir que $h(\beta) = 1$ y $h(\gamma) = 0$; $h(\beta) = 0$ y $h(\gamma) = 1$ o $h(\beta) = 1 = h(\gamma)$ y por ser β y γ de menor complejidad aplicando H.I. se tienen los casos siguientes:

   a) $\beta \notin \Delta, \sim \beta \notin \Delta, \gamma \notin \Delta, \sim \gamma \in \Delta$. Aplicando el Lema 4.22 incisos (1) y (3) para este caso, se tiene que $(\beta \vee \gamma) \notin \Delta$ y $(\sim \beta \wedge \sim \gamma) \notin \Delta$, también por el Lema 4.13 (d) que $\sim (\beta \vee \gamma) \to (\sim \beta \wedge \sim \gamma) \in \Delta$, entonces si suponemos que $\sim (\beta \vee \gamma) \in \Delta$ aplicando **MP** tendríamos que $(\sim \beta \wedge \sim \gamma) \in \Delta$, una contradicción, por lo tanto $\sim (\beta \vee \gamma) \notin \Delta$.

   b) $\beta \notin \Delta, \sim \beta \in \Delta, \gamma \notin \Delta, \sim \gamma \notin \Delta$, La prueba de este caso es completamente análoga al caso anterior.

   c) $\beta \notin \Delta, \sim \beta \notin \Delta, \gamma \notin \Delta, \sim \gamma \notin \Delta$. En este caso $(\beta \vee \gamma) \notin \Gamma$ y $(\sim \beta \wedge \sim \gamma) \notin \Gamma$, por el mismo argumento que el caso anterior concluimos $\sim (\beta \vee \gamma) \notin \Gamma$.

3. El último caso es suponer que $h(\alpha) = 2$ y demostrar que $\varphi \in \Gamma$. Como $2 = h(\varphi) = h(\beta \vee \gamma) = h(\beta) \vee h(\gamma)$ entonces $h(\beta) = 2$ o $h(\gamma) = 2$. Si $h(\beta) = 2$ por H.I. $\beta \in \Gamma$ y por Lema 4.22 (1) se tiene que $(\beta \vee \gamma) \in \Gamma$. Un caso similar sucede cuando $h(\gamma) = 2$.

- **El caso de la implicación:** Si $\alpha = \beta \to \gamma$.

1. Supongamos que $h(\alpha) = 0$, debemos demostrar que $\alpha \notin \Delta$ y que $\sim \alpha \in \Delta$. Por el Lema 4.22 (5), basta con probar que $\sim \alpha \in \Delta$. Como $h(\varphi) = 0$, se tiene que: $h(\beta \to \gamma) = h(\beta) \to h(\gamma) = 0$. De

acuerdo con la tabla de la implicación tenemos que: ($h(\beta) = 1$ y $h(\gamma) = 0$) o ($h(\beta) = 2$ y $h(\gamma) = 0$). Analicemos ambos casos:

a) $h(\beta) = 1$ y $h(\gamma) = 0$. Dado que β y γ son de menor complejidad que φ, aplicando H.I. tenemos que $\beta \notin \Delta, \sim \beta \notin \Delta, \gamma \notin \Gamma$ y $\sim \gamma \in \Delta$. Como $\sim \beta \notin \Delta$ por el Lema 4.22 (8), $\sim\sim \beta \in \Delta$ también $\sim \gamma \in \Delta$ y por el Lema 4.13 (h) se cumple que: $\sim\sim \beta \to (\sim \gamma \to\sim (\beta \to \gamma))$, aplicando **MP** dos veces obtenemos $\sim (\beta \to \gamma) \in \Delta$.

b) $h(\beta) = 2$ y $h(\gamma) = 0$. Como β y γ son de menor complejidad que φ, aplicando H.I. tenemos que $\beta \in \Delta, \gamma \notin \Delta$ y $\sim \gamma \in \Delta$. Como se cumple que $\beta \to (\sim \gamma \to\sim (\beta \to \gamma))$ por el inciso (i) del Lema 4.13, aplicando **MP** dos veces obtenemos $\sim (\beta \to \gamma) \in \Delta$.

2. El siguiente caso es $h(\alpha) = 1$, aquí tenemos que ver que $\alpha \notin \Delta$ y que $\sim \alpha \notin \Delta$.

   Dado que $h(\alpha) = 1$, entonces $h(\beta \to \gamma) = h(\beta) \to h(\gamma) = 1$. De acuerdo con la tabla de la implicación ($\to$) tenemos que: $h(\beta) = 2$ y $h(\gamma) = 1$. Aplicando H.I. tenemos que $\beta \in \Delta, \gamma \notin \Delta$ y $\sim \gamma \notin \Delta$. Si suponemos que $\beta \to \gamma \in \Delta$ tendríamos que $\gamma \in \Delta$, una contradicción. Por lo tanto, $\beta \to \gamma \notin \Delta$. Además, si suponemos que $\sim (\beta \to \gamma) \in \Delta$ y por otro lado sabemos por el Lema 4.13 (k) que $\sim (\beta \to \gamma) \to \neg(\beta \to \gamma)$ obtendríamos $\neg(\beta \to \gamma) \in \Delta$ y de aquí que $\beta \to \gamma \notin \Delta$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $\sim (\beta \to \gamma) \notin \Delta$.

3. Por último, supongamos que $h(\alpha) = 2$. Por demostrar que $\alpha \in \Delta$. Por hipótesis tenemos que $h(\alpha) = 2$, entonces $h(\beta \to \gamma) = h(\beta) \to h(\gamma) = 2$. De acuerdo con la tabla de la implicación ($\to$) tenemos los siguientes casos: $h(\beta) = 0$; $h(\gamma) = 2$ o $h(\beta) = 1 = h(\gamma)$

a) Si $h(\beta) = 0$, aplicando H.I. $\beta \notin \Delta, \sim \beta \in \Delta$. Por el Lema 4.13 (j) se sabe que $\sim \beta \to (\beta \to \gamma) \in \Delta$, aplicando **MP** obtenemos $\beta \to \gamma \in \Gamma$.

b) Si $h(\gamma) = 2$, recordar que γ es de complejidad menor que la de α entonces al aplicar H.I. tenemos que $\gamma \in \Delta$. Por el axioma **Pos1** sabemos que $\gamma \to (\beta \to \gamma) \in \Delta$, aplicando **MP** obtenemos $\beta \to \gamma \in \Delta$.

c) Si $h(\beta) = 1 = h(\gamma)$ por H.I. tenemos que: $\beta \notin \Delta, \sim \beta \notin \Delta, \gamma \notin \Delta$ y $\sim \gamma \notin \Delta$. Del Lema 4.22 (4) y (8) tenemos entonces que $\neg\beta \in \Delta, \sim\sim \beta \in \Delta, \neg\gamma \in \Delta$ y $\sim\sim \gamma \in \Delta$. Por otro lado por el Lema 4.22 (9), sabemos que:
$(\sim \beta \vee \gamma) \vee \Big((\sim\sim \beta \wedge \neg\beta) \vee (\sim\sim \gamma \wedge \neg\gamma)\Big) \in \Delta$ si y sólo si $\beta \to \gamma \in \Delta$.
Se verifica que $(\sim\sim \beta \wedge \neg\beta) \vee (\sim\sim \gamma \wedge \neg\gamma) \in \Delta$ es decir el segundo disyunto es elemento de Δ. Por lo tanto, $\beta \to \gamma \in \Delta$. Esto concluye la prueba.

Apéndice B

Pruebas de la Lógica $\mathbf{CG}_3'$

B.1. Semántica tipo Kripke

Demostración del Teorema 5.2
Supongamos que $(M, x) \models_{\mathbf{CG}_3'} \varphi$ y xRy. Por demostrar que $(M, y) \models_{\mathbf{CG}_3'} \varphi$.

Haremos la prueba por inducción sobre la complejidad de φ.

- **Base.** $\varphi = p$, en donde p es una fórmula atómica, entonces tenemos dos casos:
  1. Si $x = w$, entonces tenemos dos subcasos:
     - $y = w$ y como $(M, x) \models_{\mathbf{CG}_3'} p$, entonces existe wRw^* tal que $(M, w^*) \models_{\mathbf{G}_3'} p$ y como $x = w = y$, sea $w^* = y$. Por lo tanto $(M, y) \models_{\mathbf{CG}_3'} p$.
     - $y = w'$ y como $(M, x) \models_{\mathbf{CG}_3'} p$, entonces existe wRw^* tal que $(M, w^*) \models_{\mathbf{G}_3'} p$, entonces tenemos dos subcasos:
       a) si $w^* = w$, entonces $v(p) = \{w, w'\}$ así $y = w' \in v(p)$, entonces $(M, y) \models_{\mathbf{G}_3'} p$. Por lo tanto $(M, y) \models_{\mathbf{CG}_3'} p$.
       b) si $w^* = w'$, entonces $\{w'\} \in v(p)$, entonces $(M, y) \models_{\mathbf{G}_3'} p$.
  2. $x = w'$ tenemos sólo un caso:
     - $y = w'$, entonces $(M, w') \models_{\mathbf{G}_3'} p$. Por lo tanto $(M, w') \models_{\mathbf{CG}_3'} p$.

  H.I. Supongamos que, si φ tiene longitud n, entonces la propiedad se satisface.

Paso inductivo. Sea φ de longitud $n+1$, entonces tenemos lo siguiente:

- **El caso de la conjunción:** si $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$.

  Como $(M,x) \models_{\mathbf{CG'_3}} \psi_1 \wedge \psi_2$ y xRy, tenemos los siguientes subcasos:

  1. si $x = w$, entonces tenemos un subcaso:
     a) si $y = w$, por hipótesis tenemos que $(M,x) \models_{\mathbf{CG'_3}} \psi_1 \wedge \psi_2$; es decir, $(M,w) \models_{\mathbf{CG'_3}} \psi_1 \wedge \psi_2$ equivalentemente $(M,y) \models_{\mathbf{CG'_3}} \psi_1 \wedge \psi_2$.
  2. si $x = w'$, entonces tenemos un subcaso:
     a) $y = w'$ este caso es análogo a 1.

- **El caso de la disyunción:** si $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$.

  Este caso es análogo al de la conjunción.

- **El caso de la implicación:** si $\varphi = \psi_1 \to \psi_2$.

  Como $(M,x) \models_{\mathbf{CG'_3}} \psi_1 \to \psi_2$, entonces existe xRw^* tal que $(M,w^*) \models_{\mathbf{G'_3}} \psi_1 \to \psi_2$, tenemos dos subcasos:

  1. si $w^* = w$ entonces $(M,w) \models_{\mathbf{G'_3}} \psi_1 \to \psi_2$ y como $\models_{\mathbf{G'_3}}$ es monótona $(M,w') \models_{\mathbf{G'_3}} \psi_1 \to \psi_2$. Por lo tanto $(M,y) \models_{\mathbf{CG'_3}} \psi_1 \to \psi_2$.
  2. si $w^* = w'$, entonces $(M,w') \models_{\mathbf{G'_3}} \psi_1 \to \psi_2$. Así $(M,y) \models_{\mathbf{CG'_3}} \psi_1 \to \psi_2$.

