BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LA ILUSIÓN DE LA LINEALIDAD: EL ANÁLISIS DE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRESENTA
ROBERTO SÁNCHEZ SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ ANTONIO JUÁREZ LÓPEZ
CO-DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSÉ DIONISIO ZACARÍAS FLORES

PUEBLA, PUE. JUNIO 2018

BUAP

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el Lic.

ROBERTO SÁNCHEZ SÁNCHEZ

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 08 de junio de 2018, con la tesis titulada:

"La ilusión de la linealidad: el análisis de una propuesta didáctica en estudiantes de bachillerato"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z. a 12 de junio de 2018

DR. JOSIP SLISKO IGNJATOV
COORDINADOR DE LA MAESTRÍA
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS - SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO · 1578

Ccp.Archivo.
DR. JSI / l'agm*

Índice

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por otorgarme la beca que financió totalmente mis estudios de posgrado, lo cual conllevó a la realización y culminación de esta investigación.

A la vida, pues gracias a ella he tenido aprendizajes, experiencias y felicidad, pero sobre todo, puedo ver culminado este proyecto.

A mi madre, Sara Sánchez Martínez, gracias por todo el apoyo incondicional pues a pesar de todos mis errores siempre estás conmigo para comprenderme y hacer todo lo necesario para que pudiera lograr este sueño.

A mi padre, Roberto Sánchez Madariaga, gracias por todo lo que me has inculcado y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación para poder hacer realidad este sueño.

A mi novia, Alicia Barragán Coca, a tu paciencia, comprensión, honestidad, amor y bondad. Pero sobre todo, dedicación y sacrificio pues ello hace que me inspire a que debo ser mejor cada día, gracias por estar siempre a mi lado.

A María Blanca F. Coca Nava, por sus consejos y apoyo, los cuales le agradezco mucho pues ello ha influido a lograr este objetivo en mi vida y ver culminado este sueño.

A mi Mtra. Rosalva Jiménez Pérez, por compartir sus anécdotas e impulsarme a ser cada día mejor y le agradezco a Dios porque usted es parte importante para lograr este sueño.

Al Dr. José Antonio Juárez, por haberme brindado la oportunidad de desarrollar esta investigación. Su motivación, confianza y apoyo a lo largo de este tiempo fue sumamente importante, además de su orientación, seguimiento y constante supervisión en la realización del mismo, en verdad muchas gracias.

A las Doctoras. Lidia Hernández, Estela Juárez, Leticia Fuch y Aracely quienes se tomaron la molestia de formar la comisión revisora y que gracias a sus aportaciones, esta investigación se pudo enriquecer.

A mis maestros, a todos y cada uno de ellos les dedico cada página de esta investigación, ya que influyeron con sus lecciones y experiencias para formarme como una persona de bien y preparada para los retos que nos da la vida.

A mis hermanos Rigoberto y Armando Sánchez Sánchez por su paciencia y ánimo brindados durante mi etapa en el posgrado y en la vida.

A mis abuelos, porque a pesar de ya no estar conmigo, estoy seguro que estarán muy orgullosos.

A mis amigos y compañeros por haber hecho de mi etapa en el posgrado un trayecto de vivencias que nunca olvidaré.

Gracias al apoyo de todas y cada una de estas personas, porque me han impulsado con sus acciones y consejos para seguir concretando mis metas en este mundo tan maravilloso del conocimiento, sé que aún me falta mucho camino por recorrer pero que con base en esfuerzo y dedicación lo lograré.

Introducción

Las relaciones lineales o proporcionales han recibido bastante atención en sus diferentes facetas dentro de la educación matemática y en sus diferentes niveles académicos (primaria, secundaria, bachillerato). Lo anterior se debe a que las relaciones lineales son un modelo que se puede aplicar en un gran número de situaciones tanto prácticas como teóricas. Debido a la importancia de estas relaciones, también existe una fuerte tendencia de los estudiantes para aplicar las propiedades casi en cualquier parte o como Freudenthal (1983, p. 267, citado en De Bock, Van Dooren, Janssens y Verschaffel, 2007, p. 3) sugiere:

"*La linealidad es una propiedad de las relaciones tan sugestiva que uno se rinde fácilmente a la seducción para hacer frente a cada relación numérica como si fuese lineal.*"

Con base en lo anterior, el presente trabajo de tesis tiene por objetivo aplicar una propuesta didáctica enfocada en confrontar la ilusión de la linealidad y determinar su efecto en estudiantes del Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Tlaxcala (CECyTE) del plantel 15 de San Juan Huactzinco, Tlaxcala

En el Capítulo 1 se muestra parte de la revisión de literatura que se realizó durante la elaboración del presente trabajo pues contiene los antecedentes. Comienza dando un panorama general de las matemáticas y la educación, para posteriormente adentrarse en la proporcionalidad y en los problemas de valor faltante y desembocar en la linealidad y las dificultades que se presentan en ella en diferentes tipos de problemas. También menciona algunas causas de la linealidad y sugiere algunas recomendaciones.

El Capítulo 2 contiene el marco teórico, en él se mencionan tres partes fundamentales del presente trabajo. Se habla sobre los aspectos teóricos de la linealidad, de los problemas verbales, de la teoría de Torulf Palm y de las secuencias didácticas.

El planteamiento del problema se encuentra en el Capítulo 3. Aquí se mencionan los objetivos generales y específicos, las preguntas que se pretenden responder, los supuestos iniciales y la justificación de este trabajo. Una sección muy importante que se encuentra en este capítulo es el método que se aplicará, en él se encuentran las características de los informantes y la forma en que se realiza la presente investigación.

El Capítulo 4 está dedicado al análisis del pre-test. Aquí se encuentra el comparativo de los tres diferentes grupos a los cuales se les aplicó el instrumento con los diferentes problemas, además de la categorización de las diferentes formas en que los estudiantes resolvieron los problemas propuestos. Se mencionan las diferentes categorías de cómo resolvieron los problemas y se dan ejemplos de cada una de éstas. Se señalan las particularidades de cada tipo de problema y la frecuencia con que los estudiantes resolvieron los diferentes problemas.

En el Capítulo 5 se muestra el análisis de los resultados del post-test y las particularidades de cada tipo de problemas, además del tipo de razonamiento que usaron los estudiantes para resolver el post-test. Posteriormente se realiza un comparativo del pre y post-test de los estudiantes de los diferentes grupos para observar las diferencias entre los dos instrumentos. Al final de este capítulo se realiza un seguimiento puntual de algunos alumnos a los cuales se les aplicó la propuesta didáctica, pues se puede observar la transición entre el pre-test, aplicación de la propuesta didáctica y post-test.

El Capítulo 6 está destinado a las conclusiones del presente trabajo, en el cual se incluye una breve discusión sobre los resultados obtenidos.

La bibliografía que se presenta en esta investigación tiene la finalidad de dar a conocer a los lectores las referencias bibliográficas las cuales pueden servir de consulta y así profundizar en el tema.

Finamente, en los anexos se muestran los instrumentos utilizados en el presente trabajo los cuales pueden servir de consulta o para futuras investigaciones.

Capítulo 1. Antecedentes

En este capítulo se muestra la revisión de literatura del presente trabajo de investigación.

1.1 Las matemáticas en la educación y sus dificultades

Existen diversas cuestiones que interconectan a las matemáticas con los programas escolares para construir fundamentos en el aprendizaje de las matemáticas y desarrollar el razonamiento lógico-matemático.

1.1.1 Las matemáticas en la educación

En las reformas y programas de estudio de diversos países se considera que uno de los principales objetivos de la educación matemática es propiciar la capacidad de desarrollar y utilizar modelos para dar sentido a las diversas situaciones que rodean la vida diaria y de los sistemas complejos derivados de nuestra sociedad moderna (Blum, 2002; Consejo Nacional de profesores de Matemáticas [NCTM], 1989, 2000, citado en Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens & Verschaffel, 2005, p. 58).

Regularmente, la forma tradicional de la enseñanza de modelos matemáticos y la solución de problemas en la escuela primaria y secundaria es por medio del uso de problemas de aplicación, es decir, la solución de un problema matemático consiste principalmente en encontrar o ejecutar una fórmula matemática previamente enseñada (Schoenfeld, 1992, citado en De Bock, Van Dooren, Janssens & Verschaffel, 2007, p. 36) o la respuesta se puede encontrar mediante la realización de una o más operaciones aritméticas (+, -, x, :) en las cantidades del problema (Verschaffel, Greer, y De Corte, 2000, citado en Van Dooren et al., 2005, p. 58).

1.1.2 Dificultades en la resolución de problemas

En los libros de texto, los estudiantes pueden encontrar señales muy superficiales tales como palabras o frases clave, la sección donde aparece el problema o el contexto del problema. Estas señales superficiales le permite al alumno decidir qué operación se requiere para resolver el problema de manera exitosa (Van Dooren et al., 2005).

Además, los alumnos codifican en su memoria las correlaciones entre las características superficiales y el método utilizado para la solución del problema y proceden a ejecutar dicho método en otros problemas debido a la detección de estas características superficiales (Ben-Zeev, 1998; Ben-Zeev y Star, 2001; Chi y Bassok, 1989; Schoenfeld, 1988, citado en Van Dooren et al., 2005, p. 58).

Con el paso del tiempo, los estudiantes comienzan a perder la capacidad para distinguir cuándo determinada operación aritmética es apropiada para solucionar un problema y cuándo no es apropiada, más bien, resuelven los problemas mediante conductas estereotipadas (Van Dooren et al., 2005).

También, debido al "contrato didáctico" (Brousseau, 1997, citado en Van Dooren et al., 2005, p. 62) los estudiantes saben que pueden resolver los problemas asumiendo que tienen una respuesta exacta, numérica y deben proporcionarla. Existe una amplia evidencia empírica de la presencia de este contrato didáctico en la solución de problemas y por su impacto en la aparición de respuestas inapropiadas (Reusser y Stebler, 1997; Verschaffel, 2000, citado en Van Dooren et al., 2005, p. 62).

1.2 Proporcionalidad y problemas de valor faltante

Dentro de la investigación en educación matemática, se han realizado amplios estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje del razonamiento proporcional y cómo puede ser mejorado este proceso. Se presta una particular atención a los problemas de tipo proporcional debido a su amplia utilidad en situaciones de la vida cotidiana y en muchos problemas de matemáticas.

1.2.1 Proporcionalidad en la educación

En la infancia, los niños se encuentran con las relaciones proporcionales en su forma más simple (Van den Brink y Streefland, 1979, citado en Van Dooren et al., 2005, p. 59) en situaciones como: “si un coche de juguete tiene cuatro ruedas entonces en dos coches de juguete hay ocho ruedas”. A partir de los primeros años de educación primaria los niños aprenden a multiplicar y dividir y aprenden a reconocer cuándo se deben aplicar estas operaciones aritméticas de manera simple, es decir, de un solo paso, en problemas como: “1 kg de naranjas cuesta 5 pesos. ¿Cuánto costarán 3 kilogramos de naranja?”. Posteriormente, los estudiantes son introducidos en el razonamiento proporcional (Van Dooren et al., 2005, p. 59).

Por lo general, a partir de cuarto grado, los estudiantes se enfrentan frecuentemente a problemas de proporcionalidad. A menudo, se afirma que tales problemas pueden ser un sustituto de situaciones de la vida cotidiana en la que los estudiantes necesitarán estas habilidades matemáticas (Verschaffel, Greer y De Corte, 2000, citado en De Bock et al., 2007, p. 6).

El concepto de proporcionalidad aparece como un "hilo conductor" de los problemas de proporcionalidad típica en la escuela primaria y secundaria en la idea de los modelos lineales, aproximaciones de cálculo y estadística en el nivel bachillerato y para la noción abstracta de mapas lineales entre espacios vectoriales en el nivel universitario (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 2002, citado en Van Dooren et al., 2005, p. 60).

1.2.2 Problemas de valor faltante

A largo de la educación primaria y secundaria, la mayoría de las tareas de razonamiento proporcional que los estudiantes encuentran, son del tipo valor faltante (Cramer y Post, 1993, citado en Van Dooren, De Bock, Evers y Verschaffel, 2009, p. 187), es decir, problemas de aplicación en los que se conocen tres números (dos formando una relación y el tercero es uno de los dos valores de otra relación), y el cuarto número tiene que ser encontrado (Kaput y West, 1994, citado en Van Dooren et al., 2009, p. 187) o como los denominó Vergnaud (1983, 1988, citado en Van Dooren et al., 2009, p. 187): "problemas de regla de tres".

Es por este tipo de ejercicios y soluciones que se espera que los estudiantes adquieran una comprensión de las relaciones multiplicativas que existen en situaciones de proporción, o como ha señalado Vergnaud (1983, citado en Van Dooren et al., 2005, p. 60) una comprensión de la relación de multiplicación entre las cantidades en dos espacios de medida: las cantidades de dos espacios de medida se relacionan entre sí mediante la multiplicación, por ejemplo: “5 naranjas pesan 1000 gramos ¿Cuál es el peso de 20 naranjas?” por lo que una naranja pesa 200 gramos, por lo tanto 20 naranjas pesarán 4000 gramos. La relación entre los espacios de medida se da entre número de naranjas y peso pues si multiplicas 200 gramos por la cantidad de naranjas, obtienes el peso correspondiente y también existe una relación multiplicativa entre los elementos dentro de cada espacio de medida pues si se triplica el número de naranjas, el peso se triplica.

1.3 Linealidad

Uno de los ejemplos más comunes de un comportamiento corrompido en la resolución de problemas es la tendencia de los alumnos a generalizar en exceso la aplicabilidad del modelo proporcional (De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. y Verschaffel, L., 2002; Van Dooren et l., 2009).

Freudenthal (1983, p. 267, citado en Van Dooren et al, 2005, p. 59) advirtió que

> *"La linealidad es una propiedad tan sugestiva de las relaciones que uno se rinde fácilmente a la seducción para hacer frente a cada relación numérica como si fuese lineal."*

A partir del contexto de esta cita, queda claro que Freudenthal utilizó el término lineal como sinónimo de proporcional, en referencia con las relaciones representadas gráficamente por una línea recta a través del origen (Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, y Verschaffel, 2004, citado en Van Dooren et al., 2005, p. 59).

El mal uso de la linealidad en situaciones no lineales (a veces referido como la "ilusión de la linealidad o proporcionalidad", la "trampa de la linealidad", el "obstáculo lineal", etc.) es un error "clásico", probablemente uno de los más antiguos de la literatura del pensamiento matemático (De Bock et al., 2002).

Un ejemplo muy famoso y de los más antiguos de la literatura es la duplicación de un cuadrado en el diálogo *Menón* de Platón, en el que se pide a un esclavo que duplique el área de un cuadrado dado. El esclavo aplica de manera inmediata la idea de proporcionalidad (entre la longitud y el área), es decir, el esclavo piensa que si duplica la longitud de los lados del cuadrado entonces el área se duplicará y cambia de opinión sólo cuando Sócrates le ayuda a diagnosticar y corregir el error en su razonamiento al confrontarlo con un dibujo (De Bock et al., 2002).

Otro ejemplo famoso de una mala especificación del razonamiento lineal, es la afirmación de Aristóteles la cual sugiere que si se tienen dos objetos (un objeto 10 veces más pesado que el otro) y se sueltan a determinada altura, el objeto que pesa 10 veces más, llegará a la tierra 10 veces más rápido que el objeto menos pesado (Galilei, 1638/1954, citado en Van Dooren et al., 2005, p. 59).

El concepto de linealidad (o proporcionalidad) es un concepto clave en las matemáticas y en la educación desde la escuela primaria hasta la universidad (De Bock et al., 2002) pues como ya se ha mencionado, aparece en muchas formas: desde el uso de la "regla de tres" en la escuela primaria, la idea de los modelos lineales en el nivel secundaria, aproximaciones de cálculo y estadística en el nivel bachillerato, y para la abstracción en un vector en el espacio en los cursos universitarios (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 2002, citado en Van Dooren et al., 2005, p. 60).

Sin embargo, el refuerzo de la linealidad en numerosas ocasiones en la matemática escolar, junto con su sencillez intrínseca, puede dar lugar a una tendencia en los estudiantes e incluso en adultos para ver y aplicar el modelo lineal "en todas partes" (De Bock et al., 2002). Debido a su simplicidad, las funciones lineales aparecen inmediatamente en la mente del ser humano porque, sin duda, no hay funciones que sean más simples que las lineales (Rouche, 1989, p. 17, citado en De Bock et al., 2002, p. 311).

Un estudio realizado por Van Dooren et al. (2005) demostró que los estudiantes de secundaria distinguieron con mayor frecuencia las situaciones en las que la proporcionalidad es aplicable y cuando no lo era, pero incluso en el último grado, se realizaron un número considerable de errores proporcionales.

1.3.1 Autenticidad de problemas

La actividad de resolución de problemas admite problemas “reales” aceptables (o buenos) que los estudiantes puedan encontrar fuera de sus clases de matemáticas (Van Dooren et al., 2005), sin embargo, varias investigaciones (Reusser y Stebler, 1997; Verschaffel, De Corte, y Lasure, 1994 citado en Van Dooren et al., 2005, p. 58) han demostrado que los estudiantes comienzan a resolver problemas con poca o ninguna relación con el mundo real y como algo bastante lejos del auténtico proceso de elaboración de modelos matemáticos, lo cual se prevé en los documentos de reforma y planes de estudios debido a lo estereotipado de los problemas que se ofrecen a los estudiantes y a la forma en que estos problemas son manejados por los profesores (Verschaffel, 2000, citado en Van Dooren et al., 2005, p. 58).

Verschaffel, De Corte, y Lasure (1994, p. 276, citado en Van Dooren et al., 2009, p. 187) encontraron que, más del 90% de los estudiantes de entre 10 y 12 años de edad, respondió 170 segundos para el problema: “el mejor tiempo de John para correr 100 metros es de 17 segundos. ¿Cuánto tiempo le llevará correr 1 kilometro?“. La situación del mundo real que evoca el problema no permite una respuesta única y precisa, pero casi todos los estudiantes buscaron la operación matemática escondida en el planteamiento del problema en vez de concebir y abordar estos problemas como problemas ilegítimos en matemática realista (Nesher, 1996; Reusser y Stebler, 1997; Wyndhamn & Säljö, 1997, citado en Van Dooren et al., 2009, p.188).

La gran mayoría de los estudiantes tienden a ignorar su conocimiento realista y se acercan a los problemas mediante la construcción de un modelo que no tiene en cuenta algunos aspectos esenciales de la situación del problema en la vida real (Verschaffel et al., 2000, citado en Van Dooren et al, 2005, p. 61).

Varias investigaciones han señalado los beneficios de la construcción y organización de las actividades matemáticas alrededor de contextos ricos, atractivos y realistas (Palm, 2002, citado en De Bock at al., 2007, p. 55). De Bock et al. (2007) mencionan que tienen la función de ayudar a hacer una correcta representación del problema y encontrar una estrategia de solución correcta al provocar la activación y el uso del conocimiento previo contextualizado (experiencias del mundo real, intuiciones, modelos, estrategias, etc.) que pueden ser útiles para comprender y resolver el problema.

El término “autenticidad” no tiene un significado único, pero en general, los autores lo utilizan para referirse a las tareas que se encuentran fuera de la escuela (simulaciones de alta fidelidad en un contexto), y que contrastan con las tareas matemáticas “no auténticas”', que son las simulaciones de baja fidelidad que se encuentran habitualmente en el entorno escolar (Palm, 2002, citado en De Bock at al., 2007, p. 128).

La teoría propuesta por Torulf Palm marca aspectos importantes que deberían tener los problemas para ser considerados auténticos. Uno de estos aspectos se refiere al realismo de los datos y la información, pues para considerar auténticos a los problemas debe de haber un grado razonable de fidelidad, los números y valores indicados deben ser realistas o muy cercanos a los correspondientes (Palm, 2009).

De Bock et al. (2002) demostraron que, debido a la amplia atención que prestan los estudiantes de primaria y secundaria en matemáticas al razonamiento proporcional, tienden a confiar demasiado en métodos proporcionales en diversos dominios de las matemáticas tales como la probabilidad (Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L., 2003) y la geometría, la cual es motivo de investigación en el presente trabajo .

1.3.2 Constantes

Van Dooren et al., (2005) realizaron una investigación sobre el uso excesivo de la linealidad para resolver problemas, cómo se origina y su desarrollo en el transcurso de la edad en relación con las experiencias de aprendizaje de los estudiantes y sus habilidades de razonamiento proporcional emergentes.

Los estudiantes se enfrentaron a una prueba que constaba de ocho problemas de valor faltante. Dentro de dicha prueba había problemas pertenecientes a la categoría constantes. A continuación, se muestra un ejemplo de dicha categoría: “Mamá puso 3 toallas en el tendedero. Después de 12 horas estaban secas. La abuela puso 6 toallas en el tendedero. ¿Cuánto tiempo les toma secarse?” (Respuesta correcta: 12 horas, respuesta proporcional: 24 horas). Uno esperaría que el problema con un modelo “constante” (como el problema del “tendedero” mencionado anteriormente) sería un problema que los estudiantes podrían solucionar fácilmente en la prueba (debido a que no había necesidad de cálculos), pero tiene la más alta tasa de errores proporcionales (hasta un 80% en quinto grado).

De Bock at al., (2007) sugieren que los estudiantes muestran una visión simplista en la resolución de problemas, debido a que todos los problemas no pueden ser resueltos mediante el uso de cálculos matemáticos simples con los números que se proporcionan en el problema, y que las consideraciones basadas en el conocimiento y en el contexto del mundo real no participan en el proceso de solución.

El uso de relaciones lineales se percibe como correcto sin necesidad de ninguna otra justificación, los estudiantes eran demasiado confiados en ella, y eran reacios a cuestionar la exactitud de su enfoque lineal cuando se enfrentan a pruebas contradictorias.

Cuando se observa en varios casos el uso excesivo de la linealidad, la conexión con la teoría de Fischbein (1987, 1999, citado en De Bock at al., 2007, p. 146) de la intuición en el razonamiento matemático es sorprendente. Fischbein describe el conocimiento intuitivo como un tipo de conocimiento inmediato, i mplícito, evidente por sí mismo, basándose en las características sobresalientes del problema, lo que lleva predominantemente a las generalizaciones, genera una gran confianza y a menudo persiste a pesar de la enseñanza formal.

1.3.3 Problemas geométricos

De Bock et al., (2007) sugiere que probablemente los casos más conocidos de la excesiva dependencia de los estudiantes en el modelo lineal se encuentran en el dominio de la geometría. Por ejemplo, se informa de que los razonamientos lineales incorrectos ocurren con frecuencia en problemas acerca de las relaciones entre los ángulos y lados de figuras geométricas (véase, por ejemplo, Bold, 1969; De Block-Docq, 1992; Rouche, 1992, citado en De Bock, et al., 2007, p. 17).

