



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Nuevas Técnicas en Teorías del Campo
Supersimétricas

Tesis presentada al

Postgrado en Física Aplicada

Como requisito parcial para la obtención del grado de

Doctor en Ciencias en Física Aplicada

por

M.Sc. Bryan Obed Larios López

Asesorado por

Dr. J. Lorenzo Díaz Cruz

Puebla, Puebla
Agosto 2018

Título: Nuevas Técnicas en Teorías del Campo Supersimétricas.

Estudiante: BRYAN OBED LARIOS LÓPEZ

COMITÉ

Dr. Jesús Toscano Chávez
Presidente

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Secretario

Dr. Alfonso Rosado Sásanchez
Vocal

Dra. Olga Felix Beltrán
Vocal Externo

Dr. Jaime Hernandez Sanchez
Vocal Externo

Dr. Alfredo Herrera Aguilar
Vocal Suplente

Dr. J. Lorenzo Díaz Cruz
Asesor

Índice general

Agradecimientos	IX
Resumen	XI
Introducción	XIII
Introducción	XIII
1.1. Física más allá del Modelo Estándar y Métodos Modernos de QFT	XVI
2. El Modelo Estándar de Partículas Elementales	1
2.1. Simetrías, Teoría de Norma y Contenido de Partículas	1
2.2. El Mecanismo de Brout-Englert-Higgs	4
2.3. Física más allá del Modelo Estándar de Partículas Elementales	7
2.3.1. El problema de la Jerarquía	7
2.3.2. Materia Oscura	8
3. Supersimetría y Supergravedad	11
3.1. Extensión Mínima Supersimétrica del Modelo Estándar (MSSM)	11
3.2. Supergravedad	13
3.2.1. Modelo de Wess-Zumino	13
3.2.2. Invariancia del modelo WZ bajo transformaciones supersimétricas globales	15
3.2.3. Invariancia del modelo WZ bajo transformaciones supersimétricas locales	16

3.3. El Gravitino	20
3.3.1. Super Mecanismo de Higgs	20
3.3.2. Interacciones con el gravitino	20
3.3.3. Lagrangiano Efectivo para gravitinos ligeros	21
4. Técnicas Perturbativas Modernas	23
4.1. Motivación para mejorar las técnicas perturbativas tradicionales	23
4.2. Formalismo de Helicidad	25
4.2.1. Producto de Espinores (Definiciones)	26
4.2.2. Convenciones	29
4.2.3. Propiedades	29
4.2.4. Ejemplo: cálculo de la amplitud para un proceso $2 \rightarrow 2$	30
4.2.5. Partículas vectoriales (no masivas)	34
4.2.6. Límite Suave	38
4.2.7. Análisis de los límites colineales a nivel de probabilidades	40
4.3. Grupo pequeño de Wigner	40
4.3.1. Complejificación de los 4-Momentos	42
4.4. Factorización de la Amplitud	43
4.4.1. Factor de Color	43
4.4.2. Amplitudes de Parke - Taylor (MHV)	45
4.5. Introducción a la relación de recursión BCFW	49
4.5.1. Desplazamiento complejo	49
5. Fenomenología del Gravitino	59
5.1. Decaimiento del Stop a tres Cuerpos (utilizando el método tradicional)	59
5.2. Vida media del Stop	60
5.2.1. Amplitudes para $\tilde{t}_1 \rightarrow \tilde{G} W b$	61
5.2.2. Amplitudes para $\tilde{t}_1 \rightarrow G W b$ con la aproximación gravitino \sim goldstino	65
5.3. Resultados Numéricos	67

6. Amplitudes de Helicidad para Interacciones con Gravitino Masivo	69
6.1. Formalismo de Espinores de Helicidad para el gravitino masivo de espín-3/2	70
6.2. Producción y decaimientos con gravitinos en el estado final	73
6.2.1. Amplitudes para la reacción $e^+e^- \rightarrow \tilde{G}\tilde{G}$: caso masivo y sin masa	73
6.2.2. Producción asociada a la reacción $e^-e^+ \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu\tilde{\chi}_0$	75
6.2.3. Amplitudes masivas y sin masa para el Decaimiento a dos cuerpos del Neutralino $\tilde{\chi}_0 \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu\gamma$	77
7. Sobre el Decaimiento del Stop a dos, tres y cuatro cuerpos	83
7.1. Decaimiento del Stop a dos, tres y cuatro cuerpos	84
7.1.1. Decaimiento del Stop a dos cuerpos con Gravitino LSP en el Estado Final	85
7.1.2. Decaimiento del stop a tres cuerpos: $\tilde{t} \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu Wb$	86
7.1.3. Decaimiento del stop a cuatro cuerpos $\tilde{t} \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu bl\nu_l$	88
7.2. Resultados Numéricos	90
7.2.1. Decaimiento del stop a dos cuerpos	90
7.2.2. Decaimiento del stop a tres y cuatro cuerpos	91
8. Conclusiones	93
8.1. Conclusiones	93
Bibliografía	95

Agradecimientos

Sin la irreverencia hacia lo tradicional y a la tan poderosa presión social, mi madre no hubiera podido contagiarme a pensar por mi mismo, a ser crítico y a luchar incansablemente para alcanzar las metas y sueños. Sin duda, agradezco esa escuela de lucha y tenacidad que aprendí de mi madre.

Siempre he mantenido un permanente deseo y las buenas intenciones de dedicarme a la investigación, aunque no siempre estuve en tierra fértil. Por abrirme las puertas y por confiar en mí, agradezco a mi amigo y asesor, al profesor Lorenzo Díaz Cruz. Como olvidar las múltiples y fértiles conversaciones que mantuvimos durante cuatro años en las cafeterías The Italian Coffee Company y Mi Viejo Café de Valsequillo.

Después de ocho avances de tesis mostrando paciencia y sobre todo profesionalismo, agradezco al jurado de mi tesis, a los doctores Jesús Toscano, Cupatitzio Ramírez y Alfonso Rosado.

Agradezco a esta hermosa tierra “México” y a su más preciado tesoro, su gente. La calidez que me ha brindado este país me han hecho sentir como en casa, y haberlos representado en varios eventos internacionales fue y seguirá siendo un tremendo honor. Una muestra de la gran generosidad de este país es la beca que me otorgo el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT). Es invaluable su aporte en mi formación y la de muchos jóvenes más, lo que me compromete a trabajar duro cada día y contribuir a la academia nacional e internacional.

Por último pero no menos importante, agradezco a las personas que me acompañaron en este viaje y aventura, por confiar en este proyecto y sobre todo en mí, gracias a mi esposa e hija. Padre tu pesas los corazones, sabes que todo es gracias a ti.

Resumen

En esta tesis estudiamos los métodos modernos de la teoría cuántica de campos (QFT por sus siglas en inglés). Específicamente, nuestro interés y esfuerzo ha estado dirigido a entender y mejorar los cálculos perturbativos en teorías de supergravedad. Estas teorías predicen una partícula masiva de espín-3/2 llamada gravitino, compañera supersimétrica del gravitón. El gravitino tiene una fenomenología muy rica, tanto en física de colisiones como en cosmología. Sin embargo, realizar cálculos perturbativos que involucren el gravitino en el estado final ha resultado una tarea extremadamente complicada, si se recurre a los métodos tradicionales de QFT.

Los resultados que se presentan en esta tesis no solo permiten evaluar de manera eficiente los valores de los observables físicos que involucran gravitinos en el estado final, los cuales podrían ser detectados en los colisionadores de partículas como el gran colisionador de hadrones (LHC por sus siglas en inglés). Además, permiten realizar un estudio profundo a nivel de las amplitudes de dispersión, incluso sin evaluar el módulo cuadrado de las amplitudes asociadas a las interacciones de partículas elementales. Aún y cuando nuestro objetivo principal ha sido el estudio de las interacciones de partículas en física más allá del modelo estándar de partículas elementales, nuestros resultados son igualmente adecuados para implementarse en el modelo estándar.

Introducción

Introducción heurística a la Física de Partículas

El modelo estándar (SM por sus siglas en inglés) de partículas elementales es una teoría que describe las partículas fundamentales y las interacciones entre ellas [1]. Es el modelo más exitoso en física, capaz de predecir y explicar los resultados de los experimentos en física de altas energías con una precisión sobresaliente. Recientemente, en el año 2012 se detectó experimentalmente en el LHC [2] el último bloque fundamental del Modelo Estándar, el famoso boson de Higgs [3].

La física de partículas hasta cierto punto es simple, respeta claramente el fundamento principal de la física y de la ciencia en general, es decir sus avances requieren tanto de las predicciones teóricas como de las detecciones experimentales. En este caso, nuestros laboratorios son los aceleradores de partículas, y el más colosal que se ha construido es el LHC, el cual se encuentra en el Centro Europeo para la Investigación Nuclear (CERN por sus siglas en inglés). El CERN se encuentra localizado al noroeste de la ciudad Ginebra, Suiza. Este acelerador de partículas se encuentra a casi cien metros bajo suelo, su geometría es un enorme círculo de 27 kilómetros de perímetro (ver Figura 1.1). Los grupos de trabajo de los principales detectores de partículas (CMS, Atlas, Alice, LHCb) tienen como uno de sus objetivos llevar a cabo una gran variedad de experimentos que prueban y descartan un abanico de nuevas teorías.

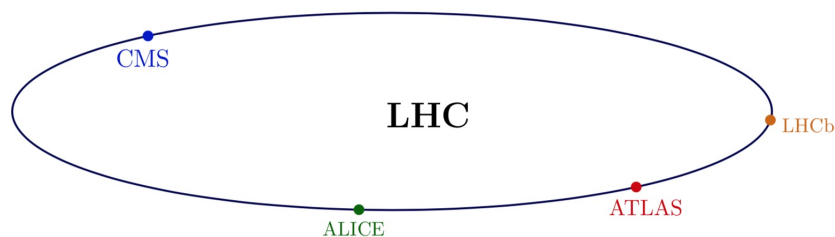


Figura 1.1: Esquema del LHC y sus principales detectores en el CERN.

Los detectores de partículas ubicados en diferentes puntos del LHC (Figura 1.1) generan una enorme cantidad de datos experimentales en cada corrida del LHC. Dichos datos demandan cada vez más una mayor precisión en los cálculos perturbativos que

realizamos utilizando herramientas de QFT. Es en estos detectores donde se espera encontrar evidencia de nueva física, posiblemente predicha por un modelo teórico.

Sin duda, ha habido un tremendo avance en los métodos de cálculo en la física de partículas, los que van en pro del mejoramiento de las predicciones teóricas, sobre todo estos han venido del sector de computo. Se ha implementado la tecnología de punta tanto en hardware como en software. Sin embargo, existe cierto retraso en la implementación de ideas frescas y modernas desde el punto de vista teórico.

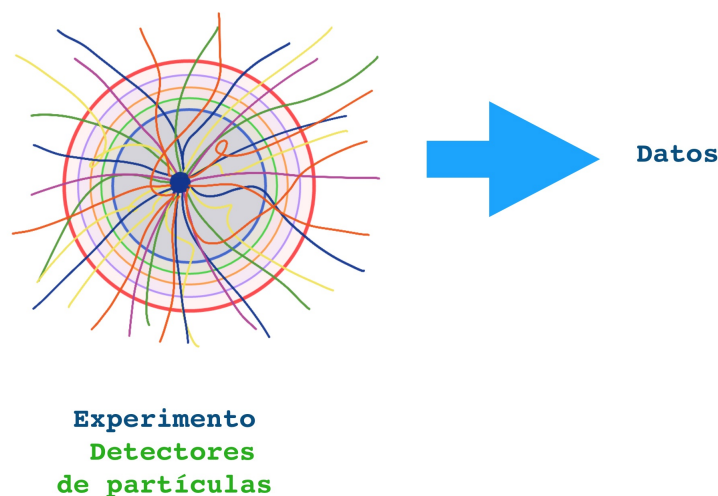


Figura 1.2: Esquema de la detección de partículas y generación de datos experimentales.

Los métodos tradicionales de QFT se basan en la existencia de los campos cuánticos (ver la referencia [4] para más información), los cuales se manipulan desde una función Lagrangiana (o Hamiltoniana) y mediante una serie de técnicas perturbativas obtenemos reglas que nos permiten calcular los observables físicos. Aunque el procedimiento es simple de recordar, el camino es sumamente complicado y engorroso. Incluso en los casos que se tienen pocas partículas en el estado final, un caso pedagógico digamos, la complejidad del cálculo es para nada trivial. A medida que se incrementa el número de partículas en el estado final (como pasa en la vida real, en los detectores de partículas) la situación se vuelve intratable, tanto numérica como analíticamente. En este sentido, la implementación de métodos modernos que reciclen de alguna manera las ideas más creativas de los métodos utilizados en estos últimos 50 años junto con la incorporación de técnicas más eficientes, es definitivamente necesario.

La función matemática que conecta la teoría con el experimento es la sección diferencial de corte ($\frac{d\sigma}{d\Omega}$) [1, 4]. Esta función se calcula utilizando los métodos desarrollados por QFT y predice teóricamente los datos experimentales que se obtienen en los colisionadores de partículas. A mayor precisión en el cálculo de esta función, mejor la concordancia con los datos experimentales. Lo interesante de esta función tan complicada de calcular con los métodos tradicionales (algunas veces imposible incluso con el computador más

potente) es que es proporcional al módulo cuadrado de otra función llamada amplitud de dispersión (ver Figura 1.3), tal como en mecánica cuántica la densidad de probabilidad es proporcional al módulo cuadrado de la función de onda ($\rho \sim |\Psi|^2$). La amplitud de dispersión es una cantidad compleja con naturaleza meramente cuántica, y nos dice cuanta probabilidad tiene un estado inicial de un determinado sistema de partículas interactuantes de evolucionar a un determinado estado final. Esta función no se ha tratado como el bloque fundamental en los métodos tradicionales utilizados por la comunidad de física de partículas. El ritual ha sido comenzar con los campos clásicos libres, luego cuantizarlos y posteriormente utilizar la Lagrangiana para que nos de una serie de reglas (llamadas reglas de Feynman) que permiten construir la amplitud de dispersión. En principio este no es el problema operativo del enfoque tradicional, digamos que esta es la parte fácil. El verdadero reto se encuentra en obtener la cantidad observable, la que conecta con el experimento.

Para obtener el tiempo de vida media de una partícula inestable (τ), o la sección de corte (σ) resultante de una colisión entre protones o una entre electrones y positrones, es necesario multiplicar la amplitud por su complejo conjugado ($|\mathcal{A}|^2$), esto si es un verdadero reto. La complejidad se hereda de los mismos campos cuánticos, ya que al construir la amplitud por las reglas convencionales y tradicionales de Feynman, la amplitud sin cuadrar carece de sentido físico, contiene información no física y no detectable por los experimentos que hacen engorrosos los cálculos perturbativos.

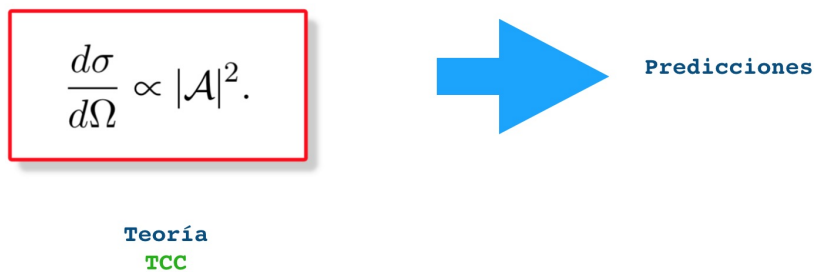


Figura 1.3: Proporcionalidad de la sección diferencial de corte y el módulo cuadrado de la amplitud.

Nuestro aporte en este trabajo de tesis fue implementar ideas recientes, métodos modernos que consideren la genialidad del trabajo de Richard Feynman [4], pero con el espíritu de conectar las amplitudes de forma directa con los observables físicos, es decir expresar las amplitudes en función de la DATA externa, con la que se configura y mide el experimento.

A mediados de los década de los ochentas, dos investigadores de Fermilab (Acelerador de Física de Partículas, ubicado en las afueras de Chicago, USA) Stephen Parke y Tomasz Taylor realizaron un gran aporte a la física teórica de partículas elementales [5]. Ellos

calcularon por primera vez (analíticamente) la amplitud de dispersión para la colisión de dos gluones que produce tres en el estado final, esto requiere considerar 25 diagramas de Feynman. Para la época, este cálculo se había realizado únicamente utilizando la fuerza bruta de un super computador (ver Sección 4.1), y el resultado involucraba cientos de páginas. El trabajo de Parke y Taylor no fue algo que despertara mucha curiosidad en la comunidad de físicos de partículas debido a que su técnica de cálculo no involucraba partículas masivas, que son las feas de esta película.

Como hemos mencionado, las amplitudes de dispersión están estrechamente relacionadas con los diagramas de Feynman, como se muestra en la expansión de la Figura 1.4. Lo que Parke y Taylor encontraron (aún y cuando fue para interacciones de partículas sin masa) fue una hermosa y compacta expresión para la amplitud de dispersión, que resulta de considerar todos los diagramas de Feynman a nivel árbol de la reacción $gg \rightarrow ggg$. El resultado de la amplitud de dispersión (módulo cuadrado) que con la ayuda de super computadores tomo más de cien páginas, ahora es simplemente el siguiente

$$\mathcal{A}(1_+, 2_+, 3_+, 4_-, 5_-) = i \frac{\langle 45 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle \langle 51 \rangle}. \quad (1.1)$$

Este bello resultado de la ecuación (1.1), junto con el fantástico trabajo de Edward Witten [6] a principios del siglo XXI, ha marcado una nueva ruta en la forma de hacer física, han surgido nuevos paradigmas no solo en física de partículas, ya que también parece surgir una nueva interpretación de los conceptos pilares de la física teórica [7, 8, 9, 10].

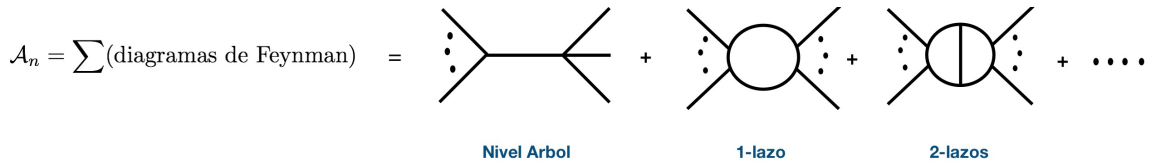


Figura 1.4: Expansión perturbativa en diagramas de Feynman. La amplitud de dispersión es la suma de todas las contribuciones que vienen de cada posible topología de los diagramas de Feynman.

En la Sección 4 profundizamos sobre las técnicas perturbativas modernas que se han implementado en recientes años.

1.1. Física más allá del Modelo Estándar y Métodos Modernos de QFT

Sabemos que la función matemática que conecta el experimento con la teoría es la sección diferencial de corte, la cual a la vez esta conectada con la amplitud de dispersión. Esto es un resultado general (para cualquier teoría cuántica de campos), funciona tanto para el SM de partículas elementales como para una teoría más general, como la teoría

de cuerdas (ver [6] para más información).

Hay que mencionar que el SM es una teoría cuántica de campos, y debe ser una descripción efectiva (aproximación) de otra teoría más general. Esto lo sabemos porque existen varios fenómenos naturales que el SM no puede describir y explicar [4, 11]. Para mencionar algunos de ellos, se tiene:

- La masa de los neutrinos
- Materia Oscura
- Energía Oscura
- Gravedad

Sabemos entonces, que el SM no es la teoría final que describe el universo que observamos. Supersimetría (SUSY) es una de las soluciones más populares para resolver varios de los problemas antes mencionados. Actualmente es de gran importancia tratar de predecir cuales serán las señales experimentales que se deben buscar para saber si la naturaleza es supersimétrica.

Las teorías supersimétricas han tenido un gran impacto en distintos dominios de física de partículas, extendiéndose desde fenomenología a cosmología incluyendo aspectos formales de la teoría cuántica de campos [11]. Sin embargo, y como hemos mencionado, es aún un tema abierto si SUSY se realiza en la naturaleza. La extensión supersimétrica del SM de partículas elementales ha sido estudiada desde el punto de vista teórico y también en el LHC se siguen buscando señales de SUSY. Los modelos supersimétricos pueden incluir una simetría discreta. La paridad-R, esta simetría garantiza la estabilidad de la partícula supersimétrica más ligera (LSP) [12], lo que permite a la LSP ser un buen candidato para materia oscura (DM por sus siglas en inglés).

En esta tesis estudiamos y exploramos el escenario donde el gravitino es el LSP y por ende un buen candidato a materia oscura. Los escenarios con el gravitino LSP como DM han sido considerados por [49, 14, 50]. En tales escenarios, la naturaleza de la siguiente partícula supersimétrica más ligera (NLSP por sus siglas en inglés) determina la fenomenología [52, 51] del gravitino. Consideramos además el caso que las especies de squarks pueden ser el NLSP, y en esos casos los candidatos naturales pueden ser el sbottom [65, 66, 20] o el stop ligero \tilde{t}_1 . Existen muchas constricciones experimentales y cosmológicas para los escenarios con el gravitino LSP y el stop NLSP que se han discutido en [21]. Resulta que la vida media del stop \tilde{t}_1 puede ser muy grande, en esos casos los límites relevantes vienen del colisionador Tevatron y estos implican que $m_{\tilde{t}_1} > 220$ GeV [22]. Conocer con alta precisión la vida media del stop es uno de los objetivos más importantes de este escenario, y de igual forma uno de los principales objetivos de este trabajo de tesis.

Como resultado de este trabajo de tesis se ha publicado 3 artículos y 2 proceedings en revistas indexadas en el *Science Citation index expanded*, de igual forma se esta concluyendo un trabajo más que será publicado en un revista indexada con revisión

de pares. Todos los trabajos en los que esta tesis se sustenta, han sido ampliamente divulgados en conferencias internacionales y nacionales. Por mencionar alguno de los lugares y conferencias, se tiene:

- Escuela de Física del LHC, UNESP, Sao Paulo, Brasil (2015).
- Escuela de Cosmología, ICTP, Trieste, Italia (2016).
- Simposio Latinoamericano de Física de Altas Energías (SILAFEA), Antigua Guatemala, Guatemala (2016).
- Reunión Anual de Partículas y Campos, México (2015-2017).
- Taller de Teoría del Campo, Gravitación y Cosmología (2015-2017).
- Amplitudes 2018, SLAC, California, USA.

Los trabajos publicados que surgieron como parte de esta tesis son los siguientes:

- J. Lorenzo Diaz-Cruz, Bryan O. Larios, “*Helicity Amplitudes for massive gravitinos in $N=1$ Supergravity*”, J.Phys. **G45** (2018).
- Bryan O. Larios, “*Helicity Amplitudes for production of massive gravitino/goldstino*”, J.Phys.Conf.Ser. **912** (2017).
- J. Lorenzo Diaz-Cruz, Bryan O. Larios, O. Meza-Aldama, “*An Introduction to the massive Helicity Formalism with applications to the Electroweak SM*”, J.Phys.Conf.Ser. **761** (2016).
- J.Lorenzo Díaz-Cruz, Bryan O. Larios, “*Stop Decay with LSP Gravitino in the final state*”, Eur.Phys.J. **C76** (2016) no.3, 157.
- J. Lorenzo Diaz-Cruz, Bryan Larios Lopez, O. Meza-Aldama, Jonathan Reyes Perez, “*Weyl spinors and the helicity formalism*”, Rev.Mex.Fis. **E61** (2015) 104.

La organización de esta tesis es la siguiente: en la Introducción, comenzamos motivando las técnicas modernas de QFT y mencionando la necesidad de física más allá del SM de partículas elementales. Posteriormente, en el Capítulo 3 se presenta una introducción heurística de supersimetría y supergravedad, mostrando con el modelo de Wess-Zumino que bajo transformaciones supersimétricas locales, surge naturalmente gravedad en la teoría. En el Capítulo 4 introducimos las técnicas modernas de QFT perturbativa. Justamente en el Capítulo 4, decidimos presentar el material con un enfoque pedagógico por varias razones, la principal es que se trata de un tema que no se había estudiado anteriormente en la comunidad de física de partículas de México, por lo que este material puede servir como un primer contacto entre los estudiantes y las técnicas modernas de QFT desarrolladas en el siglo XXI. En el Capítulo 5, se presenta la fenomenología del gravitino, calculando inicialmente con el enfoque tradicional. En este capítulo presentamos parte de nuestros resultados originales. En el Capítulo 6 se presentan las nuevas reglas

de Feynman para el gravitino masivo, las que resultan de utilizar el formalismo de helicidad masivo, de igual forma mostramos varios cálculos de amplitudes de helicidad con gravitinos masivos en el estado final. En el Capítulo 7 se aplican las nuevas reglas de Feynman para el gravitino masivo a estudios de varios decaimientos del stop como NLSP. Finalmente se presentan las Conclusiones de este trabajo de tesis doctoral.

Capítulo 2

El Modelo Estándar de Partículas Elementales

El Modelo Estándar (SM) es la descripción más exitosa que se tiene en la actualidad para describir las partículas elementales. Es una teoría cuántica de campos que explica la dinámica de nuestro Universo. El SM incorpora tres fuerzas fundamentales: la fuerza electromagnética, débil y fuerte, además incluye diferentes tipos de partículas. El SM nos dice que toda la materia está compuesta por campos fermiónicos que interactúan entre sí vía campos vectoriales. Para entender el contenido de campos del SM es necesario comenzar con la definición de simetría.

2.1. Simetrías, Teoría de Norma y Contenido de Partículas

Las simetrías han jugado un papel muy importante en la historia de la física. En ese sentido, el SM no es la excepción ya que es basado en una simetría local. Sabemos por el teorema de Noether que cualquier simetría en la acción de un sistema físico conduce a una ley de conservación [23]. Si consideramos por ejemplo la electrodinámica cuántica (QED por sus siglas en inglés), la invariancia bajo transformaciones locales implica la existencia de campos de norma. Veamos esta consecuencia en el caso que solo consideramos fermiones en QED. El Lagrangiano libre toma la siguiente forma

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi, \quad (2.1)$$

donde ψ es el campo correspondiente a las partículas con espín-1/2, se está utilizando la convención $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$, y γ^μ es la usual matriz de Dirac. El Lagrangiano (2.1) es invariante bajo transformaciones de norma globales de la forma $\psi \rightarrow e^{-i\alpha}\psi$, lo que significa que α es una fase constante. Esta transformación implica que existe una cantidad conservada, en este caso es la corriente de Dirac $j^\mu(x)$, la cual cumple lo siguiente

$$\partial_\mu j^\mu = 0; \quad j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (2.2)$$

El Lagrangiano (2.1) no es invariante ante transformaciones de norma locales, que es el caso que la fase $\alpha(x)$ es función del espacio tiempo. Sin embargo, el problema se puede resolver si la derivada parcial se redefine de la siguiente manera

$$\partial^\mu \rightarrow D^\mu \equiv \partial^\mu + iqA^\mu, \quad (2.3)$$

donde A^μ es el campo vectorial. Si se realiza la sustitución $\partial^\mu \rightarrow D^\mu$ en el Lagrangiano (2.1), este se vuelve invariante bajo la siguientes transformaciones locales

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\alpha(x)}\psi, \quad (2.4)$$

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \frac{1}{q}\partial^\mu\alpha(x), \quad (2.5)$$

el Lagrangiano invariante toma la siguiente forma

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu. \quad (2.6)$$

El segundo término en el Lagrangiano (2.6) resulta de imponer la invariancia local. Este nuevo término es muy importante ya que describe la interacción entre el campo vectorial de norma A^μ y los campos fermiónicos, los cuales ya existían en la teoría. Notamos entonces, que una teoría que tenía únicamente campos asociados a materia necesitan campos vectoriales para proveer interacción entre los fermiones.

Este principio de invariancia de norma local se puede generalizar para todos los tipos de interacciones, y generar términos de interacción para todas las fuerzas (E&M, débil y fuerte, incluso gravitacional) partiendo de simetrías específicas que se imponen en la teoría. Esta es la idea fundamental del SM inicialmente propuesta por Sheldon Glashow [24] y también propuesta independientemente por Abdus Salam y John Ward [25] y extendida finalmente por Steven Weinberg [26]. El SM se fue desarrollando por diferentes etapas, inicialmente la teoría electrodébil surgió a partir de utilizar el grupo $SU(2) \times U(1)_Y$, lo que permitió relacionar la carga eléctrica con el isospín y la hipercarga leptónica de una partícula. El Lagrangiano correspondiente a los campos leptónicos toma la siguiente forma

$$\mathcal{L} = \bar{L}\gamma^\mu D_\mu L + \bar{e}_R\gamma^\mu D'_\mu e_R - \frac{1}{4}W^{\mu\nu i}W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

donde la derivada covariante están definidas como sigue

$$D_\mu = \partial_\mu + i\frac{g}{2}\sigma^i W_\mu^i + i\frac{g'}{2}B_\mu, \quad (2.8)$$

$$D'_\mu = \partial_\mu + ig'B_\mu, \quad (2.9)$$

donde L es el doblete de isospín que contiene el neutrino izquierdo y el electrón, e_R es el electrón derecho, σ^i son las matrices de Pauli, y g y g' son las constantes de acoplamiento.

2.1. SIMETRÍAS, TEORÍA DE NORMA Y CONTENIDO DE PARTÍCULAS

$W_{\mu\nu}^i$ y $B_{\mu\nu}$ son los campos tensoriales de fuerza, los cuales son como sigue

$$W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g\epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k, \quad (2.10)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (2.11)$$

El contenido de materia del Universo no solo incluye leptones, también incluye hadrones, y hoy sabemos que los hadrones están compuestos por quarks. La simetría que relaciona la carga de color en los quarks es $SU(3)_c$. El SM es definido por tener $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ como la simetría de norma. Por cada campo de bosón de norma se asocia un generador del álgebra de cada grupo. Por lo tanto, existen ocho $(3^2 - 1)$ partículas con espín-1 (con color o se les suele llamar coloreadas) asociadas al grupo de norma $SU(3)_c$. Estos bosones de norma son conocidos como gluones. Además, en el SM se tiene que hay cuatro partículas sin color, $W_{\mu\nu}^i$ y $B_{\mu\nu}$, los cuales se mezclan para formar los bosones de norma masivos W^\pm y Z^0 , además del fotón. De forma esquemática, el contenido completo del SM se resumen en la Figura (2.1). Hasta el momento no se ha mencionado el campo escalar. El SM es una teoría que se construye a partir de un Lagrangiano con campos que representan partículas no masivas. El mecanismo para dotar de masa a las partículas del SM requiere de la existencia de una partícula descrita por un campo escalar, el bosón de Higgs (en realidad y para dar el crédito de forma correcta, es el bosón Brout-Englert-Higgs, pero en esta tesis lo llamaremos en corto bosón de Higgs). Este mecanismo es llamado mecanismo BEH [3] y se explica a continuación.

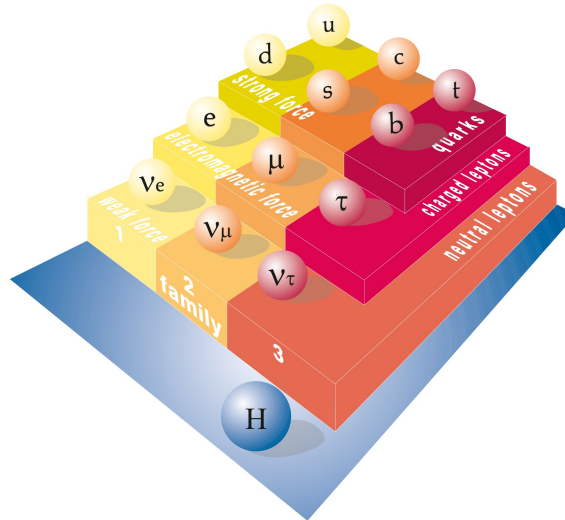


Figura 2.1: Ilustración del contenido de partículas del SM. Esta adaptación es tomada de [27].

2.2. El Mecanismo de Brout-Englert-Higgs

Sabemos del teorema de Noether que simetrías implican leyes de conservación. Una consecuencia es la invariancia del Lagrangiano y del vacío de la teoría, sin embargo, existen situaciones donde el Lagrangiano es invariante bajo una simetría pero no lo es así el vacío. Cuando este ocurre, la simetría esta rota. Consideremos por ejemplo un campo escalar ϕ cuyo Lagrangiano toma la siguiente forma [43]

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi), \quad V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \quad (2.12)$$

donde ϕ es un campo real y $\lambda > 0$. El Lagrangiano (2.12) es invariante bajo la transformación $\phi \rightarrow -\phi$. Al calcular el valor de expectación del vacío (vev), se tiene que analizar dos casos por separado, estos son los siguientes:

- (a) Si $\mu^2 > 0$, el vacío es invariante

$$\langle\phi\rangle_0 = \langle 0|\phi|0\rangle = 0. \quad (2.13)$$

- Si $\mu^2 < 0$, tenemos

$$\langle\phi\rangle_0 = \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \equiv \pm\frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (2.14)$$

El vacío para el caso $\mu^2 < 0$ ya no es más cero, surge una degeneración que básicamente se debe a la elección entre v y $-v$, como se muestran en las siguientes gráficas

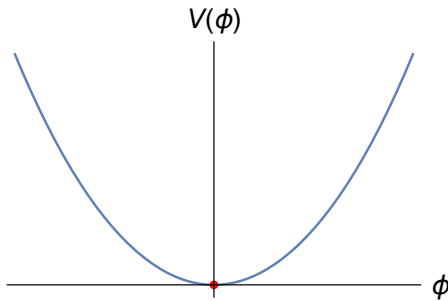


Figura 2.2: Gráfica del Potencial $V(\phi)$ Ec. (2.12). En este caso para valores $\mu^2 > 0$, notamos que no hay degeneración, solo hay un valor mínimo para el potencial (punto rojo).

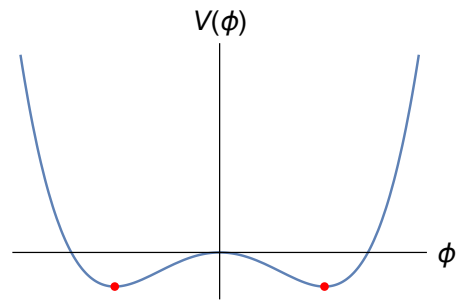


Figura 2.3: Gráfica del Potencial $V(\phi)$ Ec. (2.12). En este caso para valores $\mu^2 < 0$, en este caso se presenta una degeneración, y se tienen dos valores mínimos para el potencial (puntos rojos).

Para el caso de la gráfica de la derecha se puede elegir un valor mínimo (cualquiera de $\langle\phi\rangle_0 = \pm v$), y luego se redefine el campo escalar para que el vacío se corra al origen,

como se muestra a continuación

$$\xi(x) \equiv \phi(x) - \langle \phi \rangle_0 = \phi(x) - v. \quad (2.15)$$

Hemos corrido el vacío al origen $\langle \xi \rangle_0 = 0$, ahora el Lagrangiano (2.12) se vuelve

$$\mathcal{L}_\xi = \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi - \lambda v^2 \xi^2 - \lambda v \xi^3 - \frac{1}{4} \lambda \xi^4. \quad (2.16)$$

Se tiene ahora el Lagrangiano para el campo escalar ξ con masa $m_\xi = \sqrt{-2\mu^2}$. Redefiniendo el campo ϕ fue posible obtener el campo escalar masivo ξ , esto es conocido como la ruptura espontánea de la simetría, y es el mecanismo principal para dotar de masa a los fermiones y bosones del SM. Es necesario definir un doblete compuesto por dos campos escalares complejos [43], este es como sigue

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_3 - i\phi_4 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Ahora es necesario sumar el Lagrangiano del campo escalar al Lagrangiano de la Ec. (2.7), pero se deben usar las derivadas covariantes de la ecuaciones (2.8) y (2.9) para mantener la invariancia bajo el grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$. El Lagrangiano para el campo escalar en esta nueva base (Ec. (2.17)) toma la siguiente forma

$$\mathcal{L}_H = |D_\mu \phi|^2 - V(\phi), \quad (2.18)$$

donde el potencial $V(\phi)$ es como sigue

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \left(\sum_{j=1}^4 \phi_j^2 \right) + \frac{1}{4} \lambda \left(\sum_{j=1}^4 \phi_j^2 \right)^2. \quad (2.19)$$

Tomando arbitrariamente los valores $\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0$ y $\phi_3 = v$, donde v es el *vev* del Higgs, y se introduce un nuevo campo h como la excitación del *vev*, se rompe la simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$ a $U(1)_{E\&M}$ si se elige cierto valor específico para $\frac{-\mu^2}{2\lambda}$. Con las consideraciones mencionadas, el campo escalar ϕ de la Ec. (2.17) se expresa ahora de la siguiente manera

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ v + h \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

El potencial $V(\phi)$ se convierte en

$$V = -\frac{1}{4} \lambda v^4 + \lambda v^2 h^2 + \lambda v h^3 + \frac{1}{4} \lambda h^4. \quad (2.21)$$

El segundo término del potencial nos dice que la masa del campo de Higgs (h) es $m_h^2 = 2v^2 \lambda$. Los demás términos (h^3, h^4) son de auto acoplamiento del bosón de Higgs.

El término cinético del Lagrangiano ($|D_\mu\phi|^2$) toma la siguiente forma

$$\left| \left(i\frac{g}{2}\sigma^i W_\mu^i + i\frac{g'}{2}B_\mu \right) \phi \right|^2 = \frac{(v+h)^2}{8} \left(g^2(W_\mu^1)^2 + g^2(W_\mu^2)^2 + (-gW_\mu^3 + g'B_\mu)^2 \right). \quad (2.22)$$

Definimos los siguientes campos vectoriales

$$Z_\mu^0 = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(gW_\mu^3 - g'B_\mu), \quad (2.23)$$

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \pm iW_\mu^2), \quad (2.24)$$

$$A_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(g'W_\mu^3 + gB_\mu), \quad (2.25)$$

si se reescribe la ecuación (2.22) en término de los nuevos campos Ecs. (2.23), (2.24) y (2.25), se identifican los siguientes términos de masa

$$M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} \left(M_Z^2 Z_\mu Z^\mu + M_A^2 A_\mu A^\mu \right), \quad (2.26)$$

por lo que las masas asociadas a los campos Z_μ , W_μ y A_μ son las siguientes

$$M_Z = \frac{v}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}, \quad M_W = \frac{vg}{2}, \quad M_A = 0. \quad (2.27)$$

Es posible expresar el acoplamiento electromagnético en término de los acoplamientos g y g' , es decir $g_{E\&M} = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$. De igual forma se puede expresar en términos de los ángulos de mezcla

$$g_{E\&M} = g \sin \theta_W, \quad \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (2.28)$$

Existe una interesante relación entre la masa de los bosones W^\pm y la del bosón Z , esta es $M_W = M_Z \cos \theta_W$. Se puede conocer con precisión el valor del vev del Higgs ya que existe la siguiente relación

$$G_F = \sqrt{2} \frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{\sqrt{2}}{2v^2}, \quad (2.29)$$

donde G_F es la constante de Fermi, y es conocida experimentalmente con gran precisión, $G_F = 1.16637 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$ [1]. De Ec. (2.29) se obtiene que el vev es $v \sim 246 \text{ GeV}$, y para este valor de v la simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$ se rompe.

Para obtener la masa de los fermiones se utiliza un mecanismo similar, se debe de agregar al Lagrangiano de la Ec. (2.7) el siguiente Lagrangiano de Yukawa

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = \lambda_{E\&M} \bar{L} \phi e_R - \lambda_d \bar{Q}_L \phi d_R - \lambda_u \bar{Q}_L (i\sigma_y \phi^*) u_R + h.c. \quad (2.30)$$

donde Q_L es el doblete de isospín que contiene los quarks up y down (arriba y abajo)

izquierdos, σ_y es una matriz de Pauli. Después de romper espontáneamente la simetría, los fermiones adquieren masa (menos los neutrinos) $m_f = \lambda_f \frac{v}{2}$. El acoplamiento λ_f se le conoce como acoplamiento de Yukawa [43] y se determinan experimentalmente.