- **El caso de la negación:** $\varphi = \neg\psi_1$.

  Como $(M,x) \models_{\mathbf{CG'_3}} \neg\psi_1$ y xRy, entonces tenemos lo siguiente:

  - $x = w$, $y = w'$ y como $(M,w) \models_{\mathbf{CG'_3}} \neg\psi_1$, entonces existe wRw^* tal que $(M,w^*) \models_{\mathbf{G'_3}} \neg\psi_1$, entonces tenemos dos subcasos:
    1. si $w^* = w$, entonces $(M,w^*) \not\models_{G'_3} \psi_1$. Observe que $w^*Rw' = y$, entonces $(M,w') \models_{\mathbf{G'_3}} \neg\psi_1$. Por lo tanto $(M,y) \models_{\mathbf{CG'_3}} \neg\psi_1$.
    2. si $w^* = w'$, entonces $(M,w') \not\models_{\mathbf{G'_3}} \psi_1$, esto es, $(M,w') \models_{\mathbf{G'_3}} \neg\psi_1$. Además, $y = w'$, entonces $(M,w') \models_{\mathbf{CG'_3}} \neg\psi_1$ $\square$

Demostración de la Proposición 5.3

Haremos la prueba por inducción sobre la complejidad de la fórmula φ.

- **Base.** Supongamos que $\varphi = p$, en donde p es una fórmula atómica, entonces el resultado se verifica directamente.

  H.I. Supongamos que, si φ tiene longitud n, entonces la traducción se satisface.

  Paso inductivo. Sea φ de longitud $n+1$, entonces tenemos lo siguiente:

- **El caso de la disyunción:** Si $\varphi = \psi \vee \gamma$.

  $[\Rightarrow]$ Por hipótesis se tiene que $t(\psi \vee \gamma) = 0$; esto es, $t(\psi) = 0 = t(\gamma)$, observar que ψ y γ son fórmulas de complejidad menor que la de φ, entonces por H.I. existe un modelo de Kripke para $\mathbf{CG'_3}$ cuya valuación v es tal que $v(\psi) = \emptyset = v(\gamma)$. Así $v(\psi \vee \gamma) = \emptyset$.
  $[\Leftarrow]$ Por hipótesis existe un modelo de Kripke para $\mathbf{CG'_3}$ en donde $v(\psi \vee \gamma) = \emptyset$, entonces $v(\psi) = \emptyset = v(\gamma)$, entonces por H.I. existe una interpretación $t : \mathcal{L} \to \{0, 1, 2\}$ tal que $t(\psi) = 0 = t(\gamma)$, así $t(\psi \vee \gamma) = 0$. Por lo tanto, $t(\varphi) = 0$.

- **El caso de la conjunción:** si $\varphi = \psi \wedge \gamma$.

  $[\Rightarrow]$ Por hipótesis tenemos que $t(\psi \wedge \gamma) = 0$, entonces se tienen los siguientes casos:

  1. $t(\psi) = 0$ y $t(\gamma) \in \{0, 1, 2\}$. Como $t(\psi) = 0$, entonces por H.I. existe un modelo de Kripke para $\mathbf{CG'_3}$ cuya valuación v es tal que $v(\psi) = \emptyset$. Así $v(\psi \wedge \gamma) = \emptyset$.
  2. $t(\psi) \in \{1, 2\}$ y $t(\gamma) = 0$, es análogo al caso anterior.

  $[\Leftarrow]$ Por hipótesis existe un modelo de Kripke para $\mathbf{CG'_3}$ en donde $v(\psi \wedge \gamma) = \emptyset$, entonces $H \notin v(\psi)$ o $H \notin v(\gamma)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $H \notin v(\psi)$, esto es que $v(\psi) = \emptyset$, entonces por H.I. existe una interpretación $t : \mathcal{L} \to \{0, 1, 2\}$ tal que $t(\psi) = 0$. Así $t(\psi \wedge \gamma) = 0$.

- **El caso de la implicación:** si $\varphi = \psi \to \gamma$.

  $[\Rightarrow]$ Por hipótesis tenemos que $t(\psi \to \gamma) = 0$, entonces se tienen que $t(\psi) \in \{1, 2\}$ y $t(\gamma) = 0$, entonces por H.I. existe un modelo de Kripke para $\mathbf{CG'_3}$ cuya valuación v es tal que $v(\gamma) = \emptyset$. Luego $v_H(\psi \to \gamma) = 0$

y $v_T(\psi \to \gamma) = 0$. Por lo tanto, $v(\psi \to \gamma) = \emptyset$.

[$\Leftarrow$] Por hipótesis tenemos que existe un modelo de Kripke para $\mathbf{CG}'_3$ cuya valuación v es tal que $v(\psi \to \gamma) = \emptyset$, entonces $v(\gamma) = \emptyset$, luego por H.I, existe una interpretación $t : \mathcal{L} \to \{0, 1, 2\}$ tal que $t(\gamma) = 0$. Así $t(\psi \to \gamma) = 0$.

- **El caso de la negación:** si $\varphi = \neg\psi$.

  Es análogo al caso de la implicación.

B.2. Teoría de Prueba

A continuación, se presentan las pruebas de las afirmaciones que se muestran en el cuerpo de la tesis. Se usan las siguientes abreviaturas: **TD** para Teorema de la Deducción, Hip para Hip, abrev. para Abreviación, Prop para Proposición, **R-AND** para Reglas-AND, **Mon p**ara Monotonía, **SPC** para Prueba Fuerte por Casos y **Cut** para Corte.

Demostración del Lema 5.9

A continuación, presentamos una prueba para cada inciso, recordemos que $\varphi \vee \psi$ es una abreviación de $((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$.

Pos6 $\vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$

1.	φ	Hip
2.	$\varphi \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$	**Pos1**
3.	$(\psi \to \varphi) \to \varphi$	**MP(1,2)**
4.	$\varphi \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$	Lema 5.8
5.	$(\varphi \to \psi) \to \psi$	**MP(1,4)**
6.	$((\psi \to \varphi) \to \varphi)$ $\to (((\varphi \to \psi) \to \psi) \to ((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi))$	**Pos5**
7.	$((\varphi \to \psi) \to \psi) \to ((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$	**MP(3,6)**
8.	$((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$	**MP(5,7)**
9.	$\varphi \vee \psi$	abrev. $\vee$
10.	$\varphi \vdash (\varphi \vee \psi)$	1-9
11.	$\varphi \to (\varphi \vee \psi)$	**TD** a 10

Pos7 $\vdash \psi \to (\varphi \vee \psi)$

La prueba es análoga al caso anterior.

Pos8 $\vdash (\varphi \to \sigma) \to ((\psi \to \sigma) \to ((\varphi \vee \psi) \to \sigma)$

Equivalentemente:

$\varphi \to \sigma, \psi \to \sigma \vdash ((\varphi \vee \psi) \to \sigma)$

Equivalentemente:

$\varphi \to \sigma, \psi \to \sigma \vdash ((((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi)) \to \sigma)$

Equivalentemente:

$\varphi \to \sigma, \psi \to \sigma, (((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi)) \vdash \sigma$

1.	$\varphi \to \sigma$	Hip
2.	$\psi \to \sigma$	Hip
3.	$((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$	Hip
4.	$(\varphi \to \psi) \to \psi$	**Pos3**
5.	$(\varphi \to \psi) \to \sigma$	Lema 5.8
6.	$\varphi \to \sigma, (\varphi \to \sigma) \to \psi \vdash (\sigma \to \psi) \to \sigma$	Lema 5.8
7.	$(\sigma \to \psi) \to \sigma$	1-6
8.	$((\sigma \to \psi) \to \sigma) \to \sigma$	**CG-1**
9.	σ	**MP(7,8)**
10.	$\varphi \to \sigma, \psi \to \sigma, (((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi)) \vdash \sigma$	1-9

Cw2 $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$

1.	$\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$	**Pos1**
2.	$\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$	**CG-4**
3.	$(\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)) \to ((\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \varphi))$ $\to ((\varphi \vee \neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)))$	**Pos8**
4.	$(\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)) \to ((\varphi \vee \neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi))$	**MP(1,3)**
5.	$(\varphi \vee \neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi)$	**MP(2,4)**
6.	$\varphi \vee \neg\varphi$	**Cw1**
7.	$\neg\neg\varphi \to \varphi$	**MP(5,6)**

$\mathbf{CG'3} \vdash \nabla\varphi \to \varphi$

1.	$\nabla\varphi$	Hip
2.	$\sim\sim\varphi \wedge \neg\varphi$	abrev. ∇
3.	$(\sim\sim\varphi \wedge \neg\varphi) \to \sim\sim\varphi$	**Pos3**
4.	$\sim\sim\varphi$	**MP(1,2)**
5.	$\sim\varphi \to (\neg\sim\varphi \wedge \neg\neg\sim\varphi)$	abrev. $\sim$
6.	$(\varphi \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)) \to (\neg\sim\varphi \wedge \neg\neg\sim\varphi)$	abrev. $\sim$
7.	$\neg\sim\varphi \to (\neg\neg\sim\varphi \to \varphi)$	**CG-4**
8.	$(\neg\sim\varphi \wedge \neg\neg\sim\varphi) \to \varphi$	Lema 5.8
9.	$(\varphi \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)) \to \varphi$	Lema 5.8
10.	$((\varphi \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)) \to \varphi) \to \varphi$	**CG-1**
11.	φ	**MP(9,10)**
12.	$\nabla\varphi \vdash \varphi$	1-11
13.	$\nabla\varphi \to \varphi$	**TD** a 12

E1 $\vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \leftrightarrow (\neg\neg\psi \to \neg\neg\varphi)$

E1 se prueba en [29] usando el fragmento positivo de la Lógica Intuicionista, **Cw1** y **CG-4**, por lo tanto, se cumple en $\mathbf{CG'_3}$.

ON $\vdash \neg\varphi \leftrightarrow \neg\neg\neg\varphi$

1.	$\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi$	**Cw2**
2.	$(\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi)$	**E1**
3.	$\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$	**MP(1,2)**
4.	$\neg\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$	**Cw2**
5.	$(\neg\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\neg\varphi)$	**E1**
6.	$\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\neg\varphi$	**MP(4,5)**
7.	$(\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi)$	**E1**
8.	$\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$	**MP(6,7)**
9.	$(\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi)$	**R-AND(3,8)**
10.	$\neg\varphi \leftrightarrow \neg\neg\neg\varphi$	abrev. $\leftrightarrow$

Demostración del Lema 5.12 Ahora, se presenta la prueba de cada inciso. Recordar que $\sim \varphi$ es una abreviación de $\varphi \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$.