Los estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas [NCTM] (1989, p. 114-115, citado en De Bock, et al., 2007, p. 18) indican que "... la mayoría de los estudiantes entre el quinto y octavo grados erróneamente creen que si se duplican los lados de una figura para producir una cifra similar, el área y el volumen también se duplicará".

En otras palabras, los estudiantes tienden fuertemente a relacionar la longitud y el área o la longitud y el volumen como si fuese lineal en lugar de, respectivamente, lo relacionen de forma cuadrática y cúbica. En consecuencia, se aplica el factor lineal en lugar de su cuadrado o cubo para determinar el área o volumen de una figura ampliada o reducida (De Bock et al., 2007).

Una ampliación o reducción lineal de factor r, se multiplica por el factor r para longitud, para el área por el factor de r^2 y para volúmenes por el factor r^3. Un aspecto crucial de la comprensión de este principio es la idea de que estos factores dependen únicamente de la dimensionalidad de las magnitudes involucradas (longitud, área y / o volumen), y no de las particularidades de las figuras, es decir, si son cuadrados, círculos, etc. (De Bock et al., 2007).

Freudenthal (1983 citado en De Bock et al., 2007, p. 18), sostiene que el principio que rige la ampliación (o reducción) de las figuras geométricas es fundamental en las matemáticas y la ciencia y, por lo tanto, merece nuestra mayor atención, tanto en lo fenomenológico como desde un punto de vista didáctico.

La idea matemática de una ampliación lineal no siempre se ajusta a la realidad física y biológica de escala (Haldane, 1928; Kindt y de Lange, 1986; Thompson, 1961, citado en De Bock et al., 2007, p. 20). Algunos ejemplos de ello que encontramos en la naturaleza es que los árboles viejos son más gordos que los ejemplares más jóvenes; los tigres tienen patas más gruesas que los gatos; las alas de un águila son comparativamente mayores que los de una golondrina; ¿pequeños mamíferos deben seguir comiendo para mantenerse calientes? En el caso de los bebés, no son adultos linealmente reducidos. Las longitudes no se amplían o se reducen en todas las dimensiones por el mismo factor.

Un estudio realizado por De Bock et al., (2007) en estudiantes de 12-13 años de edad comprobó el uso excesivo de linealidad en la solución de los problemas planteados por el efecto de un aumento lineal o reducción de una figura geométrica en el perímetro o área.

1.3.4 Problemas de área y volumen

Los estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas [NCTM] (1989, p. 114-115, citado en Van Dooren et al., 2005, p. 59) sugieren que:

> *La mayoría de los estudiantes en los últimos grados de primaria y alumnos de secundaria creen que si los lados de una figura se duplican para producir una cifra similar, el área y el volumen también se duplicará.*

Una investigación realizada por De Bock et al. (2007) demostró lo anterior con el problema siguiente:

> *Bart es un pintor publicitario. En los últimos días, tuvo que pintar las decoraciones de navidad en varias ventanas de una tienda. Ayer hizo un dibujo de 56 cm de altura de un Santa Claus en la puerta de una panadería. Necesitó 6 ml de pintura. Ahora se le pide hacer una versión ampliada del mismo dibujo en una ventana de supermercado.*

Esta copia debe ser de 168 cm de alto. ¿Qué cantidad de pintura necesitará aproximadamente Bart para hacer esto?

La mayoría de los alumnos solo aplicó regla de tres, obteniendo como resultado que se necesitan 18 ml de pintura. Incluso, al responder a las preguntas sobre el efecto de la reducción a la mitad o duplicar los lados de una figura para producir una figura similar. Futuros profesores o profesores en formación, afirman que el área y el volumen se reducen a la mitad o se duplican también (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, 1989; Outhred y Mitchelmore, 2000; Simon y Blume, 1994; Tierney et al, 1990; citados en De Bock et al., 2002, p. 313).

En general, hay una tendencia casi irresistible en los estudiantes de diferentes niveles educativos, a creer que si una figura se agranda $k\ veces$, el área y el volumen es ampliada $k\ veces$ también (De Bock et al., 2002). Por ejemplo, al aplicarles el problema siguiente: "El granjero Carlos necesita aproximadamente 8 horas para abonar un terreno cuadrado de 200 m de lado ¿Cuántas horas necesitará para abonar un terreno cuadrado con 600 m de lado?" La mayoría de los estudiantes en estos estudios fracasó al resolver este tipo de problemas no proporcionales a causa de su fuerte tendencia para aplicar el razonamiento proporcional "en todas partes".

A partir de una investigación realizada por De Bock et al., (2007) con respecto al tipo de figura, encontraron que hubo puntuaciones más altas en los problemas con figuras regulares (cuadrados, círculos) y puntuaciones más bajas para los problemas con figuras irregulares.

El tipo de figura jugó un papel importante debido a que los estudiantes se desempeñaron significativamente mejor en los problemas no proporcionales cuando la figura implicada era regular (De Bock et al., 2007).

Incluso sólo muy pocos estudiantes hicieron el cambio al razonamiento correcto no proporcional cuando se les proporcionaban considerables apoyos tales como estímulos metacognitivos o dibujos (De Bock, et al., 2002).

1.4 Esquemas en la resolución de problemas no lineales

Existen investigaciones teóricas y empíricas sobre cómo y por qué los dibujos y diagramas son una herramienta útil en la mejora de la capacidad de las personas para representar y resolver matemáticos problemas (De Corte, Greer, y Verschaffel, 1996; Schoenfeld, 1992, citado en De Bock, et al., 2007, p. 27).

1.4.1 El papel de los esquemas en la resolución de problemas matemáticos

En este sentido, hacer un dibujo o diagrama de la situación planteada en el problema puede resultar crucial para el que intenta resolver un problema matemático (Diezmann, 2000a, citado en Juárez, Mejía, González y Slisko, 2014). En dicho estudio se encontró que si se construye una representación (mental) apropiada de los elementos esenciales y las relaciones que intervienen en el problema (Polya, 1945; Schoenfeld, 1992, citado en De Bock, et al., 2007, p. 27), las representaciones esquemáticas son más positivas con respecto del éxito de la resolución de problemas matemáticos (van Garderen y Montague, 2003, citado en Juárez et al., 2014).

Estas investigaciones también sugieren que un dibujo o esquema puede reflejar una comprensión errónea del problema y será de poca ayuda para la solución de problemas (Van Essen y Hamaker, 1990). Existen diversas investigaciones que intentan explicar las razones por las cuales los estudiantes tienen dificultades al elaborar representaciones esquemáticas de problemas, señalando que una inadecuada representación puede limitar las capacidades de los niños en la resolución de problemas (Diezmann, 2000b; Mejía, 2014, citado en Juárez et al., 2014).

1.4.2 Esquemas para la resolución de problemas no lineales

En los problemas no proporcionales, esta actividad representacional debería ayudar a los estudiantes para detectar lo inadecuado de un razonamiento lineal, y para determinar la naturaleza de la relación no lineal que conecta los elementos conocidos y desconocidos en esta representación del problema.

Por supuesto, realizar un dibujo o diagrama no garantiza que se va a encontrar la solución de un problema dado (De Bock, et al., 2007). Cuando los estudiantes no tienen éxito al realizar un esquema “correcto”, podría ser más eficaz y de gran ayuda presentar un diagrama “correcto” ya hecho. Estos autores realizaron una investigación para determinar el efecto de los dibujos en el rendimiento de los estudiantes al resolver problemas. Encontraron un ligero aumento en las puntuaciones de los estudiantes en general o en su rendimiento en los problemas no proporcionales pero en ciertas circunstancias. Al grupo de estudiantes que realizaron su propio dibujo, inesperadamente mantuvieron el porcentaje de respuestas correctas (2%) en las pruebas. Al grupo que se les proporcionó el dibujo ya hecho, el porcentaje de respuestas correctas en los problemas no proporcionales aumentó ligeramente de 2% a 5%, pero aún sigue siendo extremadamente bajo.

El análisis de las hojas de respuesta de la primera prueba reveló que sólo el 2% de los estudiantes construyó de manera espontánea un dibujo o esquema de los problemas que no son proporcionales. Al parecer, los estudiantes no estaban habituados a realizar dicho esquema o dibujo para modelar y resolver una situación problemática. El análisis de las respuestas de la segunda prueba reveló que, a pesar de la instrucción explícita de realizar el esquema, los estudiantes produjeron dibujos para los elementos no proporcionales en sólo el 46% de los casos.

La realización de los dibujos o la presentación de los dibujos ya hechos era demasiado débil para romper el predominio del modelo lineal en el razonamiento de los estudiantes pues no se encontró un efecto benéfico significativo en el rendimiento de los estudiantes. El análisis cualitativo de las hojas de respuesta de los estudiantes de esta investigación sugiere que la instrucción para hacer dibujos o incluso los dibujos dados eran a menudo ignorados por estos estudiantes (De Bock, et al., 2007).

Posiblemente, la calidad de representación de estos dibujos era en su mayoría demasiado baja para ayudar realmente a los estudiantes en la interpretación y resolución correcta de este tipo de problemas. Incluso, no podemos determinar si la baja calidad de la mayoría de los dibujos de los estudiantes fue debido a su incapacidad para realizar mejores dibujos o de su falta de voluntad para hacer dibujos de problemas que parecían sumamente fáciles para ellos.

1.4.3 Figuras regulares vs figuras irregulares en problemas no lineales

A partir de una investigación realizada por De Bock, et al., (2007) se encontró que, con respecto al tipo de figura:

- Los porcentajes de respuestas correctas en los diferentes tipos de problemas no proporcionales fueron en la dirección esperada, es decir, puntuación más alta en los problemas con figuras regulares (cuadrados, círculos) y puntuaciones más bajas para los problemas con figuras irregulares.
- Los porcentajes de las respuestas correctas de los problemas proporcionales estaban en la dirección opuesta, es decir, un mayor porcentaje de respuestas correctas en los problemas con figuras irregulares que para los problemas con figuras regulares. Un análisis detallado de las respuestas incorrectas de los estudiantes sobre los problemas proporcionales demostró que eran por lo general debido a un proceso de razonamiento inadecuado no proporcional.

El 92% de los problemas proporcionales fueron resueltos correctamente por estudiantes de 12-13 años, mientras que sólo un 2% de los problemas no proporcionales fueron resueltos correctamente. En el grupo estudiantes de 15-16 años, el porcentaje de respuestas correctas en los problemas proporcionales fue del 93% y de los problemas no proporcionales fue del 17% (De Bock, et al., 2007).

El tipo de figura jugó un papel importante debido a que los estudiantes se desempeñaron significativamente mejor en los problemas no proporcionales cuando la figura implicada era regular (un cuadrado o un círculo), sin embargo, se observó un inconveniente, que fue peor en los problemas proporcionales sobre estas figuras regulares, pues algunos estudiantes empezaron a aplicar un razonamiento no proporcional en los problemas proporcionales (De Bock, et al., 2007).

1.5 Causas de la ilusión de la linealidad

Como ya se ha mencionado, la linealidad es una tendencia en los estudiantes e incluso en adultos, por ello, De Bock, et al., (2007) sugieren que existen tres causas principales para que persista la ilusión de la linealidad.

- *La manera en que a menudo se enseña la proporcionalidad*. Algunas partes del plan de estudios prestan una atención casi exclusiva a la proporcionalidad con respecto a las relaciones no lineales. Existe un uso desmedido de los problemas de valor faltante y un énfasis excesivo con procesos de rutina para su resolución, en comparación con un análisis significativo de situaciones. La proporcionalidad es más que una relación de cuatro términos. Si la enseñanza se mantiene confinada al estrecho dominio de preguntas de valor faltante de cuatro términos, y si no contrasta la proporcionalidad con la no proporcionalidad, en consecuencia, los estudiantes son propensos a permanecer "prisioneros" de la linealidad.

- *Deficiencias del conocimiento geométrico general de los estudiantes*. Esta segunda causa se refiere a una enseñanza poco exitosa de la geometría en general. En la resolución de problemas de proporcionalidad, los estudiantes muestran algunas lagunas en su conocimiento geométrico general. Esto significa que su comprensión de proporcionalidad carece de algunos vínculos estructurales con preguntas geométricas significativas. Generalizando el comentario anterior, se podría decir que la matemática no es una relación de elementos.
- *Intuición y simplicidad de la relación lineal.* Supongamos que un estudiante recibe una formación apropiada en la proporcionalidad y la no proporcionalidad. Él o ella podrían ser seducidos por los encantos de la proporcionalidad. Este es un efecto de lo que podría llamarse la inercia de los conceptos. Cuando se tiene una herramienta intelectual a disposición, si esta herramienta resuelve adecuadamente muchos de los problemas anteriores, si parece más simple y más elegante que otros, entonces se apoyan de ella hasta nuevo aviso. Lo que sucede aquí se refiere al mismo tiempo a la agradable y sencilla propiedad de los conocimientos y la naturaleza indolente de la mente humana. Incluso cuando los estudiantes han sido debidamente orientados para identificar situaciones no lineales, muestran una tendencia a abusar de un modelo lineal.

En los últimos quince años, aproximadamente, se han realizado esfuerzos considerables de investigación para llenar el vacío en nuestro conocimiento sobre el uso excesivo de la linealidad en los estudiantes. Además de las investigaciones que se han hecho por mostrar sus causas principales, también se han hecho estudios para proporcionar las tendencias al resolver los problemas.

1.6 Tendencias para resolver problemas no lineales

Como ya se ha mencionado, diversas investigaciones han demostrado que los estudiantes tienen una tendencia a utilizar métodos de solución proporcionales para resolver problemas en los que no es apropiado. De Bock, et al., (2007) han observado tres tipos de estudios.

1.6.1 Falta de sentido de decisiones en la solución de problemas de matemáticas.

Tiene principalmente por objeto descubrir la "suspensión de la construcción de sentido" de los estudiantes en la clase de matemáticas. En los estudios realizados por Verschaffel et al., (2000) muestran cómo los estudiantes de primaria se enfrentaron con los llamados problemas de "pseudo-proporcionalidad" (por ejemplo, "*El mejor tiempo de John para correr 100 metros es de 17 segundos. ¿Cuánto tiempo le llevará correr 1 kilometro?*, "*Una tienda vendió 312 Tarjetas de Navidad en diciembre. Aproximadamente, ¿cuántas tarjetas crees que se van a vender en total en enero, febrero y marzo?*").

En lugar de tomar en cuenta su conocimiento del sentido común y las consideraciones realistas acerca de la situación descrita en el problema, los estudiantes simplemente juegan el "juego de los problemas de aplicación de la escuela", el cual consiste en simplemente identificar la(s) operación(es) aritmética(s) con los números dados para obtener la respuesta supuestamente correcta.

Dicho estudio también permitió mostrar cómo muy pocos estudiantes parecían expresar conciencia de que la proporcionalidad directa no serviría para obtener la respuesta exacta, obteniendo únicamente (en el mejor de los casos) una respuesta aproximada. Para el problema del corredor, el porcentaje de estudiantes que mostraron esa conciencia variaron de 0% a 7% en una gama de repeticiones, en muchos países.

Las respuestas de los alumnos estuvieron basadas en el razonamiento: k veces a, entonces, k veces b. Por ejemplo, para el primer problema: "John necesita correr 10 veces más lejos, entonces, necesita 10 veces más tiempo" y para el segundo problema: "la tienda venderá 312 + 312 + 312 = 936 tarjetas". Una dificultad que presentan los estudiantes en estos problemas es que son "irresolubles" pues no existe una relación lógico-matemática en los resultados obtenidos, debido a que no se puede obtener una respuesta exacta al problema (De Bock, et al., 2007).

Los estudiantes no esperan problemas “irresolubles” en un contexto de prueba y asumen que los problemas tienen una respuesta numérica y exacta, por lo que deben hacer algunos cálculos con los números dados en el problema para proporcionar dicha respuesta, Brousseau (1997, citado en De Bock, et al., 2007, p. 7) denomina lo anterior como “contrato didáctico”.

1.6.2 Razonamiento en las tareas de razón y proporción

Este tipo de investigaciones comprende los estudios que tratan explícitamente de la enseñanza y el aprendizaje del razonamiento proporcional.

También incluyen la investigación de los “errores y estrategias primitivas”, como los errores conocidos debido a la suma (por ejemplo, "3 naranjas con 5 partes de agua tienen el mismo sabor como 7 naranjas con 9 partes de agua", véase Hart, 1981; Karplus, Pulos, y escenarios, 1983b; Lin, 1991, citado en De Bock, et al., 2007, p. 7).

En un estudio realizado por De Bock, et al., (2007) donde participaron 33 maestros de primaria en formación a los cuales les aplicaron el siguiente problema aditivo: “Sue y Julie estaban corriendo igual de rápido alrededor de una pista. Sue inició primero. Cuando ella había recorrido 9 vueltas, Julie había recorrido 3 vueltas. Cuando Julie había completado 15 vueltas, ¿cuántas vueltas había recorrido Sue?” Observaron que treinta y dos de los maestros de primaria en formación respondieron a este problema mediante la construcción y resolución de una proporción: $9/3 = x / 15$; $3x = 135$; $x = 45$.

Estos profesores en formación poseían todas las herramientas matemáticas necesarias para resolver el problema. Sin embargo, la presentación de esta situación aditiva en un formato de valor faltante les hizo caer en la ilusión de la linealidad.

Cramer, Post y Currier (1993, citado en De Bock et al., 2007, p. 8) sostienen que “*no podemos definir a un razonador proporcional simplemente como alguien que sabe cómo establecer y resolver una proporción*” y determinaron que los libros de texto no hacen suficientemente hincapié para desarrollar la capacidad de discriminar situaciones lineales y no lineales.

1.6.3 Centrados explícitamente en el exceso de confianza de la linealidad

Van Dooren, et al., (2005) investigaron cómo se originan y se han desarrollado las tendencias a la sobre-dependencia de la linealidad para resolver tales problemas tomando en cuenta la edad y por consiguiente las experiencias de aprendizaje de los estudiantes y sus habilidades de razonamiento proporcional emergentes.

Por ejemplo, se realizó una prueba a un gran grupo de estudiantes de segundo a octavo grado que consta de 8 problemas de valor faltante: 2 problemas proporcionales (para lo cual la solución proporcional es correcta) y 6 unidades no proporcionales pertenecientes a tres categorías diferentes: 2 problemas aditivos, 2 afín y 2 constantes.

- Problema aditivo*: "Ellen y Kim están corriendo alrededor de una pista. Ellas corren igual de rápido, pero Ellen comenzó más tarde. Cuando Ellen ha corrido 5 vueltas, Kim ha corrido 15 vueltas. Cuando Ellen ha corrido 30 vueltas, ¿cuántas vueltas ha recorrido Kim" (respuesta correcta: 40 vueltas, la respuesta proporcional: 90 vueltas)?*

- Problema afín: *"La locomotora de un tren mide 12 metros de largo. Si hay 4 vagones conectados a la locomotora, el tren mide 52 m de largo. ¿Cuánto medirá el tren si hay 8 vagones conectados a la locomotora?" (respuesta correcta: 92 m, respuesta proporcional: 104 m)*

- Problema constante: *"Mamá puso 3 toallas en el tendedero, después de 12 horas estaban secas. La abuela puso 6 toallas en el tendedero. ¿Cuánto tiempo les toma secarse?" (respuesta correcta: 12 horas, respuesta proporcional: 24 horas)*

Aunque en segundo grado mostraron cierta capacidad emergente de razonamiento proporcional, el mayor progreso en la solución correcta de los problemas proporcionales se hizo entre tercer y sexto grado. Con respecto a los problemas no proporcionales, más de un tercio de todas las respuestas implicó la aplicación errónea del modelo proporcional.

No es sorprendente que la tendencia a confiar demasiado en la proporcionalidad desarrollada simultáneamente con la capacidad para resolver problemas proporcionales:

- Ya era notable desde segundo grado, pero aumentó considerablemente en los próximos años, con un pico en quinto grado (los alumnos habían recibido una formación intensiva en la solución de problemas de proporcionalidad), donde más de la mitad de las respuestas a los problemas no proporcionales fueron erróneas.
- Después de este pico, el número de errores proporcionales disminuyó gradualmente, pero no desapareció por completo.
- En octavo grado todavía más de una quinta parte de las respuestas refleja una mala aplicación de la proporcionalidad.
- Aunque la cantidad entre las distintas categorías de problemas difería, esta tendencia fue general.

Los investigadores De Bock, et al., (2007) esperaban que los problemas de tipo “constante” (como el problema "tendedero" mencionado anteriormente) serían los problemas más fáciles en la prueba debido que no había necesidad de cálculos, sin embargo, obtuvieron la más alta tasa de errores proporcionales (hasta un 80% en quinto grado).

Con base en los resultados obtenidos de la investigación, Van Dooren et al. (2005) demostraron que los alumnos de primaria tienden fuertemente a aplicar estrategias de solución proporcionales cuando se enfrentan a problemas no proporcionales en problemas de valor faltante.

También existe investigación en otros niveles escolares, como la de Esteley, Villarreal, y Alagia (2004). Dicha investigación fue realizada en estudiantes universitarios que participaban en un primer curso de cálculo con problemas como: “*Si una planta mide 30 cm en el comienzo de un experimento, y su altura aumenta un 50% mensual, ¿cuánto va a medir después de 3 meses?”*. Observaron que el 62% de los estudiantes razonó de forma lineal con respecto al aumento de la altura en función del tiempo, en lugar de tomar en cuenta el carácter exponencial de este proceso de crecimiento.

Se observa fuertemente el manejo de esquemas y procedimientos proporcionales porque la mayoría de las tareas de razonamiento proporcional que los estudiantes encuentran en sus carreras escolares están expresadas en un formato de valor faltante mientras que, los problemas no proporcionales son rara vez (o nunca) presentados en este tipo de formato.

Con base en los datos mostrados, puede observarse una fuerte evidencia en los estudiantes del uso excesivo de la linealidad, lo anterior suscitó una gran cantidad de asombro e incredulidad entre los profesionales a los que se han presentado los resultados de estos estudios. La mayoría de ellos eran conscientes del problema, pero no se habían dado cuenta de que afectó a las soluciones de sus alumnos con tanta fuerza (De Bock, et al., 2007).

