BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LOS EFECTOS DEL APRENDIZAJE ACTIVO DE MATEMÁTICAS EN EL RAZONAMIENTO LÓGICO DE LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
LIC. JUVENTINO MARTÍNEZ BRET

DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV
CO-DIRECTOR DE TESIS
DR. HONORINA RUIZ ESTRADA

PUEBLA, PUE. JUNIO 2018

BUAP

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el Lic.

JUVENTINO MARTÍNEZ BRET

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 31 de mayo de 2018, con la tesis titulada:

" LOS EFECTOS DEL APRENDIZAJE ACTIVO DE MATEMÁTICAS EN EL RAZONAMIENTO LÓGICO DE LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 05 de junio de 2018

DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV
COORDINADOR DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · 1578 · FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS - SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO

Ccp. Archivo.
DR. JSI / l'agm*

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico en el periodo de enero de 2016 a diciembre de 2017, para la realización de esta investigación.

CVU: 743656

Agradecimientos

Doy gracias a mis padres por apoyarme en todo momento, por haberme dado la oportunidad de tener una buena educación y sobre todo, por ser un excelente ejemplo de vida.

A mis hermanos por su apoyo en aquellos momentos de necesidad y por promover el desarrollo y la unión de nuestra familia. A Eduardo, por ser un ejemplo de perseverancia y constancia para alcanzar las metas fijadas.

Al doctor Josip Slisko Ignjatov y a la doctora Honorina Ruiz Estrada, director y codirectora de tesis, por el apoyo que me brindaron en este trabajo, por el respeto a mis sugerencias e ideas y la confianza que depositaron en mí.

Al maestro Baudelio López Haro, por su gran amistad, su valiosa confianza y todo el apoyo durante estos años.

A mi esposa Anaína y mis hijos por su paciencia, comprensión, y por aguantarme en los momentos difíciles. Por eso, este trabajo es también de ellos.

A todos, muchas gracias.

Índice

Índice de figuras

Índice de tablas

Resumen

El presente trabajo de tesis es sobre la implementación de una metodología de aprendizaje activo para el desarrollo del pensamiento lógico en matemáticas. Está basado en una intervención para alumnos de tercer año de bachillerato mediante actividades que promueven el desarrollo de esta habilidad. La selección y desarrollo de estas actividades se fundamentan en el proyecto creado por Shayer, Johonson, y Adhami (1998) denominado, Aceleración Cognitiva mediante la Educación Matemática (CAME, según sus siglas en inglés), cuyo objetivo original es fomentar el desarrollo cognitivo y promover habilidades de pensamiento formal. La esencia del proyecto CAME es promover el pensamiento y comprensión del estudiante a través de la solución de problemas que contienen conflicto cognitivo. Para establecer el nivel de logro de la intervención se utilizó como instrumento de medición, el Test de Razonamiento Lógico (TRL), preparado por Oliva y Acevedo (1995), para los grupos: experimental, de control y de referencia. Es importante destacar que este estudio contempla dos periodos. En el primero se familiarizó a los estudiantes en la resolución de problemas mediante el método de Polya. Algunos problemas, que se resuelven en esta etapa, son de carácter disciplinar, mientras que el segundo periodo consiste en resolver problemas con conflicto cognitivo. El resultado que reporta el TRL, una vez que se concluyó la intervención, es que el grupo experimental logró una ganancia de 2.59 en su nivel de pensamiento lógico promedio, ya que inició con un promedio de 3.29 (pretest) y concluyó con un promedio final de 5.88 (postest). El promedio del pretest del grupo de control fue de 3.47, mientras el promedio de su postest fue de 3.91.

Abstract

The present thesis work is about the implementation of an active-learning methodology for the development of logical thinking in mathematics. It is based on an intervention for third year high school students through activities that promote the development of this skill. The selection and development of these activities were based on a project created by Shayer, Johonson, and Adhami (1998) called "Cognitive Acceleration through Mathematics Education" (CAME, acronym in English), whose original goal was to foster cognitive development and promote formal thinking skills. The essence of the CAME project was to promote student thinking and understanding through the solution of problems that contain cognitive conflict. To establish the level of achievement of the intervention, the Test of Logical Thinking (TRL, acronym in Spanish), prepared by Oliva and Acevedo (1995), was used as a measuring instrument for the experimental, control and reference groups. It is important to emphasize that this study contemplates two periods. In the first one, students were familiarized with problem solving through the Polya method. Some problems, which are solved in this stage, were of a disciplinary nature, while the second period was dedicated to solving problems with cognitive conflict. The result reported by the TRL, once the intervention was concluded, is that the experimental group achieved a gain of 2.59 in their level of average logical thinking, since it started with an average of 3.29 (pretest) and concluded with a final average of 5.88 (postest). The average pretest of the control group was 3.47, and the average postest was 3.91.

Introducción

Este trabajo reporta los resultados que se obtuvieron después de aplicar una metodología de intervención a un grupo de 68 estudiantes de preparatoria de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP).

El objetivo fue determinar la influencia en el nivel de razonamiento lógico del grupo experimental una vez concluida la intervención. Para medir el nivel de logro, se utilizó el Test de Razonamiento Lógico TRL. El plan de estudios 06 del nivel medio superior de la BUAP establece la necesidad de propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los alumnos. Un alumno que cuente con estas habilidades puede argumentar y estructurar mejor sus ideas y razonamientos. Por ello, es fundamental que los alumnos razonen y reflexionen de forma matemática, y no simplemente responder ciertos tipos de problemas mediante la repetición de procedimientos establecidos.

Arteta (2012) menciona que una cantidad apreciable de alumnos concluyen etapas escolares con serias carencias en habilidades matemáticas que son necesarias en la siguiente etapa de formación escolar. De esta forma, los alumnos que alcanzan el nivel universitario se encuentran con carencias cognitivas difíciles de superar, porque se les pide una capacidad de razonamiento y de análisis que no han alcanzado.

Para esta investigación, entendemos como habilidades cognitivas al conjunto de operaciones mentales cuyo objetivo es lograr que el alumno integre la información adquirida en una estructura de conocimiento que tenga sentido para él. La observación, la clasificación, la representación y la evaluación son ejemplos de estas habilidades. Algunas investigaciones sobre el desarrollo de habilidades cognitivas, que sustentan este trabajo, reportan que una gran cantidad de estudiantes de enseñanza media (Adey & Shayer, 1994; Shemesh, Eckstein, y Lazarowitz, 1992), y estudiantes universitarios (Niaz, 1985; Reyes, 1987) aún no han desarrollado estas habilidades. En este contexto, el estudio realizado en los años 70 en el Chelsea College de Londres, el cual indicaba que muchos de los conceptos, incluidos en los currículos de ciencias en el Reino Unido, exigían más de lo que la capacidad intelectual de los alumnos podía realmente ofrecer. Shayer y Adey (1981), siendo profesores de Chelsea College, diseñaron un programa de aceleración cognitiva (AC) para estudiantes. La aplicación de este programa reporta el desarrollo de habilidades de razonamiento en los estudiantes que participaron.

La metodología de intervención que se aplicó al grupo experimental de esta investigación fue inspirada en el proyecto Aceleración Cognitiva mediante la Educación Matemática o Proyecto CAME (por sus siglas en inglés) que surge en 1993. La esencia de este proyecto es el diseño y selección de las tareas para estimular el desarrollo cognitivo de los alumnos, mediante la solución de problemas que contienen conflicto cognitivo. Por las características del grupo experimental y del proyecto CAME, que se describen más adelante, se seleccionaron 15 problemas para trabajar, uno por sesión, tomando de 30 a 50 minutos de una clase de matemáticas. Los problemas seleccionados presentan situaciones no rutinarias que requieren de conocimientos y habilidades lógico-matemáticas para su solución.

Al inicio de este estudio se aplicó el TRL al grupo experimental, al grupo de control y al grupo de referencia. Los resultados de esta aplicación mostraron un nivel de razonamiento muy similar en los grupos, a pesar de que el grupo de referencia ya había egresado de la preparatoria, es decir, pertenecían a un ciclo escolar superior. Una vez concluido el periodo de intervención se aplicó nuevamente el TRL, esta aplicación determinó que el grupo experimental logró una ganancia de 2.59 en su nivel de pensamiento lógico promedio, pues inició con un promedio de 3.29 y se alcanzó con un promedio final de 5.88.

La tesis se ha dividido en cuatro capítulos. El primero presenta el marco teórico, donde se mencionan las investigaciones que dieron origen a la aceleración cognitiva como estrategia metodológica que ha tenido resultados destacados para el desarrollo de las habilidades del pensamiento. También se menciona la importancia que tiene la resolución de problemas en el currículo escolar.

El segundo capítulo presenta la teoría metodológica que se aplicó en este trabajo; se hace una descripción minuciosa sobre las tres etapas que contempla cada sesión de trabajo con el grupo experimental.

En el tercer capítulo se hace el análisis inicial y final de los resultados del TRL, comparando los grupos implicados y un análisis comparativo entre las categorías que se definieron para los grupos de control y experimental. Asimismo, se presenta el análisis de dos problemas que presentaron resultados interesantes por parte de los alumnos en el grupo experimental. Finalmente, el cuarto capítulo presenta las conclusiones de esta investigación.

Planteamiento del problema

A lo largo de la última década, por experiencia personal en la actividad docente del autor del presente trabajo, se han podido observar las dificultades que manifiestan los alumnos del nivel medio superior para entender conceptos, definiciones y procedimientos de matemáticas. Esta experiencia ha obligado a reflexionar sobre la problemática. El trabajo que se desarrolla en las siguientes páginas presenta una propuesta que surge como producto de estas consideraciones.

En un contexto más particular, durante las clases de matemáticas de nivel bachillerato, se han observado las limitaciones importantes que muestran muchos alumnos en las actividades matemáticas, sus formas de operar y sus recursos cognitivos a la hora de enfrentarse a la solución de problemas matemáticos. En varios casos, estas limitaciones no están asociadas a carencias o deficiencias intrínsecas puesto que muchos alumnos revelan sus capacidades para realizar procedimientos matemáticos, tal como los procedimientos aritméticos, operaciones algebraicas y situaciones geométricas. Más bien, estas limitaciones corresponden a fallas relacionadas con no saber qué hacer para resolver un problema, falta de planeación al intentar abordarlo, no sentirse capaces de resolverlo o simplemente no disponer de alguna estrategia adecuada para hallar la solución, ahí donde la matemática involucrada no se manifiesta de manera explícita. Esto supone que, aun disponiendo de ciertas herramientas y medios matemáticos, algunos estudiantes no tienen resultados favorables, porque cuando intentan resolver un problema que describe una situación real o hipotética, ellos no identifican las variables que intervienen en el problema y muchas veces no comprenden los datos relevantes o requerimientos del mismo.

Con la metodología establecida en el proyecto CAME y la selección de problemas con un conflicto cognitivo, se logró una dinámica de aprendizaje activo de las matemáticas durante la intervención, mediante el desarrollo de habilidades que hacen evidente la matemática involucrada. El trabajo cotidiano con este tipo de actividades incrementó la capacidad de razonamiento lógico de los alumnos del grupo experimental.

La pregunta de investigación que se planteó en este trabajo de tesis fue**:**

¿Cómo influye el aprendizaje activo de las matemáticas en el desarrollo del razonamiento lógico?

La investigación tuvo los siguientes objetivos:

Objetivo general

- Determinar los efectos del aprendizaje activo de las matemáticas en el desarrollo del razonamiento lógico en la población de estudio.

Objetivo particular

- Desarrollar en los alumnos hábitos efectivos para el aprendizaje de las matemáticas que requiere el razonamiento lógico.

Capítulo 1.

Marco teórico y revisión de literatura

1.1 Resolución de problemas en el currículo escolar

Varios trabajos (Kilpatrick y Wiszurp, 1969, 1972; Krutetskii, 1976) pusieron de manifiesto el enorme interés por incorporar la resolución de problemas en el currículo de las matemáticas escolares, además de un esfuerzo por sustentar las innovaciones curriculares sobre trabajos de investigación educativa y los considerables avances que se habían realizado. He aquí algunas referencias que han sido documentos clave de esta situación:

- El Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas Norteamericano (NCTM, por sus siglas en inglés) publica "An Agenda for Action" en 1980, donde establece que "la resolución de problemas debe ser el eje de la matemática escolar, el principal objetivo de la enseñanza de las matemáticas" (NCTM, 1980).

- La Asociación de Profesores de Matemáticas inglesa (ATM, por sus siglas en inglés), en el párrafo 249 del informe Cockcroft, establece que la habilidad para resolver problemas es el núcleo central de las matemáticas, y elabora un escueto documento en el que se afirma taxativamente que la resolución de problemas podría y debería reemplazar a la aritmética rutinaria como el tema principal en las clases de la educación primaria.
- Los Estándares Curriculares del NCTM (1989, 2000) incluyen la resolución de problemas como uno de los estándares que hay que desarrollar en el currículum escolar de matemáticas.

En los programas de la Educación Secundaria Obligatoria inglesa (ESO) en el año 2000 se establece en el Real Decreto (RD) 3473/2000, para la modificación de las Enseñanzas Mínimas de la ESO que "la resolución de problemas debe contemplarse como una práctica habitual, que no puede tratarse de forma aislada, sino integrada en todas y cada una de las facetas que conforman el proceso de enseñanza y aprendizaje" (RD, p. 1843).

El objetivo de este RD establece la importancia de resolver problemas matemáticos utilizando diferentes estrategias, procedimientos y recursos, desde la intuición hasta los algoritmos.

Actualmente, la modificación de las enseñanzas mínimas realizada en los programas de la ESO (2007) orientada al desarrollo de competencias, contempla la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas y la aplicación de estrategias de resolución de problemas. En todos los cursos se ha incluido un bloque de contenidos comunes que constituye el eje transversal vertebrador de los conocimientos matemáticos que abarca. Este bloque hace referencia expresa, entre otros, a un tema básico del currículo: la resolución de problemas, con el que se pretende:

- Utilización de estrategias y técnicas simples en la resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más simple, y comprobación de la solución obtenida.
- Expresión verbal del procedimiento que se ha seguido en la resolución de problemas.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas.
- Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas.

Con lo anterior, la presencia e importancia de la resolución de problemas ha sido creciente en las propuestas curriculares, lo que hace importante, desarrollar investigación en esta actividad matemática.

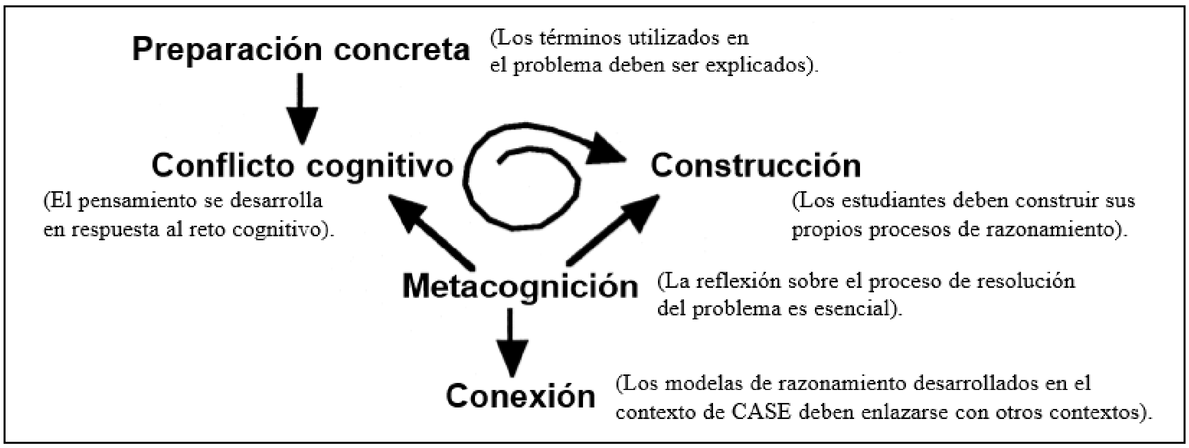
1.2 Aceleración Cognitiva, proyecto CASE

La “aceleración cognitiva” se entiende como la aceleración del proceso de desarrollo “natural” de los estudiantes a través de los distintos estadios de capacidad de pensamiento, hacia el tipo de pensamiento abstracto, lógico y multivariable que Piaget describe como “operaciones formales”. El pensamiento operacional formal está caracterizado por la habilidad de tener en mente un número de variables al mismo tiempo, tales como, ser capaz de sopesar las dos partes de un argumento, considerar de forma imparcial las ventajas y los inconvenientes de una acción determinada, o ser capaz de ver tanto los efectos por separado como los efectos en conjunto de una serie de variables (Shayer y Adey, 1984).