(a) $\vdash \sim \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

1.	$(\varphi \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi))$	Lema 5.8
2.	$(\varphi \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)), \varphi \vdash (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	**TD** a 1
3.	$\neg\varphi \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \psi)$	**CG-4**
4.	$(\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \rightarrow \psi$	Lema 5.8
5.	$(\varphi \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)), \varphi \vdash \psi$	**Cut(2,5)**
6.	$(\varphi \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)) \vdash \varphi \rightarrow \psi$	**TD** a 5
7.	$\sim \varphi \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$	abrev. $\sim$
8.	$\sim \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	**TD** a 7

(b) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \sim \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\neg\psi \wedge \neg\neg\psi)))$

1.	$\varphi \rightarrow \psi$	Hip
2.	$\varphi \rightarrow \sim \psi$	Hip
3.	φ	Hip
4.	ψ	**MP(1,3)**
5.	$\sim \psi$	**MP(2,3)**
6.	$\psi \rightarrow (\neg\psi \wedge \neg\neg\psi)$	abrev. $\sim$
7.	$\neg\psi \wedge \neg\neg\psi$	**MP(4,6)**
8.	$\varphi \rightarrow \psi, \varphi \rightarrow \sim \psi, \varphi \vdash \neg\psi \wedge \neg\neg\psi$	1-7
9.	$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \sim \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\neg\psi \wedge \neg\neg\psi))$	**TD** a 8

(c) $\vdash (\neg\psi \wedge \neg\neg\psi) \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$

1.	$\neg\psi \rightarrow (\neg\neg\psi \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi))$	**CG-4**
2.	$(\neg\psi \wedge \neg\neg\psi) \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi))$	Lema 5.8

(d) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \sim \psi) \to \sim \varphi)$

1.	$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to\sim \psi) \to (\varphi \to (\neg\psi \wedge \neg\neg\psi)))$	Parte b)
2.	$(\varphi \to \psi), (\varphi \to\sim \psi), \varphi \vdash (\neg\psi \wedge \neg\neg\psi)$	**TD** a 1
3.	$(\neg\psi \wedge \neg\neg\psi) \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	Parte c)
4.	$(\neg\psi \wedge \neg\neg\psi) \vdash (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	**TD** a 3
5.	$(\varphi \to \psi), (\varphi \to\sim \psi), \varphi \vdash (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	**Cut(2,4)**
6.	$(\varphi \to \psi), (\varphi \to\sim \psi) \vdash \varphi \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	**TD** a 5
7.	$(\varphi \to \psi), (\varphi \to\sim \psi) \vdash\sim \varphi$	abrev. $\sim$
8.	$(\varphi \to \psi) \vdash (\varphi \to\sim \psi) \to\sim \varphi$	**TD** a 7
9.	$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to\sim \psi) \to\sim \varphi)$	**TD** a 8

(e) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\sim \psi \to\sim \varphi)$

1.	$\sim \psi \to (\varphi \to\sim \psi)$	**Pos1**
2.	$\sim \psi \vdash (\varphi \to\sim \psi)$	**TD** a 1
3.	$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to\sim \psi) \to\sim \varphi)$	Parte d)
4.	$(\varphi \to \psi) \vdash ((\varphi \to\sim \psi) \to\sim \varphi)$	**TD** a 3
5.	$(\varphi \to \psi), (\varphi \to\sim \psi) \vdash\sim \varphi$	**TD** a 4
6.	$(\varphi \to \psi), \sim \psi \vdash\sim \varphi$	**Cut(2,5)**
7.	$(\varphi \to \psi) \vdash\sim \psi \to\sim \varphi$	**TD** a 6
8.	$(\varphi \to \psi) \to (\sim \psi \to\sim \varphi)$	**TD** a 7

(f) $\vdash\sim\sim \psi \to (\sim \varphi \to ((\psi \to \varphi) \to (\sim \psi\wedge \sim\sim \psi)))$

1.	$\sim\sim \psi$	Hip
2.	$\sim \varphi$	Hip
3.	$(\psi \to \varphi)$	Hip
4.	$(\psi \to \varphi) \to (\sim \varphi \to\sim \psi)$	Parte e)
5.	$(\sim \varphi \to\sim \psi)$	**MP(3,4)**
6.	$\sim \psi$	**MP(2,5)**
7.	$\sim \psi \to (\sim\sim \psi \to (\sim \psi\wedge \sim\sim \psi))$	**Pos5**
8.	$\sim\sim \psi \to (\sim \psi\wedge \sim\sim \psi)$	**MP(6,7)**
9.	$\sim \psi\wedge \sim\sim \psi$	**MP(1,8)**
10.	$\sim\sim \psi, \sim \varphi, (\psi \to \varphi) \vdash\sim \psi\wedge \sim\sim \psi$	1-9
11.	$\sim\sim \psi \to (\sim \varphi \to ((\psi \to \varphi) \to (\sim \psi\wedge \sim\sim \psi)))$	**TD** a 10

(g) $\vdash (\sim\psi\wedge \sim\sim\psi) \to (\neg(\psi\to\varphi)\wedge\neg\neg(\psi\to\varphi))$

1.	$\sim\psi\wedge\sim\sim\psi$	Hip
2.	$(\sim\psi\wedge\sim\sim\psi)\to\sim\psi$	**Pos3**
3.	$(\sim\psi\wedge\sim\sim\psi)\to\sim\sim\psi$	**Pos4**
4.	$\sim\psi$	**MP(1,2)**
5.	$\sim\sim\psi$	**MP(1,3)**
6.	$\sim\sim\psi\to(\sim\psi\to\neg(\psi\to\varphi))$	Parte a)
7.	$\sim\psi\to\neg(\psi\to\varphi)$	**MP(5,6)**
8.	$\neg(\psi\to\varphi)$	**MP(4,7)**
9.	$\sim\sim\psi\to(\sim\psi\to\neg\neg(\psi\to\varphi))$	Parte a)
10.	$\sim\psi\to\neg\neg(\psi\to\varphi)$	**MP(5,9)**
11.	$\neg\neg(\psi\to\varphi)$	**MP(4,10)**
12.	$\neg(\psi\to\varphi)\to(\neg\neg(\psi\to\varphi)\to(\neg(\psi\to\varphi)\wedge\neg\neg(\psi\to\varphi)))$	**Pos5**
13.	$\neg\neg(\psi\to\varphi)\to(\neg(\psi\to\varphi)\wedge\neg\neg(\psi\to\varphi))$	**MP(8,12)**
14.	$\neg(\psi\to\varphi)\wedge\neg\neg(\psi\to\varphi)$	**MP(11,13)**
15.	$\sim\psi\wedge\sim\sim\psi\vdash\neg(\psi\to\varphi)\wedge\neg\neg(\psi\to\varphi)$	1-14
16.	$(\sim\psi\wedge\sim\sim\psi)\to(\neg(\psi\to\varphi)\wedge\neg\neg(\psi\to\varphi))$	**TD** a 15

(h) $\vdash (\sim\sim\psi\wedge\sim\varphi)\to\sim(\psi\to\varphi)$

1.	$\sim\sim\psi\to(\sim\varphi\to((\psi\to\varphi)\to(\sim\psi\wedge\sim\sim\psi)))$	Parte f)
2.	$\sim\sim\psi,\sim\varphi,(\psi\to\varphi)\vdash\sim\psi\wedge\sim\sim\psi$	**TD** a 1
3.	$(\sim\psi\wedge\sim\sim\psi)\to(\neg(\psi\to\varphi)\wedge\neg\neg(\psi\to\varphi))$	Parte g)
4.	$(\sim\psi\wedge\sim\sim\psi)\vdash\neg(\psi\to\varphi)\wedge\neg\neg(\psi\to\varphi)$	**TD** a 3
5.	$\sim\sim\psi,\sim\varphi,(\psi\to\varphi)\vdash\neg(\psi\to\varphi)\wedge\neg\neg(\psi\to\varphi)$	**Cut(2,4)**
6.	$\sim\sim\psi,\sim\varphi\vdash(\psi\to\varphi)\to(\neg(\psi\to\varphi)\wedge\neg\neg(\psi\to\varphi))$	**TD** a 5
7.	$\sim\sim\psi,\sim\varphi\vdash\sim(\psi\to\varphi)$	abrev. $\sim$
8.	$\sim\sim\psi\to(\sim\varphi\to\sim(\psi\to\varphi))$	**TD** a 7
9.	$(\sim\sim\psi\to(\sim\varphi\to\sim(\psi\to\varphi)))\to((\sim\sim\psi\wedge\sim\varphi)\to\sim(\psi\to\varphi))$	Lema 5.8
10.	$(\sim\sim\psi\wedge\sim\varphi)\to\sim(\psi\to\varphi)$	**MP(8,9)**

(i) $\vdash\sim\sim\varphi\to\sim\sim(\psi\to\varphi)$

1.	$\varphi\to(\psi\to\varphi)$	**Pos1**
2.	$(\varphi\to(\psi\to\varphi))\to(\sim(\psi\to\varphi)\to\sim\varphi)$	Parte e)
3.	$\sim(\psi\to\varphi)\to\sim\varphi$	**MP(1,2)**
4.	$(\sim(\psi\to\varphi)\to\sim\varphi)\to(\sim\sim\varphi\to\sim\sim(\psi\to\varphi))$	Parte e)
5.	$\sim\sim\varphi\to\sim\sim(\psi\to\varphi)$	**MP(3,4)**

(j) $\vdash \varphi \rightarrow \sim\sim \varphi$

Equivalentemente:

$\vdash \varphi \rightarrow (\sim \varphi \rightarrow (\neg \sim \varphi \wedge \neg\neg \sim \varphi))$

1.	φ	Hip
2.	$\sim \varphi$	Hip
3.	$\sim \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow (\neg\neg \sim \varphi \wedge \neg \sim \varphi))$	Parte a)
4.	$\varphi \rightarrow (\neg\neg \sim \varphi \wedge \neg \sim \varphi)$	**MP(2,3)**
5.	$\neg\neg \sim \varphi \wedge \neg \sim \varphi$	**MP(1,4)**
6.	$\varphi, \sim \varphi \vdash \neg\neg \sim \varphi \wedge \neg \sim \varphi$	1-5
7.	$\varphi \rightarrow (\sim \varphi \rightarrow (\neg\neg \sim \varphi \wedge \neg \sim \varphi))$	**TD** a 6

(k) $\vdash \psi \rightarrow (\sim \varphi \rightarrow \sim (\psi \rightarrow \varphi))$

1.	$\psi \rightarrow \sim\sim \psi$	Parte j)
2.	$\sim \varphi \rightarrow \sim \varphi$	Lema 5.8
3.	$(\psi \wedge \sim \varphi) \rightarrow (\sim\sim \psi \wedge \sim \varphi)$	Lema 5.8
4.	$(\sim\sim \psi \wedge \sim \varphi) \rightarrow \sim (\psi \rightarrow \varphi)$	Parte h)
5.	$(\psi \wedge \sim \varphi) \rightarrow \sim (\psi \rightarrow \varphi)$	Lema 5.8
6.	$\psi \rightarrow (\sim \varphi \rightarrow \sim (\psi \rightarrow \varphi))$	Lema 5.8