1.7 Sugerencias para la resolución de problemas no lineales

Existen diversos procesos para la resolución de los problemas, dichos procesos de solución subyacen a una respuesta correcta. Tomando en cuenta el problema: “El granjero Carlos necesita aproximadamente 8 horas para abonar un terreno cuadrado de 200 m de lado ¿Cuántas horas necesitará para abonar un terreno cuadrado con 600 m de lado?”. De Bock, et al., (2007) clasificaron los procesos correctos de resolución del problema en las siguientes categorías:

- La estrategia de recubrimiento o “pavimentación”. Consiste en cubrir el área más grande con las más pequeñas. Por ejemplo, para el problema anterior se requieren 9 cuadraditos pequeños (200 m de lado) para cubrir el cuadrado más grande (600 m de lado), por lo tanto se puede concluir que el agricultor necesita 9 veces más de tiempo, es decir, $(9\ veces) \cdot (8\ horas) = 72\ horas$.
- Comparación de la longitud o el área de ambas figuras. Calcular el área de ambos cuadrados (200 × 200 = 40 000 m^2 y 600 × 600 = 360 000 m^2), la determinación del resultado de la división (360 000 / 40 000 = 9), y por lo tanto la conclusión de que el agricultor necesitará 9 veces 8 horas = 72 horas.
- Aplicación de la regla general. Inmediatamente aplicar la regla general “$lado \times r$, así el $área \times r^2$” es decir, si la longitud es el triple, entonces, el área es $3^2 = 9$ por lo tanto el tiempo para abonar el terreno tiene que ser multiplicado por 9, por lo tanto $9\ por\ 8\ horas = 72\ horas$.

Un análisis más detallado en las evidencias escritas de los estudiantes reveló que la segunda estrategia de solución fue (por el momento) la más frecuente. Es curioso que muy pocos estudiantes utilizaran la estrategia “pavimentación”. De hecho, la estrategia “pavimentación” es un método muy fácil e intuitivo, ligado al contexto que requiere sólo poco conocimiento formal-matemático (De Bock, et al., 2007).

Capítulo 2. Marco teórico

En el presente capítulo se mencionan conceptos que son importantes en la investigación, tales como linealidad, problemas verbales y secuencia didáctica.

2.1 Linealidad

De Bock, Van Dooren, Janssens, y Verschaffel (2007) señalan que las relaciones proporcionales o lineales reciben bastante atención dentro de la educación matemática contemporánea, lo anterior, debido a que las relaciones lineales son el modelo para acercarse a múltiples situaciones de problemas prácticos y teóricos dentro de las matemáticas y la ciencia.

Es importante mencionar que los términos “lineal” y “proporcionalidad (directa)” (así como sus derivados) los utilizaremos como sinónimos y también para referirnos a las funciones de la forma $f(x) = ax$ (con $a \neq 0$). La representación gráfica de este tipo de función es: una línea recta que pasa por el origen. Sin embargo, existen otras propiedades y representaciones de las funciones lineales que son conocidas y utilizadas con frecuencia, cada una de estas propiedades y representaciones pueden ser aplicadas por los estudiantes en situaciones en las que no es aplicable (De Bock et al., 2007).

Existe una estrecha relación entre la proporcionalidad (directa) o linealidad y los conceptos de razón y proporción (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 2002, citado en De Bock et al., 2007, p. 3).

Una razón se refiere a una relación fraccionaria entre dos medidas *(a / b),* por ejemplo: "la limonada se hizo con 8 limones por cada litro de agua" o "la población crece 50 personas por cada mes". Mientras que una proporción se refiere a la igualdad de dos relaciones *a* / *b* = *c* / *d* (y por lo tanto a una relación entre cuatro medidas), por ejemplo: "en una urna hay 10 bolas rojas y 20 bolas azules. Otra urna tiene 30 bolas rojas y 60 bolas azules. La posibilidad de extraer una bola roja es igual para ambas urnas (10/30 = 30/90)". El concepto de linealidad o de proporcionalidad se refiere a la igualdad de una infinidad de razones iguales: $a \,/\, b \;=\; c \,/\, d \;=\; e \,/\, f \;= \ldots$ Por ejemplo, "un bote de pintura de 0.5 litros es suficiente para el pintar 3 m^2, así que necesito 1,50 litros para 9 m^2, 3 litros para 18 m^2, etc.". En el sentido funcional, se refiere a una relación constante entre la variable independiente y la variable dependiente, lo que significa que cada dos relaciones que son "elegidas" dará lugar a una proporción: por ejemplo, 9 / 1.5 = 3 / 0.5 (De Bock et al., 2007).

De Bock et al. (2007) sugieren que existen dos propiedades esenciales de las funciones lineales (ya mencionadas):

- $f\,(x\,+\,y)\;=\;f\,(x)\;+\;f\,(y)$. Cuando el factor de proporcionalidad es un número entero (relativamente pequeño), los estudiantes tienden a centrarse en esta propiedad (aditiva) por ejemplo: para cubrir 21 m^2 (3 m^2+ 18 m^2), necesitamo 3.5 litros (0.5 litros + 3 litros) de pintura o para 3 + 3 + 3 m^2, necesitamos 0.5 + 0.5 + 0.5 litros de pintura lo anterior, debido a que corresponde a sus experiencias previas de aprendizaje. Al respecto, Kaput y West (1994, citado en De Bock et al., 2007, p. 4) hablan de "razonamiento proporcional competente, pero informal".
- $f\,(k\,x)\;=\;k\,f\,(x)$. Esta propiedad (multiplicativa) se refiere a la igualdad de las relaciones internas y con frecuencia está representado en la regla *"si* $k\; veces\; a$ *entonces* $k\; veces\; b$*"*, lo anterior por lo general se utiliza en el aula para resolver problemas verbales relativamente simples, por ejemplo, para 36 m^2 (2 x □□ m^2) necesitamos 6 litros □□□x 3 litros) de pintura, es decir, para cubrir 2 veces más área, necesitamos 2 veces más de pintura, y con 4 veces menos pintura, podemos cubrir 4 veces menos área". A menudo, el razonamiento *"*$k\; veces\; a$ *entonces* $k\; veces\; b$" es enseñado por medio de representaciones de "esquemas de flecha".

De Bock et al., (2007) mencionan que a menudo, las funciones de la forma “$f\ (x)\ =\ ax\ +\ b$” también se denominan “lineales”, dichas funciones se representan gráficamente por una línea recta que no pasa por el origen, excepto en el caso especial $b\ =\ 0$. Sin embargo, para motivos del presente trabajo, hemos decidido usar el término “lineal” en su sentido más estricto, es decir, para las funciones de la forma *“*$f\ (x)\ =\ ax$*”,* y para evitar confusiones, vamos a etiquetar a las funciones de la forma *“*$f\ (\ x)\ =\ ax\ +\ b$” con $b\ \neq\ 0$ como funciones afines.

De Bock et al., (2007) indican varias características interrelacionadas y representaciones de las funciones lineales de la forma “$f\ (x)\ =\ ax$” que se pueden aplicar a los estudiantes al tratar con este tipo de funciones.

- Las funciones lineales están representados por una línea recta a través del origen.
- Dos relaciones cualesquiera dentro de esta función lineal da una proporción, de modo que en un problema verbal de proporcionalidad donde falta un valor, se puede resolver mediante el cálculo del valor faltante *x* en una proporción, por ejemplo: "5 naranjas cuestan $7 ¿Cuál es el precio de 25 naranjas?", en este caso $5/7\ =\ 25/x$.
- Para cada función
lineal, se tiene que $f\ (x\ +\ y)\ =\ f\ (x)\ +\ f\ (y)$ y $f\ (k\ x)\ =\ k\ f(x)$.
- La propiedad multiplicativa se refiere a menudo a la regla “$k\ veces\ a$ entones $k\ veces\ b$”.
- En situaciones cuando un factor de proporcionalidad relativamente pequeña, la propiedad aditiva (por ejemplo, “$a\ +\ a$, por lo que $b\ +\ b$” o “$a\ +\ a\ +\ a$ entonces $b\ +\ b\ +\ b$”) se aplica a menudo en lugar de la propiedad multiplicativa (“$k\ veces\ a$ entonces $k\ veces\ b$”).

Debido a que en el presente proyecto se trabaja con problemas (verbales), es importante definir qué son y cuáles son sus características.

2.2 Problemas verbales

Los problemas verbales se han definido de diferentes maneras en diversas publicaciones. Sin embargo, utilizaremos la definición de Verschaffel, Greer y De Corte (2000, citado en Palm, 2009, p. 3) quienes los definen como "descripciones textuales de situaciones asumidas como comprensibles para el lector, dentro de las cuales las preguntas matemáticas pueden ser contextualizadas". También indican que los problemas verbales "proporcionan, en forma conveniente, un posible vínculo entre las abstracciones de las matemáticas puras y sus aplicaciones a los fenómenos del mundo real". Esta definición es muy amplia e incluye tareas matemáticas puras "disfrazadas" en un contexto del mundo real las cuales requieren para su solución simplemente que los estudiantes "desvistan" estas tareas y las resuelvan.

También incluye tareas que requieren que los estudiantes participen en el ciclo completo de modelado matemático. Las "situaciones" que se describen pueden ser de diferentes tipos, como los cuentos de hadas, la práctica profesional o la vida cotidiana, los dos últimos tipos se pueden dividir aún más. Muchos investigadores han argumentado que los problemas verbales "realistas" o "auténticos" deben ser incluidos en el conjunto de problemas verbales que los alumnos reciben. Burton (1993, citado en Palm, 2009, p. 3) sostiene que:

> *"... los problemas realistas son igualmente importantes para asegurar que los alumnos perciban que las matemáticas sí contribuyen a trabajar y resolver los problemas de la vida"*

Con base en lo anterior, Palm (2009) propone una teoría la cual consta de ocho aspectos (algunos de ellos con sub-aspectos) de las situaciones de la vida real que considera importantes para reconocer una tarea como auténtica, su teoría propone lo siguiente:

A. Evento B. Pregunta C. Datos/información C1. Existencia C2. Realismo C3. Especificidad D. Presentación D1. Modo D2. Uso del lenguaje E. Estrategias de solución E1. Disponibilidad E2. Plausibilidad experimentada	F. Circunstancias F1. Disponibilidad de herramientas externas F2. Dirección F3. Consulta y colaboración F4. Oportunidad de discusión F5. Tiempo F6. Consecuencias de la resolución de tareas con éxito (o fracaso) G. Requisitos de la solución H. Propósito en el contexto figurativo

Tabla 1. Aspectos de situaciones del mundo real.

A. Evento. Este aspecto se refiere al evento descrito en la tarea. En una simulación de una situación del mundo real es un requisito que el evento descrito en la tarea escolar ha tenido o tiene una buena oportunidad de ocurrir. Por ejemplo, sacar canicas de una urna y observar sus colores (un evento común en problemas verbales de probabilidad) no es algo que la gente realiza en la vida fuera de la escuela y por lo tanto no es un evento real conveniente. Los acontecimientos deben ser considerados de tal manera que haya una buena oportunidad de que ocurran (el número de personas que quieren subir al ascensor por la mañana, el número de personas que son parte de un equipo y viajarán en autobús para un juego).

B. Pregunta. Este aspecto se refiere a la concordancia entre la asignación en la tarea escolar y la correspondencia adecuada de una situación fuera de la escuela. La pregunta en la tarea escolar es un suceso que en realidad pueda ser planteado en el evento que se ha descrito, es un requisito previo para que exista correspondencia en una situación del mundo real. Las personas del equipo que viajarán es posible que deseen saber cuántos autobuses necesitarán.

C. Datos/información. Este aspecto se refiere a la información y los datos en la tarea e incluye valores, modelos y condiciones dadas. Se trata de los siguientes tres subaspectos:

C1. Existencia. Este subaspecto se refiere a la coincidencia que existe entre la información disponible en la tarea escolar y la información disponible en la situación simulada. Existe una gran discrepancia entre las matemáticas aplicables en situaciones escolares y las matemáticas aplicables en situaciones fuera de la escuela.

C2. Realismo. Dado que las estrategias de solución de los estudiantes se basan en gran parte de los juicios razonables de sus respuestas, y una referencia importante es la realidad (Stillman, 1998 citado en Palm, 2009, p. 10), el realismo de los valores dados en las tareas escolares (en un sentido idéntico o muy cerca de los valores de la situación que es simulada) es un aspecto de importancia en simulaciones de situaciones de la vida real.

C3. Especificidad. Este sub-aspecto se refiere a la coincidencia en la especificidad de la información disponible en la situación escolar y la situación simulada. Esta coincidencia es algunas veces importante para la posibilidad de que el razonamiento de los estudiantes sea similares en las situaciones dentro y fuera de la escuela ya que la falta de especificidad puede producir un contexto ligeramente diferente y la elección de la estrategia y el éxito de la solución dependen de lo específico del contexto (Baranes, Perry, y Stiegler, 1989; Taylor, 1989, citado en Palm, 2009, p. 10). Por ejemplo, la diferencia entre compartir un pan y compartir un pastel puede hacer que los estudiantes razonen diferente (Taylor, 1989, citado en Palm, 2009, p. 10).

D. Presentación. El aspecto de la presentación de la tarea se refiere a la forma en que la tarea se transmite a los estudiantes. Este aspecto se divide en dos subaspectos:

D1. Modo. El modo de transporte de la tarea se refiere, por ejemplo, si el problema verbal se comunica de forma oral o por escrito a los estudiantes y si la información se presenta en palabras, diagramas o tablas. Ya que, por ejemplo, no todos los estudiantes admiten o son hábiles con la comunicación escrita (por ejemplo, Newman, 1977), y las competencias matemáticas requeridas para manejar representaciones gráficas no son las mismas que se requieren para manejar representaciones verbales (por ejemplo, Nathan y Kim, 2007) la simulación de este aspecto puede influir en las matemáticas necesarias o posibles de usar.

D2. El uso del lenguaje. Los análisis lingüísticos muestran que en muchos problemas los aspectos semánticos, referenciales y estilísticos de estos textos son diferentes de los textos que describen situaciones de la vida real. Las tareas escolares requieren diferentes competencias para interpretar las tareas de las tareas fuera de la escuela, y por lo tanto dicho uso del lenguaje impide la posibilidad del mismo uso de las matemáticas en situaciones dentro y fuera de la escuela (Nesher, 1980, citado en Palm, 2009, p. 11). Además, existen investigaciones que hablan sobre el impacto obstaculizador de términos difíciles, la estructura de la oración y la cantidad de texto (Mousley, 1990, citado en Palm, 2009, p. 11). Por lo tanto, en las simulaciones, es de suma importancia que el lenguaje utilizado en la tarea escolar no sea tan diferente de una situación fuera de la escuela ya que afectaría negativamente la posibilidad de que los estudiantes utilicen las mismas matemáticas que habrían utilizado en la situación que se simula.

E. Estrategias de solución. Para ser simulada, una tarea incluye el rol y el propósito de quien resuelve la tarea. Este aspecto se divide en dos subaspectos:

E1. Disponibilidad. La disponibilidad de las estrategias de solución se refiere a la coincidencia en las estrategias de solución pertinente disponibles de los estudiantes para resolver las tareas escolares y aquellas disponibles para las personas descritas en las tareas como la solución de las tareas correspondientes en la vida real más allá de la escuela. Si estas estrategias no coinciden, entonces los estudiantes no tienen las mismas posibilidades de utilizar las mismas matemáticas que podrían utilizar en la situación simulada.

E2. Plausibilidad experimentada. Este subaspecto se refiere a la coincidencia entre las estrategias experimentadas como plausibles para resolver la tarea escolar y aquellas experimentadas como plausibles en la situación simulada. Por ejemplo, cuando una sección del libro de texto comienza con una descripción de un método particular para la solución de tareas, seguido de un conjunto de tareas, esto puede experimentarse como una solicitud para utilizar dicho método y que otros métodos aplicables en la situación fuera de la escuela no se aplicará a estas tareas.

F. Circunstancias. Las circunstancias en las que la tarea debe ser solucionada son factores del contexto social (Clarke y Helme, 1998, citado en Palm, 2009, p. 11), y se divide en los siguientes subaspectos:

F1. Disponibilidad de herramientas externas. Las herramientas externas se refieren a instrumentos concretos fuera de la mente, tales como una calculadora, un mapa, o una regla. La importancia de este aspecto se puede visualizar como la diferencia entre las habilidades matemáticas necesarias para calcular el costo mensual de un préstamo hipotecario usando un software especialmente diseñado (que se utilizaría en una oficina de corredores) y hacerlo sólo teniendo disponible una calculadora.

F2. Dirección. Este subaspecto se refiere a la orientación en forma de sugerencias explícitas o implícitas. Indicios en las tareas escolares, tales como “Usted puede comenzar mediante el cálculo del costo máximo”, claramente (si no se da también en la situación simulada) causan una gran diferencia en lo que se espera que los estudiantes lleven a cabo.

F3. Consulta y colaboración. Las situaciones de tarea fuera de la escuela se resuelven únicamente por sí mismo, a través de la colaboración dentro de los grupos, o con la posibilidad de asistencia. En las simulaciones, esas circunstancias también hay que considerar, ya que los aportes de otras personas pueden influir en las habilidades y competencias necesarias para resolver una tarea (Resnick, 1987, citado en Palm, 2009, p. 12).

F4. Oportunidades de discusión. Este subaspecto se refiere a la posibilidad para que los estudiantes pregunten y discutan el significado y la comprensión de la tarea. La falta de concordancia entre las situaciones dentro y fuera de la escuela en este subaspecto pueden causar diferencias en las matemáticas usadas, ya que se ha demostrado que esta comunicación tiene el poder de afectar el significado de la tarea y las estrategias de solución aplicada (Christiansen, 1997, citado en Palm, 2009, p. 12).

F5. Tiempo. Se sabe que la presión del tiempo puede impedir el éxito en la resolución de la tarea. Por lo tanto, en las simulaciones, es importante que las restricciones de tiempo sean tales que no causan diferencias significativas en las posibilidades de resolver las tareas escolares en comparación con las situaciones simulados.

F6. Consecuencias de la resolución de tareas con éxito (o fracaso). Las diferentes soluciones a problemas pueden tener consecuencias diferentes para los solucionadores. Las presiones sobre los solucionadores y sus motivaciones afectan el proceso de resolución de la tarea y, por lo tanto, son un aspecto a tener en cuenta en las simulaciones. Este aspecto puede incluir esfuerzos para promover la motivación para la resolución de problemas verbales (las personas que se encuentran en situaciones de la vida más allá de la escuela son a menudo motivados para resolver esos problemas). También podría significar poner en práctica sus conocimientos y darles un uso en la vida real. Un gran proyecto con consecuencias reales se describe en el Tate (1995, citado en Palm, 2009, p. 12). En este proyecto, los estudiantes utilizan las matemáticas en sus esfuerzos para conseguir que las tiendas de licores se reubicaran lejos de su vecindario escolar.

G. Requisitos de la solución. La noción de solución debe ser interpretada en sentido amplio, es decir, tanto el método de solución como la respuesta final a una tarea. Los juicios sobre la validación de respuestas y discusión de los métodos de solución (en los libros de texto y los planes de evaluación) o frases en el texto de la tarea (tales como "utilizando derivados resolver la siguiente tarea") puede constituir requisitos para las soluciones a las tareas escolares. En una simulación, estos requisitos deben ser coherentes con lo que se considera como una solución adecuada en la situación simulada correspondiente, y los estudiantes deben ser conscientes de ello.

H. Propósito en el contexto figurativo. La adecuación de la respuesta a una tarea, y así las consideraciones necesarias para hacerse, a veces dependen del propósito de encontrar la respuesta. En otras tareas, todo el método de solución depende del propósito. Por lo tanto, en las simulaciones a veces es esencial que el propósito de la tarea en el contexto figurativo sea tan claro para los estudiantes como lo es para la resolución de la situación simulada.

Debido a que en el presente trabajo se propone una secuencia didáctica, es importante definir qué es y cuáles son sus características.

2.3 Secuencia didáctica

Tobon, Pimienta y García (2010) proponen que el contexto social actual y los cambios que se aproximan en el futuro cercano nos plantean el reto de un nuevo papel docente, que conlleve a la generación de situaciones significativas, con el fin de que los estudiantes aprendan lo que requieren para su autorrealización y su participación en la sociedad. De esta forma, la educación trata de planear procesos de acuerdo con ciertas metas, pero debe orientarse en torno al desarrollo de las competencias que requieren los ciudadanos de hoy.

Para llevar a cabo lo anterior, es necesario diseñar unidades o secuencias didácticas. Tobón et al., (2010) definen a las secuencias o unidades didácticas como:

> *"Un conjunto articulado de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos."*

Mientras que Fernández, Elortegui, Moreno y Rodríguez (1999) proponen que una secuencia o unidad didáctica es:

> *"Un conjunto de ideas, hipótesis de trabajo, que incluyen no sólo los contenidos de la disciplina y los recursos necesarios para el trabajo diario, sino unas metas de aprendizaje, una estrategia que ordene y regule en la práctica escolar los diversos contenidos del aprendizaje."*

Cabe mencionar que existen diferentes posiciones didácticas como lo proponen Fernández et al, (1999) las cuales tienen diferentes efectos sobre cómo se conciben las unidades didácticas y su elaboración.

- Modelo didáctico transmisor. Viene dado por los contenidos conceptuales y a su vez fijados por la estructura tradicional del conocimiento científico, para ello será suficiente una amplia y bien seleccionada colección de ejercicios.
- Modelo didáctico tecnológico. Se basa en una pedagogía por objetivos, primero se establecen los objetivos de todo orden necesarios para lograr una buena calidad en la enseñanza, posteriormente se seleccionan los contenidos adecuados a los objetivos establecidos y por último los ejercicios para su aplicación práctica.
- Modelo didáctico artesano-humanista. Los alumnos aprenden aquello que les interesa o lo que consideran necesario o útil. Por tanto, la motivación de los alumnos es el punto de partida para la elaboración de un proyecto interesante o un fenómeno llamativo que genere preguntas en los alumnos.
- Modelo didáctico por descubrimiento. Lo que pretende es que lo que se aprende es lo que cada cual redescubre por sí mismo. En la mayoría de los casos se toman de la historia de la disciplina lo cual permite descubrir leyes y conceptos generales que se esconden tras el problema investigado.
- Modelo didáctico constructivista. El punto de partida es lo que los alumnos ya saben, lo cual determinará una serie de actividades que irán poniendo en cuestión sus ideas y se reelaborarán. El trabajo práctico avanzará a la par con el teórico, sin una separación definida y bajo la orientación del profesor.