2.3. Física más allá del Modelo Estándar de Partículas Elementales

Como hemos mencionado en las secciones previas, el SM de partículas elementales es una de las teorías más exitosas, no solo de la física sino de la ciencia en general. Sin embargo, el SM es muy arbitrario para ser una teoría final. Por ejemplo, si se desprecia la masa de los neutrinos, existen 20 parámetros libres (hay 7 más si se considera los neutrinos masivos). Muchos físicos teóricos de partículas elementales creen que debe haber nueva física a la escala de TeVs. Las complicaciones de SM pueden describirse en algunos de los problemas que enumeramos a continuación.

2.3.1. El problema de la Jerarquía

Muchas características del SM surgen del mecanismo de Higgs, es procedimiento de generar masas a las partículas observadas. Sin embargo, solo se ha discutido los cálculos perturbativos a bajo orden o contribuciones a nivel árbol, las correcciones radiativas a la masa de la partícula deben calcularse cuando se consideran correcciones al propagador a un lazo. Si se toma por ejemplo una teoría de juguete con un solo fermión ψ acoplado a un campo escalar masivo ϕ , el Lagrangiano es como sigue

$$\mathcal{L}_\phi = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi + |\partial_\mu\phi|^2 - m^2|\phi|^2 - \lambda_f\phi\bar{\psi}\psi, \quad (2.31)$$

se ha supuesto que la simetría se ha roto espontáneamente y el fermión obtiene masa $m_f = \lambda_f \frac{v}{\sqrt{2}}$ a nivel árbol. Para calcular la corrección a la masa del fermión dentro de esta teoría de juguete, es necesario considerar la contribución al propagador del fermión a un lazo debido a la existencia de la partícula escalar, como se muestra en la Figura (2.4), la masa renormalizada del fermión toma la siguiente forma

$$m_f = m_f^{(0)} + \delta m_f, \quad (2.32)$$

donde $m_f^{(0)} = \lambda_f \frac{v}{\sqrt{2}}$, y la corrección a la masa depende de la energía de corte de la teoría Λ

$$\delta m_f = -\frac{3\lambda_f^2 m_f}{64\pi^2} \text{Ln} \left(\frac{\Lambda^2}{m_f^2} \right) + \dots \quad (2.33)$$

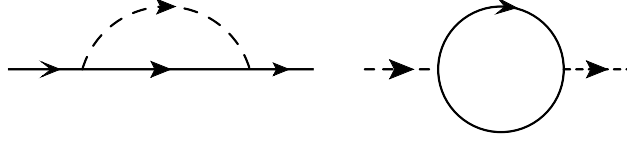


Figura 2.4: Ejemplos de correcciones a los propagadores; a la izquierda corrección a la línea fermiónica por una partícula escalar, y a la derecha un lazo fermiónico.

La corrección a la masa fermiónica depende explícitamente de la masa m_f del fermión. En el límite que la masa de los fermiones es muy pequeña aumenta la simetría del Lagrangiano (2.31), en ese sentido, se suele decir que la masa de los fermiones está protegida por la simetría quiral.

Si se calcula la corrección al propagador del campo escalar debido a un lazo fermiónico, la masa del escalar recibe una corrección δm_ϕ , la cual es como sigue

$$\delta m_\phi^2 = -\frac{\lambda_f^2}{8\pi} \left(\Lambda^2 - 6M_F^2 \text{Ln} \left(\frac{\lambda}{m_f} \right) + 2m_f^2 + \dots \right) \quad (2.34)$$

la diferencia ahora en esta corrección radiativa de la Ec. (2.34) es que se tiene una divergencia cuadrática (Λ^2). Nada puede proteger la masa de la partícula escalar si las correcciones a su masa son muy grandes. Se dice que si la masa de la partícula tiene correcciones de diferente orden de magnitud a los de su masa (a nivel árbol), se tiene un problema de no naturalidad. Algo que podría resolver este problema es considerar un contra término que cancele la divergencia cuadrática, o bien ajustar la escala de energía de corte Λ al orden de 1 TeV. Esto es conocido como el problema de la jerarquía y es una de las razones por las que se cree que debe haber nueva física arriba de la escala de TeVs.

2.3.2. Materia Oscura

Otro indicativo de nueva física es la evidencia de materia oscura. La materia oscura se define como una materia indeterminada que no emite o refleja radiación electromagnética. De hecho, la composición subatómica de la materia oscura se desconoce hasta el momento, de igual forma su interacción con la materia ordinaria. Cuando se calculó en 1933 las velocidades orbitales de la galaxia (Vía Láctea) y de cúmulos de galaxias, se descubrió que parte de la masa que se esperaba por cálculos (predicción teórica) hacía falta, y se denominó el término materia oscura [28].

Ahora existe mucha más evidencia de la existencia de materia oscura [29]. Se cree que apenas el 5% de toda la materia del Universo es la que está formada por átomos (materia bariónica), mientras que el 23% es materia oscura. En la Figura (2.5) se muestra una relación de la materia del Universo en la actualidad, reportada por WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe por sus siglas en inglés), la sonda de la NASA [30].

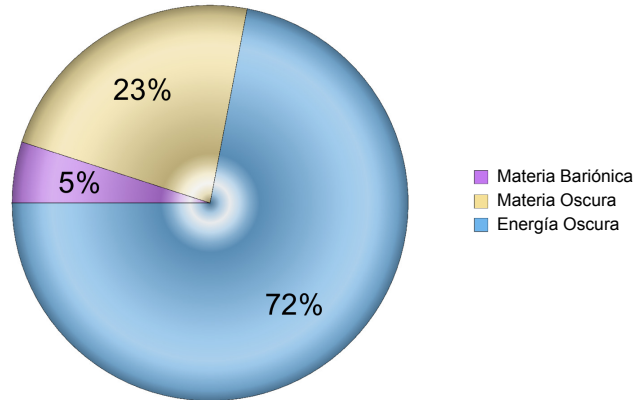


Figura 2.5: Datos de la sonda WMAP (NASA) del contenido de materia presente en el Universo observable. Apenas un 5 % es materia bariónica, la que forma los átomos, los planetas, las estrellas y galaxias. Un 23 % es materia oscura y un 72 % es energía oscura. Esta última no se discute en este trabajo de tesis.

Existen varias opciones para posibles candidatos a materia oscura, la mayoría de estas partículas masivas son predichas por teorías de física más allá del SM de partículas elementales (BSM por sus siglas en inglés). Los llamados WIMPs (por sus siglas en inglés, weakly interacting massive particles) son partículas cuyas interacciones son únicamente vía interacción débil o gravitacional. Los WIMPs son predichos básicamente por teorías supersimétricas y teorías con dimensiones extra, aunque en esta tesis solo se estudia el caso en el que surgen de supersimetría (SUSY). Ejemplos específicos de WIMPs son el neutralino y el gravitino. Es propicio mencionar que SUSY no solo predice partículas estables que pueden ser candidatos a materia oscura, además, resuelve muchos de los problemas que presenta el SM, como por ejemplo el problema de la jerarquía. Es por eso que SUSY es una de las extensiones del SM más estudiadas por la comunidad de física de altas energías. Se presentarán más detalles de SUSY en los siguientes capítulos de esta tesis.

Capítulo 3

Supersimetría y Supergravedad

Supersimetría (SUSY) [11] es una simetría hipotética que consiste en transformar bosones en fermiones y viceversa, por lo que en modelos supersimétricos el número de grados de libertad fermiónicos es igual al bosónico. En concreto esta fascinante simetría se jacta de hacer lo siguiente

$$Q|Bosones\rangle = |fermiones\rangle, \quad Q|fermiones\rangle = |Bosones\rangle, \quad (3.1)$$

donde el operador Q debe ser un espinor, y junto a su hermitiano conjugado satisfacen la siguiente álgebra

$$\{Q, Q^\dagger\} = 2\sigma_\mu P^\mu, \quad (3.2)$$

$$\{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0 \quad (3.3)$$

$$\{P^\mu, Q\} = \{P^\mu, Q^\dagger\} = 0. \quad (3.4)$$

donde P_μ es el cuadri-momento generador de la traslación espacio temporal. En el SM, las partículas elementales son representaciones irreducibles del grupo de Poincaré. Las representaciones irreducibles del álgebra de SUSY no son partículas, son supermultipletes que contienen campos que pertenecen al SM y sus supercompañeros.

3.1. Extensión Mínima Supersimétrica del Modelo Estándar (MSSM)

La extensión mínima supersimétrica del SM (MSSM por sus siglas en inglés) respeta la simetría de norma del SM ($SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$). Las partículas necesarias para construir este modelo son las del SM y además, las compañeras supersimétricas de estas. En la Figura (3.1) se muestra el contenido de partículas del SM y sus compañeros supersimétricos.

Como una consecuencia de la transformación de SUSY, las partículas fermiónicas del

SM deben tener sus compañeros supersimétricos que son partículas escalares (difieren en su espín por el valor de 1/2), y las partículas bosónicas del SM tienen compañeros supersimétricos que son fermiones. Los compañeros deben tener la misma masa y los mismos números cuánticos de las correspondientes partículas del SM. Por ejemplo el compañero supersimétrico del quark top, el stop debe tener la misma masa que el quark top (~ 173 GeV) y el stop tiene la misma carga eléctrica del quark top. Si las partículas compañeras supersimétricas de las del SM existieran, debieron haber sido detectadas, sin embargo no ha sido así, no hay evidencia experimental. Entonces, si el Universo es supersimétrico, SUSY debe de estar rota.

Supercampo	SM	super compañero
\hat{Q}	$\begin{pmatrix} u_l \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{u}_l \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}$
\hat{U}	\bar{u}_R	\tilde{u}_R^*
\hat{D}	\bar{d}_R	\tilde{d}_R^*
\hat{L}	$\begin{pmatrix} \nu_l \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{\nu}_l \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}$
\hat{E}	\bar{e}_R	\tilde{e}_R^*
\hat{G}^a	g^a	\tilde{g}^a
\hat{W}^i	W^i	\tilde{w}^i
\hat{B}	B	\tilde{b}
\hat{H}_u	$\begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{H}_u^+ \\ \tilde{H}_u^0 \end{pmatrix}$
\hat{H}_d	$\begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{H}_d^0 \\ \tilde{H}_d^- \end{pmatrix}$

Tabla 3.1: Contenido de partículas del MSSM. La primera columna representa el super multiplete quirral del MSSM. En esta tabla solo se muestra la primera generación de los fermiones del SM, pero es implícita la existencia de las otras dos generaciones. También se muestran los bosones de norma del SM y en la última columna sus respectivos compañeros supersimétricos.

Para crear componentes fermiónicas izquierdas del super campo, las cuales son importantes para la generación de masa de las partículas del SM, es necesario agregar otro doblete de Higgs en el Lagrangiano supersimétrico. Entonces, el MSSM tienen dos dobletes de Higgs; \hat{H}_u y \hat{H}_d . El super potencial más general es el siguiente [32]

$$W = y_u \hat{U} \hat{Q} \hat{H}_u - y_d \hat{D} \hat{Q} \hat{H}_d - y_e \hat{E} \hat{L} \hat{H}_d + \mu \hat{H}_u \hat{H}_d, \quad (3.5)$$

en el potencial de la Ec. (3.5) se han omitido los índices de familia. Una nueva simetría se impone al MSSM, la llamada Paridad-R

$$P_R = (-1)^{3(B-L)+2s} \quad (3.6)$$

donde B y L es el número leptónico y bariónico, s es el espín de la partícula y P_R es la cantidad cuántica conservada. Los términos del Lagrangiano son permitidos si el producto P_R de todos los campos de ese término resulta ser $P_R = +1$, lo que es cierto para cada término del potencial de la Ec. (3.5). Las partículas del SM tienen $P_R = +1$, pero los supercompañeros tienen $P_R = -1$. Una de las implicaciones de esta simetría discreta se aprecia al considerar los vértices del MSSM, ya que estos tienen número par de superpartículas, es decir estas siempre se producen en pares. Esto nos indica que la partícula supersimétrica más ligera (LSP por sus siglas en inglés) debe ser estable y por lo tanto es un buen candidato de materia oscura. Imponiendo la simetría Paridad-R al MSSM se obtiene una solución natural para el problema de materia oscura que posee el SM.

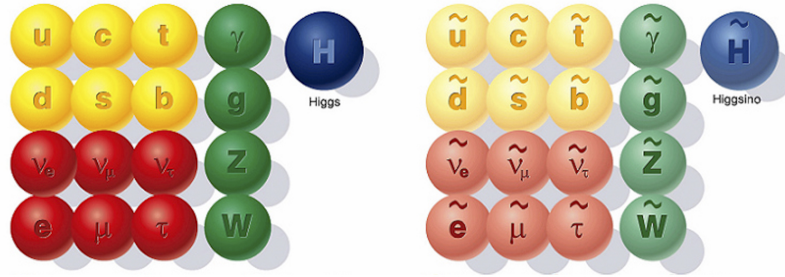


Figura 3.1: A la izquierda se muestra el contenido de partículas del SM y a la derecha las partículas hipotéticas (con vírgula sobre la letra que las etiqueta) que predice SUSY. Imagen tomada de [31].

Uno de los posibles candidatos para la partícula supersimétrica más ligera (LSP) es el gravitino, el compañero supersimétrico del gravitón. En esta tesis solo consideramos los escenarios donde el gravitino es el LSP. En los siguientes capítulos se hace una introducción a transformaciones supersimétricas locales, lo que genera una teoría conocida como Supergravedad, debido a que esta incluye la relatividad general de Einstein.

3.2. Supergravedad

3.2.1. Modelo de Wess-Zumino

Comparado con la supersimetría global, una de las características de la supersimetría local es la existencia de un campo de norma, el cual es llamado gravitino. Como en el

caso de teorías de norma ordinarias, el gravitino se acopla a la corriente de Noether de supersimetría y mantiene la invarianza bajo transformaciones supersimétricas locales. En esta sección, se revisa brevemente el papel del gravitino en la teoría con supersimetría local utilizando el modelo sin interacciones de Wess-Zumino (WZ) [33], el cual es el más simple.

Comenzando por el caso global, el cual tiene un Lagrangiano con únicamente dos términos, el término cinético del campo bosónico escalar ϕ y el otro es el referente al campo fermiónico quiral χ , el Lagrangiano de WZ es como sigue

$$\mathcal{L}_{WZ} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - i \bar{\chi} \sigma^\mu \partial_\mu \chi. \quad (3.7)$$

La transformación infinitesimal del campo escalar la consideraremos proporcional a un parámetro ξ , el cual es complejo e infinitesimal de igual forma se considera que es independiente de las coordenadas espacio temporales, es decir $|\xi| \ll 1$ y $\partial_\mu \xi = 0$. Definimos que la variación del campo escalar complejo ϕ es proporcional al espinor χ , lo cual es la idea general de la supersimetría

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi \text{ con } \delta\phi \simeq \xi\chi. \quad (3.8)$$

Otras condiciones requeridas para la transformación (3.8) son que el producto del parámetro ξ con el espinor χ deben tener la misma transformación de Lorentz que el campo ϕ , lo cual demanda que el parámetro ξ sea también un espinor. Por otro lado el campo ϕ tiene dimensión uno (exponente de la masa) por lo que el producto $\xi \cdot \chi$ también debe tener la misma dimensión, se sabe que el espinor χ tiene dimensión $3/2$, por lo que la dimensión del parámetro de la transformación supersimétrica $[\xi]$ debe cumplir $[\xi] + \frac{3}{2} = 1$, es decir $[\xi] = -\frac{1}{2}$.

Con un análisis similar al de la transformación infinitesimal del campo ϕ , abordaremos la transformación del campo χ , la cual debe ser proporcional al parámetro infinitesimal ξ veces el campo ϕ , se puede proponer que la transformación sea de la forma $\delta\chi \simeq \xi\phi$ en analogía al de la Ec. (3.8) pero presenta problemas con las dimensiones, aunque transforme igual bajo Lorentz, es necesario aumentar la dimensión al lado derecha, vemos que una buena opción sería agregar una derivada $\delta\chi \simeq \xi\partial_\mu\phi$, el precio a pagar si se quiere tener esta transformación es que se rompe la invariancia ante las transformaciones de Lorentz ya que hay un índice libre, debemos salvar la invariancia agregando un término que sea de dimensión cero, una buena opción es σ^μ ($\sigma^\mu = (\mathbf{1}_2, \vec{\sigma})$), dejando la transformación para el espinor $\delta\chi \simeq \xi\sigma^\mu(\partial_\mu\phi)$.

En la siguiente subsección, mostraremos que el Lagrangiano de WZ Ec. (3.7) es invariante ante las siguientes transformaciones globales:

$$\delta\phi = \sqrt{2}\xi\chi, \quad (3.9)$$

$$\delta\chi = -i\sqrt{2}\sigma^\nu\bar{\xi}(\partial_\nu\phi). \quad (3.10)$$

3.2.2. Invariancia del modelo WZ bajo transformaciones supersimétricas globales

En esta sección se muestra que el Lagrangiano WZ es invariante ante las transformaciones globales ecuaciones (3.9) y (3.10), sobreviven términos en derivadas totales pero bajo la acción estos son términos de borde que se anulan. Variando el Lagrangiano de la Ec. (3.7) respecto a los campos ϕ y χ , se tiene la siguiente expresión

$$\delta\mathcal{L}_{WZ} = (\partial_\mu\delta\phi)\partial^\mu\phi^* + \partial_\mu\phi(\partial^\mu\delta\phi^*) + i(\delta\bar{\chi})\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi + i\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu(\partial_\mu\delta\chi), \quad (3.11)$$

notamos en la ecuación (3.11), que se debe encontrar $\delta\phi^*$ y $\delta\bar{\chi}$, las cuales se deducen de las expresiones que vienen en las ecuaciones (3.9) (3.10), estas son como sigue

$$\delta\phi^* = \sqrt{2}\bar{\chi}\bar{\xi}, \quad (3.12)$$

$$\delta\bar{\chi} = i\sqrt{2}\xi\sigma^\nu(\partial_\nu\phi^*), \quad (3.13)$$

sustituyendo las ecuaciones (3.9,3.10) y (3.12,3.13) en la ecuación (3.11), obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{WZ} &= \sqrt{2}\left(\xi(\partial_\mu\chi)(\partial^\mu\phi^*) + (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\bar{\chi})\bar{\xi}\right. \\ &\quad \left. - \xi\sigma^\nu(\partial_\nu\phi^*)\bar{\sigma}^\mu(\partial_\mu\chi) + \bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\xi}\partial_\nu\partial_\mu\phi\right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2}\left(\xi((\partial_\mu\chi)(\partial^\mu\phi^*) - \sigma^\nu(\partial_\nu\phi^*)\bar{\sigma}^\mu(\partial_\mu\chi))\right. \\ &\quad \left. + ((\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\bar{\chi}) + \bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\partial_\nu\partial_\mu\phi)\bar{\xi}\right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Si el lagrangiano (3.7) es invariante ante el conjunto de transformaciones (3.9,3.10,3.12,3.13), entonces la ecuación (3.14) debe ser nula. Se han agrupado términos en la ecuación (3.14) de tal forma que se vea explícitamente como estos se pueden cancelar, posteriormente debemos expresarlos en términos de derivadas totales. Haciendo el álgebra por separado para el factor de ξ , encontramos que lo siguiente

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\chi\partial^\mu\phi^*) &= (\partial_\mu\chi)(\partial^\mu\phi^*) + \chi\partial_\mu\partial^\mu\phi^* \\ (\partial_\mu\chi)(\partial^\mu\phi^*) &= \partial_\mu(\chi\partial^\mu\phi^*) - \chi\partial_\mu\partial^\mu\phi^*, \end{aligned} \quad (3.16)$$

de igual forma el segundo término del factor ξ es como sigue:

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\sigma^\nu(\partial_\nu\phi^*)\bar{\sigma}^\mu\chi) &= \partial_\mu(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu(\partial_\nu\phi^*)\chi) \\ &= \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu(\partial_\mu\partial_\nu\phi^*)\chi + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu(\partial_\nu\phi^*)(\partial_\mu\chi) \\ \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu(\partial_\nu\phi^*)(\partial_\mu\chi) &= \partial_\mu(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu(\partial_\nu\phi^*)\chi) - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu(\partial_\mu\partial_\nu\phi^*)\chi. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Hemos expresado los dos términos del factor de ξ como función de una derivada total más otro término que es el que sobrevive, al sumar las expresiones (3.16) y (3.17) deben

cancelarse los términos, esto es como sigue

$$\begin{aligned}
 -\chi\partial_\mu\partial^\mu\phi^* + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu(\partial_\mu\partial_\nu\phi^*)\chi &= -\chi\partial_\mu\partial^\mu\phi^* + (2\eta^{\nu\mu} - \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)(\partial_\mu\partial_\nu\phi^*)\chi, \\
 &= -\chi\partial_\mu\partial^\mu\phi^* + 2\chi\partial_\mu\partial^\mu\phi^* - \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu(\partial_\mu\partial_\nu\phi^*)\chi \\
 &= \chi\partial_\mu\partial^\mu\phi^* - \underbrace{\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu(\partial_\mu\partial_\nu\phi^*)}_{\mu\leftrightarrow\nu}\chi \\
 &= \chi\partial_\mu\partial^\mu\phi^* - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu(\partial_\mu\partial_\nu\phi^*)\chi = 0. \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

En el resultado de la ecuación (3.18) ya no se consideraron las derivadas totales y se ha usado la identidad $\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$, posteriormente se cambio de etiqueta debido a la simetría de las derivadas, de tal forma que el factor de ξ en la ecuación (3.14) resulta finalmente cero, esto debido a como sabemos de nuestros cursos de álgebra, $A = -A \rightarrow A = 0$. Procediendo de forma similar, se mostrará que el factor de $\bar{\xi}$ en la ecuación (3.14) también se cancela. El primer término es como sigue

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu((\partial^\mu\phi)\bar{\chi}) &= (\partial_\mu\partial^\mu\phi)\bar{\chi} + (\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\bar{\chi}) \\
 (\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\bar{\chi}) &= \partial_\mu((\partial^\mu\phi)\bar{\chi}) - (\partial_\mu\partial^\mu\phi)\bar{\chi}. \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

Para el segundo término del factor de $\bar{\xi}$ en la ecuación (3.14) únicamente utilizamos la identidad $\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu(\partial_\mu\partial_\nu\phi^*) = \partial_\mu\partial^\mu\phi^*$, la cual viene de Ec. (3.14). Al sumar los términos encontramos lo siguiente

$$(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\bar{\chi}) + \bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\partial_\nu\partial_\mu\phi = -(\partial_\mu\partial^\mu\phi)\bar{\chi} + (\partial_\mu\partial^\mu\phi)\bar{\chi} = 0. \tag{3.20}$$

Hemos mostrado que el Lagrangiano de WZ es invariante ante las transformaciones supersimétricas globales de las ecuaciones (3.9,3.10,3.12,3.13). En la siguiente sección promovemos las transformaciones supersimétricas globales a locales, y veremos que esto implica que la teoría contiene gravedad.

3.2.3. Invariancia del modelo WZ bajo transformaciones supersimétricas locales

Al igual que QED, al promover una simetría global a una local da origen a campos de norma, veremos que el campo de norma asociado a la transformación supersimétrica local es un campo de spín-3/2 (contiene grados de libertad de un espinoriales y vectoriales), el gravitino, y este a la vez es el super compañero del gravitón [34]. El parámetro libre ξ de la Ec. (3.8) ahora es función del espacio tiempo $\xi(x)$, aunque siempre es considerado infinitesimal, como consecuencia se pierde la invariancia del Lagrangiano (3.7), lo que se mostrará con más detalle. Si partimos de la ecuación (3.11) debemos considerar que ahora $\partial_\mu\xi(x) \neq 0$. Calculado por separado las derivadas de las variaciones de los campos

(3.9,3.10,3.12), tenemos las siguientes expresiones

$$\partial_\mu(\delta\phi) = \partial_\mu(\sqrt{2}\xi\chi) = \sqrt{2}((\partial_\mu\xi)\chi + \xi(\partial_\mu\chi)), \quad (3.21)$$

$$\partial^\mu(\delta\phi^*) = \partial^\mu(\sqrt{2}\bar{\chi}\bar{\xi}) = \sqrt{2}((\partial^\mu\bar{\chi})\bar{\xi} + \bar{\chi}(\partial^\mu\bar{\xi})), \quad (3.22)$$

$$\partial_\mu(\delta\chi) = \partial_\mu(-i\sqrt{2}\sigma^\nu\bar{\xi}(\partial_\nu\phi)) = -i\sqrt{2}(\sigma^\nu(\partial_\mu\bar{\xi})(\partial_\nu\phi) + \sigma^\nu\bar{\xi}(\partial_\mu\partial_\nu\phi)), \quad (3.23)$$

dejando la variación del lagrangiano WZ como sigue

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{WZ} &= \sqrt{2}(((\partial_\mu\xi)\chi + \xi(\partial_\mu\chi))\partial^\mu\phi^* + \partial_\mu\phi((\partial^\mu\bar{\chi})\bar{\xi} + \bar{\chi}(\partial^\mu\bar{\xi})) \\ &\quad + i(i\xi\sigma^\nu(\partial_\nu\phi^*))\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi + i(-i)\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu(\sigma^\nu(\partial_\mu\bar{\xi})(\partial_\nu\phi) + \sigma^\nu\bar{\xi}(\partial_\mu\partial_\nu\phi))) \\ &= \sqrt{2}(\underbrace{((\partial_\mu\xi)\chi(\partial^\mu\phi^*) + \xi(\partial_\mu\chi)(\partial^\mu\phi^*))}_I + \underbrace{(\partial_\mu\phi((\partial^\mu\bar{\chi})\bar{\xi} + (\partial_\mu\phi)\bar{\chi}(\partial^\mu\bar{\xi})))}_{II} \\ &\quad - \underbrace{\xi\sigma^\nu(\partial_\nu\phi^*)\bar{\sigma}^\mu(\partial_\mu\chi)}_{III} + \underbrace{\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu(\partial_\mu\bar{\xi})(\partial_\nu\phi) + \bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\xi}(\partial_\mu\partial_\nu\phi)}_{IV}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Es conveniente expresar los términos de la Ec.(3.24) como función de derivadas totales y desarrollarlos por separado.

El término I:

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\xi\chi(\partial^\mu\phi^*)) &= (\partial_\mu\xi)\chi(\partial^\mu\phi^*) + \xi(\partial_\mu\chi)(\partial^\mu\phi^*) + \xi\chi(\partial_\mu\partial^\mu\phi^*) \\ (\partial_\mu\xi)\chi(\partial^\mu\phi^*) + \xi(\partial_\mu\chi)(\partial^\mu\phi^*) &= \partial_\mu(\xi\chi(\partial^\mu\phi^*)) - \xi\chi(\partial_\mu\partial^\mu\phi^*). \end{aligned} \quad (3.25)$$

El término II:

$$\begin{aligned} \partial^\mu((\partial_\mu\phi)\bar{\chi}\bar{\xi}) &= (\partial^\mu\partial_\mu\phi)\bar{\chi}\bar{\xi} + (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\bar{\chi})\bar{\xi} + (\partial_\mu\phi)\bar{\chi}(\partial^\mu\bar{\xi}) \\ (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\bar{\chi})\bar{\xi} + (\partial_\mu\phi)\bar{\chi}(\partial^\mu\bar{\xi}) &= \partial^\mu((\partial_\mu\phi)\bar{\chi}\bar{\xi}) - (\partial^\mu\partial_\mu\phi)\bar{\chi}\bar{\xi}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

El término III:

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\xi\sigma^\nu(\partial_\nu\phi^*)\bar{\sigma}^\mu\chi) &= (\partial_\mu\xi)\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\chi(\partial_\nu\phi^*) + \xi\sigma^\nu(\partial_\mu\partial_\nu\phi^*)\bar{\sigma}^\mu\chi \\ &\quad + \xi\sigma^\nu(\partial_\nu\phi^*)\bar{\sigma}^\mu(\partial_\mu\chi), \text{ despejando} \\ \xi\sigma^\nu(\partial_\nu\phi^*)\bar{\sigma}^\mu(\partial_\mu\chi) &= \xi\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu(\partial_\nu\phi^*)(\partial_\mu\chi) = \partial_\mu(\xi\sigma^\nu(\partial_\nu\phi^*)\bar{\sigma}^\mu\chi) \\ &\quad - \xi\sigma^\nu(\partial_\mu\partial_\nu\phi^*)\bar{\sigma}^\mu\chi - (\partial_\mu\xi)\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\chi(\partial_\nu\phi^*). \end{aligned} \quad (3.27)$$

El término IV:

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\xi}(\partial_\nu\phi)) &= (\partial_\mu\bar{\chi})\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\xi}(\partial_\nu\phi) + \bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu(\partial_\mu\bar{\xi})(\partial_\nu\phi) \\ &\quad + \bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\xi}(\partial_\mu\partial_\nu\phi) \\ \bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu(\partial_\mu\bar{\xi})(\partial_\nu\phi) + \bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\xi}(\partial_\mu\partial_\nu\phi) &= \partial_\mu(\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\xi}(\partial_\nu\phi)) - (\partial_\mu\bar{\chi})\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\xi}(\partial_\nu\phi). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Sustituyendo I, II, III y IV en la ecuación (3.24) obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{WZ} = & \sqrt{2}(\partial_\mu(\xi\chi(\partial^\mu\phi^*)) - \xi\chi(\partial_\mu\partial^\mu\phi^*) + \partial^\mu((\partial_\mu\phi)\bar{\chi}\bar{\xi}) - (\partial^\mu\partial_\mu\phi)\bar{\chi}\bar{\xi}) \\ & - \partial_\mu(\xi\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu(\partial_\nu\phi^*)\chi) + \xi\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu(\partial_\mu\partial_\nu\phi^*)\chi + (\partial_\mu\xi)\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\chi(\partial_\nu\phi^*) \\ & + \partial_\mu(\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\xi}(\partial_\nu\phi)) - (\partial_\mu\bar{\chi})\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\xi}(\partial_\nu\phi). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Todos los términos con derivada total son de borde cuando integramos por partes la variación de la acción, vamos a quitar esos términos en la ecuación (3.29), dejando finalmente el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{WZ} = & \sqrt{2}(-\xi\chi(\partial_\mu\partial^\mu\phi^*) - (\partial^\mu\partial_\mu\phi)\bar{\chi}\bar{\xi} + \xi\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu(\partial_\mu\partial_\nu\phi^*)\chi \\ & + (\partial_\mu\xi)\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\chi(\partial_\nu\phi^*) - (\partial_\mu\bar{\chi})\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\xi}(\partial_\nu\phi)). \end{aligned} \quad (3.30)$$

En la ecuación (3.30) es posible utilizar la condición de capa de masa $\partial_\mu\partial^\mu\phi = \square\phi = 0$, lo que simplifica todavía más el resultado

$$\delta\mathcal{L}_{WZ} = \sqrt{2}((\partial_\mu\xi)\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\chi(\partial_\nu\phi^*) - (\partial_\mu\bar{\chi})\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\xi}(\partial_\nu\phi)), \quad (3.31)$$

es conveniente reescribir el segundo término (derecha) de la ecuación (3.31), de manera que quede una derivada de $\bar{\xi}$.

$$(\partial_\mu\bar{\chi})\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\xi}(\partial_\nu\phi) = \partial_\mu(\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\xi}(\partial_\nu\phi)) - \bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu(\partial_\mu\bar{\xi})(\partial_\nu\phi) - \bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\xi}(\partial_\mu\partial_\nu\phi), \quad (3.32)$$

donde el primer y último término del lado derecho de la ecuación (3.32) son cero. Considerando el resultado Ec. (3.32) en la ecuación (3.30) obtenemos

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{WZ} = & \sqrt{2}((\partial_\mu\xi)\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\chi(\partial_\nu\phi^*) + \bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu(\partial_\mu\bar{\xi})(\partial_\nu\phi)) \\ = & i(\partial_\mu\xi)J^\mu - i\bar{J}^\mu(\partial_\mu\bar{\xi}), \end{aligned} \quad (3.33)$$

en la ecuación (3.33) hemos definido

$$J^\mu = -i\sqrt{2}\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\chi(\partial_\nu\phi^*), \quad (3.34)$$

y su hermítica conjugada

$$\bar{J}^\mu = i\sqrt{2}\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu(\partial_\nu\phi). \quad (3.35)$$

Se observa que $\delta\mathcal{L}_{WZ} \neq 0$, es decir el lagrangiano WZ no es invariante ante transformaciones locales.

La corriente Ec. (3.34) es la supercorriente de Noether, es decir cumple $\partial_\mu J^\mu = 0$. Para poder mantener la invarianza, se introduce el campo de norma ψ_μ . Como en el caso de teorías de norma ordinaria, el campo de norma ψ_μ se acopla a la supercorriente de la siguiente forma

$$\mathcal{L}_{\psi J} = -\frac{i}{2}G_S\psi_\mu J^\mu + h.c., \quad (3.36)$$

donde G_S es la constante de acoplamiento. Variando la ecuación (3.36), se obtiene

$$\delta\mathcal{L}_{\psi J} = -\frac{i}{2}G_S[(\delta\psi_\mu)J^\mu + \psi_\mu(\delta J^\mu)] + h.c. \quad (3.37)$$

Si el campo ψ_μ transforma como

$$\delta\psi_\mu \sim \frac{2}{G_S}\partial_\nu\xi, \quad (3.38)$$

el primer término de la ecuación (3.37) cancela la contribución de la ecuación (3.33). Considerando el segundo término de la ecuación (3.37), la transformación de la supercorriente J^μ genera el tensor de energía-momento T_μ^ν del multiplete quiral (ϕ, χ)

$$\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, J_\alpha^\mu\} = -2\sigma_{\dot{\alpha}\alpha}^\nu T_\nu^\mu, \quad (3.39)$$

$$\{Q^\alpha, \bar{J}^{\mu\dot{\alpha}}\} = -2\bar{\sigma}^{\nu\alpha\dot{\alpha}} T_\nu^\mu, \quad (3.40)$$

$$(3.41)$$

donde Q y \bar{Q} son los generadores de la transformación supersimétrica. El segundo término de la ecuación (3.37) se convierte en

$$\frac{i}{2}G_S[\psi_\mu(\delta J^\mu)] + h.c. = \frac{i}{2}G_S[\psi_\mu\sigma_\nu\bar{\xi} + \psi_\nu\sigma_\mu\bar{\xi} + \bar{\psi}_\mu\bar{\sigma}_\nu\xi + \bar{\psi}_\nu\bar{\sigma}_\mu\xi]T^{\mu\nu}. \quad (3.42)$$

Para cancelar estos términos, el Lagrangiano (3.7) se reescribe de tal forma que el tensor métrico se vea explícitamente

$$\mathcal{L}_{WZ} \rightarrow \sqrt{-g}g_{\mu\nu}(\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi^* + i\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\partial^\nu\chi), \quad (3.43)$$

donde $g = \det(g_{\mu\nu})$, y utilizando el hecho que la métrica es el campo de norma asociado con el tensor de energía momento (que es la corriente de Noether de la traslación espacio-temporal), esto es, el tensor de energía-momento T_μ^ν se obtiene si uno varia el Lagrangiano con respecto a $g_{\mu\nu}$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{WZ}}{\partial g^{\mu\nu}} \sim 2T_{\mu\nu}. \quad (3.44)$$

Entonces, el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ (gravitón) puede ser considerado como el compañero supersimétrico del gravitino ψ_μ , y la ley de su transformación es determinada de tal forma que la invariancia de la supersimetría local es preservada

$$\delta g_{\mu\nu} \frac{\partial\mathcal{L}_{WZ}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{i}{2}G_S[\psi_\mu\sigma_\nu\bar{\xi} + \psi_\nu\sigma_\mu\bar{\xi} + \bar{\psi}_\mu\bar{\sigma}_\nu\xi + \bar{\psi}_\nu\bar{\sigma}_\mu\xi]T^{\mu\nu}. \quad (3.45)$$

Combinando la ecuación (3.44) y (3.45), se obtiene la ley de transformación del tensor métrico

$$\delta g_{\mu\nu} \sim -iG_S(\psi_\mu\sigma_\nu\bar{\xi} + \psi_\nu\sigma_\mu\bar{\xi} + \bar{\psi}_\mu\bar{\sigma}_\nu\xi + \bar{\psi}_\nu\bar{\sigma}_\mu\xi). \quad (3.46)$$

Como hemos visto, si se extiende la supersimetría global a una local, el tensor métrico

$g_{\mu\nu}$ aparece automáticamente en la teoría, y por lo tanto debemos considerar gravedad. Esta es la razón por la que la supersimetría local es llamada supergravedad.

En la siguiente sección se muestran los términos del Lagrangiano de SUGRA [34] correspondientes a las interacciones del gravitino con las partículas del MSSM. Además, se presenta el caso en el que el gravitino es muy ligero, en cuyo límite es posible expresar un Lagrangiano efectivo que permite obtener reglas de Feynman mucho más simples que el caso con el gravitino completo.

3.3. El Gravitino

3.3.1. Super Mecanismo de Higgs

Como vimos en la sección anterior, las teorías supersimétricas que son invariantes bajo transformaciones locales se llaman supergravedad [34]. En este tipo de teorías, el gravitino tiene espín-3/2 y como mencionamos anteriormente, es el compañero supersimétrico del gravitón.

En la Sección 3.2.3 mostramos que las transformaciones supersimétricas deben incluir gravedad. En el MSSM los super multipletes quirales contienen los fermiones del SM y sus super compañeros, los super multipletes vectoriales contienen los bosones de norma y los gauginos (compañeros supersimétricos). Pero cuando se considera supergravedad, la teoría incluye un super multiplete de gravedad, que contiene al gravitón y al gravitino ($g_{\mu\nu}, \psi_\mu$). Cuando SUSY no se ha roto, el gravitino no tiene masa, este adquiere masa cuando absorbe el goldstino. Este mecanismo de adquirir masa es muy parecido al mecanismo de Higgs del SM, por lo que se le conoce como super-mecanismo de Higgs. La masa del gravitino depende de como se rompe SUSY. La masa del gravitino (\tilde{m}) se puede estimar por análisis dimensional, si se considera el vev $\langle F \rangle$ del campo escalar responsable de romper SUSY, se estima que la masa del gravitino es la siguiente

$$\tilde{m} \sim \frac{\langle F \rangle}{M_{Pl}}, \quad (3.47)$$

3.3.2. Interacciones con el gravitino

En esta sección se discute las reglas de Feynman para las interacciones del gravitino cuando este aparece como un campo externo (en capa de masa). Los términos de interacción más relevantes del Lagrangiano completo de SUGRA vienen del acoplamiento entre el gravitino y la supercorriente, en notación de componentes y en espacio tiempo plano, los términos son los siguientes [35]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\psi J} = & -\frac{1}{\sqrt{2}M} \tilde{\mathcal{D}}_\nu \phi^{*i} \bar{\psi}_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu \chi_R^i - \frac{1}{\sqrt{2}M} \tilde{\mathcal{D}}_\nu \phi^i \bar{\chi}_L^i \gamma^\mu \gamma^\nu \psi_\mu \\ & - \frac{i}{8M} \bar{\psi}_\mu [\gamma^\nu, \gamma^\rho] \gamma^\mu \lambda^{(a)} F_{\nu\rho}^{(a)}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

A partir del Lagrangiano (3.48) es posible construir las reglas de Feynman para las interacciones del gravitino ψ_μ con los campos de materia. En la sección de Fenomenología del gravitino se muestran las reglas de Feynman de forma explícita, de igual forma se presentan en la misma sección algunos cálculos perturbativos con el gravitino en el estado final, que es justamente uno de los principales intereses de esta tesis.

3.3.3. Lagrangiano Efectivo para gravitinos ligeros

En modelos con supersimetría rota, los gravitinos sin masa adquieren masa absorbiendo un goldstino. Cuando el gravitino no tiene masa solo tiene los dos modos correspondientes a las helicidades $\pm 3/2$, el goldstino provee los modos de helicidad $\pm 1/2$ y justo estos nuevos modos del gravitino se comportan como un goldstino. De hecho cuando la masa del gravitino (\tilde{m}) es mucho más pequeña que la diferencia entre los fermiones y los bosones en el multiplete quiral, el gravitino se comporta únicamente como el goldstino y se puede obtener un Lagrangiano efectivo para el goldstino. En esta sección se derivan las reglas de Feynman para el goldstino [36, 37, 38, 39, 40, 41, 42].