Aceleración Cognitiva mediante la Educación Científica CASE (de acuerdo a sus siglas en inglés), es un método de enseñanza innovador, elaborado a partir de la investigación sobre el desarrollo cognitivo, basado principalmente en la obra de Piaget y en los principios fundamentales de las teorías de aprendizaje de Vygotsky. Los orígenes de CASE se remontan al estudio realizado en los años 70 en el Chelsea College de Londres, el cual indicaba que muchos de los conceptos incluidos en los currículos de ciencias en el Reino Unido exigían más de lo que la capacidad intelectual de los alumnos podía realmente ofrecer. En Estados Unidos, el problema se evidenció al constatar que muchos estudiantes universitarios de primer año tenían escasos conocimientos de los conceptos científicos fundamentales, los cuales se suponían como parte curricular de la enseñanza secundaria (Renner, 1976). Según este autor, en una buena parte de países del mundo, la dificultad de los conceptos científicos tendía a ser encubierta por el aprendizaje memorístico de las definiciones, con lo que se evitaba el problema de tener que enseñar para una auténtica comprensión de los mismos.

El equipo del profesor Michael Shayer adoptó un enfoque científico sobre el problema de la dificultad en el aprendizaje de las ciencias. Se necesitaba una descripción exacta del perfil intelectual de la población escolar, y un modo de medir y describir el nivel de dificultad de los conceptos científicos. La teoría del desarrollo cognitivo, elaborada por el psicólogo suizo Jean Piaget, proporcionó exactamente la descripción que se necesitada. Tomaron como base las descripciones sobre los tipos de pensamiento en los diferentes estadios para, desarrollar un instrumento para analizar los materiales curriculares en función de las exigencias cognitivas que en ellos se planteaban y elaborar pruebas de desarrollo cognitivo para aplicarlas a gran escala (Shayer, 1978). Los resultados de esta primera etapa mostraron una discrepancia significativa entre las exigencias del currículo y el tipo de pensamiento de la población. En principio, dicha discrepancia tendría dos posibles soluciones: elaborar un currículo de ciencias más fácil o aumentar la capacidad intelectual de los estudiantes. La primera sería relativamente sencilla, aunque generaría inevitables dificultades académicas y políticas. En la segunda, si bien la perspectiva de aumentar la destreza del pensamiento de los estudiantes es desafiante, éste era exactamente el objetivo del proyecto CASE, que inició en 1982 (Shayer y Adey, 1984).

Una revisión bibliográfica realizada por Philip Adey hizo ver que las intervenciones para la aceleración cognitiva habían tenido poco éxito en esa época. No obstante, descubrió que cada estudio precedente había adoptado un enfoque didáctico a corto plazo y directo, como si se pudiera cambiar la capacidad mental para procesar la información aprendiendo nuevas reglas en un corto tiempo. Consideró que estos enfoques eran incorrectos ya que la capacidad de procesamiento de la mente crece paulatinamente en respuesta a la demanda que se le haga al enfrentarse a algún problema que demande cierta capacidad cognitiva. Esta consideración fue la base para conformar los cinco pilares de la teoría de CASE: el conflicto cognitivo, la construcción, la preparación concreta, la metacognición y la conexión. Posteriormente estos pilares fueron denominados “los cinco pilares de la sabiduría de CASE”, en el siguiente esquema podemos ver la relación entre ellos.



Esquema 1. Los cinco pilares de la sabiduría de CASE

1.3 Aceleración cognitiva mediante la educación matemática

Los programas de Aceleración Cognitiva (AC) se han utilizado con éxito durante los últimos 30 años en el Reino Unido y en otros países para promover en los escolares el desarrollo de las habilidades de razonamiento formal descritas por Piaget. Este tipo de programas ha tenido un impacto favorable en las habilidades de razonamiento de los estudiantes que pertenecen al grupo experimental ya que de manera general obtiene mejores indicadores de su nivel de razonamiento lógico en comparación de los grupos control, no solo en ciencias, sino que también en pruebas nacionales de matemáticas e inglés (Tornero, 2014). Debido a que la aceleración cognitiva produjo resultados prometedores en ciencias, se empezó a diseñar programas AC para otras materias escolares (Adhami, Johnson, & Shayer, 1998; Adhami, Shayer, & Twiss, 2005; Shayer & Adhami, 2003).

En 1993 surgió el proyecto Aceleración Cognitiva mediante la Educación Matemática o Proyecto CAME (por sus siglas en inglés), "cuya intención original fue fomentar el desarrollo cognitivo, es decir, promover el uso de habilidades de razonamiento formal para lograr una comprensión profunda en estudiantes, es decir, incentivar a los estudiantes de 11 a 14 años a pensar de forma matemática" (Shayer, Johonson, y Adhami, 1998). La importancia de diseñar un proyecto con este objetivo fue similar al objetivo de CASE en su etapa inicial; la idea es que una gran parte del currículo escolar de matemáticas requiere el uso de habilidades de razonamiento formal para lograr una comprensión profunda, mientras que la evidencia mostraba que solo el 20% ó 30% de los estudiantes de 14 años ya había desarrollado estas habilidades de razonamiento (Shayer & Adhami, 2007).

Para lograr estos objetivos, el proyecto CAME propone que los estudiantes deben resolver 30 actividades diseñadas para ser ejecutadas en un periodo de dos años. Cada actividad requiere que los estudiantes apliquen cierta creatividad en planteamientos conceptuales matemáticos, en lugar de utilizar solo los procedimientos y algoritmos que usarían en las clases de matemáticas "normales". Es decir, en lugar de promover un método mecánico o basado en la memoria de resolución de problemas, CAME pretende desarrollar las habilidades de razonamiento lógico mediante el proceso de reconstruir los conceptos matemáticos subyacentes y sus razonamientos (Adhami et al., 1998).

El esquema metodológico del proyecto CAME descansa en la resolución de problemas que contienen un determinado conflicto cognitivo. La selección de estas actividades está determinada por los pilares de proyecto CASE y mediante la intervención estratégica del profesor se pretende un aprendizaje activo-colaborativo de las matemáticas. A continuación, se hace una descripción de cada pilar:

1. **Conflicto cognitivo.** Surge cuando a un estudiante se le plantea un problema que no es capaz de resolver fácilmente de forma autónoma, pero que, con la ayuda cuidadosamente estructurada de un adulto o de un par más capacitado, sí puede resolver o, al menos, puede entender la naturaleza del problema para luego llegar a la solución.

   El principio del conflicto cognitivo también está presente en el concepto de "Zona de Desarrollo Próximo" (ZDP) definido por el psicólogo ruso Lev Vygotsky (1978). La ZPD es la diferencia entre lo que un estudiante es capaz de hacer sin ayuda y de lo que es capaz de hacer con la ayuda de un adulto. “El único buen aprendizaje es aquel que fomenta el desarrollo” afirma Vygotsky. En otras palabras, realizar tareas que están dentro de la capacidad del estudiante, no provocan el estímulo del crecimiento cognitivo.

2. **La idea de construcción.** Hace hincapié en la construcción por parte del propio estudiante de las formas superiores de pensamiento. El profesor puede proporcionar las experiencias apropiadas y dirigir la clase mediante las preguntas pertinentes, pero no puede introducir la capacidad de pensamiento lógico superior directamente en la mente del estudiante. Éste ha de construirla por sí mismo, en un proceso que es necesariamente lento.

La actividad en la zona de construcción es la actividad mental que es especulativa y en colaboración, es un lugar mágico donde las mentes se encuentran, donde las cosas no son las mismas para todos los que las ven, donde los significados son fluidos y donde la interpretación de una persona puede tomar precedencia a la de otro (Wrigley, 2007, P. 125)

3. **Metacognición.** Metacognición significa sencillamente “pensar en nuestro propio pensamiento”, aunque al ser una noción extremadamente actual en la psicología cognitiva, el término se ha empleado de diversas formas (Brown, 1987). Podemos ayudarnos a desarrollar el pensamiento lógico superior sólo si controlamos nuestro pensamiento, es decir, si somos conscientes de nosotros mismos como pensadores. En CAME, se anima a los estudiantes a que se tomen el tiempo necesario para reflexionar sobre cómo han resuelto un problema, qué les ha resultado difícil, qué tipo de razonamiento han hecho, cómo y qué tipo de ayuda solicitaron. Esto lleva mucho tiempo y es bastante complicado, además, al principio, tanto los docentes como los alumnos necesitan mucha ayuda y ánimo para ser más metacognitivos en sus enfoques.

Existen dos pilares más en esta teoría. Ambos dan soporte real a los pilares descritos previamente.

4. **La idea de preparación concreta**. No se puede plantear un problema difícil a los estudiantes y esperar que el conflicto cognitivo haga las veces de la aceleración cognitiva. Debe haber una fase de preparación en la que se introduzca el lenguaje del problema, al

igual que los instrumentos que se vayan a utilizar y el contexto en el que se plantee. El objetivo es asegurarse de que las dificultades sean únicamente de tipo intelectual, y de que, en la medida de lo posible, no estén relacionadas con el lenguaje o el contexto.

5. **Conexión. C**onsiste en enlazar los métodos de razonamiento adquiridos dentro del contexto determinado de la actividad con otros contextos del campo de las ciencias, otras matemáticas u otras partes del currículo, y con experiencias de la vida real. Para que el razonamiento realizado en un contexto determinado se emplee de forma genérica, éste debe ser identificado y se ha de enseñar al estudiante a utilizarlo como herramienta de pensamiento general.

1.4 Las sesiones de trabajo CAME

Las sesiones de CAME se basan en actividades colaborativas que utilizan el diálogo para estimular y promover un razonamiento lógico más complejo. Cada actividad CAME dura entre 40 y 80 minutos, y el profesor actúa como mediador para la actividad grupal y de la clase en general. En este sentido, a pesar de que cada actividad CAME utiliza conceptos matemáticos para promover las habilidades de razonamiento de los estudiantes, las sesiones de trabajo no tratan sobre ellos directamente, demostrando los conceptos, sino que se hace indirectamente, mediante el trabajo individual, grupal o de todo el curso. Por las características particulares de las actividades CAME, estas no pretenden reemplazar las clases regulares de la escuela, sino que complementarlas, ya que los estudiantes tienen la oportunidad de aprender e investigar al mismo tiempo. Dada la variedad de habilidades presente en cada curso, las actividades CAME pretenden adaptarse a los estudiantes sin importar su nivel de rendimiento. Es decir, permite desafiar las suposiciones actuales de los estudiantes y, por lo tanto, promueve su aprendizaje aun cuando tengan diferentes niveles de desarrollo.

En cuanto a la estructura de la sesión de trabajo, las actividades introducen primero un contexto familiar, con el fin de garantizar que todos los estudiantes cuenten con el conocimiento necesario para comprender y realizar las otras secciones de la clase. Luego los estudiantes trabajan con algunos de los problemas matemáticos que CAME ofrece. Los estudiantes deben acomodar sus patrones de razonamiento a un nivel superior para lograr resolver estos desafíos. Esto puede no darse de forma espontánea, por lo que los profesores de CAME deberán guiar a los estudiantes por los problemas mediante preguntas que los animen a resolverlos (Adhami et al., 1998). Las actividades que se desarrollaron en cada lección fueron conocidas como lecciones de "matemáticas del pensamiento".

Capítulo 2.

Metodología

En este capítulo, se presenta la descripción de la metodología que se aplicó en la investigación, quedó dividido en tres apartados. En primer lugar, se mencionan las características generales de la población de estudio que a su vez se divide en grupo control y el grupo experimental. En segundo lugar, reproduciendo la metodología del proyecto CAME, en segundo lugar se hace una descripción minuciosa sobre las tres etapas que contempla las sesiones de trabajo con el grupo experimental, destacando el papel que juega el docente en cada etapa. En la tercera parte, se presenta los problemas que se trabajaron en las sesiones. Finalmente, se establecen los momentos en que se realizaron las mediciones que nos permitieron detectar el nivel de desarrollo del pensamiento lógico del grupo experimental.

2.1 La población de estudio

La población que participó en este estudio pertenece a la preparatoria regional "Enrique Cabrera Barroso", y está ubicada a 70 km al sur de la ciudad de Puebla, en el municipio de Tecamachalco. Esta población tiene un rango de edad de 16 a 17 años y está constituida en su mayoría por hijos de campesinos, hijos de comerciantes de la central de abastos y otros comercios cercanos; una minoría son hijos de profesionistas y docentes.

El grupo experimental y el grupo de control se conformaron de 68 estudiantes (en cada grupo), pertenecientes al ciclo escolar 2016-2017. También se consideró un tercer grupo al que llamamos "grupo de referencia", con el mismo número de estudiantes que los otros dos grupos; la característica principal de este grupo es que finalizaron el tercer año de preparatoria en el ciclo escolar 2015-2016.

Las sesiones de trabajo en el grupo experimental tuvieron como objetivo el desarrollo de habilidades de pensamiento lógico en la resolución de problemas no rutinarios de matemáticas, de acuerdo con la estrategia de intervención que describen el proyecto CAME. Considerando que se tuvo un ciclo escolar para esta investigación, de determinó trabajar 15 sesiones de intervención tomando de 30 a 50 minutos de una clase. La participación activa de los estudiantes en el desarrollo de las sesiones de intervención les proporcionó 10% de la calificación del parcial correspondiente, dentro de un criterio de evaluación, incluido en el programa escolar, denominado “actividad propuesta por el docente”.

En el grupo de control se trabajó de manera tradicional con los temas que marca el programa de matemáticas III (Plan 06 con enfoque por competencias) cuya Unidad de Aprendizaje Curricular es introducción al cálculo, cálculo diferencial y cálculo integral con cuestiones teóricas y cuestiones prácticas, donde el docente expone cada uno de los temas apoyándose con ejercicios prácticos, que desarrolla extensamente en el pizarrón; antes de terminar la clase se les deja resolver ejercicios similares para corroborar que el tema ha quedado claro, el docente resuelve en el pizarrón dudas sobre el procedimiento y solución plasmando en el pizarrón.

2.2 Las sesiones de intervención

Las sesiones de intervención en el grupo experimental se realizan de acuerdo al formato que se describe el proyecto CAME, el cual contempla tres etapas.

En la primera etapa se presenta el problema a resolver. El profesor pide a los estudiantes que expliquen lo que piensan sobre este problema en un tiempo no mayor a diez minutos. El objetivo de esta parte es ayudarles a crear una comprensión compartida sobre la dificultad que se les presenta y disminuir obstáculos de vocabulario, escalas o instrumentos de medición. Esta etapa se llama *preparación concreta***,** donde la intención es comenzar el proceso que permita establecer una ZDP compartida. Luego, a los alumnos, en parejas o equipos pequeños, se les da de 10 a 15 minutos para trabajar juntos en la solución del problema en la hoja de trabajo. Se les advierte que posteriormente compartirán sus ideas o estrategias de solución al resto de la clase.