Esto implica que como docentes debemos estudiar el contexto, tener en cuenta qué pretendemos contribuir a formar, apropiarnos de los contenidos disciplinares y luego saber cómo llevar a cabo la mediación con los estudiantes para que "aprendan", partiendo de sus saberes previos y aplicando estrategias didácticas pertinentes, de acuerdo con los contenidos (Tobón et al., 2010).

Fernández et al., (1999) mencionan la importancia de que:

> *“los docentes son profesionales con ideologías, creencias frente al mundo y la vida, experiencias y planteamientos pedagógicos vitales que, inevitablemente, tienen una repercusión en una parte tan importante de su vida como lo es su intervención profesional.”*

También proponen que la elaboración de secuencias didácticas debe iniciar de la integración de tres aspectos:

- Los procesos de investigación educativa como línea de trabajo.
- La innovación educativa como aporte de nuevas perspectivas.
- El trabajo en equipo como dinámica de interacción social y toma de decisiones.

Además sugieren que para la planificación de la secuencia didáctica primero se debe elegir el tópico, el cual está determinado por las necesidades del grupo, para ello se pueden observar dos vías:

- La primera es la vía disciplinar, que tiende a seleccionar tópicos determinados previamente por la estructura de la disciplina en la que se trabaja, frecuentemente se observa en los libros de texto.
- La segunda es aproximarse a los conocimientos de los alumnos y al entorno de la vida diaria, es decir, el acercamiento del conocimiento escolar al conocimiento cotidiano. Tobón et al., (2010) mencionan que dentro de las secuencias didácticas se aborden “situaciones problema” porque no se trata sólo de un problema con sentido, sino de un problema real, que se ha dado, se da o se podría dar en un contexto personal, familiar, comunitario, social, político, deportivo, recreativo, artístico, cultural, ambiental-ecológico, etc.

Fernández et al., (1999) indican que en ambas vías se tiene que partir de las concepciones del docente, las ideas previas de los alumnos y elaborar ideas-fuerza (pequeño conjunto de metas o de contenidos de cualquier tipo y sus aplicaciones prácticas que constituyen el núcleo del aprendizaje que se pretende conseguir). Para Tobón et al., (2010) la tarea sustancial en una secuencia didáctica es determinar el problema por abordar, lo cual se puede hacer en forma general y después, ya con los estudiantes, concretarlo en un entorno determinado. Mientras que para Fernández et al., (1999) se trabaja simultáneamente en dos etapas, en la primera etapa (“lo que se quiere hacer”), principios, objetivos, contenidos y problemas para posteriormente pasar a una segunda etapa (“lo que se puede hacer”), es decir, establecer una relación de actividades secuenciadas, una programación y una experimentación.

Es importante que dentro de la planificación de las secuencias didácticas se tomen en cuenta materiales (dentro de lo posible) para adaptarlas a las necesidades del grupo y lograr las metas de aprendizaje como lo mencionan Fernández et al., (1999), y en general, se tienen que tomar en cuenta los siguientes tipos de recursos:

- Relacionados con las fuentes de información:
    - Documentos bibliográficos del nivel del alumno.
    - Materiales audiovisuales: diapositivas, murales, videos, programas informáticos, etc.
- Relacionados con la dinámica de trabajo:
    - Recursos metodológicos adaptados al tipo de intervención que se pretende favorecer en los alumnos (puesta en común, lluvia de ideas, exposición de resultados, etc.)
    - Materiales necesarios para la dinámica de grupo prevista (cartulina, rotuladores, etc.)
    - Materiales específicos para los trabajos prácticos.
    - Instrumentos que se necesitan para evaluar todo el proceso: alumnos, materiales, docente, diseño, etc. (videos, grabadoras, encuestas, etc.)
    - Mobiliario del aula que posibilite el trabajo en equipos, la organización de debates, almacenamiento de materiales, etc.

Cabe mencionar que la planificación de las secuencias didácticas no es pensar en lo que se debe hacer, sino pensar en lo que se puede hacer (Salinas, 2008, citado en Fernández et al., 1999, p. 16). Además, diseñar una secuencia didáctica no tiene por qué obedecer a la aplicación de una técnica o procedimiento universal o reconocido desde fuera del aula debido a que no hay una “receta” para elaborarlas pues va a depender de los criterios y las formas de diseñarlas de las personas implicadas en el proceso y gestión del mismo (Fernández et al., 1999).

Capítulo 3. Planteamiento del problema

La forma tradicional de la enseñanza de modelos matemáticos y la solución de problemas en la escuela primaria y secundaria es por medio del uso de problemas de aplicación, es decir, la solución de un problema matemático consiste en encontrar y ejecutar la fórmula matemática correcta previamente enseñada en la escuela (Schoenfeld, 1992, citado en De Bock et al., 2007, p. 36) o la respuesta se puede encontrar mediante la realización de una o más operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división) en las cantidades del problema (Verschaffel, Greer, y de Corte, 2000, citado en Van Dooren, et al., 2005, p. 58).

Las reformas y programas de estudio de varios países tienen como uno de los principales objetivos de la educación matemática propiciar la capacidad de desarrollar y utilizar modelos para dar sentido a las diversas situaciones que rodean la vida diaria y de los sistemas complejos derivados de nuestra sociedad moderna (Blum, 2002; Consejo Nacional de profesores de Matemáticas [NCTM], 1989, 2000, citado en Van Dooren et al., 2005, p. 58).

En la educación matemática contemporánea, la linealidad (o proporcionalidad) recibe mucha atención debido a que este concepto es uno de los más importantes en la matemática escolar pues aparece en diferentes formas: la "regla de tres", modelos lineales, aproximaciones de cálculo y probabilidad pues son el modelo apropiado para acercarse a diversos problemas prácticos (situaciones de la vida diaria) y teóricos, en las matemáticas y la ciencia (De Bock et al., 2007).

3.1 Preguntas de investigación

Con base en los antecedentes, las problemáticas y tendencias de los estudiantes e incluso los adultos para aplicar modelos lineales "en todas partes" y caer en la "seducción" de la linealidad, se tienen las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las tendencias que presentan los alumnos de tercer semestre de bachillerato de CECyTE 15 Huactzinco al resolver problemas en los que se hace presente la ilusión de la linealidad?
- ¿Qué efecto tiene una intervención didáctica diseñada para disminuir el uso del modelo lineal o proporcional al resolver problemas en alumnos de tercer semestre de bachillerato de CECyTE 15 Huactzinco?

3.2 Supuestos iniciales

Debido a que se toman en cuenta problemas que van enfocados a áreas, volúmenes y falta de autenticidad, se considera que los alumnos al tratar de obtener la solución de dichos problemas, caerán en la linealidad. Con base en lo anterior y en los antecedentes, se tienen estos supuestos:

- Cuando los alumnos resuelvan problemas del cuestionario en los que se amplíen o disminuyan las longitudes de determinadas figuras o cuerpos geométricos, aplicarán métodos lineales y tratarán de generalizar para obtener las áreas y/o volúmenes de dichas figuras o cuerpos geométricos.

- Al resolver los problemas con falta de autenticidad en el cuestionario, los alumnos obtendrán y proporcionarán una respuesta dejando a un lado e/o ignorando su conocimiento del mundo real.
- Mediante la intervención didáctica basada en la investigación-acción se pueden disminuir los efectos de la linealidad cuando los alumnos resuelvan problemas relacionados con áreas, volúmenes o con falta de autenticidad.

3.3 Objetivos

Para el presente trabajo de tesis se han fijado los siguientes objetivos:

3.3.1 General:

- Analizar los efectos de una propuesta didáctica enfocada en la investigación-acción.

3.3.2 Específicos

- Analizar las tendencias que presentan los estudiantes al resolver problemas constantes, área, volumen y con falta de autenticidad en los que se hace presente la linealidad.
- Examinar las manifestaciones esquemáticas de los alumnos cuando resuelven problemas constantes, área, volumen y con falta de autenticidad en los que se hace presente la linealidad.
- Observar el desarrollo de los alumnos durante la aplicación de la intervención didáctica para confrontar la linealidad en problemas constantes, área, volumen y con falta de autenticidad para tratar de disminuirla.
- Analizar el efecto de la intervención didáctica para confrontar la linealidad en problemas constantes, área, volumen y con falta de autenticidad para tratar de disminuirla.

3.4 Justificación

En la educación básica en México se proponen formalmente problemas de proporcionalidad a partir del cuarto grado. A partir de este grado y durante la formación académica se resuelven problemas sobre proporcionalidad, incluso se tienen textos que abordan este tema pero dirigido a profesores (Block, Mendoza y Ramírez, 2010). La mayoría de los problemas que se resuelven son de tipo valor faltante y se resuelven usualmente con lo que se conoce como “regla de tres”.

Desafortunadamente, en el país se abordan problemas “ideales” que se resuelven directamente de esta manera, debido a esto, poco a poco los alumnos van perdiendo la capacidad de discernir cuándo es posible aplicar este método para resolver los problemas.

Una rama de las matemáticas en las que usualmente se presenta este tipo de problemas es la Geometría. Por ejemplo, cuando se les pide a los alumnos determinar el área o volumen, ellos piensan que si aumentamos al doble o disminuimos a la mitad determinada longitud de una arista en determinado cuerpo geométrico entonces el área o volumen aumentará al doble o disminuirá a la mitad respectivamente, situación que no es cierta (De Bock et al., 2002). Debido a este tipo de pensamiento, los alumnos llevan dicho razonamiento hasta altos niveles educativos, lo cual representa un serio problema para el aprovechamiento educativo del alumno.

Los alumnos están acostumbrados a obtener un resultado numérico cuando resuelven problemas matemáticos sin importar lo alejados de la realidad en que se encuentren, esto representa un serio problema, pues lo que se pretende hoy en día en la educación en el país es que los problemas resueltos por los alumnos pertenezcan a algún contexto de la vida diaria.

3.5 Método

La presente investigación tiene una naturaleza cualitativa. Dicho estudio se realizó con 58 alumnos de cuarto semestre de bachillerato del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Tlaxcala (CECyTE) del Plantel 15 ubicado en San Juan Huactzinco, Tlaxcala. Los 58 estudiantes están distribuidos en 3 grupos a los cuales denotaremos por A, B y C. El grupo A consta de 24 estudiantes y los grupos B y C de 17 estudiantes cada uno.

Se aplicó un cuestionario (pre-test) que debía ser resuelto con lápiz y papel. Éste consistió en problemas verbales no lineales (Anexo 1) de tipo: constante, área, volumen y falta de autenticidad, cabe señalar que algunos de los problemas que se propusieron en el instrumento son los utilizados por Van Dooren et al., (2005) y De Bock et al., (2007) con algunas modificaciones superficiales y, otros más fueron propuestos por el autor de la presente investigación, cabe señalar que para motivos del presente trabajo para referirnos a problemas verbales simplemente se les denominará poblemas. Para facilitar lecturas posteriores, se asociará cada problema con un ícono (representativo del problema) con la finalidad de que sea más práctico relacionarlos, además de no repetir constantemente el enunciado del problema. Los ocho problemas que se propusieron en el instrumento son los siguientes:

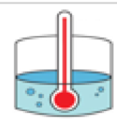
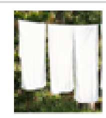
Tipo de problema	Problema	Texto	Ícono
Lineal	"Castillo"	3. Ricardo necesita 10 minutos para cavar una zanja alrededor de un castillo de arena cuadrado cuyo lado mide 50 cm. ¿Cuánto tiempo se necesita aproximadamente para cavar una zanja alrededor de un castillo de arena cuadrado de 150 cm de lado?	
Falta de autenticidad	"Corredora"	1. El mejor tiempo de Alicia para correr 100 metros es de 16 segundos. ¿Cuánto tiempo le llevará correr 1000 metros?	
	"Altura de los mexicanos"	6. Los mexicanos miden a los 10 años aproximadamente 1.30 m. ¿Cuánto medirán a los 30 años?	
Constante	"Temperatura del agua"	2. Si 500 ml de agua se encuentran a 20ºC en el ambiente. ¿Qué temperatura tendrán 1000 ml de agua?	
	"Toallas"	5. Mamá puso 3 toallas en el tendedero. Después de 12 horas estaban secas. La abuela puso 6 toallas en el tendedero. ¿Cuánto tiempo les toma secarse?	
Área	"Pintor"	4. Luis es un pintor publicitario. En los últimos días, tuvo que pintar las decoraciones de varias ventanas de una tienda. Ayer hizo un dibujo de 56 cm de altura de Bart Simpson en la puerta de una tienda de regalos. Necesitó 6 ml de pintura. Ahora se le pide hacer una versión ampliada del mismo dibujo en una ventana de una tienda de videojuegos. Esta copia debe ser de 168 cm de alto. ¿Qué cantidad de pintura necesitará aproximadamente Luis para hacerlo?	
	"Agricultor"	7. Un agricultor se tarda 8 horas en arar un terreno cuadrado de 100 m de lado. ¿Cuánto tardará en arar un terreno de la misma forma pero con el triple de longitud?	
Volumen	"Dados"	8. En su caja de juguetes, María tiene dados en varios tamaños. El más pequeño mide 10 mm de lado y tiene un peso de 800 mg. ¿Cuál sería el peso de un dado más grande cuyo lado mide 30 mm?	

Tabla 2. Asignación de íconos a cada problema.

Siete problemas son considerados no lineales, de los cuales el problema 1 y 6 son considerados con falta de autenticidad, el 2 y 5 son catalogados como constantes, el 4 y 7 son problemas de área, el 8 de volumen y el problema 3 se resuelve mediante el modelo lineal.

Después de la aplicación, se analizaron los instrumentos para observar las tendencias de los alumnos al resolver los problemas y las representaciones externas para observar si se hace presente la ilusión de la linealidad.

Posteriormente al análisis del instrumento se elaboró una secuencia didáctica con el enfoque investigación-acción con el propósito de disminuir la linealidad en los diferentes tipos de problemas, para luego aplicarla a los alumnos así como darles seguimiento puntual. Fernández et al., (1999) mencionan que para diseñar una secuencia didáctica no hay una técnica o procedimiento universal para elaborarlas pues va a depender de los criterios y las formas de diseñarlas de las personas implicadas en el proceso y gestión del mismo.

Debido a que esta labor también se basa en las concepciones y creencias del docente para el proceso de enseñanza-aprendizaje y dado que es una propuesta por parte del investigador, a partir de ahora y para el resto de la investigación le llamaremos propuesta didáctica. Dicha propuesta didáctica se basa en la investigación-acción debido a que la investigación-acción hecha por profesionales (investigación-docente) tiene como propósito generar conocimientos desde las acciones o intervenciones en aulas, instituciones y comunidades, por ello la investigación acción puede estar hecha por docentes o profesionales. Con base en lo anterior y debido a que el investigador es docente de los grupos antes mencionados, entonces, el investigador pasa a ser parte de la investigación para fines de esta investigación pues asumirá el papel de docente e investigador dentro de su propia aula.

Cohen y Manion (1994, citado en Cohen, Manion y Morrison, 2007) definen la investigación-acción como "una intervención a pequeña escala en el funcionamiento del mundo real y un examen detallado de los efectos de dicha intervención", el enfoque de dicha intervención tiene el propósito de mejorar la educación y aprender de las consecuencias de los cambios.

Zuber-Skerritt (1996, citado en Cohen et al., 2007, p. 305) establece la investigación-acción como un proceso cíclico de: (1) planificación estratégica, (2) aplicación de la planificación (acción), (3) observación, evaluación y auto-evaluación, (4) reflexión crítica y autocrítica sobre los resultados de (1) hasta (3) y la toma de decisiones para el siguiente ciclo de investigación. En dicho enfoque metodológico se pueden usar una variedad de instrumentos para la recolección de datos: cuestionarios, diarios, entrevistas, estudios de casos, los datos de observación, diseño experimental, notas de campo, fotografía, grabación de audio y video, la sociometría, calificación escalas, biografías y cuentas, documentos y registros, en fin la completa gama de técnicas (Cohen et al., 2007 Cohen et al., 2007).

La propuesta didáctica constó de doce sesiones, se abordaron los cuatro diferentes tipos de problemas (área, volumen, constante y falta de autenticidad), las sesiones estuvieron distribuidas de la siguiente forma y orden: cuatro sesiones de área, cuatro de volumen, dos constantes y dos con falta de autenticidad (ver anexo 2).

Para la propuesta didáctica se pretendió que los alumnos pudieran resolver problemas a partir de una situación problemática del entorno, utilizar material manipulativo y las TIC´s, cabe señalar que se tomaron en cuenta algunas de las propuestas mencionadas por De Bock et al., (2007). El número de sesiones para área y volumen es mayor debido a que en este tipo de problemas se presenta una mayor dependencia del modelo lineal para resolver dichos problemas (como se podrá observar posteriormente en el análisis del pre-test). Las sesiones de la propuesta didáctica para problemas de área estuvieron estructurada de la siguiente manera:

Área

Sesión 1

Se pretendía que el alumno analizara qué sucede con el perímetro y el área de figuras cuadradas al hacer variar las medidas de las aristas a través de recubrimiento o “pavimentación” y/o comparación de las medidas de dichas figuras a partir de una situación problemática.

Sesión 2

El fin de esta sesión radicaba en que el alumno analizara y verificara por medio de dibujos dados qué sucede con el perímetro y el área de figuras irregular contenidas en un marco cuadrado al hacer variar las medidas de las aristas de dicho marco y hacer recubrimientos de pintura y/o comparación de las medidas de dichas figuras.

Sesión 3

Por medio del software Geogebra se pretendió que los alumnos analizaran y generalizaran qué sucede con el perímetro y el área de figuras geométricas al hacer variar las medidas de sus respectivas aristas.

Sesión 4

Utilizando nuevamente el software Geogebra se tuvo la intensión de que los alumnos analizaran y generalizaran qué sucede con el perímetro y las aristas de figuras geométricas al hacer variar las medidas de su respectiva área.

Volumen

Sesión 1:

Los alumnos analizaron qué sucede con el volumen de un cuerpo geométrico, en específico un cubo, al hacer variar las medidas de sus aristas a través de la comparación de las medidas de dichas figuras a partir de una situación problemática.

Sesión 2

Esta sesión tuvo el propósito de que los alumnos analizaran y verificaran por medio de llenado de cubos de plástico qué sucede con el volumen de dichos cuerpos al hacer variar las medidas de sus aristas y/o comparando las medidas de dichos cuerpos.

Sesión 3

Para esta sesión se utilizó el software Geogebra debido a que es fácil manipular las figuras que aquí se construyen, lo anterior con el fin de que los alumnos analicen y generalicen qué sucede con el volumen de dichos cuerpos geométricas al hacer variar las medidas de sus aristas.

Sesión 4

De forma semejante, se utiliza el software Geogebra para esta sesión pero ahora para que los alumnos analicen y generalicen qué sucede con la medida de las aristas del cuerpo geométricas al hacer variar las medidas de su volumen.

Constante

Sesión 1

Los alumnos pusieron a secar toallitas húmedas con el propósito de observar y analizar qué sucede al variar la cantidad de objetos o las condiciones que intervienen en algunas situaciones cotidianas.

Sesión 2

Los alumnos tomaron la temperatura de un líquido para que pudieran observar qué sucede al variar la cantidad de sustancia en determinada situación.

Falta de autenticidad

Sesión 1

Con ayuda de tablas de peso y estatura, la sesión tuvo el propósito de que los alumnos observaran algunas situaciones cotidianas o del mundo y analizaran la influencia de las matemáticas en dichas situaciones.

Sesión 2

Para esta sesión se utilizaron videos de atletas para que los alumnos observaran dichas situaciones y analizaran la influencia de las matemáticas en dichas situaciones.

Cabe señalar que los instrumentos para la recoleccion de datos que se utilizaron son las grabaciones de video y documentos impresos que fueron respondidos a lápiz y papel durante las diferentes sesiones los cuales nos permitieron observar en secciones posteriores el desarrollo de algunos de ellos

Para finalizar, se aplica nuevamente el instrumento propuesto con los ocho problemas (post-test) y posteriormente se analiza dicho instrumento para observar las tendencias de los estudiantes y realizar un comparativo entre el pre y post-test.

Capítulo 4. Análisis del pre-test

Con base en el análisis realizado al instrumento de diagnóstico se calculó el porcentaje con respecto a la forma en cómo los 58 alumnos a los cuales se les aplicó dicho instrumento resuelven problemas en los cuales se hace presente la ilusión de la linealidad, lo anterior con la finalidad de obtener una visión general sobre las características y tendencias de los alumnos al solucionar tales problemas.

Cabe señalar que para el presente análisis no se habla con profundidad del problema “castillo” debido a que este problema se resuelve por medio del modelo lineal y será abordado en secciones posteriores para analizar si los alumnos después de aplicarles la propuesta didáctica abusan de la no linealidad.

4.1 La linealidad en los alumnos

La siguiente tabla muestra de manera general la cantidad de alumnos que utilizan el modelo lineal o proporcional para resolver los diferentes problemas:

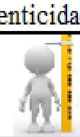
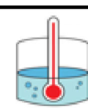
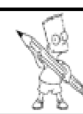
Tipo	Proporcional	Falta de autenticidad		Constantes		Área		Volumen
Ícono								
Lineal	47	52	28	46	37	52	48	55
%	81	89.7	48.3	79.3	63.8	89.7	82.8	94.8

Tabla 3. Frecuencia y porcentaje de los alumnos que aplican el modelo lineal.

La tabla anterior muestra notablemente que los alumnos tienden a aplicar métodos lineales y caen en la ilusión de la linealidad. Los problemas donde presentaron la aplicación del modelo lineal con mayor frecuencia fueron en los problemas “corredora”, “pintor” y “dados” pertenecientes a problemas con falta de autenticidad, área y volumen respectivamente pues casi el 90% o más utilizaron dicho modelo, en el caso del problema de volumen (“dados”) es donde se presentó la mayor frecuencia en el uso del modelo lineal de entre todos los problemas pues casi todos utilizaron dicho modelo. Con base en lo anterior, los problemas que presentaron menor frecuencia en el uso de este tipo de modelo fue en los problemas “toallas” y “altura de los mexicanos” pertenecientes a problemas constantes y con falta de autenticidad.

Con respecto a los problema con falta de autenticidad los alumnos presentan un porcentaje más elevado en la aplicación del modelo lineal en el problema “corredora” y menor incidencia en el problema de “la altura de los mexicanos”, al analizar los instrumentos, cierta cantidad de alumnos logró concebir que la altura de los mexicanos no puede ser de 3.9 metros, sin embargo, casi el 50% de ellos no se dio cuenta de este hecho pues ellos hicieron a un lado su sentido común y/o conciencia con respecto de lo que conocen del mundo. Para el caso del problema “corredora” los alumnos asumen que la respuesta correcta es exacta pues no toman en cuenta ciertas consideraciones realistas y solo buscan la o las operaciones aritméticas para resolver dicho problema y no se dan cuenta que su respuesta es solo una aproximación. En general, para la resolución de ambos problemas de autenticidad los alumnos asumieron que éstos tenían una respuesta numérica y por ende la debían de proporcionar o lo que Brousseau (1997) denominó “contrato didáctico”.