Cuando la energía del centro de masa es mucho más grande que la masa del gravitino ($s \gg \tilde{m}$), la función de onda del gravitino con helicidad $\pm \frac{1}{2}$ es aproximadamente proporcional a $\frac{p_\mu}{\tilde{m}}$. Para este caso, las componentes del gravitino con helicidad $\pm \frac{1}{2}$.

$$\psi_\mu \sim i\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\tilde{m}} \partial_\mu \psi, \quad (3.49)$$

donde ψ es el goldstino (fermión de espín- $\frac{1}{2}$). Si se sustituye la expresión de la Ec. (3.49) en el Lagrangiano de la Ec. (3.48), se obtiene el siguiente Lagrangiano efectivo

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{i(m_\phi^2 - m_\chi^2)}{\sqrt{3}\tilde{m}M} (\bar{\psi}\chi_R)\phi^* + \frac{-im_\lambda}{8\sqrt{6}\tilde{m}M} \bar{\psi}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\lambda^{(a)} F_{\mu\nu}^{(a)} + h.c. \quad (3.50)$$

En el siguiente capítulo se introduce el formalismo de helicidad, dicho formalismo facilita y acelera el cálculo de las amplitudes de dispersión, hace todo el proceso mucho más eficiente que los métodos tradicionales, permitiendo evaluar tiempos de vida media de partículas inestables o bien secciones diferenciales de corte en escenarios con múltiples partículas en el estado final. En el caso de SUGRA, donde el gravitino puede figurar como LSP y por ende un buen candidato a materia oscura, calcular observables con la tecnología de trazas hace muy engorroso todo el trabajo, y los resultados no tienen una interpretación directa, a menos que se realice un análisis numérico de dichos resultados. Además, el formalismo de helicidad permite expresar las amplitudes de dispersión en términos de los datos externos, y los resultados se presentan de una manera muy práctica y amigable, incluso permitiendo encontrar nuevas interpretaciones para esta cantidad física.

Capítulo 4

Técnicas Perturbativas Modernas

4.1. Motivación para mejorar las técnicas perturbativas tradicionales

Los experimentos de dispersión son cruciales para entender los bloques fundamentales de la naturaleza. El SM de partículas elementales fue desarrollado gracias a las predicciones teóricas, pero de igual forma con experimentos de dispersión, por mencionar algunos de sus logros tenemos; el descubrimiento de los bosones de norma W^\pm y Z^0 , los quarks y gluones y recientemente el Boson de Higgs. El principal observable en los experimentos de dispersión es la sección diferencial de corte $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ [43, 44], la cual depende de las energías y momentos de las partículas involucradas en el proceso, así como de los ángulos de las partículas dispersadas. La interpretación de los datos que resultan de los experimentos de dispersión se basa en las predicciones teóricas de las secciones de corte, las cuales son calculadas utilizando la teoría cuántica de campos, hasta el momento el mejor lenguaje matemático para describir las partículas elementales y sus interacciones. Básicamente QFT combina la teoría de la relatividad especial con la mecánica cuántica. Se encuentra muy bien probado (experimentalmente) que QFT describe las partículas elementales y las fuerzas fundamentales de la naturaleza. La sección diferencial de corte que es la que conecta la teoría con el experimento es proporcional al módulo cuadrado de la amplitud de dispersión, esto es como sigue

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto |\mathcal{A}|^2, \quad (4.1)$$

así como en mecánica cuántica la probabilidad de distribución para una partícula viene dada por la norma al cuadrado de la función de onda $|\psi|^2 = \psi^* \psi$.

Uno puede pensar que después de más 50 años de utilizar los métodos tradicionales de QFT no hay ninguna novedad en las técnicas para calcular amplitudes de dispersión, sobre todo con aquellas que involucran muchas partículas en el estado final. Hoy en día tenemos programas que ayudan a calcular las amplitudes de dispersión de forma numérica, con programas automatizados que se basan en los métodos tradicionales (MadGraph, Form, FeynRules y FeynCalc, entre otros), algunos incluso de forma analítica.

Estos programas son sin duda de gran ayuda para predecir observables físicos que luego se testean experimentalmente. Para apreciar el formalismo de helicidad que se introducirá con mayor detalle posteriormente, consideremos el siguiente ejemplo; dada una teoría de Yang - Mills pura, se quiere calcular la amplitud a nivel árbol de 5-gluones, 2 de los 10 diagramas de Feynman son los siguientes el vértice viene dado por

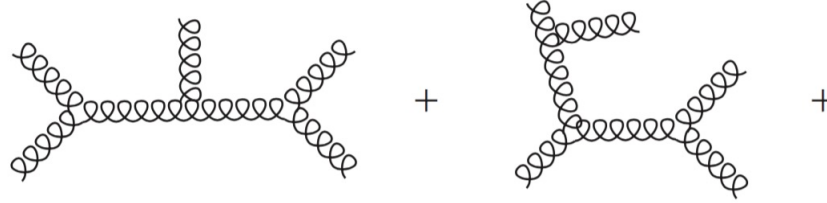


Figura 4.1: Diagramas a 5 puntos

$V_{3-g} = g f^{abc} [(p_1 - p_2)_\rho \eta_{\mu\nu} + (p_2 - p_3)_\mu \eta_{\nu\rho} + (p_3 - p_1)_\nu \eta_{\rho\mu}]$, donde g es la constante de acoplamiento y f^{abc} es la constante de estructura del grupo $SU(3)$. En este caso, se muestra en la Figura (4.2) parte del resultado del módulo cuadrado y promediado de la amplitud, que fue calculado a fuerza bruta con la ayuda de un super computador

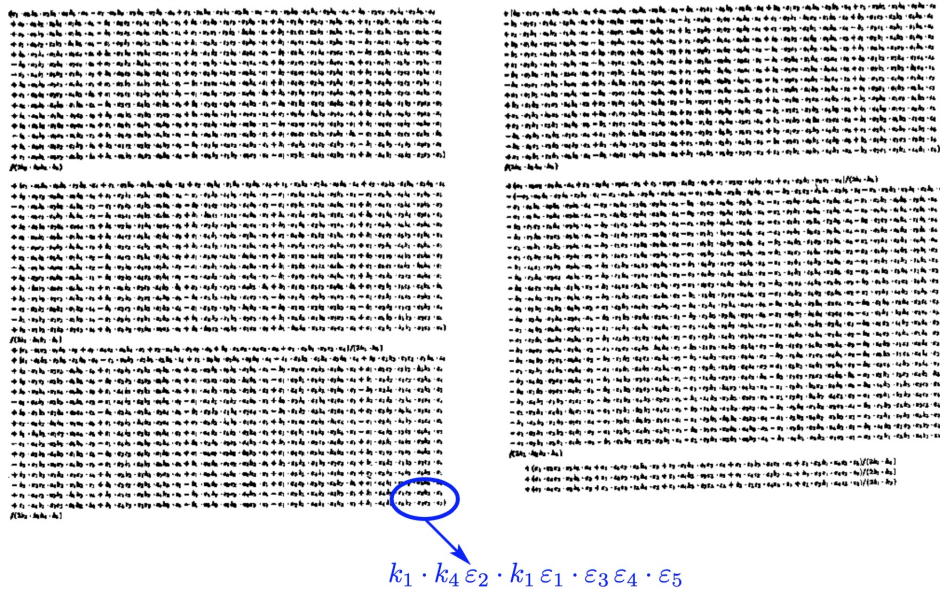


Figura 4.2: Parte del resultado de la amplitud a nivel árbol de 5-gluones, (Imagen tomada de la platica impartida por Zvi Bern (UCLA) en la escuela, “QCD and LHC Physics”, ICTP SAIFR 2015).

El resultado es enorme, a pesar que únicamente se muestra una parte del resultado

completo, ¿Que pasaría si se requiriera calcular la amplitud con 6-gluones, o más?, ¿Será posible calcular la amplitud para n-gluones? No cabe duda que para contestar estas preguntas se requiere implementar nuevas herramientas de cálculo, tomar lo mejor de los métodos tradicionales de QFT y complementar estos con herramientas más modernas, las cuales incluso han permitido visualizar nuevas estructuras matemáticas subyacentes en las amplitudes dispersión. Las amplitudes de dispersión \mathcal{A} tienen una gran relevancia física por el papel que juegan para las secciones de corte, sin embargo en años recientes se ha visto que las amplitudes en si mismas tienen una interesante estructura matemática, entender esta estructura puede guiarnos hacia métodos más eficientes para calcular las amplitudes.

4.2. Formalismo de Helicidad

El formalismo de helicidad es basado en la siguiente observación: **Campos de espín-1 transforman en la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ del grupo de Lorentz (Rep. Vectorial)** [43, 44, 45, 46]. Podemos expresar el cuadri-momento de cualquier partícula como un bi-espinor; $p_\mu \rightarrow p_{a\dot{a}}$. Por simplicidad en esta sección solo se considera partículas no masivas, o lo que es equivalente físicamente a considerar la energía de colisión mucho mayor a la masa de las partículas. Sin embargo, la tecnología en el caso masivo se extrapola fácilmente. Consideremos dos cuadri-momentos, tal que cumplan lo siguiente

$$k_0^2 = 0, \quad (4.2)$$

$$k_1^2 = -1, \quad (4.3)$$

$$k_0 \cdot k_1 = 0. \quad (4.4)$$

Los espinores de Dirac (4 componentes) cumplen las siguientes relaciones

$$\not{k}_0 u_-(k_0) = 0, \quad (4.5)$$

$$\gamma_5 u_-(k_0) = -u_-(k_0), \quad (4.6)$$

$$u_+(k_0) = \not{k}_1 u_-(k_0), \quad (4.7)$$

$$u_\lambda(k_0) \bar{u}_\lambda(k_0) = \left(\frac{1 + \lambda \gamma_5}{2} \right) \not{k}_0 \quad \forall \lambda = \pm 1, \quad (4.8)$$

$$u_\lambda(p) = \frac{\not{p} u_{-\lambda}(k_0)}{\sqrt{2p \cdot k_0}}, \quad p^2 = 0, \quad (4.9)$$

donde (4.9) satisface la ecuación de Dirac $\not{p} u_\lambda(p) = 0$, además $u_\lambda(p) \bar{u}_\lambda(p) = \left(\frac{1 + \lambda \gamma_5}{2} \right) \not{p}$ para $p_\mu p^\mu = p^2 = 0$.

4.2.1. Producto de Espinores (Definiciones)

Definimos los siguientes productos de espinores con una nueva notación que ayudará a simplificar las cuentas posteriormente, estos toman la siguiente forma

$$\langle ij \rangle = \bar{u}_-(k_i)u_+(k_j), \quad (4.10)$$

$$[ij] = \bar{u}_+(k_i)u_-(k_j). \quad (4.11)$$

Las ecuaciones (4.10,4.11) cumplen las siguientes propiedades de antisimetría

$$\langle ij \rangle = -\langle ji \rangle, \quad (4.12)$$

$$[ij] = -[ji], \quad (4.13)$$

Considerando a k_0 y k_1 como cuadri-momentos reales, se cumplen las siguientes propiedades

$$\langle ij \rangle^* = [ji], \quad (4.14)$$

$$\langle ij \rangle [ji] = 2k_i \cdot k_j, \quad k_i^2 = 0 \text{ y } k_j^2 = 0. \quad (4.15)$$

Para una mejor comprensión y ver estas nueva notación en acción, es valioso y determinante realizar algunos ejemplos y demostraciones o pruebas. En la siguiente subsección se verá la equivalencia entre el formalismo de helicidad y el usualmente usado método de trazas o tecnología de trazas.

Ejemplo Numérico

Consideremos el caso en el que se tienen los siguientes cuadri-momentos

$$k_0 = (1, 1, 0, 0), \quad (4.16)$$

$$k_1 = (0, 0, 1, 0), \quad (4.17)$$

$$k_i = (k_i^0, k_i^1, k_i^2, k_i^3), \quad (4.18)$$

$$k_j = (k_j^0, k_j^1, k_j^2, k_j^3). \quad (4.19)$$

Calculando explícitamente la Ec. (4.10) se obtiene lo siguiente

$$\langle ij \rangle = \sqrt{\frac{k_i^0 - k_i^1}{k_j^0 - k_j^1}}(k_j^2 + ik_j^3) - \sqrt{\frac{k_j^0 - k_j^1}{k_i^0 - k_i^1}}(k_i^2 + ik_i^3), \quad (4.20)$$

vemos que como resultado se tiene una expresión cuyo producto de espinores $\langle ij \rangle$ depende únicamente de las componentes de los cuadri-momentos.

Prueba de la ecuación (4.15)

Partiendo de las ecuaciones (4.10,4.11) y utilizando la relación (4.8) se demuestra la Ec. (4.15)

$$\begin{aligned} \langle ij \rangle [ji] &= \bar{u}_-(k_i) u_+(k_j) \bar{u}_+(k_j) u_-(k_i) \\ &= \text{Tr} \left[\left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \not{k}_i \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \not{k}_j \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$= \frac{1}{4} \text{Tr} [(1 - \gamma_5) \not{k}_i (1 + \gamma_5) \not{k}_j] \quad (4.22)$$

$$= \frac{1}{4} \text{Tr} [\not{k}_i \not{k}_j + \not{k}_i \gamma_5 \not{k}_j - \gamma_5 \not{k}_i \not{k}_j - \gamma_5 \not{k}_i \gamma_5 \not{k}_j] \quad (4.23)$$

$$= \frac{1}{4} \text{Tr} [\not{k}_i \not{k}_j] + \frac{1}{4} \text{Tr} [\cancel{\not{k}_i \gamma_5 \not{k}_j}] - \frac{1}{4} \text{Tr} [\cancel{\gamma_5 \not{k}_i \not{k}_j}] - \frac{1}{4} \text{Tr} [\gamma_5 \not{k}_i \gamma_5 \not{k}_j] \quad (4.24)$$

$$= \frac{1}{4} \text{Tr} [\not{k}_i \not{k}_j] - \frac{1}{4} \text{Tr} [\gamma_5 (\gamma_\mu k_i^\mu) \gamma_5 (\gamma_\nu k_j^\nu)] \quad (4.25)$$

$$= \frac{1}{4} \text{Tr} [\not{k}_i \not{k}_j] + \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\cancel{\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu k_i^\mu k_j^\nu} \right] \quad (4.26)$$

$$= \frac{1}{4} \text{Tr} [\not{k}_i \not{k}_j] + \frac{1}{4} \text{Tr} [\not{k}_i \not{k}_j] = \frac{1}{2} \text{Tr} [\not{k}_i \not{k}_j] = \frac{4k_i^\mu k_{j\mu}}{2} = 2k_i \cdot k_j. \quad (4.27)$$

$$\boxed{\langle ij \rangle [ji] = 2k_i \cdot k_j} \text{ q.e.d.} \quad (4.28)$$

Note que en Ec. (4.25) se utilizó la propiedad de anticonmutación $\{\gamma_5, \gamma_\nu\} = 0$.

Prueba de la ecuación (5.16)

Considerando la definición Ec. (5.9) y utilizando posteriormente las ecuaciones (4.7-5.6) se tiene que

$$\langle ij \rangle = \bar{u}_-(k_i) u_+(k_j), \quad (4.29)$$

$$= \bar{u}_-(k_0) \not{k}_1 \not{k}_i \not{k}_j u_-(k_0) \quad (4.30)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(k_i \cdot k_0)(k_j \cdot k_0)}} \text{Tr} \left[\left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \not{k}_0 \not{k}_1 \not{k}_i \not{k}_j \right] \quad (4.31)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{(k_i \cdot k_0)(k_j \cdot k_0)}} (\text{Tr} [\not{k}_0 \not{k}_1 \not{k}_i \not{k}_j] - \text{Tr} [\gamma_5 \not{k}_0 \not{k}_1 \not{k}_i \not{k}_j]) \quad (4.32)$$

$$= \frac{4}{4\sqrt{(k_i \cdot k_0)(k_j \cdot k_0)}} ((k_0 \cdot k_1)(k_i \cdot k_j) - (k_0 \cdot k_i)(k_1 \cdot k_j)) \quad (4.33)$$

$$+ (k_0 \cdot k_j)(k_1 \cdot k_i) - i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_0^\mu k_1^\nu k_i^\alpha k_j^\beta, \quad (4.34)$$

donde $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k_0^\mu k_1^\nu k_i^\alpha k_j^\beta$ es el determinante de los cuadri-momentos k_0^μ , k_1^ν , k_i^α y k_j^β , explícitamente se tiene que

$$i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k_0^\mu k_1^\nu k_i^\alpha k_j^\beta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_i^0 & k_i^1 & k_i^2 & k_i^3 \\ k_j^0 & k_j^1 & k_j^2 & k_j^3 \end{vmatrix} = i(k_i^0 - k_i^1)k_j^3 - i(k_j^0 - k_j^1)k_i^3.$$

El determinante es independiente de la estructura del espacio-tiempo de Minkowski, a diferencia de los términos restantes en Ec. (4.34) que si requieren de la métrica del espacio-tiempo plano, $\eta_{\mu\nu} = \mathbf{diag}(1, -1, -1, -1)$. Desarrollando todos los productos escalares en Ec. (4.34), se obtiene

$$(k_0 \cdot k_1)(k_i \cdot k_j) - (k_0 \cdot k_i)(k_1 \cdot k_j) + (k_0 \cdot k_j)(k_1 \cdot k_i) = k_j^2(k_i^0 - k_i^1) - k_i^2(k_j^0 - k_j^1), \quad (4.35)$$

además se tiene que

$$\sqrt{(k_i \cdot k_0)(k_j \cdot k_0)} = \sqrt{k_i^0 - k_i^1} \sqrt{k_j^0 - k_j^1}, \quad (4.36)$$

sumando finalmente el determinante (imaginario) y Ec. (4.35) obtenemos

$$\boxed{\langle ij \rangle = \sqrt{\frac{k_i^0 - k_i^1}{k_j^0 - k_j^1}}(k_j^2 + ik_j^3) - \sqrt{\frac{k_j^0 - k_j^1}{k_i^0 - k_i^1}}(k_i^2 + ik_i^3)} \text{ q.e.d.} \quad (4.37)$$

Para cuadri-momentos reales se tienen las siguientes relaciones

$$[ij] = \langle ji \rangle^*, \quad (4.38)$$

$$\langle ij \rangle = [ji]^*. \quad (4.39)$$

Se puede mostrar de forma directa las ecuaciones (4.38, 4.39), utilizando las definiciones de las ecuaciones (4.10,4.11) se tiene

$$[ji] = \bar{u}_+(k_j)u_-(k_i), \quad (4.40)$$

$$\langle ij \rangle^* = \bar{u}_+(k_j)u_-(k_i), \quad (4.41)$$

$$[ji] = \langle ij \rangle^*. \quad (4.42)$$

Utilizando el resultado de la Ec. (4.38) se encuentra que para cuadri-momentos reales se cumple la siguiente relación

$$\langle ij \rangle [ji] = \langle ij \rangle \langle ij \rangle^* = |\langle ij \rangle|^2. \quad (4.43)$$

4.2.2. Convenciones

La notación de espinores en términos de brackets angulares y cuadrados es como sigue

$$u_+(k_i) = |i\rangle, \quad (4.44)$$

$$u_-(k_i) = |i], \quad (4.45)$$

$$\bar{u}_+(k_i) = [i], \quad (4.46)$$

$$\bar{u}_-(k_i) = \langle i|. \quad (4.47)$$

4.2.3. Propiedades

- **Propiedad de Reflexión (Conjugación de carga)**

$$\langle i|\gamma_\mu|j] = [j|\gamma_\mu|i\rangle. \quad (4.48)$$

- **Identidad de Fierz**

$$\langle i|\gamma_\mu|j]\langle k|\gamma^\mu|l] = 2\langle ik\rangle[lj]. \quad (4.49)$$

- **Identidad de Schouten**

$$\langle ab\rangle\langle cd\rangle = \langle ac\rangle\langle bd\rangle + \langle ad\rangle\langle cb\rangle. \quad (4.50)$$

- **Conservación de Momento**

$$\sum_{k=1}^n \langle ik\rangle[kj] = 0, \quad (4.51)$$

$$\sum_{k=1}^n [ik]\langle kj\rangle = 0. \quad (4.52)$$

- **4-Momento contraído con γ_μ**

$$\not{p} = -|p\rangle[p| - |p]\langle p|. \quad (4.53)$$

Prueba de la Identidad de Fierz

Tenemos que

$$[j|\gamma_\mu|i\rangle = \mathbf{Tr} \left[\left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \not{k}_j \not{k}_0 \not{k}_i \gamma^\mu \right], \quad (4.54)$$

consideremos la matriz T : $T = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \not{k}_j \not{k}_0 \not{k}_i = V^\mu \gamma_\mu + A^\mu \gamma_\mu \gamma_5$, utilizando la propiedad de reflexión Ec. (4.48), obtenemos

$$T^R + T = 2V^\mu \gamma_\mu, \quad (4.55)$$

$$V^\mu = \frac{1}{8} \mathbf{Tr} \left[(T + T^R) \gamma_\mu \right], \quad (4.56)$$

recordando que $\mathbf{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4\eta^{\mu\nu}$, obtenemos lo siguiente

$$T = |i\rangle[j], \quad (4.57)$$

$$T^R = |j\rangle\langle i|. \quad (4.58)$$

Expresando V^μ de la siguiente forma

$$V^\mu = \frac{1}{8} [j|\gamma^\mu|i], \quad (4.59)$$

posteriormente utilizando las ecuaciones (4.55,4.59) se obtiene que

$$T + T^R = \frac{1}{4} [j|\gamma^\mu|i] \gamma_\mu. \quad (4.60)$$

utilizando la identidad de Chisholm $[j|\gamma^\mu|i] \gamma_\mu = 2(|i\rangle[j] + |j\rangle\langle i|)$ y la propiedad de reflexión Ec. (4.48) resulta

$$\langle i|\gamma^\mu|j\rangle \gamma_\mu \gamma^\mu \langle k|\gamma_\mu|l\rangle = 4(|i\rangle[j] + |j\rangle\langle i|)(|k\rangle[l] + |l\rangle\langle k|) \quad (4.61)$$

$$= 4([li][jk] + \overset{0}{\langle ki\rangle[jl]} + [lj]\langle ik\rangle + \overset{0}{\langle kj\rangle\langle il\rangle}) \quad (4.62)$$

$$= 4((-1)^2[lj]\langle ik\rangle + [lj]\langle ik\rangle) \quad (4.63)$$

$$= 8\langle ik\rangle[lj]. \quad (4.64)$$

Sabemos que en $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$ (espacio plano de 3+1 dim.), despejando de Ec. (4.64) deja como resultado

$$\boxed{\langle i|\gamma^\mu|j\rangle \langle k|\gamma_\mu|l\rangle = 2\langle ik\rangle[lj]} \text{ q.e.d.} \quad (4.65)$$

Hasta ahora se ha presentado un formalismo para partículas representadas por espinores $u_\pm(k_i)$ en el espacio de momentos, dicho formalismo es válido de igual forma para las antipartículas, ya que estas están relacionadas con los espinores de las partículas por la siguiente propiedad

$$v(p, \pm) = u(p, \mp), \quad p^2 = 0. \quad (4.66)$$

4.2.4. Ejemplo: cálculo de la amplitud para un proceso $2 \rightarrow 2$

Consideremos el proceso $e_L^-(-k_1) + e_R^+(-k_2) \rightarrow q_R(k_3) + \bar{q}_L(k_4)$, se considera por convención a todos los momentos salientes, lo cual es equivalente a tener el proceso $0 \rightarrow e_R^+(k_1) + e_L^-(k_2) + q_R(k_3) + \bar{q}_L(k_4)$. La parte cinemática (sin estructura de color) de la amplitud es la siguiente

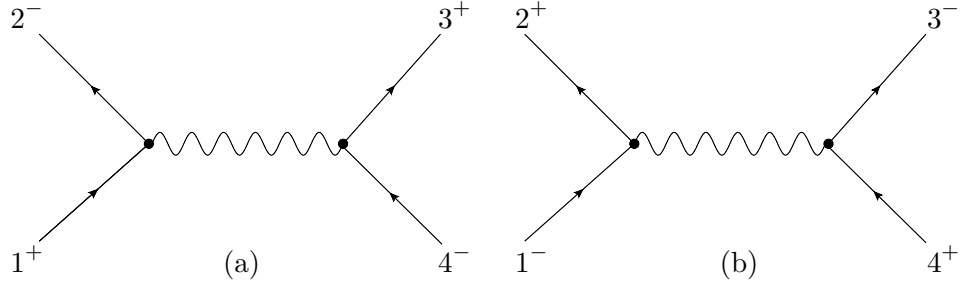


Figura 4.3: Canales con diferente helicidad 1

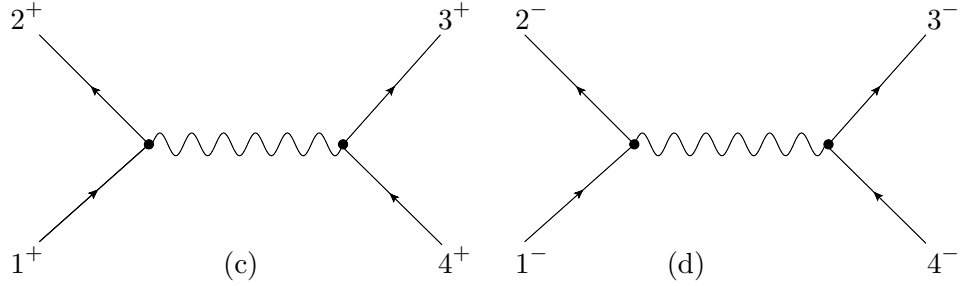


Figura 4.4: Canales con diferentes helicidad 2

La amplitud a 4 puntos del diagrama de Feynman (a) Fig.(4.3) es como sigue

$$\mathcal{A}_{4,a} = \frac{1}{2} \langle 2 | \gamma^\mu | 1 \rangle \left(\frac{i \eta_{\mu\nu}}{2k_1 \cdot k_2} \right) [3 | \gamma^\nu | 4 \rangle \quad (4.67)$$

$$= -\frac{i}{2 \langle 12 \rangle [21]} [1 | \gamma^\mu | 2 \rangle [3 | \gamma_\mu | 4 \rangle \quad (4.68)$$

$$= -\frac{i}{2 \langle 12 \rangle [21]} (2 [31] \langle 24 \rangle) \quad (4.69)$$

$$= i \frac{\langle 24 \rangle [13]}{\langle 12 \rangle [21]} \left(\frac{\langle 31 \rangle}{\langle 31 \rangle} \right) = i \frac{\langle 24 \rangle [13] \langle 31 \rangle}{\langle 12 \rangle [21] \langle 31 \rangle} \quad (4.70)$$

$$= i \frac{\langle 24 \rangle [24] \langle 42 \rangle}{\langle 12 \rangle [21] \langle 31 \rangle} = -i \frac{\langle 24 \rangle^2 [24]}{\langle 12 \rangle [21] \langle 31 \rangle} = i \frac{\langle 24 \rangle^2 [24]}{\langle 12 \rangle [21] \langle 13 \rangle} \quad (4.71)$$

$$= -i \frac{\langle 24 \rangle^2 [24]}{\langle 12 \rangle [24] \langle 43 \rangle} = -i \frac{\langle 24 \rangle^2}{\langle 12 \rangle (-1) \langle 34 \rangle} = i \frac{\langle 24 \rangle^2}{\langle 12 \rangle \cdot \langle 34 \rangle}. \quad (4.72)$$

El procedimiento en las ecuaciones (4.67-4.72) fue como sigue; En Ec. (4.67) se utilizó la propiedad de reflexión, en Ec. (4.68) la identidad de Fierz, la Ec. (4.70) se multiplicó por un “uno” muy conveniente para utilizar posteriormente en las ecuaciones (4.70,4.72) conservación de momento, ecuaciones (4.51,4.52). Para calcular los diagramas de Feynman restantes con canales diferentes de helicidad se recurre a las simetrías, de tal forma que no se repita todo el cálculo. La simetría de paridad cambia la helicidad, básicamente cambia $[\rightarrow \langle$, así como $] \rightarrow \rangle$.

La amplitud del diagrama (b) Fig.(4.3) se encuentra aplicando la simetría de paridad

$$\mathcal{A}_{4,b} = i \frac{[24]^2}{[12][34]}, \quad (4.73)$$

la amplitud del diagrama (c) Fig.(4.4) se encuentra intercambiando la partícula $1 \rightarrow 2$, dejando la amplitud correspondiente como sigue

$$\mathcal{A}_{4,c} = i \frac{\langle 14 \rangle^2}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle}, \quad (4.74)$$

finalmente la amplitud del diagrama (d) Fig.(4.4) se determina aplicando de nuevo la simetría de paridad pero ahora a la amplitud de la Ec. (4.74), de manera que se obtiene

$$\mathcal{A}_{4,d} = i \frac{[14]^2}{[12][34]}. \quad (4.75)$$

Es de nuestro interés calcular observables físicos, en este caso la sección diferencial de corte está definida como sigue

$$\frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{d\Omega} \propto \sum_{hel} |\mathcal{A}_4|^2. \quad (4.76)$$

Recordando que $||[ij]|^2 = |\langle ij \rangle|^2$, los resultados Ec. (4.72) y Ec. (4.73) son iguales al hacer el módulo cuadrado de la amplitud, es decir

$$\left| i \frac{\langle 24 \rangle^2}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} \right|^2 = \left| i \frac{[24]^2}{[12][34]} \right|^2, \quad (4.77)$$

sucede de igual forma al realizar el módulo cuadrado de las amplitudes $\mathcal{A}_{4,c}$ y $\mathcal{A}_{4,d}$ ecuaciones (4.74,4.75) respectivamente, dejando un 2 global al hacer la suma sobre los estados finales de helicidad

$$\frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{d\Omega} = \frac{\kappa}{64\pi^2} \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{s}\right) \sum_{\text{color}} \sum_{\text{helicidad}} |\mathcal{A}_4|^2 \quad (4.78)$$

$$= \frac{\kappa}{64\pi^2} \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{s}\right) (3)(2) \left(\left| \frac{\langle 24 \rangle^2}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} \right|^2 + \left| \frac{\langle 14 \rangle^2}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} \right|^2 \right). \quad (4.79)$$

Por simplicidad se ha definido en Ec. (4.79) el factor $\kappa = e^4 Q_e^2 Q_q^2$, el factor $1/4$ viene del promedio de los posibles estados finales de helicidad y el factor 3 viene del hecho que los quarks tienen carga de color (rojo, azul, verde), además $s = E_{CM}^2$. Desarrollando los productos en Ec. (4.79) obtenemos:

$$\frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{d\Omega} = \frac{3\kappa}{128\pi^2} \left(\frac{1}{s}\right) \left(\frac{s_{24}^2 + s_{14}^2}{s_{12}s_{34}} \right) = \frac{3\kappa}{128\pi^2} \left(\frac{1}{s}\right) \left(\frac{s_{24}^2 + s_{14}^2}{s_{12}^2} \right), \quad (4.80)$$

donde

$$s_{ij} = (p_i + p_j)^2 = p_i^2 + p_j^2 + 2p_i \cdot p_j = 2p_i \cdot p_j, \quad (4.81)$$

ya que estamos considerando que $p_i^2 = 0$ y $p_j^2 = 0$ (partículas no masivas), por conservación de los 4-momentos se tiene que $s_{12} = s_{34}$.

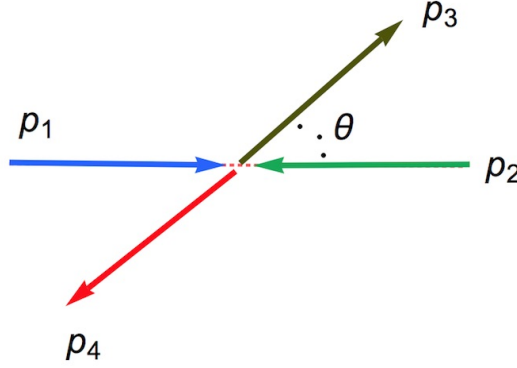


Figura 4.5: Colisión $2 \rightarrow 2$ en el centro de masa

Para concluir el cálculo de la sección diferencial de corte Ec. (4.80) debemos resolver la cinemática del proceso que analizamos. Se pueden determinar Los 4-momentos a partir de la Fig. (4.5) y una vez definidos estos se procede a calcular las variables tipo Mandelstan s_{12} , s_{24} , s_{14} , esto es como sigue

$$p_1^\mu = (E, \vec{p}), \quad p_2^\mu = (E, -\vec{p}), \quad p_3^\mu = (E, \vec{k}), \quad p_4^\mu = (E, -\vec{k}), \quad (4.82)$$

$$s_{12} = 2p_1^\mu p_{2\mu} = 2p_1 \cdot p_2 = 2(E^2 + |\vec{p}|^2) = 4E^2, \quad (4.83)$$

$$s_{24} = 2p_2 \cdot p_4 = 2(E^2 - E^2 \cos \theta) = 2E^2(1 - \cos \theta), \quad (4.84)$$

$$s_{14} = 2p_1 \cdot p_4 = 2(E^2 + E^2 \cos \theta) = 2E^2(1 + \cos \theta), \quad (4.85)$$

sustituyendo las ecuaciones (4.83,4.84,4.86) en Ec. (4.80) se obtiene

$$\frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{d\Omega} = \frac{3\kappa}{128\pi^2 s} \left(\frac{(2E^2(1 - \cos \theta))^2 + (2E^2(1 + \cos \theta))^2}{(4E^2)^2} \right) \quad (4.86)$$

$$= \frac{3\kappa}{128\pi^2 s} \left(\frac{4E^4}{4E^4} \right) \left(\frac{(1 - \cos \theta)^2 + (1 + \cos \theta)^2}{4} \right) \quad (4.87)$$

$$= \frac{3\kappa}{128\pi^2 s} \left(\frac{(1 - \cos \theta)^2 + (1 + \cos \theta)^2}{4} \right) \quad (4.88)$$

$$= \frac{3\kappa}{128\pi^2 s} \left(\frac{2(1 + \cos^2 \theta)}{4} \right) = \frac{3\kappa}{128\pi^2 s} \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right), \quad (4.89)$$

en la Ec. (4.88) se utilizó la identidad algebraica $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2) \forall a, b \in \mathbb{R}$. Integrando respecto al ángulo polar ϕ la Ec. (4.89), recordando que $d\Omega = d|\cos \theta|d\phi$, con

$0 \leq \phi < 2\pi$, se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{d|\cos\theta|} = \int_0^{2\pi} \frac{3\kappa}{128\pi^2 s} \left(\frac{(1 + \cos\theta)^2}{2} \right) d\phi \quad (4.90)$$

$$= \frac{(2\pi)3\kappa}{128\pi^2 s} \left(\frac{(1 + \cos\theta)^2}{2} \right) \quad (4.91)$$

$$= \frac{3\kappa}{128\pi s} (1 + \cos\theta)^2. \quad (4.92)$$

4.2.5. Partículas vectoriales (no masivas)

Para partículas vectoriales cuyo 4-momento físico cumple que $k^2 = 0$, se tendrá un 4-vector de referencia que debe cumplir de igual forma la propiedad $q^2 = 0$. Los 4-vectores de polarización están definidos de la siguiente forma

$$\mathcal{E}_+^\mu(k, q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle q|\gamma^\mu|k\rangle}{\langle qk\rangle}, \quad (4.93)$$

$$\mathcal{E}_-^\mu(k, q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{[q|\gamma^\mu|k\rangle}{[qk]}. \quad (4.94)$$

Las ecuaciones (4.93,4.94) son conocidas como magia china (Chinese magic) por el trabajo de Xu, Zhang, Chong (1984).

Propiedades de los 4-vectores de Polarización

- **Contracción con γ_μ :** Al multiplicar las ecuaciones (4.93,4.94) por una γ_μ se obtienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_+^\mu(k, q) \gamma_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}\langle qk\rangle} \langle q|\gamma^\mu|k\rangle \gamma_\mu = \frac{2}{\sqrt{2}} (|k\rangle\langle q| + |q\rangle\langle k|) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\langle qk\rangle} (|k\rangle\langle q| + |q\rangle\langle k|), \end{aligned} \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_-^\mu(k, q) \gamma_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}[qk]} [q|\gamma^\mu|k\rangle \gamma_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}[qk]} \langle k|\gamma^\mu|q\rangle \gamma_\mu \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{[qk]} (|k\rangle\langle q| + |q\rangle\langle k|). \end{aligned} \quad (4.96)$$

En las ecuaciones (4.95,4.96) hemos utilizado la identidad de Chisholm.

- **Transversalidad:** Los vectores de polarización reales deben cumplir las condiciones de transversalidad como en electrodinámica clásica (no hay grados de libertad tipo

temporales ni longitudinales), es decir

$$k_\mu \mathcal{E}_\pm^\mu(k, q) = 0, \quad (4.97)$$

$$q_\mu \mathcal{E}_\pm^\mu(k, q) = 0. \quad (4.98)$$

▪ **Complejo Conjugado**

$$(\mathcal{E}_\pm^\mu(k, q))^* = \mathcal{E}_\mp^\mu(k, q). \quad (4.99)$$

▪ **Ortogonalidad:**

$$\mathcal{E}_+^\mu(k, q) \mathcal{E}_{\mu-}(k, q) = \mathcal{E}_+(k, q) \cdot \mathcal{E}_-(k, q) = -1, \quad (4.100)$$

$$(\mathcal{E}_+(k, q))^2 = 0 = (\mathcal{E}_-(k, q))^2, \quad (4.101)$$

$$\mathcal{E}_+(k_1, k_2) \cdot \mathcal{E}_-(k_2, k_1) = 0. \quad (4.102)$$

▪ **Relación de Completitud:**

$$\sum_\lambda \mathcal{E}_\lambda^\mu(k, q) \mathcal{E}_\lambda^\nu(k, q) = \mathcal{E}_+^\mu(k, q) \mathcal{E}_-^\nu(k, q) + \mathcal{E}_-^\mu(k, q) \mathcal{E}_+^\nu(k, q) \quad (4.103)$$

$$= -\eta^{\mu\nu} + \frac{k^\mu q^\nu + q^\mu k^\nu}{k^\mu q_\mu}. \quad (4.104)$$

Note que el vector de polarización no es único, lo es hasta que se fija la norma. Se mostrará que aunque el vector de polarización depende del 4-momento de referencia q^μ , la amplitud no, ya que q^μ tiene grados de libertad no físicos.

- **Invariancia ante transformaciones de norma:** La invariancia de norma viene de hacer un desplazamiento al 4-momento q^μ (shift).

$$\mathcal{E}_\mu^+(k, q') - \mathcal{E}_\mu^+(k, q) = -\frac{\sqrt{2} k_\mu \langle q' q \rangle}{\langle q' k \rangle \langle q k \rangle}. \quad (4.105)$$

Prueba de la invariancia de norma

Haciendo uso de la definición Ec. (4.93) se tiene que

$$\mathcal{E}_\mu^+(k, q') - \mathcal{E}_\mu^+(k, q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle q' | \gamma^\mu | k \rangle}{\langle q' k \rangle} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle q | \gamma^\mu | k \rangle}{\langle q k \rangle} \quad (4.106)$$

$$= \frac{\langle q' | \gamma^\mu | k \rangle \langle q k \rangle - \langle q | \gamma^\mu | k \rangle \langle q' k \rangle}{\sqrt{2} \langle q' k \rangle \langle q k \rangle} \quad (4.107)$$

$$= \frac{-\langle q' | \gamma^\mu \not{k} | q \rangle - \langle q' | \not{k} \gamma^\mu | q \rangle}{\sqrt{2} \langle q' k \rangle \langle q k \rangle} \quad (4.108)$$

$$= \frac{-2k_\mu \langle q' q \rangle}{\sqrt{2} \langle q' k \rangle \langle q k \rangle} \text{ q.e.d.} \quad (4.109)$$

Se tiene la libertad de elegir cualquier 4-momento de referencia q^μ , se utiliza a conveniencia para simplificar las cuentas como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Proceso $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$

Se procede a calcular la amplitud a 5 puntos para el proceso $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$.