En la segunda etapa, se lleva a cabo el *aprendizaje colaborativo* involucrado en el trabajo en grupos pequeños y la discusión. Aquí se les invita a que consideren la metodología de Polya para resolver problemas. En el grupo experimental ya se ha explicado mediante ejemplos en que consiste este método. En esta parte, el docente no interrumpe el trabajo de los equipos. En lugar de eso, escucha, observar y anota hasta dónde ha llegado cada grupo y, dependiendo de los diferentes aspectos del trabajo, sobre las ideas matemáticas o los razonamientos subyacentes que encuentra, hace un plan de qué grupos, y en qué orden, solicitará contribuir en la tercera etapa. De vez en cuando, puede formular una pregunta estratégica, si ve que un grupo está estancado. El papel del profesor será proporcionar las experiencias adecuadas y dirigir la clase mediante las preguntas pertinentes, de acuerdo al diseño y contexto de cada actividad. Este esquema de trabajo fomenta una actitud activa y nuevos hábitos para el desarrollo del pensamiento en los estudiantes. Se espera que, de forma gradual, cada estudiante gane autonomía, como resultado de un proceso de autorregulación en su aprendizaje.

Cuando el profesor juzga que ya se ha generado una variedad suficiente de ideas, inicia la tercera etapa que consiste en *una discusión en clase* por segunda vez. Cuando se realiza bien, se maximiza el alcance para una ZDP común. Los equipos informan sobre sus ideas. El profesor dirige la discusión, anima a realizar preguntas y motiva la reflexión de sus razonamientos, pero no interviene de forma directa en la solución del problema. Durante esta etapa, cada alumno tiene la oportunidad de ampliar su comprensión con ideas de todos los grupos, mientras que el papel del docente no es de "andamiaje", sino el arte más sutil de manejar las interacciones entre pares de los estudiantes.

2.3 Los problemas seleccionados para las sesiones de intervención

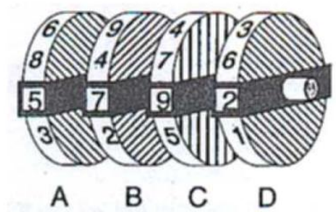
Los problemas seleccionados son situaciones no rutinarias que requieren de conocimientos y habilidades lógico-matemáticas para su solución. Se procuró, en medida de lo posible, que el lenguaje que emplea cada problema sea accesible a los estudiantes, así como la descripción de los contextos implicados. Estos problemas, de acuerdo con la metodología de CAME, provocan un conflicto cognitivo en el estudiante, de tal forma que sea necesario hacer un esfuerzo mental considerable. En ocasiones, van a requerir apoyo o alguna orientación para generar ideas que les lleven a la estrategia de solución.

A continuación, se muestran los problemas que se trabajaron en las sesiones de intervención con el grupo experimental. También se agrega, en la mayoría de los casos, la dirección electrónica donde se encuentra publicado cada problema.

1. Estaban reunidas Ana, Betty y Carla. Ana le dice a su amiga de profesión maestra que la otra amiga es médico. Betty le dice a la médico, que estaba de vacaciones. Si entre ellas una es maestra, otra es médico y una abogada ¿Cuál es la profesión de cada una?

   https://mdmhn.files.wordpress.com/2015/10/ejercicio-razonamiento-10th.pdf

2. Juanito fue a la feria y encontró el siguiente juego:



Cada disco tiene los dígitos del 1 al 9. Para jugar, se debe escoger un disco y girarlo, si el número que sale es mayor que el que está (5792), se gana. ¿Con cuál disco Juanito tiene más oportunidades de ganar?

https://es.scribd.com/doc/94857378/Archivo-1-Razonamiento-Logico-Matematico

3. Cinco mujeres, al ser interrogadas por un delito que cometió una de ellas, manifestaron lo siguiente:
   - → Bertha: Fue Elsa
   - → Ana: Fue Bertha
   - → Elsa: Bertha miente
   - → María: Yo no fui
   - → Karla: Yo fui

   Si solo una de ellas dice la verdad, ¿quién cometió el delito?

   Problema tomado de http://razonamiento-logico-problemas.blogspot.mx/2014/10/ejercicios-de-razonamiento-logico.html
4. La foto de tu jugador favorito cuesta $50.00 pesos más que el marco que la encuadra. Si las dos cosas juntas cuestan $200.00 pesos. ¿Cuánto cuesta la foto y el marco?

   https://brainly.lat/tarea/301314
5. Una receta exige 4 litros de agua: si tuvieras una jarra de 4 litros no habría problema, pero no posees más que dos jarras sin graduar, una de 5 litros y otra de 3. ¿Es posible medir los litros que necesitamos?

   Problema extraído de http://razonamiento-logico-problemas.blogspot.mx/2013/06/

6. Suponga, que hay un virus informático que luego de introducirse por un archivo, daña el doble de archivos cada minuto. Es decir, en el primer minuto daña un archivo; en el segundo a dos; en el tercero a cuatro, etcétera. El virus se introdujo en una computadora a las 12 pm y a las 2 pm ya había destruido todos los archivos. ¿A qué hora había destruido la mitad de los archivos?

   Problema extraído de http://razonamiento-logico-problemas.blogspot.mx/2013/06/prueba-de-razonamiento-logico.html
7. Un cierto mes tiene cinco jueves, cinco viernes y cinco sábados. ¿Qué día de la semana es el 25 del siguiente mes?

   Problema extraído de http://razonamiento-logico-problemas.blogspot.mx/2014/10/ejercicios-de-razonamiento-logico.html

8. Un tanque de reserva de agua utiliza una bomba neumática para surtirse de un río cercano.

Todos los días la bomba sube el nivel del agua 2m; por la noche, el agua se filtra de regreso al río y el nivel baja 50cm. El nivel máximo alcanzado por el tanque durante el quinto día de llenado es:

Problema extraído de http://razonamiento-logico-problemas.blogspot.mx/2014/10/ejercicios-de-razonamiento-logico.html

9. ¿Es posible medir exactamente 11 minutos con dos relojes de arena, uno de 8 minutos y otro de 5 minutos?

   http://acertijos.elhuevodechocolate.com/solucion/rejna234.html

10. ¿Cuál es el ángulo agudo formado por el horario y el minutero se un reloj marca las 18:20?

    Problema extraído del libro: Geómetra y Trigonometría. CONAMAT

11. Un alumno llega a su examen de matemáticas por la mañana. Cuando éste está llenando sus datos en la hoja de respuestas nota que ha olvidado su número de matrícula, un dato necesario para que el examen pueda ser calificado. Sin embargo, el joven recuerda cinco pistas para hallar su número de matrícula de cinco dígitos, estas son:
    1. El quinto dígito de la matrícula más el tercero suman 14
    2. El cuarto dígito es uno más que el segundo dígito
    3. El primer dígito es uno menos que dos veces el segundo dígito
    4. El segundo dígito sumado al tercero es igual 10
    5. La suma de todos los dígitos es 30

    ¿Cuál es su número de matrícula?

12. Tres hermanos se reparten la herencia de su padre que está formada por 35 caballos y en el testamento el padre dejó escrito que el mayor se quedara con la mitad de la herencia, el mediano con la tercera parte y el más pequeño con la novena parte. Como las divisiones no eran exactas estos no se ponían de acuerdo, por lo que decidieron consultar con un viejo matemático que les propuso lo siguiente:

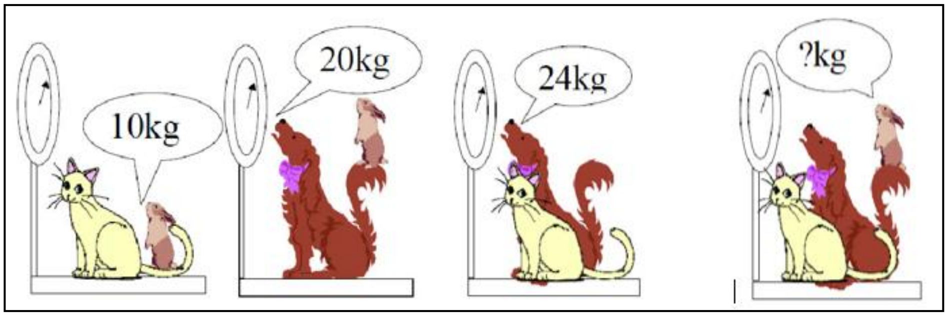
    Puesto que 35 caballos no se pueden dividir exactamente por la mitad, ni por la tercera parte ni por la novena, yo os regalo el mío, ahora tenéis 36 caballos por lo que los tres saldréis ganando. Tú por ser el mayor te llevarás la mitad de 36, es decir 18 caballos. Tú por ser el mediano la tercera parte, 12 caballos. Y tú por ser el pequeño según los deseos de tu padre, la novena parte, 4 caballos.

    Ahora ya tenéis los tres vuestra herencia, y como 18+12+4=34 ahora sobran dos caballos, por lo que yo recupero el mío y me quedo también con el otro por resolver vuestro problema. ¿Cómo es esto posible?

    http://www.juegosdelogica.com/neuronas/solacert/solucion_acertijo_14.htm

13. En el cajón de tu armario tienes seis calcetines negros y seis calcetines azules. Si no hay luz y quieres el mínimo número de calcetines para asegurarte que obtendrás un par del mismo color, ¿Cuántos calcetines deberás sacar del cajón?

    http://mejoratusmatematicas.blogspot.mx/2009/03/problema-39-uno-de-calcetines.html



14. Con la información que proporciona la báscula en la figura anterior, el peso de los tres animales juntos es:
http://acertijosymascosas.com/acertijo-matematico-p-n/
15. El jefe de una tribu tiene 20 kilos maíz para repartir entre sus 20 vecinos y decide hacerlo de la siguiente manera:
A cada uno de los niños le dará 3 kilos de maíz.
A cada una de las mujeres le dará dos kilos de maíz.
A cada uno de los hombres le dará medio kilo de maíz.
Sabiendo que al menos hay un niño, una mujer y un hombre y que repartió todo el maíz sin que sobrara ni faltara nada, la pregunta es: ¿cuántos niños, mujeres y hombres hay?

https://www.planetacurioso.com/2016/07/26/acertijo-matematico-el-maiz/#.WfzcgGjWwdU
16. Tenemos una garrafa con 10 litros de agua y otra con 10 litros de vino, se echan tres litros de agua en la garrafa de vino y se mezcla, después se vuelven a echar tres litros de la mezcla en la garrafa del agua.
¿Qué habrá después del cambio, más agua en la garrafa de vino o más vino en la garrafa del agua?
http://www.abc.es/juegos-logica/20141215/abci-solucion-juego-logica-garrafa-201412101858.html

2.4 El instrumento de medición

El instrumento que se aplicó inicialmente a los tres grupos que participaron en esta investigación, para tener una medida del nivel de pensamiento lógico inicial, fue el "Test de Razonamiento Lógico" TRL, que es una adaptación del "Test of Logical Thinking" (TOLT), diseñado por Tobin y Capie (1981). Dicho test respeta fielmente las características del TOLT, que "ha sido usado en numerosos estudios con alumnos de secundaria, preuniversitarios y universitarios en varios países" (Tobin, 1988).

Características principales del TRL

Es un cuestionario de diez tareas, de papel y lápiz, distribuidas de la siguiente manera:

- Dos tareas de proporcionalidad (PP)
- Dos tareas de control de variables (CV)
- Dos tareas de probabilidad (PB)
- Dos tareas de correlación (CR)
- Dos tareas de operaciones combinatorias (CB)

Las primeras ocho son de opción múltiple para seleccionar una respuesta y una explicación. Tanto en la respuesta como en las explicaciones sugeridas como posibles alternativas, corresponden a algunos de los errores sistemáticos más frecuentes en los que suele incurrirse en la resolución de este tipo de problemas. Las dos últimas tareas son de respuesta abierta y evalúan combinatoria y permutaciones.

Los alumnos disponen de 38 minutos para realizar esta prueba. Las primeras cuatro tareas son de cuatro minutos, las siguientes cuatro son de tres minutos, las últimas dos son de cinco minutos. La intención es que todos los ítems sean contestados.

De acuerdo con la literatura, “esta prueba permite valorar la habilidad de los sujetos en los cinco esquemas de razonamiento, y puede interpretarse en términos del pensamiento formal de la teoría de Piaget” (Oliva y Acevedo, 1995).

En esta investigación, el TRL se aplicó en dos ocasiones. La primera aplicación, tuvo el propósito de establecer una medida inicial del nivel de pensamiento lógico en el grupo experimental, el grupo de control y el grupo de referencia (recordemos que el grupo de referencia egresó en el siclo escolar previo, al inicio de la investigación). La segunda aplicación se realizó al concluir el trabajo de intervención, se aplicó a los grupos experimental y de control. El objetivo fue medir los progresos alcanzados en el nivel de razonamiento lógico de los estudiantes que participaron en la investigación. Este test “Permite valorar la capacidad de los estudiantes en el uso de esquemas formales que, en este caso, resultan básicos para el aprendizaje de las matemáticas” (Oliva y Acevedo, 1995).

Capítulo 3.

Análisis

3.1 Aplicación del TRL al grupo de referencia

Como se mencionó anteriormente, el grupo de referencia estuvo compuesto por 68 estudiantes del ciclo escolar 2015-2016 previo al inicio de este estudio. La aplicación del TRL se realizó cuando el grupo finalizó el tercer año de preparatoria (junio de 2017). Su rendimiento promedio en el TRL es de 3.84; esto significa que, en promedio, los estudiantes respondieron satisfactoriamente de tres a cuatro problemas de los diez que contiene el TRL.

GRUPO DE REFERENCIA

Número de aciertos	Número de alumnos
0	2
1	11
2	10
3	8
4	10
5	8
6	7
7	8
8	4
9	0
10	0

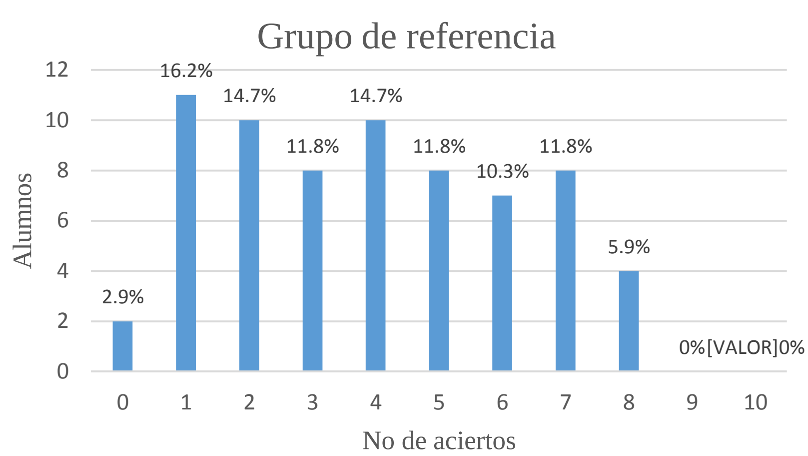


Tabla 1. Resultados de acuerdo con el número de alumnos en relación con el número de aciertos del TRL.

Figura 1. Distribución de resultados, número de alumnos en relación con el número de aciertos.

De los resultados que se muestran en la Tabla 1, se observa que, el 45.5 % de los estudiantes egresados de la preparatoria en el 2016 tuvieron un rendimiento por debajo del promedio, de acuerdo con el TRL.

Por otro lado, estudios como Villagrán 2002, señalan que los estudiantes que superan la puntuación de seis han resuelto correctamente más del 60% de las tareas del TRL, este autor considera que estos estudiantes logran llegar a un alto nivel de razonamiento formal.

Si consideramos este parámetro como "indicativo" de un desarrollo formal de pensamiento entonces el 17.6% de los estudiantes del grupo de referencia lograron este nivel.

3.2 Diagnóstico del grupo experimental y del grupo control

El diagnóstico del nivel de razonamiento lógico del grupo control y el grupo experimental se realizó al inicio del ciclo escolar 2016- 2017, cuando estos grupos estaban iniciando el tercer año de preparatoria. Para esta medición se aplicó el TRL siguiendo el formato de aplicación que se describe en la metodología.