Dentro de los problemas denominados “constantes” sucede algo semejante a lo que sucede con los problemas con “falta de autenticidad” debido a que los alumnos hacen a un lado ciertas consideraciones realistas. Para el problema “temperatura del agua”, casi el 80% de los estudiantes utilizan el modelo lineal para resolver dicho problema, los alumnos hacen a un lado su sentido realista pues ellos piensan que como la cantidad de agua aumenta al doble (de 500 ml a 1000 ml), entonces la temperatura también aumenta al doble (de 20 ºC a 40 ºC), pareciera que hubiera una fuente de calor que provoca que aumente la temperatura del recipiente donde hay más cantidad de agua. Con base en los datos propuestos en este problema sería interesante que en lugar de 1000 ml se propusieran 2500 ml o una cantidad más elevada para que al aplicar el modelo lineal nos diera como resultado 100 °C o más, lo que indicaría que el agua estaría en su punto de ebullición o hirviendo en el ambiente. Para el problema "toallas" los estudiantes creen que a mayor cantidad de toallas el tiempo de secado será mayor, en específico, para el problema planteado los estudiantes creen que el tiempo de secado será el doble (24 horas).

En los problemas "pintor", "agricultor" y "dados" pertenecientes los primeros dos de ellos a problemas de área y el restante a volumen se observó que hay una tendencia en los estudiantes, a creer que si una figura se agranda $k - veces$ entonces el área y el volumen también es ampliada $k - veces$ como lo mencionan De Bock et al. (2002). Los alumnos a los que se les aplicó el instrumento echaron mano de este recurso y ello conllevo a que más del 80% resolvieron estos problemas de forma lineal. Como ya se mencionó, en el problema de volumen ("dados") hubo un mayor porcentaje en la aplicación del modelo lineal, pero en general, en los problemas de área, volumen y "corredora" existe una mayor dependencia a utilizar el modelo lineal para resolver este tipo de problemas.

4.2 La linealidad en los diferentes grupos

Los problemas fueron aplicados a tres diferentes grupos de alumnos a los que denominaremos grupo A el cual consta de 24 alumnos y los grupos B y C integrados de 17 alumnos cada uno de ellos. Por lo anterior es necesario observar la frecuencia con la que los alumnos de cada grupo aplicaron el modelo lineal en los diferentes problemas propuestos.

La siguiente tabla muestra la aplicación del modelo lineal para cada grupo:

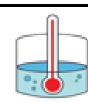
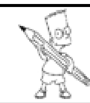
Tipo	Proporcional	Falta de autenticidad		Constantes		Área		Volumen
Ícono								
A (24)	18	23	11	21	14	21	20	22
% A	75	95.8	45.8	87.5	58.3	87.5	83.3	91.7
B (17)	13	13	9	9	12	15	13	17
% B	76.5	76.5	52.9	52.9	70.6	88.2	76.5	100
C (17)	16	16	8	16	11	16	15	16
% C	94.1	94.1	47.1	94.1	64.7	94.1	88.2	94.1

Tabla 4. Frecuencia y porcentaje de los alumnos que aplican el modelo lineal.

Gracias a la tabla anterior, se puede observar que dentro del grupo A se utiliza menos el modelo lineal para resolver el problema “altura de los mexicanos” mientras que en los problemas de área, volumen y constante (“temperatura del agua”) presenta una fuerte tendencia para aplicar el modelo lineal, sin embargo, el problema donde se presenta mayor uso de dicho modelo es en un problema de tipo falta de autenticidad, en específico, en el problema “corredora” debido a que más del 95% de los estudiantes utilizan dicho modelo, incluso, en este grupo (A) presenta un mayor uso del modelo lineal de entre los tres grupos a los que se les aplicó el instrumento.

En el grupo B sucede algo semejante al grupo anterior pues en este grupo se aplica con mayor frecuencia la linealidad en problemas de área (“pintor”), volumen (“dados”) y falta de autenticidad (“corredor”). Los problemas en donde se utilizó con menor frecuencia el modelo lineal son los problemas “temperatura del agua” y “altura de los mexicanos” pertenecientes a problemas de tipo constante y con falta de autenticidad respectivamente, sin embargo, éste último a pesar de presentar un porcentaje bajo para este grupo, es el más elevado de entre los tres grupos. En este grupo (B) también se presenta con un mayor porcentaje (de entre los tres grupos) el uso del modelo lineal para el problema “toallas” y “dados”, en éste último todos los estudiantes utilizaron dicho modelo.

El grupo C utiliza con mayor frecuencia el modelo lineal en diferentes tipos de problema, de entre los tres grupos a los cuales se les aplicó el instrumento, destaca en los problemas de tipo constante (“temperatura del agua”), área (“pintor” y “agricultor”) y volumen (“dados”) pues utilizan con mayor frecuencia dicho modelo para resolver los problemas. De los cuatro problemas mencionados, en 3 de ellos (“temperatura del agua”, "pintor" y "dados") casi la totalidad de los estudiantes utilizaron el modelo lineal pues 16 de los 17 estudiantes de este grupo lo resolvieron de dicha manera.

Podemos observar que no todos los alumnos cayeron en la ilusión de la linealidad, sin embargo, lo anterior no indica que los estudiantes que no aplicaron el modelo lineal tienen un razonamiento apropiado, por lo que es necesario realizar un análisis más profundo, para ello se construyeron algunas categorías que muestran cómo los estudiantes resuelven los problemas.

4.3 Categorías

Es necesario mencionar que con base en la estrategia con la cual los alumnos resolvieron el problema se obtuvieron las siguientes categorías:

- Razonamiento lineal. Aplica proporcionalidad o "regla de tres".
- Razonamiento no lineal. No aplica el modelo lineal o aunque lo aplica, observa que no es apropiado u observa que la respuesta obtenida es inapropiada.
- Otro. Aplica diferentes operaciones aritméticas o solo escribe la respuesta.
- Sin respuesta.

Cada una de las primeras tres categorías está dividida en diferentes subcategorías.

Razonamiento lineal

- Aplica proporcionalidad. El alumno utiliza el modelo lineal, proporcionalidad o "regla de tres" para resolver el problema.
- Aplica proporcionalidad con error al aplicar algoritmo. El alumno intenta aplicar el modelo lineal, proporcionalidad o "regla de tres" pero tiene algún error al realizar sus cálculos.

Razonamiento no lineal

- Razonamiento no lineal aunque de forma inadecuada. El alumno sabe que no es apropiado utilizar proporcionalidad, sin embargo, su razonamiento no es del todo apropiado.

- Razonamiento no lineal adecuado. El alumno comprende que para resolver el problema no es apropiado utilizar proporcionalidad y argumenta de manera adecuada porqué no es conveniente.

Otro

- Realiza diversas operaciones. El alumno se centra en realizar una o varias operaciones aritméticas para resolver el problema y/o no argumenta porqué utiliza dichas operaciones.
- Procedimiento confuso. No es muy claro el método o técnica utilizada por el alumno para resolver el problema o en su defecto solo coloca la respuesta sin argumentar o utilizar operaciones aritméticas.
- Aplica proporcionalidad inversa. El alumno piensa que no es adecuada una proporcionalidad directa para resolver el problema, por lo cual lo resuelve por proporcionalidad inversa.

4.4 Análisis del instrumento

La siguiente tabla muestra de manera general las tendencias de los alumnos al resolver los problemas que se aplicaron en el instrumento, las cuales están desglosadas en sus diferentes subcategorías para un mejor análisis.

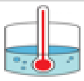
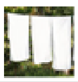
Problema	Razonamiento lineal		Razonamiento no lineal		Otro			Sin respuesta
	Aplica proporcionalidad	Aplica proporcionalidad con error en algoritmo	Inadecuado	Adecuado	Operaciones diversas	Procedimiento confuso	Aplica proporcionalidad inversa	
	46	6	1	0	1	2	0	2
	28	0	11	9	1	4	0	5
	46	0	0	6	1	2	3	0
	37	0	0	17	2	1	0	1
	49	3	1	0	4	0	0	1
	46	2	0	1	2	5	0	2
	48	7	0	1	1	1	0	0

Tabla 5. Frecuencia general de las tendencias de los alumnos al resolver los problemas.

4.4.1 Problemas con falta de autenticidad

En el problema “corredora” se puede observar que de los 58 estudiantes, 51 de ellos tuvieron un razonamiento lineal, de los cuales 5 de ellos tuvieron algún error al aplicar el modelo lineal, cabe señalar que los estudiantes consideraron que la respuesta es exacta (160 segundos) y no fueron capaces de percatarse que la repuesta proporcionada solo corresponde a una aproximación pues existen otros factores que no fueron tomados en cuenta. Algunos estudiantes (2) tomaron en cuenta algunas consideraciones del entorno, sin embargo, no lograron concretar de manera correcta el problema. Un estudiante realizó algunas operaciones para resolver el problema y 2 más realizaron un procedimiento confuso. Otros 2 alumnos simplemente no resolvieron el problema.

El problema “altura de los mexicanos” es uno de los problemas donde los estudiantes presentan una mayor disposición a utilizar sus conocimientos del mundo real o de su entorno pues fue el problema que mayor repuestas no lineales tuvo (20) y el segundo más elevado en razonamiento no lineal adecuado, estos alumnos al parecer se pudieron percatar que el uso del modelo lineal no era adecuado pues al utilizar dicho modelo la repuesta obtenida era excesiva para ser la altura de los mexicanos (3.9 metros). Algunos alumnos (5) no respondieron el problema, posiblemente porque al responderlo mental o aritméticamente con el modelo lineal y obtener el resultado, les pudo causar conflicto. Solo 28 estudiantes respondieron con ayuda del modelo lineal e incluso es el problema donde hubo menor dependencia del modelo lineal, sin embargo, los estudiantes "suspendieron" su conocimiento del mundo al dar como repuesta 3.9 metros. Un estudiante realizó diversas operaciones y 4 más realizaron un procedimiento confuso.

4.4.2 Problemas constantes

Dentro de los problemas de tipo constante hubo ciertas particularidades pues el problema "temperatura del agua" fue el único en el cual 3 estudiantes utilizaron proporcionalidad inversa (posteriormente se presentarán ejemplos de esta situación) y respondieron que la temperatura para 1000 mililitros de agua es de 10 °C. Solo 6 alumnos se pudieron percatar que al estar bajo las mismas condiciones e independientemente de la cantidad de agua que haya en los recipientes, la temperatura debe de ser la misma para ambos (20 °C). De los estudiantes restantes, 46 utilizaron el modelo lineal y dijeron que la temperatura era de 40 °C, 1 utilizó los datos para dar solución y 2 presentaron un procedimiento confuso.

El otro problema de tipo constante ("toallas") es el problema donde los estudiantes presentan mayor disposición a utilizar sus conocimientos del mundo real o de su entorno pues fue el problema que mayor repuestas no lineales adecuadas presenta (17) y se dieron cuenta que no importa la cantidad de toallas, el tiempo de secado será el mismo (12 horas). Cabe señalar que de los 6 estudiantes que respondieron de manera correcta el problema "temperatura del agua", 4 de ellos también respondieron correctamente el problema "toallas". Algunos alumnos (2) utilizaron los datos para dar solución, 1 presentó un procedimiento confuso y 1 estudiante no respondió. El resto de los estudiantes (37) respondieron que el tiempo de secado para 6 toallas es de 24 horas utilizando el modelo lineal.

4.4.3 Problemas de área

Los problemas de área fueron de los problemas en los que más se utilizó el modelo lineal. Por ejemplo, para el problema "pintor" se puede observar que de los 58 estudiantes, 52 de ellos tuvieron un razonamiento lineal pues resolvieron dicho problema con proporcionalidad o "regla de tres", de los cuales 3 de ellos tuvieron algún error al aplicar el modelo, cabe señalar que ningún estudiante se percató que si el dibujo crece en una dimensión (largo por ejemplo) entonces también tiene que crecer en la otra dimensión (ancho) la misma cantidad de veces, en específico, si crece en un dimensión 3 veces, en la otra también tiene que crecer 3 veces (para guardar uniformidad en el nuevo dibujo, de lo contrario estaría "deforme"), es decir, sería 9 veces más grande que el original, por lo tanto, necesitaría aproximadamente 9 veces más de pintura (54 mililitros). Solo 1 estudiante tomó algunas consideraciones pero no logró concretarlo correctamente. Otros estudiantes (4) realizaron algunas operaciones para resolver el problema y 1 más no resolvió el problema.

En el problema "agricultor" sucede algo semejante que en el problema anterior, pues si se considera un terreno 3 veces y se debe de conservar la misma figura (cuadrado) entonces debe de crecer 3 veces del otro lado, es decir, sería 9 veces más grande que el original, por lo tanto, necesitaría aproximadamente 9 veces más de tiempo (72 horas). Solo un estudiante logró responder de manera correcta este problema. 48 estudiantes utilizaron el modelo lineal aunque 2 de ellos presentaron algún error al aplicar el algoritmo. Otros estudiantes (2) realizaron algunas operaciones para resolver el problema, 5 realizaron un procedimiento confuso y 2 más no resolvió el problema.

4.4.4 Problema de volumen

El problema de volumen fue el problema en el que más se utilizó el modelo lineal. De los 58 estudiantes a los cuales se les aplicó el instrumento, 55 de ellos tuvieron un razonamiento lineal pues resolvieron dicho problema con proporcionalidad o "regla de tres", de los cuales 7 tuvieron algún error al aplicar el modelo. Cabe señalar que solo un estudiante se percató que al ser el cubo una figura tridimensional y cada arista crece 3 veces entonces en total crecerá 27 veces, es decir, el cubo con mayores dimensiones es 27 veces más grande con respecto del primero, por lo tanto, el peso del cubo más grande sería de aproximadamente 21600 miligramos. El estudiante que resolvió correctamente es el mismo que resolvió correctamente el problema "agricultor". Un estudiante realizó algunas operaciones para resolver el problema y 1 más lo resolvió de forma confusa.

Aunque se menciona cómo resuelven los diferentes tipos de problemas, es importante visualizar algunos ejemplos de los procedimientos y/o argumentos que los estudiantes utilizaron para resolver dichos problemas, con base en lo anterior, se presenta la siguiente sección.

4.5 Ejemplos de las diferentes categorías

En la presente sección se muestran algunos ejemplos de las estrategias, procedimientos y/o argumentos que los estudiantes utilizaron para resolver los diferentes problemas presentados en el instrumento. Es necesario familiarizar con la estructura de las tablas que se mostrarán, por ello a continuación se muestra un ejemplo.

Alumno	Problema	Solución	Respuesta
C1		100m — 16seg 1000 — $\boxed{160}$ $\frac{100\times10}{1000}$ $\frac{16\times10}{160}$ $=\boxed{160}$	160 segundos

Tabla 6. Ejemplo de estructura de tablas posteriores.

A continuación se hace una breve descripción de los elementos que conforman a la Tabla 6.

- La columna "Alumno" hace referencia al grupo (A, B o C) y al número de instrumento aplicado en ese grupo, por ejemplo, en la Tabla 6 muestra "C1" lo cual indica que es un estudiante del grupo "C" y el número de instrumento aplicado en ese grupo es el 1.
- La columna "Problema" muestra un ícono el cual indica el problema al que se está haciendo referencia, por ejemplo, el ícono de la Tabla 6 hace referencia al problema "corredora", si es necesario recordar los íconos, ver Tabla 2.
- La columna "Solución" indica la estrategia, procedimiento, algoritmo y/o argumento utilizado para resolver el problema, por ejemplo, en la columna "Solución" de la Tabla 6 se observa que el estudiante utiliza el algoritmo de la "regla de tres" para resolver el problema "corredora".
- La columna "Respuesta" muestra el resultado que el estudiante obtuvo, por ejemplo, el resultado del estudiante C1 es 160 segundos.

4.5.1 Razonamiento Lineal

Primero se abordará la categoría "Razonamiento lineal", en esta categoría se incluyen a los estudiantes que utilizaron el modelo lineal, proporcionalidad o "regla de tres" para resolver los problemas. A modo de recordatorio, en esta categoría existen dos subcategorías: aplica proporcionalidad y aplica proporcionalidad con error en algoritmo.

4.5.2 Aplica proporcionalidad

Primero se muestran algunos ejemplos incluidos dentro de la subcategoría denominada aplica proporcionalidad.

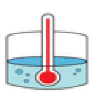
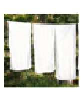
Alumno	Problema	Solución	Respuesta
A1		56 × 3 = 168 6 × 3 = 18	18 mi de pintura
C1		100m — 16 seg 1000 — 160 100×10 / 1000 16×10 / 160 = 160	160 segundos
A5		Si en 8 horas se hace en arar 100 m el triple son 300 entonces solo sume las horas al triple. "Si en 8 horas se hace en arar 100 m el triple son 300 entonces solo sume el triple"	24 horas
B5		Porque es el doble de ml de agua así que por lo tanto es lo doble de temperatura.	40°C
B1		dividí el numero de toallas que pedia con las que colgo el resultado lo multiplique por el tiempo que se seca $3\overline{)6}$ 2 2 × 12 = 24 "dividi el numero de toallas que pedia con las que colgo y el resultado lo multiplique por el tiempo que se seca"	24 Horas
C1		Lo que hice fue una regla de 3. 10 mm — 800 mg 30 mm — x x = 2400	2400 g

Tabla 7. Tendencias de los alumnos al aplicar el modelo lineal.

Como se puede observar en la tabla anterior, existieron tres casos: estudiantes que aplican el algoritmo de la "regla de tres", estudiantes que argumentan que utilizan "regla de tres” o describen la relación proporcional y, estudiantes que aplicaron el algoritmo de la regla de tres y además argumentan que utilizaron dicho algoritmo.

Para el caso de los estudiantes A1 y C1 que se muestran en la Tabla 7 se observa que aplicaron el algoritmo de la “regla de tres” aunque, también se puede observar que ambos estudiantes no utilizan la división (posiblemente por la dificultad o incapacidad que les representa resolverla) y en lugar de ello realizan una multiplicación para determinar cuántas veces crece una cantidad con respecto de la otra, por ejemplo, el estudiante A1 realiza la siguiente operación para el problema “pintor”: $56\,x\,3\;=\;168$ lo cual indica que la figura de 56 cm crece 3 veces y formar la figura de 156 cm, con base en lo anterior, el estudiante sabe que la figura crece 3 veces por lo tanto necesita 3 veces más de pintura por ello realiza la operación siguiente: $6\,x\,3\;=\;18$, es decir, necesita 18 mililitros de pintura para la figura de 168 cm. Una situación semejante sucede con el estudiante C1 pues realiza la multiplicación $100\,x\,10\;=\;1000$, con lo cual el estudiante observa que la distancia incrementa 10 veces por ende necesitará 10 veces más de tiempo y realiza la operación $16\,x\,10\;=\;160$, obteniendo como resultado 160 segundos para recorrer 1000 metros.

En el caso de los estudiantes A5 y B5 que se muestran en la tabla anterior se observa que argumentan que utilizan proporcionalidad o “regla de tres”, por ejemplo, el estudiante A5 argumenta que aplica proporcionalidad para solucionar el problema “agricultor” pues menciona que: *“Si en 8 horas se hace en arar 100 m el triple son 300, entonces, solo sume el triple”* por lo tanto necesita el triple de horas para arar el terreno de 300 m de lado y obtiene como resultado 24 horas. En el caso del estudiante B5 para resolver el problema “temperatura del agua” argumenta que: *“porque es el doble de ml de agua así que por lo tanto es el doble de temperatura”* y con base en dicho argumento escribe 40 °C como resultado.

Los estudiantes B1 y C1 argumentan que utilizaron “regla de tres” o la describen y además realizan dicho algoritmo, por ejemplo, para resolver el problema “toallas” el estudiante B1 argumenta: *“dividí el número de toallas que pedía con las que colgó y el resultado lo multipliqué por el tiempo que se seca”* y al lado derecho de este argumento podemos observar las operaciones aritméticas utilizadas, primero divide $6\;\div\;3\;=\;2$, lo cual indica que hay el doble de toallas y posteriormente multiplica $2\,x\,12\;=\;24$, para obtener como resultado 24 horas. En el caso del estudiante C1 solo argumenta: *"Lo que hice fue una regla de 3"* y posteriormente se observan la típica notación de la "regla de tres", $10\ mm - 800\ mg$ y $30\ mm - x$ y, por último obtiene el valor faltante $x = 2400$, es decir, el peso del dado de 30 mm es de 2400 mg, cabe mencionar que el estudiante cambia la unidad de medida mg (miligramos) por g (gramos) en su respuesta.

4.5.3 Aplica proporcionalidad con error al aplicar algoritmo

En la categoría denominada como razonamiento lineal y aplica proporcionalidad con error al aplicar algoritmo, los alumnos tienden a aplicar el algoritmo de la "regla de tres", sin embargo al realizar los cálculos correspondientes tienen ciertas complicaciones como se muestra a continuación.

Alumno	Problema	Solución	Respuesta
A12		16 + 16 = 32; 32 − 2 + 32 = 64 − 4; 64 + 64 = 128 + 16 = 144	144 segundos
C11		cada 100 metros corre 16 segundos "cada 100 metros corre 16 segundos"	144 segundos
B4		16 (100m), 32 (200m), 48 (300m), 64 (400m), 80 (500), 96 (600), 112 (700), 126 (800), 144 (900), (1000m); 1m 15, 1m 20s, 1m 36s, 1m 52s, 2m 6s, 2m 24s, 2m 30s	2 minutos 30 segundos

Tabla 8. Tendencias de los alumnos al aplicar el modelo lineal con error al aplicar el algoritmo.

Para en análisis de este tipo de caso se tomó en cuenta el problema "corredora". El estudiante A12 realiza sumas para determinar la solución, primero realiza una suma ($16 + 16 = 32$) lo cual correspondería al tiempo que se tarda en recorrer 200 metros, incluso, en la siguiente operación ($32 + 32 = 64$) en la cifra superior coloca una línea y un "2" posiblemente para recordar que la corredora ha recorrido 200 metros, en el resultado de dicha suma (64) coloca otra línea y el número 4 posiblemente para recordar que la corredora ha recorrido 400 metros. Posteriormente realiza otra suma, $64 + 64 = 128$ lo que correspondería a 800 metros y a ese resultado le suma 16 ($128 + 16 = 144$) los cuales corresponden a otros 100 metros, entonces, la respuesta del estudiante A12 es 144 segundos pero tal suma corresponde a 900 metros recorridos, por lo tanto, existe un error pues no se tomó la distancia que se propone en el problema (1000 metros) pues le falta tomar en cuenta otros 100 metros.