(l) $\vdash \sim\sim \varphi \rightarrow \varphi$

1.	$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$	Lema 5.8
2.	$\varphi \vdash \varphi$	**TD** a 1
3.	$\sim\sim \varphi, \varphi \vdash \varphi$	**Mon**
4.	$\nabla \varphi \rightarrow \varphi$	**$CG'3$**
5.	$(\sim\sim \varphi \wedge \neg \varphi) \rightarrow \varphi$	abrev. ∇
6.	$\sim\sim \varphi \rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \varphi)$	Lema 5.8
7.	$\sim\sim \varphi \vdash \neg \varphi \rightarrow \varphi$	**TD** a 6
8.	$\sim\sim \varphi, \neg \varphi \vdash \varphi$	**TD** a 7
9.	$\sim\sim \varphi \vdash \varphi$	**SPC(3,8)**
10.	$\sim\sim \varphi \rightarrow \varphi$	**TD** a 9

(m) $\vdash (\sim\sim \varphi \wedge \sim\sim \psi) \rightarrow \sim\sim (\varphi \wedge \psi)$

1.	$\sim\sim \varphi \wedge \sim\sim \psi$	Hip
2.	$\sim (\varphi \wedge \psi)$	Hip
3.	$(\sim\sim \varphi \wedge \sim\sim \psi) \rightarrow \sim\sim \varphi$	**Pos3**
4.	$(\sim\sim \varphi \wedge \sim\sim \psi) \rightarrow \sim\sim \psi$	**Pos4**
5.	$\sim\sim \varphi$	**MP(1,3)**
6.	$\sim\sim \psi$	**MP(1,4)**
7.	$\sim\sim \varphi \rightarrow \varphi$	Parte l)
8.	$\sim\sim \psi \rightarrow \psi$	Parte l)
9.	φ	**MP(5,7)**
10.	ψ	**MP(6,8)**
11.	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$	**Pos5**
12.	$\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$	**MP(9,11)**
13.	$\varphi \wedge \psi$	**MP(10,12)**
14.	$\sim (\varphi \wedge \psi) \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\neg \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg \sim (\varphi \wedge \psi)))$	Parte a)
15.	$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\neg \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg \sim (\varphi \wedge \psi))$	**MP(2,14)**
16.	$\neg\neg \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg \sim (\varphi \wedge \psi)$	**MP(13,15)**
17.	$\sim\sim \varphi \wedge \sim\sim \psi, \sim (\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\neg \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg \sim (\varphi \wedge \psi)$	1-16
18.	$(\sim\sim \varphi \wedge \sim\sim \psi) \rightarrow (\sim (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\neg \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg \sim (\varphi \wedge \psi)))$	**TD** a 17
19.	$(\sim\sim \varphi \wedge \sim\sim \psi) \rightarrow \sim\sim (\varphi \wedge \psi)$	abrev. $\sim$

Demostración del Lema 5.13 Se presenta la demostración de cada inciso:

(a) $\vdash \sim \varphi \rightarrow \neg\varphi$

1.	$\neg\varphi \rightarrow (\sim \varphi \rightarrow \neg\varphi)$	**Pos1**
2.	$\neg\varphi, \sim \varphi \vdash \neg\varphi$	**TD** a 1
3.	$\sim \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\varphi)$	Prop 5.12
4.	$\sim \varphi, \varphi \vdash \neg\varphi$	**TD** a 3
5.	$\sim \varphi \vdash \neg\varphi$	S**PC(2,4)**
6.	$\sim \varphi \rightarrow \neg\varphi$	**TD** a 5

(b) $\vdash \sim \neg\varphi \rightarrow \sim\sim \varphi$

1.	$\sim \neg\varphi$	Hip
2.	$\sim \neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$	Parte a)
3.	$\neg\neg\varphi$	**MP(1,2)**
4.	$\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	**Cw2**
5.	φ	**MP(3,4)**
6.	$\varphi \rightarrow \sim\sim \varphi$	Prop 5.12
7.	$\sim\sim \varphi$	**MP(5,6)**
8.	$\sim \neg\varphi \vdash \sim\sim \varphi$	1-7
9.	$\sim \neg\varphi \rightarrow \sim\sim \varphi$	**TD** a 8

(c) $\vdash \neg\neg\varphi \to\sim \neg\varphi$

1.	$\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\neg\varphi))$	**CG-4**
2.	$(\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\neg\varphi)$	Lema 5.8
3.	$(\neg\neg\varphi \wedge \neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\neg\varphi)$	Lema 5.8
4.	$\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\neg\varphi))$	Lema 5.8
5.	$\neg\neg\varphi \to\sim \neg\varphi$	abrev. $\sim$

(d) $\vdash \neg\neg\varphi \to\sim\sim \varphi$

1.	$\neg\neg\varphi \to\sim \neg\varphi$	Parte c)
2.	$\sim \neg\varphi \to\sim\sim \varphi$	Parte b)
3.	$\neg\neg\varphi \to\sim\sim \varphi$	Lema 5.8

(e) $\vdash\sim \varphi \to \neg\neg \sim \varphi$

1.	$\sim \varphi$	Hip
2.	$\varphi \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	abrev. $\sim$
3.	$\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg(\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi))$	**CG-4**
4.	$\sim \varphi \to \neg\varphi$	Parte a)
5.	$\sim \varphi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg(\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi))$	Lema 5.8
6.	$\neg\neg\varphi \to \neg\neg(\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	**MP(5,1)**
7.	$(\varphi \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)) \wedge (\neg\neg\varphi \to \neg\neg(\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$	**R-AND(2,6)**
8.	$((\varphi \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)) \wedge (\neg\neg\varphi \to \neg\neg(\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi))$ $\to \neg\neg(\varphi \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi))$	**CG-2**
9.	$\neg\neg(\varphi \to (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi))$	**MP(7,8)**
10.	$\neg\neg \sim \varphi$	abrev. $\sim$
11.	$\sim \varphi \vdash \neg\neg \sim \varphi$	1-10
12.	$\sim \varphi \to \neg\neg \sim \varphi$	**TD** a 11

(f) $\vdash \neg \sim \varphi \to\sim\sim \varphi$

1.	$\neg \sim \varphi \to (\sim \varphi \to \neg \sim \varphi)$	**Pos1**
2.	$\sim \varphi \to \neg\neg \sim \varphi$	Parte e)
3.	$\neg \sim \varphi, \sim \varphi \vdash \neg \sim \varphi$	**TD** a 1
4.	$\sim \varphi \vdash \neg\neg \sim \varphi$	**TD** a 2
5.	$\neg \sim \varphi, \sim \varphi \vdash \neg\neg \sim \varphi$	**Mon** to 4
6.	$\neg \sim \varphi, \sim \varphi \vdash (\neg \sim \varphi \wedge \neg\neg \sim \varphi)$	**R-AND(3,5)**
7.	$\neg \sim \varphi \vdash\sim \varphi \to (\neg \sim \varphi \wedge \neg\neg \sim \varphi)$	**TD** a 6
8.	$\neg \sim \varphi \vdash\sim\sim \varphi$	abrev. $\sim$
9.	$\neg \sim \varphi \to\sim\sim \varphi$	**TD** a 8

(g) $\vdash \sim \varphi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)$

1.	$\sim \varphi$	Hip
2.	$\neg\neg\varphi$	Hip
3.	$\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)$	**CG-4**
4.	$(\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \to \neg\neg\psi$	Lema 5.8
5.	$(\neg\neg\varphi \wedge \neg\varphi) \to \neg\neg\psi$	Lema 5.8
6.	$\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\neg\psi)$	Lema 5.8
7.	$\neg\varphi \to \neg\neg\psi$	**MP(2,6)**
8.	$\sim \varphi \to \neg\varphi$	Parte a)
9.	$\sim \varphi \to \neg\neg\psi$	Lema 5.8
10.	$\neg\neg\psi$	**MP(1,6)**
11.	$\sim \varphi, \neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\psi$	1-10
12.	$\sim \varphi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)$	**TD** a 11

(h) $\vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\neg\varphi$

1.	$\neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	Hip
2.	$\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \to (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)$	**CG-3**
3.	$\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi$	**MP(1,2)**
4.	$(\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi) \to \neg\neg\varphi$	**Pos3**
5.	$\neg\neg\varphi$	**MP(3,4)**
6.	$\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\neg\varphi$	1-5
7.	$\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\neg\varphi$	**TD** a 6

(i) $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$

1.	$\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\neg\varphi$	Parte h)
2.	$(\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg(\varphi \wedge \psi))$	**E1**
3.	$\neg\varphi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$	**MP(1,2)**
4.	$\neg\varphi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$	**TD** a 3
5.	$\neg\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$	**Mon**
6.	$\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi))$	**TD** a 5
7.	$(\neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi))) \to ((\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi))$	Lema 5.8
8.	$(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$	**MP(6,7)**

(j) $\vdash (\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \rightarrow\sim\sim (\varphi \wedge \psi)$

1.	$\nabla\varphi \wedge \nabla\psi$	Hip
2.	$(\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \rightarrow \nabla\varphi$	**Pos3**
3.	$(\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \rightarrow \nabla\psi$	**Pos4**
4.	$\nabla\varphi$	**MP(1,2)**
5.	$\sim\sim \varphi \wedge \neg\varphi$	abrev. ∇
6.	$\nabla\psi$	**MP(1,3)**
7.	$\sim\sim \psi \wedge \neg\psi$	abrev. ∇
8.	$(\sim\sim \varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow\sim\sim \varphi$	**Pos3**
9.	$(\sim\sim \psi \wedge \neg\psi) \rightarrow\sim\sim \psi$	**Pos3**
10.	$\sim\sim \varphi$	**MP(5,8)**
11.	$\sim\sim \psi$	**MP(7,9)**
12.	$\sim\sim \varphi\wedge \sim\sim \psi$	**R-AND(10,11)**
13.	$(\sim\sim \varphi\wedge \sim\sim \psi) \rightarrow\sim\sim (\varphi \wedge \psi)$	Prop 5.12
14.	$\sim\sim (\varphi \wedge \psi)$	**MP(12,13)**
15.	$\nabla\varphi \wedge \nabla\psi \vdash\sim\sim (\varphi \wedge \psi)$	1-14
16.	$(\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \rightarrow\sim\sim (\varphi \wedge \psi)$	**TD** a 15