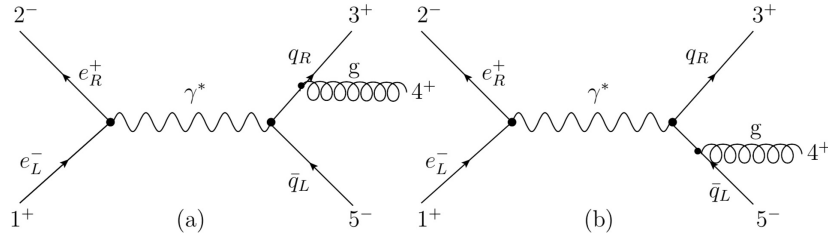


Figura 4.6: Diagramas contribuyentes para el proceso $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$

De las reglas de Feynman se construye la amplitud a 5 puntos, esta es como sigue

$$\mathcal{M}_5 = (-ie)^2(2\sqrt{2})(-ig)Q_e Q_q (T^{A_4})_{i_3}^{\bar{j}_5} \mathcal{A}_5(1_{\bar{e}}^+, 2_e^-, 3_q^+, 4_g^+, 5_{\bar{q}}^-), \quad (4.110)$$

se ha incluido el factor de normalización $(2\sqrt{2})$. Calculando el término puramente cinemático en la amplitud Ec. (4.110) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_5(1_{\bar{e}}^+, 2_e^-, 3_q^+, 4_g^+, 5_{\bar{q}}^-) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \langle 2|\gamma^\mu|1\rangle \frac{1}{s_{12}} \left([3|\mathcal{E}_+(4, q) \frac{(\not{3} + \not{4})}{s_{34}} \gamma_\mu|5\rangle \right. \\ &\quad \left. + [3|\gamma_\mu \frac{(\not{4} + \not{5})}{s_{45}} \mathcal{E}_+(4, q)|5\rangle \right). \end{aligned} \quad (4.111)$$

Para calcular por separado los términos $[3|\mathcal{E}_+(4, q)$ y $\mathcal{E}_+(4, q)|5\rangle$, es conveniente utilizar la definición Ec. (4.95) en Ec. (4.111)

$$[3|\mathcal{E}_+(4, q) = \frac{\sqrt{2}}{\langle q4\rangle} [3(|4\rangle\langle q| + |q\rangle[4]) \quad (4.112)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\langle q4\rangle} ([34]\langle q| + \cancel{[3q]}[4]) = \frac{\sqrt{2}}{\langle q4\rangle} [34]\langle q|, \quad (4.113)$$

$$\mathcal{E}_+(4, q)|5\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\langle q4\rangle} (|4\rangle\langle q| + |q\rangle[4])|5\rangle \quad (4.114)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\langle q4\rangle} (|4\rangle\langle q5\rangle + |q\rangle\cancel{[45]}) = \frac{\sqrt{2}}{\langle q4\rangle} |4\rangle\langle q5\rangle. \quad (4.115)$$

Como se mencionó anteriormente el 4-momento q^μ se puede elegir a conveniencia para simplificar las cuentas, la ecuación (4.115) sugiere considerar el valor $q = 5$, tomando este valor y por la propiedad de antisimetría $\langle ij\rangle = -\langle ji\rangle$, resulta en Ec. (4.115) que

$\langle 55 \rangle = 0$, lo que es equivalente a decir que el diagrama (b) de la Fig. (4.6) no contribuye al proceso. Retomando la parte de la amplitud Ec. (4.111) que no se canceló al fijar la norma $q = 5$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_5(1_e^+, 2_e^-, 3_q^+, 4_g^+, 5_{\bar{q}}^-) &= \frac{1}{2\sqrt{2}s_{12}s_{34}} \langle 2|\gamma^\mu|1 \rangle \left(\frac{\sqrt{2}}{\langle 54 \rangle} [34]\langle 5| \right) (\not{3} + \not{4})\gamma_\mu|5 \rangle \\ &= \frac{[34]}{2s_{12}s_{34}\langle 54 \rangle} \langle 2|\gamma^\mu|1 \rangle \langle 5|(\not{3} + \not{4})\gamma_\mu|5 \rangle \end{aligned} \quad (4.116)$$

$$= \frac{[34]}{2s_{12}s_{34}\langle 54 \rangle} \langle 2|\gamma^\mu|1 \rangle (\langle 5|\not{3}\gamma_\mu|5 \rangle + \langle 5|\not{4}\gamma_\mu|5 \rangle). \quad (4.117)$$

Haciendo uso de la identidad Ec. (4.53) en Ec. (4.117) se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_5 &= \frac{[34]}{2s_{12}s_{34}\langle 54 \rangle} \langle 2|\gamma^\mu|1 \rangle (\langle 5|(-|3\rangle[3] - |3\rangle\langle 3|)\gamma_\mu|5 \rangle \\ &\quad + \langle 5|(-|4\rangle[4] - |4\rangle\langle 4|)\gamma_\mu|5 \rangle) \end{aligned} \quad (4.118)$$

$$= \frac{[34]}{2s_{12}s_{34}\langle 54 \rangle} \langle 2|\gamma^\mu|1 \rangle (-\langle 53 \rangle [3]\gamma_\mu|5 \rangle - \langle 54 \rangle [4]\gamma_\mu|5 \rangle) \quad (4.119)$$

$$= -\frac{[34]}{2s_{12}s_{34}\langle 54 \rangle} (\langle 53 \rangle \langle 2|\gamma^\mu|1 \rangle [3]\gamma_\mu|5 \rangle + \langle 54 \rangle \langle 2|\gamma^\mu|1 \rangle [4]\gamma_\mu|5 \rangle). \quad (4.120)$$

Finalmente se utiliza la identidad de Fierz y la propiedad de reflexión en la Ec. (4.120) para obtener

$$\mathcal{A}_5 = \frac{2[34]}{2s_{12}s_{34}\langle 54 \rangle} (\langle 53 \rangle [31]\langle 25 \rangle + \langle 54 \rangle [41]\langle 25 \rangle) \quad (4.121)$$

$$= \frac{[34]\langle 25 \rangle}{s_{12}s_{34}\langle 54 \rangle} (\langle 53 \rangle [31] + \langle 54 \rangle [41]) \quad (4.122)$$

$$= \frac{[34]\langle 25 \rangle}{s_{12}s_{34}\langle 54 \rangle} (-[12]\langle 25 \rangle - [14]\langle 45 \rangle + [14]\langle 45 \rangle (-1)^2) \quad (4.123)$$

$$= -\frac{[34]\langle 25 \rangle [12]\langle 25 \rangle}{\langle 12 \rangle [21] \langle 34 \rangle [43] \langle 54 \rangle} = -\frac{(-1)[34]\langle 25 \rangle^2 (-1)[12]}{\langle 12 \rangle [21] \langle 34 \rangle [43] \langle 54 \rangle} \quad (4.124)$$

$$= -\frac{(-1)[34]\langle 25 \rangle^2 (-1)[12]}{\langle 12 \rangle [21] \langle 34 \rangle [43] (-1)\langle 45 \rangle} = \frac{\langle 25 \rangle^2}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle}, \quad (4.125)$$

en la Ec. (4.122) se utilizó la conservación del momento con el propósito de tener una expresión compacta.

En las siguientes secciones se estudian diferentes casos para los que se consideran ciertos límites de los 4-momentos que producen una conveniente factorización en la amplitud \mathcal{A}_5 a nivel árbol.

4.2.6. Límite Suave

Considerando el caso en el que el 4-momento del gluon g tiende a cero, esto es $k_4 \rightarrow 0$, la amplitud para el proceso $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$ es como sigue:

$$\mathcal{M}_5(1_{\bar{e}}^+, 2_e^-, 3_q^+, 4_g^+, 5_{\bar{q}}^-) \propto \mathcal{A}_5(1_{\bar{e}}^+, 2_e^-, 3_q^+, 4_g^+, 5_{\bar{q}}^-), \quad (4.126)$$

si se expresa la amplitud (parcial) A_5 Ec. (4.125) de la siguiente forma

$$\mathcal{A}_5 = \left(\frac{\langle 35 \rangle}{\langle 34 \rangle \langle 45 \rangle} \right) \frac{\langle 25 \rangle^2}{\langle 12 \rangle \langle 35 \rangle} \quad (4.127)$$

$$= \text{Soft}(3, 4^+, 5) \mathcal{A}_4(1_{\bar{e}}^+, 2_e^-, 3_q^+, 4_{\bar{q}}^-), \quad (4.128)$$

se obtiene un término $\text{Soft}(3, 4^+, 5)$ el cual es conocido como el factor eikonal de Weinberg. La amplitud a 4 puntos \mathcal{A}_4 que resulta en Ec. (4.128) no incluye el gluon suave (soft). El factor eikonal se define de la siguiente manera:

$$\frac{\langle 35 \rangle}{\langle 34 \rangle \langle 45 \rangle} \propto \frac{\mathcal{E}_+(k_4, q) \cdot k_3}{k_4 \cdot k_3} - \frac{\mathcal{E}_+(k_4, q) \cdot k_5}{k_4 \cdot k_5} = \Delta \quad (4.129)$$

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle q | \not{q} | 4 \rangle}{\langle q4 \rangle} \frac{1}{\langle 34 \rangle [43]} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle q | \not{q} | 4 \rangle}{\langle q4 \rangle} \frac{1}{\langle 45 \rangle [54]} \quad (4.130)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle q3 \rangle [34]}{\langle q4 \rangle} \frac{1}{\langle 34 \rangle [43]} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle q5 \rangle [54]}{\langle q4 \rangle} \frac{1}{\langle 45 \rangle [54]} \quad (4.131)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2} \langle q4 \rangle} \left(\frac{\langle q3 \rangle}{\langle 34 \rangle} + \frac{\langle q5 \rangle}{\langle 45 \rangle} \right) = -\frac{\langle q3 \rangle \langle 45 \rangle + \langle q5 \rangle \langle 34 \rangle}{\sqrt{2} \langle q4 \rangle \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle} \quad (4.132)$$

$$= -\frac{\cancel{\langle q4 \rangle} \langle 35 \rangle}{\sqrt{2} \cancel{\langle q4 \rangle} \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle} = -\frac{\langle 35 \rangle}{\sqrt{2} \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle} \text{ q.e.d.} \quad (4.133)$$

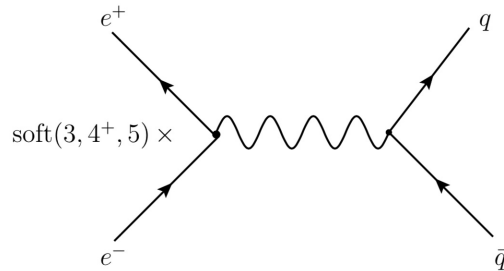


Figura 4.7: Diagrama de amplitud a 4 puntos por una función soft

En la Ec. (4.132) se implementó la identidad de Schouten Ec. (4.50). El factor eikonal de Weinberg Ec. (4.129) vendría a ser un tipo de corriente semiclassical que emite el gluon

soft, es un tipo de “antena”. En general para el diagrama (a) Fig. (4.6) se tiene que

$$\text{soft}(a, 5^+, b) = \frac{\langle ab \rangle}{\langle ab \rangle \langle 5b \rangle}, \quad (4.134)$$

$$\text{soft}(a, 5^-, b) = -\frac{[ab]}{[ab][5b]}, \quad (4.135)$$

diagramáticamente la Ec. (4.128) es equivalente a tener

Límite Colinial $k_3 || k_4$

El límite colineal se da cuando el 4-momento k_3 es paralelo al 4-momento del gluon k_4 (ver diagrama (a) Fig. (4.6)). Sea $k_3 = zk_p$ y $k_4 = (1-z)k_p$, si se suman resulta $k_p = k_3 + k_4$, considerando este límite la amplitud \mathcal{A}_5 es como sigue:

$$\mathcal{A}_5|_{k_3 || k_4} \rightarrow \frac{1}{\langle 34 \rangle \sqrt{1-z}} \frac{\langle 25 \rangle^2}{\langle 12 \rangle \langle p5 \rangle} = \text{split}_-(3^+, 4^+) \frac{\langle 25 \rangle^2}{\langle 12 \rangle \langle p5 \rangle}. \quad (4.136)$$

Diagramáticamente la Ec. (4.136) es equivalente a tener

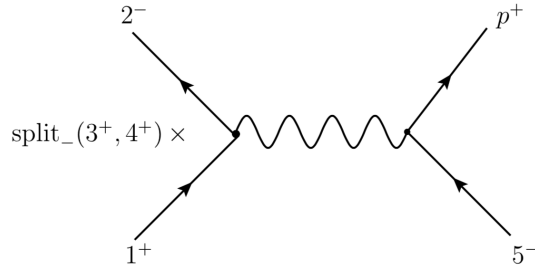


Figura 4.8: Diagrama de amplitud a 4 puntos por una split función

Debido al efecto de colinealidad las partículas que salen con momento k_p son indistinguibles .

Límite Colinial $k_5 || k_4$

Considerando ahora que el 4-momento k_5 es paralelo al 4-momento k_4 , donde $k_4 = zk_p$ y $k_5 = (1-z)k_p$, se repite el análisis de la Sección (4.2.6), la amplitud para este límite es como sigue

$$\mathcal{A}_5|_{k_5 || k_4} \rightarrow \left(\frac{1-z}{\sqrt{z} \langle 45 \rangle} \right) \frac{\langle 2p \rangle^2}{\langle 12 \rangle \langle 3p \rangle} = \text{split}_+(4_g^+, 5_{\bar{q}}^-) \frac{\langle 2p \rangle^2}{\langle 12 \rangle \langle 3p \rangle}. \quad (4.137)$$

Las funciones split son :

$$\text{split}_-(4_{\bar{g}}^-, 5_{\bar{q}}^-) = -\frac{z}{\sqrt{1-z}\langle 45 \rangle}, \quad (4.138)$$

$$\text{split}_+(4_g^+, 5_{\bar{q}}^-) = \frac{1-z}{\sqrt{z}\langle 45 \rangle}. \quad (4.139)$$

4.2.7. Análisis de los límites colineales a nivel de probabilidades

La sección de corte de una amplitud con n partículas externas en términos de una amplitud con $(n-1)$ (ver Fig. (4.8)) se puede expresar como sigue:

$$d\sigma_n \sim d\sigma_{(n-1)} \left(\frac{1}{s_{qg}} \right) P_{qg}(z), \quad (4.140)$$

donde la función $P_{qg}(z)$ que viene en Ec. (4.140) esta definida como sigue:

$$P_{qg}(z) = \sum_{h_p, h_q, h_g} |\text{split}_{h_p}(q^{h_q}, g^{h_g})|^2 s_{qg} \quad (4.141)$$

$$= C_F \left(\left| \frac{z}{\sqrt{1-z}} \right|^2 + \left| \frac{1}{\sqrt{1-z}} \right|^2 \right) \quad (4.142)$$

$$= C_F \left(\frac{z^2 + 1}{1-z} \right). \quad (4.143)$$

El factor C_F es el Casimir que resulta de sumar los estados finales de helicidad, y esta definido de la siguiente forma:

$$C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}, \quad (4.144)$$

donde N_c es el número de colores de la teoría, por ejemplo para el caso del grupo $SU(3)$ se tiene que $N_c = 3$.

4.3. Grupo pequeño de Wigner

En esta sección se mostrará que las amplitudes de gluones a nivel árbol pueden ser construidas a partir de amplitudes de 3 puntos (bloques fundamentales), se debe recordar que en estas notas únicamente se introduce el caso en que las partículas son no masivas.

exista la invariancia de Lorentz se debe cumplir que:

$$h_1 = -\frac{(x_{12} + x_{13})}{2}, \quad (4.149)$$

$$h_2 = -\frac{(x_{12} + x_{23})}{2}, \quad (4.150)$$

$$h_3 = -\frac{(x_{13} + x_{23})}{2}, \quad (4.151)$$

las helicidades están dadas en la Fig. (4.9), $h_1 = -1$, $h_2 = -2$, $h_3 = +1$, lo que deja un sistema de ecuaciones (4.149-4.151) de 3 ecuaciones y 3 incógnitas, el cual tiene la siguiente solución (para cualesquiera valores de h_1, h_2 y h_3):

$$x_{12} = h_3 - h_2 - h_1, \quad (4.152)$$

$$x_{13} = h_2 - h_3 - h_1, \quad (4.153)$$

$$x_{23} = h_1 - h_3 - h_2. \quad (4.154)$$

La amplitud de gluones a 3 puntos podría ser:

$$\mathcal{A}_3(1_g^-, a_1; 2_g^-, a_2; 3_g^+, a_3) = c_{a_1 a_2 a_3} \frac{\langle 12 \rangle^3}{\langle 13 \rangle \langle 23 \rangle}. \quad (4.155)$$

Si se hubiera pedido dependencia de los brackets cuadrados, se tendría que

$$\mathcal{A}_3(1_g^-, a_1; 2_g^-, a_2; 3_g^+, a_3) = c'_{a_1 a_2 a_3} \frac{[13][23]}{[12]^3}. \quad (4.156)$$

Realizando un análisis dimensional a nivel de las amplitudes (en unidades naturales $\hbar = c = 1$ y $D = 4$), la amplitud de n partículas debe tener la siguiente dimensión (de masa):

$$[\mathcal{A}_n] = [M^{4-n}] \quad (4.157)$$

por ejemplo para el caso $n = 3$ tendríamos $[\mathcal{A}_3] = [M]$. Considerar la amplitud de gluones a 3 puntos con brackets angulares implicaría que la dimensión de la constante $c_{a_1 a_2 a_3}$ sea $[M^0]$, es decir que es adimensional. En teorías de Yang - Mills renormalizables las constantes son adimensionales por lo que descartaremos las amplitudes a 3 puntos utilizando brackets cuadrados, ya que $[c'_{a_1 a_2 a_3}] = [M^2]$.

La invariancia de Lorentz ha fijado cómo debe de ser la cinemática de la amplitud, pero aún tenemos el problema que la conservación de momento nos da todo cero.

4.3.1. Complejificación de los 4-Momentos

Se ha visto que en el caso que los 4-momentos son reales se cumple que $\langle ij \rangle = [ji]^*$, si promovemos k_i y k_j a ser complejos, el producto $\langle ij \rangle$ es independiente de $[ji]$ y por

conservación de momento se tiene que:

$$[12] = [23] = [13] = 0, \quad (4.158)$$

$$|1\rangle \propto |2\rangle \propto |3\rangle, \quad (4.159)$$

$$\langle 12 \rangle [12] = 0. \quad (4.160)$$

4.4. Factorización de la Amplitud

4.4.1. Factor de Color

La amplitud \mathcal{A}_3 para gluones es bosónica ya que los gluones son bosones y, también es simétrica en el cambio de los gluones. Los generadores del grupo $SU(3)$ cumplen las siguientes propiedades

$$\mathbf{Tr}[T^a, T^b] = \delta^{ab}, \quad (4.161)$$

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad (4.162)$$

donde el factor f^{abc} es la constante de estructura del grupo $SU(3)$, de la Ec. (4.162) sigue que:

$$f^{abc} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \mathbf{Tr}[T^a, [T^b, T^c]] \quad (4.163)$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2}} \mathbf{Tr}[T^a T^b T^c] + \frac{i}{\sqrt{2}} \mathbf{Tr}[T^a T^c T^b]. \quad (4.164)$$

Considerando la Ec. (4.164) las amplitud \mathcal{A}_3 pueden escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 &= c_{a_1 a_2 a_3} \frac{\langle 12 \rangle^3}{\langle 13 \rangle \langle 23 \rangle} \\ &= \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} \mathbf{Tr}[T^{a_1} T^{a_2} T^{a_3}] + \frac{i}{\sqrt{2}} \mathbf{Tr}[T^{a_1} T^{a_3} T^{a_2}] \right) \frac{\langle 12 \rangle^3}{\langle 31 \rangle \langle 23 \rangle} \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \mathbf{Tr}[T^{a_1} T^{a_2} T^{a_3}] \frac{\langle 12 \rangle^3}{\langle 31 \rangle \langle 23 \rangle} + \frac{i}{\sqrt{2}} \mathbf{Tr}[T^{a_1} T^{a_3} T^{a_2}] \frac{(-1) \langle 21 \rangle^3}{\langle 31 \rangle \langle 23 \rangle} \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \mathbf{Tr}[T^{a_1} T^{a_2} T^{a_3}] \frac{\langle 12 \rangle^3}{\langle 13 \rangle \langle 23 \rangle} \end{aligned} \quad (4.165)$$

$$- \frac{i}{\sqrt{2}} \mathbf{Tr}[T^{a_1} T^{a_3} T^{a_2}] \frac{\langle 21 \rangle^3}{(-1)^2 \langle 13 \rangle \langle 32 \rangle}. \quad (4.166)$$

La simetría de intercambiar un boson por otro (gluones en este caso) se respeta totalmente, si se cambia por ejemplo $1 \rightarrow 3$, los factores de trazas cambian dejando invariante la

amplitud a nivel árbol

$$\mathcal{A}_3 = \frac{\langle 12 \rangle^3}{\langle 23 \rangle \langle 31 \rangle} \rightarrow \frac{\langle 32 \rangle^3}{\langle 21 \rangle \langle 13 \rangle} = \frac{\langle 32 \rangle^4}{\langle 21 \rangle \langle 13 \rangle \langle 32 \rangle} = \frac{\langle 32 \rangle^4}{(-1)\langle 12 \rangle (-1)\langle 31 \rangle (-1)\langle 23 \rangle} \quad (4.167)$$

$$= -\frac{\langle 32 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 31 \rangle \langle 23 \rangle} = -\frac{\langle 32 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle} = -\left(\frac{\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle^4}\right) \frac{\langle 32 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle} \quad (4.168)$$

$$= -\left(\frac{\langle 32 \rangle^4}{\langle 12 \rangle^4}\right) \frac{\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle} = -\left(\frac{\langle 32 \rangle^4}{\langle 12 \rangle^4}\right) \frac{\langle 12 \rangle^3}{\langle 23 \rangle \langle 31 \rangle} \quad (4.169)$$

$$= -\left(\frac{\langle 32 \rangle^4}{\langle 12 \rangle^4}\right) \mathcal{A}_3. \quad (4.170)$$

Eligiendo la proporcionalidad $|\langle 32 \rangle|^4 \propto |\langle 12 \rangle|^4$ (producto de la conservación del momento) en la Ec. (4.170) se ve que la amplitud \mathcal{A}_3 es simétrica bajo el intercambio de gluones $1 \rightarrow 3$.

En general las amplitudes a nivel árbol de n puntos \mathcal{A}_n son de la siguiente forma

$$\mathcal{A}_n^{arbol}(\{k_i, \mathcal{E}_i, a_i\}) = \sum_{\sigma \in S_n/Z_n} \mathbf{Tr}[T^{a_{\sigma(1)}} \dots T^{a_{\sigma(n)}}] \mathcal{A}_n^{arbol}(\sigma(1), \sigma(2) \dots \sigma(n)). \quad (4.171)$$

La suma en los valores $\sigma \in S_n/Z_n$ indica que esta se hace sobre las permutaciones no cíclicas, ya que la amplitud parcial es cíclica. La amplitud parcial $\mathcal{A}_n^{arbol}(\sigma(1), \sigma(2) \dots \sigma(n))$ es puramente cinemática, no depende más del factor de color, esto viene de aplicar repetidamente la identidad de Fierz Ec. (4.49) para $SU(N_C)$, es decir

$$\sum_a \mathbf{Tr}[X T^a] \mathbf{Tr}[T^a Y] = \mathbf{Tr}[XY] - \frac{1}{N_C} \mathbf{Tr}[X] \mathbf{Tr}[Y], \quad (4.172)$$

en ese sentido en vez de usar el grupo $SU(N_C)$ se utilizara el grupo $U(N_C)$, desaparece el segundo término de la Ec. (4.172), se puede pasar sin problema alguno de $SU(N_C) \rightarrow U(N_C)$ en las amplitudes de dispersión para gluones a nivel árbol. Como se mencionó la amplitud $\mathcal{A}_n(1, 2, \dots, n)$ es ahora independiente del factor de color, únicamente dependen de la cinemática (y dinámica) y son las llamadas “amplitudes ordenadas de color”. Se necesita solo $(n-1)!$ amplitudes para conocer completamente la amplitud total, y estas satisfacen un número de condiciones que las reduce en cantidad.

Algunas de las condiciones que la amplitud ordenada de color respeta son las siguientes:

- **Simetría cíclica**
- **Respetan la identidad de reflexión Ec. (4.48)**

$$\mathcal{A}_n(12 \dots n) = (-1)^n \mathcal{A}_n(n2 \dots 1). \quad (4.173)$$

- **Identidad del acoplamiento del fotón**

$$\mathcal{A}_n(12 \dots n) + \mathcal{A}_n(21 \dots n) + \mathcal{A}_n(321 \dots n) + \mathcal{A}_n(23 \dots 1n) = 0, \quad (4.174)$$

también conocida como identidad del desacople del fotón

- **Invariancia de norma de las amplitudes con ordenamiento de color** (o bien amplitudes primitivas), al hacer el cambio:

$$\mathcal{E}_\mu(p) \rightarrow \mathcal{E}_\mu(p) + \alpha(p)p_\mu, \quad (4.175)$$

el cambio en el 4-vector de polarización Ec. (4.175) no afecta la amplitud. Se pueden usar diferentes normas (gauges) para calcular apropiadamente las diferentes amplitudes con ordenamiento de color. Aunque las amplitudes fueron escritas para gluones, es posible hacerlo para quarks.

Desde ahora en adelante en estas notas, todas las amplitudes son con ordenamiento de color. Las amplitudes a nivel árbol más simples y no nulas son las amplitudes de **Parke-Taylor**, también conocidas como las amplitudes **MHV** (violación máxima de helicidad), el nombre MHV no quiere decir que se viole la conservación de momento angular, más bien viene del hecho de pensar en procesos de dispersión tipo $2 \rightarrow n - 2$, por ejemplo la amplitud $\mathcal{A}_n(1^+ 2^+ \dots n^+)$ se refiere al proceso:

$$1^- 2^- \rightarrow 3^+ 4^+ \dots n^+, \quad (4.176)$$

las dos partículas entrantes tienen helicidad negativa ($1^-, 2^-$) y las partículas salientes tienen helicidad positiva, este proceso viola helicidad, en una teoría de Yang-Mills pura la amplitud a nivel árbol es cero, en una teoría supersimétrica $\mathcal{N} = 4$ también es cero a todo orden perturbativo para este proceso Ec. (4.176). En el proceso $1^- 2^- \rightarrow 3^- 4^- 5^+ \dots n^+$ se muestra lo más que se puede violar la helicidad, en el sentido que es la cantidad menor de gluones con helicidad negativa que se puede tener en un proceso que da un resultado que no es cero.

4.4.2. Amplitudes de Parke - Taylor (MHV)

Considerando la fórmula de Parke-Taylor, el denominador de la amplitud únicamente contiene productos espinoriales de pares de 4-momentos adjuntos de color $\langle i(i+1) \rangle$.

Las amplitudes MHV (Parke-Taylor) son como sigue

$$\boxed{\mathcal{A}_n(1^+, \dots, i^-, \dots, j^-, \dots, n^+) = -i \frac{\langle ij \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle (n-1)n \rangle \langle n1 \rangle}}, \quad (4.177)$$

note que en Ec. (4.176) se tiene 2 gluones con helicidad negativa y todos los restantes con helicidad positiva. Las amplitudes que contienen solamente helicidades positivas y las que tienen nada más una helicidad negativa y el resto positivas son cero (**Explicar un poco más**). En el caso que los 4-momentos sean colineales (Sección (4.2.7)) la amplitud Ec. (4.177) queda en términos de la función $\text{split}_-(i^- j^-)$, como se muestra en la siguiente

ecuación

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n(1^+, \dots, i^-, \dots, j^-, \dots, n^+) &= -i \frac{\langle ij \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle (n-1)n \rangle \langle n1 \rangle} \Big|_{(n-1)||n} \\ &\sim \frac{1}{\langle (n-1)n \rangle \sqrt{z(1-z)}} \mathcal{A}_{n-1}^{arbol}(1^+, \dots, i^-, j^-, \dots, p). \end{aligned} \quad (4.178)$$

En el límite colineal las partículas externas $(n-1)$ y n se vuelven paralelas y sus 4-momentos están definidos $k_{n-1} \approx zk_p$ y $k_n \approx (1-z)k_p$ con $k_p = k_{n-1} + k_n$, lo cual deja la función split como sigue

$$\text{split}_-^{(arbol)}(a_g^+, b_g^+) = \frac{1}{\sqrt{z(1-z)} \langle ab \rangle}. \quad (4.179)$$

¿Cuál es el origen de la función split Ec. (4.179)?

En el límite colineal $a||b$ una amplitud con ordenamiento de color se factoriza como sigue;

$$\mathcal{A}_n^{arbol}(\dots a^{h_a}, b^{h_b}, \dots) \Big|_{k_a || k_b} = \sum_{h=\pm} \text{split}_{-h}^{arbol}(a^{h_a}, b^{h_b}) \mathcal{A}_{n-1}^{arbol}(\dots (k_a + k_b)^h \dots), \quad (4.180)$$

como se muestra en la figura Fig. (4.10).

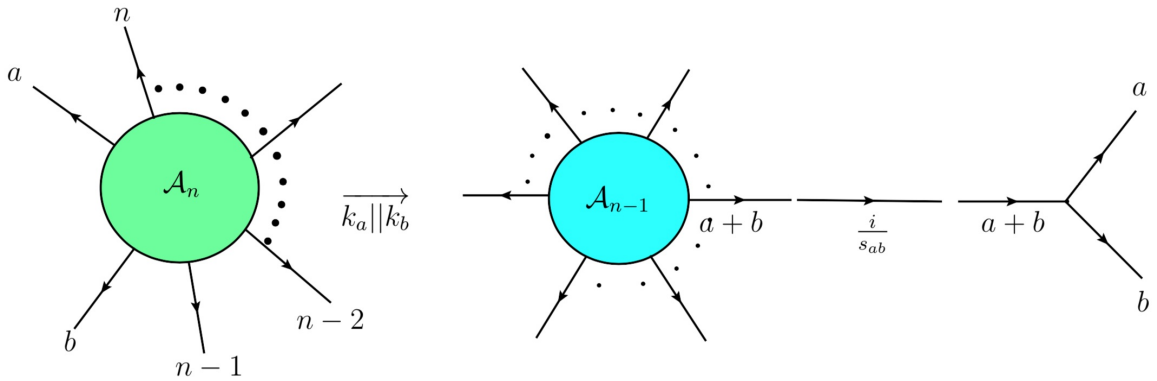


Figura 4.10: Función Split de una amplitud de n puntos

Debido a la universalidad de la función split el límite previo Ec. (4.180) se vuelve una herramienta poderosa.

Prueba de la Función Split ecuación (4.179)

Utilizando las reglas de Feynman y considerando que se tiene ordenamiento de color en los vértices a nivel árbol, tenemos:

$$\begin{aligned} \text{split}_-^{\text{arbol}}(a_g^+, b_g^+) &= \left(\frac{i}{s_{ab}}\right) \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right) \left(\mathcal{E}^+(k_a, q) \cdot \mathcal{E}^+(k_b, q)(k_a - k_b) \cdot \mathcal{E}^-(-k_q - k_b, q) \right. \\ &\quad + \mathcal{E}^+(k_a, q) \cdot \mathcal{E}^-(-k_a - k_b, q)(k_b + k_a + k_b) \cdot \mathcal{E}^+(k_a, q) \\ &\quad \left. + \mathcal{E}^-(-k_a - k_b, q) \cdot \mathcal{E}^+(k_a, q)(-k_a - k_b - k_a) \cdot \mathcal{E}^+(k_b, q)\right). \end{aligned} \quad (4.181)$$

Desarrollando por separado el producto de los 4-vectores de polarización $\mathcal{E}^+(k_a, q) \cdot \mathcal{E}^+(k_b, q)$ que figura en el primer renglón de Ec. (4.181) se tiene:

$$e^+(k_a, q) \cdot \mathcal{E}^+(k_b, q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle q|\gamma^\mu|a\rangle}{\langle qa\rangle} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle q|\gamma_\mu|b\rangle}{\langle qb\rangle} \quad (4.182)$$

$$= \frac{\langle qq\rangle[ab]}{\langle qb\rangle\langle qa\rangle} \quad (4.183)$$

$$= 0, \quad (4.184)$$

dejando únicamente el segundo y tercer término en Ec. (4.181), esto es

$$\begin{aligned} \text{split}_-^{\text{arbol}}(a_g^+, b_g^+) &= \left(\frac{i}{s_{ab}}\right) \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right) \left(\mathcal{E}^+(k_a, q) \cdot \mathcal{E}^-(-k_a - k_b, q)(k_b + k_a + k_b) \cdot \mathcal{E}^+(k_a, q) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{E}^-(-k_a - k_b, q) \cdot \mathcal{E}^+(k_a, q)(-k_a - k_b - k_a) \cdot \mathcal{E}^+(k_b, q)\right), \end{aligned} \quad (4.185)$$

desarrollando los productos internos en Ec. (4.185) se tiene

$$\begin{aligned} \text{split}_-^{\text{arbol}}(a_g^+, b_g^+) &= \frac{-1}{\sqrt{2}\langle ab\rangle[ba]} \left(\mathcal{E}^+(k_a, q) \cdot \mathcal{E}^-(-k_a - k_b, q)(2k_b \cdot \mathcal{E}^+(k_a, q) + k_a \cdot \mathcal{E}^+(k_a, q)) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{E}^-(-k_a - k_b, q) \cdot \mathcal{E}^+(k_a, q)(-2k_a \cdot \mathcal{E}^+(k_b, q) - k_b \cdot \mathcal{E}^+(k_b, q))\right) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}\langle ab\rangle[ba]} \left(\mathcal{E}^+(k_a, q) \cdot \mathcal{E}^-(-k_a - k_b, q)(2k_b \cdot \mathcal{E}^+(k_a, q)) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{E}^-(-k_a - k_b, q) \cdot \mathcal{E}^+(k_a, q)(-2k_a \cdot \mathcal{E}^+(k_b, q))\right) \\ &= \frac{-2}{\sqrt{2}\langle ab\rangle[ba]} \left((k_b \cdot \mathcal{E}^+(k_a, q))(\mathcal{E}^+(k_a, q) \cdot \mathcal{E}^-(-k_a - k_b, q)) \right. \\ &\quad \left. - (k_a \cdot \mathcal{E}^+(k_b, q))(\mathcal{E}^-(-k_a - k_b, q) \cdot \mathcal{E}^+(k_a, q))\right). \end{aligned} \quad (4.186)$$

Se utilizó en Ec. (4.186) la condición de transversalidad $k_\mu \mathcal{E}^\mu(k, q) = 0$. Es importante notar que los productos tipo $k \cdot \mathcal{E}^\pm(k', q)$ se deben calcular utilizando las ecuaciones

(4.53,4.95), como se muestra a continuación

$$k'_a \mathcal{E}^+(k_b, q) = -(|a\rangle\langle a| + |a\rangle\langle a|) \left(\frac{\sqrt{2}}{\langle qb \rangle} (|b\rangle\langle q| + |q\rangle\langle b|) \right) \quad (4.187)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\langle qb \rangle} (\langle qa \rangle [ab] + \cancel{[aq]} [ba] + \cancel{\langle ab \rangle} \langle qa \rangle + \langle aq \rangle [ba]) \quad (4.188)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\langle qb \rangle} (\langle qa \rangle [ab] + \langle qa \rangle [ab] (-1)^2) \quad (4.189)$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}\langle qa \rangle [ab]}{\langle qb \rangle}, \quad (4.190)$$

por otro lado la Ec. (4.190) se puede escribir de la siguiente forma:

$$k'_a \mathcal{E}^+(k_b, q) = \gamma_\mu k_a^\mu \gamma^\mu \mathcal{E}_\mu^+(k_b, q) = (\gamma_\mu \gamma^\mu) k_a \cdot \mathcal{E}^+(k_b, q) = (4) k_a \cdot \mathcal{E}^+(k_b, q), \quad (4.191)$$

de donde se obtienen las siguientes expresiones:

$$k_a \cdot \mathcal{E}^+(k_b, q) = -\frac{\sqrt{2}\langle qa \rangle [ab]}{2\langle qb \rangle}, \quad (4.192)$$

$$k_b \cdot \mathcal{E}^+(k_a, q) = -\frac{\sqrt{2}\langle qb \rangle [ba]}{2\langle qa \rangle}, \quad (4.193)$$

sustituyendo las ecuaciones (4.192,4.194) en la Ec. (4.186) obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{split}_{-}^{arbol}(a_g^+, b_g^+) &= \frac{-1}{\langle ab \rangle [ba]} \left(-\frac{\langle qb \rangle [ba]}{\langle qa \rangle} \frac{\langle q(a+b) \rangle [qb]}{[q(a+b)] \langle qb \rangle} + \frac{\cancel{\langle qa \rangle} [ab]}{\langle qb \rangle} \frac{\langle (a+b)q \rangle [aq]}{\cancel{\langle qa \rangle} [q(a+b)]} \right) \\ &= \frac{-\langle q(a+b) \rangle}{\langle ab \rangle [ba] \langle qb \rangle [q(a+b)]} \left(-\frac{\langle qb \rangle [ba] [qb]}{\langle qa \rangle} - [ab] [aq] \right) \\ &= -\frac{\langle q(a+b) \rangle}{\langle ab \rangle [q(a+b)]} \left(-\frac{[qb]}{\langle qa \rangle} + \frac{[aq]}{\langle qb \rangle} \right), \end{aligned} \quad (4.194)$$

para simplificar aún más la Ec. (4.194) es necesario recordar que para el caso colineal $k_a || k_b$ se tiene:

$$|a\rangle = \sqrt{z}|a+b\rangle, \quad (4.195)$$

$$|b\rangle = \sqrt{1-z}|a+b\rangle, \quad (4.196)$$

sustituyendo las ecuaciones (4.195,4.196) en Ec. (4.194) se obtiene finalmente:

$$\text{split}_-^{arbol}(a_g^+, b_g^+) = -\frac{\langle q(a+b) \rangle}{\langle ab \rangle [q(a+b)]} \left(-\frac{[qb]}{\langle qa \rangle} + \frac{[aq]}{\langle qb \rangle} \right) \quad (4.197)$$

$$= -\frac{\langle q(a+b) \rangle}{\langle ab \rangle [q(a+b)]} \left(-\frac{\sqrt{1-z} [q(a+b)]}{\sqrt{z} \langle q(a+b) \rangle} + \frac{\sqrt{z} [(a+b)q]}{\sqrt{1-z} \langle q(a+b) \rangle} \right) \quad (4.198)$$

$$= -\frac{\langle q(a+b) \rangle}{\langle ab \rangle [q(a+b)]} \left(-\frac{\sqrt{1-z} [q(a+b)]}{\sqrt{z} \langle q(a+b) \rangle} - \frac{\sqrt{z} [q(a+b)]}{\sqrt{1-z} \langle q(a+b) \rangle} \right) \quad (4.199)$$

$$= \frac{\langle q(a+b) \rangle [q(a+b)]}{\langle ab \rangle [q(a+b)] \langle q(a+b) \rangle} \left(\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{z}} + \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1-z}} \right) \quad (4.200)$$

$$= \frac{1}{\langle ab \rangle} \left(\frac{\sqrt{1-z}}{\sqrt{z}} + \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{1-z}} \right) = \frac{1}{\langle ab \rangle} \left(\frac{1-z+z}{\sqrt{z(1-z)}} \right) \quad (4.201)$$

$$= \frac{1}{\langle ab \rangle \sqrt{z(1-z)}}, \text{ q.e.d.} \quad (4.202)$$

4.5. Introducción a la relación de recursión BCFW

En esta sección se introduce la relación de recursión para partículas en capa de masa (on - shell), propuesta en el año 2005 por Britto - Cachaso - Feng - Witten. Dicha relación de recursión resulta de gran utilidad para calcular amplitudes de dispersión a nivel árbol en teorías que satisfacen ciertos pre-requisitos. Esta interesante propuesta se basa principalmente en promover a los 4-momentos externos reales a ser complejos, lo que es conocido como deformación compleja de los 4-momentos, además utiliza la riqueza matemática que posee el análisis complejo para explorar las propiedades analíticas de las amplitudes deformadas.