El estudiante C11 realizó algo semejante al caso anterior pues aunque argumenta que en 16 segundos recorre 100 metros, en su respuesta escribe 144 segundos, lo cual correspondería a 900 metros recorridos utilizando el modelo lineal. El estudiante B4 realiza una especie de recta, por encima de ella coloca los segundos transcurridos y por debajo de ella la distancia recorrida e incluso, en donde están colocadas las cantidades de segundos transcurridos realiza una conversión a minutos. Sin embargo, su respuesta es 2 minutos 30 segundos (lo que sería equivalente a 150 segundos) pero si utilizamos el modelo lineal la respuesta debería ser 160 segundos, el error radica en los 900 y 1000 metros pues para 900 metros recorridos han transcurrido 144 segundos o 2 minutos con 24 segundos pero al agregar los últimos 100 metros y los 16 segundos sucede lo siguiente con el tiempo: $2\, minutos\; 24\, segundos + 16\, segundos = 2\, minutos\; 30\, segundos$ lo cual es erróneo pues $2\, minutos\; 24\, segundos + 16\, segundos = 2\, minutos\; 40\, segundos$ (160 segundos).

4.5.4 Razonamiento no lineal

Con base en las tablas anteriores se pudo observar que la ilusión de la linealidad se hace presente en la mayoría de los estudiantes a los cuales se les aplicó el intrumento, pero hubo algunos que se pudieron percatar de que la aplicación del modelo lineal no era adecuado, estos estudiantes fueron agrupados dentro de la categoría razonamiento no lineal, cabe mencionar que dicha categoría tiene dos subcategorías: inadecuado y adecuado, ejemplos de ello se presentan en la siguiente sección.

4.5.5 Inadecuado

Un ejemplo del tipo de razonamiento no lineal aunque no del todo adecuada se presenta en el estudiante A9, pues el toma en cuanta ciertas persepciones, conocimientos o experiencias personales para resolver tres problemas, en específico, el problema “corredora”, “temperatura del agua” y “pintor”.

Alumno	Problema	Solución	Respuesta
A9		Basandome en el tiempo que tarda corriendo 100 metros y pensando que en 100 m divide sus energias y para poder resistir 1000 m deveria correrlos en una velocidad mejor	1 min 40 seg
		La cantidad de agua es muy poca como para que dicha cantidad bastante chica afecte la temperatura podria decender su temperatura de momento pero con calor constante y su evaporizacion lograria a su temperatura inicial 	20°C
		El dibujo es 3 veces mas grande que el original Son exactamente 3 veces mas de pintura, 18 ml son suficientes, en mi caso agregue 2 ml mas en caso de que faltaron por detalles	20 ml

Tabla 9. Tendencias del alumno A9 al utilizar razonamiento no lineal aunque de forma inadecuada.

El estudiante A9 se dio cuenta de que el modelo lineal no se puede aplicar perfectamente a los problemas planteados, sin embargo, presenta algunas dificultades. En el problema “corredora”, él se basa en su experiencia para argumentar que la corredora no puede recorrer los 1000 m en 160 segundos puesto que debe dividir sus energías lo cual es un razonamiento aceptable, desafortunadamente después él argumenta que debería de recorrer la distancia en una velocidad mejor lo cual no es del todo correcto pues no toma en cuenta ciertos factores como el cansancio de la corredora.

En el problema “temperatura del agua” su respuesta es correcta pero no está tomando en cuenta las cantidades que se le presentan originalmente pues son 500 ml y 1000 ml, el estudiante esta tomando en cuenta 50 ml y 100 ml respectivamente, al observar que son cantidades pequeñas de agua, él argumenta que la temperatura permanece invariante pero, ¿su razonamiento podría cambiar al tomar los datos presentados en el problema?.

Al resolver el problema “pintor”, el estudiante desafortunadamente solo hace crecer una dimensión (ancho) de la figura y por ello utilizará 18 ml lo cual es erroneo pues también el largo debería aumentar, sin embargo, él rompe algunas estructuras mentales cuando hace uso de su experiencia y argumeta que va a utilizar más pintura "*en caso de que faltara por detalles*", él incluso expresa que con 2 ml más es suficiente.

Existe también una particular atención en la resolución del problema "altura de los mexicanos" debido a que 9 de los 11 estudiantes que se tienen registrados en esta categoría no tomaron en cuenta el dato que se les proporcionaba (1.30 m) sino que simplemente tomaron en cuenta la parte de los 0.30 m o 30 cm para resolver el problema para obtener como resultado 1.90 m.

Alumno	Problema	Solución	Respuesta
A2		10 años 1.30m 20 años 1.60m 30 anos 1.90m	1.90m
B5		Por que por cada año tienen que crecer 2 c si a los 10 mide 1.30 m. A esos .30m se le multiplican nos da un resultado de 1.90m	1.90 m
C7		10años — 1.30m 20años — 1.60cm 30 años — 1.90cm Solo se fueron sumando 30cm a los años que tenia "Solo se fueron sumando 30 cm a los años que tenía"	1.90 m

Tabla 10. Tendencias de los alumnos al utilizar razonamiento no lineal aunque de forma inadecuada en el problema de "la altura de los mexicanos".

Con base en la tabla anterior se puede observar que los estudiantes aplicaron la "regla de tres" solo a los 30 cm sin mencionar porqué pero se tiene la suposición de que los alumnos posiblemente obtuvieron como resultado 3.90 m, lo cual les causó cierta "sorpresa" pero no quisieron dejar el problema sin resolver por lo cual hicieron uso de los 30 cm y lo multiplicaron por 2 o 3 (dependiendo el caso) para obtener como resultado 1.90 m.

Hasta el momento solo se han presentado las formas incorrectas o "no apropiadas" para resolver los problemas que se presentaron en el intrumento aplicado a los 58 estudiantes del CECyTE 15 Huactzinco, a pesar de que la mayoria de los alumnos incurrieron en el modelo lineal, hubo algunos que no recurrieron a él y lograron resolver el problema de forma adecuada.

4.5.6 Correcto

En cinco de los siete problemas propuestos hubo respuestas correctas, en orden desendente, el mayor numero de respuestas correctas se encontró en el problemas de “toallas” (17), “altura de los mexicanos” (9) , “temperatura del agua” (6), en el problema del “agricultor” y “los dados” solamente una persona respondió bien, incluso, fue el mismo estudiante el que respondió correctamente a estos dos últimos problemas.

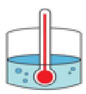
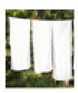
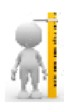
Alumno	Problema	Solución	Respuesta
B7		La temperatura no cambia, siempre y cuando se aplique un cambio calorifico	La misma
A3		no tiene nada que ver el tiempo pues terminarian al mismo tiempo por que lo que puede cambiar solo seria el sol	12 horas
A12		Podrian medir 1.90 si sumamos 10 cm por año pero pide exactitud a respuesta y la considera controvercial	Es confuso colocar algo con exactitud
A24		8 horas 100 m; 24 Horas 300 m; 24 horas 300 m; por que se mantiene la forma, pero se amplia la medida lo que hace que el interior	72 horas
		multiplicando lado por lado por lado dibidiendo el cubo en 27 partes	216 000 mg

Tabla 11. Tendencias de los alumnos al aplicar razonamiento no lineal adecuado.

A pesar de que fue una minoría de estudiantes la que logró resolver de forma adecuada los problemas propuestos en el intrumento, podemos observar que los alumnos no tienen un método definido y que cada uno utiliza sus experiencias, conocimientos y destrezas para dar solución de forma adecuada.

4.5.7 Otro

Además de las dos categorías ya analizadas, existe una más en la cual los alumnos aportan una respuesta a los problemas denominada “otro” debido a que son respuestas espurias pues los alumnos solo realizan operaciones o en su defecto dan resultados de los cuales su procedimiento es un tanto confuso.

4.5.8 Operaciones diversas

Algunos estudiantes simplemente utilizaron los datos que se proporcionaban en cada uno de los diferentes problemas y con dichos datos realizaban operaciones aritmeticas.

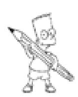
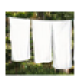
Alumno	Problema	Solución	Respuesta
B10		100 − 16 seg 1000 − 16,000	16,000 segundos
A10		Multiplico	1008
B10		56 cm − 6 ml 168 cm − 28 ml 168 − 6 = 28 ml.	28 ml
C11		solo se suman los horas empleados "solo se suman las horas empleadas"	72 horas
C12		10 años − 1.30 m 30 años − ? 1.30 × 30 = 000 + 390 = 3900 3900 ÷ 10 = 390	1.39 m

Tabla 12. Tendencias de los alumnos al aplicar operaciones aritméticas.

El estudiante B10 solo multiplica $1{,}000 \; x \; 16 \; = \; 16{,}000$, es decir, la solución para el problema “corredora” indicaría que para recorrer 1000 metros se necesitarian 16,000 segundos. En el caso del problema “pintor” el estudiante A10 argumenta que multiplica pero no realiza ninguna operación y propone como resultado 1008, preciera que simplemente multiplica $168 \; x \; 6$ y obtiene dicho resultado. Para el mismo problema pero el etsudiante B10 realiza $168 \div 6 = 28$, es decir, el pintor necesita 28 ml de pintura para la nueva figura ampliada. En el problema “toallas” el estudiante argumenta *“solo se suman las horas empleadas”* y propone como resultado 72 horas, pareciera que el estudiante multiplica las 6 toallas por 12 horas, es decir, $6\,x\,12\ =\ 72$. El estudiante C12 aplica el modelo lineal para obtener como resultado 390, sin embargo, hace una especie de transformción y el resultado obtenido (390) lo convierte en 0.39 metros y le suma 1 metro para obtener como resultado 1.39 metros.

4.5.9 Procedimiento confuso

Se observaron otros casos al realizar el análisis de las respuestas de los alumnos en los problemas, los procedimientos utilizados resultaron ser confusos pues los alumnos no argumentaron cómo obtuvieron dicho resultado ni se encontró qué operación aritmetica utilizaron.

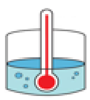
Alumno	Problema	Solución	Respuesta
B12			2 minutos
B14		Por que considero que son Faciles	200°C
C4		10 años — 1.30 cm 20 años — 2.00 30 años — 2.30 cm	2.30 m
A7		sumando	300 mt

Tabla 13. Tendencias de los alumnos al aplicar procedimientos confusos.

Podemos observar en la Tabla 13 que el estudiante B12 solo escribe en la respuesta *"2 minutos"* sin embargo, no argumenta o escribe qué realizó para obtener tal resultado en el problema "corredora". En el problema "temperatura del agua" el estudiante B14 propone como resultado 200 °C y argumenta *"porque considero que son fáciles"* pero no existe alguna operación aritmética que refuerce su respuesta, tal pareciera que multiplicó 20 °C por 10 para obtener la respuesta pero 10 no es un dato que se proponga en el problema. El estudiante C4 propone como resultado 2.30 m realizando una especie de correspondencia entre datos además de que cambia la unidad de medida de metros a centímetros como se muestra en la Tabla 13, el estudiante propone 10 $años -$ 1.30 cm, 20 años – 2.00, es decir, de los 10 años a los 20 años creció 0.70 m, uno esperaría que ese mismo patrón de crecimiento se mantuviera pero de 20 $años -$ 2.00 a 30 años – 2.30 no se cumple pues de los 20 a los 30 años crece 0.30 metros, desafortunadamente el estudiante no argumenta el motivo de estos dos crecimientos diferentes.

4.5.10 Aplica proporcionalidad inversa

Algunos estudiantes no aplicaron el modelo lineal directo, ellos creyeron conveniente aplicar proporcionalidad inversa. Se observa que los estudiantes que resolvieron el problema con proporcionalidad inversa lo hicieron en el problema “temperatura del agua”. Se muestran los ejemplos de este tipo de respuestas.

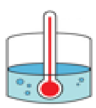
Alumno	Problema	Solución	Respuesta
A23		Pues es la mitad de grados por que es el doble de agua	10°C
B3		porque si ponemos poca agua en un estufa por logica se calentara más rapido por lo mismo de ser poca en cambio si ponemos un recipiente con mayor agua y lo ponemos el mismo tiempo de pusimos el otro tiende a decender la temperatura ya que es un poco de agua. "porque si ponemos poca agua en un estufa por logica se calentara más rapido por lo mismo de ser poca en cambio si ponemos un recipiente con mayor agua y lo ponemos el mismo tiempo el otro tiende a decender la temperatura ya que es un poco de agua"	10°C
B16		Por que al ser el doble de agua esta el doble de fria entonces estaria a 10°C “Por que al ser el doble de agua esta el doble de fria entonces estaría a 10 °C”	10°C

Tabla 14. Tendencias de los estudiantes al aplicar proporcionalidad inversa.

Un estudiante (B3) supone que el recipiente con agua esta en la estufa e incluso toma en cuenta un tiempo de 2 minutos, sin embargo en la descripción del problema se menciona que los recipientes estan a temperatura ambiente. Los estudiantes A23 y B16 basicamente argumentan que al ser el doble de la cantidad de agua entonces, la temperatura será la mitad, es decir, 10 °C.

Como podemos observar, los estudiantes tienen diferentes formas para resolver problemas en donde se presenta la ilusión de la linealidad, algunos aplican el modelo lineal, muy pocos rompen con este tipo de razonamiento, otros más realizan cálculos aritméticos con los datos que se proponen en los problemas para otorgar alguna respuesta numérica y algunos mas simplemente no responden. También podemos observar que cada estudiante tiene su propio técnica para resolver los diferentes problemas.

4.6 Apoyos utilizados por los estudiantes

Los estudiantes no solo cayeron en la ilusión de la linealidad sino que se pudieron apoyar con algunas herramientas matemáticas y/o visuales tales como la suma, tablas, gráficas, rectas o diagramas.

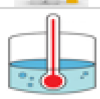
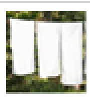
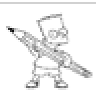
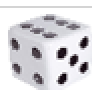
Ícono	Suma	Tabla	Gráfica	Recta	Diagrama
	4	8	1	7	9
	2	8	0	0	4
	4	1	2	0	11
	0	2	0	0	8
	1	4	1	0	7
	2	4	0	1	11
	3	5	0	0	5
Total	**16**	**32**	**4**	**8**	**55**

Tabla 15. Frecuencias de los apoyos externos utilizados por los estudiantes.

Podemos observar de manera general que los estudiantes se apoyan de diferentes herramientas y que en los diferentes tipos de problemas la herramienta más utilizada por los estudiantes fueron los diagramas realizados por ellos mismos a excepción de los problemas de volumen ("dados") y "altura de los mexicanos" perteneciente a problemas de volumen y falta de autenticidad respectivamente, pues en el primer caso se encuentra empatada con la herrramiente Tabla y en el segundo caso es inferior al mismo. En el caso del problema "corredora", es donde hubo una mayor gama de herramientas utilizadas y con una mayor frecuencia que los demás.

También podemos observar que las tablas y diagramas son las herramientas que al menos se utilizaron una vez en cada uno de los diferentes problemas. En cambio, la utilización de la recta y de gráficas se dio con menos frecuencia en los diferentes problemas, por ejemplo, el uso de la recta solo se dio en dos de los siete posibles problemas, en específico en el problema de “la corredora” y “el agricultor”.

A continuación se presentan algunos ejemplos de las herramientas utilizadas por los estudiantes (gráfica y recta).

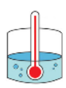
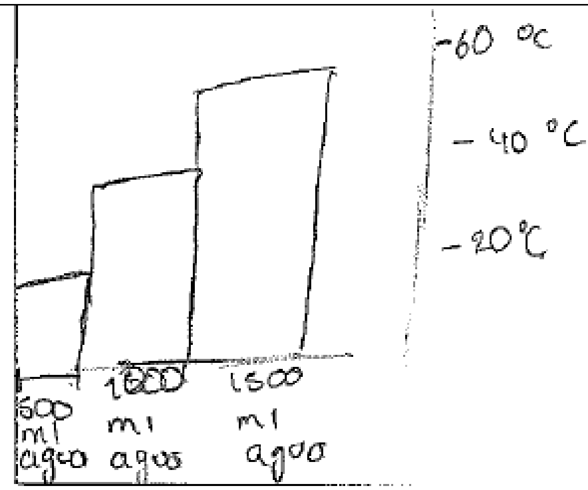
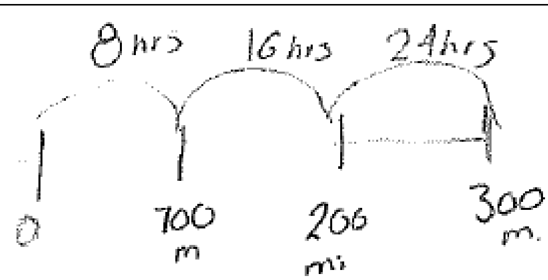
Estudiante	Problema	Solución
A7		
B2		

Tabla 16. Tendencias de las representaciones externas utilizadas por los estudiantes.

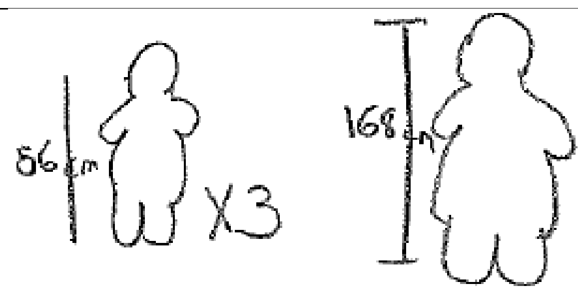
A pesar de que los estudiantes a los cuales se les aplicó el instrumento cursan el tercer semestre de bachillerato podemos observar que utilizan herramientas básicas para resolver los problemas. Utilizan la suma porque posiblemente se encuentren inseguros para realizar la multiplicación o en su defecto porque tienen problemas para aplicar el algoritmo de la “regla de tres”.

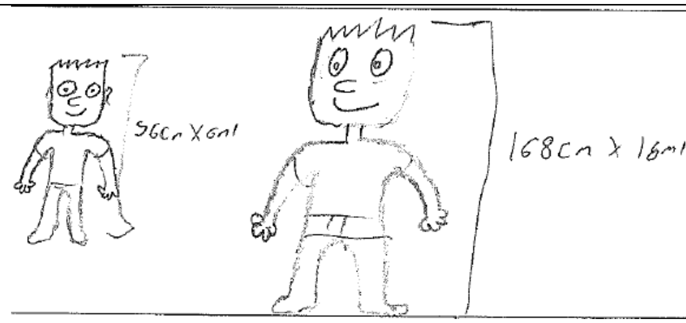
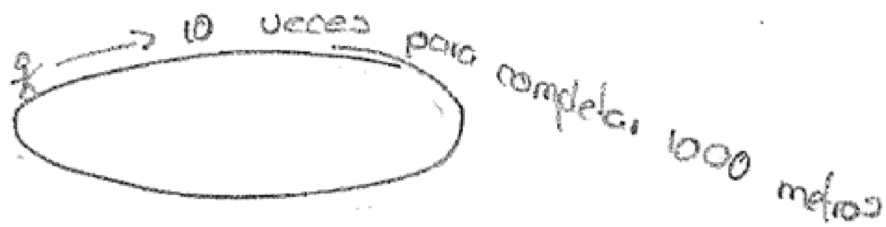
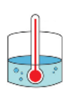
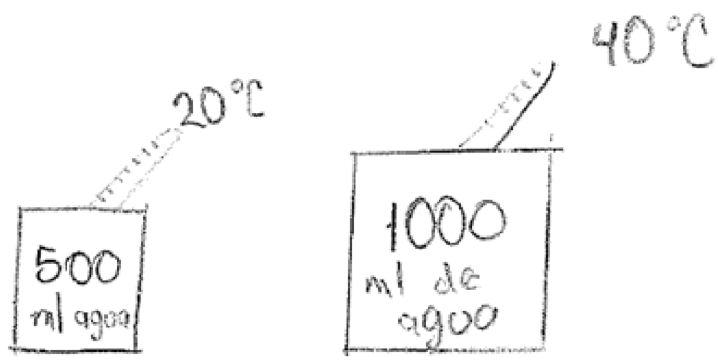
Los estudiantes utilizaron tablas en cada uno de los distintos problemas al menos una vez, sin embargo no fue una herramienta muy eficiente o de mucha ayuda pues al resolver los problemas incurrian en la ilusión de la linealidad. En pocos casos se utilizaron gráficas en específico, graficas de barras.

Los estudiantes utilizaron también la recta para resolver los problemas, pero incluso en algunos de los casos como el que se muestra en la Tabla 16 del estudiante B2, tienen arraigados los “saltos de la rana” y utilizan dicho apoyo para resolver el problema aunque este tipo de conocimiento lo adquieren desde la educación primaria.

A pesar del apoyo y uso de las cuatro herramientas (suma, tabla, gráfica y recta) que se mencionan, los estudiantes no tuvieron un avance significativo en la resolución correcta de los problemas.

Los esquemas creados por los estudiantes fueron otra herramienta utilizada para resolver los problemas y aunque pareciera que es una herramienta visual poderosa pues si los diagramas son bien realizados pueden observar ciertas características que les pudieran ayudar a resolver los problemas, por ejemplo, en los problemas de área se puede observar que las figuras crecen tanto en largo como en ancho lo cual puede ser una sustacial ayuda para obsevar que el crecimiento no es lineal.

Alumno	Problema	Solución
A11		

B17		
A12		
A2		
A11		

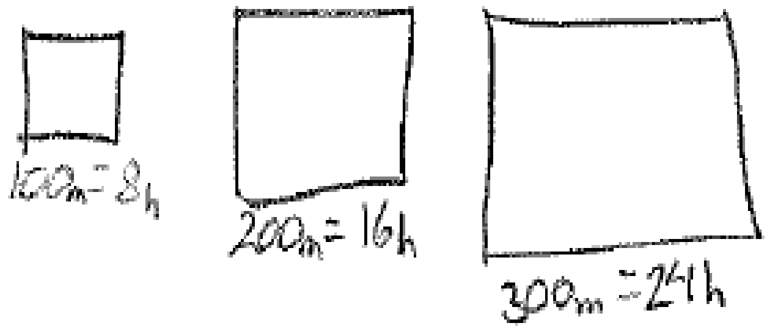
B4		

Tabla 17. Diagramas utilizados por los estudiantes.