(k) $\vdash (\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$

1.	$\nabla\varphi \wedge \nabla\psi$	Hip
2.	$(\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \rightarrow \nabla\varphi$	**Pos3**
3.	$(\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \rightarrow \nabla\psi$	**Pos4**
4.	$\nabla\varphi$	**MP(1,2)**
5.	$\sim\sim \varphi \wedge \neg\varphi$	abrev. ∇
6.	$\nabla\psi$	**MP(1,3)**
7.	$\sim\sim \psi \wedge \neg\psi$	abrev. ∇
8.	$(\sim\sim \varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi$	**Pos4**
9.	$(\sim\sim \psi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg\psi$	**Pos4**
10.	$\neg\varphi$	**MP(5,8)**
11.	$\neg\psi$	**MP(7,9)**
12.	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	**R-AND(10,11)**
13.	$(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$	Parte i)
14.	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	**MP(12,13)**
15.	$\nabla\varphi \wedge \nabla\psi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$	1-14
16.	$(\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$	**TD** a 15

(l) $\vdash (\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi) \rightarrow \sim\sim (\varphi \rightarrow \psi)$

1.	$\sim\sim \psi \rightarrow \sim\sim (\varphi \rightarrow \psi)$	Prop 5.12
2.	$(\sim\sim \psi \wedge \neg\psi) \rightarrow \sim\sim \psi$	**Pos3**
3.	$(\sim\sim \psi \wedge \neg\psi) \rightarrow \sim\sim (\varphi \rightarrow \psi)$	Lema 5.8
4.	$(\sim\sim \psi \wedge \neg\psi) \vdash \sim\sim (\varphi \rightarrow \psi)$	**TD** a 2
5.	$\neg\neg\varphi, \sim\sim \psi \wedge \neg\psi \vdash \sim\sim (\varphi \rightarrow \psi)$	**Mon**
6.	$\neg\neg\varphi \rightarrow ((\sim\sim \psi \wedge \neg\psi) \rightarrow \sim\sim (\varphi \rightarrow \psi))$	**TD** a 5
7.	$\neg\neg\varphi \rightarrow (\nabla\psi \rightarrow \sim\sim (\varphi \rightarrow \psi))$	abrev. ∇
8.	$(\neg\neg\varphi \rightarrow (\nabla\psi \rightarrow \sim\sim (\varphi \rightarrow \psi))) \rightarrow ((\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi) \rightarrow \sim\sim (\varphi \rightarrow \psi))$	Lema 5.8
9.	$(\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi) \rightarrow \sim\sim (\varphi \rightarrow \psi)$	**MP(7,8)**

(m) $\vdash (\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi) \rightarrow (\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\neg\psi)$

1.	$\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi$	Hip
2.	$\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	Hip
3.	$\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$	**CG-2**
4.	$\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$	**MP(2,3)**
5.	$(\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi) \rightarrow \neg\neg\varphi$	**Pos3**
6.	$\neg\neg\varphi$	**MP(1,5)**
7.	$\neg\neg\psi$	**MP(4,6)**

(n) $\vdash (\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$

1.	$\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi$	Hip
2.	$(\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi) \rightarrow \nabla\psi$	**Pos4**
3.	$\nabla\psi$	**MP(1,2)**
4.	$\sim\sim \psi \wedge \neg\psi$	abrev. ∇
5.	$(\sim\sim \psi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg\psi$	**Pos4**
6.	$\neg\psi$	**TD** a 5
7.	$(\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi) \rightarrow (\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\neg\psi)$	Parte m)
8.	$\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\neg\psi$	**MP(1,7)**
9.	$(\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\neg\psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi))$	**E1**
10.	$\neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$	**MP(8,9)**
11.	$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	**MP(6,10)**

(ñ) $\vdash (\nabla\varphi \wedge \neg\neg\psi) \to \sim\sim (\varphi \wedge \psi)$

1.	$(\sim\sim \varphi \wedge \neg\varphi) \to \sim\sim \varphi$	**Pos3**
2.	$\neg\neg\psi \to \sim\sim \psi$	Parte d)
3.	$((\sim\sim \varphi \wedge \neg\varphi) \wedge \neg\neg\psi) \to (\sim\sim \varphi \wedge \sim\sim \psi)$	Lema 5.8
4.	$(\sim\sim \varphi \wedge \sim\sim \psi) \to \sim\sim (\varphi \wedge \psi)$	Prop 5.12
5.	$((\sim\sim \varphi \wedge \neg\varphi) \wedge \neg\neg\psi) \to \sim\sim (\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.8
6.	$(\nabla\varphi \wedge \neg\neg\psi) \to \sim\sim (\varphi \wedge \psi)$	abrev. 9

(o) $\vdash (\nabla\varphi \wedge \neg\neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$

1.	$\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to (\neg\neg\psi \to \neg\psi))$	**CG-4**
2.	$\neg\varphi \to ((\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi) \to \neg\psi)$	Lema 5.8
3.	$\neg\varphi \vdash (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi) \to \neg\psi$	**TD** a 2
4.	$\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \to (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)$	**CG-3**
5.	$\neg\varphi \vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi) \to (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)$	**Mon**
6.	$\neg\varphi \vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\psi$	Lema 5.8
7.	$\neg\varphi \to (\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\psi)$	**TD** a 6
8.	$(\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg\psi) \to (\neg\neg\psi \to \neg\neg\neg(\varphi \wedge \psi))$	**E1**
9.	$\neg\varphi \to (\neg\neg\psi \to \neg\neg\neg(\varphi \wedge \psi))$	Lema 5.8
10.	$(\sim\sim \varphi \wedge \neg\varphi) \to \neg\varphi$	**Pos4**
11.	$\nabla\varphi \to \neg\varphi$	abrev. ∇
12.	$\nabla\varphi \to (\neg\neg\psi \to \neg\neg\neg(\varphi \wedge \psi))$	Lema 5.8
13.	$(\nabla\varphi \wedge \neg\neg\psi) \to \neg\neg\neg(\varphi \wedge \psi))$	Lema 5.8
14.	$\neg\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$	**ON**
15.	$(\nabla\varphi \wedge \neg\neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.8

Demostración del Lema 5.14 Se presenta la demostración de cada inciso:

(a) $\vdash \neg\neg\varphi \to \sim \neg\varphi$

1.	$\neg\neg\varphi$	Hip
2.	$\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\neg\varphi))$	**CG-4**
3.	$\neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\neg\varphi))$	Lema 5.8
4.	$\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\neg\varphi)$	**MP(1,3)**
5.	$\sim \neg\varphi$	abrev. $\sim$
6.	$\neg\neg\varphi \vdash \sim \neg\varphi$	1-5
7.	$\neg\neg\varphi \to \sim \neg\varphi$	**TD** a 5

(b) $\vdash \nabla\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$

1.	$\nabla\varphi$	Hip
2.	$\sim\sim\varphi \wedge \neg\varphi$	abrev. ∇
3.	$(\sim\sim\varphi \wedge \neg\varphi) \to \neg\varphi$	**Pos4**
4.	$\neg\varphi$	**MP(2,3)**
5.	$\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$	**ON**
6.	$\neg\neg\neg\varphi$	**MP(4,5)**
7.	$\nabla\varphi \vdash \neg\neg\neg\varphi$	1-6
8.	$\nabla\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$	**TD** a 7

(c) $\vdash\sim\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$

1.	$\sim\varphi$	Hip
2.	$\sim\varphi \to \neg\varphi$	Lema 5.13
3.	$\neg\varphi$	**MP(1,2)**
4.	$\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$	**ON**
5.	$\neg\neg\neg\varphi$	**MP(3,4)**
6.	$\sim\varphi \vdash \neg\neg\neg\varphi$	1-5
7.	$\sim\varphi \to \neg\neg\neg\varphi$	**TD** a 6

(d) $\vdash\sim\varphi \to \neg\neg(\varphi \to \psi)$

1.	$\sim\varphi$	Hip
2.	$\sim\varphi \to (\varphi \to \psi)$	Prop 5.12
3.	$\sim\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)$	Lema 5.13
4.	$\sim\varphi \to ((\varphi \to \psi) \wedge (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi))$	**R-AND(2,3)**
5.	$(\varphi \to \psi) \wedge (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)$	**MP(1,4)**
6.	$((\varphi \to \psi) \wedge (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)) \to \neg\neg(\varphi \to \psi)$	**CG-2**
7.	$\neg\neg(\varphi \to \psi)$	**MP(5,6)**
8.	$\sim\varphi \vdash \neg\neg(\varphi \to \psi)$	1-7
9.	$\sim\varphi \to \neg\neg(\varphi \to \psi)$	**TD** a 8

(e) $\vdash \neg\neg\psi \to \neg\neg(\varphi \to \psi)$

1.	$\neg\neg\psi \to \psi$	**Cw2**
2.	$\psi \to (\varphi \to \psi)$	**Pos1**
3.	$\neg\neg\psi \to (\varphi \to \psi)$	Lema 5.8
4.	$\neg\neg\psi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)$	**Pos1**
5.	$\neg\neg\psi \to ((\varphi \to \psi) \wedge (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi))$	**R-AND(3,4)**
6.	$((\varphi \to \psi) \wedge (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)) \to \neg\neg(\varphi \to \psi)$	**CG-2**
7.	$\neg\neg\psi \to \neg\neg(\varphi \to \psi)$	Lema 5.8

(f) $\vdash (\nabla\varphi \wedge \sim\psi) \to\sim (\varphi \to \psi)$

1.	$(\sim\sim \varphi \wedge \neg\varphi) \to\sim\sim \varphi$	**Pos3**
2.	$\sim \psi \to\sim \psi$	Lema 5.8
3.	$((\sim\sim \varphi \wedge \neg\varphi)\wedge \sim \psi) \to (\sim\sim \varphi\wedge \sim \psi)$	Lema 5.8
4.	$(\sim\sim \varphi\wedge \sim \psi) \to\sim (\varphi \to \psi)$	Prop 5.12
5.	$((\sim\sim \varphi \wedge \neg\varphi)\wedge \sim \psi) \to\sim (\varphi \to \psi)$	Lema 5.8
6.	$(\nabla\varphi\wedge \sim \psi) \to\sim (\varphi \to \psi)$	abrev. ∇

(g) $\vdash (\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \to \neg\neg(\varphi \to \psi)$

1.	$\nabla\psi \to \psi$	**CG′3**
2.	$(\nabla\psi \to \psi) \to ((\nabla\varphi \wedge \varphi) \to (\nabla\psi \to \psi))$	**Pos1**
3.	$(\nabla\varphi \wedge \varphi) \to (\nabla\psi \to \psi)$	**MP(1,2)**
4.	$\nabla\varphi \to (\varphi \to (\nabla\psi \to \psi))$	Lema 5.8
5.	$\nabla\varphi \to (\nabla\psi \to (\varphi \to \psi))$	Lema 5.8
6.	$(\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \to (\varphi \to \psi)$	Lema 5.8
7.	$(\sim\sim \varphi \wedge \neg\varphi) \to \neg\varphi$	**Pos3**
8.	$\nabla\varphi \to \neg\varphi$	abrev. ∇
9.	$(\nabla\varphi \to \neg\varphi) \to ((\nabla\psi \wedge \neg\psi) \to (\nabla\varphi \to \neg\varphi))$	**Pos1**
10.	$(\nabla\psi \wedge \neg\psi) \to (\nabla\varphi \to \neg\varphi)$	**MP(8,9)**
11.	$\nabla\psi \to (\neg\psi \to (\nabla\varphi \to \neg\varphi))$	Lema 5.8
12.	$\nabla\psi \to (\nabla\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi))$	Lema 5.8
13.	$(\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	Lema 5.8
14.	$(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)$	**E1**
15.	$(\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)$	Lema 5.8
16.	$(\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \to ((\varphi \to \psi) \wedge (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi))$	**R-AND(6,15)**
17.	$((\varphi \to \psi) \wedge (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi)) \to \neg\neg(\varphi \to \psi)$	**CG-2**
18.	$(\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \to \neg\neg(\varphi \to \psi)$	Lema 5.8