4.5.1. Desplazamiento complejo

Consideremos la amplitud de 4 gluones (ordenada de color)

$$\mathcal{A}_4^{arbol}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+) = \frac{i\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle 23 \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle}, \quad (4.203)$$

realizando el desplazamiento complejo a los 4-momentos $|1\rangle$ y $|2\rangle$, esto es:

$$|1\rangle \rightarrow |1\rangle - z|2\rangle, \quad (4.204)$$

$$|2\rangle \rightarrow |2\rangle + z|1\rangle, \quad (4.205)$$

se tiene como consecuencias debido a las ecuaciones (4.204,4.206) lo siguiente:

- **Los nuevos 4-momentos deformados preservan la conservación de momento.**

$$k'_1 \rightarrow k'_1(z) = -(|1\rangle - z|2\rangle)\langle 1| - |1\rangle(|1\rangle - z|2\rangle) \quad (4.206)$$

$$= -(|1\rangle\langle 1| + |1\rangle[1]) + z(|2\rangle\langle 1| + |1\rangle[2]), \quad (4.207)$$

$$k'_2 \rightarrow k'_2(z) = -(|2\rangle + z|1\rangle)[2] - |2\rangle(\langle 2| + z\langle 1|) \quad (4.208)$$

$$= -(|2\rangle[2] + |2\rangle\langle 2|) - z(|1\rangle[2] + |2\rangle\langle 1|), \quad (4.209)$$

sumando las ecuaciones (4.207) y (4.209) obtenemos:

$$\begin{aligned} k'_1(z) + k'_2(z) &= -(|2\rangle[2] + |2\rangle\langle 2|) - (|1\rangle\langle 1| + |1\rangle[1]) \\ &= k'_1 + k'_2, \end{aligned} \quad (4.210)$$

vemos en la Ec. (4.210) que la conservación de momento no es alterada al realizar el desplazamiento complejo en los 4-momentos $|1\rangle$ y $|2\rangle$.

- **Preservan la condición de capa de masa:**

Los correspondientes 4-vectores desplazados son como sigue

$$k_1^\mu(z) = k_1^\mu - \frac{z}{2}\langle 1|\gamma^\mu|2\rangle, \quad (4.211)$$

$$k_2^\mu(z) = k_2^\mu + \frac{z}{2}\langle 1|\gamma^\mu|2\rangle, \quad (4.212)$$

los 4-vectores de las ecuaciones (4.211,4.212) siguen estando en capa de masa (tal como $k_1^2 = 0 = k_2^2$), como se muestra a continuación

$$k_1^2(z) = k_1^2 + \frac{z^2}{4}\langle 1|\gamma_\mu|2\rangle\langle 1|\gamma^\mu|2\rangle = k_1^2 + \frac{z^2}{2}\langle (11)[22] \rangle \xrightarrow{0} \quad (4.213)$$

$$k_1^2(z) = k_1^2, \quad (4.214)$$

en la Ec. (4.213) se utilizó la identidad de Fierz y la propiedad de antisimetría, de igual forma se puede mostrar que $k_2^2(z) = k_2^2$.

Desplazamiento complejo en la amplitud

La amplitud de 4 gluones bajo los desplazamientos complejos ecuaciones (4.204,4.205) se deforma de la siguiente forma

$$\mathcal{A}_4 \rightarrow \mathcal{A}_4(z) = \frac{i\langle 12 \rangle^4}{\langle 1\hat{2} \rangle \langle \hat{2}3 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle}, \quad (4.215)$$

calculando por separado los productos que incluyen los 4-momentos desplazados, se tiene

$$\langle 12 \rangle = \langle 1|(|2\rangle + z|1\rangle) = \langle 12 \rangle + z\langle 11 \rangle \xrightarrow{0} \langle 12 \rangle, \quad (4.216)$$

$$\langle 23 \rangle = (\langle 2| + z\langle 1|)|3\rangle = \langle 23 \rangle + z\langle 13 \rangle, \quad (4.217)$$

4.5. INTRODUCCIÓN A LA RELACIÓN DE RECURSIÓN **BCFW**

sustituyendo las ecuaciones (4.216,4.217) en la Ec. (4.215) obtenemos:

$$\mathcal{A}_4 \rightarrow \mathcal{A}_4(z) = \frac{i\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle (\langle 23 \rangle + z\langle 13 \rangle) \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle}, \quad (4.218)$$

vemos que la amplitud Ec. (4.218) se deforma bajo el desplazamiento complejo de los 4-momentos, de hecho $\mathcal{A}_4(z)$ adquiere un polo en $z = -\frac{\langle 23 \rangle}{\langle 13 \rangle}$, además $\lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{A}_4(z) = 0$. El polo se entiende mejor observado el siguiente diagrama (deformado) de Feynman Fig. (4.11), para esta elección de desplazamientos complejos el propagador tiene el siguiente denominador

$$\frac{1}{(\hat{k}_1 + k_4)^2} = \frac{1}{2\hat{k}_1 \cdot k_4} = \frac{1}{\langle 14 \rangle ([14] - z[24])}, \quad (4.219)$$

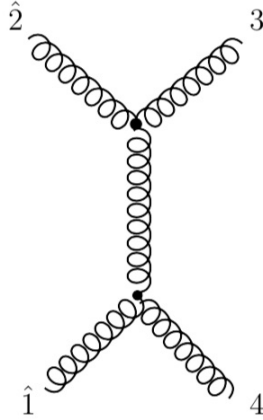


Figura 4.11: Diagrama de Feynman a 4 puntos deformado

el denominador de la Ec. (4.219) presenta un polo en $z = \frac{[14]}{[24]}$, por conservación de momento sabemos que $s_{23} = s_{14}$, se tiene entonces que:

$$z = -\frac{\langle 32 \rangle}{\langle 13 \rangle} = \frac{[41]}{[24]}, \quad (4.220)$$

sustituyendo (4.220) en el denominador de la Ec. (4.219) se obtiene:

$$[14] - z[24] = [41] - \left(-\frac{\langle 32 \rangle}{\langle 13 \rangle}\right) [24] = \frac{[41]\langle 13 \rangle + \langle 32 \rangle [24]}{\langle 13 \rangle} = 0, \quad (4.221)$$

hemos recurrido a la conservación del momento Ec. (4.51) en la Ec. (4.221). Debido a la deformación compleja del producto $\langle 12 \rangle$ se tiene que el 4-momento del propagador en el denominador de la Ec. (4.219) esta ahora en capa de masa (on-shell), ya que se tiene

$$\frac{1}{\langle 14 \rangle(0)} \rightarrow \infty \text{ equivalente a tener: } \frac{1}{p^2} \text{ con } p^2 = 0,$$

como resultado se tiene un objeto que se transmite en capa de masa (ver Fig. (4.11)). Promover los 4-momentos a ser complejos beneficio, con 4-momentos reales no se puede tener amplitudes con 3 gluones en capa de masa. Partiendo de la amplitud deformada $\mathcal{A}_4(z)$ y utilizando la analiticidad de esta, es posible recuperar la amplitud \mathcal{A}_4 que se obtiene con momentos reales. La elección de que 4-momentos desplazar es muy importante para el estudio de la analiticidad de la amplitud $\mathcal{A}_4(z)$, por ejemplo si consideremos los siguientes desplazamientos:

$$|1] \rightarrow |1] - z|3], \quad (4.222)$$

$$|3\rangle \rightarrow |3\rangle + z|1\rangle, \quad (4.223)$$

la amplitud $\mathcal{A}_4(z)$ para el desplazamiento $[\hat{1}\hat{3}]$ en el límite $z \rightarrow \infty$ tiene como término dominante

$$\mathcal{A}_4^{arbol}(z) = \frac{i\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle (\langle 23 \rangle + z\langle 21 \rangle) (\langle 34 \rangle + z\langle 14 \rangle) \langle 41 \rangle} \quad (4.224)$$

$$\mathcal{A}_4^{arbol}(z) = \frac{i\langle 12 \rangle^4}{(\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle - z\langle 12 \rangle^2 \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle + z^2 \langle 12 \rangle^2 \langle 41 \rangle^2)} \quad (4.225)$$

$$\mathcal{A}_4^{arbol}(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{z^2}, \quad (4.226)$$

para el caso del desplazamiento

$$|3] \rightarrow |3] - z|2], \quad (4.227)$$

$$|2\rangle \rightarrow |2\rangle + z|3\rangle, \quad (4.228)$$

se tiene que el término dominante en la amplitud es

$$\mathcal{A}_4^{arbol}(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} \sim z^3. \quad (4.229)$$

La amplitud $\mathcal{A}_4^{arbol}(z)$ xt dependiendo cuales 4-momentos se desplacen.

Analiticidad de la amplitud $\mathcal{A}_4^{arbol}(z)$ utilizando el Teorema de Cauchy

En esta subsección se considera el desplazamiento complejo que deja el término dominante en la amplitud de tipo $\mathcal{A}_4^{arbol}(z) \sim \frac{1}{z}$ para $z \rightarrow \infty$, que es de igual forma el que da un propagador en capa de masa, luego recurriendo al teorema de Cauchy para estudiar la analiticidad de la amplitud, se tiene que:

$$\oint \frac{\mathcal{A}_4^{arbol}(z)}{z} dz = 0, \quad (4.230)$$

$$\oint \frac{\mathcal{A}_4^{arbol}(z)}{z} dz = 2\pi i \left(\text{Res}_{z \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{A}_4^{arbol}(z)}{z} + \text{Res}_{z \rightarrow z_{23}} \frac{\mathcal{A}_4^{arbol}(z)}{z} \right). \quad (4.231)$$

4.5. INTRODUCCIÓN A LA RELACIÓN DE RECURSIÓN **BCFW**

Debido a los desplazamientos complejos, el polo $z = 0$ no puede ser un polo de la amplitud $\mathcal{A}_4^{arbol}(z)$ (ya que no habría desplazamiento complejo en los 4-momentos), omitiendo dicho polo la amplitud física $\mathcal{A}_4^{arbol}(0)$ es como sigue:

$$\mathcal{A}_4^{arbol}(0) = \text{Res}_{z \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}_4^{arbol}(z)}{z}, \quad (4.232)$$

utilizando la Ec. (4.231) y la Ec. (4.232) obtenemos

$$\mathcal{A}_4^{arbol}(0) = -\text{Res}_{z \rightarrow z_{23}} \frac{\mathcal{A}_4^{arbol}(z)}{z}, \quad (4.233)$$

con $z_{23} = -\frac{\langle 23 \rangle}{\langle 13 \rangle}$. Se procede a mostrar que efectivamente el resultado Ec. (4.233) es correcto, tenemos:

$$\mathcal{A}_4^{arbol}(0) = -\text{Res}_{z \rightarrow z_{23}} \frac{\mathcal{A}_4^{arbol}(z)}{z} = -\lim_{z \rightarrow z_{23}} \frac{(z - z_{23})}{z} \frac{i\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 13 \rangle (z - z_{23}) \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle} \quad (4.234)$$

$$= -\frac{i\langle 12 \rangle^4}{z_{23} \langle 12 \rangle \langle 13 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle} = -\frac{i\langle 12 \rangle^4}{-\left(\frac{\langle 23 \rangle}{\langle 13 \rangle}\right) \langle 12 \rangle \langle 13 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle} \quad (4.235)$$

$$= \frac{i\langle 12 \rangle^4}{\langle 23 \rangle \langle 12 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle} = \frac{i\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle} = \mathcal{A}_4^{arbol}(0), \text{ q.e.d.} \quad (4.236)$$

A nivel árbol las amplitudes con un polo tienen un canal en el cual una partícula es intercambiada entre un estado inicial y uno final y el residuo en dicho polo es obtenido como el producto de amplitudes de 3 puntos (ver Fig. (4.12)), la partícula se propaga en este canal con 4-momento $\hat{k}_{23}^\mu(z) = -\hat{k}_2^\mu(z) - k_3^\mu$, el cual como se ha mencionado está en capa de masa, como se muestra a continuación:

$$\hat{k}_{23}^2(z) = \langle 23 \rangle [32] + z \langle 13 \rangle [32] = (\langle 23 \rangle \langle 13 \rangle - \langle 13 \rangle \langle 23 \rangle) [32] = 0, \quad (4.237)$$

se puede decir entonces que el polo $z = -\frac{\langle 23 \rangle}{\langle 13 \rangle}$ de la amplitud deformada $\mathcal{A}_4^{arbol}(z)$ nos dice que el propagador está en capa de masa, $\hat{k}_{23}^2(z) = 0$. La contribución del residuo viene de la suma de todos los posibles estados intermedios (en capa de masa), como se ilustra en los 2 diagramas de BCFW Figura (4.13). Veremos que solo el diagrama (b) contribuye.

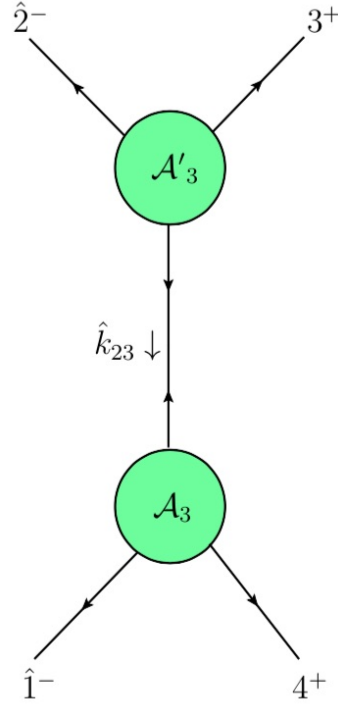


Figura 4.12: Diagrama de BCFW 1

Contribución del diagrama BCFW (a)

En esta sección se calcula la contribución de la amplitud a 4 puntos $\mathcal{A}_{4(a)}^{arbol}$ correspondiente a los diagramas BCFW que se muestran en la Fig. (4.13), comenzando el cálculo para el diagrama (a), se tiene

$$\mathcal{A}_{4(a)}^{arbol} = -\frac{1}{z_{23}} \mathcal{A}_3(\hat{1}^-, \hat{k}_{23}^+, 4^+) \left(\frac{i}{[32]\langle 13 \rangle} \right) \mathcal{A}_3(\hat{2}^-, 3^+, -\hat{k}_{23}^-), \quad (4.238)$$

con $\hat{1} = k_1^\mu(z_{23})$ y $\hat{k}_{23}^\mu(z_{23}) = k_2^\mu(z_{23}) + k_3^\mu$. El gorro “^” sobre los 4-momentos significa que estos han sido calculados en el polo $z = z_{23}$ (en este caso). Del grupo pequeño de Wigner Sección (??) se conocen las expresiones básicas (bloques) de las amplitudes $\mathcal{A}_3(\hat{1}^-, \hat{k}_{23}^+, 4^+)$ y $\mathcal{A}_3(\hat{2}^-, 3^+, -\hat{k}_{23}^-)$, la primera es como sigue:

$$\mathcal{A}_3(\hat{1}^-, \hat{k}_{23}^+, 4^+) = -i \frac{[\hat{k}_{23}4]^3}{[4\hat{1}][\hat{1}\hat{k}_{23}]}, \quad (4.239)$$

para calcular los productos $[\hat{k}_{23}4]$ y $[\hat{1}\hat{k}_{23}]$, se realizará el cálculo considerando el caso general

$$[a\hat{k}_{23}] = \frac{[a\hat{k}_{23}]\langle \hat{k}_{23}1 \rangle}{\langle \hat{k}_{23}1 \rangle}, \quad (4.240)$$

4.5. INTRODUCCIÓN A LA RELACIÓN DE RECURSIÓN **BCFW**

denotaremos $\bar{w} = \langle \hat{k}_{23} | 1 \rangle$ el cual es llamado removedor de sombrero (hat removing), de tal forma que utilizando Ec. (4.53) podamos expresar Ec. (4.241) como sigue

$$[a\hat{k}_{23}] = \frac{[a\hat{k}_{23}]\langle \hat{k}_{23} | 1 \rangle}{\bar{w}} = \frac{[a|\hat{k}_{23}|1]}{\bar{w}} = \frac{[a|\not{z}(z_{23}) + \not{\beta}|1]}{\bar{w}} = \frac{[a|\not{z}(z_{23})|1] + [a|\not{\beta}|1]}{\bar{w}} \quad (4.241)$$

$$= \frac{[a|(\not{z} + \not{\beta})|1] + \frac{z_{23}}{2} [a|\gamma_\mu|1][2|\gamma^\mu|1]}{\bar{w}}, \text{ Identidad de Fierz} \quad (4.242)$$

$$= \frac{[a|(\not{z} + \not{\beta})|1] + \frac{z_{23}}{2} [2a]\langle 11 \rangle^0}{\bar{w}} = \frac{[a|(\not{z} + \not{\beta})|1]}{\bar{w}} \quad (4.243)$$

$$= \frac{(-[a2]\langle 21 \rangle^0 - [a2]\langle 21 \rangle) + (-[a3]\langle 31 \rangle^0 - [a3]\langle 31 \rangle)}{\bar{w}} \quad (4.244)$$

$$= \frac{-[a2]\langle 21 \rangle - [a3]\langle 31 \rangle}{\bar{w}} = \frac{[a4]\langle 41 \rangle}{\bar{w}}, \quad (4.245)$$

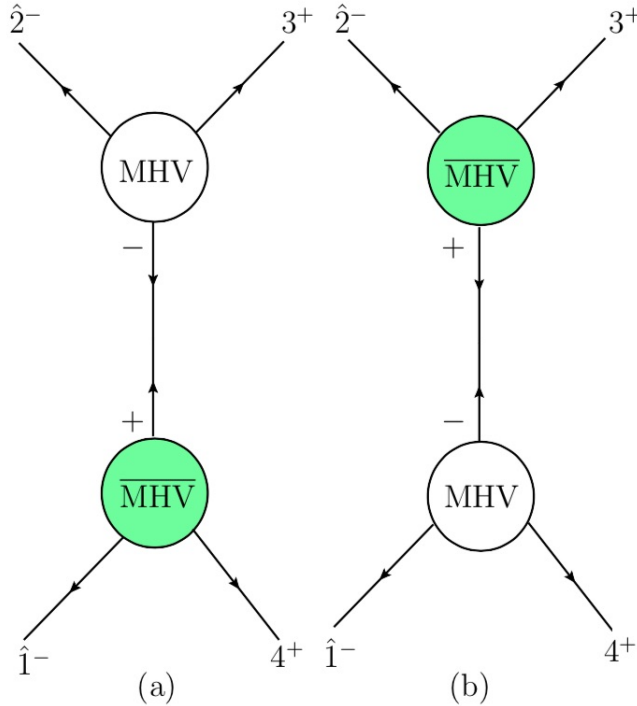


Figura 4.13: Diagramas BCFW que contribuyen al residuo

el resultado $-[a2]\langle 21 \rangle - [a3]\langle 31 \rangle = [a4]\langle 41 \rangle$ en el numerador de la Ec. (4.245) se obtiene por conservación de momento Ec. (4.51), en el caso específico que $a = 4$ de la Ec. (4.245) se obtiene:

$$[4\hat{k}_{23}] = \frac{[44]\langle 41 \rangle^0}{\bar{w}} = 0, \quad (4.246)$$

el resultado de la Ec. (4.246) nos dice que el bloque $\overline{\text{MHV}}$ (diagrama (a) de la Fig. (4.13))

no contribuye, es decir $\mathcal{A}_3(\hat{1}^-, \hat{k}_{23}^+, 4^+) = 0$, por ende $\mathcal{A}_{4(a)}^{arbol} = 0$.

Contribución del diagrama BCFW (b)

La contribución del diagrama (b) Fig. (4.13) es como sigue:

$$\mathcal{A}_{4(b)}^{arbol} = \frac{-i[3(-\hat{k}_{23})]^3}{[-\hat{k}_{23}2][23]} \left(\frac{i}{s_{23}} \right) \frac{i\langle 1\hat{k}_{23} \rangle^3}{\langle \hat{k}_{23}4 \rangle \langle 41 \rangle}, \quad (4.247)$$

para continuar con el cálculo en la Ec. (4.247) debemos recordar que $|-p] = i|p]$, luego procedemos a remover sombreros como se hizo con el diagrama (a), la ventaja es que no es necesario volver a calcular todo de nuevo ya que el resultado previo de la Ec. (4.245) (previo de definir el valor $a = 4$), nos sirve para el diagrama (b) Fig. (4.13), tenemos

$$[3(-\hat{k}_{23})] = i \frac{[34][41]}{\bar{w}}, \quad (4.248)$$

$$[-\hat{k}_{23}2] = -[2(-\hat{k}_{23})] = -i \frac{[24][41]}{\bar{w}}, \quad (4.249)$$

el proceso de remover el sombrero para los productos que involucren brackets angulares se obtiene de forma análoga a los resultados que se muestran en las ecuaciones (4.241–4.245), y es como sigue

$$\langle a\hat{k}_{23} \rangle = \frac{\langle a\hat{k}_{23} \rangle [\hat{k}_{23}2]}{[\hat{k}_{23}2]} = \frac{\langle a3 \rangle [32]}{w}, \quad (4.250)$$

la ecuación (4.250) permite encontrar los términos $\langle 1\hat{k}_{23} \rangle$ y $\langle \hat{k}_{23}4 \rangle$

$$\langle 1\hat{k}_{23} \rangle = \frac{\langle 13 \rangle [32]}{w}, \quad (4.251)$$

$$\langle \hat{k}_{23}4 \rangle = -\langle 4\hat{k}_{23} \rangle = -\frac{\langle 43 \rangle [32]}{w}. \quad (4.252)$$

Se incluyo el nuevo removedor el sombrero $w = [\hat{k}_{23}2]$, note que usando la Ec. (4.250) y Ec. (4.245) obtenemos

$$\bar{w} = \langle \hat{k}_{23}1 \rangle = -\langle 1\hat{k}_{23} \rangle = -\frac{\langle 13 \rangle [32]}{w}, \quad (4.253)$$

$$w = [\hat{k}_{23}2] = -[2\hat{k}_{23}] = -\frac{[24]\langle 41 \rangle}{\bar{w}}, \quad (4.254)$$

de donde se deduce que

$$w\bar{w} = \bar{w}w = -\langle 13 \rangle [32] = -[24]\langle 41 \rangle \quad (4.255)$$

$$w^2\bar{w}^2 = \langle 13 \rangle^2 [32]^2 = [24]^2 \langle 41 \rangle^2 \quad (4.256)$$

4.5. INTRODUCCIÓN A LA RELACIÓN DE RECURSIÓN **BCFW**

Sustituyendo las expresiones de las ecuaciones (4.248,4.249,4.251,4.252,4.256) en la Ec. (4.245) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{4(b)}^{arbol}(z) &= \frac{-i \left(i \frac{[34][41]}{w} \right)^3}{\left(-i \frac{[24][41]}{w} \right) [23]} \left(\frac{i}{\langle 23 \rangle [32]} \right) \frac{i \left(\frac{\langle 13 \rangle [32]}{w} \right)^3}{\left(-\frac{\langle 43 \rangle [32]}{w} \right) \langle 41 \rangle} \\
 &= \frac{-i^6 \bar{w} w [34]^3 \langle 41 \rangle^3 \langle 13 \rangle^3 [32]^3}{i w^3 \bar{w}^3 [24] \langle 41 \rangle [23] \langle 23 \rangle [32] \langle 43 \rangle [32] \langle 41 \rangle} = \frac{-i^5 [34]^3 \langle 41 \rangle^3 \langle 13 \rangle^3 [32]^3}{w^2 \bar{w}^2 [24] \langle 41 \rangle^2 (-1) [32]^3 \langle 23 \rangle \langle 43 \rangle} \\
 &= \frac{i [34]^3 \langle 41 \rangle^3 \langle 13 \rangle^3}{[24]^2 \langle 41 \rangle^2 [24] \langle 23 \rangle \langle 43 \rangle} = \frac{i [34]^3 \langle 13 \rangle^3}{[24]^3 \langle 41 \rangle \langle 23 \rangle \langle 43 \rangle}, \tag{4.257}
 \end{aligned}$$

para simplificar aún más el resultado de la Ec. (4.257) se debe usar de nuevo conservación del momento Ec. (4.51), entonces tenemos que

$$\sum_{k=1}^3 \langle ik \rangle [kj] = \langle i1 \rangle [1j] + \langle i2 \rangle [2j] + \langle i3 \rangle [3j] + \langle i4 \rangle [4j] = 0, \tag{4.258}$$

fijando $i = 1$ y $j = 4$ en Ec. (4.258) obtenemos

$$\langle 11 \rangle [14] + \langle 12 \rangle [24] + \langle 13 \rangle [34] + \langle 14 \rangle [44] = \langle 12 \rangle [24] + \langle 13 \rangle [34] = 0 \tag{4.259}$$

$$\langle 12 \rangle [24] = -\langle 13 \rangle [34], \tag{4.260}$$

sustituyendo la Ec. (4.260) en la Ec. (4.257) se obtiene finalmente

$$\mathcal{A}_{4(b)}^{arbol}(z) = \frac{-i \langle 12 \rangle^3 [24]^3}{[24]^3 \langle 41 \rangle \langle 23 \rangle \langle 43 \rangle} = \frac{-i \langle 12 \rangle^3}{\langle 41 \rangle \langle 23 \rangle (-1) \langle 34 \rangle} \left(\frac{\langle 12 \rangle}{\langle 12 \rangle} \right) = \frac{i \langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 43 \rangle \langle 41 \rangle}, \tag{4.261}$$

que es justamente el resultado de Parke - Taylor.

Probar por inducción la fórmula de Parke - Taylor

Se probara la fórmula de Parke - Taylor Ec. (4.262) utilizando la recursión BCFW.

$$\mathcal{A}_4^{arbol}(1^+, 2^+, \dots, j^-, \dots, (n-1)^+, n^-) = \frac{i \langle jn \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle n1 \rangle}, \tag{4.262}$$

haciendo desplazamientos complejos en $|n1\rangle$, es decir:

$$|1\rangle \rightarrow |1\rangle + z|n\rangle, \tag{4.263}$$

$$|n\rangle \rightarrow |n\rangle - z|1\rangle. \tag{4.264}$$

Los diagramas BCFW que se pueden tener para esta deformación ecuaciones (4.263,4.264) se muestran en Fig. (4.13).

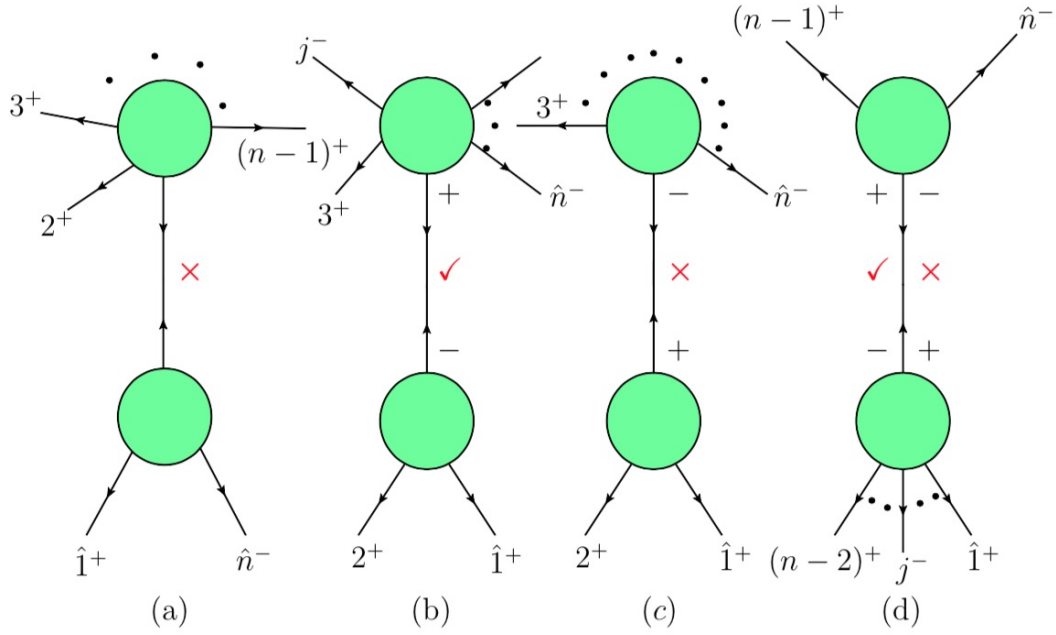


Figura 4.14: Diagramas BCFW

El diagrama (a) de la Fig. (4.14) no contribuye ya que no se desarrolla polo debido a que se tiene los dos 4-momentos desplazados en el mismo lado, el diagrama (c) no contribuye ya que la amplitud de 3 puntos de la parte inferior tiene todas las helicidades positivas, el diagrama (d) parte derecha (con x roja) tampoco contribuye debido a que la amplitud inferior tiene $(n-3)$ helicidades negativas y una positiva. Los únicos diagramas BCFW que contribuyen en Fig. (4.14) son el (b) y la parte izquierda del diagrama (d) (cheque rojo). La contribución a la amplitud de n puntos para el diagrama (d).

Capítulo 5

Fenomenología del Gravitino

5.1. Decaimiento del Stop a tres Cuerpos (utilizando el método tradicional)

Las propiedades de las teorías supersimétricas tanto en el dominio ultravioleta como infrarrojo han tenido un gran impacto en los distintas áreas de física de partículas, incluyendo construcción de modelos, fenomenología, cosmología y aspectos formales de la teoría cuántica de campos [11]. En particular, las extensiones supersimétricas del SM pueden incluir una simetría discreta, la Paridad- \mathcal{R} , la cual garantiza la estabilidad de la partícula supersimétrica más ligera [12], lo que permite a la LSP ser un buen candidato para DM. Los candidatos para la LSP en el MSSM incluyen los sneutrinos, el neutralino y el gravitino. La mayoría de los estudios se han enfocado en el neutralino LSP [47], mientras que los escenarios con el sneutrino LSP se ven más restringidos [48].

Los escenarios con el gravitino LSP como DM han sido considerados de igual forma [49, 14, 50]. En tales escenarios, la naturaleza de la siguiente partícula supersimétrica más ligera determina su fenomenología [52, 51]. Los posibles candidatos para el NLSP incluye al neutralino [53, 54], el chargino [55], o los sleptones cargados [56] y también al sneutrino [57, 58, 59, 60].

El NLSP puede tener una vida media muy grande debido a que la interacción gravitacional es muy débil, esto conduce a escenarios con partículas escalares cargadas metaestables que podrían tener firmas dramáticas en los colisionadores de partículas [61, 62], lo que podría afectar la nucleosíntesis del big bang (BBN por sus siglas en inglés) (BBN) [63, 64].

Las especies de squarks pueden también ser el NLSP, y en esos casos los candidatos naturales pueden ser el sbottom [20, 65, 66] o el stop ligero \tilde{t}_1 . Existen muchas restricciones experimentales y cosmológicas para los escenarios con el gravitino LSP y el stop NLSP que se han discutido en [21]. Resulta que la vida media del stop \tilde{t}_1 puede ser muy grande, en esos casos los límites relevantes vienen del colisionador Tevatron y estos

implican que $m_{\tilde{t}_1} > 220$ GeV [22]¹. Conocer con alta precisión la vida media del stop es fundamental en este escenario, y este es precisamente el objetivo de esta sección de mi trabajo de tesis. Se presenta el cálculo detallado de la vida media del stop, para la región cinemática del decaimiento a tres cuerpos del stop $\tilde{t}_1 \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu W b$. Además de presentar el cálculo de la amplitud utilizando la función de onda completa del gravitino, se muestra el cálculo del decaimiento a tres cuerpos (y la vida media del stop) utilizando el teorema de equivalencia entre el gravitino-goldstino [67].

5.2. Vida media del Stop

En esta sección comenzamos dando algunas formulas relevantes para los parámetros que aparecen en las reglas de Feynman del gravitino dentro del MSSM. La matriz de masa del stop puede escribirse como

$$\widetilde{M}_{\tilde{t}}^2 = \begin{pmatrix} M_{LL}^2 & M_{LR}^2 \\ M_{LR}^{2\dagger} & M_{RR}^2 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

donde las entradas toman la forma

$$\begin{aligned} M_{LL}^2 &= M_L^2 + m_t^2 + \frac{1}{6} \cos 2\beta (4m_W^2 - m_Z^2), \\ M_{RR}^2 &= M_R^2 + m_t^2 + \frac{2}{3} \cos 2\beta \sin^2 \theta_W m_Z^2, \\ M_{LR}^2 &= -m_t(A_t + \mu \cot \beta) \equiv -m_t X_t. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Los autovalores correspondientes están dados por

$$m_{\tilde{t}_1}^2 = m_t^2 + \frac{1}{2}(M_L^2 + M_R^2) + \frac{1}{4}m_Z^2 \cos 2\beta - \frac{\Delta}{2}, \quad (5.3)$$

y

$$m_{\tilde{t}_2}^2 = m_t^2 + \frac{1}{2}(M_L^2 + M_R^2) + \frac{1}{4}m_Z^2 \cos 2\beta + \frac{\Delta}{2}, \quad (5.4)$$

donde $\Delta^2 = \left(M_L^2 - M_R^2 + \frac{1}{6} \cos 2\beta (8m_W^2 - 5m_Z^2)\right)^2 + 4m_t^2 |A_t + \mu \cot \beta|^2$. El ángulo de mezcla $\theta_{\tilde{t}}$ aparece en la matrix de mezcla que relaciona la base debil $(\tilde{t}_L, \tilde{t}_R)$ y los autoestados de masa $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$, y es dada por $\tan \theta_{\tilde{t}} = \frac{(m_{\tilde{t}_1}^2 - M_{LL}^2)}{|M_{LR}^2|}$. Con estas expresiones es claro que para obtener un stop muy ligero, es necesario tener un valor muy grande para los parámetros trilineales suaves que rompen supersimetría [20]. Resulta que dicho escenario ayuda a obtener un valor para la masa del Higgs en concordancia con la masa medida en el LHC (125-126 GeV), esto de manera consistente dentro del MSSM. Siguiendo la referencia [35], derivamos las expresiones para todas las interacciones relevantes que aparecen en las amplitudes del ancho de decaimiento $(\tilde{t}_1 \rightarrow \tilde{G} W b)$, cuyos diagramas de

¹El gran colisionador de hadrones (LHC) probablemente sea sensitivo al stop metaestable \tilde{t}_1 .

Feynman se muestran en Figuras [5.1-5.3]. Se necesitaran los siguientes vértices

$$V_1(\tilde{t}_1 t \tilde{G}) = -\frac{1}{\sqrt{2}M}(\gamma^\nu \gamma^\mu p_\nu)(\cos \theta_{\tilde{t}} P_R + \sin \theta_{\tilde{t}} P_L), \quad (5.5)$$

$$V_2(t b W) = \frac{ig_2}{\sqrt{2}}\gamma_\rho P_L, \quad (5.6)$$

$$V_3(\tilde{t}_1 W \tilde{b}_i) = -\frac{ig_2 \kappa_i}{\sqrt{2}}(p + q_1)_\mu, \quad (5.7)$$

$$V_4(\tilde{b}_i b \tilde{G}) = -\frac{1}{\sqrt{2}M}(\gamma^\nu \gamma^\mu q_{2\nu})(a_i P_R + b_i P_L), \quad (5.8)$$

$$V_5(\tilde{t}_1 b \chi_i^+) = -i(S_i + P_i \gamma_5), \quad (5.9)$$

$$V_6(\chi_i^+ W \tilde{G}) = -\frac{1}{\sqrt{2}M} \left(-\frac{1}{4} \not{p} \gamma^\rho \gamma^\mu (V_{1i} P_R - U_{i1} P_L) \right. \\ \left. - m_W \gamma^\nu \gamma^\mu (V_{i2} \sin \beta P_R + U_{i2} \cos \beta P_L) \right), \quad (5.10)$$

donde \tilde{t}_1 denota el stop ligero, donde t es el quark top y \tilde{G} denota el gravitino. Al quark bottom lo denotamos con b , mientras que al boson de norma lo denotamos como W , χ_i^+ denota al chargino y \tilde{b}_i es el sbottom. Además, P_R and P_L corresponden a los proyectores derecho e izquierdo.

Para el caso cuando el gravitino se aproxima al goldstino, el vértice de interacción que aparece en las amplitudes para el ancho de decaimiento ($\tilde{t}_1 \rightarrow G W b$) es el siguiente

$$\tilde{V}_1(\tilde{t}_1 t G) = \left(\frac{m_t^2 - m_{\tilde{t}_1}^2}{2\sqrt{3}M m_{\tilde{G}}} \right) (\cos \theta_{\tilde{t}} P_R + \sin \theta_{\tilde{t}} P_L), \quad (5.11)$$

$$\tilde{V}_4(\tilde{b}_i b G) = \left(\frac{m_b^2 - m_{\tilde{b}_i}^2}{2\sqrt{3}M m_{\tilde{G}}} \right) (a_i P_R + b_i P_L), \quad (5.12)$$

$$\tilde{V}_6(\chi_i^+ W G) = -\frac{m_{\chi_i^+}}{\sqrt{6}M m_{\tilde{G}}} [\not{p} \gamma^\rho (V_{1i} P_R - U_{i1} P_L)], \quad (5.13)$$

donde los vértices $V_2(t b W)$, $V_3(\tilde{t}_1 W \tilde{b}_i)$ y $V_5(\tilde{t}_1 b \chi_i^+)$ siguen siendo los mismo que las del gravitino.