En los problemas “el agricultor” y “tempertura del agua” es donde se crearon más diagramas que en el problema del “pintor” lo anterior posiblemente porque es más fácil para los estudiantes dibujar una figura regular que una irregular, por ejemplo, para el problema del “agricultor” se hace enfasis en un terreno cuadrado mientras que en el problema del “pintor” se necesita un Bart Simpson.

Con base en la Tabla 17 podemos observar que los estudiantes crean sus diagramas pero en algunas ocasiones no son de muchas ayuda pues no estan realizados de manera correcta, por lo cual esto en lugar de ayudarles les presenta un obstáculo para resolver dicho problema. Cuando los diagramas son realizados de forma correcta sucede algo peculiar pues en lugar de servir como un apoyo visual para los estudiantes pareciera que dichos diagramas los hacen a un lado para enfocarse en la parte numérica o aritmética del problema sin analizar los que está sucediendo con los diagramas.

Como se puede observar en las diferentes tablas, los alumnos resuelven de diversas formas cada uno de los problema debido a que el razonamiento de cada uno de ellos es diferente y por consiguiente la técnica utilizada para resolverlo.

Capítulo 5. Análisis del post-test

Por último, se aplicó un cuestionario final (post-test) para determinar el efecto de la propuesta didáctica, poder observar los resultados de dicha intervención con base en las repuestas del post-test y analizar qué sucede con los estudiantes de los grupos a los cuales no se les aplicó la propuesta didáctica.

En la sección inmediata se realizará un breve análisis de los resultados del post-test con base en los resultados obtenidos por los diferentes grupos y en la siguiente sección se abordará el análisis mediante la comparación del pre y post-test en cada problema.

5.1 Resultados del post-test

A continuación se presentan los resultados del post-test de los diferentes grupos

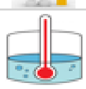
Problema	Razonamiento lineal		Razonamiento no lineal		Otro			Sin respuesta
	Aplica proporcionalidad	Aplica proporcionalidad con error en algoritmo	Inadecuado	Adecuado	Operaciones diversas	Procedimiento confuso	Aplica proporcionalidad inversa	
	17	1	1	0	5	0	0	0
	5	0	8	7	0	1	0	3
	15	0	0	8	0	0	1	0
	5	0	0	14	0	0	5	0
	15	2	1	0	0	5	0	1
	16	0	0	1	0	7	0	0
	16	3	1	0	1	3	0	0

Tabla 18. Post-test grupo A.

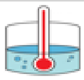
Problema	Razonamiento lineal		Razonamiento no lineal		Otro			Sin respuesta
	Aplica proporcionalidad	Aplica proporcionalidad con error en algoritmo	Inadecuado	Adecuado	Operaciones diversas	Procedimiento confuso	Aplica proporcionalidad inversa	
	9	0	7	0	1	0	0	0
	1	0	1	14	0	0	0	1
	2	0	0	14	0	1	0	0
	1	0	0	16	0	0	0	0
	11	0	3	0	2	1	0	0
	6	0	2	4	0	4	0	1
	9	2	0	3	0	3	0	0

Tabla 19. Post-test grupo B.

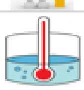
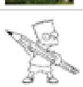
Problema	Razonamiento lineal		Razonamiento no lineal		Otro			Sin respuesta
	Aplica proporcionalidad	Aplica proporcionalidad con error en algoritmo	Inadecuado	Adecuado	Operaciones diversas	Procedimiento confuso	Aplica proporcionalidad inversa	
	14	1	0	0	1	1	0	0
	2	0	2	10	1	1	0	2
	9	1	0	5	0	2	0	0
	7	0	2	7	1	0	0	0
	14	1	0	0	0	2	0	0
	13	0	0	0	0	2	0	2
	13	2	0	0	0	1	0	1

Tabla 20. Post-test grupo C.

Comparando las Tablas 18, 19 y 20 se puede observar que el grupo al cual se le aplicó la propuesta didáctica (grupo B) tuvo cierta mejoría en comparación a los otros dos grupos (A y C) pues algunos estudiantes optaron por no utilizar el modelo lineal para resolver los problemas, esto se puede observar dentro de la categoría Razonamiento lineal pues el menor número de estudiantes que resuelven los problemas con dicho modelo se presenta en el grupo B.

En los grupos A y C se observa que las respuestas están "cargadas" o acumuladas en la categoría Razonamiento lineal, es decir, en estos grupos predominó el uso del modelo lineal para resolver los problemas propuestos. Sin embargo, existen algunas excepciones, a los grupos a los cuales no se les aplicó la propuesta didáctica tuvieron un cambio al momento de resolver los problemas "altura de los mexicanos" y "toallas" (pertenecientes a problemas con falta de autenticidad y constantes respectivamente) pues la mayor parte de las respuestas se encuentran en la categoría Razonamiento no lineal, es decir, en estos problemas la mayoría de los estudiantes de estos grupos no creyeron apropiado o necesario el modelo lineal para darles solución y, posiblemente pusieron en práctica sus conocimientos o experiencias del mundo real para proporcionar una solución apropiada o al menos cercana a ella.

Cabe señalar que en los problemas "corredora", "dados", "pintor" y "agricultor" pertenecientes a problemas con falta de autenticidad, volumen y área respectivamente son los problemas en los que se utilizó con mayor frecuencia el modelo lineal en los tres diferentes grupos.

Se puede observar también que al grupo al que se le aplicó la propuesta didáctica (grupo B), este tipo de razonamiento (lineal) no se erradicó totalmente pues como se observa en la Tabla 19, al menos un estudiante utilizó el modelo lineal en cada uno de los problemas.

Es necesario realizar una comparación del pre y post-test de los diferentes grupos, dicha información se presenta en la siguiente sección.

5.2 Comparativo del pre y post-test

En la presente sección se muestran y analizan cuáles fueron los resultados del pre y post-test de cada grupo de forma comparativa, es necesario mencionar que dicho análisis se realiza problema por problema para profundizar un poco más.

5.2.1 Problemas con falta de autenticidad

Primero se analizan los problemas “corredora” y “altura de los mexicanos”, pertenecientes a problemas con falta de autenticidad. De manera general en este tipo de problemas hubo avance pues independientemente de haber recibido o no la aplicación de la propuesta didáctica, los alumnos de los diferentes grupos al parecer tomaron en cuenta lo que conocen sobre el mundo y por ello en el problema “altura de los mexicanos” hubo un avance con respecto a sus respuesta pues ellos notaron que lo que obtenían como resultado iba en contra de lo que en la realidad sucede.

Grupo	Test	Problema	Razonamiento lineal		Razonamiento no lineal		Otro			Sin respuesta
			Aplica proporcionalidad	Aplica proporcionalidad con error en algoritmo	Inadecuado	Adecuado	Operaciones diversas	Procedimiento confuso	Aplica proporcionalidad inversa	
A	Pre		19	4	1	0	0	0	0	0
	Post		17	1	1	0	5	0	0	0
B	Pre		12	1	0	0	1	2	0	1
	Post		9	0	7	0	1	0	0	0
C	Pre		15	1	0	0	0	0	0	1
	Post		14	1	0	0	1	1	0	0

Tabla 21. Tabla comparativa del problema "corredora".

La Tabla 21 muestra los resultados del pre y post-test de los 3 grupos para el problema “corredora”. En el caso de los grupos “A” y “C” los resultados fueron muy semejantes en ambos test pues aunque disminuyó ligeramente la cantidad de estudiantes que resolvieron el problema con el modelo lineal no precisamente fue para resolverlo de forma correcta ya que los cambios que hubo fue porque los estudiantes resolvieron el problema con operaciones diversas, el procedimiento fue confuso o en su defecto simplemente no resolvieron el problema.

En el caso del grupo “A” el estudiante que en el pre-test había respondido de forma no lineal aunque de forma equivocada coincide en el post-test (estudiante A9) pues hace mención que debido a la distancia, la resistencia no será la misma, pero sus resultados no son acordes a este argumento ya que en el pre-test su resultado fue 1 minuto 40 segundos (100 segundos) y en el post-test 1.5 minutos (90 segundos). De los 5 estudiantes que se encuentran dentro de la categoría “Otro” y realizaron operaciones diversas en el post-test, 3 de estos estudiantes (A12, A15 y A22) tuvieron algún error al aplicar el algoritmo de la “regla de tres” en el pre-test, los otros 2 estudiantes (A4 y A23) habían utilizado el modelo lineal de la forma correcta en el pre-test, lo anterior supone que los estudiantes tienen serias dificultades en la aplicación del modelo lineal. El estudiante A16 utilizó el modelo lineal en el post-test mientras que en el pre-test había tenido algún error al aplicar dicho modelo, situación contraria a él, fue el estudiante A2 pues en el post-test tuvo algún error al aplicar el modelo lineal mientras que en el post-test no tuvo ningún error.

En el grupo “C” el estudiante C11 tuvo algún error al aplicar el modelo lineal en el pre-test, pero en el post-test aplicó de manera correcta dicho algoritmo. El estudiante C6 no respondió este problema en el pre-test pero al realizar el post-test cambió a la categoría “Razonamiento lineal” y aplicó proporcionalidad. El resto de los alumnos aplicaron el modelo lineal tanto en el pre-test como en el pos-test, a excepción de los estudiantes C9, C10 y C12 quienes realizaron un procedimiento confuso, operaciones diversas y proporcionalidad respectivamente.

El grupo “B”, al cual se le aplicó la propuesta didáctica tuvo cierta mejoría. A continuación se presentan a los estudiantes del pre-test que no se encuentran en la subcategoría “aplica proporcionalidad”, B4 (aplica proporcionalidad con error en algoritmo), B6 (sin responder), B10 (operaciones diversas), B11 y B12 (procedimiento confuso), estos estudiantes pasaron de estas subcategorías en el pre-test a “aplica proporcionalidad” en el post-test. De los 12 estudiantes que estaban en la subcategoría “aplica proporcionalidad” en el pre-test, 1 estudiante realizó “operaciones diversas” y 7 más pasaron de dicha subcategoría a Razonamiento no lineal “inadecuado” pues los estudiantes ya toman en cuenta ciertos factores como el cansancio o agotamiento, sin embargo, siguen precisando que la respuesta debe de ser exacta. Por ejemplo, la respuesta del estudiante B1 es 180.75 y argumenta lo siguiente: “*multiplique el tiempo de 100x10 y eso haría el tiempo de 1000 m y le aumenté 20 segundo de cansancio*”, el estudiante no realiza ninguna operación aritmética e incluso según los cálculos le aumenta 0.75 segundos más de lo que menciona en su argumento. El estudiante B15 respondió 162.789 y argumenta lo siguiente: “*Se tiene que multiplicar por 10 y se le agregan más segundos por el agotamiento del personaje*”, cabe señalar que este estudiante tampoco realiza operaciones aritméticas. De forma semejante los otros 5 estudiantes dieron respuesta a este problema. Si bien hubo mejoras en este grupo, no fueron las óptimas pues a pesar de que cierta cantidad de estudiantes tomaron ciertas consideraciones del mundo real como el cansancio o agotamiento, siguen dando una respuesta exacta sin darse cuenta que sus cálculos son solo es una aproximación y derivado de ello existe una amplia gama de respuestas.

A continuación se muestran los resultados del problema “altura de los mexicanos”.

Grupo	Test	Problema	Razonamiento lineal		Razonamiento no lineal		Otro			Sin respuesta
			Aplica proporcionalidad	Aplica proporcionalidad con error en algoritmo	Inadecuado	Adecuado	Operaciones diversas	Procedimiento confuso	Aplica proporcionalidad inversa	
A	Pre		11	0	4	7	0	0	0	2
	Post		5	0	8	7	0	1	0	3
B	Pre		9	0	4	2	0	1	0	1
	Post		1	0	1	14	0	0	0	1
C	Pre		8	0	3	0	1	3	0	2
	Post		2	0	2	10	1	1	0	2

Tabla 22. Tabla comparativa del problema "altura de los mexicanos".

Con base en la información de la Tabla 22 se puede observar que en general hubo avance en los tres grupos, independientemente de si recibieron o no la propuesta didáctica. Al parecer en este problema fue más obvia la falta de autenticidad que en el problema anterior y aunado a los conocimientos que los estudiantes tienen de su entorno, ello conllevó a que cierta parte de alumnos pudieran dejar a un lado la ilusión de la linealidad y dar argumentos sobre la respuesta a este problema. Cabe señalar que en el grupo A hubo un aumento considerable en el razonamiento no lineal inadecuado, al parecer algunos de los estudiantes utilizaron sus conocimientos del mundo real, sin embargo, ello no fue suficiente pues estos estudiantes daban una respuesta numérica exacta o un intervalo en las estaturas, es decir, se hizo presente el contrato didáctico.

En los estudiantes del grupo “A” hubo una disminución notable de los alumnos que utilizaron un razonamiento lineal en el pre-test y un aumento de los que utilizaron un razonamiento no lineal en el post-test aunque inadecuado. En el pre-test los estudiantes A15 y A24 no respondieron, sin embargo, en el post-test el estudiante A15 utilizó un razonamiento no lineal adecuado, mientas que el estudiante A24 pasó a un razonamiento no lineal inadecuado, es decir, estos dos estudiantes que no respondieron en el pre-test posiblemente tomaron en cuenta sus conocimientos de su vida para poder dar otro tipo de respuesta en el post-test. En el caso del estudiante A2 ocurrió algo contrario a los dos casos anteriores pues este estudiante utilizó un razonamiento no lineal inadecuado (su respuesta fue 1.9 m) en el pre-test, mientras que en el post-test no respondió el problema.

Los estudiantes A4 y A9 se mantuvieron tanto en el pre como en el post-test en un razonamiento no lineal inadecuado al pretender dar una respuesta exacta pero se les agregaron en el post-test los estudiantes A6, A11, A13 y A20, los estudiantes A6 y A11 habían utilizado un razonamiento lineal en el pre-test y al parecer dicho modelo no les pareció suficiente en el post-test por lo que tuvieron que utilizar otras herramientas como su conocimiento del mundo real y así ubicarse en dicha categoría, en el caso de los estudiantes A13 y A20 hubo un “retroceso” pues en el pre-test estos estudiante habían respondido de forma correcta, es decir, utilizaron un razonamiento no lineal adecuado pero en el post-test pasaron a un razonamiento no lineal pero inadecuado al pretender dar una respuesta exacta al problema, algo semejante sucedió con el estudiante A21 pues en el pre-test respondió utilizando el modelo no lineal adecuado mientras que en el post-test utilizó el razonamiento lineal posiblemente por la fuerte tendencia de resolver este tipo de problemas con “regla de tres”.

Los estudiantes que se mantuvieron en el pre y post-test en la categoría no lineal adecuada fueron los estudiantes A3, A5, A12 y A19 y se añadieron A10 y A14 quienes en el pre-test habían utilizado un razonamiento lineal. Algunos otros estudiantes utilizaron el modelo lineal en el pre-test pero sucedió otra cosa en el post-test como fue el caso del estudiante A8 quien tuvo un razonamiento no lineal inadecuado, A23 realizó un procedimiento confuso, A17 y A18 simplemente no le dieron solución al problema. El estudiante A16 pasó de un razonamiento no lineal inadecuado en el pre-test a un razonamiento lineal en el post-test. El resto de los estudiantes (A1, A7 y A23) utilizaron el modelo lineal en ambos test.

En el grupo “C” los estudiantes C1 y C8 fueron los únicos que utilizaron el modelo lineal en ambos test. Otros 5 estudiantes también utilizaron razonamiento lineal en el pre-test pero su situación cambió en el post-test como el estudiante C2, C3, C5 y C17 quienes al parecer utilizaron sus conocimientos del mundo real y pasaron a un razonamiento no lineal adecuado, mientras que los estudiantes C13 y C15 pasaron a un razonamiento no lineal adecuado al tratar de dar como respuesta 1.9 metros. Los estudiantes C7 y C9 se mantuvieron en la categoría razonamiento no lineal adecuado pues en el pre-test dieron como respuesta 1.9 metros y en el post-test dieron otra respuesta utilizando argumentos como: “*la mayoría tiene esa altura*”, sin embargo, pretendieron dar una respuesta exacta, en el caso del estudiante C11 se encontraba en la misma categoría en el pre-test pero en el post-test ya no respondió el problema.

El estudiante C6 no respondió este problema en ninguno de los dos test aplicados, otro estudiante que no respondió en el post-test fue C17, sin embargo, este estudiante había utilizado un razonamiento no lineal adecuado en el pre-test. Otros 3 estudiantes tuvieron un razonamiento no lineal adecuado en el post-test pero en el pre-test estuvieron dentro de otra categoría, por ejemplo, los estudiantes C4 y C14 realizaron un procedimiento confuso, mientras que C12 solo había realizado operaciones diversas. Hubo un estudiante que se mantuvo en la subcategoría procedimiento confuso (C10).

El grupo “B” solo tenía 2 estudiantes en la categoría razonamiento no lineal correcto y después de aplicar la propuesta didáctica incremento hasta 14. El estudiante B15 fue el único que utilizó un razonamiento lineal en el post-test, mientras que en el pre-test no respondió a dicho problema, situación contraria al estudiante B15 quien en el pre-test utilizó un razonamiento lineal y en el post-test no respondió el problema. El estudiante B10 en el pre-test utilizó un procedimiento confuso y en el post-test utilizó razonamiento no lineal inadecuado pues propone una respuesta exacta (1.65 m) y solo argumenta lo siguiente: “*pues solo se utiliza lógica*”.

Los únicos estudiantes que se mantuvieron en la categoría razonamiento no lineal adecuado fueron los estudiantes B3 y B16, el resto de los estudiantes que estaban en el pre-test en alguna otra subcategoría tales como “aplica proporcionalidad” (B1, B2, B4, B7, B8, B11, B13 y B17) y “no lineal incorrecto” (B5, B9, B12 y B14) tuvieron un cambio en su razonamiento al pasar al razonamiento no lineal adecuado en el post-test. Los estudiantes al aplicar el post-test dieron algunos argumentos como los siguientes: “*El resultado depende de ciertos factores: genética, peso, etc.*” (B2), “*Porque no todos los mexicanos mediremos lo mismo a los 30 años,…*” (B4) o “*pero las matemáticas, solo nos dan resultados pero en la vida real no medimos esa cantidad de altura*” (B8).

Con base en lo anterior se puede observar que los estudiantes de los diferentes grupos tuvieron un avance con respecto a sus respuestas en al menos un problema, independientemente de haber recibido o no la aplicación de la propuesta didáctica pues en el pre-test se puede observar como la mayoría de los alumnos utilizaron el razonamiento lineal mientras que en el pos-test tal parece que los alumnos utilizaron sus conocimientos del mundo para dar solución a dichos problemas, en específico en el problema “altura de los mexicanos” donde al parecer fue más evidente la falta de autenticidad del problema. Si bien hubo un avance en los diferentes grupos, es visible que en el grupo al cual se le aplicó la propuesta didáctica hubo una mayor mejoría, es decir, la propuesta didáctica tuvo un impacto positivo en los estudiantes aunque cabe mencionar que no se pudo erradicar la ilusión de la linealidad totalmente.

5.2.2 Problemas constantes

Ahora se analizan los problemas “temperatura del agua” y “toallas”, pertenecientes a problemas de tipo constante. De igual manera que los problemas de tipo falta de autenticidad, en general en este tipo de problemas hubo avance con respecto del pre-test pues en los tres grupos hubo una mayor cantidad de estudiantes que pasaron del razonamiento lineal al razonamiento no lineal, los estudiantes de los diferentes grupos al parecer tomaron ciertas consideraciones del mundo y sus vivencias para dar solución a los problema. Como ya se ha mencionado antes, este es el único tipo de problemas donde los estudiantes utilizaron proporcionalidad inversa, esta forma de responder este tipo de problemas se hizo presente en 2 de los 3 grupos con los cuales se realizó la investigación, en específico al grupo “A” y “B”, en el caso del grupo “A” se utilizó esta forma de resolución en ambos problemas.

A continuación se muestran los resultados del problema “temperatura del agua”

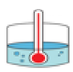
Grupo	Test	Problema	Razonamiento lineal		Razonamiento no lineal		Otro			Sin respuesta
			Aplica proporcionalidad	Aplica proporcionalidad con error en algoritmo	Inadecuado	Adecuado	Operaciones diversas	Procedimiento confuso	Aplica proporcionalidad inversa	
A	Pre		21	0	0	1	1	0	1	0
	Post		15	0	0	8	0	0	1	0
B	Pre		9	0	0	4	0	2	2	0
	Post		2	0	0	14	0	1	0	0
C	Pre		16	0	0	1	0	0	0	0
	Post		9	1	0	5	0	2	0	0

Tabla 23. Tabla comparativa del problema "temperatura del agua".

La Tabla 23 muestra los resultados del pre y post-test de los 3 grupos para el problema “temperatura del agua”. Podemos observar que en los tres grupos el razonamiento lineal disminuyó un poco, y que la mayoría de estos estudiantes pasaron al razonamiento no lineal. Sin embargo, se observa que la mayor cantidad de estos cambios se realiza en el grupo donde se aplicó la propuesta didáctica.

En el grupo “A”, el estudiante A23 utilizó proporcionalidad inversa tanto en el pre como en el post-test, es decir, su respuesta fue 10 °C. El estudiante A15 realizó operaciones diversas en el pre-test pero en el post-test utilizó un razonamiento lineal. El único estudiante que respondió de forma correcta en el pre-test y el post-test fue A9, sin embargo, 7 estudiantes (A6, A7, A18, A19, A20, A21 y A24) más no creyeron conveniente la aplicación de la proporcionalidad y aunado posiblemente con sus experiencias, pasaron hacia al razonamiento no lineal adecuado, es decir, estos 7 estudiantes dieron como respuesta 20 °C al problema.

Los estudiantes del grupo "C" cambiaron sus respuestas entre el pre y el post-test. En el pre-test, 16 de los 17 estudiantes utilizaron el razonamiento lineal, de los cuales C7 tuvo un error al aplicar el algoritmo de la "regla de tres", C9 y C14 utilizaron un procedimiento confuso (50 °C y 30 min respectivamente) y 5 estudiantes (C2, C3, C4 y C12) pasaron al razonamiento no lineal adecuado dando como respuesta 20 °C, el único estudiante que utilizó el razonamiento no lineal adecuado en el pre y post-test es el estudiante C17.