Los resultados que hallamos en esta evaluación se muestran a continuación

GRUPO DE CONTROL Y GRUPO EXPERIMENTAL		
No de aciertos	Grupo experimental	Grupo control
0	5	6
1	10	7
2	10	12
3	11	15
4	14	6
5	12	9
6	2	6
7	1	3
8	3	2
9	0	2
10	0	0

Tabla 2.Resultados número de alumnos en relación con el número de aciertos.

En la Tabla 2, se muestra la distribución de resultados con base en el número de aciertos que obtuvo el grupo experimental y el grupo de control. El promedio de aprovechamiento del grupo experimental fue de 3.29 y en el grupo control fue de 3.47. En la Figura 2, se representa el porcentaje del rendimiento en función del número de aciertos. Se observa que, el 52% de alumnos del grupo experimental y el 58% del grupo control obtuvieron un puntaje inferior al promedio de su propio grupo. A partir de esta información se establece que ambos grupos tienen características similares en cuanto al nivel de razonamiento lógico. Ambos grupos comparten la característica de tener un bajo nivel razonamiento lógico matemático.

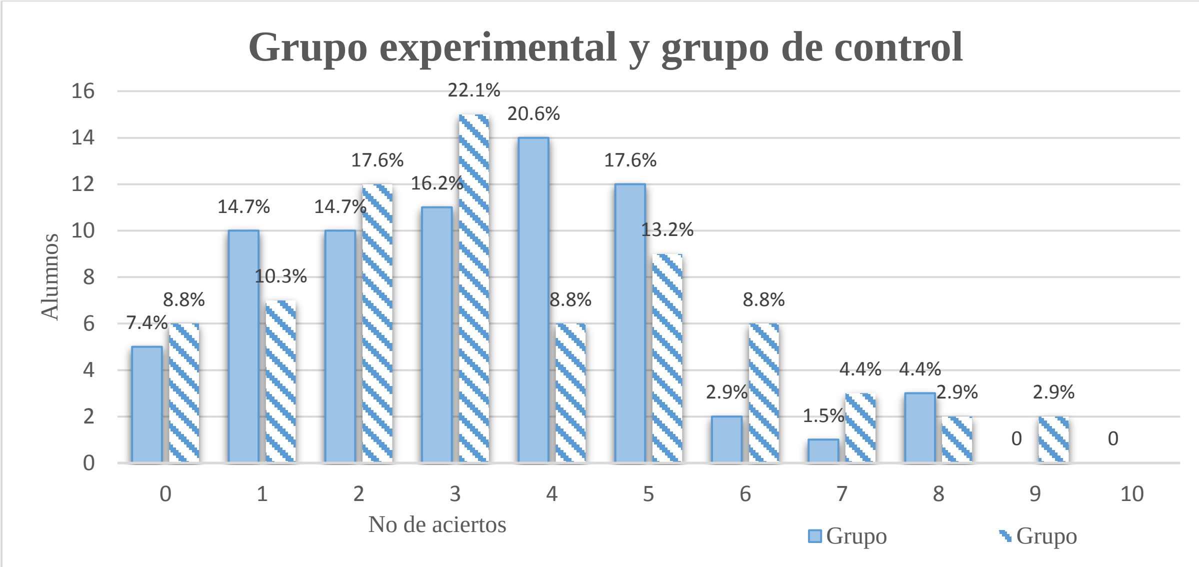


Figura 2. Resultados diagnósticos del TRL con relación al porcentaje de aciertos del grupo control y experimental.

3.3 Las categorías para el análisis

Los resultados de diagnóstico para el grupo control y el grupo experimental definieron dos categorías, de manera natural con base en su rendimiento promedio; la primera se conformó por aquellos estudiantes que obtuvieron de 0 a 3 aciertos y la segunda categoría corresponde a los alumnos que tuvieron de 4 a 8 aciertos, es decir, los alumnos que se encuentran por abajo y por encima del promedio respectivamente.

No de aciertos	Grupo experimental	A partir del promedio	%
0	5	36 alumnos por debajo del promedio	52.9%
1	10		
2	10		
3	11		
4	14	32 alumnos por arriba del promedio	47%
5	12		
6	2		
7	1		
8	3		
9	0		
10	0		

Tabla 3. Alumnos por debajo y por encima del promedio, grupo experimental.

Respecto al grupo experimental, vea Tabla 3, la categoría *por abajo del promedio* (-P) estuvo conformado por 36 alumnos que corresponde al 52.9% del total y 31 alumnos ubicados en la zona *por encima del promedio* (+P). De este modo se identificó a los estudiantes que tiene el nivel de razonamiento lógico más bajo del grupo experimental. Esta categorización basada en el promedio nos permitió identificar dos subgrupos con características opuestas. Sin embargo, esta característica no es suficiente para describir la evolución del razonamiento lógico de los alumnos de alto nivel y los de bajo nivel.

En este sentido, fue necesaria otra categorización que nos permitió describir la forma de incremento del razonamiento lógico en el grupo experimental una vez concluida la intervención que se propone en este trabajo de tesis. Se definieron tres categorías en el grupo experimental; en la Tabla 4 se puede observar que la primera está compuesta por los alumnos que obtienen una puntuación de 0 a 4 en el TRL, a esta categoría se le llamó “Pensamiento concreto”. La segunda categoría la conforman aquellos cuya puntuación fue de 5 a 7, su característica es la “cercanía” al promedio y se le denominó “En transición”. Y finalmente, a la categoría en que están los alumnos que obtuvieron de 8 a 10 aciertos, se le llamó “Pensamiento formal”. Estos alumnos tienen un desempeño alto de razonamiento lógico.

No de aciertos	Grupo experimental	Categorización
0	5	73.5% Pensamiento concreto
1	10	
2	10	
3	11	
4	14	
5	12	20.5% En transición
6	2	
7	1	
8	3	4.4% Pensamiento formal
9	0	
10	0	

Tabla 4. Categorización del grupo experimental.

De acuerdo con la categorización que se muestra en la Tabla 4, se halló que el 4.4% de los alumnos (del grupo experimental) son alumnos pensadores formales y que hay un 20.5% en la una categoría de transición. Sin embargo, el 73.5% de los alumnos del grupo experimental tienen un nivel de razonamiento lógico matemático muy bajo, siendo esta subpoblación de particular interés para el estudio que se propuso en este trabajo de investigación.

3.4 Grupo de referencia y grupo experimental

Recordemos que la aplicación del TRL al grupo de referencia se realizó en el ciclo escolar 2015-2016, es decir, cuando ya habían terminado el tercer año de preparatoria, mientras que para el grupo experimental y de control fue al iniciar el tercer año. Esta situación podría sugerir que el grupo de referencia tuvo una ventaja de un año escolar y por ello, se podría pensar que los resultados no son estadísticamente comparables, razón por la cual su promedio en la prueba TRL es mayor que el del grupo experimental. Lo anterior, sugiere que el desempeño del grupo de referencia es mejor que el desempeño del grupo experimental, y por lo tanto las dos poblaciones son diferentes estadísticamente, es decir, no son comparables.

Para resolver este conflicto, se hizo una prueba estadística entre los dos grupos a fin de determinar si ambos son o no comparables estadísticamente. Para ello, realizó una prueba de hipótesis, t-Student. En el anexo A1, se describe esta prueba y se puntualiza que ambos grupos son estadísticamente comparables.

3.5 Análisis de desempeño estudiantil en dos problemas que se aplicaron en la intervención

Problema "El reloj"

El problema que se analiza a continuación fue tomado del libro del texto "Geometría y trigonometría" del Colegio Nacional de Matemática, publicado en 2009. Este libro está sugerido en el programa de matemáticas II como material de consulta para los temas de geometría y trigonometría.

A través de la experiencia personal, se ha podido observar que muchos de los alumnos que enfrentan este problema exhiben dificultades de carácter cognitivo en el momento de hallar la solución. Esta situación se presenta debido a que la mayoría de los alumnos encuentran una respuesta de la que no dudan. Sin embargo, la justificación más común de su respuesta no considera todas las variables implicadas en el problema. Más aún, en la mayoría de las veces la representación gráfica, que muestran para justificar, no corresponde con la realidad.

El problema se aplicó al grupo experimental en la octava sesión, siguiendo la metodología de trabajo que se definió para la intervención al grupo experimental.

Problema
¿Cuál es el ángulo agudo formado por el horario y el minutero de un reloj marca las 18:20?

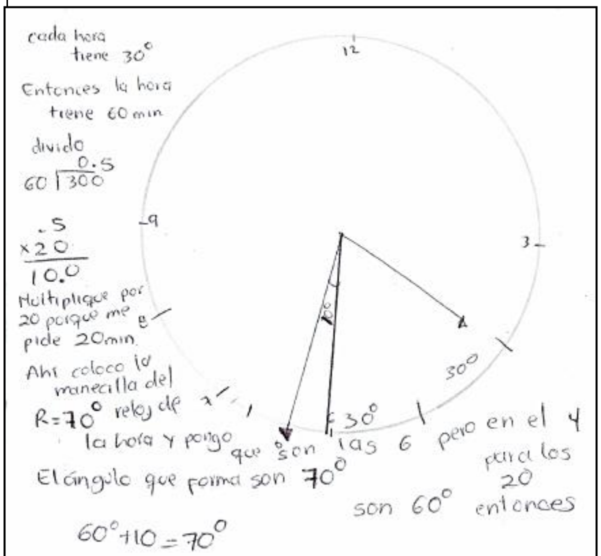
En el mismo libro de texto se encuentra la solución del problema:

En un reloj de manecillas el minutero recorre una vuelta (360°), el horario solo avanza 30°. Esto significa que el horario avanza la doceava parte de lo que recorre el minutero por vuelta. A partir de las 12:00 horas, luego, a las 18:20 horas, el minutero avanzó 120° y está ubicado en el número 4, mientras que el horario avanzó $\frac{1}{12}(20^\circ) = 10^\circ$ y está entre las 6 y las 7 horas. Por lo tanto, el ángulo agudo es de 70°.

No debe olvidarse que el interés principal fue determinar el comportamiento cognitivo de los alumnos respecto a cada tarea que se aplicó durante el periodo de intervención, por lo cual se definieron tres categorías basadas en el tipo de respuesta que proporcionaron los estudiantes: la primera categoría la conformaron los alumnos que obtuvieron *la respuesta correcta*, la segunda se caracterizó por ser *la respuesta más popular* para este problema (60^0 en que no se toma en cuenta el movimiento del horario) y la tercera categoría se definió para aquellas *respuestas que revelan diferentes grados de incomprensión*. El análisis para cada categoría se realizó tomando en cuenta el resultado que obtuvieron los alumnos en el TRL, aquellos que están por abajo del promedio (-P) los que están por encima de este promedio (+P).

A continuación, se hace un análisis de las respuestas que se obtuvieron basado en las categorías descritas.

La primera categoría la conformaron los alumnos que proporcionan la respuesta correcta. De manera general, identifican las variables que intervienen en el problema y las vinculan adecuadamente con lo que se les solicita. En primera instancia, determinan que el horario avanza 30° cada que el minutero da una vuelta completa a partir de las 12:00 horas y a partir de ello se percatan del avance proporcional que tiene ambas manecillas. En varios casos esta situación se ve plasmada en el dibujo que acompañan con su respuesta.



cada hora tiene
30°
Entonces la hora
tiene 60min
divido

$$\begin{array}{r} .5 \\ 60\overline{\smash{)}30°} \end{array}$$

.5
X20
10°

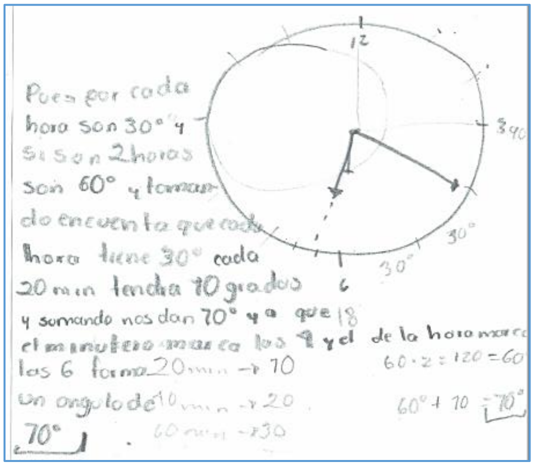
Multiplique por 20 porque me piden 20min ahí coloco la mancilla del R=70° reloj de la hora y pongo que son las 6 pero en el 4 para los 20 entonces son 60°. El ángulo que forma son 70°

60°+10=70°

Figura 3. Ejemplo de la solución del problema “El reloj”, correspondiente a la primera categoría.

El ejemplo que se muestra en la Figura 3, muestra que este alumno determinó de manera inmediata que la manecilla del horario avanza 30° cada vez que el minutero hace un recorrido de 360°, a partir de las 12 horas. Posteriormente calcula los grados que recorre el minutero cuando éste ha marcado los 20 minutos que plantea el problema y, finalmente, obtiene el resultado satisfactoriamente. Esta situación también se puede observar en el dibujo que acompaña su respuesta. El esquema de solución de la Figura 3, salvo variantes mínimas, caracteriza al 51% de los alumnos +P, y sólo el 5% de los alumnos -P encuentra la solución con una justificación similar.

Un razonamiento equivalente al anterior es determinar los 30° que define cada hora, y que 10° están representados por cada 20 minutos. En este caso, el estudiante refleja una comprensión clara y precisa de los datos que involucran al problema. Hace una deducción casi inmediata de la solución y no da indicios de confusión. Estos elementos caracterizaron la estrategia de solución de los alumnos +P, ver figura 4.



Pues por cada hora son 30°y si son 2 horas son 60° y tomando en cuenta que cada hora tiene 30° cada 20 minutos tendra 10° y sumando nos dan 70° ya que el el mimutero marca las 4 y el de la hora marca las 6 forman

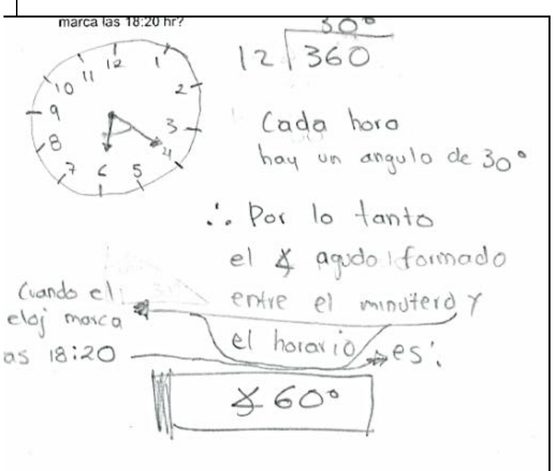
20min ⟶ 10 $\quad$ 60*2=120=60

10min ⟶ 20 $\quad$ 60+10= 70°

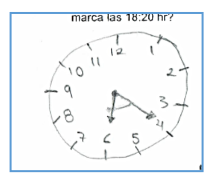
60min ⟶ 30

Figura 4. Ejemplo de la solución del problema “El reloj”, correspondiente a la primera categoría.

La segunda categoría, se caracteriza por ser la respuesta más popular para este problema. Este tipo de respuesta hace evidente la existencia de un conflicto cognitivo y la mayoría de las estudiantes que encontró esta respuesta, no dudó que es correcta. La respuesta popular es 60°. De alguna forma, los alumnos establecen que cada 5 minutos que recorre el minutero, éste genera un ángulo de 30° y con este razonamiento concluyen la respuesta, sin percatarse que el horario tiene un movimiento proporcional al minutero. Para todos los casos, el dibujo que acompaña la respuesta hace evidente que no se considera el movimiento del horario.