5.2.1. Amplitudes para $\tilde{t}_1 \rightarrow \tilde{G} W b$

El tiempo de vida media del stop fue calculado en [21], donde la contribución del chargino fue aproximada, únicamente se consideró el término dominante de la interacción. En esta tesis, se presenta el cálculo de las amplitudes considerando la interacción completa, de igual forma se determina la importancia de considerar el término previamente despreciado. Los resultados numéricos de la vida media del stop que se presentan reflejan la importancia de incluir la corrección al vértice. En lo que sigue, se necesita considerar los siguientes diagramas de Feynman Figuras [5.1,5.2,5.3], que contribuyen a la amplitud del decaimiento del stop $\tilde{t}_1(p) \rightarrow \tilde{G}(p_1) W(k) b(p_2)$, la

Considerando los vértices V_i de cada diagrama, podemos construir las amplitudes

$$\mathcal{M}_t = C_t P_t(q_1) \bar{\Psi}_\mu p^\mu (A_t + B_t \gamma_5) (\not{q}_1 + m_t) \gamma^\rho \epsilon_\rho(k) P_L u(p_2), \quad (5.17)$$

$$\mathcal{M}_{\tilde{b}_i} = C_{\tilde{b}_i} P_{\tilde{b}_i}(q_2) \bar{\Psi}_\mu q_2^\mu (a_i P_L + b_i P_R) p^\rho \epsilon_\rho(k) P_L u(p_2), \quad (5.18)$$

$$\mathcal{M}_{\chi_i^+}^0 = C_{\chi_i^+}^0 P_{\chi_i^+}(q_3) \bar{\Psi}_\mu \gamma^\rho \epsilon_\rho(k) \gamma^\mu (V_i + \Lambda_i \gamma_5) (\not{q}_3 + m_\chi) (S_i + P_i \gamma_5) u(p_2), \quad (5.19)$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{\chi_i^+} = C_{\chi_i^+} P_{\chi_i^+} \bar{\Psi}_\mu \not{p} \gamma^\rho \gamma^\mu (T_i + Q_i \gamma_5) \epsilon_\rho(k) (\not{q}_3 + m_\chi) (S_i + P_i \gamma_5) u(p_2). \quad (5.20)$$

Donde $C_t = \frac{g_2}{2M}$, $C_{\tilde{b}_i} = \frac{g_2 \kappa_i}{M}$, $C_{\chi_i^+}^0 = \frac{m_W}{M}$ and $C_{\chi_i^+} = \frac{1}{8M}$. Hemos definido $q_1 \equiv p - p_1$, $q_2 \equiv p - k$ y $q_3 \equiv p - p_2$, y $\epsilon_\rho(k)$ denota el W vector de polarización. Después de desarrollar la evaluación de cada expresión, encontramos una manera conveniente de expresar las amplitudes cuadradas

$$|\mathcal{M}_{\psi_a}|^2 = C_{\psi_a}^2 |P_{\psi_a}(q_a)|^2 W_{\psi_a \psi_a}, \quad (5.21)$$

donde $\psi_a = (t, \tilde{b}_j, \chi_k^+)$. Las funciones $P_{\psi_a}(q_a)$ corresponden a los denominadores de los propagadores, para el caso del chargino $\psi_a = \chi_i^+$, tenemos

$$P_{\chi_i^+}(q_3) = \frac{1}{q_3^2 - m_{\chi_i^+}^2 + i\epsilon}. \quad (5.22)$$

Se encuentran expresiones similares para las contribuciones del sbottom y top, $P_{\tilde{b}_i}(q_2)$ and $P_t(q_1)$. Los términos $W_{\psi_a \psi_a}$ incluyen las trazas asociadas a cada amplitud cuadrada y promediada.

$$W_{tt} = \mathbf{Tr} \left[M_{\rho\sigma} D_{\mu\nu} p^\mu p^\nu (A_t + B_t \gamma_5) (\not{q}_1 + m_t) \gamma^\rho P_L \not{p}_2 P_R \gamma^\sigma (\not{q}_1 + m_t) (A_t - B_t \gamma_5) \right], \quad (5.23)$$

$$W_{\tilde{b}_i \tilde{b}_i} = \mathbf{Tr} \left[p^\rho p^\sigma M_{\rho\sigma} D_{\mu\nu} q_2^\mu q_2^\nu (R_i + Z_i \gamma_5) \not{p}_2 (R_j - Z_j \gamma_5) \right], \quad (5.24)$$

$$W_{\chi_i^+ \chi_i^+}^0 = \mathbf{Tr} \left[M_{\rho\sigma} D^{\rho\sigma} (V_i + \Lambda_i \gamma_5) (\not{q}_3 + m_\chi) (S_i + P_i \gamma_5) \not{p}_2 (S_j - P_j \gamma_5) (\not{q}_3 + m_\chi) (V_j - \Lambda_j \gamma_5) \right], \quad (5.25)$$

$$W_{\chi_i^+ \chi_i^+} = \mathbf{Tr} \left[M_{\rho\sigma} D_{\mu\nu} \not{p} \gamma^\rho \gamma^\mu (T_i + Q_i \gamma_5) (\not{q}_3 + m_\chi) (S_i + P_i \gamma_5) \not{p}_2 (S_j - P_j \gamma_5) (\not{q}_3 + m_\chi) (T_j - Q_j \gamma_5) \gamma^\nu \gamma^\sigma \not{p} \right]. \quad (5.26)$$

Por simplicidad, se ha escrito la relación de completitud para el campo del gravitino y el boson W como sigue:

$$\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_{\rho}(\vec{k}, \lambda) \epsilon_{\sigma}^*(\vec{k}, \lambda) = -g_{\rho\sigma} + \frac{k_{\rho} k_{\sigma}}{m_W^2} = M_{\rho\sigma} \quad (5.27)$$

$$\sum_{\tilde{\lambda}=1}^3 \Psi_{\mu}(\vec{p}_1, \tilde{\lambda}) \bar{\Psi}_{\nu}(\vec{p}_1, \tilde{\lambda}) = -(\not{p}_1 + m_{\tilde{G}}) \times \left\{ \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{m_{\tilde{G}}^2} \right) \right. \quad (5.28)$$

$$\left. - \frac{1}{3} \left(g_{\mu\sigma} - \frac{p_{\mu} p_{\sigma}}{m_{\tilde{G}}^2} \right) \left(g_{\nu\lambda} - \frac{p_{\nu} p_{\lambda}}{m_{\tilde{G}}^2} \right) \gamma^{\sigma} \gamma^{\lambda} \right\} = D_{\mu\nu}. \quad (5.29)$$

Las funciones $W_{\psi_a \psi_a}$ dependen de los productos escalares de los momentos (variables tipo Mandelstam) p, p_1, p_2, k, q_1, q_2 and q_3 . Después de analizar cuidadosamente los resultados de las trazas (evaluadas con **Mathematica**), encontramos que estas funciones pueden expresarse como potencias de de las masas de los estados intermedios

$$W_{\psi_a \psi_a} = w_{1\psi_a \psi_a} + m_{\psi_a} w_{2\psi_a \psi_a} + m_{\psi_a}^2 w_{3\psi_a \psi_a}. \quad (5.30)$$

Las expresiones para cada función $w_{i\psi_a \psi_a} \forall i = 1, 2, 3$ se incluyen en el Apéndice ?? . Además, encontramos que los términos de interferencia pueden ser escritos de una forma similar, es decir:

$$\mathcal{M}_{\psi_a}^{\dagger} \mathcal{M}_{\psi_b} = C_{\psi_a} C_{\psi_b} P_{\psi_a}^*(q_a) P_{\psi_b}(q_b) W_{\psi_a \psi_b}. \quad (5.31)$$

De nuevo, como en el caso previo, la función $W_{\psi_a \psi_b}$ incluye las trazas que aparecen en las interferencias, específicamente tenemos:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{\chi_i + \chi_i^+} &= \mathbf{Tr} \left[M_{\rho\sigma} D_{\mu\nu} \not{p} \gamma^{\rho} \gamma^{\mu} (T_i + Q_i \gamma_5) (\not{q}_3 + m_{\chi}) \not{p}_2 (S_i - P_i \gamma_5) (S_j - P_j \gamma_5) \right. \\ &\quad \left. (\not{q}_3 + m_{\chi}) (V_j - \Lambda_j \gamma_5) \gamma^{\nu} g^{\sigma} \right], \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$W_{t\tilde{b}_i} = \mathbf{Tr} \left[M_{\rho\sigma} p^{\rho} \not{p}_2 P_R \gamma^{\sigma} (\not{q}_1 + m_t) (A_{\tilde{t}} - B_{\tilde{t}} \gamma_5) p^{\mu} D_{\mu\nu} q_2^{\nu} (R_i + Z_i \gamma_5) \right], \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} W_{t\chi_i^+} &= \mathbf{Tr} \left[M_{\rho\sigma} \not{p}_2 P_R \gamma^{\sigma} (\not{q}_1 + m_t) (A_{\tilde{t}} - B_{\tilde{t}} \gamma_5) p_{\mu} D^{\mu\rho} (\Lambda_i + V_i \gamma_5) (\not{q}_3 + m_{\chi}) \right. \\ &\quad \left. (S_i + P_i \gamma_5) \right], \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{t\chi_i^+} &= \mathbf{Tr} \left[M_{\rho\sigma} D_{\mu\nu} \not{p} \gamma^{\rho} \gamma^{\mu} p^{\nu} (T_i + Q_i \gamma_5) (\not{q}_3 + m_{\chi}) (S_i + P_i \gamma_5) \not{p}_2 P_R \gamma^{\sigma} \right. \\ &\quad \left. (\not{q}_1 + m_t) (A_{\tilde{t}} - B_{\tilde{t}} \gamma_5) \right], \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} W_{\chi_i^+ \tilde{b}_i} &= \mathbf{Tr} \left[M_{\rho\sigma} p^{\rho} (p_{\nu} - k_{\nu}) \not{p}_2 (S_i - P_i \gamma_5) (\not{q}_3 + m_{\chi}) (\Lambda_i - V_i \gamma_5) \right. \\ &\quad \left. D^{\nu\sigma} (R_j + Z_j \gamma_5) \right], \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{\chi_i^+ \tilde{b}_i} &= \mathbf{Tr} \left[M_{\rho\sigma} D_{\mu\nu} (p^{\nu} - k^{\nu}) (R_i + Z_i \gamma_5) \not{p}_2 (S_i - P_i \gamma_5) (\not{q}_3 + m_{\chi}) \right. \\ &\quad \left. (T_i - Q_i \gamma_5) \gamma^{\mu} \gamma^{\rho} \not{p} p^{\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Resulta que las funciones $W_{\psi_a\psi_b}$ pueden ser expresadas también en potencia de las masas de los estados intermedios

$$W_{\psi_a\psi_b} = w_{1\psi_a\psi_b} + m_{\psi_a}(w_{2\psi_a\psi_b} + m_{\psi_b}w_{3\psi_a\psi_b}) + m_{\psi_b}w_{4\psi_a\psi_b}. \quad (5.38)$$

Los $w_{j\psi_a\psi_b} \forall j = 1, 2, 3, 4$ son como las funciones $w_{i\psi_a\psi_a}$, funciones de variables tipo-Mandelstam determinadas completamente por la cinemática del decaimiento que estudiamos. Consideramos que (5.30) y (5.38) son una manera útil de presentar nuestros resultados así como una forma fácil de calcular trazas complicadas. El ancho de decaimiento puede ser obtenido después de integrar el espacio de fase de tres cuerpos.

$$\frac{d\Gamma}{dx dy} = \frac{m_{\tilde{t}_1}^2}{256 \pi^3} |\overline{\mathcal{M}}|^2. \quad (5.39)$$

Las variables x y y están definidas como $x = 2\frac{E_{\tilde{G}}}{m_{\tilde{t}_1}}$ y $y = 2\frac{E_W}{m_{\tilde{t}_1}}$. Los resultados numérico para la vida media $\tau = \frac{1}{\Gamma}$ se presentan y discuten en la Sección 5.3.

5.2.2. Amplitudes para $\tilde{t}_1 \rightarrow G W b$ con la aproximación gravitino \sim goldstino

En esta sección se presentan los cálculos del decaimiento del stop usando el teorema de equivalencia en altas energías, donde el gravitino se aproxima al goldstino [67]. En el límite de altas energías ($m_{\tilde{G}} \ll m_{\tilde{t}_1}$) es posible considerar al campo del gravitino (espín-3/2) como la derivada del campo del goldstino (espín-1/2).

En esta sección de igual manera consideramos los mismos diagramas de Feynman Figuras (5.1,5.2,5.3) que se usaron en la Sección 5.2.1, pero con la salvedad que el gravitino es considerado ahora como el goldstino. Reemplazando $\Psi_{\tilde{G}} \rightarrow i\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{1}{m_{\tilde{G}}}\partial_\mu\Psi$ en el Lagrangiano de interacción del gravitino, se obtiene un Lagrangiano efectivo del cual se deducen las nuevas reglas de Feynman para el goldstino como se muestra en [35]. La amplitud cuadrada y promediada para el goldstino se escribe entonces como sigue:

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}^G|^2 = & |\mathcal{M}_t^G|^2 + |\mathcal{M}_{b_i}^G|^2 + |\mathcal{M}_{\chi_i^+}^G|^2 \\ & + 2 \text{Re}(\mathcal{M}_t^G \dagger \mathcal{M}_{b_i}^G + \mathcal{M}_t^G \dagger \mathcal{M}_{\chi_i^+}^G + \mathcal{M}_{b_i}^G \dagger \mathcal{M}_{\chi_i^+}^G). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Como en la Sección previa 5.2.1, es posible construir las amplitudes a partir de los vértices de los diagramas de Feynman, es decir:

$$\mathcal{M}_t^G = \tilde{C}_t P_t(q_1) \overline{\Psi}(A_{\tilde{t}} + B_{\tilde{t}}\gamma_5)(\not{q}_1 + m_t)\gamma^\rho P_L \epsilon_\rho(k) u(p_2), \quad (5.41)$$

$$\mathcal{M}_{b_i}^G = \tilde{C}_{b_i} P_{b_i}(q_2) \overline{\Psi}(R_i + Z_i\gamma^5) u(p_2) p^\sigma \epsilon_\sigma(k), \quad (5.42)$$

$$\mathcal{M}_{\chi_i^+}^G = \tilde{C}_{\chi_i^+} P_{\chi_i^+}(q_3) \not{p} \gamma^\rho (T_i + Q_i\gamma_5) \overline{\Psi} \epsilon_\rho(k) (\not{q}_3 + m_{\chi_i}) (S_i + P_i\gamma_5) u(p_2). \quad (5.43)$$

Donde el super-índice ‘‘G’’ que aparece en las amplitudes (5.41-5.43) se refieren a las

amplitudes del goldstino. Las constantes que aparecen en frente de cada amplitudes son; $\tilde{C}_t = -g_2 \left(\frac{m_t^2 - m_{\tilde{t}_1}^2}{4\sqrt{6}Mm_{\tilde{G}}} \right)$, $\tilde{C}_{b_i} = g_2\kappa_i \left(\frac{m_b^2 - m_{\tilde{b}_i}^2}{4\sqrt{6}Mm_{\tilde{G}}} \right)$ y $\tilde{C}_{\chi_i^+} = -\frac{m_{\chi_i^+}}{\sqrt{6}Mm_{\tilde{G}}}$. Se obtienen expresiones similares a los que se encontraron en Ec. (5.21) para las amplitudes cuadradas y promediadas del goldstino, es decir

$$|\mathcal{M}_{\psi_a}^G|^2 = \tilde{C}_{\psi_a}^2 |P_{\psi_a}(q_a)|^2 W_{\psi_a\psi_a}^G, \quad (5.44)$$

donde la función $W_{\psi_a\psi_a}^G$ incluye las trazas correspondientes a las amplitudes cuadradas del goldstino, que son como sigue:

$$W_{tt}^G = \mathbf{Tr} \left[(\not{p}_1 + m_{\tilde{G}})(A_{\tilde{t}} + B_{\tilde{t}}\gamma_5)(\not{q}_1 + m_t)\gamma^\rho P_L M_{\rho\sigma} \not{p}_2 P_R \gamma^\sigma (\not{q}_1 + m_t)(A_{\tilde{t}} - B_{\tilde{t}}\gamma_5) \right], \quad (5.45)$$

$$W_{\tilde{b}_i\tilde{b}_i}^G = \mathbf{Tr} \left[p^\rho p^\sigma M_{\rho\sigma} (\not{p}_1 + m_{\tilde{G}})(B_i + Z_i\gamma_5) \not{p}_2 (B_j - Z_j\gamma_5) \right], \quad (5.46)$$

$$W_{\chi_i^+\chi_i^+}^G = \mathbf{Tr} \left[M_{\rho\sigma} (\not{p}_1 + m_{\tilde{G}}) \not{p} \gamma^\rho (T_i + Q_i\gamma_5) (\not{q}_3 + m_\chi)(S_i + P_i\gamma_5) \not{p}_2 (S_j - P_j\gamma_5) (\not{q}_3 + m_\chi)(T_j - Q_j\gamma_5) \gamma^\sigma \not{p} \right], \quad (5.47)$$

las funciones $W_{\psi_a\psi_a}^G$ dependen de productos escalares de los momentos de las partículas en capa de masa p, p_1, p_2, k, q_1, q_2 and q_3 , estas funciones se expresan en potencias de las masas de los estados intermedios

$$W_{\psi_a\psi_a}^G = w_{1\psi_a\psi_a}^G + m_{\psi_a} w_{2\psi_a\psi_a}^G + m_{\psi_a}^2 w_{3\psi_a\psi_a}^G. \quad (5.48)$$

De nuevo, los términos de interferencia para el goldstino se escriben de la siguiente forma

$$\mathcal{M}_{\psi_a}^{G\dagger} \mathcal{M}_{\psi_b}^G = \tilde{C}_{\psi_a} \tilde{C}_{\psi_b} P_{\psi_a}^*(q_a) P_{\psi_b}(q_b) W_{\psi_a\psi_b}^G. \quad (5.49)$$

Las funciones $W_{\psi_a\psi_b}$ corresponden a las trazas que se involucran en los términos de interferencias, es decir:

$$W_{t\tilde{b}_i}^G = \mathbf{Tr} \left[M_{\rho\sigma} \not{p}_2 P_R \gamma^\sigma (\not{q}_1 + m_t)(A_{\tilde{t}} - B_{\tilde{t}}\gamma_5) (\not{p}_1 + m_{\tilde{G}})(B_i + Z_i\gamma_5) p^\rho \right], \quad (5.50)$$

$$W_{t\chi_i^+}^G = \mathbf{Tr} \left[M_{\rho\sigma} (\not{p}_1 + m_{\tilde{G}}) \not{p} \gamma^\rho (T_i + Q_i\gamma_5) (\not{q}_3 + m_\chi)(S_i + P_i\gamma_5) \not{p}_2 P_R \gamma^\sigma (\not{q}_1 + m_t)(A_{\tilde{t}} - B_{\tilde{t}}\gamma_5) \right], \quad (5.51)$$

$$W_{\chi_i^+\tilde{b}_i}^G = \mathbf{Tr} \left[M_{\rho\sigma} \not{p}_2 (S_i - P_i\gamma_5) (\not{q}_3 + m_\chi)(T_i - Q_i\gamma_5) \gamma^\rho \not{p} (\not{p}_1 + m_{\tilde{G}})(R_j + Z_j\gamma_5) p^\sigma \right]. \quad (5.52)$$

Las funciones $W_{\psi_a\psi_b}^G$ se expresan en como potencia de las masas de los estados intermedios:

$$W_{\psi_a\psi_b}^G = w_{1\psi_a\psi_b}^G + m_{\psi_a} (w_{2\psi_a\psi_b}^G + m_{\psi_b} w_{3\psi_a\psi_b}^G) + m_{\psi_b} w_{4\psi_a\psi_b}^G. \quad (5.53)$$

Las expresiones completas para $w_{j\psi_a\psi_b}^G \forall j = 1, 2, 3, 4$ también se encuentran el Apéndice

??.

5.3. Resultados Numéricos

El ancho de decaimiento se obtiene al integrar el ancho de decaimiento diferencial sobre las variables adimensionales x, y , este tiene los siguientes límites de integración: $2\mu_G < x < 1 + \mu_{\tilde{G}} - \mu_W$ with $\mu_i = \frac{m_i^2}{m_{\tilde{t}_1}^2}$ and

$$y_{\pm} = \frac{(2-x)(\mu_{\tilde{G}} + \mu_W - x + 1) \pm \sqrt{x^2 - 4\mu_{\tilde{G}}(\mu_{\tilde{G}} - \mu_W - x + 1)}}{2(\mu_{\tilde{G}} - x + 1)}, \quad (5.54)$$

$$\Gamma = \int_{2\mu_G}^{1+\mu_G-\mu_W} \int_{y_-}^{y_+} \frac{m_{\tilde{t}_1}^2}{256\pi^3} |\overline{\mathcal{M}}|^2 dy dx. \quad (5.55)$$

Después de integrar numéricamente las expresiones para el ancho de decaimiento diferencial, se obtiene los valores para el ancho de decaimiento para un determinado conjunto de parámetros. Consideramos dos valores para las masas del stop, $m_{\tilde{t}_1} = 200 \text{ GeV}$ and $m_{\tilde{t}_1} = 350 \text{ GeV}$, además fijamos la masa del chargino a $m_{\tilde{\chi}_i^+} = 200, 500 \text{ GeV}$, mientras que la masa del sbottom se fija a $m_{\tilde{b}_i} = 300, 500 \text{ GeV}$. En las Figuras (5.4,5.5) mostramos el tiempo de vida media del stop como función de la masa del gravitino, la cual está dentro del rango 200-250 GeV para el caso que la masa del stop es $m_{\tilde{t}_1} = 350 \text{ GeV}$, y 50-100 GeV for $m_{\tilde{t}_1} = 100 \text{ GeV}$. Mostramos los resultados para el caso cuando se utiliza la expresión completa para la interacción chargino-gravitino-W (círculos), además el caso en el que se aproxima este vértice, como se hizo en la Ref. [21] (triángulos), y también presentamos el caso en el que gravitino es aproximado al goldstino (cuadros). Observamos que para valores pequeños de la masa del gravitino el resultado completo se vuelve indistinguible del caso con goldstino en el estado final, además el resultado parcial muestra un comportamiento similar. Para masas grandes del gravitino ($m_{\tilde{G}} \cong m_{\tilde{t}_1}$) el resultado de la vida media del stop usando el gravitino completo (espín-3/2) y el caso que el gravitino se aproxima al goldstino (espín-1/2) los resultados son muy diferentes, incluso hasta $O(50\%)$ diferentes. No se sabe en la literatura que tan diferentes pueden ser estos resultados para diferentes valores de la masa del gravitino. En los capítulos siguientes, después de introducir el Formalismo de Helicidad masivo mostramos como en el marco de las amplitudes de dispersión es posible distinguir analíticamente la diferencia entre las amplitudes que involucran gravitinos en el estado final y las que involucran goldstinos. De hecho, creemos que es posible expresar las amplitudes del gravitino a partir de las amplitudes de goldstino, lo que sería remarcable ya que entenderíamos una relación entre amplitudes con partículas de diferente espín, una especie de transmutación de amplitudes.

Los valores del tiempo de vida medio obtenidos en todos los casos resultan ser del orden $10^7 - 10^{12}$ segundos, lo que resulta en un escenario con una vida media del stop muy grande, esto tiene implicaciones especiales tanto en cosmología como en física de colisiones, como se discute en la referencia [21].

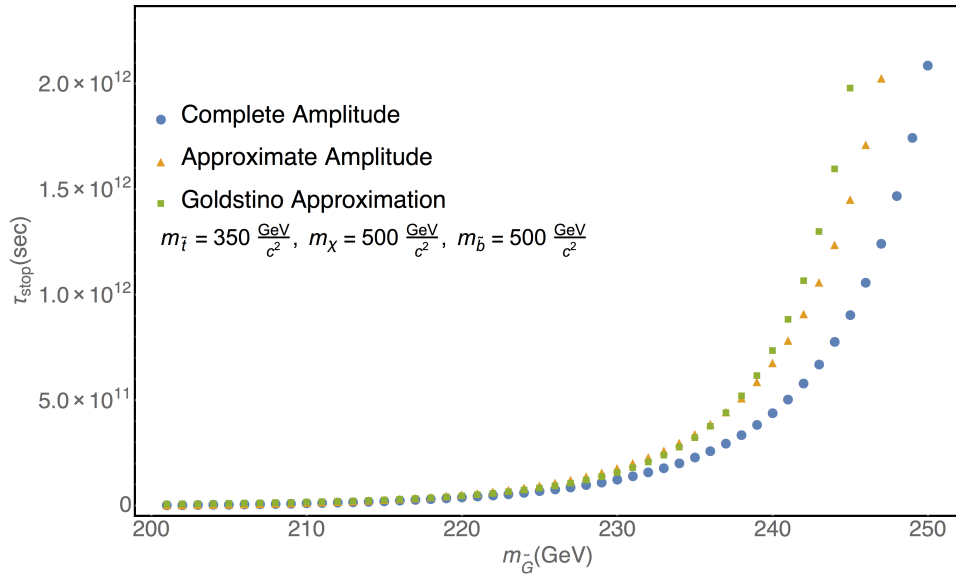


Figura 5.4: Tiempo de vida media del stop (1)

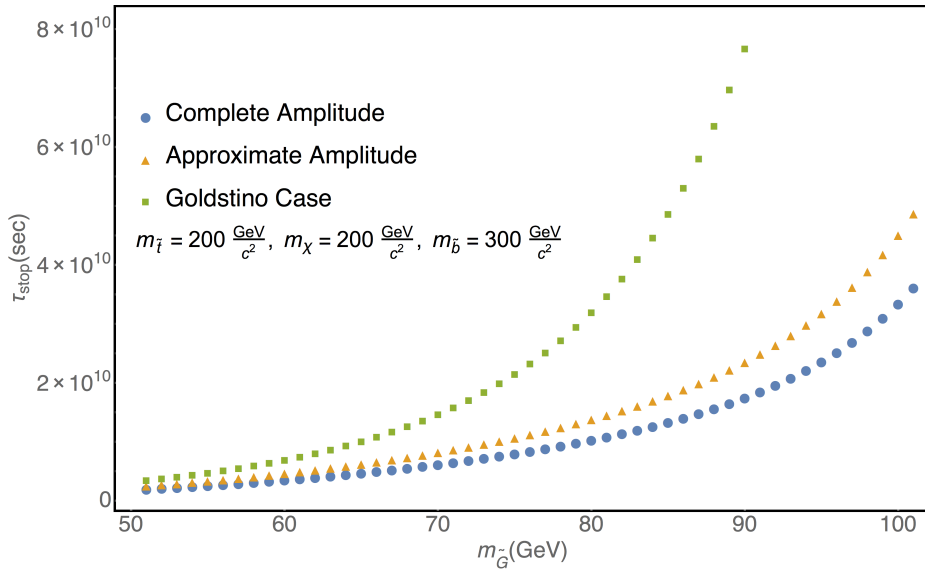


Figura 5.5: Tiempo de vida media del stop (1)

No podemos resolver nuestros problemas con la misma manera de pensar que usamos cuando los creamos

Albert Einstein

Capítulo 6

Amplitudes de Helicidad para Interacciones con Gravitino Masivo

Un tremendo progreso se ha hecho en los recientes años para entender la evaluación de las amplitudes en teorías de norma, incluyendo las interacciones gravitacionales y las teorías de Yang-Mills [5], [81]. Resultados muy impresionantes para las amplitudes con multiples partículas se han derivado [82, 83], lo que permite evaluar amplitudes de helicidad con multiples partículas en los estados asintóticos. Algunos de los resultados se han derivado para la teoría $\mathcal{N} = 4$ Super Yang Mill, donde se muestran muchas regularidades que la hacen parecer “la teoría cuántica más simple” [84]. Explorando si las teorías con supersimetría local (también conocida como supergravedad) mantiene algunas de estas propiedades. En el caso realista, es decir considerando la masa de las partículas serian también muy interesante identificar estas regularidades que permiten calcular de manera eficiente las amplitudes de dispersión.

Uno quisiera tener el mismo progreso en el caso masivo, ambos desde el punto de vista con relevancia formal, pero también para las implicaciones fenomenológicas. a saber, los colisionadores como el LHC tienen como objetivo estudiar estados masivos, como es el caso del quark top, los bosones W, Z, Higgs, las cuales tienen masas que no son despreciables comparadas con la energía del centro masa, es decir la energía con la que se colisionan las partículas. Idealmente, si es posible, nos gustaría entender los efectos de la masa considerando el caso masivo como una perturbación del caso sin masa. Pensamos que es posible aprender sobre el caso masivo estudiando modelos específicos.

Con este objetivo, estamos interesados en estudiar las aplicaciones del formalismo de helicidad para tratar amplitudes que involucren gravitinos masivos, los cuales aparecen como el compañero supersimétrico del gravitón en supergravedad $\mathcal{N} = 1$. Estudiar el gravitino tiene relevancia de por si, tanto en física de partículas como en cosmología. En parte debido a que cuando la extensión mínima supersimétrica del modelo estándar de partículas elementales es incorporada dentro de SUGRA, el espectro de SUSY incluye al

gravitino, el cual puede figurar como la partícula supersimétrica más ligera (LSP por sus siglas en inglés). De ahí que puede ser un candidato para materia oscura [85]. De hecho, la extensión supersimétrica del modelo estándar de partículas elementales ha sido estudiada muy ampliamente, y sus efectos y predicciones se han buscado a bajas y a altas energías.

Estudiar las propiedades del gravitino y sus implicaciones tanto para física de colisiones como para el Universo temprano, requiere de la evaluación de muchos procesos que pueden ser extremadamente complicados de realizar analítica y numéricamente, esto debido a la forma de los propagadores y a la relación de completitud que surge por los gravitinos en el estado final. Algunas simplificaciones pueden surgir para el caso que el gravitino se aproxima al goldstino [36, 37, 38, 39, 40, 41]. Ya hemos considerado en la Sección 5.1 algunos aspectos de la fenomenología del gravitino. En particular estudiamos el decaimiento del stop $\tilde{t} \rightarrow t W \tilde{\Psi}_\mu$ [85], este resultado muestra la complejidad y algunas complicaciones en la técnica de cálculo utilizada en ese momento. Nos gustaría trabajar con un formalismo basado en los métodos de helicidad para tratar con dichos decaimientos, así como otros procesos que aparecen en el estudio de la fenomenología del gravitino. Algunos cálculos que tienen que ver con el gravitino se han presentado ya hace mucho tiempo [86, 87, 88]; métodos más modernos se han incorporado en programas tales como Madgraph [89]. Sin embargo, estos métodos tienen todavía algunas limitaciones, por ejemplo que solo dan salida numérica y no todos los vértices de supergravedad están incluidos en el programa.

En general, incorporar el caso masivo no es tratado con gran generalidad en la literatura, lo que fue uno de nuestros objetivos para este trabajo de tesis. En esta sección se presenta la implementación de las reglas de Feynman para el gravitino con una notación apropiada, la que permite reducir cálculos enormes y complicados de realizar analíticamente utilizando el enfoque tradicional. De alguna manera tratamos de entender a profundidad la estructura de las amplitudes con partículas masivas en los estados asintóticos, no solo pretendemos realizar nuestros cálculos más eficientes para luego realizar fenomenología.

Comenzamos abordando las soluciones de la ecuación de Rarita-Schwinger (describe el movimiento de las partículas con espín-3/2) en la Sección 6.1. Con estas soluciones procedemos a implementar los métodos de helicidad para expresar los cuatro estados del gravitino en términos de las variables espinoriales (bra y kets). Finalmente realizamos varios cálculos de reacciones como son; $e^+ e^- \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu \tilde{\chi}_0$ and $e^+ e^- \rightarrow \tilde{G}\tilde{G}$ así como el decaimiento a dos cuerpos del neutralino $\tilde{\chi}_0 \rightarrow \Psi^\mu + \gamma$, el cual es usado para comparar el ancho de decaimiento del gravitino y con su aproximación a goldstino.

6.1. Formalismo de Espinores de Helicidad para el gravitino masivo de espín-3/2

Con el objetivo de calcular amplitudes de dispersión con gravitinos en el estado final, debemos usar la ventaja que el formalismo de espinores de helicidad [32, 43, 44, 90, 91]

provee para manejar cálculos perturbativos en teorías de campos cuánticos. En principio, queremos calcular amplitudes de dispersión considerando partículas masivas. Por lo tanto, será necesario utilizar la descomposición del cono de luz (LCD por sus siglas en inglés) [92, 93, 94], lo que permite expresar momentos masivos ($p^2 = -m^2$) en términos de momentos no masivos ($p^2 = 0$).

La ecuación de Rarita-Schwinger [43, 95, 96] es equivalente al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\gamma_\mu \tilde{\Psi}_{\lambda_p}^\mu(p) = 0, \quad (6.1)$$

$$p_\mu \tilde{\Psi}_{\lambda_p}^\mu(p) = 0, \quad (6.2)$$

$$(\not{p} - \tilde{m}) \tilde{\Psi}_{\lambda_p}^\mu(p) = 0. \quad (6.3)$$

Los cuatros estados de polarización del gravitino en el espacio de momentos que obedecen a estas ecuaciones son escritas como sigue:

$$\tilde{\Psi}_{++}^\mu(p) = \epsilon_+^\mu(p) u_+(p), \quad (6.4)$$

$$\tilde{\Psi}_{--}^\mu(p) = \epsilon_-^\mu(p) u_-(p), \quad (6.5)$$

$$\tilde{\Psi}_+^\mu(p) = \sqrt{\frac{2}{3}} \epsilon_0^\mu(p) u_+(p) + \frac{1}{\sqrt{3}} \epsilon_+^\mu(p) u_-(p), \quad (6.6)$$

$$\tilde{\Psi}_-^\mu(p) = \sqrt{\frac{2}{3}} \epsilon_0^\mu(p) u_-(p) + \frac{1}{\sqrt{3}} \epsilon_-^\mu(p) u_+(p). \quad (6.7)$$

Se sabe en la literatura como expresar los vectores de polarización $\epsilon_\pm^\mu(p)$, $\epsilon_0^\mu(p)$ así como también los espinores masivos de Dirac $u_\pm(p)$ en términos de la notación moderna que involucran bra y kets (pero no en el sentido de espacios de Hilbert, acá es puramente una notación muy adecuada) [97]. No es muy complicado expresar los cuatros estados del gravitino en esta notación de bra-kets, estos se muestran a continuación

$$\tilde{\Psi}_{++}^\mu(p) = \frac{\langle r | \gamma^\mu | q \rangle}{\sqrt{2} [rq]} \left(|r\rangle + \tilde{m} \frac{|q\rangle}{[rq]} \right), \quad (6.8)$$

$$\tilde{\Psi}_{--}^\mu(p) = \frac{\langle q | \gamma^\mu | r \rangle}{\sqrt{2} \langle rq \rangle} \left(|r\rangle + \tilde{m} \frac{|q\rangle}{\langle rq \rangle} \right), \quad (6.9)$$

$$\tilde{\Psi}_-^\mu(p) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{r^\mu}{\tilde{m}} - \tilde{m} \frac{q^\mu}{s_{qr}} \right) \left(|r\rangle + \tilde{m} \frac{|q\rangle}{\langle rq \rangle} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\langle q | \gamma^\mu | r \rangle}{\sqrt{2} \langle rq \rangle} \left(|r\rangle + \tilde{m} \frac{|q\rangle}{[rq]} \right), \quad (6.10)$$

$$\tilde{\Psi}_+^\mu(p) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{r^\mu}{\tilde{m}} - \tilde{m} \frac{q^\mu}{s_{qr}} \right) \left(|r\rangle + \tilde{m} \frac{|q\rangle}{[rq]} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\langle r | \gamma^\mu | q \rangle}{\sqrt{2} [rq]} \left(|r\rangle + \tilde{m} \frac{|q\rangle}{\langle rq \rangle} \right), \quad (6.11)$$

donde los cuadri-momentos r^μ and q^μ son no masivos ($r^2 = q^2 = 0$), y las variables tipo-Mandelstam cumplen $s_{qr} = -(q+r)^2 = -2q \cdot r$. Para nuestros objetivos en esta tesis, será muy útil reordenar los cuatro estados del gravitino como una expansión en

términos de la masa del gravitino (\tilde{m}), es decir:

$$\tilde{\Psi}_{++}^{\mu}(p) = \beta_1^{\mu}|r\rangle + \tilde{m}\beta_2^{\mu}|q\rangle, \quad (6.12)$$

$$\tilde{\Psi}_{--}^{\mu}(p) = -\beta_1^{*\mu}|r\rangle + \tilde{m}\beta_2^{*\mu}|q\rangle, \quad (6.13)$$

$$\tilde{\Psi}_{-}^{\mu}(p) = \beta_3^{\mu}|r\rangle + \tilde{m}(\beta_4^{\mu}|q\rangle + \beta_5^{\mu}|r\rangle) + \tilde{m}^2(\beta_6^{\mu}|r\rangle + \beta_7^{\mu}|q\rangle) + \tilde{m}^3\beta_8^{\mu}|q\rangle, \quad (6.14)$$

$$\tilde{\Psi}_{+}^{\mu}(p) = \beta_3^{*\mu}|r\rangle - \tilde{m}(\beta_4^{*\mu}|q\rangle + \beta_5^{*\mu}|r\rangle) + \tilde{m}^2(\beta_6^{*\mu}|r\rangle + \beta_7^{*\mu}|q\rangle) - \tilde{m}^3\beta_8^{*\mu}|q\rangle. \quad (6.15)$$

La masa del gravitino \tilde{m} está directamente conectada con la escala de energía F con la que SUSY es rota, su relación exacta es $\tilde{m} = \frac{F}{\sqrt{3}M}$, donde M la hemos definido anteriormente como la masa de Plank. Las expresiones para todos las β_i^{μ} ($\forall i = 1 \dots 8$) se muestran en la table 6.1.

i	β_i^{μ}	$\beta_i^{*\mu}$
1	$\frac{\langle qr \rangle \langle r \gamma^{\mu} q \rangle}{\sqrt{2s_{qr}}}$	$\frac{[rq] \langle q \gamma^{\mu} r \rangle}{\sqrt{2s_{qr}}}$
2	$\frac{\langle qr \rangle^2 \langle r \gamma^{\mu} q \rangle}{\sqrt{2s_{qr}^2}}$	$\frac{[rq]^2 \langle q \gamma^{\mu} r \rangle}{\sqrt{2s_{qr}^2}}$
3	ηr^{μ}	ηr^{μ}
4	$\frac{\eta [qr] r^{\mu}}{s_{qr}}$	$\frac{\eta \langle rq \rangle r^{\mu}}{s_{qr}}$
5	$\frac{\eta [qr] \langle q \gamma^{\mu} r \rangle}{2s_{qr}}$	$\frac{\eta \langle rq \rangle \langle r \gamma^{\mu} q \rangle}{2s_{qr}}$
6	$-\frac{\eta q^{\mu}}{s_{qr}}$	$-\frac{\eta q^{\mu}}{s_{qr}}$
7	$-\frac{\eta \langle q \gamma^{\mu} r \rangle}{2s_{qr}}$	$-\frac{\eta \langle r \gamma^{\mu} q \rangle}{2s_{qr}}$
8	$-\frac{\eta q^{\mu} [qr]}{s_{qr}^2}$	$-\frac{\eta q^{\mu} \langle rq \rangle}{s_{qr}^2}$

Tabla 6.1: Definiciones de las $\beta_i^{\mu} \forall i = 1 \dots 8$ con $\eta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\tilde{m}}$ y $s_{qr} = -(q+r)^2$.

Aparte de dar las funciones de onda del gravitino en términos de estas nuevas variables, es útil también tener las funciones complejas conjugadas $\overline{\tilde{\Psi}}_{\lambda_p}^{\mu}(p)$ con $\lambda_p = ++, --, +, -$, estas toman la siguiente forma:

$$\overline{\tilde{\Psi}}_{++}^{\mu}(p) = \beta_1^{*\mu}|r\rangle + \tilde{m}\beta_2^{*\mu}\langle q|, \quad (6.16)$$

$$\overline{\tilde{\Psi}}_{--}^{\mu}(p) = -\beta_1^{\mu}\langle r| + \tilde{m}\beta_2^{\mu}[q], \quad (6.17)$$

$$\overline{\tilde{\Psi}}_{-}^{\mu}(p) = \beta_3^{*\mu}\langle r| + \tilde{m}(\beta_4^{*\mu}[q] + \beta_5^{*\mu}\langle r|) + \tilde{m}^2(\beta_6^{*\mu}\langle r| + \beta_7^{*\mu}\langle q|) + \tilde{m}^3\beta_8^{*\mu}[q], \quad (6.18)$$

$$\overline{\tilde{\Psi}}_{+}^{\mu}(p) = \beta_3^{\mu}[r] - \tilde{m}(\beta_4^{\mu}\langle q| + \beta_5^{\mu}\langle r|) + \tilde{m}^2(\beta_6^{\mu}[r] + \beta_7^{\mu}[q]) - \tilde{m}^3\beta_8^{\mu}\langle q|. \quad (6.19)$$

Con los gravitinos masivos expresados de esta forma, hace incluso más simple manejar las amplitudes de helicidad. Antes de avanzar, es importante corroborar o comprobar si los cuatro estados del gravitino (ahora en esta nueva base) respetan la ecuaciones (6.1)-(6.3)

así como la condición de normalización

$$\bar{\tilde{\Psi}}_{\lambda_1\mu} \tilde{\Psi}_{\lambda_2}^{\mu} = 2\tilde{m}\lambda_{\lambda_1\lambda_2}. \quad (6.20)$$

Por ejemplo, podemos verificar que los estados del gravitino cumplen la condición de normalización Eq. (6.20), tomando $\lambda_1 = \lambda_2 = -$, tenemos:

$$\bar{\tilde{\Psi}}_{-}^{\mu}(p)\tilde{\Psi}_{\mu-}(p) = \langle rq \rangle (\beta_3^{*\mu}\beta_{4\mu} + \beta_3^{*\mu}\beta_{8\mu}\tilde{m}^3 + \beta_6^{*\mu}\beta_{4\mu}\tilde{m}^3 + \beta_6^{*\mu}\beta_{8\mu}\tilde{m}^5 - \beta_7^{*\mu}\beta_{5\mu}\tilde{m}^3) + \text{c.c.} \quad (6.21)$$

$$= \langle rq \rangle \left(-\frac{2\eta^2[qr](r \cdot q)}{s_{rq}^2}\tilde{m}^3 - \frac{\eta^2[qr]}{2s_{qr}}\tilde{m}^3 \right) + \text{c.c.} \quad (6.22)$$

$$= 3\eta^2\tilde{m}^3 \quad (6.23)$$

$$= 2\tilde{m}^2. \quad (6.24)$$

Como se puede notar en el último paso, las ecuaciones (6.12)-(6.15) y (6.16)-(6.19) son muy convenientes para manejar los cálculos tradicionalmente tediosos que aparecen en procesos que involucran gravitinos en el estado final.