(h) $\vdash (\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi) \to \nabla(\varphi \to \psi)$

1.	$(\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi) \to\sim\sim (\varphi \to \psi)$	Lema 5.13
2.	$(\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi) \to \neg(\varphi \to \psi)$	Lema 5.13
3.	$\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi \vdash \sim\sim (\varphi \to \psi)$	**TD** a 1
4.	$\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi \vdash \neg(\varphi \to \psi)$	**TD** a 2
5.	$\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi \vdash \sim\sim (\varphi \to \psi) \wedge \neg(\varphi \to \psi)$	**R-AND(3,4)**
6.	$\neg\neg\varphi \wedge \nabla\psi \vdash \nabla(\varphi \to \psi)$	abrev. ∇
7.	$(\neg\neg\varphi \wedge \nabla) \to \nabla(\varphi \to \psi)$	**TD** a 6

(i) $\vdash (\neg\neg\varphi\wedge \sim \psi) \to\sim (\varphi \to \psi)$

1.	$\neg\neg\varphi\wedge \sim \psi$	Hip
2.	$(\neg\neg\varphi\wedge \sim \psi) \to \neg\neg\varphi$	**Pos3**
3.	$(\neg\neg\varphi\wedge \sim \psi) \to\sim \psi$	**Pos4**
4.	$\neg\neg\varphi$	**MP(1,2)**
5.	$\sim \psi$	**MP(1,3)**
6.	$\neg\neg\varphi \to \varphi$	**Cw2**
7.	φ	**MP(4,6)**
8.	$\varphi \to (\sim \psi \to\sim (\varphi \to \psi))$	Prop 5.12
9.	$\sim \psi \to\sim (\varphi \to \psi)$	**MP(7,8)**
10.	$\sim (\varphi \to \psi)$	**MP(5,9)**
11.	$\neg\neg\varphi\wedge \sim \psi \vdash\sim (\varphi \to \psi)$	1-10
12.	$(\neg\neg\varphi\wedge \sim \psi) \to\sim (\varphi \to \psi)$	**TD** a 11

(j) $\vdash\sim \varphi \to\sim (\varphi \wedge \psi)$

1.	$\sim \varphi$	Hip
2.	$(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	**Pos3**
3.	$((\varphi \wedge \psi) \to \varphi) \to (\sim \varphi \to\sim (\varphi \wedge \psi))$	Prop 5.12
4.	$\sim \varphi \to\sim (\varphi \wedge \psi)$	**MP(2,3)**
5.	$\sim (\varphi \wedge \psi)$	**MP(1,4)**
6.	$\sim \varphi \vdash\sim (\varphi \wedge \psi)$	1-5
7.	$\sim \varphi \to\sim (\varphi \wedge \psi)$	**TD** a 6

(k) $\vdash (\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \to \nabla(\varphi \wedge \psi)$

1.	$(\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \to\sim\sim (\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.13
2.	$(\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.13
3.	$(\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \to (\sim\sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi))$	**R-AND(1,2)**
4.	$(\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \to \nabla(\varphi \wedge \psi)$	abrev. ∇

(l) $\vdash (\nabla\varphi \wedge \neg\neg\psi) \to \nabla(\varphi \wedge \psi)$

1.	$(\nabla\varphi \wedge \neg\neg\psi) \to\sim\sim (\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.13
2.	$(\nabla\varphi \wedge \neg\neg\psi) \to \neg(\varphi \wedge \psi)$	Lema 5.13
3.	$\nabla\varphi \wedge \neg\neg\psi \vdash \sim\sim (\varphi \wedge \psi)$	**TD** a 1
4.	$\nabla\varphi \wedge \neg\neg\psi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$	**TD** a 2
5.	$\nabla\varphi \wedge \neg\neg\psi \vdash \sim\sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)$	**R-AND(3,4)**
6.	$\nabla\varphi \wedge \neg\neg\psi \vdash \nabla(\varphi \wedge \psi)$	abrev. ∇
7.	$(\nabla\varphi \wedge \neg\neg\psi) \to \nabla(\varphi \wedge \psi)$	**TD** a 6

Demostración del Lema 5.16

Sea φ una fórmula y v una tres-valuación en $\mathbf{CG_3'}$. La prueba se realiza por inducción sobre la complejidad de φ.

Base: si $\varphi = p$, donde p es una fórmula atómica, entonces se debe mostrar que $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$, pero esto es evidente, ya que $Atoms(\varphi)_v = \varphi_v = p_v$.

Veamos ahora que para cualquier fórmula φ la afirmación es verdadera. Supongamos que, si ψ es una fórmula de complejidad menor que la de φ, entonces la afirmación se cumple.

Paso Inductivo: Suponga que φ no es una fórmula atómica. Se tiene tres casos:

Caso de la negación: si $\varphi = \neg\beta$.
Por hipótesis inductiva sabemos que $Atoms(\beta)_v \vdash \beta_v$. Entonces, tenemos tres subcasos:

1. si $v(\beta) = 2$, entonces $\beta_v = \neg\neg\beta$. Por hipótesis inductiva tenemos: $Atoms(\beta)_v \vdash \neg\neg\beta$. Note que $v(\varphi) = v(\neg\beta) = 0$, entonces $\varphi_v =\sim \varphi$, pero $\varphi = \neg\beta$, por lo tanto, $\varphi_v =\sim \neg\beta$. Observe que $Atoms(\beta)_v = Atoms(\varphi)_v$ ya que β y φ tiene las mismas fórmulas atómicas. Se debe demostrar que $Atoms(\varphi)_v \vdash\sim \neg\beta$. Por el Lema 5.14 $\vdash \neg\neg\beta \to\sim \neg\beta$ y por hipótesis de inducción $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg\beta$. Aplicando **MP** a las fórmulas previas se concluye $Atoms(\varphi)_v \vdash\sim \neg\beta$.

2. si $v(\beta) = 1$, entonces $\beta_v = \nabla\beta$. Por hipótesis inductiva tenemos: $Atoms(\beta)_v \vdash \nabla\beta$. Por otro lado, $v(\varphi) = v(\neg\beta) = 2$, así $\varphi_v = \neg\neg\varphi$, pero $\varphi = \neg\beta$, entonces $\varphi_v = \neg\neg\neg\beta$. Note que $Atoms(\beta)_v = Atoms(\varphi)_v$ ya que ambas fórmulas tienen las mismas fórmulas atómicas. Por demostrar que $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg\neg\beta$. Del Lema 5.14, sabemos que $\vdash \nabla\beta \to \neg\neg\neg\beta$ y por hipótesis inductiva, $Atoms(\varphi)_v \vdash \nabla\beta$. Con la aplicación de **MP** a los pasos previos, se concluye $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg\neg\beta$.

3. si $v(\beta) = 0$, entonces $\beta_v =\sim \beta$. Luego por hipótesis $Atoms(\beta)_v \vdash\sim \beta$. Observe que $v(\varphi) = v(\neg\beta) = 2$, así $\varphi_v = \neg\neg\varphi$, pero $\varphi = \neg\beta$, entonces $\varphi_v = \neg\neg\neg\beta$. Note que $Atoms(\beta)_v = Atoms(\varphi)_v$ ya que β y φ tienen las mismas fórmulas atómicas. Debemos probar que $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg\neg\beta$.

Por el Lema 5.14, sabemos que $\vdash\sim\beta \to \neg\neg\neg\beta$ y por hipótesis inductiva, $Atoms(\varphi)_v \vdash\sim\beta$. Aplicando **MP** a las fórmulas previas se concluye que $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg\neg\beta$.

Caso de la implicación: si $\varphi = \beta \to \zeta$.
Por hipótesis de inducción sabemos que $Atoms(\beta)_v \vdash \beta_v$ y $Atoms(\zeta)_v \vdash \zeta_v$. Entonces, tenemos seis subcasos:

1. si $v(\beta) = 0$, entonces $\beta_v =\sim\beta$. Por hipótesis de inducción se tiene $Atoms(\beta)_v \vdash\sim\beta$. Observe que $v(\varphi) = v(\beta \to \zeta) = 2$, así $\varphi_v = \neg\neg\varphi$, pero $\varphi = \beta \to \zeta$, por lo tanto, $\varphi_v = \neg\neg(\beta \to \zeta)$. Debemos verificar que $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg(\beta \to \zeta)$. Por el Lema 5.14, sabemos que $\vdash\sim\beta \to \neg\neg(\beta \to \zeta)$ y por hipótesis de inducción, $Atoms(\beta)_v \vdash\sim\beta$. Con la aplicación de **MP** a las fórmulas previas, se concluye que $Atoms(\beta)_v \vdash \neg\neg(\beta \to \zeta)$. Finalmente, por monotonía $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg(\beta \to \zeta)$.

2. si $v(\zeta) = 2$, entonces $\zeta_v = \neg\neg\zeta$. Por hipótesis: $Atoms(\zeta)_v \vdash \neg\neg\zeta$. Note que $v(\varphi) = v(\beta \to \zeta) = 2$, entonces $\varphi_v = \neg\neg\varphi$, pero $\varphi = \beta \to \zeta$, entonces $\varphi_v = \neg\neg(\beta \to \zeta)$. Debemos demostrar que $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg(\beta \to \zeta)$. Por el Lema 5.14, tenemos que $\vdash \neg\neg\zeta \to \neg\neg(\beta \to \zeta)$ y por hipótesis inductiva, $Atoms(\zeta)_v \vdash \neg\neg\zeta$. Con la aplicación de **MP** a los pasos previos, se concluye $Atoms(\zeta)_v \vdash \neg\neg(\beta \to \zeta)$. Por monotonía $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg(\beta \to \zeta)$.