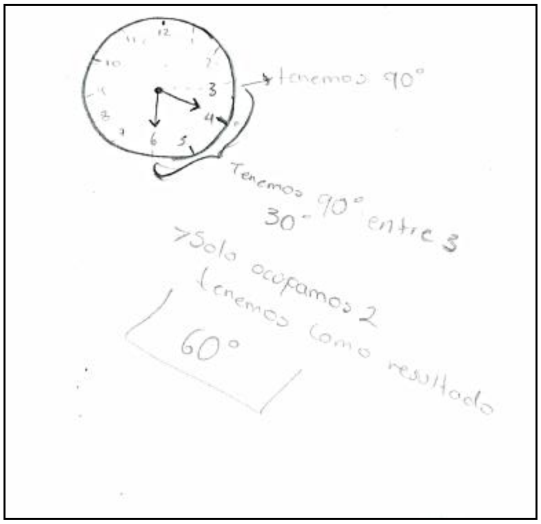
$$\begin{array}{r} 30 \\ 12\sqrt{360} \end{array}$$

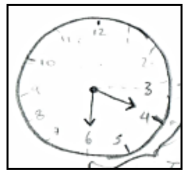


Cada hora
Hay un angulo de30°
.
..por lo tanto
El < agudo formado → Cuando el reloj marca las 18:20
Entre el minutero y el horario es :
< 60°

Figura 5. Ejemplo de la solución del problema “El reloj”, para la segunda categoría, alumnos +P.

En la Figura 5, se puede ver que el alumno no se percató del movimiento proporcional del horario, ya que lo deja fijo en el 6 cuando el minutero marca el avance los primeros 4 minutos. Este razonamiento caracterizó al 35% de los alumnos +P.



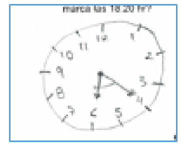


Tenemos 90°
Tenemos 90°/3=30°
Si solo ocupamos 2, tenemos como resultado 60°

Figura 6. Ejemplo de la solución del problema "El reloj", para la segunda categoría, alumnos –P.

En la Figura 6, se observa que el alumno identifica 90° cuando el minutero está apuntando al 3, y se percata de que en ángulo formado entre el 4 y el 6 son dos terceras partes de 90, entonces establece que son 60°. Este razonamiento que el 66% de los alumnos de esta categoría que pertenecen –P, de esta categoría presentan resultados similares, vea la Figura 5. A partir de este análisis, se concluye que la respuesta popular de este problema tiene mayor ocurrencia en los alumnos –P, de esta segunda categoría. De esta forma se hace evidente que el nivel de razonamiento lógico de los alumnos influye directamente en la solución de problemas con determinado conflicto cognitivo.

$12\overline{)360}$ = 30

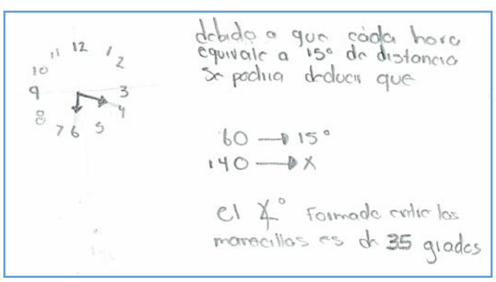


Cada hora
Hay un angulo de30°
.
..por lo tanto
El < agudo formado → Cuando el reloj marca las 18:20
Entre el minutero y el horario es :
< 60°

Figura 7. Ejemplo de la solución del problema “El reloj”, para la segunda categoría, alumnos –P.

En la Figura 7, se tiene una solución rápida del problema. Parece que el alumno no tiene ninguna duda sobre la veracidad de su respuesta, es evidente que no se percibe la dificultad cognitiva de este problema.

Finalmente, la tercera categoría se definió para aquellas respuestas que revelan diferentes grados de incomprensión del problema. El porcentaje de alumnos en esta categoría es menor respecto a las categorías previas. Sin embargo, se estaca una diferencia porcentual similar a la segunda categoría debido a que el 19% corresponde a los alumnos –P y el 9% a los +P.

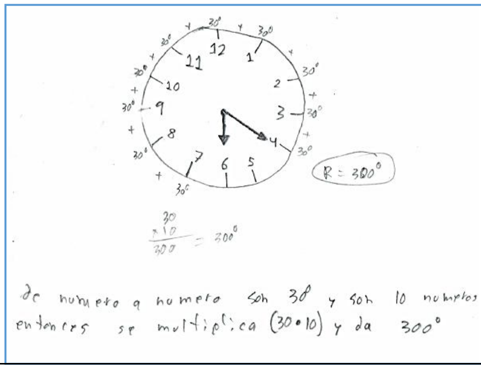


Debido a que cada hora
Equivale a 15° de distancia
Se podría deducir que

60 → 15°
140 → x

El ∡° formado entre las manecillas es de 35 grados

Figura 8. Ejemplo de la solución del problema “El reloj”, ubicada en la tercera categoría. El alumno proporciono 35° como respuesta.



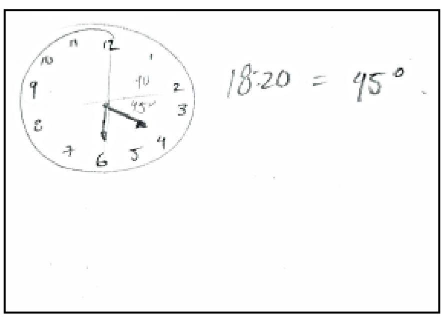
R=300

$$\begin{array}{r} 30 \\ \underline{X10} \\ 300 = 300° \end{array}$$

De numero a numero son 30° y son 10 numeros
Entonces se multiplica (30.10) y da 300°

Figura 9. Ejemplo de la solución del problema "El reloj", ubicada en la tercera categoría. El alumno proporcionó 300° como respuesta.

En la Figura 8 y la Figura 9, se muestran dos respuestas correspondientes a alumnos +P. De la Figura 8 se desprende que, el alumno no pudo determinar correctamente el número de grados que marca el horario por cada hora transcurrida. De la figura 9 se observa que, el alumno sí determina los 30° por cada hora, pero tiene dificultades con el concepto de "ángulo agudo", también resulta evidente que no se percata del avance proporcional entre las manecillas.



18:20=45°

Figura 10. Ejemplo de la solución del problema "El reloj", donde la respuesta es 45°.

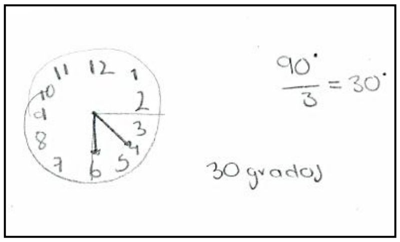
	90°/3=30° 30 grados

Figura 11. Ejemplo de la solución del problema “El reloj”, donde la respuesta es 30°.

Las Figuras 10 y 11 se muestran las soluciones de dos alumnos –P. En ambos casos, trazan una recta de referencia horizontal entre el 2 y el 3 del dibujo y determinan sus respuestas. Estas respuestas caracterizan a este subgrupo, en casi todos los casos se puede observar que no interpretan los datos del problema.

A partir del análisis que se hizo de los subgrupos del grupo experimental, se observó que esta tarea de intervención hizo evidente que aquellos alumnos que tienen un mejor nivel de razonamiento lógico también tienen mayores posibilidades para superar el conflicto cognitivo presente en el problema. En otras palabras, se hizo evidente que el nivel de razonamiento lógico fue un factor determinante en la solución exitosa del problema. En la Tabla 5, se muestran un comparativo general de los resultados del problema analizado.

	Subgrupos del grupo experimental	
Categoría	**–P (36)**	**+P (31)**
Correcto	2 alumnos (5%)	16 alumnos (51%)
Tanteo o incompleto	24 alumnos (66%)	11 alumnos (35%)
Incorrecto	7 alumnos (19%)	3 alumnos (9%)
Faltaron	3 alumnos (8%)	2 alumno (6%)

Tabla 5. Resultados del problema “El reloj”

Problema “Reparto de maíz”

El siguiente análisis corresponde al problema histórico conocido originalmente como “las cien aves de corral”. De acuerdo con (Gómez, 2016), este problema surgió en China, en el siglo V y ha tenido diversas formulaciones a lo largo de la historia. Una de estas formulaciones fue incluida en la colección medieval de problemas titulada: “Propositiones ad acuendos juvenes” de Alcuino de York (782).

> Cierto paterfamilias disponía de 20 sirvientes. Ordenó que les fueran repartidos 20 modios de maíz del siguiente modo: que los hombres recibieran tres modios, las mujeres dos y los niños medio modio. Diga, quien pueda, ¿cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños debe haber? (Alcuino, 804, p. 1154).

En su obra Alcuino menciona que la solución es 1 hombre, 5 mujeres y 14 niños. La formulación que se aplicó en la décima sesión es una versión cuya estructura es similar a la de Alcuino. La diferencia radica en que las cantidades que reciben los niños y los hombres. Esta propuesta más reciente se encuentra publicada en varias páginas de internet cuya principal intención es divulgar problemas con un determinado conflicto cognitivo bajo la denominación de “Acertijos matemáticos”. La formulación del problema es la siguiente:

Problema “Reparto de maíz”

El jefe de una tribu tiene 20 kilos de maíz para repartir entre sus 20 vecinos y decide hacerlo de la siguiente manera:

A cada uno de los niños le dará 3 kilos de maíz.

A cada una de las mujeres las dará dos kilos de maíz.

A cada uno de los hombres le dará medio kilo de maíz.

Sabiendo que al menos hay un niño, una mujer y un hombre y que repartió todo el maíz sin que sobrara ni faltara nada, ¿cuántos niños, mujeres y hombres hay?

Una de las páginas donde podemos encontrar este problema con raíces históricas es: http://adivinanzayacertijo.blogspot.mx/2017/03/acertijo-de-sam-loyd-martin-gardner-fue.html

Análisis de las respuestas que se obtuvieron basado en las categorías descritas.

La primera categoría la conformaron los alumnos que proporcionan la respuesta correcta, para este problema, consideramos dos casos

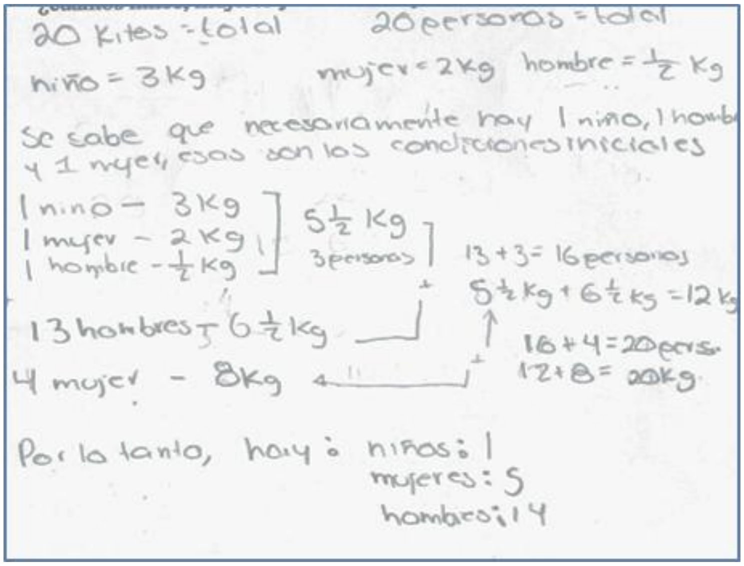


Figura 12. Ejemplo de solución del problema de “reparto de maíz”, primer caso.

En la figura 12, se muestra en el primer caso, los estudiantes resuelven el problema utilizando el hecho de que al menos hay un niño, un hombre y una mujer. A partir de esto, determinan que 5½ kg es la cantidad mínima de maíz que se repartirá. Luego observan que cualquier combinación de los tres personajes proporciona reparto inexacto de los 20 kg. Y como el enunciado del problema indica que se reparte de manera exacta, concluyen que para completar 20 kg es necesario 13 hombres y 4 mujeres más. De esta forma se cumple lo solicitado en el problema quedando como solución: 1 niño, 5 mujeres y 14 hombres.

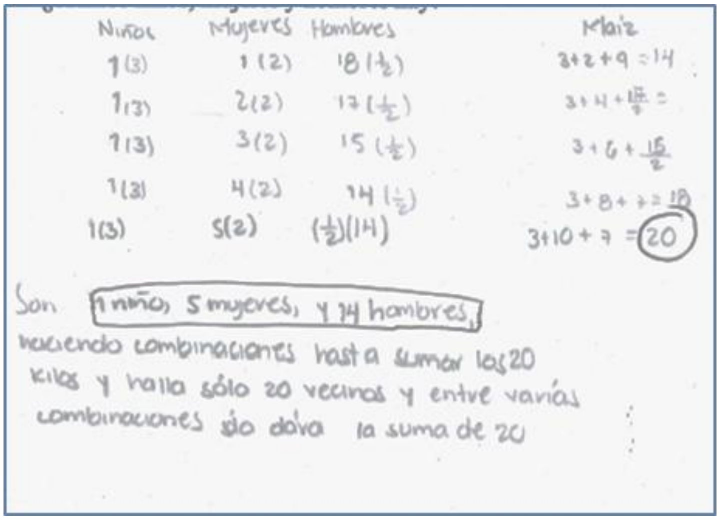


Figura 13. Ejemplo de solución del problema de “reparto de maíz”, segundo caso.

El segundo caso (Figura 13), la solución consiste en la elaboración de una tabla que inicia en el primer renglón con la cantidad mínima de personas, posteriormente se suma la cantidad de maíz tratando de no superar los 20 kg. Posteriormente se hacen algunas combinaciones, hasta que se encuentra la respuesta. Las tablas elaboradas en este tipo de solución son semejantes.

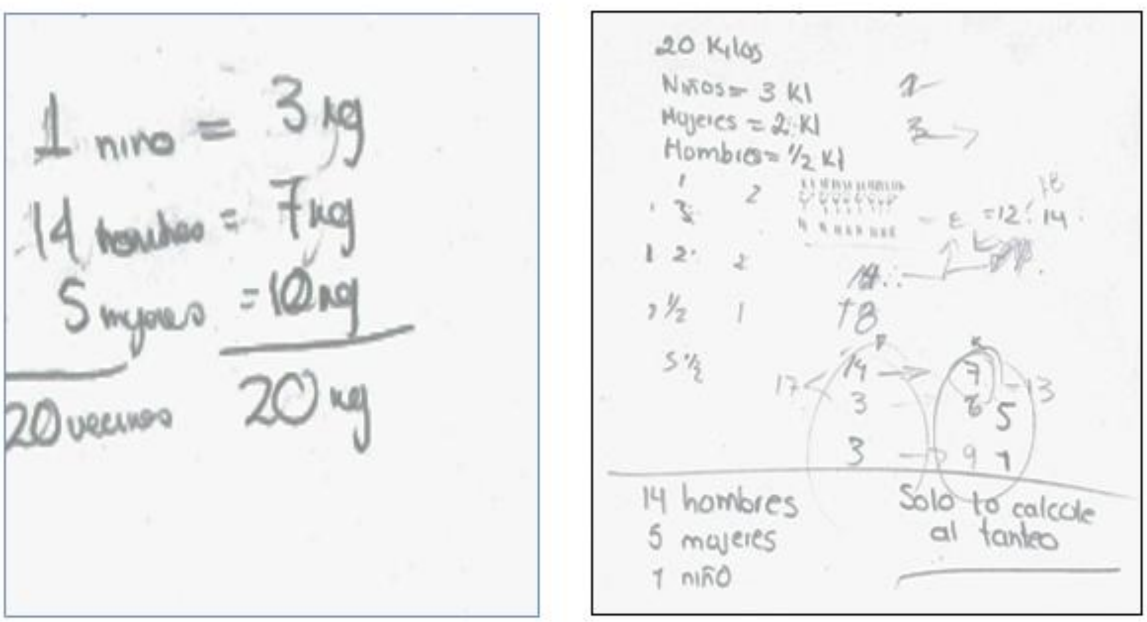


Figura 14. Ejemplos, solución del problema de “reparto de maíz”, tanteo o incompleto.