6.2. Producción y decaimientos con gravitinos en el estado final

6.2.1. Amplitudes para la reacción $e^+e^- \rightarrow \tilde{G}\tilde{G}$: caso masivo y sin masa

En esta sección primero calculamos las amplitudes de dispersión para la reacción $e^-e^+ \rightarrow \tilde{G}\tilde{G}$ usando el teorema de equivalencia, donde el gravitino es aproximado al goldstino [100]. Cada diagrama de Feynman de la Figura (6.1) contribuye a la amplitud total:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^c + \mathcal{M}^u + \mathcal{M}^t \quad (6.25)$$

En el caso sin masa las expresiones para los diagramas de contacto, canales u y t vienen dados en la referencia [100]

$$\mathcal{M}^c = -\frac{m_{\tilde{e}_{\lambda_1}}^2}{F^2}(\mathcal{T}^t - \mathcal{T}^u), \quad (6.26)$$

$$\mathcal{M}^t = -\frac{m_{\tilde{e}_{\lambda_1}}^4}{F^2(t - m_{\tilde{e}_{\lambda_1}}^2)}\mathcal{T}^t, \quad (6.27)$$

$$\mathcal{M}^u = \frac{m_{\tilde{e}_{\lambda_1}}^4}{F^2(u - m_{\tilde{e}_{\lambda_1}}^2)}\mathcal{T}^u, \quad (6.28)$$

donde $m_{\tilde{e}_{\lambda_1}}$ es la masa del electrón escalar (selectrón) $\lambda_1 = \pm$. Aquí λ_1 es solo una etiqueta que es inherente del escalar heredado de su compañero fermiónico supersimétrico. Sin embargo, vamos a considerar la aproximación $m_{\tilde{e}_L}^2 = m_{\tilde{e}_R}^2$. Las amplitudes reducidas $\mathcal{T}^t, \mathcal{T}^u$ están definidas como sigue:

$$\mathcal{T}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^t = [\bar{u}_{\lambda_3}(p_3)\mathbf{P}_{\lambda_1}u_{\lambda_1}(p_1)][\bar{v}_{\lambda_2}(p_2)\mathbf{P}_{-\lambda_1}v_{\lambda_4}(p_4)], \quad (6.29)$$

$$\mathcal{T}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^u = [\bar{u}_{\lambda_4}(p_4)\mathbf{P}_{\lambda_1}u_{\lambda_1}(p_1)][\bar{v}_{\lambda_2}(p_2)\mathbf{P}_{-\lambda_1}v_{\lambda_3}(p_3)], \quad (6.30)$$

con $\mathbf{P}_{\lambda_1} = \frac{1}{2}(1 + \lambda_1\gamma_5)$ en la base chiral. En el límite no masivo (para las partículas externas, los estados intermedios pueden ser masivos) las amplitudes que no son nulas se dan para las siguientes configuraciones de helicidad; $\lambda_1 = -\lambda_2$ and $\lambda_3 = -\lambda_4$. Esto reduce considerablemente nuestros cálculos (para el caso sin masa) debido a que de 14 amplitudes de helicidad (de un total de 16) resultan ser vanas.

$$\mathcal{M}_{-,+,-,+}^c = -\frac{m_{\tilde{e}_-}^2}{F^2}[31]\langle 24 \rangle, \quad (6.31)$$

$$\mathcal{M}_{-,+,+,-}^u = \frac{m_{\tilde{e}_-}^4}{F^2(u - m_{\tilde{e}_-}^2)}[41]\langle 23 \rangle, \quad (6.32)$$

$$\mathcal{M}_{-,+,-,+}^t = -\frac{m_{\tilde{e}_-}^4}{F^2(t - m_{\tilde{e}_-}^2)}[31]\langle 24 \rangle. \quad (6.33)$$

Las amplitudes que no son nulas se muestran en la Table 6.2

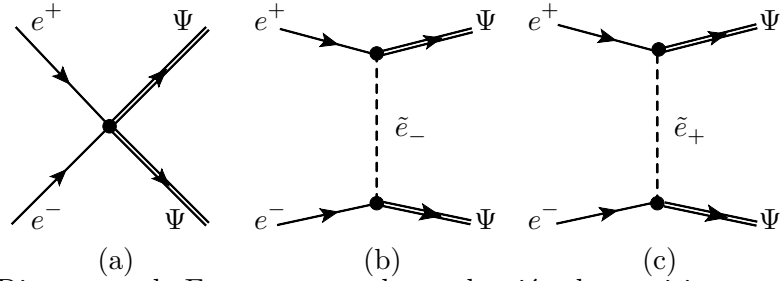


Figura 6.1: Diagramas de Feynman para la producción de gravitinos en la colisión de e^+e^-

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$	$\mathcal{M}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$
$-, +, +, -$	$-\frac{tm_{\tilde{e}_-}^2}{F^2(t - m_{\tilde{e}_-}^2)}[31]\langle 24 \rangle$
$-, +, -, +$	$\frac{um_{\tilde{e}_-}^2}{F^2(u - m_{\tilde{e}_-}^2)}[41]\langle 23 \rangle$

Tabla 6.2: Amplitudes de helicidad para la reacción $e^-e^+ \rightarrow \tilde{G}\tilde{G}$ para el caso no masivo, con $u = s_{13}$ y $t = s_{23}$.

Ahora vamos a realizar los cálculos incluyendo la masa de los goldstinos para $e^+e^- \rightarrow \tilde{G}\tilde{G}$. Ahora hay un total de 32 amplitudes de helicidad, pero se puede mostrar que solo 4 de estas 32 amplitudes son las que no nulas. Las expresiones para las amplitudes de helicidad masivas se muestran en la Table 6.3.

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$	$\mathcal{M}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$
$-, +, +, -$	$\left(-\frac{tm_{\tilde{e}_-}^2}{F^2(t-m_{\tilde{e}_-}^2)} + \tilde{m}^2 \frac{um_{\tilde{e}_-}^2}{F^2 s_{qr}(u-m_{\tilde{e}_-}^2)} \right) [r1]\langle 2q \rangle$
$-, +, -, +$	$\left(\frac{um_{\tilde{e}_-}^2}{F^2(u-m_{\tilde{e}_-}^2)} - \tilde{m}^2 \frac{tm_{\tilde{e}_-}^2}{F^2 s_{qr}(t-m_{\tilde{e}_-}^2)} \right) [1q]\langle r2 \rangle$
$-, +, +, +$	$\frac{\tilde{m}m_{\tilde{e}_-}^4(t-u)}{F^2\langle qr \rangle(u-m_{\tilde{e}_-}^2)(t-m_{\tilde{e}_-}^2)} [1q]\langle q2 \rangle$
$-, +, -, -$	$\frac{\tilde{m}m_{\tilde{e}_-}^4(u-t)}{F^2[qr](u-m_{\tilde{e}_-}^2)(t-m_{\tilde{e}_-}^2)} [1q]\langle q2 \rangle$

Tabla 6.3: Amplitudes de helicidad para la reacción $e^-e^+ \rightarrow \tilde{G}\tilde{G}$ considerando los goldstinos masivos. Seguimos considerando $u = s_{13}$ and $t = s_{23}$.

Comparando las Tablas 6.2 y 6.3,, notamos que las amplitudes con configuraciones de helicidad $-, +, +, -$ y $-, +, -, +$, que no eran cero incluso en el caso masivo, obtienen correcciones proporcionales a la masa del goldstino (\tilde{m}^2). Igualmente las amplitudes para $-, +, +, +$ y $-, +, -, -$, que eran cero para el caso sin masa, ahora son diferente de cero. Finalmente, las configuraciones de helicidad son siguen siendo cero, incluso en el caso masivo.

6.2.2. Producción asociada a la reacción $e^-e^+ \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu\tilde{\chi}_0$

En este caso, vamos a considerar los leptones sin masa mientras que al gravitino completo (espín-3/2) masivo, y al neutralino también masivo. Con el objetivo de comparar las amplitudes de helicidad del caso masivo y las amplitudes con goldstino masivo, hemos analizado dos diagramas de Feynman de los 6 que contribuyen a esta reacción, lo que es equivalente a tomar la masa de los escalares muy grandes. Utilizando la aproximación gravitino-goldstino y las reglas de Feynman para el gravitino ligero dadas en la referencia [35], calculamos las 4 amplitudes de helicidad que no son vanas (de un total de 24 amplitudes), estas se muestran en la Table 6.4.

$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$	$\mathcal{M}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}$
-, +, +, -	$-\frac{2em_{\tilde{\chi}_0} A_{\tilde{\chi}_0} (2s_{12} - M_Z^2)(s_{qr} - m_{\tilde{\chi}_0} \tilde{m})}{\sqrt{6} M \tilde{m} s_{12} (s_{12} - M_Z^2) [rq]} \langle 2r \rangle [1r]$
-, +, +, +	$\frac{2em_{\tilde{\chi}_0} (2s_{12} - M_Z^2)(A_{\tilde{\chi}_0} \tilde{m} - A_{\tilde{G}} m_{\tilde{\chi}_0})}{\sqrt{6} M \tilde{m} s_{12} (s_{12} - M_Z^2)} \langle 2q \rangle [1r]$
-, +, -, -	$\frac{2em_{\tilde{\chi}_0} (2s_{12} - M_Z^2)(A_{\tilde{\chi}_0} \tilde{m} - A_{\tilde{G}} m_{\tilde{\chi}_0})}{\sqrt{6} M \tilde{m} s_{12} (s_{12} - M_Z^2)} \langle 2r \rangle [1q]$
-, +, -, +	$-\frac{2em_{\tilde{\chi}_0} (2s_{12} - M_Z^2) A_{\tilde{\chi}_0} (s_{qr} - m_{\tilde{\chi}_0} \tilde{m})}{\sqrt{6} M \tilde{m} s_{12} (s_{12} - M_Z^2) [rq]} \langle 2r \rangle [1r]$

Tabla 6.4: Amplitudes de helicidad para la reacción $e^- e^+ \rightarrow \tilde{G} \tilde{\chi}_0$. En esta tabla no se muestran las configuraciones de helicidad que dan amplitudes nulas. Hay cuatro configuraciones de helicidad que no son vanas, pero son únicamente las complejas conjugadas de las mostradas acá. Se observa que no hay contribución de los grados de libertad transversales ($++$ y $--$).

Para el caso con gravitino completo, la expresión general para las amplitudes de helicidad son las siguientes:

$$\mathcal{M}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} = \frac{1}{p^2} \mathcal{T}_{\lambda_1 \lambda_2}^\mu \mathcal{T}_{\mu \lambda_3 \lambda_4}, \quad (6.34)$$

$$\mathcal{T}_{\lambda_1 \lambda_2}^\mu = e \left(\bar{v}_{\lambda_2}(p_2) \gamma^\mu u_{\lambda_1}(p_1) \right), \quad (6.35)$$

$$\mathcal{T}_{\mu \lambda_3 \lambda_4} = \frac{1}{4M} \tilde{\Psi}_{\lambda_3}^\beta(p_3) p^\rho [\gamma_\rho, \gamma_\mu] \gamma_\beta u_{\lambda_4}(p_4). \quad (6.36)$$

Hay 32 amplitudes de helicidad en esta reacción, aunque las gran mayoría son nulas debido a las fascinantes propiedades del formalismo de espinores de helicidad. Hay únicamente 12 amplitudes no nulas, pero no es necesario calcular las 12, basta con calcular 6 y el resto son complejo conjugadas de estas 6, por la propiedad de paridad ($\langle ij \rangle \leftrightarrow [ji]$). Las amplitudes no nulas se muestran en la Tabla 6.5.

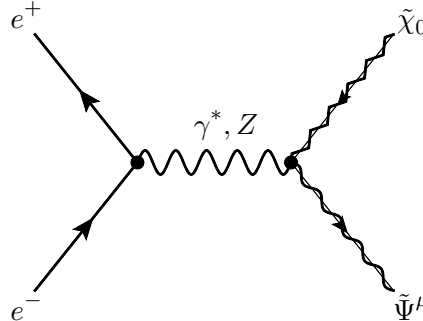


Figura 6.2: Diagramas de Feynman para la producción de gravitinos en la colisión $e^+ e^-$.

$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$	$\mathcal{M}_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}$
$-, +, +, -$	$-\frac{2e\eta(2s_{12}-M_Z^2)(A_{\tilde{G}}^2 m_{\tilde{\chi}_0} s_{qr} + A_{\tilde{\chi}_0}^2 \tilde{m}^3)}{s_{12}(s_{12}-M_Z^2)MA_{\tilde{G}}\langle qr \rangle} \langle 2r \rangle [1r]$
$-, +, +, +$	$\frac{e\eta(2s_{12}-M_Z^2)(A_{\tilde{G}} s_{qr}^2 + A_{\tilde{\chi}_0} \tilde{m}^3 m_{\tilde{\chi}_0})}{s_{12}(s_{12}-M_Z^2)s_{qr}M} \langle 2q \rangle [1r]$
$-, +, -, -$	$\frac{e\eta(2s_{12}-M_Z^2)(A_{\tilde{G}} s_{qr}^2 + A_{\tilde{\chi}_0} \tilde{m}^3 m_{\tilde{\chi}_0})}{s_{12}(s_{12}-M_Z^2)s_{qr}M} \langle 2r \rangle [1q]$
$-, +, -, +$	$-\frac{2e\eta(2s_{12}-M_Z^2)(A_{\tilde{G}}^2 m_{\tilde{\chi}_0} s_{qr} + A_{\tilde{\chi}_0}^2 \tilde{m}^3)}{s_{12}(s_{12}-M_Z^2)MA_{\tilde{G}}\langle qr \rangle} \langle 2r \rangle [1r]$
$-, +, ++, -$	$-\frac{2e(2s_{12}-M_Z^2)(A_{\tilde{\chi}_0} \tilde{m} + A_{\tilde{G}} m_{\tilde{\chi}_0})}{\sqrt{2}s_{12}(s_{12}-M_Z^2)s_{qr}M} [rq]^2 [1r] \langle 2q \rangle$
$-, +, --, +$	$-\frac{2e(2s_{12}-M_Z^2)(A_{\tilde{\chi}_0} \tilde{m} + A_{\tilde{G}} m_{\tilde{\chi}_0})}{\sqrt{2}s_{12}(s_{12}-M_Z^2)s_{qr}M} \langle qr \rangle^2 [1q] \langle 2r \rangle$

Tabla 6.5: Amplitudes de helicidad para la reacción $e^- e^+ \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu \tilde{\chi}_0$.

En la última Tabla, hemos usado las siguientes sustituciones

$$A_{\tilde{G}} = \frac{1}{s_{qr}}(s_{qr} + \tilde{m}^2), \quad (6.37)$$

$$A_{\tilde{\chi}_0} = \frac{1}{s_{qr}}(s_{qr} + m_{\tilde{\chi}_0}^2). \quad (6.38)$$

Comparando las amplitudes de helicidad de las Tablas 6.4 y 6.5 notamos que las configuraciones de helicidad de la Tabla 6.4 ($-, +, +, -$; $-, +, +, +$; $-, +, -, -$; $-, +, -, +$) se mantienen (como es de esperarse) en la Tabla 6.5, donde el gravitino completo fue considerado. La estructura matemática de los productos espinoriales sigue siendo la misma, pero en ambas tablas el factor es diferente. Adicionalmente, en la Tabla 6.5 hay dos configuraciones de helicidad nuevas, estas debido a los grados de libertad transversales que vienen del gravitino completo.

6.2.3. Amplitudes masivas y sin masa para el Decaimiento a dos cuerpos del Neutralino $\tilde{\chi}_0 \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu \gamma$

Por completes, se incluye en esta subsección uno de los procesos más simples que permiten estudiar las configuraciones de helicidad para las amplitudes de helicidad, este decaimiento es el decaimiento del neutralino a gravitino y fotón. El objetivo de esta subsección es comparar las amplitudes masivas usando el gravitino y la aproximación gravitino-goldstino.

Utilizando las interacciones del MSSM con gravedad [99], escribimos las amplitudes

para el diagrama de Feynman de la Figura (6.3)

$$\mathcal{M}_{\lambda_q \lambda_p \lambda_k}^{3/2} = \frac{1}{4M} C_{\chi\gamma} \bar{\Psi}_{\mu\lambda_p}(p) (k_\nu [\gamma^\nu, \gamma^\sigma] \gamma^\mu) \epsilon_{\sigma\lambda_k}(k) u_{\lambda_q}(q) \quad (6.39)$$

$$= \frac{1}{4M} C_{\chi\gamma} \bar{\Psi}_{\mu\lambda_p}(p) (\epsilon_{\lambda_k}^\mu(k) \not{k} - k^\mu \not{\epsilon}_{\lambda_k}(k)) u_{\lambda_q}(q) \quad (6.40)$$

$$= \frac{1}{4M} C_{\chi\gamma} \bar{\Psi}_{\mu\lambda_p}(p) X_{\lambda_k}^\mu(k) u_{\lambda_q}(q), \quad (6.41)$$

con $C_{\chi\gamma} = U_{i1} \cos \theta_W + U_{i2} \sin \theta_W$. La asignación de momentos para este decaimiento son: p para el gravitino ($\Psi_\mu(p)$), q para el neutralino ($\tilde{\chi}_0(q)$) y k para el fotón ($\gamma(k)$), mientras λ_q , λ_p y λ_k son las etiquetas que representan helicidad. También hemos definido $X_{\lambda_k}^\mu(k) = \epsilon_{\lambda_k}^\mu(k) \not{k} - k^\mu \not{\epsilon}_{\lambda_k}(k)$ in Eq. (6.41). Hay un total de 16 amplitudes de helicidad, pero usando la simetría de paridad en los productos de espinores, solo es necesario calcular 8 de ellas.

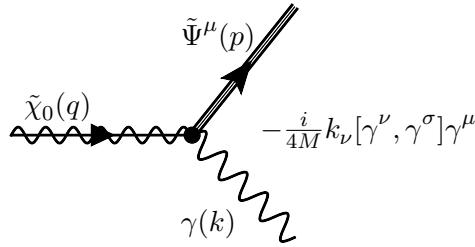


Figura 6.3: diagrama de Feynman para la interacción gravitino-neutralino-fotón

Las amplitudes de helicidad no nulas se muestran en la Tabla 6.6.

$\lambda_q, \lambda_p, \lambda_k$	$\mathcal{M}_{\lambda_q, \lambda_p, \lambda_k}^{3/2}$	$\mathcal{M}_{\lambda_q, \lambda_p, \lambda_k}^{1/2}$
-, -, -	$\frac{C_{\chi\gamma} s_{r_2 q_2}}{\sqrt{3} \tilde{m} M [r_2 q_2]} \langle r_2 q_2 \rangle [r_2 r_1]$	$\frac{C_{\chi\gamma} s_{r_2 q_2}}{\sqrt{3} \tilde{m} M [r_2 q_2]} \langle r_2 q_2 \rangle [r_2 r_1]$
-, ++, +	$\frac{C_{\chi\gamma} [r_2 q_2]^2}{M [r_1 r_2]} m_{\tilde{\chi}_0}$	0

Tabla 6.6: Amplitudes de helicidad para el decaimiento del neutralino a dos cuerpos $\chi_0 \rightarrow \gamma \tilde{\Psi}^\mu$ y $\chi_0 \rightarrow \gamma \tilde{G}$. Aquí $\mathcal{M}_{\lambda_q, \lambda_p, \lambda_k}^{3/2}$ representan la amplitud de helicidad para el gravitino completo (espín-3/2), mientras que $\mathcal{M}_{\lambda_q, \lambda_p, \lambda_k}^{1/2}$ corresponden a las amplitudes con la aproximación gravitino-goldstino. Hay dos amplitudes más, pero como hemos mencionado se calculan a partir de las mostradas por la simetría de paridad en los productos espinoriales.

En la Tabla 6.6, las amplitudes de helicidad para la configuración “-, -, -” son exactamente las mismas con gravitino y goldstino, pero cuando el gravitino completo es tomado en consideración, una nueva amplitud de helicidad ($\mathcal{M}_{-, ++, +}^{3/2}$) aparece. Esto se debe a los grados de libertad transversales del gravitino. La amplitud cuadrada y

promediada para el caso con gravitino toma la siguiente forma:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{C_{\chi\gamma}^2}{2M^2} (2|\mathcal{M}_{-,++,+}|^2 + 2|\mathcal{M}_{-,-,-}|^2) \quad (6.42)$$

$$= \frac{C_{\chi\gamma}^2}{M^2} \left(\frac{s_{q_2 r_2}^2 m_{\tilde{\chi}_0}^2}{s_{r_1 r_2}} + \frac{s_{r_2 q_2}^2}{3\tilde{m}^2} s_{r_2 r_1} \right) \quad (6.43)$$

$$= \frac{C_{\chi\gamma}^2}{M^2} \left(\frac{(m_{\tilde{\chi}_0}^2 - \tilde{m}^2)^2}{3\tilde{m}^2} (3\tilde{m}^2 + m_{\tilde{\chi}_0}^2) \right) \quad (6.44)$$

$$= \frac{C_{\chi\gamma}^2 m_{\tilde{\chi}_0}^6}{M^2} \left(1 - \frac{\tilde{m}^2}{m_{\tilde{\chi}_0}^2} \right)^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{\tilde{m}^2}{m_{\tilde{\chi}_0}^2} \right). \quad (6.45)$$

El ancho de decaimiento Γ para el decaimiento del neutralino a dos cuerpos ($\tilde{\chi}_0 \rightarrow \gamma \tilde{\Psi}^\mu$) es dado como sigue:

$$\Gamma_{\tilde{\chi}_0 \rightarrow \gamma \tilde{\Psi}^\mu} = \frac{C_{\chi\gamma}^2 m_{\tilde{\chi}_0}^5}{16\pi M^2 \tilde{m}^2} \left(1 - \frac{\tilde{m}^2}{m_{\tilde{\chi}_0}^2} \right)^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{\tilde{m}^2}{m_{\tilde{\chi}_0}^2} \right), \quad (6.46)$$

donde $s_{r_1 r_2} = m_{\tilde{\chi}_0}^2$, $s_{r_2 q_2} = m_{\tilde{\chi}_0}^2 - \tilde{m}^2$ y $s_{q_2 r_1} = 0$. El último resultado (6.46) se obtuvo aplicando el formalismo de helicidad que evita la implementación de la tecnología de trazas usada para sumar los espines de las partículas en los estados iniciales y finales involucradas para calcular la amplitud. En particular, para el gravitino, la relación de completitud como vimos en la Sección 5.1 es un tensor de segundo rango $\sum_{\lambda_p} \tilde{\Psi}_{\lambda_p}^\mu(p) \tilde{\Psi}_{\lambda_p}^\nu(p)$ Ref. [99, 103]). Dicho tensor es muy complicado de manejar en las trazas cuando se implementan el enfoque tradicional. En algunos casos conduce incluso a resultados incorrectos si no se tiene cuidado con los signos internos de este dicho tensor, ver la referencia [35] para más detalles.

Por otro lado, la expresión para el caso con goldstino ($\tilde{\chi}_0 \rightarrow \gamma \tilde{G}$) es la siguiente

$$\Gamma_{\tilde{\chi}_0 \rightarrow \gamma \tilde{G}} = \frac{C_{\chi\gamma}^2 m_{\tilde{\chi}_0}^5}{48\pi M^2 \tilde{m}^2} \left(1 - \frac{\tilde{m}^2}{m_{\tilde{\chi}_0}^2} \right)^3. \quad (6.47)$$

Comparando los resultados (6.46) y (6.47), los tiempos de vida media del neutralino ($\tilde{\chi}_0 \rightarrow \gamma \tilde{\Psi}^\mu$, $\tilde{\chi}_0 \rightarrow \gamma \tilde{G}$) se muestran la siguiente gráfica:

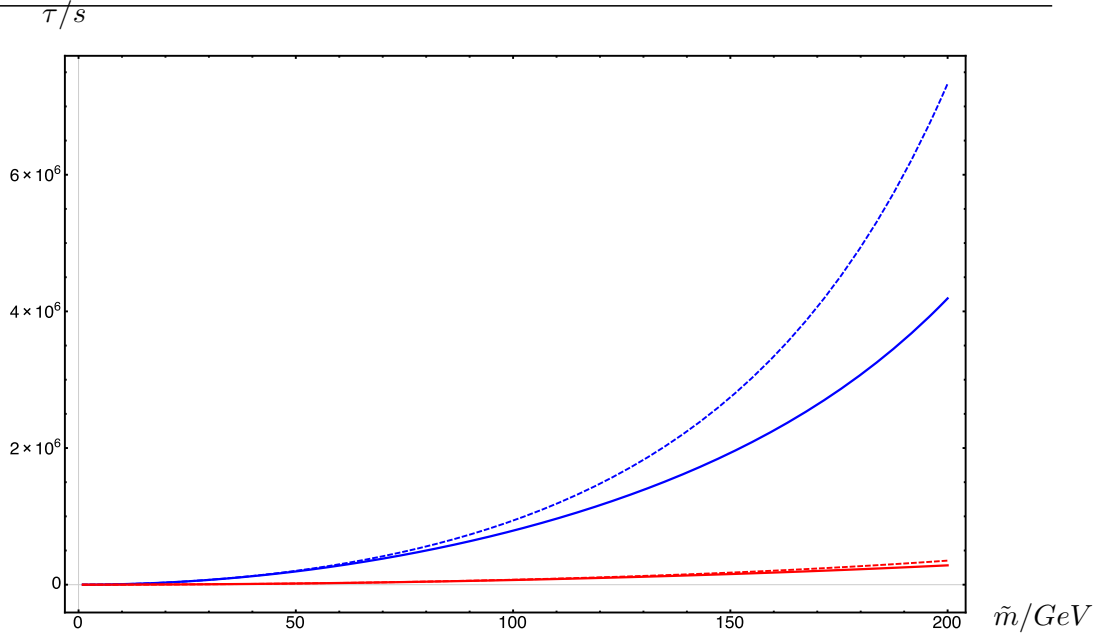


Figura 6.4: Tiempo de vida media ($\tau = \frac{1}{\Gamma}$) para el decaimiento a dos cuerpos del neutralino. La curva continua describe al gravitino $\tilde{\chi}_0 \rightarrow \gamma \tilde{\Psi}^\mu$, y la curva punteada describe el tiempo de vida media considerando al goldstino $\tilde{\chi}_0 \rightarrow \gamma \tilde{G}$. Para la curva azul, se uso: $m_{\tilde{\chi}_0} = 400 \text{ GeV}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$ y $\theta_W = 0$, y para la curva roja tomamos: $m_{\tilde{\chi}_0} = 700 \text{ GeV}$, $\beta = \frac{\pi}{5}$ y $\theta_W = \frac{\pi}{2}$.

Cuando la masa del neutralino es mucho más grande que la masa del gravitino ($m_{\tilde{\chi}_0} \gg \tilde{m}$), la aproximación gravitino-goldstino es una buena aproximación para calcular el ancho de decaimiento para el decaimiento del neutralino a dos cuerpos $\tilde{\chi}_0 \rightarrow \tilde{G}\gamma$. Resulta interesante llevar a cabo un análisis de dicha aproximación, es decir estimar que rango de valores permitidos de masas para el gravitino y neutralino generan menos error en esta aproximación para el ancho de decaimiento $\Gamma_{\tilde{\chi}_0 \rightarrow \tilde{G}\gamma}$. El error relativo se define como sigue:

$$\text{error} = \frac{|ER - AR|}{ER} = \frac{|\Gamma_{\tilde{\chi}_0 \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu \gamma} - \Gamma_{\tilde{\chi}_0 \rightarrow \tilde{G}\gamma}|}{\Gamma_{\tilde{\chi}_0 \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu \gamma}}, \quad (6.48)$$

$$= \frac{\left| \left(1 - \frac{\tilde{m}^2}{m_{\tilde{\chi}_0}^2}\right)^3 \left(\frac{\tilde{m}^2}{m_{\tilde{\chi}_0}^2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\tilde{m}^2}{m_{\tilde{\chi}_0}^2}\right)^3 \right|}{\left(1 - \frac{\tilde{m}^2}{m_{\tilde{\chi}_0}^2}\right)^3 \left(\frac{\tilde{m}^2}{m_{\tilde{\chi}_0}^2} + \frac{1}{3}\right)}, \quad (6.49)$$

Donde ER denota el resultado exacto y AR el resultado aproximado. En la table 6.7 mostramos los límites para la razón de las masas neutralino/gravitino, esto asociado a algunos valores definidos del error porcentual ($\times 100\%$) 1%, 5%, 10%, 20%).

6.2. PRODUCCIÓN Y DECAIMIENTOS CON GRAVITINOS EN EL ESTADO FINAL

Percent error	Limits on the ratio of neutralino/gravitino mass ($m_{\tilde{\chi}_0}$)
1 %	$m_{\tilde{\chi}_0} > 3\sqrt{33} \tilde{m}$
5 %	$m_{\tilde{\chi}_0} > \sqrt{57} \tilde{m}$
10 %	$m_{\tilde{\chi}_0} > 3\sqrt{3} \tilde{m}$
20 %	$m_{\tilde{\chi}_0} > 2\sqrt{3} \tilde{m}$

Tabla 6.7: límites para la razón de las masas neutralino/gravitino ($m_{\tilde{\chi}_0}/\tilde{m}$).

Se puede notar de la Tabla 6.7 que a medida el error porcentual se hace pequeño, uno obtiene una razón más grande para las masas del neutralino y gravitino, esto se ilustra en el plano $(\tilde{m}, m_{\tilde{\chi}_0})$ de la Figura 6.5.

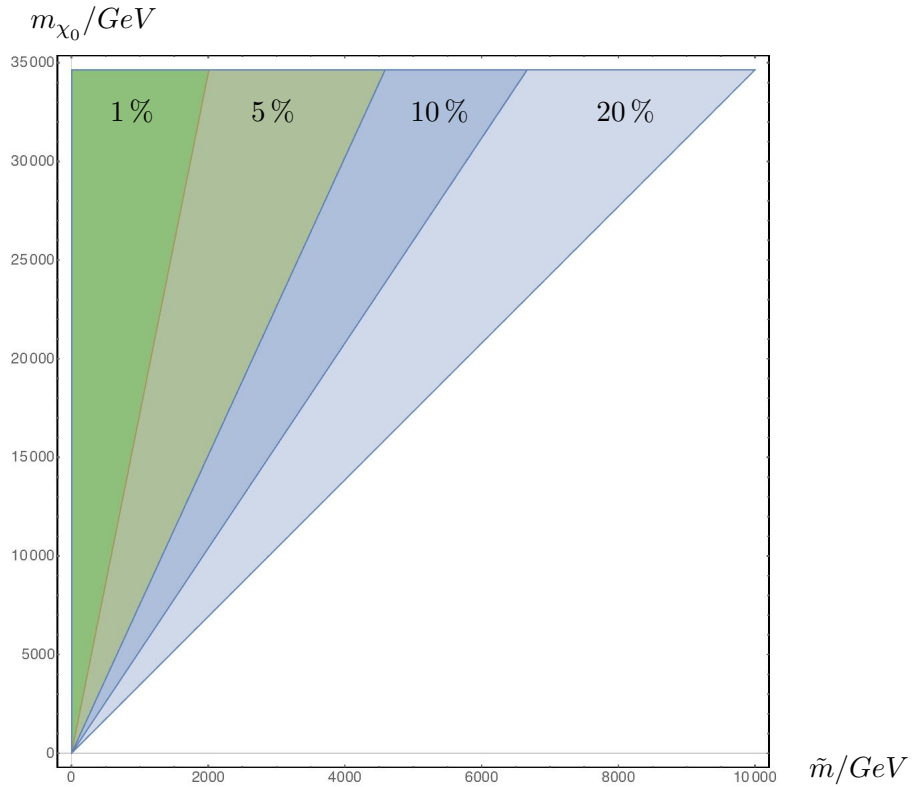


Figura 6.5: Espacio de parámetros para las masas del gravitino y neutralino $(\tilde{m}, m_{\tilde{\chi}_0})$ para los casos que el error estimado es menos que el 20 %, 10 %, 5 %, 1 % consecutivamente. Cada región de los datos llega hasta el eje $m_{\tilde{\chi}_0}$

Capítulo 7

Sobre el Decaimiento del Stop a dos, tres y cuatro cuerpos

Las teorías supersimétricas han tenido un gran impacto en distintos dominios de física de partículas, extendiéndose desde fenomenología a cosmología incluyendo aspectos formales de la teoría cuántica de campos [11]. Sin embargo, es aún un tema abierto si SUSY se realiza en la naturaleza. La extensión supersimétrica del modelo estándar de partículas elementales ha sido estudiada desde el punto de vista teórico y también en el LHC se siguen buscando signatures de SUSY. Los modelos supersimétricos pueden incluir una simetría discreta. La paridad-R, esta simetría garantiza la estabilidad de la partícula supersimétrica más ligera (LSP) [12], lo que permite a la LSP ser un buen candidato para materia oscura (DM por sus siglas en inglés). Los candidatos para LSP en la extensión mínima supersimétrica del modelo estándar (MSSM) incluyen a los sneutrinos, los neutralinos ligeros χ_1^0 y el gravitino \tilde{G} . La mayoría de los estudios que se han realizado se han enfocado en el neutralino como el LSP [47], los escenarios con el sneutrino como LSP son muy restringidos [48].

Los escenarios con el gravitino como LSP y como candidato a DM también se han considerado en [49, 14, 50], donde la naturaleza de la siguiente partícula supersimétrica más ligera (NLSP por sus siglas en inglés) es determinante para la fenomenología del LSP [51, 52]. Posibles candidatos para la NLSP incluyen al neutralino ligero [53, 54], el chargino [55], el sleptón cargado más ligero [56], o el sneutrino [57, 58, 59, 60]. La partícula NLSP tiene vida media muy grande en estos escenarios debido a lo débil que son las interacciones gravitacionales, esto conduce a partículas cargadas que son metaestables, las cuales podrían tener una signature dramática en los colisionadores [61, 62] y también podrían afectar la nucleosíntesis en el big bang (BBN por sus siglas en inglés) [63, 64, 106].

Algunas especies de partículas como los squarks juegan el rol de NLSP, y en ese caso un candidato natural para el NLSP podría ser el sbottom [65, 66, 20] o el stop ligero \tilde{t}_1 . El stop ha sido el más popular en modelos con ruptura de SUSY, cuando la evolución de los parámetros a gran escala se evolucionan a menores escalas de energía. Existen muchas restricciones experimentales y cosmológicas para los escenarios con gravitino LSP y el

stop NLSP, las cuales se discuten en [21]. Resulta que la vida media del stop \tilde{t}_1 puede ser muy grande, en ese caso los límites relevantes desde el punto de vista de física de colisiones son los mismos que los de una partícula cargada estable. En ese caso, los límites existentes de Tevatron implican que la $m_{\tilde{t}_1} > 220$ GeV. Conociendo con alta precisión la vida media del stop es uno de los objetivos más importantes de este escenario, y es justamente ese uno de los objetivos de este trabajo de tesis. Dependiendo de las masas del stop y el gravitino, podríamos necesitar considerar diferentes modos de decaimiento del stop. Para el caso $m_{\tilde{t}_1} > m_t + \tilde{m}$, es el decaimiento a dos cuerpos $\tilde{t} \rightarrow t \tilde{\Psi}_\mu$, mientras que para $m_t + \tilde{m} > m_{\tilde{t}_1} > \tilde{m} + M_W + m_b$ se debe considerar el decaimiento a tres cuerpos $\tilde{t} \rightarrow W b \tilde{\Psi}_\mu$. Para $\tilde{m} + M_W + m_b > \tilde{m} + m_l + m_\nu$ el decaimiento a cuatro cuerpos debe ser considerado. Se espera que la vida media del stop sea $\tau_{(2\text{-body})} < \tau_{(3\text{-body})} < \tau_{(4\text{-body})}$, y los valores precisos de la vida media del stop determinarían el posible rol de cada modo. Por un lado, el tiempo de vida media del stop determinaría si el decaimiento puede ocurrir dentro del detector, en caso fuera producidos en experimentos de colisiones, tales como el LHC. Por otro lado, el tiempo de vida media del stop puede alcanzar valores que afecten la nucleosíntesis o las microondas cósmicas de fondo (CMB por sus siglas en inglés), o en casos extremos podría afectar la etapa temprana de la formación de galaxias.

Siendo el gravitino masivo una partícula con espín-3/2, los cálculos de los modos de decaimiento o las reacciones de producción realizados con las reglas de Feynman tradicionales y los métodos basados en la tecnología de trazas presentan algunas dificultades, como lo mostramos en la Sección 5.1. será de gran ayuda utilizar los métodos modernos que desarrollamos en la Sección 6.

7.1. Decaimiento del Stop a dos, tres y cuatro cuerpos

Los modos de decaimiento del stop que incluyen el gravitino en el estado final pueden ser a dos, tres y cuatro cuerpos en el estado final, los cuales son $\tilde{t} \rightarrow t \tilde{\Psi}^\mu$, $\tilde{t} \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu b W$ y $\tilde{t} \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu b \nu_l$ or $\tilde{t} \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu b q \bar{q}$. El decaimiento a dos cuerpos es permitido en la región $m_{\tilde{t}} \geq \tilde{m} + m_t$, mientras que el modo a tres cuerpos se vuelve relevante en el rango $\tilde{m} + m_t \geq m_{\tilde{t}} \geq \tilde{m} + m_b + m_W$, y finalmente uno necesita considerar el decaimiento a cuatro cuerpos en el rango de $\tilde{m} + m_b + m_W \geq m_{\tilde{t}} \geq \tilde{m} + m_b$ (despreciando la masa de los leptones). Estas regiones se muestran en la Figura 7.1. Como podemos notar en la Figura 7.1, la región cinemática en el plano $m_{\tilde{t}} - \tilde{m}$ para el decaimiento de dos cuerpos $\tilde{t} \rightarrow t \tilde{\Psi}^\mu$ es el más grande (74%), para el del de tres cuerpos $\tilde{t} \rightarrow b W \tilde{\Psi}^\mu$ (14%) y el de cuatro cuerpos $\tilde{t} \rightarrow b \bar{\nu}_l \tilde{\Psi}^\mu$ (12%) no es para nada un región despreciable. Acá, es ciertamente relevante determinar el tiempo de vida media del stop en cada región. En lo que sigue de esta sección, vamos a considerar el estudio de cada decaimiento del stop en cada región de forma separada. . Presentamos cada caso para posteriormente comparar los resultados obtenidos con la literatura. Además se mostrará la potencia de los métodos de amplitudes en el caso de considerar interacciones con múltiples partículas en el estado final, y veremos que la complejidad de los cálculos no crece utilizando estos maravillosos enfoques, que son tema de actual estudio en la comunidad de física teórica de partículas elementales y de la física matemática en general.

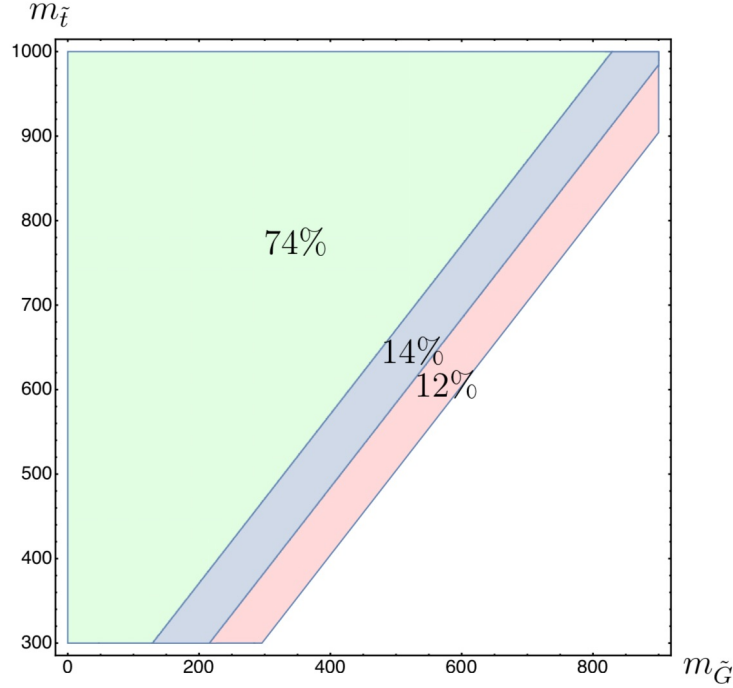


Figura 7.1: Espacio de parámetros para el decaimiento a dos, tres y cuatro cuerpos

7.1.1. Decaimiento del Stop a dos cuerpos con Gravitino LSP en el Estado Final

En esta sección revisamos los cálculos del decaimiento del stop a dos cuerpos $\tilde{t}(p_1) \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu(p_2)t(p_3)$ para el caso que se tiene gravitino masivo en el estado final, y comparamos con el resultado en el que se tiene goldstino en el estado final. La amplitud para este decaimiento toma la siguiente forma:

$$\mathcal{M} = C_2 \mathcal{T}_{\lambda_2 \lambda_3}, \quad (7.1)$$

la función $\mathcal{T}_{\lambda_2 \lambda_3}^F$ para el gravitino completo (masivo) es como sigue

$$\mathcal{T}_{\lambda_2 \lambda_3}^F = \bar{\Psi}_{\lambda_2}^\mu(p_2) \gamma_\alpha \gamma_\mu p_1^\alpha (\mathbf{P}_R \cos \theta + \mathbf{P}_L \sin \theta) u_{\lambda_3}(p_3), \quad (7.2)$$

donde $C_2^F = \frac{g_W}{\sqrt{3}M}$, g_W es la constante de acoplamiento de la teoría electrodébil y $M = M_{Pl}/\sqrt{8\pi}$ es la constante de Plank reducida, con $M_{Pl} = 1.2 \times 10^9$ GeV. Estamos usando \mathbf{P}_R y \mathbf{P}_L como los proyectores derechos e izquierdos. Las etiquetas $\lambda_2 (= -, +, --, ++)$ y $\lambda_3 (= -, +)$ denotan las etiquetas para las helicidades del gravitino y el quark top. De acuerdo a la combinatoria de los estados de helicidad de todas las partículas involucradas en el decaimiento, hay 8 amplitudes de helicidad (4×2), pero se puede mostrar que solo 6 de ellas son no nulas; las amplitudes de helicidad se muestran en la Tabla 7.1.