3. si $v(\beta) = 1$ y $v(\zeta) = 0$, entonces $\beta_v = \nabla\beta$ y $\zeta_v =\sim\zeta$. Por hipótesis inductiva, tenemos que, $Atoms(\beta)_v \vdash \nabla\beta$ y $Atoms(\zeta)_v \vdash\sim\zeta$. Note que $v(\varphi) = v(\beta \to \zeta) = 0$. Así $\varphi_v =\sim\varphi$, entonces $\varphi_v =\sim(\beta \to \zeta)$. Necesitamos probar que $Atoms(\varphi)_v \vdash\sim(\beta \to \zeta)$. Por el Lema 5.14, sabemos que $\vdash (\nabla\beta \wedge \sim\zeta) \to\sim(\beta \to \zeta)$. Por hipótesis inductiva, monotonía y Reglas-AND tenemos que: $Atoms(\varphi)_v \vdash \nabla\beta \wedge \sim\zeta$. Con la aplicación de **MP** a los pasos previos se concluye que $Atoms(\varphi)_v \vdash\sim(\beta \to \zeta)$.

4. si $v(\beta) = 1$ y $v(\zeta) = 1$, entonces $\beta_v = \nabla\beta$ y $\zeta_v = \nabla\zeta$. Por hipótesis inductiva, tenemos que, $Atoms(\beta)_v \vdash \nabla\beta$ y $Atoms(\zeta)_v \vdash \nabla\zeta$. Note que $v(\varphi) = v(\beta \to \zeta) = 2$, así $\varphi_v = \neg\neg\varphi$, pero $\varphi = \beta \to \zeta$, entonces $\varphi_v = \neg\neg(\beta \to \zeta)$. Deseamos verificar que $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg(\beta \to \zeta)$. Por el Lema 5.14, se sabe que $\vdash (\nabla\beta \wedge \nabla\zeta) \to \neg\neg(\beta \to \zeta)$. Por hipótesis inductiva, monotonía y Reglas-AND tenemos que: $Atoms(\varphi)_v \vdash \nabla\beta \wedge \nabla\zeta$. Finalmente, por **MP** concluimos que $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg(\beta \to \zeta)$.

5. si $v(\beta) = 2$ y $v(\zeta) = 1$, entonces $\beta_v = \neg\neg\beta$ y $\zeta_v = \nabla\zeta$. Por hipótesis inductiva, se tiene que, $Atoms(\beta)_v \vdash \neg\neg\beta$ y $Atoms(\zeta)_v \vdash \nabla\zeta$. Observe que $v(\varphi) = v(\beta \to \zeta) = 1$, así $\varphi_v = \nabla(\beta \to \zeta)$. Por demostrar que $Atoms(\varphi)_v \vdash \nabla(\beta \to \zeta)$. Por el Lema 5.14, se sabe que $\vdash (\neg\neg\beta \wedge \nabla\zeta) \to \nabla(\beta \to \zeta)$ y por hipótesis inductiva, monotonía y Reglas-AND: $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg\beta \wedge \nabla\zeta$. Con la aplicación de **MP** a las fórmulas previas, se concluye que $Atoms(\varphi)_v \vdash \nabla(\beta \to \zeta)$.

6. si $v(\beta) = 2$ y $v(\zeta) = 0$, entonces $\beta_v = \neg\neg\beta$ y $\zeta_v =\sim \zeta$. Por hipótesis inductiva se tiene que, $Atoms(\beta)_v \vdash \neg\neg\beta$ y $Atoms(\zeta)_v \vdash\sim \zeta$. Note que $v(\varphi) = v(\beta \to \zeta) = 0$, así $\varphi_v =\sim \varphi$, pero $\varphi = \beta \to \zeta$, por lo tanto, $\varphi_v =\sim (\beta \to \zeta)$. Por demostrar que $Atoms(\varphi)_v \vdash\sim (\beta \to \zeta)$. Por el Lema 5.14, se sabe que $\vdash (\neg\neg\beta\wedge \sim \zeta) \to\sim (\beta \to \zeta)$ y por hipótesis inductiva, monotonía y Reglas-AND: $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg\beta\wedge \sim \zeta$. Aplicando **MP** a las fórmulas previas, se concluye que $Atoms(\varphi)_v \vdash\sim (\beta \to \zeta)$.

Caso de la conjunción: si $\varphi = \beta \wedge \zeta$.
Por hipótesis inductiva se sabe que $Atoms(\beta)_v \vdash \beta_v$ y $Atoms(\zeta)_v \vdash \zeta_v$. Entonces, tenemos seis subcasos:

1. si $v(\beta) = 0$, entonces $\beta_v =\sim \beta$. Por hipótesis inductiva, $Atoms(\beta)_v \vdash\sim \beta$. Observe que $v(\varphi) = v(\beta \wedge \zeta) = 0$, así $\varphi_v =\sim \varphi$, pero $\varphi = \beta \wedge \zeta$, entonces $\varphi_v =\sim (\beta \wedge \zeta)$. Por demostrar que $Atoms(\varphi)_v \vdash\sim (\beta \wedge \zeta)$. Por el Lema 5.14, se sabe que $\vdash\sim \beta \to\sim (\beta \wedge \zeta)$ y por hipótesis y monotonía, $Atoms(\varphi)_v \vdash\sim \beta$, aplicando **MP** a las fórmulas previas, se concluye que $Atoms(\varphi)_v \vdash\sim (\beta \wedge \zeta)$.

2. si $v(\zeta) = 0$, entonces la prueba es análoga al caso previo.

3. si $v(\beta) = 1$, $v(\zeta) = 1$, entonces $\beta_v = \nabla\beta$ y $\zeta_v = \nabla\zeta$. Por hipótesis inductiva: $Atoms(\beta)_v \vdash \nabla\beta$ y $Atoms(\zeta)_v \vdash \nabla\zeta$. Note que $v(\varphi) = v(\beta \wedge \zeta) = 1$. Así $\varphi_v = \nabla\varphi$, pero $\varphi = \beta \wedge \zeta$, entonces $\varphi_v = \nabla(\beta \wedge \zeta)$. Se debe mostrar que $Atoms(\varphi)_v \vdash \nabla(\beta \wedge \zeta)$. Por el Lema 5.14, se sabe que $\vdash (\nabla\beta \wedge \nabla\zeta) \to \nabla(\beta \wedge \zeta)$ y por hipótesis inductiva, monotonía y Reglas-AND, $Atoms(\varphi)_v \vdash \nabla\beta \wedge \nabla\zeta$. Aplicando **MP** a los pasos previos, se concluye que $Atoms(\varphi)_v \vdash \nabla(\beta \wedge \zeta)$.

4. si $v(\beta) = 1$ y $v(\zeta) = 2$, entonces $\beta_v = \nabla\beta$ y $\zeta_v = \neg\neg\zeta$. Por hipótesis inductiva: $Atoms(\beta)_v \vdash \nabla\beta$ y $Atoms(\zeta)_v \vdash \neg\neg\zeta$. Observe que $v(\varphi) =$

$v(\beta \wedge \zeta) = 1$, así $\varphi_v = \nabla\varphi$, pero $\varphi = \beta \wedge \zeta$, entonces $\varphi_v = \nabla(\beta \wedge \zeta)$. Por demostrar que $Atoms(\varphi)_v \vdash \nabla(\beta \wedge \zeta)$. Por el Lema 5.14, se sabe que $\vdash (\nabla\beta \wedge \neg\neg\zeta) \to \nabla(\beta \wedge \zeta)$ y por hipótesis inductiva, monotonía y Reglas-AND, $Atoms(\varphi)_v \vdash \nabla\beta \wedge \neg\neg\zeta$. Con la aplicación de **MP** a las fórmulas previas, se concluye que $Atoms(\varphi)_v \vdash \nabla(\beta \wedge \zeta)$.

5. si $v(\beta) = 2$ y $v(\zeta) = 1$, entonces la prueba es análoga al caso previo.

6. si $v(\beta) = 2$ y $v(\zeta) = 2$, entonces $\beta_v = \neg\neg\beta$ y $\zeta_v = \neg\neg\zeta$. Por hipótesis inductiva, $Atoms(\beta)_v \vdash \neg\neg\beta$ y $Atoms(\zeta)_v \vdash \neg\neg\zeta$. Note que $v(\varphi) = v(\beta\wedge\zeta) = 2$ así $\varphi_v = \neg\neg\varphi$, pero $\varphi = \beta\wedge\zeta$, por lo tanto, $\varphi_v = \neg\neg(\beta\wedge\zeta)$. Por demostrar que $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg(\beta \wedge \zeta)$. Por el axioma **CG3-3**, se sabe que $\vdash (\neg\neg\beta \wedge \neg\neg\zeta) \to \neg\neg(\beta \wedge \zeta)$ y por hipótesis inductiva, monotonía y Reglas-AND, $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg\beta \wedge \neg\neg\zeta$. Aplicando **MP** a los pasos previos, se concluye que $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg(\beta \wedge \zeta)$.

Demostración del Lema 5.17

(a) $\vdash \sim\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\neg\varphi)$

1.	$\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\neg\varphi$	**ON**
2.	$\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\neg\neg\varphi$	**TD** a 1
3.	$\sim\varphi, \neg\neg\varphi \vdash \varphi$	**Mon**
4.	$\vdash \sim\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\neg\varphi)$	**TD** a 3

(b) $\vdash \neg\neg\sim\varphi \to \neg\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi)$

1.	$\sim\varphi \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$	Prop 5.12
2.	$\sim\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\neg\varphi)$	Parte a)
3.	$\sim\varphi \vdash (\varphi \to \neg\neg\varphi)$	**TD** a 1
4.	$\sim\varphi \vdash (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\neg\varphi)$	**TD** a 2
5.	$\sim\varphi \vdash (\varphi \to \neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\neg\varphi)$	**R-AND(3,4)**
6.	$((\varphi \to \neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\neg\varphi)) \to \neg\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi)$	**CG-2**
7.	$\sim\varphi \vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi)$	**MP(5,6)**
8.	$\sim\varphi \to \neg\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi)$	**TD** a 7
9.	$\neg\neg\sim\varphi \to \sim\varphi$	**Cw2**
10.	$\neg\neg\sim\varphi \to \neg\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi)$	Lema 5.8

(c) $\vdash \neg\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\neg\varphi)$

1.	$\neg\neg\neg\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\neg\varphi)$	**Pos1**
2.	$\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\neg\varphi$	**ON**
3.	$\neg\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\neg\varphi)$	Lema 5.8

(d) $\vdash \neg\neg \sim \varphi \to \neg\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi)$

1.	$\neg\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\neg\varphi)$	Parte c)
2.	$\neg\neg\varphi \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$	**Pos1**
3.	$\neg\neg\varphi \vdash (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\neg\varphi)$	**TD** a 1
4.	$\neg\neg\varphi \vdash (\varphi \to \neg\neg\varphi)$	**TD** a 2
5.	$\neg\neg\varphi \vdash (\varphi \to \neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\neg\varphi)$	**R-AND(3,4)**
6.	$((\varphi \to \neg\neg\varphi) \wedge (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\neg\neg\varphi)) \to \neg\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi)$	**CG-2**
7.	$\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi)$	**MP(5,6)**
8.	$\neg\neg\varphi \to \neg\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi)$	**TD** a 7