Para la categoría Tanteo o incompleto, en general encontramos respuestas incompletas. Se pudo observar que la mayoría de estas respuestas se determinaron por estimaciones o tanteos y hubo confusión en la interpretación de las variables involucradas. No se puede aprecia alguna justificación que permita comprender el razonamiento o estrategia utilizado por los estudiantes También hubo y escaza confianza en la respuesta, ver figura 14. Un dato de interés para esta categoría fue el porcentaje de alumnos, ya que el 36% son +P y el 34% -P.

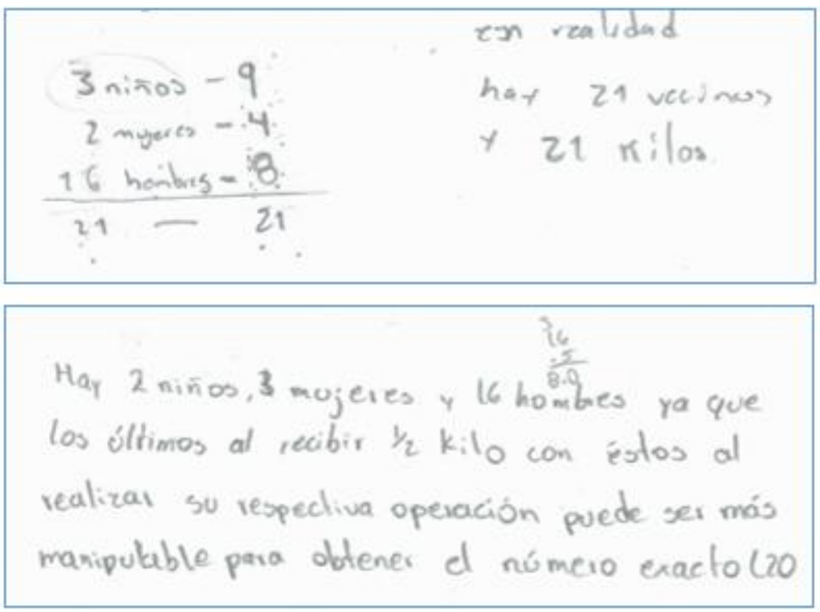


Figura 15. Ejemplos, solución del problema de “reparto de maíz”, incorrecto.

Finalmente, la Figura 15 proporciona dos ejemplos de la categoría incorrecto. En estos ejemplos se pueden apreciar diferentes niveles de incomprensión de este problema. Los estudiantes que conforman esta categoría manifiestan poca comprensión al planteamiento del problema, no interpretan las variables y no comprenden lo que les solicita el problema.

	Subgrupos del grupo experimental	
Categoría	**–P (36)**	**+P (32)**
Correcto	6 alumnos (17%)	16 alumnos (50%)
Tanteo o incompleto	13 alumnos (36%)	11 alumnos (34%)

Incorrecto	17 alumnos (47%)	5 alumnos (16%)
Faltaron	0 alumnos	0 alumnos

Tabla 6. Resultados del problema “reparto de maíz”.

De acuerdo con los resultados que se muestran en la Tabla 6, se tiene que el 50% de los alumnos con el razonamiento por encima de promedio resolvieron el problema, evidenciando justificaciones razonadas en la solución, mientras que solamente un 17% de alumnos con razonamiento lógico por debajo del promedio mostraron un comportamiento similar. Por otro lado, las respuestas de poca claridad matemática lo ofrecieron el 47 % de los alumnos -P y solamente 16 % de los alumnos +P del ToLT.

3.6 Medición final del nivel de razonamiento lógico

Con base en la metodología que se estableció para este trabajo de tesis, una vez que terminó el periodo de intervención, se hizo una segunda medición del nivel de razonamiento lógico con el TRL, respetando el método de aplicación que han definido sus autores. Esta medición determinó el nivel de logro en el razonamiento de los alumnos del grupo experimental que participaron en la intervención metodológica inspirada en el proyecto CAME, misma que consistió en resolver una serie de tareas caracterizadas por tener cierto conflicto cognitivo. La intervención se realizó durante el ciclo escolar 2016–2017, mientras los alumnos cursaban el tercer año de preparatoria. Recordemos que el grupo control fueron estudiantes de la misma escuela, con un esquema de trabajo tradicional durante el mismo ciclo escolar.

A continuación, se presentan los resultados que obtuvimos de ambos grupos, comprobando la medición inicial o diagnóstica con la medición final, cuando el trabajo de intervención hubo finalizado.

3.7 Nivel de razonamiento lógico del grupo control

Recordemos que el grupo control inicio con un nivel de razonamiento lógico promedio de 3.47 y que el 58% de los alumnos de este grupo obtuvo un puntaje menor al promedio alcanzado por el grupo, según los resultados del TRL en la evaluación diagnóstica.

Por otro lado, los resultados de este grupo, con respecto a las categorías definidas para identificar el nivel de crecimiento respecto a razonamiento lógico, ubicó al 67.6% de los alumnos como pensadores concretos, al 26.4% en la etapa de transición y solo un 5.8% como pensadores formales.

NIVEL DE RAZONAMIENTO LÓGICO DEL GRUPO CONTROL					Categorías
Número de aciertos	Comparación				
	Diagnóstico		Final		
0	6	67.6%	1 (-5)	66.1%	Pensamiento concreto
1	7		2 (-5)		
2	12		17 (+2)		
3	15		16 (+1)		
4	6		9 (+3)		
5	9	26.4%	9	26.4%	En transición
6	6		5 (-1)		
7	3		4 (+1)		
8	2	5.8%	2	7.3%	Pensamiento formal
9	2		3 (+1)		
10	0		0		
Promedio	3.47		3.91		

Tabla 7. Comparativo del nivel de razonamiento lógico en el grupo control, tomando como referencia los resultados obtenidos por los estudiantes.

De acuerdo con la Tabla 7, los resultados de la evaluación final muestran varias permutas del número de estudiantes respecto al número de aciertos en el TRL. Como se puede observar, la distribución de porcentajes en las tres categorías de pensadores fue muy similares a lo obtenido en el diagnóstico. Esta situación también se ve reflejada en el promedio final del grupo. Un hallazgo interesante fue que el porcentaje de alumnos en etapa de transición se mantuvo, aunque en una revisión minuciosa respecto a los alumnos que originalmente se ubicaron en esta categoría se detectó que cuatro de ellos permanecieron.

3.8 Nivel de razonamiento lógico del grupo experimental

El grupo experimental fue diagnosticado con un promedio de 3.29, esta medida representa la media del aprovechamiento para el grupo, según el TRL, a partir de ello se encontró que el 52.9% de la población obtuvo un puntaje menor que la media.

Con respecto a las categorías que establecen el nivel de razonamiento lógico del grupo, encontramos que, en el diagnóstico, el 73.5% del grupo experimental son pensadores concretos, el 22% están en transición y solo el 4.4% son pensadores formales, de acuerdo con el TRL.

NIVEL DE RAZONAMIENTO LÓGICO DEL GRUPO EXPERIMENTAL					Categorías
Número de aciertos	Comparación				
	Diagnóstico		Final		
0	5	73.5%	1 (- 4)	25%	Pensamiento concreto
1	10		2 (- 8)		
2	10		5 (- 5)		
3	11		2 (- 9)		
4	14		7 (- 7)		
5	12	22%	5 (- 7)	50%	En transición
6	2		19 (+ 17)		
7	1		10 (+ 9)		
8	3	4.4%	10 (+ 7)	25%	Pensamiento formal
9	0		5 (+ 5)		
10	0		2 (+7)		
Promedio	3.29		5.88		

Tabla 8. Comportamiento del nivel de razonamiento lógico en el grupo experimental, tomando como referencia los resultados del TRL de estos alumnos.

En la Tabla 8, encontramos la comparación de los resultados del diagnóstico con lo obtenido en la evaluación final. Los resultados expresan el número de alumnos en función del número de aciertos que obtuvieron en el TRL para las dos evaluaciones, también se proporcionan una distribución de porcentajes para las categorías establecidas. Se observa que el porcentaje de estudiantes en las categorías sufrió cambios importantes, en otras palabras, el conjunto de tareas con el que fue intervenido el grupo experimental favoreció transformaciones significativas en su nivel de razonamiento lógico de estos estudiantes.

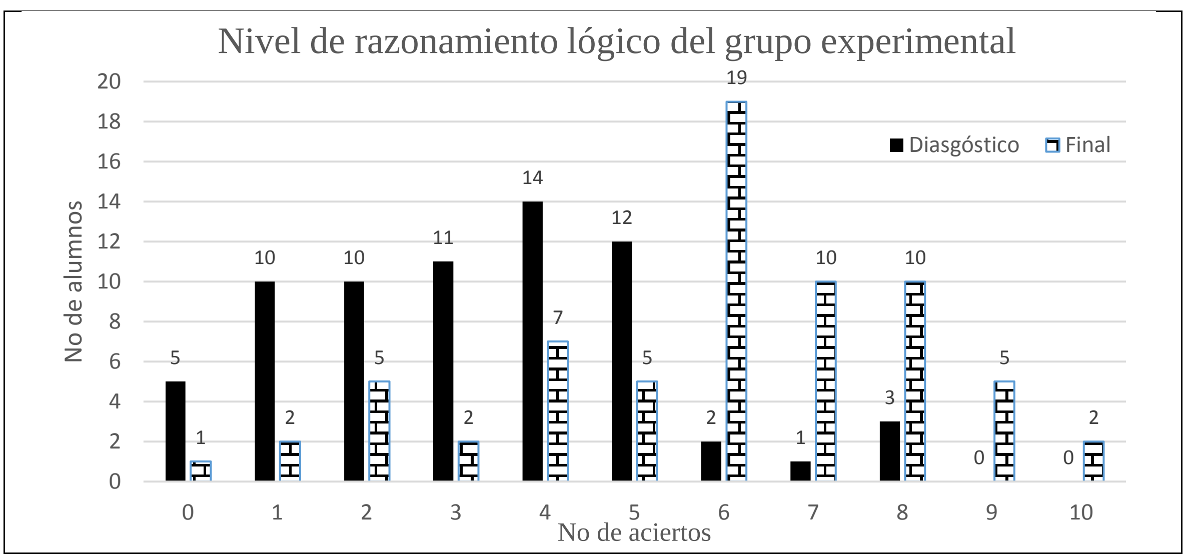


Figura 16. Número de alumnos en función del número de aciertos en la evaluación diagnóstica y final del TRL.

En la Figura 16, se presenta una comparación de resultados del grupo experimental, donde se observa que en el diagnóstico hubo 2 alumnos con 6 respuestas correctas, mientras que en la evaluación final fueron 19 alumnos, este dato representa un crecimiento importante en el número de alumnos para la categoría “En transición”. Este comportamiento fue similar para el número de respuestas sucesivas. De esta forma, en el grupo experimental se detectó un incremento importante en las categorías “En transición” y “Pensamiento Formal”.

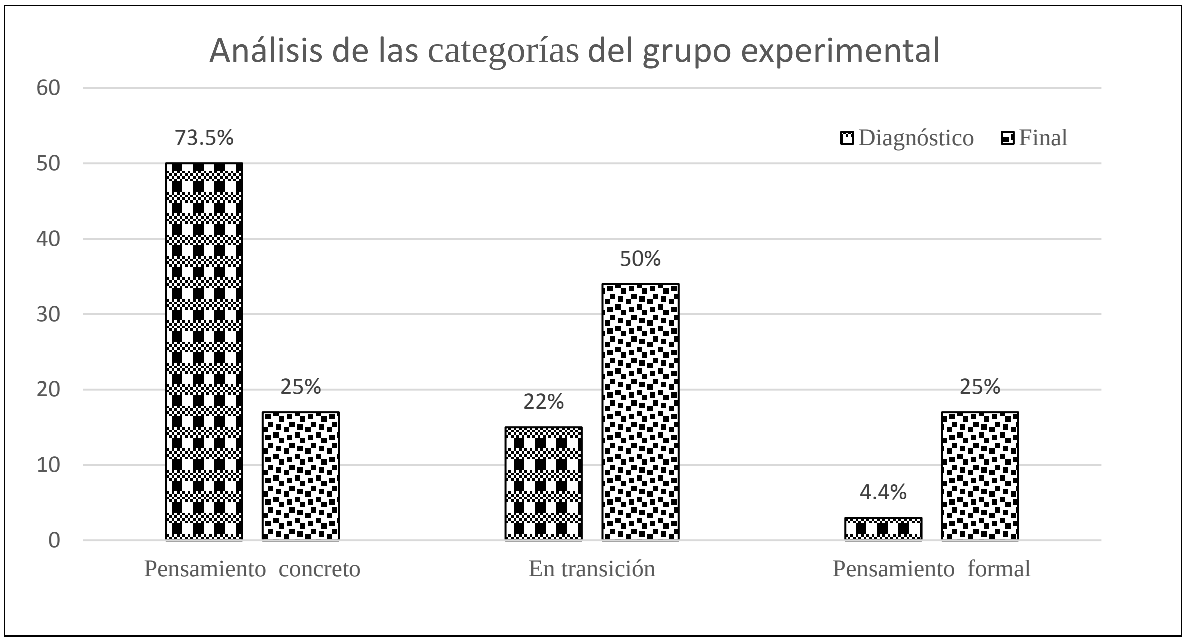


Figura 17. Comparación de las categorías de la evaluación diagnóstica y final.

En la Figura 17, se representan los cambios porcentuales por categoría para las dos aplicaciones del TRL: la diagnóstica y la final. A continuación, se hace una descripción de estas categorías por tipo de pensadores.

- *Pensamiento concreto.* En esta categoría se observaron cambios interesantes, debido a que el porcentaje encontrado en el diagnóstico disminuyó 48.5%. Esto reveló que en la evaluación final 36 estudiantes abandonaron esta categoría como consecuencia de obtener una ganancia en su nivel de pensamiento lógico, al dejar de ser pensadores concretos.
- *En transición.* Esta categoría identifica a los alumnos cuyo razonamiento lógico está en una etapa de desarrollo. De acuerdo con los datos de la Figura 4, en la evaluación final se

obtuvo una ganancia de 28%. En otras palabras, de 15 alumnos en el diagnóstico esta categoría pasó a 34, de acuerdo con el resultado del TRL final.

- *Pensamiento formal.* Esta categoría reportó en la evaluación final una ganancia de 20.6%, es decir, un hubo un incremento de 14 alumnos como pensadores formales.

3.9 Análisis de grupo control y grupo experimental

El grupo control y el grupo experimental fueron diagnosticados con una calificación promedio de 3.47 y 3.29 respectivamente, según los resultados que se obtuvieron en el TRL. La distribución de alumnos en las categorías que establecen el nivel de razonamiento lógico se puede ver en la tabla 8.

Diagnóstico		Categorías
Grupo control	Grupo experimental	
67.6%	73.5%	Pensamiento concreto
26.4%	22%	En transición
5.8%	4.4%	Pensamiento formal

Tabla 9. Porcentajes diagnosticados para los grupos control y experimental.

De acuerdo con la Tabla 8, los porcentajes del TRL en la etapa diagnóstica indican que la mayor parte de los alumnos, de cada grupo son pensadores concretos. El porcentaje es muy similar ocurrió ambos grupos de la categoría “En transición”; un comportamiento similar para los alumnos que se desempeñaron como pensadores formales. Esta situación permitió establecer que en ambos grupos parten con el mismo nivel de razonamiento lógico antes de iniciar las tareas en el grupo experimental. Es decir, para ese momento en ambos grupos el mayor porcentaje de los alumnos estaban diagnosticados como pensadores concretos.