$\lambda_2\lambda_3$	$\mathcal{T}_{\lambda_2\lambda_3}^F$	$\mathcal{T}_{\lambda_2\lambda_3}^E$
-, +	$\left(\frac{s_{r_2q_2}^2 - \tilde{m}^2 m_t^2}{s_{r_2q_2} \tilde{m} \langle r_2q_2 \rangle} \right) F_1$	$\frac{1}{\langle q_2r_2 \rangle} F_1$
+, -	$\left(\frac{s_{r_2q_2}^2 - \tilde{m}^2 m_t^2}{s_{r_2q_2} \tilde{m} \langle r_2q_2 \rangle} \right) F_2$	$\frac{1}{\langle q_2r_2 \rangle} F_2$

Tabla 7.1: Amplitudes de helicidad para el decaimiento del stop a dos cuerpos ($\tilde{t}(p_1) \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu(p_2)t(p_3)$) con gravitino LSP en el estado final. Hemos denotado el super índice F para las amplitudes con el gravitino masivo, y E para las amplitudes usando el teorema de equivalencia.

Para las amplitudes con goldstino la función $\mathcal{T}_{\lambda_2\lambda_3}^E$ es dada por la siguiente ecuación

$$\mathcal{T}_{\lambda_2\lambda_3}^E = \bar{u}(p_2)(\mathbf{P}_R \cos \theta + \mathbf{P}_L \sin \theta)u(p_3) \quad (7.3)$$

con $C_2^E = \frac{g_W(m_{\tilde{t}}^2 - m_t^2)}{\sqrt{3}M\tilde{m}}$. En la Tabla 7.1, se han definido las siguientes funciones

$$F_1 = m_t \tilde{m} \sin \theta_{\tilde{t}} + s_{r_2q_2} \cos \theta_{\tilde{t}}, \quad (7.4)$$

$$F_2 = m_t \tilde{m} \cos \theta_{\tilde{t}} + s_{r_2q_2} \sin \theta_{\tilde{t}} \quad (7.5)$$

Aquí, $s_{r_2q_2} = -(r_2 + q_2)^2$ es una variable tipo-Mandelstam. El $\theta_{\tilde{t}}$ denota el ángulo de mezcla en el sistema del stop. La amplitud cuadrada y promediada del proceso $\tilde{t}(p_1) \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu(p_2)t(p_3)$ equivale a la suma de los cuadrados de cada amplitud de helicidad que se muestran en la Tabla 7.1, esto se lee como sigue:

$$\langle |\mathcal{M}^F|^2 \rangle = |\mathcal{M}_{-,+}^F|^2 + |\mathcal{M}_{+,-}^F|^2 \quad (7.6)$$

$$= \frac{(\tilde{m}^2 m_t^2 - s_{r_2q_2}^2)^2}{3M^2 \tilde{m}^2 s_{r_2q_2}^3} (m_t^2 \tilde{m}^2 + s_{r_2q_2}^2 + 2 \sin 2\theta_{\tilde{t}} m_t \tilde{m} s_{r_2q_2}) \quad (7.7)$$

También hemos considerado la aproximación del gravitino (espín-3/2) a goldstino (espín-1/2). En este caso, las amplitudes helicidad se muestran en la tercera columna de la Tabla 7.1. En este caso la amplitud cuadrada y promediada tiene la siguiente forma:

$$\langle |\mathcal{M}^E|^2 \rangle = |\mathcal{M}_{-,+}^E|^2 + |\mathcal{M}_{+,-}^E|^2 \quad (7.8)$$

$$= \frac{(m_t^2 - m_{\tilde{t}}^2)^2}{3M^2 \tilde{m}^2 s_{r_2q_2}} (m_t^2 \tilde{m}^2 + s_{r_2q_2}^2 + 2 \sin 2\theta_{\tilde{t}} m_t \tilde{m} s_{r_2q_2}) \quad (7.9)$$

7.1.2. Decaimiento del stop a tres cuerpos: $\tilde{t} \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu W b$

En esta subsección vamos a considerar únicamente la contribución del estado intermedio cuya partícula mediadora es el quark top (Figura 7.2) la cual funciona muy bien para

7.1. DECAIMIENTO DEL STOP A DOS, TRES Y CUATRO CUERPOS

valores de las masas del chargino y sbottom muy pesadas. Hemos escrito las amplitudes para el decaimiento a tres cuerpos $\tilde{t}(p_1) \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu(p_2)b(p_3)W(p_4)$ como sigue:

$$\mathcal{M}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4} = C_3 P_t(l) \mathcal{T}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}, \quad (7.10)$$

la función $\mathcal{T}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^F$ para la función de onda del gravitino toma la siguiente forma

$$\mathcal{T}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^F = \left(\bar{\Psi}_{\lambda_2}^\mu(p_2) \gamma_\alpha \gamma_\mu p_1^\alpha (\mathbf{P}_R \cos \theta + \mathbf{P}_L \sin \theta) \right) (-l + m_t) \left(\gamma_\nu \mathbf{P}_R u_{\lambda_3}(p_3) \epsilon_{\lambda_4}^\nu(p_4) \right), \quad (7.11)$$

con $C_3^F = \frac{g_W}{2M}$. El denominador del propagador (Figura 7.2) es definida como $P_t(l) = \frac{1}{l^2 + m_t^2}$. La contracción de las matrices gamma es definida como $p_\mu \gamma^\mu = \not{p}$.

Para la aproximación gravitino-goldstino, la función $\mathcal{T}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^E$ es definida como sigue:

$$\mathcal{T}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^E = \left(\bar{u}_{\lambda_2}(p_2) (\mathbf{P}_R \cos \theta + \mathbf{P}_L \sin \theta) \right) (-l + m_t) \left(\gamma_\nu \mathbf{P}_R u_{\lambda_3}(p_3) \epsilon_{\lambda_4}^\nu(p_4) \right), \quad (7.12)$$

con $C_3^E = \frac{g_W(m_t^2 - m_{\tilde{t}}^2)}{2\sqrt{6}M\tilde{m}}$.

Las amplitudes de helicidad no nulas para las funciones $\mathcal{T}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^F$ y $\mathcal{T}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^E$ se muestran en la Tabla 7.2

$\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$	$\mathcal{T}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}^F$	$\mathcal{T}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}^E$
-, -, -	$\left(\frac{2(s_{q_1 r_1}^2 - m_{\tilde{t}}^2 \tilde{m}^2) \langle q_1 3 \rangle [3r_4]}{\sqrt{3} s_{q_1 r_1} \tilde{m} \langle r_4 3 \rangle} \right) F_3$	$\frac{2 \langle q_1 3 \rangle [3r_4]}{\sqrt{2} s_{q_1 r_1} \langle r_4 3 \rangle} F_3$
-, -, 0	$\left(\frac{\sqrt{2} (s_{q_1 r_1}^2 - m_{\tilde{t}}^2 \tilde{m}^2) \langle q_1 r_4 \rangle [3r_4]}{\sqrt{3} s_{q_1 r_1} \tilde{m}^2} \right) F_3$	$\frac{\langle q_1 r_4 \rangle [3r_4]}{\tilde{m}} F_3$
+, -, -	$\left(\frac{2(s_{q_1 r_1}^2 - m_{\tilde{t}}^2 \tilde{m}^2) \langle r_1 3 \rangle [3r_4]}{\sqrt{3} s_{q_1 r_1} \tilde{m} \langle r_1 q_1 \rangle \langle r_4 3 \rangle} \right) F_4$	$\frac{2 \langle r_1 3 \rangle [3r_4]}{\sqrt{2} \langle r_1 q_1 \rangle \langle r_4 3 \rangle} F_4$
+, -, 0	$\left(\frac{\sqrt{2} (s_{q_1 r_1}^2 - m_{\tilde{t}}^2 \tilde{m}^2) \langle r_1 r_4 \rangle [3r_4]}{\sqrt{3} s_{q_1 r_1} \tilde{m}^2 \langle r_1 q_1 \rangle} \right) F_4$	$\frac{\langle r_1 r_4 \rangle [3r_4]}{\tilde{m} \langle r_1 q_1 \rangle} F_4$

Tabla 7.2: Expresiones para la funciones $\mathcal{T}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^F$ y $\mathcal{T}_{\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^E$ correspondiente a diferentes configuraciones de helicidad que aparecen en la amplitud del decaimiento a tres cuerpos $\tilde{t}(p_1) \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu(p_2)b(p_3)W(p_4)$.

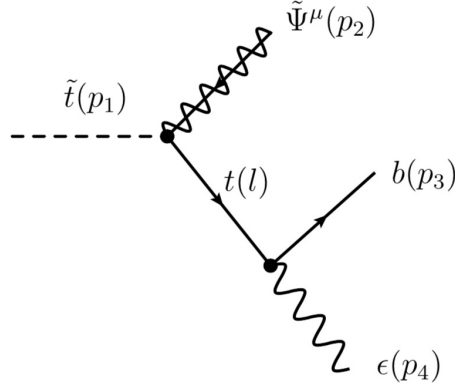


Figura 7.2: Diagrama de Feynman para el decaimiento del stop a tres cuerpos.

En la tabla 7.2, hemos implementado las siguientes definiciones:

$$A_{\tilde{\Psi}} = \frac{1}{s_{q_1 r_1}} (s_{q_1 r_1} - \tilde{m}^2), \quad (7.13)$$

$$A_{\tilde{t}} = \frac{1}{s_{q_1 r_1}} (s_{q_1 r_1} - m_{\tilde{t}}^2), \quad (7.14)$$

$$F_3 = m_t \cos \theta_{\tilde{t}} - A_{\tilde{t}} \tilde{m} \sin \theta_{\tilde{t}}, \quad (7.15)$$

$$F_4 = A_{\tilde{\Psi}} s_{q_1 r_1} \sin \theta_{\tilde{t}} + m_t \tilde{m} \cos \theta_{\tilde{t}} \quad (7.16)$$

7.1.3. Decaimiento del stop a cuatro cuerpos $\tilde{t} \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu b l \nu_l$

En este caso, consideramos el diagrama de Feynman que se muestra en la Figura 7.3. La amplitud para el decaimiento del stop a cuatro cuerpos $\tilde{t}(p_1) \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu(p_2) b(p_3) l(p_4) \nu_l(p_5)$ es como sigue:

$$\mathcal{M}_{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5} = C_4 P_t(l) P_W(q) \mathcal{T}_{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}, \quad (7.17)$$

la función $\mathcal{T}_{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}^F$ para el gravitino completo (espín-3/2) es dada por

$$\mathcal{T}_{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}^F = \left(\bar{\Psi}_{\lambda_2}^\beta(p_2) \gamma_\alpha \gamma_\beta p_1^\alpha (\mathbf{P}_R \cos \theta_{\tilde{t}} + \mathbf{P}_L \sin \theta_{\tilde{t}}) \right) (-\not{l} + m_t) (\gamma^\nu \mathbf{P}_R u_{\lambda_3}(p_3)) \quad (7.18)$$

$$\left(\eta_{\nu\mu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M_W^2} \right) (\bar{u}_{\lambda_4}(p_4) \gamma^\mu \mathbf{P}_L v_{\lambda_5}(p_5)), \quad (7.19)$$

con $C_4^F = \frac{g_W^2}{\sqrt{3}M}$. Se ha definido $P_W(q) = \frac{1}{q^2 + M_W^2}$ como el denominador del propagador del boson W (Figura 7.3).

La función correspondiente a la aproximación gravitino-goldstino $\mathcal{T}_{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}^E$ toma la

siguiente forma:

$$\mathcal{T}_{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}^E = \left(\bar{u}_{\lambda_2}(p_2)(\mathbf{P}_R \cos \theta_{\tilde{t}} + \mathbf{P}_L \sin \theta_{\tilde{t}}) \right) (-\not{l} + m_t) (\gamma^\nu \mathbf{P}_R u_{\lambda_3}(p_3)) \quad (7.20)$$

$$\left(\eta_{\nu\mu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M_W^2} \right) \left(\bar{u}_{\lambda_4}(p_4) \gamma^\mu \mathbf{P}_L v_{\lambda_5}(p_5) \right), \quad (7.21)$$

con $C_4^E = \frac{g_W^2(m_t^2 - m_{\tilde{t}}^2)}{2\sqrt{3}M\tilde{m}}$. Las funciones $\mathcal{T}_{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}^F$ y $\mathcal{T}_{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}^E$ correspondientes a las configuraciones de helicidad que generan amplitudes no nulas se muestran en la Tabla 7.3

$\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$	$\mathcal{T}_{\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5}^F$	$\mathcal{T}_{\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5}^E$
$-, -, -, +$	$\left(\frac{2\sqrt{2}(s_{q_1 r_1}^2 - m_{\tilde{t}}^2 \tilde{m}^2) \langle q_1 4 \rangle [35]}{\sqrt{3} s_{q_1 r_1} \tilde{m}} \right) F_3$	$2 \langle q_1 4 \rangle [35] F_3$
$+, -, -, +$	$\left(\frac{2\sqrt{2}(s_{q_1 r_1}^2 - m_{\tilde{t}}^2 \tilde{m}^2) \langle r_1 4 \rangle [35]}{\sqrt{3} s_{q_1 r_1} \tilde{m} \langle r_1 q_1 \rangle} \right) F_4$	$\frac{2 \langle r_1 4 \rangle [35]}{\langle r_1 q_1 \rangle} F_4$

Tabla 7.3: Expresiones para las funciones $\mathcal{T}_{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}^F$ cuyas configuraciones de helicidad generan amplitudes no nulas, además $\mathcal{T}_{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}^E$ que también aparecen las amplitudes del decaimiento del stop a cuatro cuerpos $\tilde{t}(p_1) \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu(p_2) b(p_3) l(p_4) \nu_l(p_5)$.

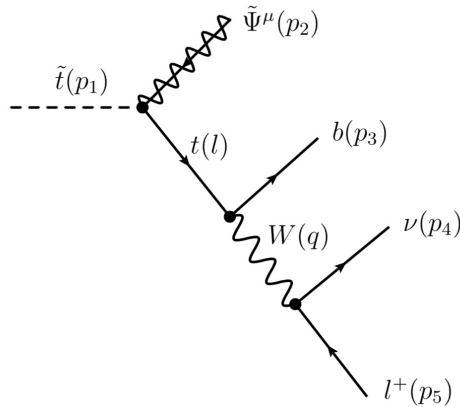


Figura 7.3: Diagrama de Feynman para el decaimiento del stop a cuatro cuerpos

7.2. Resultados Numéricos

7.2.1. Decaimiento del stop a dos cuerpos

El ancho de decaimiento para el proceso $\tilde{t}(p_1) \rightarrow \tilde{\Psi}^\mu(p_2)t(p_3)$ con gravitino masivo es dado como sigue:

$$\Gamma_{\tilde{t} \rightarrow \tilde{G}t} = \frac{1}{48\pi M^2 m_{\tilde{G}}^2 m_{\tilde{t}}^3} \left((-m_{\tilde{G}}^2 + m_t^2 + m_{\tilde{t}}^2)^2 - 4m_t^2 m_{\tilde{t}}^2 \right)^{3/2} (m_{\tilde{t}}^2 - m_{\tilde{G}}^2 - m_t^2 + 2 \sin 2\theta m_t m_{\tilde{G}}). \quad (7.22)$$

Por otro lado, empleando la aproximación gravitino-goldstino, el ancho de decaimiento toma la forma

$$\Gamma_{\tilde{t} \rightarrow Gt} = \frac{1}{48\pi M^2 m_{\tilde{G}}^2 m_{\tilde{t}}^3} \left((-m_{\tilde{G}}^2 + m_t^2 + m_{\tilde{t}}^2)^2 - 4m_t^2 m_{\tilde{t}}^2 \right)^{1/2} (m_{\tilde{t}}^2 - m_{\tilde{G}}^2)^2 \times (m_{\tilde{t}}^2 - m_{\tilde{G}}^2 - m_t^2 + 2 \sin 2\theta m_t m_{\tilde{G}}). \quad (7.23)$$

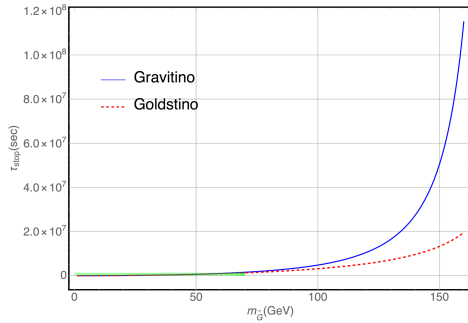


Figura 7.4: Tiempo de vida para el decaimiento del stop a dos cuerpos. La curva continua es para el gravitino, y la curva punteada es para el goldstino.

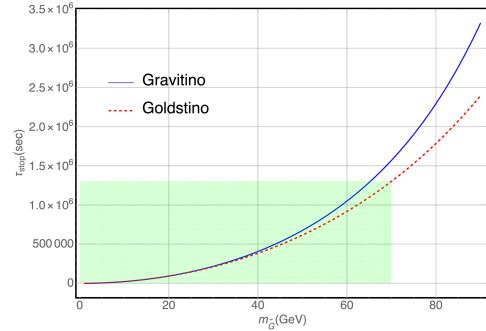


Figura 7.5: La región sombreada es cuando la aproximación gravitino-goldstino es menor que el 1%.

La curva continua representa el tiempo de vida media del gravitino en el estado final, mientras que la curva punteada representa el tiempo de vida del stop con el goldstino en el estado final. En las gráficas de la Figura 7.4 hemos fijado la masa del stop a $m_{\tilde{t}} = 350 \text{ GeV}$ (el mismo valor se considera para el decaimiento a tres y cuatro cuerpos). En la región sombreada (verde clara) de la Figura 7.5, la diferencia entre el gravitino y el goldstino es menor al 1%.

Se compara el ancho de decaimiento usando el gravitino completo en el estado final y el decaimiento utilizando el goldstino. Para masas abajo de $\tilde{m} < 70 \text{ GeV}$, el tiempo de vida media del decaimiento del stop con gravitino y la aproximación a goldstino es menor que 1%. Lo que se representa en la región sombreada de la Figura 7.5, en esta

región se tiene que:

$$\frac{\Gamma_{gravitino} - \Gamma_{goldstino}}{\Gamma_{gravitino}} \ll 1\%. \quad (7.24)$$

La región para la masa del gravitino $m_{\tilde{G}}$ para un rango dado de la masa del stop $m_{\tilde{t}}$ cuando $|\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma}| < 1\%$ se muestra en la Tabla 7.4

Process	$m_{\tilde{t}}$	$m_{\tilde{G}}$
$\tilde{t} \rightarrow t\tilde{G}$	[250,1000]	[0,70]

Tabla 7.4: Espacio de parámetros para la masa del stop $m_{\tilde{t}}$ y la masa del gravitino $m_{\tilde{G}}$ en GeV

7.2.2. Decaimiento del stop a tres y cuatro cuerpos

En la Figura 7.6 se muestra el tiempo de vida media del stop para el modo a tres cuerpos usando gravitino y goldstino. Notamos que el tiempo de vida media toma valores hasta de $\mathcal{O}(10^{14} s)$. Mientras que la Figura 7.7 muestra un acercamiento de la región donde la diferencia entre el tiempo de vida media con gravitino y goldstino es menor al 20%. Finalmente, presentamos en la gráfica de la Figura 7.8 el resultado del tiempo de vida media del stop cuando el decaimiento a cuatro cuerpos es el canal permitido. En este caso, el tiempo de vida media del stop puede alcanzar valores hasta $\mathcal{O}(10^{20} s)$ que tiene consecuencias interesantes. La Figura 7.9 muestra un acercamiento de la región donde la diferencia entre el tiempo de vida media con gravitino y goldstino es menor que el 70%.

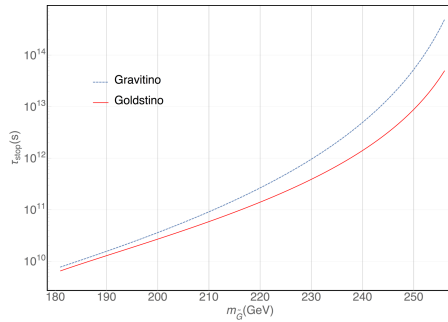


Figura 7.6: gráfica logarítmica para el tiempo de vida media del stop cuando decae a tres cuerpos

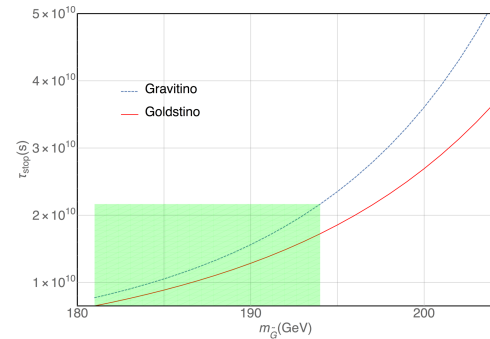


Figura 7.7: Acercamiento para el decaimiento del stop a tres cuerpos

CAPÍTULO 7. SOBRE EL DECAIMIENTO DEL STOP A DOS, TRES Y CUATRO CUERPOS

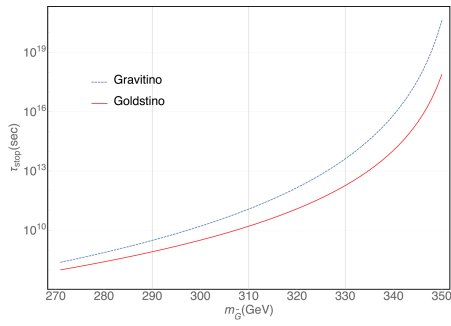


Figura 7.8: Gráfica logarítmica para el decaimiento del stop a cuatro cuerpos

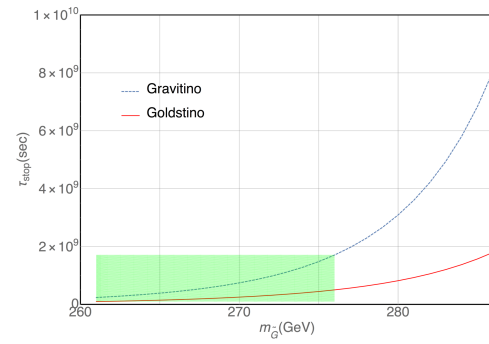


Figura 7.9: Acercamiento para el decaimiento del stop a cuatro cuerpos.

Capítulo 8

Conclusiones

8.1. Conclusiones

- Al inicio de mi formación doctoral, realicé cálculos perturbativos con el enfoque tradicional, sobre todo aplicado a los decaimientos de escalares pesados (stop) con gravitinos en el estado final. Se logró corregir trabajos previos y además se comparó el tiempo de vida media del stop (modo tres cuerpos) con gravitino en estado final y con su aproximación a goldstino. Se logró observar numéricamente que la aproximación es buena cuando la masa del gravitino tiende a cero, de lo contrario el tiempo de vida media del stop con gravitino y goldstino pueden tener un error hasta del 100 %.
- Durante estos últimos tres años (2015-2018), se han utilizado ampliamente los métodos perturbativos modernos de QFT como herramienta de trabajo [43, 32, 44]. Además, hemos aportado con esta tesis doctoral a entender y generalizar el caso de partículas sin masa al caso real y completo, es decir al caso masivo.
- Hemos implementado el Formalismo de Espinores de Helicidad masivo al cálculo de diferentes procesos y reacciones en el Modelo Estándar de partículas elementales. Nuestros resultados muestran que podemos encontrar expresiones compactas tipo Parke-Taylor incluso si consideramos la masa de las partículas. Este trabajo se reportó en la Reunión Anual de la Sociedad Mexicana de Física y en el Simposio Latinoamericano de Física de Altas Energías (SILAFEA). Nuestros resultados indican la factibilidad de este método y abren una ventana para futuros trabajos de investigación.
- Una vez que controlamos y calibramos el Formalismo de Espinores de Helicidad para el caso masivo, lo aplicamos a los cálculos en Supergravedad. Es decir, logramos hacer cálculos de producción de gravitinos utilizando este nuevo formalismo. Podemos decir que hicimos física más allá del Modelo Estándar utilizando técnicas modernas, de alguna manera manejamos dos frentes de trabajo.
- Nuestros resultados, los que llamamos “*Amplitudes con gravitinos masivos en*

el estado final", nos enseñan que es posible expresar amplitudes que involucren gravitinos (espín-3/2) en el estado final, como función de amplitudes que involucran goldstinos (espín-1/2) en estado final. Este resultado reciente sigue sin ser estudiado a profundidad, será algo que exploraremos en el futuro.

Bibliografia

- [1] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group), *Phys. Rev. D* **98**, 030001 (2018).
- [2] CMS Collaboration, *Phys. Lett. B* **716** (2012) 30.
- [3] F. Englert and R. Brout, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321.
P. W. Higgs, *Phys. Lett.* **12** (1964) 132.
T. W. B. Kibble, *Phys. Rev.* **155** (1967) 1554.
- [4] S. Weinberg, “*The Quantum Theory of Fields*”, vol I-III, Cambridge University Press, 2005.
- [5] S. J. Parke and T. R. Taylor, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2459 (1986).
- [6] E. Witten, *Commun. Math. Phys.* **252**, 189 (2004) [arXiv:hep-th/0312171].
- [7] N. Arkani-Hamed and J. Kaplan, *JHEP* **0804**, 076 (2008) [arXiv:0801.2385 [hep-th]].
- [8] N. Arkani-Hamed, F Cachazo, C. Cheung, and J. Kaplan, *JHEP* **1003**, 020 (2010) [arXiv:0907.5418 [hep-th]].
- [9] N. Arkani-Hamed, J. L. Bourjaily, F Cachazo, S. Caron-Huot, J. Trnka, *JHEP* **1101**, 041 (2011) [arXiv:1008.2958 [hep-th]].
- [10] N. Arkani-Hamed, J. L. Bourjaily, F Cachazo, et al., [arXiv:1212.5605 [hep-th]].
- [11] For a review see: S.P. Martin, A Supersymmetry primer, *Adv.Ser.Direct.High Energy Phys.* **21** (2010) 1-153 [arXiv:hep-ph/9709356].
- [12] J. Ellis, J.S. Hagelin, D.V. Nanopoulos, K.A. Olive and M. Srednicki, *Nucl. Phys. B* **238** (1984) 453; H. Goldberg, *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 1419.
- [13] J. L. Feng, A. Rajaraman and F. Takayama, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 011302 [arXiv:hep-ph/0302215]; *Phys. Rev. D* **68** (2003) 063504 [arXiv:hep-ph/0306024].
- [14] J. R. Ellis, K. A. Olive, Y. Santoso and V. C. Spanos, *Phys. Lett. B* **588** (2004) 7 [arXiv:hep-ph/0312262].
- [15] J. L. Feng, S. Su and F. Takayama, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 075019 [arXiv:hep-ph/0404231].

-
- [16] A. De Roeck, J. R. Ellis, F. Gianotti, F. Moortgat, K. A. Olive and L. Pape, [arXiv:hep-ph/0508198].
- [17] F. D. Steffen, JCAP **0609**, 001 (2006) [arXiv:hep-ph/0605306].
- [18] J. R. Ellis and S. Rudaz, Phys. Lett. B **128** (1983) 248.
- [19] C. Boehm, A. Djouadi and M. Drees, Phys. Rev. D **62** (2000) 035012 [arXiv:hep-ph/9911496].
- [20] J. R. Ellis, K. A. Olive and Y. Santoso, Astropart. Phys. **18** (2003) 395 [arXiv:hep-ph/0112113].
- [21] J. L. Diaz-Cruz, John Ellis, Keith A. Olive, Yudi Santoso, **JHEP** **0705** (2007) 003 [arXiv:hep-ph/0701229].
- [22] T. Phillips, talk at DPF 2006, Honolulu, Hawaii, October 2006, <http://www.phys.hawaii.edu/indico/contributionDisplay.py?contribId=454&sessionId=186&confId=3>.
- [23] E. Noether, Nachr. d. Konig. Gesellsch. d. Wiss. zuGottingen, no. Math-phys. Klasse, pp. 235?257 (1918)
- [24] S. Glashow, Nucl. Phys. **22**(4),579?588(1961)
- [25] A. Salam, J. Ward, Phys. Lett. **13**(2),168?171(1964)
- [26] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**(21),1264?1266(1967)
- [27] DESY, http://www.desy.de/news/news_search/index_eng.html?openDirectAnchor=1416&two_columns=1&preview=preview
- [28] K. Freeman,G. McNamara, Search of Dark Matter, Springer Praxis Books /Space Exploration, Springer, Berlin, 2006.
- [29] L. Bergström, Rep. Prog. Phys. **63**(5), pp. 793?841 (2000, hep-ph/0002126).
- [30] NASA/WMAP Science team, http://map.gsfc.nasa.gov/universe/uni_matter.html
- [31] CERN, <http://cms.web.cern.ch/news/supersymmetric-gluon-search-gluinos>.
- [32] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 2007.
- [33] J. Wess and B. Zumino, Nucl. Phys. **B70** (1974) 39.
- [34] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity*, Princeton University Press, 1992.
- [35] T. Moroi, [arXiv:hep-ph/9503210].
- [36] R. Casalbuoni, S. De Curtis, D. Dominici, F. Feruglio, and R. Gatto, *Physics Letters B* **215**, 313-316, 1988.
-

-
- [37] P. Fayet, *Phys.Lett.* **70B** (1977) 461.
- [38] P. Fayet, *Phys. Lett. B.* **175** (1986) 471.
- [39] P. Fayet, *Phys. Lett. B.* **84** (1979) 421.
- [40] P. Fayet, *Phys. Lett. B.* **86** (1979) 272.
- [41] P. Fayet, *Conference Proc.* LPTENS-81-9 (1981) 347.
- [42] J. Lorenzo Díaz-Cruz, B. Larios, *Eur. Phys. J. C* (2016) **76**, 157, [arXiv:1510.01447v2 [hep-ph]].
- [43] M. D. Schwarz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge University Press, 2014. **252** 189-258 (2004), [arXiv:hep-th/0312171].
- [44] H. Elvang and Y. Huang, *Scattering Amplitudes in Gauge Theory and Gravity*, Cambridge University Press, 2015, [arXiv:1308.1697v2 [hep-th]].
- [45] L.J. Dixon, [arXiv: 1310.5353 [hep-th]].
- [46] L. J. Dixon, *J. Phys. A* **44**, 454001 (2011) [arXiv: 1105.0771[hep-th]].
- [47] J. R. Ellis, K. A. Olive, Y. Santoso and V. C. Spanos, *Phys. Rev. D* **70**, 055005 (2004) [arXiv:hep-ph/0405110].
- [48] T. Falk, K. A. Olive and M. Srednicki, *Phys. Lett. B* **339** (1994) 248 [arXiv:hep-ph/9409270].
- [49] J. L. Feng, A. Rajaraman and F. Takayama, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 011302 [arXiv:hep-ph/0302215]; *Phys. Rev. D* **68** (2003) 063504 [arXiv:hep-ph/0306024].
- [50] J. L. Feng, S. Su and F. Takayama, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 075019 [arXiv:hep-ph/0404231].
- [51] F. D. Steffen, *JCAP* **0609**, 001 (2006) [arXiv:hep-ph/0605306].
- [52] A. De Roeck, J. R. Ellis, F. Gianotti, F. Moortgat, K. A. Olive and L. Pape, [arXiv:hep-ph/0508198].
- [53] F. D. Steffen, [arXiv:hep-ph/0711.1240].
- [54] M. Johansen, J. Edsjö, S. Hellman, J. Milstead , *JHEP* **1008** 1-27 (2010).
- [55] G. D. Kribs, A. Martin, and T. S. Roy, *JHEP* **0901** (2009) 023, [arXiv:hep-ph/0807.4936].
- [56] J. Heisig, J. Heising, *JCAP* **04** (2014) 023 [arXiv:1310.6352].
- [57] J. L. Feng, S. F. Su and F. Takayama, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 063514 [arXiv:hep-ph/0404198].
- [58] T. Kanzaki, M. Kawasaki, K. Kohri and T. Moroi, [arXiv:hep-ph/0609246].

-
- [59] L. Covi and K. Sabine **JHEP** **0708** (2007) 015, [arXiv:hep-ph/0703130v3].
- [60] K. Kadota, K. A. Olive, L. Velasco, Phys. Rev. D **79** (2009) 055018, [arXiv:hep-ph/0902.2510v3].
- [61] J. R. Ellis, A. R. Raklev and O. K. Oye, JHEP **0610**, 061 (2006) [arXiv:hep-ph/0607261].
- [62] K. Hamaguchi, Y. Kuno, T. Nakaya and M. M. Nojiri, Phys. Rev. D **70** (2004) 115007 [arXiv:hep-ph/0409248].
- [63] R. H. Cyburt, J. R. Ellis, B. D. Fields and K. A. Olive, Phys. Rev. D **67** (2003) 103521 [arXiv:astro-ph/0211258]; J. R. Ellis, K. A. Olive and E. Vangioni, Phys. Lett. B **619** (2005) 30 [arXiv:astro-ph/0503023].
- [64] M. Kawasaki, K. Kohri and T. Moroi, Phys. Lett. B **625** (2005) 7 [arXiv:astro-ph/0402490]; Phys. Rev. D **71** (2005) 083502 [arXiv:astro-ph/0408426].
- [65] J. R. Ellis and S. Rudaz, Phys. Lett. B **128** (1983) 248.
- [66] C. Boehm, A. Djouadi and M. Drees, Phys. Rev. D **62** (2000) 035012 [arXiv:hep-ph/9911496].
- [67] R. Casalbuoni, S. De Curtis, D. Dominici, F. Feruglio, R. Gatto, Phys. Lett. B **215** (1988) 313.
- [68] L. Covi and F. Dradi, **JCAP** **1410** (2014) 10, 039, [arXiv:hep-ph/1403.4923].
- [69] J.E. Molina, et al, Phys. Lett. **B737** (2014) 156-161, [arXiv:hep-ph/1405.7376].
- [70] H. Eberl and V. C. Spanos, [arXiv:1509.09159 [hep-ph]].
- [71] H. Eberl and V. C. Spanos, [arXiv:1510.03182 [hep-ph]].
- [72] E. Brubaker *et al.* [Tevatron Electroweak Working Group], [arXiv:hep-ex/0608032].
- [73] W. M. Yao *et al.* [Particle Data Group], J. Phys. G **33** (2006) 1.
- [74] CDF Collaboration, <http://www-cdf.fnal.gov/physics/new/bottom/060921.blessed-sigmab/>.
- [75] V. Shtabovenko, R. Mertig and F. Orellana, arXiv:1601.01167.
- [76] R. Mertig, M. Böhm, and A. Denner, Comput. Phys. Commun., **64**, 345-359, (1991).
- [77] J. l. Feng, A. Rajaraman and F. Takayama, Phys. Rev. D **68**, 063504 (2003).
- [78] R. Lamon and R. Durrer, Phys. Rev. D **73**, 023507 (2006), [arXiv:hep-ph/0506229].
- [79] M.T. Grisaru, W. Siegel and M. Rocek, Nucl. Phys. **B159** (1979) 429.
- [80] Z. Bern, J. J. Carrasco, and H. Johansson, *Phys. Rev. D* **78**, 0805011 (2008) [arXiv:0805.3993 [hep-ph]].
- [81] H. Kawai, D. C. Lewellen, and S. H. H. Tye, *Nucl. Phys. B* **269**, 1 (1986).
-

-
- [82] R. Britto, F. Cachazo, and B. Feng, *Nucl. Phys. B* **715**, 499 (2005) [hep-th/0412308].
- [83] R. Britto, F. Cachazo, B. Feng, E. Witten, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 181602 (2005) [hep-th/0501052].
- [84] N. Arkani-Hamed, F. Cachazo, and J. Kaplan, *JHEP* **1009**, 016 (2010) [arXiv:0808.1446 [hep-th]].
- [85] J. L. Díaz-Cruz, John Ellis, Keith A. Olive, Yudi Santoso, *JHEP* **0705**, 003, 2007, [arXiv:hep-ph/0701229v1].
- [86] S. F. Novaes and, D. Spehler, *Nucl. Phys. B* **371** (1992) 618-636;
Luis A. Anchordoqui, Ignatios Antoniadis, De-Chang Dai, Wan-Zhe Feng, Haim Goldberg, Xing Huang, Dieter Lust, Dejan Stojkovic, Tomasz R. Taylor, *Phys. Rev. D* **90**, 066013 (2014), [arXiv:1407.8120 [hep-ph]].
- [87] T. Bhattacharya, P. Roy, *Nuclear Physics B* **328**, 469-480, 1989.
- [88] T. Bhattacharya, P. Roy, *Nuclear Physics B* **328**, 481-498, 1989.
- [89] Johan Alwall, Michel Herquet, Fabio Maltoni, Olivier Mattelaer, Tim Stelzer, *High Energ. Phys.* (2011) 2011: **128**, [arXiv:1106.0522v1 [hep-ph]].
- [90] J. Lorenzo Díaz-Cruz, Bryan O. Larios, O. Meza-Aldama, *J. Phys. Conf. Ser.* **761** (2016) no.1, 012012, [arXiv:1608.04129 [hep-ph]].
- [91] J. Lorenzo Díaz-Cruz, Bryan O. Larios, O. Meza-Aldama and, J. Reyes, *Rev. Mex. Fis. E* **61(2)** (2015) 104. English version: [arXiv:1511.07477 [physics.gen-ph]].
- [92] R. Boels, *JHEP* **1001** 010 (2010), [arXiv:0908.0738 [hep-th]].
- [93] C. Schwinn and S. Weinzierl, *JHEP* **0704** (2007) 072, [arXiv:hep-ph/0703021 [hep-ph]].
- [94] J. Kuczmarski, [arXiv:1406.5612 [hep-ph]].
- [95] W. Rarita and J. Schwinger, *Phys. Rev.* **60** (1941) 60.
- [96] P. R. Auvil and J. J. Brehm, *Phys. Rev.* 145 (1966) **1152**.
- [97] S. Dittmaier, *Phys. Rev. D* **59** 016007 (1998), [hep-ph/9805445].
- [98] Bryan O. Larios, O. Aldana Meza, work in progress.
- [99] J. Ellis, , K. A. Olive, Y. Santoso, V. C. Spanos, *Phys. Lett. B* **588** (2004), [arXiv:hep-ph/0312262v4].
- [100] K. Mawatari, B. Oexl, *Eur.Phys.J.* **C74** (2014) no.6, 2909, [arXiv:1402.3223 [hep-ph]].
- [101] F. Coradeschi, P. Lodone, *Phys. Rev. D* **87**, 074026 (2013), [arXiv:1211.1880v3 [hep-ph]].
-

- [102] Jonathan L. Feng, Shufang Su, and Fumihiro Takayama, *Phys. Rev. D* **70**, 063514, [arXiv:hep-ph/0404198v2].
- [103] Jonathan L. Feng, Shufang Su, and Fumihiro Takayama, *Phys. Rev. D* **70**, 063514, [arXiv:hep-ph/0404198v2].
- [104] Nima Arkani-Hamed, Tzu-Chen Huang and Yu-tin Huang, [arXiv:1709.04891 [hep-th]].
- [105] H. J. He, Y. P. Kuang and C.-P. Yuan, *Phys. Rev. D* **51**, 6463 (1995) doi:10.1103/PhysRevD.51.6463 [hep-ph/9410400].
- [106] K. Kohri and Y. Santoso, *Phys. Rev. D* **79**, 043514 (2009) [arXiv:0811.1119 [hep-ph]].