(e) $\vdash \neg(\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \neg \sim \varphi$

1.	$\neg\neg \sim \varphi \to \neg\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi)$	Parte b)
2.	$(\neg\neg \sim \varphi \to \neg\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi)) \to (\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \neg \sim \varphi)$	**E1**
3.	$\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \neg \sim \varphi$	**MP(1,2)**

(f) $\vdash \neg(\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \sim\sim \varphi$

1.	$\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \neg \sim \varphi$	Parte e)
2.	$\neg \sim \varphi \to \sim\sim \varphi$	Lema 5.13
3.	$\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \sim\sim \varphi$	Lema 5.8

(g) $\vdash \neg(\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \neg\varphi$

1.	$(\neg\neg\varphi \to \neg\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi)) \to (\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \neg\varphi)$	**E1**
2.	$\neg\neg\varphi \to \neg\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi)$	Parte d)
3.	$\neg(\varphi \to \neg\neg\varphi) \to \neg\varphi$	**MP(1,2)**

(h) $\vdash (\neg\varphi \wedge (\varphi \to \neg\neg\varphi)) \to \sim \varphi$

Equivalentemente:

$(\neg\varphi \wedge (\varphi \to \neg\neg\varphi)) \to (\varphi \to (\neg\neg\varphi \wedge \neg\varphi))$

1.	$\vdash \neg\varphi \wedge (\varphi \to \neg\neg\varphi)$	Hip
2.	$\vdash \varphi$	Hip
3.	$\vdash (\neg\varphi \wedge (\varphi \to \neg\neg\varphi)) \to \neg\varphi$	**Pos3**
4.	$\vdash (\neg\varphi \wedge (\varphi \to \neg\neg\varphi)) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$	**Pos4**
5.	$\vdash \neg\varphi$	**MP(1,3)**
6.	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	**MP(1,4)**
7.	$\vdash \neg\neg\varphi$	**MP(2,6)**
8.	$\vdash \neg\neg\varphi \to (\neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \wedge \neg\varphi))$	**Pos5**
9.	$\vdash \neg\varphi \to (\neg\neg\varphi \wedge \neg\varphi)$	**MP(7,8)**
10.	$\vdash \neg\neg\varphi \wedge \neg\varphi$	**MP(5,9)**
11.	$\vdash \neg\varphi \wedge (\varphi \to \neg\neg\varphi), \varphi \vdash \neg\neg\varphi \wedge \neg\varphi$	1-10
12.	$\vdash (\neg\varphi \wedge (\varphi \to \neg\neg\varphi)) \to (\varphi \to (\neg\neg\varphi \wedge \neg\varphi))$	**TD** a 11

Bibliografía

[1] E. Ariza and J. Arrazola, *Analysis of the paraconsistency in some logics*. In Latin-American Workshop on Non-Monotonic Reasoning, Proceedings of the LA-NMR07 Workshop, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, Pue., México, 17th-19th September 2007, 2007.

[2] J. M. Arrazola, M. Osorio and E. Ariza. *The N'5 Logic*, 2010.

[3] D. Batens. *Frontiers of Paraconsistent Logic*. Studies in logic and computation. Research Studies Press Limited, 2000.

[4] J. Béziau. The future of paraconsistent logic. *Logical Studies*, 1999.

[5] J. Y. Béziau, *The paraconsistent logic Z. A possible solution to Jaśkowski's problem*. Logic and Logical Philosophy, 15(2), 99-111. 2006.

[6] J. Y. Béziau. *The age of Alternative Logics: Assessing Philosophy of Logic and Mathematics Today* chapter Many-Valued and Kripke Semantics, pages 89-101. Springer Netherlands, Dordrecht, 2006.

[7] V. Borja Macías. Extensiones de la Lógica Intuicionista, Extensiones de la Lógica de da Costa y su relación (Tesis doctoral). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, Pue., 2017.

[8] V. Borja Macías, and M. Pérez-Gaspar. Kripke-type Semantics for CG'_3. Electronic Notes in Theoretical Computer Science 328 (2016): 17-29.

[9] V. Borja Macías and M. Pérez-Gaspar. Kripke-type Semantics for G'_3 and CG'_3, eur-ws.org Vol. 1659, 1-8, 2016.

[10] W. A. Carnielli & M. E. Coniglio. *Paraconsistent logic: Consistency, contradiction and negation* (Vol. 40). New York: Springer. 2016.

[11] W. A. Carnielli and J. Marcos. A taxonomy of c-systems, *arXiv preprint math/0108036*, 2001.

[12] J. L. Castiglioni, R. Biraben and R. C. Ertola. *Strict paraconsistency of truth-degree preserving intuitionistic logic with dual negation*, Logic Journal of the IGPL, volume 22, number 2, pages 268–273, 2014.

[13] A. Chagrov and M. Zakharyaschev. *Modal Logic*. Oxford logic guides. Claredon Press, 1997.

[14] B. F. Chellas. *Modal Logic: An introduction*, volume 316. Cambridge Univ Press, 1997.

[15] M. E. Coniglio, A. Figallo-Orellano, J. Hernández-Tello and M. Pérez Gaspar. Some Remarks on logic G3', work in progress, 2018.

[16] N. C. da Costa et al. On the theory of inconsistent formal systems. *Notre dame journal of formal logic*, 15(4):497-510, 1974.

[17] M. O. Galindo, V. B. Macías, and J. R. E. A. Ramírez. Revisiting da costa logic. *Journal of Applied Logic*, 2016.

[18] E. L. Gomes and I. M. L. D'Ottaviano, *Para Além das Colunas de Hércules, uma história da Paraconsistência*, Editora UNICAMP, 2017.

[19] M. Kracht. On Extensions of Intermediate Logics by Strong Negation, *Journal of Philosophical Logic*, Vol 27, pag 49-73, 1998.

[20] G. Kurt. Eine interpretation des intuitionistischen aussagenkalküls, 1933.

[21] E. Mendelson. *Introduction to mathematical logic*. CRC press, 2009.

[22] G. Mints. *A Short Introduction to Intuitionistic Logic*, University Series in Mathematics. Springer, 2000.

[23] M. Osorio, J. R. Arrazola, J. L. Carballido, and O. Estrada. Programas lógicos disyuntivos y la demostrabilidad de átomos en cω. *Proceedings of the WS of Logic, Language and Computation, CEUR vol, 220.*

[24] M. Osorio and V. Borja Macías and J. R. Arrazola Ramírez, Revisiting da Costa logic, J. Applied Logic, volume 16:111-127, 2016,

[25] M. Osorio Galindo and J. L. Carballido Carranza. Brief study of g'3 logic. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 18(4):475-499, 2008.

[26] M. Osorio, and J. A. Joo Castellanos. Equivalence among RC-type paraconsistent logics, Logic Journal of the IGPL, Oxford University Press, volume 25, number 2, pages 239-252, 2017.

[27] M. Osorio, and J. A. Navarro. Modal logic $\mathbf{S5_2}$ and FOUR, Proceedings of Annual Meeting of the Association for Symbolic Logic, 2003.

[28] M. Osorio, and J. A. Navarro Pérez, and J. R. Arrazola Ramírez, and V. Borja Macías. Logics with common weak completions, Journal of Logic and Computation, Oxford University Press, volume 16, pages 867-890, 2006.

[29] M. Osorio, J. L. Carballido, C. Zepeda, et al. Revisiting $\mathbb{Z}$. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 55(1):129-155, 2014.

[30] M. Osorio, and J. L. Carballido, and C. Zepeda, and J. A. Castellanos. Weakening and Extending $\mathbb{Z}$, Logica Universalis, Springer, volume 9, number 3, pages 383-409, 2015.

[31] G. Palau. *Introducción filosófica a las lógicas no clásicas*, Universidad de Buenos Aires, Facultad de Filosofía y Letras, 2002.

[32] M. Pérez-Gaspar, A. Hernández-Tello, J. Arrazola and M. Osorio Galindo. An axiomatic approach to CG'_3 logic, sent to Logic Journal of the IGPL, 2018.

[33] G. Priest. Dualising intuitionistic negation. *Principia*, 13(2):165, 2009.

[34] G. Priest. *An Introduction to Non-Classical Logic*, Cambridge University Press, 2001.

[35] R. M. Solovay. Provability Interpretations of Modal Logic, *Israel Journal of Mathematics*, Vol 25, pag 287-303, 1976.

[36] D. van Dalen. *Logic and Structure*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, fifth edition, ISBN 978 1 4471 4558 5, 2004.

Índice alfabético

A

- alfabeto, 9
- axiomática, 11

C

- completitud
  - de $\mathbb{L}$, 46
  - fuerte de $\mathbf{G3'_h}$, 35
- conjunto
  - φ-saturado, 33
  - cerrado, 33
  - de funciones de verdad, 13
  - de valores de verdad, 13
  - de valores designados, 13
- consecuencia lógica, 12

D

- demostración, 11

E

- extensión, 10
  - conservativa, 10

F

- fórmula
  - e-válida, 38
  - atómica, 9
  - bien formada, 9
  - válida, 13
  - válida en un modelo, 14

I

- instancia, 11
- interpretación, 13

L

- lógica, 10
  - $\mathbf{C}_\omega$, 18
  - $\mathbf{G_3}$, 20
  - **Int** , 18
  - **Pos**, 17
  - $\mathbf{CG'_3}$, 37
  - **daC**, 21
  - $\mathbf{G'_3}$, 25
  - generada, 12
  - Tarskiana, 32
- Lema
  - de Kalmar, 45
  - de la verdad, 35
  - de Substitución, 48
- lenguaje proposicional, 9

M

- matriz, 13
- modelo
  - de Kripke, 14
  - de Kripke para $\mathbf{G'_3}$, 26
  - de Kripke para $\mathbf{G_3}$, 21
  - de Kripke para **daC** , 22
  - de Kripke para $\mathbf{CG'_3}$, 38
  - de Kripke para **Int** , 19

P

prueba, 11

R

regla de inferencia, 11
Relación
de accesibilidad, 14
de modelado, 14
de modelado para $\mathbf{G'_3}$, 38
de modelado para **Int**, 19
de modelado para **daC**, 23
robustez
de $\mathbb{L}$, 42
de $\mathbf{G3'_h}$, 32

S

Semántica
de Kripke para **daC**, 22
de Kripke para $\mathbf{G'_3}$, 25
de Kripke para $\mathbf{G_3}$, 21
de Kripke para **Int**, 19
de tipo Kripke para $\mathbf{CG'_3}$, 37
multivaluada para $\mathbf{CG'_3}$, 37
multivaluada para $\mathbf{G'_3}$, 25
multivaluada para $\mathbf{G_3}$, 20
sintaxis, 9
sistema de
Hilbert, 11
Hilbert restringido, 12
substitución, 10

T

tautología, 13
teorema, 11
básico de substitución, 48
de la deducción, 29
de Lindenbaum-Łos, 33
monotonía, 38

U

universo, 14

V

valuación, 14