Se elaboró la siguiente gráfica retomando los resultados por grupo analizados anteriormente, en que se muestra el comportamiento en el nivel de razonamiento lógico en los dos grupos, como producto logrados de este trabajo de tesis. En la Figura 16 se observa que en las tres categorías de razonamiento lógico aconteció lo siguiente:

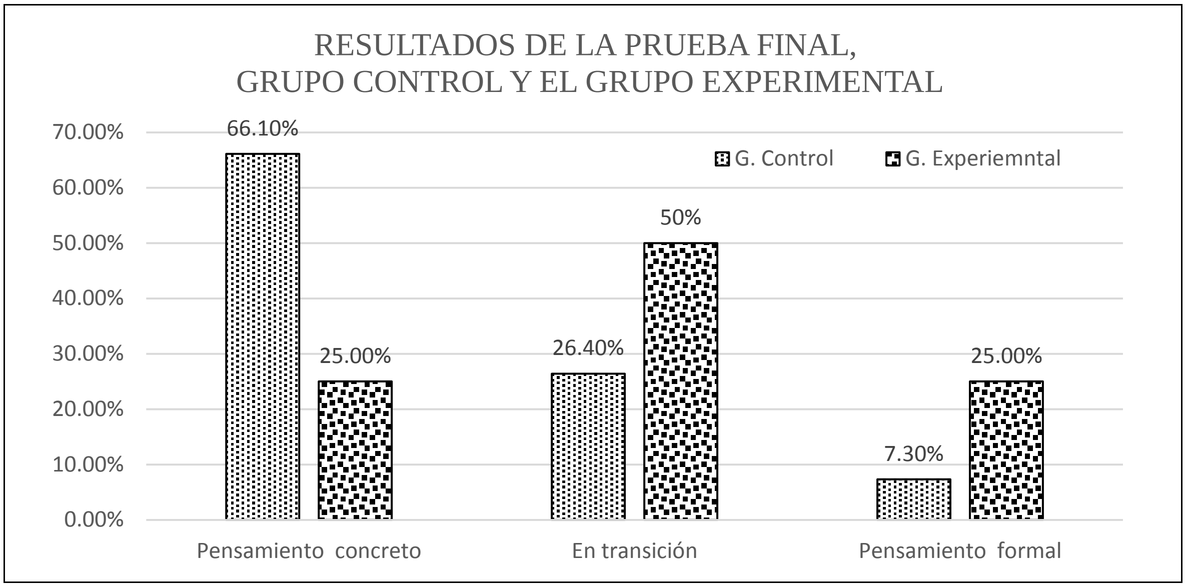


Figura 18. Comparación de las categorías de la evaluación diagnóstica y final, obtenidas con la prueba TRL

- *Pensamiento concreto.* En esta categoría se observa que el porcentaje de alumnos, del grupo control, mantuvo una tendencia similar al resultado que se obtuvo en el diagnóstico. Debe recordarse que al grupo control no se le aplicó intervención alguna. En el grupo experimental hubo una disminución considerable de alumnos en esta categoría, esta situación está justificada pues durante el ciclo escolar 2016-2017, este grupo, trabajó actividades que estimularon el razonamiento lógico de los alumnos mediante una dinámica activa de aprendizaje inspirado en el proyecto CAME.
- *En transición.* En esta categoría se identifica una ganancia importante para el grupo experimental mientras que el grupo control obtuvo un porcentaje similar al que se diagnosticó. La mayor parte de los alumnos catalogados como pensadores concretos se ubicó en esta categoría. Estos alumnos están en una etapa de cambio en el modo de interpretar los problemas que contienen un conflicto cognitivo.
- *Pensamiento formal.* La comparación de los dos grupos en esta categoría determinó que el grupo experimental posee un porcentaje del 25 % de la población mientras que el grupo control solo fue del 7.3%.

Capítulo 4.

Conclusiones

La investigación que se presentó en este trabajo surgió por la motivación de experimentar una alternativa metodológica, cuya finalidad fue proporcionar a los alumnos del grupo experimental diversas herramientas intelectuales para mejorar su nivel de razonamiento lógico. La Aceleración Cognitiva mediante la Educación Matemática, o proyecto CAME, es enfoque metodológico cuyo propósito es incrementar, en un periodo determinado, la capacidad intelectual de los alumnos de 16 y 17 años. La propuesta original requiere dos años de intervención para el tratamiento de treinta tareas. Sin embargo, en este trabajo se desarrollaron un total de 15 tareas durante el ciclo escolar 2016-2017, respetando en medida de lo posible la metodología CAME.

Antes de iniciar las sesiones de intervención con la metodología CAME, como parte inicial de la investigación, se explicaron al grupo experimental las cuatro etapas para resolver un problema, mejor conocido como el método de Polya. Esta etapa familiarizó a los alumnos en la resolución de problemas de razonamiento matemático, para explorar las habilidades y conflictos al tratar de resolver la problemática que propone cada tarea. Los resultados observados en el grupo experimental hicieron evidente que los problemas seleccionados para la intervención demandan mayor esfuerzo cognitivo ya que presentaron mayor dificultad para la mayoría de los alumnos. Tal situación permitió concluir que los alumnos de este grupo no estaban familiarizados con este tipo de problemas, en los que resulta fundamental hacer interpretaciones o deducciones, a partir de las variables que intervienen en los problemas.

La característica fundamental de las actividades seleccionadas para el grupo experimental, de acuerdo con CAME, es que cada tarea debe contener un determinado nivel de conflicto cognitivo, libre de cualquier dificultad relacionado con el escrito. Este conflicto se manifiesta cuando a un alumno se le plantea un problema que no es capaz de resolver fácilmente de forma autónoma, pero que, con la ayuda cuidadosamente estructurada de un adulto o de un par más capacitado, puede entender la naturaleza del problema para luego llegar a la solución. De acuerdo con Vygotsky (1978), un conflicto cognitivo controlado permite llegar a la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP). En esta investigación se manifestó como una capacidad creativa e intelectual en la solución de las tareas realizadas.

A partir de esta característica y la metodología de CAME, se puede establecer que las tareas realizadas por los alumnos del grupo experimental, al finalizar la intervención, provocaron un estímulo de crecimiento en su nivel de pensamiento lógico de 2.59. Esta ganancia se determinó como el resultado de la diferencia de las pruebas diagnóstico y final del TRL de este grupo.

Para las sesiones de intervención se trabajaron 15 problemas cuya solución exigió creatividad y un mayor esfuerzo en el pensamiento lógico de los alumnos. En esta etapa se observó un cambio actitud de en la mayoría de los alumnos, ya que la solución de estos problemas motivó la dinámica de trabajo en casi todas las sesiones. Sin embargo, hubo algunos casos donde el efecto fue contrario. Varios alumnos rechazaron la actividad y su actitud se tornó negativa, es decir, no estaban de acuerdo en resolver problemas que no se explicaron previamente en clase y que no estaban marcados como parte del contenido del programa de matemáticas. Algunos alumnos que manifestaron tal desagrado se destacan por un nivel de aprovechamiento escolar elevado (promedio escolar mayor de 9) y en dos casos aprovechamiento escolar excelente (promedio escolar de 10, hasta ese momento). Sin embargo, estos alumnos no tuvieron éxito en la solución de algunos problemas, lo que implicó explicar y justificar esta actividad ante el tutor del grupo.

La participación del profesor en las actividades desarrolladas con la metodología CAME obliga a abandonar por completo el esquema de enseñanza tradicional, en el que, como experto en temas de matemáticas, se hace una explicación detallada del tema, se proporcionan ejemplos que son resueltos y explicados en su totalidad en el pizarrón. En esta modalidad los alumnos sólo copian fielmente el escrito del pizarrón y después se proporciona a los alumnos actividades idénticas a lo previamente explicado. Esta metodología ha sido predominante en la actividad docente. Por lo anterior, la actividad en el grupo experimental exigió una postura interesante y exigente, más parecida a la de un entrenador deportivo que el de "experto" en temas de matemáticas. En cada sesión, se procuró una serie de intervenciones dirigidas al aumento de habilidades a fin de mejorar el desarrollo del razonamiento lógico de estos alumnos, las explicaciones y retroalimentación siempre estuvieron bajo la responsabilidad de los alumnos.

Los avances de la investigación realizada en este trabajo fueron presentados en los eventos:

III Taller Internacional: Tendencias en la Educación Matemática Basada en la Investigación. TEMBI 2016
Nombre de la ponencia: La implementación del método de Polya en una población de la preparatoria Regional ECB: las dificultades que presentan los estudiantes. Noviembre 2016.

Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, RELME 31.
Nombre de la ponencia: Influencia en el nivel de razonamiento lógico en la solución de un problema histórico: Implicaciones para la enseñanza. Agosto 2017.

De esta última ponencia se ha derivado una publicación aceptada (enero, 2018) por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, CLAME. Cuya publicación saldrá en el 2019.
JMB, J.S. y HRE. INFLUENCIA EN EL NIVEL DE RAZONAMIENTO LÓGICO EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA HISTÓRICO: IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31(2),

---

Algunas implicaciones para la enseñanza, el diseño curricular y la investigación

Para aquellos maestros que estén dispuestos a realizar transformaciones en la metodología de enseñanza que hasta ahora han practicado en su clase de matemáticas, podrían encontrar útil algunas de las estrategias discutidas en este trabajo, con el fin mejorar el comportamiento y la motivación de sus alumnos. Si consideran que el cambio a su práctica actual es demasiado grande o simplemente no los convence en su totalidad, podrían hacer las modificaciones que consideren convenientes para enfocar el pensamiento lógico y creativo de los alumnos.

Los hallazgos de este trabajo apoyan la idea de que el desarrollo del pensamiento lógico se puede lograr trabajando de manera colaborativa en parejas o grupos pequeños de alumnos. El papel del docente es el de escuchar la participación de los integrantes para poder orientar el surgimiento y desarrollo de ideas, en torno al problema a resolver, sin inducir ideas personales. Esta labor puede resultar más efectiva que una excelente clase magistral.

Es importante mencionar que las sesiones de trabajo con los alumnos del grupo experimental no afectaron el desarrollo del programa de matemáticas de la BUAP (elemento directriz que señala y guía las actividades de enseñanza) cursado en ese periodo, siempre se respetó la metodología de enseñanza establecida en dicho programa. Sin embargo, con base en los resultados de este trabajo, no sería desatinado retomar algunos aspectos estratégicos de la metodología que se utilizó y proponer modificaciones en las secuencias didácticas del programa de matemáticas, con la finalidad de que las actividades establecidas en cada secuencia no solo se enfoquen en la repetición de procedimientos algorítmicos para el desarrollo de los conocimientos, sino también en el desarrollo de habilidades del pensamiento lógico para una reflexión creativa, constructiva y crítica de los conocimientos de manera integral para comprender mejor las distintas interacciones que tienen los estudiantes en los ámbitos escolar y social.

Bibliografía

- Acevedo, J. y Oliva, J. M. (1995). Validación y aplicación de un test de razonamiento lógico. *Revista de Psicología General y Aplicaciones, 48*(3), 339-351.
- Adey, P. (1999). The science of thinking, and science for thinking: A description of cognitive acceleration through science education (CASE). *International Bureau of Education.* Vol. 1 pp. 4-32.
- Adey, P., y Shayer, M. (1994). Really Raising Standards: cognitive intervention and academic achievement. *London: Routledge*.
- Adhami, M., Johnson, D., y Shayer, M. (1997). Does CAME work? Summary report on phase 2 of the cognitive acceleration in mathematics education, CAME, project. *British Society for Research into Learning Mathematics Proceedings, Bristol, Reino Unido.*
- Adhami, M., Johnson, D.C., y Shayer, M. (1998). *Thinking mathematics: the curriculum materials of the CAME project.* Londres: Heinemann.
- Adhami, M., Shayer, M., y Twiss, S. (2005). *Let's think through maths! Six to nine years.* Londres: NFER Nelson.
- Aguilar Villagrán, M., Navarro Guzmán, J. I., López Pavón, J. M. y Alcalde Cuevas, C. (2002). Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. *Psicothema*, (2), 382-386.
- Arteta J (2012). Las fracciones en primaria. Experiencias didácticas y alianzas para aprender matemáticas con sentido. *Barranquilla, Universidad del Norte*
- Brown, A. L. 1987. *Metacognition, executive control, self-regulation and other more mysterious mechanisms.* Londres: Lawrence Erlbaum.
- Kilpatrick J. y Wirszup I. (1969). *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics. Volume III: Problem Solving in Arithmetic and Algebra*. Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics.
- Klingler, C. y Vadillo, G. (1997) *Psicología cognitiva. Estrategias en la práctica docente*. México: McGraw-Hill.
- Krutetskii, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press.
- Lawson, A.E. (1976). Formal operation and Field Independence in a heterogeneous sample. *Perceptual and Motor Skill*, *42*, 981-982.
- Renner, J.W 1976. *Research, teaching, and learning with the Piaget model.* Norman, OK: University of Oklahoma Press.
- Reyes, D. J. (1987). Cognitive development of teacher candidates: an analysis. *Journal of Teacher Education, 38*(2), 18-21.
- Niaz, M. (1985). Evaluation of formal operational reasoning by Venezuelan freshmen students. *Research in Science and Technological Education*, *3*(1), 43-50.
- Schoenfeld, A. H. (1979). Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, *10*(3), 173-187.

- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Leaming.* Reston, (VA): NCTM.
- Shayer, M. 1978. *Science reasoning tasks*. Slough, UK: National Foundation for Educational Research.
- Shayer, M., Johnson, D., y Adhami, M. (1999). Does CAME work? (2) Report on key stage 3 results following the use of the cognitive acceleration in mathematics education, CAME, project in year 7 and 8. *The British Society for Research into Learning Mathematics, 19*(2), 79-84.
- Tobin, K. T. y Capie, W. (1981). The development and validation of a group test of logical thinking. *Educational and phychological measurement, 41*(1), 413-423.
- Tobin, K. G. (1988). Aplications of the test of logical thinking. *Unpublished paper*.
- Tornero, B. (2014). The Experience of Using a Cognitive Acceleration Approach with Prospective Primary Teachers from Three Chilean Universities. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 51*(2), 98-118.

Anexos

A.1 Prueba de hipótesis, grupo experimental y de referencia

Prueba de hipótesis con Excel

μ_1 :es la media del desempeño del grupo experimental

μ_2 : es la media del desempeño del grupo control

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_a : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

La hipótesis nula $H_{0,}$ indica que no existe diferencia entre la media del desempeño de la población experimental y la población de referencia, es decir, estos grupos provienen de la misma población. La hipótesis alternativa H_a, sostiene que existe una diferencia significativa entre la media del desempeño de la población experimental y la población de referencia.

La prueba se realizó con la herramienta de análisis de Excel. A continuación, se muestra el resultado.

Prueba t para dos muestras suponiendo varianzas desiguales

	REFENCIA	*EXPERIMENTAL*
Media	3.84882353	3.29411765
Varianza	4.75395083	4.1808604
Observaciones	68	68
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	133	
Estadístico t	1.41994295	
P(T<=t) una cola	0.07898204	
Valor crítico de t (una cola)	1.65639124	
P(T<=t) dos colas	0.15796408	
Valor crítico de t (dos colas)	1.97796126	

De acuerdo con esta prueba si el valor absoluto del valor t es mayor que el valor crítico, se rechaza la hipótesis nula. Sin embargo, en este caso no se puede rechazar la hipótesis nula.

Considerando el valor de P, tenemos que un valor P pequeño proporciona una evidencia fuerte en contra de la hipótesis nula. La diferencia entre las medias de población es estadísticamente significativa, compare el valor p con el nivel de significancia.

Con un nivel de significancia $\alpha=0.05$ tenemos que:

Si $p \leq \alpha$: La diferencia entre las medias es estadísticamente significativa (Rechaza H0) y si $p > \alpha$: La diferencia entre las medias no es estadísticamente significativa (No puede rechazar H0)

En este caso, es claro que la decisión es que no se puede rechazar la hipótesis nula, es decir, no hay suficiente evidencia para concluir que la diferencia entre las medias de las poblaciones es estadísticamente significativa.

A.2 Como resolver problemas, Polya

En el proceso de solución de problemas matemáticos existen varios recursos y procedimientos a seguir para establecer una posible ruta de solución. En 1945, G. Polya publica "How to solve it", que es un compendio para el profesor de cómo puede ayudar a sus alumnos de forma efectiva en la resolución de problemas, este consiste en un método de cuatro fases, como estrategia de apoyo en la resolución de problemas. Estas faces se enfocan con preguntas para que el alumno reflexione y controle cada paso del proceso de solución.

Fase 1. Entender el problema. ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Contradictoria?

Fase 2. Concebir un plan. Eventualmente puedes obtener un plan de la solución. ¿Has encontrado un problema semejante? ¿Has visto el problema en forma ligeramente diferente? ¿Conoces un problema relacionado con éste? ¿Conoces algún teorema que pueda resultar útil?

Fase 3. Ejecución del plan. Ejecuta tu plan de solución, comprueba cada uno de los pasos. ¿Puedes ver claramente que el paso es correcto? ¿Puedes demostrarlo?

Fase 4: Mirar hacia atrás. Examina la solución obtenida. ¿Puedes comprobar el resultado? ¿Puedes verificar el razonamiento? ¿Puedes obtener el resultado de una forma diferente? ¿Se puede ver a simple vista? ¿Puedes usar el resultado, o el método para algún otro problema?

Utilizando este modelo, se pretende que el alumno desarrolle habilidades en estrategias efectivas al resolver un problema matemático. Polya (1978) señala que la heurística permite el estudio de los métodos y reglas del descubrimiento y de la invención. Algunas de las estrategias heurísticas que se pueden aplicar al resolver un problema, por mencionar algunos, son: ensayo y error, buscar un patrón, hacer un diagrama, hacer una tabla de valores, etc.

Schoenfeld (1979) considera que en este proceso entran en juego otros elementos, por ejemplo, las experiencias, conocimientos previos, las creencias acerca de lo que se piensa sobre resolver problemas. Schoenfeld (1992) centra su atención en la incorporación de nuevos componentes de la resolución de problemas que puedan explicar las actuaciones de los resolutores: conocimiento base, aspectos metacognitivos, aspectos afectivos y el sistema de creencias y prácticas.

A.3 Instrumento. Test de razonamiento lógico

INSTRUCCIONES

El cuestionario tiene por finalidad poder comprender mejor la lógica que usas para pensar. El razonamiento que elijas para cada respuesta se considera tan importante como la respuesta misma.

Para responder cada pregunta marca la respuesta en la hoja que se te entrega. Por favor, no escribas nada sobre las preguntas del cuestionario.

Para responder cada una de las preguntas sigue los siguientes pasos.

1. Lee con cuidado el enunciado de cada pregunta.
2. Piensa detenidamente la respuesta haciendo los cálculos que estimes oportunos.
3. Escribe la respuesta en el recuadro correspondiente de la hoja de respuestas.

Ej. 12. $\boxed{\text{b}}$ Razón $\boxed{}$

4. Lee todos los razonamientos que se presentan como posibles explicaciones de la respuesta que has elegido.

5. Selecciona cuidadosamente la opción que consideres oportuna teniendo en cuenta el razonamiento que utilizaste en tu respuesta.

6. Señala en el recuadro correspondiente de la hoja de respuestas la letra que indique la opción que has elegido.

Ej. 12. $\boxed{b}$ Razón $\boxed{4}$

7. Si en algún momento quieres modificar la respuesta ofrecida, táchala y señala la nueva de la forma que se te indica a continuación.

Ej. 12. $\boxed{b}$ Razón $\boxed{\cancel{4}}$ 3

No olvides escribir tu nombre en la hoja de respuestas.

<u>PREGUNTA 1</u>

Se necesita exprimir 4 naranjas para obtener seis vasos de jugo. ¿Qué cantidad de jugo se podría obtener con seis naranjas?

(Considera que todas las naranjas son del mismo tamaño)

a. 7 vasos
b. 8 vasos
c. 9 vasos
d. 10 vasos
e. Otra respuesta

<u>Razón</u>

1. El número de vasos y el número de naranjas estarán siempre en la relación 3 a 2.
2. Con más naranjas, las diferencias serán menores.
3. La diferencia entre las cantidades será siempre de dos.
4. Con cuatro naranjas la diferencia era dos. Con seis naranjas la diferencia sería dos más.
5. No se podría predecir.

PREGUNTA 2

Usando las mismas naranjas de la pregunta 1. ¿Cuántas naranjas se necesitarían para hacer 15 vasos de jugo?

a. 7 naranjas y media

b. 9 naranjas

c. 10 naranjas

d. 13 naranjas

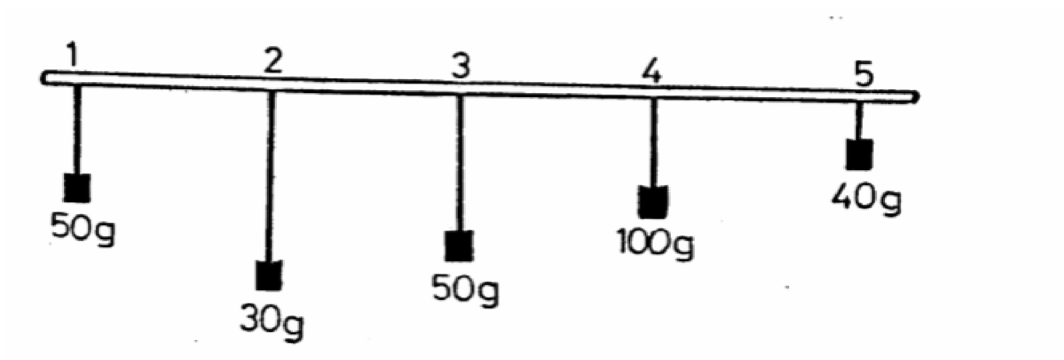
e. Otra respuesta

<u>Razón</u>

1. El número de naranjas y el número de vasos de jugo estarán siempre en la relación 2 a 3.
2. El número de naranjas será siempre menor que el número de vasos de jugo.
3. La diferencia entre las cantidades será siempre de dos.
4. El número de naranjas necesarias será la mitad del número de vasos de jugo
5. No se podría predecir

PREGUNTA 3

Supongamos que queremos hacer un experimento para averiguar si al modificar la longitud de un péndulo cambia también la cantidad de tiempo que tarda en oscilar de un lado a otro. ¿Qué péndulos deberíamos usar para realizar dicho experimento?



a. 1 y 4

b. 2 y 4

c. 1 y 3

d. 2 y 5

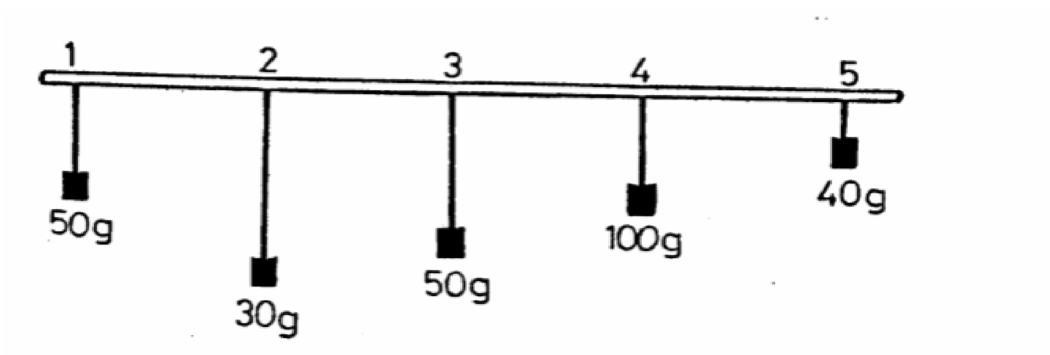
e. Todos

Razón

1. Compararíamos el péndulo más largo con el más corto.
2. Necesitaríamos comparar todos los péndulos entre sí.
3. Al aumentar la longitud tendríamos que disminuir el peso.
4. Los péndulos elegidos tendrían que tener todas las mismas longitudes y distinto peso.
5. Los péndulos elegidos tendrían que tener todos distinta longitud e igual peso.

PREGUNTA 4

Supongamos que queremos realizar un experimento para averiguar si al cambiar el peso del péndulo cambia también la cantidad de tiempo que tarda en oscilar de un lado a otro. ¿Qué péndulos tendríamos que usar para realizar dicha experiencia?



e. Todos

Razón

1. Compararíamos el péndulo más pesado con el más ligero.
2. Necesitaríamos comparar todos los péndulos entre sí.
3. Al aumentar el peso tendríamos que disminuir la longitud.
4. Los péndulos elegidos tendrían que tener diferente peso y la misma longitud.
5. Compararíamos péndulos de igual peso y distinta longitud.

PREGUNTA 5

Un jardinero compró un paquete que contenía 3 semillas de calabaza y 3 semillas de frijol. Si se extrae una semilla del paquete, ¿Cuál es la probabilidad de que ésta sea de frijol?

a. 1 de cada 2
b. 1 de cada 3
c. 1 de cada 4

d. 1 de cada 6

e. 4 de cada 6

<u>Razón</u>

1. Se necesitarían cuatro extracciones dado que las tres semillas de calabaza podrían suceder que se extrajesen seguidas.

2. Hay seis semillas entre las cuales ha de extraerse una de frijol.

3. De las tres semillas de frijol que hay se necesita extraer una.

4. La mitad de las semillas son de frijol.

5. Del total de seis semillas, además de la de frijol se podrían extraer tres de calabaza.

<u>PREGUNTA 6</u>

Un jardinero compró un paquete que contenía 21 semillas de diversas clases. La composición era la siguiente:

3 de flores pequeñas rojas 4 de flores pequeñas amarillas 5 de flores pequeñas naranjas 4 de flores grandes rojas 2 de flores grandes amarillas 3 de flores grandes naranjas

Si sólo ha de plantar una semilla, ¿cuál es la probabilidad de que la planta resultante tenga flores rojas?

a. 1 de cada 2

b. 1 de cada 3

c. 1 de cada 7

d. 1 de cada 21

e. Otra respuesta

<u>Razón</u>

1. Ha de elegir una semilla entre aquellas que dan flores rojas, amarillas o naranjas.

2. 1/4 de las pequeñas y 4/9 de las grandes son rojas.

3. No importa que sean pequeñas o grandes. De las siete semillas rojas que hay se ha de elegir una.

4. Ha de seleccionar una semilla roja de un total de 21 semillas.

5. Siete de las 21 semillas darán flores rojas.

<u>PREGUNTA 7</u>

La siguiente figura representa una muestra de los ratones que viven en un campo. A partir de la figura, indica si es más probable que tengan cola negra los ratones gordos que los delgados.

a. Sí. Los ratones gordos tienen mayor probabilidad de tener cola negra que los delgados.

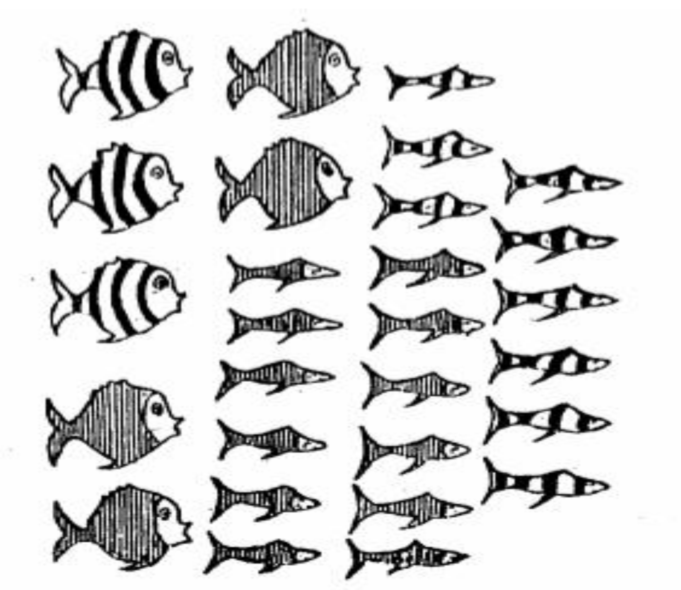
b. No. Los ratones gordos no tienen más probabilidad de tener cola negra que los delgados.

Razón

1. 8/11 de los ratones gordos tienen cola negra y 3/4 de los ratones delgados tienen cola blanca.
2. Tanto alguno de los ratones gordos como alguno de los ratones delgados tienen cola blanca.
3. De los treinta ratones, 18 tienen cola negra y 12 cola blanca.
4. Ni todos los ratones gordos tienen cola negra, ni todos los delgados tienen cola blanca.
5. 6/12 de los ratones con cola blanca son gordos.

PREGUNTA 8

¿Es más probable que tengan rayas anchas los peces gordos que los peces delgados?



a. Sí

b. No

Razón

1. Unos peces gordos tienen rayas anchas y otros estrechas.
2. 3/7 de los peces gordos tienen rayas anchas.
3. 12/28 tienen rayas anchas y 16/28 las tienen estrechas.
4. 3/7 de los peces gordos y 9/21 de los peces delgados tienen rayas anchas.
5. Algunos de los peces con rayas anchas son delgados y otros son gordos.

PREGUNTA 9

Tres estudiantes de cada uno de los cursos de 1^0, 2^0 y 3^0 de preparatoria son candidatos al consejo escolar. La representación estará constituida por un estudiante de cada curso. Cada votante debe considerar todas las combinaciones posibles antes de decidir su voto.

Dos posibles combinaciones serían Tomas, José y Pedro (TJP); e Isabel, Carmen y María (ICM).

Has una lista con todas las combinaciones posibles usando los espacios que se ofrecen en la hoja de respuestas. Hay más espacios de los necesarios.

CONSEJO ESCOLAR

1^0 DE PREPA	2^0 DE PREPA	3^0 DE PREPA
Tomás (T)	José (J)	Pedro (P)
Isabel (I)	Carmen (C)	María (M)
Antonio (A)	Beatriz (B)	Luís (L)

PREGUNTA 10

Se prevé abrir en breve 4 tiendas en un nuevo centro comercial.

Optan por comprar los locales una peluquería (P), una farmacia (F), un supermercado (S) y una cafetería (C).

Cada uno de los negocios mencionados ha de ocupar uno de los locales previstos.

Una posible forma de ocupación sería PFSC.

Has una lista con todas las formas posibles de ocupación de los locales.

Hay más espacios en la hoja de respuestas de los que son necesarios.

1	2	3	4

HOJA DE RESPUESTAS

Apellidos……………………………………………………………. Nombre…………………………… Edad ___ años

Escuela …………………………………………………………………

Población…………………………..……………………………………

1._ **RAZON._**

2._ **RAZON._**

3._ **RAZON._**

4._ **RAZON._**

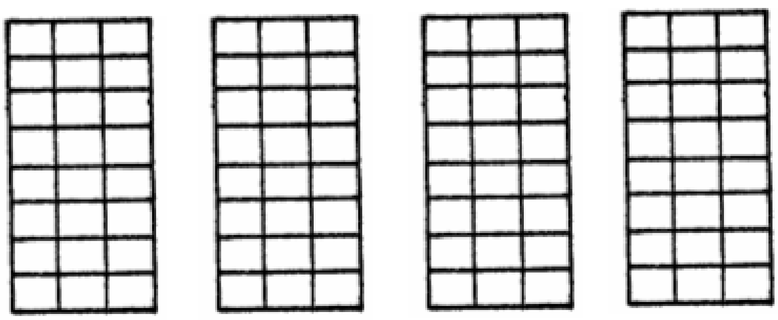
5._ **RAZON._**

6._ **RAZON._**

7._ **RAZON._**

8._ RAZON._

9._



10._