En el caso del grupo "B" hubo una mejoría notable pues los estudiantes B12 y B14 habían utilizado un procedimiento confuso en el pre-test, B3 y B16 aplicaron proporcionalidad inversa también en el pre-test pero todos ellos después de aplicar la propuesta didáctica pasaron al razonamiento no lineal adecuado para dar como respuesta 20 °C. Los estudiantes B4, B7, B9 y B15 aplicaron razonamiento no lineal adecuado en el pre-test y de igual manera lo hicieron en el post-test. Mientras que B10 y B13 aplicaron proporcionalidad en ambos test, B6 aplicó proporcionalidad en el pre-test pero en el post-test realizó un procedimiento confuso.

El resto de los estudiantes pudieron romper con la ilusión de la linealidad y utilizaron el razonamiento no lineal adecuado para dar una correcta solución a este problema y dar argumentos como los siguientes: "*porque la temperatura del ambiente no depende de la cantidad del agua*" (B2), "*la temperatura sigue aunque aumente la cantidad*" (B5), "*si el agua está en las mismas condiciones la temperatura no va a cambiar*" (B7) o "*porque están en las mismas condiciones y no cambia la temperatura*" (B15).

La siguiente tabla muestra los resultados del problema del otro problema constante ("toallas")

Grupo	Test	Problema	Razonamiento lineal		Razonamiento no lineal		Otro			Sin respuesta
			Aplica proporcionalidad	Aplica proporcionalidad con error en algoritmo	Inadecuado	Adecuado	Operaciones diversas	Procedimiento confuso	Aplica proporcionalidad inversa	
A	Pre		14	0	0	9	0	1	0	0
	Post		5	0	0	14	0	0	5	0
B	Pre		12	0	0	4	1	0	0	0
	Post		1	0	0	16	0	0	0	0
C	Pre		11	0	0	4	1	0	0	1
	Post		7	0	2	7	1	0	0	0

Tabla 24. Tabla comparativa del problema "toallas".

La Tabla 24 muestra los resultados del pre y post-test de los diferentes grupos para el problema "toallas". Podemos observar que en los tres grupos el razonamiento lineal disminuyó considerablemente, y que la mayoría de estos estudiantes pasaron al razonamiento no lineal. Sin embargo, a pesar de que hubo una mejoría notable, no se erradicó totalmente. El grupo en el cual hubo una mayor mejoría fue en el grupo donde se aplicó la propuesta didáctica pues casi todos los estudiantes pasaron al razonamiento no lineal a excepción de uno de ellos. También se puede observar que al igual que en el problema "temperatura del agua" se aplica el modelo lineal pero en esta ocasión solo en el grupo "A"

El grupo "A" los estudiantes A1, A8, A13 y A22 utilizaron proporcionalidad en el pre y post-test, mientras que el estudiante A15 había realizado un "procedimiento confuso" en el pre-test pero en el post-test utilizó proporcionalidad. Los estudiantes A3 y A5 habían respondido 12 horas en el pre-test, es decir, estaban dentro de la categoría "razonamiento no lineal adecuado" pero en el post-test dejaron a un lado este tipo de razonamiento para utilizar proporcionalidad inversa y dar como respuesta 6 horas, es decir, en el post-test pensaron que a mayor cantidad de toallas, el tiempo de secado es menor.

Algo semejante ocurrió con los estudiantes A10, A14 y A16 pues ellos en el pre-test respondieron 24 horas, es decir, utilizaron proporcionalidad pero, en el post-test utilizaron proporcionalidad inversa. Los estudiantes A9, A17, A18, A19, A20, A23 y A24 tuvieron un “razonamiento no lineal adecuado” tanto en el pre como en el post-test. Otros estudiantes más pasaron de utilizar proporcionalidad a tener un “razonamiento no lineal adecuado” (A2, A4, A6, A7, A11, A12 y A21).

En el caso del grupo “C” los estudiantes C10, C14 y C17 respondieron de manera correcta (12 horas) en ambos test, sin embargo, el estudiante C9 había respondido de forma correcta en el pre-test pero en el post-test pasó a la categoría “razonamiento no lineal inadecuado” pues su respuesta fue 16 horas y menciona que: *“porque es un lapso más largo y también depende si hace aire o sol”*, la parte no lineal viene dada porque el estudiante toma en cuenta ciertos factores en el ambiente, sin embargo, la respuesta no es acertada. Algo semejante ocurrió con el estudiante C2, él en el pre-test utilizó proporcionalidad pero en el post-test menciona que: “*... no afecta ni porque aumenten al triple las toallas*”, sin embargo, su respuesta es 3 horas.

Otros estudiantes más pasaron de utilizar proporcionalidad a un “razonamiento no lineal adecuado” (C3, C4, C12, C16) pues dieron como respuesta 12 horas y utilizaron argumentos como: “*la cantidad no afecta*” (C3) o “*porque son el mismo tiempo de secado*” (C4). El estudiante C11 realizo “operaciones diversas” en ambos test pues en ambos su respuesta fue 72 horas, éste resultado lo obtuvo de multiplicar 6x12=72. El resto de los estudiantes utilizó en ambos test el modelo lineal o proporcional, a excepción del estudiante C15 que en el pre-test no respondió pero en el post-test utilizó proporcionalidad.

En el grupo al que se le aplicó la propuesta didáctica (grupo B) hubo una mejoría notable pues en el pre-test doce estudiantes habían utilizado proporcionalidad y uno más había realizado operaciones diversas, sin embargo, para el post-test, 16 de los 17 estudiantes de este grupo pasaron al “razonamiento no lineal adecuado”, es decir, resolvieron de forma correcta el problema. El estudiante B14 fue el único que aplicó proporcionalidad en ambos test. Los estudiantes B7, B8, B9 y B16 fueron los estudiantes que se mantuvieron en la categoría “razonamiento no lineal adecuado” en ambos test.

Como ya se mencionó, varios estudiantes pasaron a la categoría “razonamiento no lineal adecuado”, para ser específico fueron doce estudiantes los que dieron este “salto” y no cayeron en la ilusión de la linealidad, estos estudiantes pudieron percatarse que independientemente de la cantidad de toallas, el tiempo va a ser el mismo, es decir, dieron como respuesta 12 horas y escribieron argumentos como: "*no importa cuántas toallas sean, se secaran en el mismo tiempo*" (B1), "*se encuentran en las mismas condiciones*" (B3) o "*si todas las toallas fueron puestas al mismo tiempo y bajo el sol les tomara exactamente el mismo tiempo en secarse*" (B17).

Con base en lo anterior se puede observar que los estudiantes de los diferentes grupos tuvieron un avance con respecto a sus respuestas en ambos problemas, independientemente de haber recibido o no la aplicación de la propuesta didáctica pues en el pre-test se puede observar como la mayoría de los alumnos utilizaron el razonamiento lineal mientras que en el pos-test tal parece que los alumnos utilizaron sus conocimientos del mundo para dar solución a dichos problemas. Si bien hubo un avance en los diferentes grupos, es visible que en el grupo al cual se le aplicó la propuesta didáctica hubo una mayor mejoría, es decir, la propuesta didáctica tuvo un impacto positivo en los estudiantes de este grupo pues casi en su totalidad se pudo erradicar la ilusión de la linealidad.

5.2.3 Problemas de área

En esta sección se analizan los problemas de área: "pintor" y "agricultor". En general, en este tipo de problemas se presentó mayor dificultad pues los estudiantes utilizaron el modelo lineal o proporcionalidad tanto en el pre como en el post-test además de que hubo una tendencia casi irresistible en los estudiantes, a creer que si una figura se agranda $k-veces$, el área es ampliada $k-veces$ también, como lo mencionan De Bock et al., (2002). El tipo de figura desempeñó un papel importante pues algunos estudiantes tuvieron mejor desempeño en el problema donde la figura implicada era regular, es decir, algunos estudiantes lograron responder correctamente el problema "agricultor" donde la figura implicada es un cuadrado, mientras que en el problema "pintor" ningún estudiante logró resolverlo correctamente.

A continuación se muestran los resultados del problema "pintor"

Grupo	Test	Problema	Razonamiento lineal		Razonamiento no lineal		Otro			Sin respuesta
			Aplica proporcionalidad	Aplica proporcionalidad con error en algoritmo	Inadecuado	Adecuado	Operaciones diversas	Procedimiento confuso	Aplica proporcionalidad inversa	
A	Pre		20	1	1	0	2	0	0	0
	Post		15	2	1	0	0	5	0	1
B	Pre		14	1	0	0	2	0	0	0
	Post		11	0	3	0	2	1	0	0
C	Pre		15	1	0	0	0	0	0	1
	Post		14	1	0	0	0	2	0	0

Tabla 25. Tabla comparativa del problema "pintor".

En la tabla anterior se puede observar que en este problema de área disminuyó el razonamiento lineal pero desafortunadamente dicha disminución solo fue para cambiar de categoría en el post-test, ningún estudiante fue capaz de resolver de manera correcta el problema y lo que se consiguió es que tres estudiantes del grupo al cual se le aplicó la propuesta didáctica tuviera ciertos "acercamientos" a la respuesta correcta.

En el grupo "A" el estudiante A9 tomó en cuenta ciertas cuestiones realistas pero sus respuestas no fueron correctas, "*tomé en cuenta el triple más 2 ml en caso que faltaran detalles*" y da como respuesta 20 ml (pre-test) y "*depende al dibujo y que tan difícil sea (detalles)*" y propone como resultado 1 litro (post-test). El estudiante A5 utilizó proporcionalidad pero con error al aplicar el algoritmo en el pre-test y en el post-test utilizó un procedimiento confuso. Los estudiantes A10 y A15 realizaron operaciones diversas en el pre-test para realizar un procedimiento confuso y aplicar proporcionalidad respectivamente en el post-test. Los estudiantes A3, A8, A14 habían aplicado proporcionalidad en el pre-test pero en el post-test realizaron un procedimiento confuso dando como respuestas 13 ml, 12 ml y 13 ml respectivamente. Los estudiantes A11 y A24 aplicaron proporcionalidad en el pre-test y en el post-test tuvieron un error al aplicar el algoritmo. El resto de los estudiantes aplicaron proporcionalidad tanto en el pre como en el post-test a excepción del estudiante A17 quien en el post-test no dio respuesta.

Para el caso del grupo “C”, el estudiante C15 en el pre-test aplicó proporcionalidad con error en el algoritmo y en el post-test aplicó proporcionalidad. El estudiante C13 tuvo una situación contraria pues en el pre-test aplicó proporcionalidad mientras que en el post-test aplicó proporcionalidad con error en el algoritmo. Los estudiantes C2 y C9 aplicaron proporcionalidad en el pre-test y en el post-test realizaron un procedimiento confuso pues dieron como respuesta a este problema 12 ml y 11 ml respectivamente. El resto de los estudiantes de este grupo aplicaron proporcionalidad en ambos test.

Los resultados del grupo donde se aplicó la propuesta didáctica (grupo “B”) no fueron muy diferentes a los de los otros grupos pues ninguno logró resolver de forma correcta este problema. El estudiante B9 aplicó proporcionalidad con error al aplicar el algoritmo en el pre-test mientras que en el post-test aplicó proporcionalidad. Los estudiantes B10 y B11 realizaron operaciones diversas en el pre-test mientras que en el post-test tuvieron un razonamiento no lineal inadecuado y aplicó proporcionalidad respectivamente, en el caso del estudiante B10 argumenta que: “*se multiplica al cuadrado*” y su respuesta fue 12 ml, se intuye que este estudiante utilizó este argumento debido a que dentro de la propuesta didáctica en la sesión 1 de área se mencionó que si la arista de un cuadrado crece $k-veces$, entonces su área crece $(k-veces)\cdot(k-veces)=(k-veces)^2$. Los estudiantes B13 y B15 aplicaron proporcionalidad en el pre-test pero en el pos-test fueron ubicados dentro de la categoría razonamiento no lineal inadecuado, en el caso del estudiante B13 utiliza algo semejante al caso anterior (B10) pues argumenta que: “*multiplica al cuadrado*” pero su respuesta es 16 ml, mientras que el estudiante B15 propone una respuesta semejante al estudiante del grupo “A” que se encuentra en la misma categoría pues utiliza cierto conocimiento de su vida y argumenta que: “*se puede utilizar más pintura no tiene que ser precisa además se utilizó regla de 3 con una aproximación*” y su respuesta fue 20 ml. Los estudiantes B6 y B12 aplicaron proporcionalidad en el pre-test y en el post-test fueron ubicados en la subcategoría operaciones diversas debido a que el estudiante B6 propone como resultado 28 ml al parecer este resultado lo obtuvo de dividir $168\,cm\,/\,6\,ml$ mientras que el estudiante propone como resultado 112 ml al parecer de restar $168\,ml - 56\,cm$, cabe señalar que las dimensiones que los estudiantes están utilizando en estas operaciones no son del mismo tipo. El resto de los estudiantes de este grupo aplicaron proporcionalidad en ambos test.

A continuación se muestran los resultados del problema “agricultor”

Grupo	Test	Problema	Razonamiento lineal		Razonamiento no lineal		Otro			Sin respuesta
			Aplica proporcionalidad	Aplica proporcionalidad con error en algoritmo	Inadecuado	Adecuado	Operaciones diversas	Procedimiento confuso	Aplica proporcionalidad inversa	
A	Pre		20	0	0	1	1	2	0	0
	Post		16	0	0	1	0	7	0	0
B	Pre		11	2	0	0	1	1	0	2
	Post		6	0	2	4	0	4	0	1
C	Pre		15	0	0	0	0	2	0	0
	Post		13	0	0	0	0	2	0	2

Tabla 26.Tabla comparativa del problema "agricultor".

A diferencia del problema anterior, aquí se puede observar que algunos de los estudiantes si fueron capaces de utilizar un razonamiento no lineal adecuado y dejar a un lado la ilusión de la linealidad, en dos de los tres grupos con los cuales se realizó la investigación se puede observar lo anterior, sobre todo en el grupo en el que se aplicó la propuesta didáctica. A diferencia de los otros tipos de problemas vistos hasta ahora, el cambio de razonamiento lo hicieron menos estudiantes.

El estudiante A24 fue el único de este grupo que logró resolver correctamente este problema en ambos test y dar como respuesta 72 horas. Los estudiantes A3 y A7 habían realizado un procedimiento confuso en el pre-test pero en el post-test el estudiante A7 cambio de categoría y aplicar proporcionalidad, mientras que el estudiante A3 se quedó en la misma debido a que propone como respuesta 8 horas en el post-test y argumentar que su respuesta la obtuvo por “lógica”. Otros estudiantes (A5, A9, A10, A12, A14 y A15) se incorporaron a esta subcategoría (procedimiento confuso) quienes en el pre-test habían aplicado proporcionalidad a excepción del estudiante A15 quien había realizado operaciones diversas, las respuestas de este grupo de estudiantes fueron 8 horas o 16 horas. El resto de los estudiantes de este grupo aplicaron proporcionalidad en ambos test.

Los estudiantes C9 y C14 utilizaron un procedimiento confuso en el pre-test pero en el post-test aplicaron proporcionalidad. Los estudiantes C2 y C10 realizaron lo contrario a la situación anterior pues en el pre-test utilizaron proporcionalidad o regla de tres y en el post-test realizaron un procedimiento confuso, por ejemplo, el estudiante C2 propone como respuestas 26 horas y no argumenta. Los estudiantes C13 y C15 utilizaron el modelo lineal en el pre-test al aplicar proporcionalidad pero en el post-test no respondieron este problema. Los estudiantes restantes de este grupo aplicaron proporcionalidad tanto en el pre como en el post-test.

Los estudiantes B6 y B13 no resolvieron este problema en el pre-test, situación que no cambió para el estudiante B6 en el post-test, mientras que el estudiante B13 realizó un procedimiento confuso pues propone como resultado 64 horas pero argumenta que usó las horas al cubo, al parecer este estudiante presenta algunas dificultades con respecto al desarrollo de potencias pues en lugar de desarrollar el número de horas que se tarda en arar el terreno al cubo lo hace al cuadrado, es decir, $(8\, horas) \cdot (8\, horas) = 64\, horas^2$, posiblemente así obtuvo el número "sesenta y cuatro", sin embargo, no toma en cuenta la dimensión pues si realiza la operación anterior, el resultado de la dimensión sería un término cuadrático; otra posible interpretación es que este estudiante recordó la propuesta didáctica de la sesión 1 de área pues se mencionó que si la arista de un cuadrado crece $k - veces$, entonces su área crece $(k - veces) \cdot (k - veces) = (k - veces)^2$, sin embargo, el estudiante no toma en cuenta la cantidad de veces que crece el terreno sino la cantidad de horas. Otros estudiantes que se encuentran en la misma categoría que el estudiante B13, son los estudiantes B9, B5 y B17 quienes en el pre-test habían aplicado proporcionalidad, utiliza proporcionalidad con error al aplicar el algoritmo y realiza un procedimiento confuso, respectivamente. Es decir, el estudiante B17 se mantuvo en la misma subcategoría. El estudiante B9 propone como respuesta 96 horas y argumenta que utilizó un diagrama para dar solución a dicho problema, sin embargo, no existen operaciones para determinar cómo obtuvo el resultado que propone. El estudiante B5 propone como respuesta 8 horas y argumenta que utiliza lógica para resolver dicho problema. El estudiante B10 había realizado operaciones diversas en el pre-test y en el post-test utilizó proporcionalidad. Hubo un estudiante (B11) que en el pre-test aplicó proporcionalidad pero tuvo un error al realizar el algoritmo pero logro hacer a un lado dicho razonamiento y así dar una solución apropiada a este problema, es decir, propuso como respuesta 72 horas. Otros tres estudiantes (B1, B14 y B16) realizaron algo semejante pues en el pre-test aplicaron proporcionalidad pero en el post-test lograron “salir” de la ilusión de la linealidad y de igual manera que B11 obtener la solución correcta, cabe mencionar que todos estudiantes que llegaron a la solución correcta realizaron esquemas, el estudiante B1 argumentó lo siguiente: “*multiplique el tiempo por 9*”, es decir, observó que el área del terreno ampliado creció 9 veces con respecto del terreno original por lo que necesitará 9 veces más de tiempo (72 horas), el estudiante B14 argumentó que: “*pues dice que cada lado tarda 8 horas pues esta vez tardará 72 horas por el triple de longitud*” y el estudiante B16 hace alusión a que su respuesta está mejor explicada en el esquema que realizó. Los estudiantes B3 y B15 pasaron de aplicar proporcionalidad en el pre-test a tener un razonamiento no lineal inadecuado en el post-test, por ejemplo, el estudiante B3 argumenta lo siguiente: “*porque al aumentar la longitud aumentará al triple el tiempo dado*” pero su respuesta es 74 horas la cual es una respuesta muy próxima a la correcta pero desafortunadamente este estudiante no realizó ninguna operación aritmética para poder realizar un análisis más a fondo. El estudiante B15 fue colocado dentro de esta categoría debido a que tomó en cuenta ciertas condiciones realistas pues menciona que: “*por los ratos que tome descanso además se hace una regla de tres para una aproximación*” el estudiante infiere que el agricultor necesitará más tiempo para arar el terreno ampliado además de que tendrá que tomar descanso debido al agotamiento del trabajo realizado, sin embargo, su respuesta es 18 horas lo cual no corresponde al cálculo que menciona que realizó de la “regla de tres” pues además no realiza ninguna operación aritmética. Por último, 5 de los 17 estudiantes (B2, B4, B7, B8 y B12) de este grupo permanecieron dentro de la ilusión de la linealidad pues aplicaron proporcionalidad en ambos test.

En general, pudimos observar que en los problemas pertenecientes a área los estudiantes presentan mayor dificultad para resolverlos que los problemas de tipo falta de autenticidad y constante. Aunque se aplicó la propuesta didáctica, muy pocos de los estudiantes pudieron erradicar la ilusión de la linealidad a pesar de que se haya dado un mayor énfasis en este tipo de problemas y por ende se hayan utilizado un número mayor de sesiones que las que se utilizaron para los problemas de tipo falta de autenticidad y constante. Cabe mencionar que los pocos estudiantes que lograron erradicar la ilusión de la linealidad solo lo consiguieron en el problema “agricultor”. Al parecer el tipo de figura desempeño un papel importante en la resolución de este tipo de problemas pues algunos estudiantes realizaron esquemas, para el caso del problema “pintor” algunos estudiantes que realizaron dichos esquemas no percibieron que la figura crecía tanto en largo como en ancho, sin en cambio, en el problema “agricultor” estos esquemas fueron de gran utilidad pues los estudiantes que lograron resolver correctamente utilizaron este recurso y se pudieron percatar que el terreno ampliado era 9 veces mayor que el original, lo anterior debido a que la figura a la que se hace referencia en el problema es una figura regular. De Bock et al., (2007) menciona que en este tipo de problemas existe una mayor resistencia por parte de los estudiantes para dejar de utilizar el modelo lineal o proporcionalidad, lo anterior se ratificó en la presente investigación.

5.2.4 Problema de volumen

En esta sección se analiza el único problema de volumen propuesto dentro del instrumento. Los estudiantes, al igual que en los problemas de área, presentaron bastante dificultad para resolver dichos problemas pues la gran mayoría utilizó el modelo lineal o proporcionalidad tanto en el pre como en el post-test además de que se repitió la tendencia de los problemas de área debido a que creen que si una figura agranda $k - veces$ su arista entonces su volumen también se amplía $k - veces$, como lo mencionan De Bock et al., (2002).

A continuación se muestran los resultados del problema “dados”

			Razonamiento lineal		Razonamiento no lineal		Otro			
Grupo	Test	Problema	Aplica proporcionalidad	Aplica proporcionalidad con error en algoritmo	Inadecuado	Adecuado	Operaciones diversas	Procedimiento confuso	Aplica proporcionalidad inversa	Sin respuesta
A	Pre		20	1	0	1	0	1	0	0
	Post		16	3	1	0	1	3	0	0
B	Pre		13	4	0	0	0	0	0	0
	Post		9	2	0	3	0	3	0	0
C	Pre		15	0	0	0	1	1	0	0
	Post		13	2	0	0	0	1	0	1

Tabla 27.Tabla comparativa del problema "dados".

Al igual que los problemas de área, en la Tabla 27 se puede observar que solo algunos de los estudiantes fueron capaces de utilizar un razonamiento no lineal adecuado y dejar a un lado la ilusión de la linealidad, solo en el grupo donde se aplicó la propuesta didáctica pudieron resolver correctamente este problema en el post-test. El cambio de razonamiento lo hizo una cantidad inferior a los estudiantes que resolvieron correctamente el problema de área “agricultor”, incluso, de los tres estudiantes que lograron realizar dicho cambio de razonamiento, dos de ellos lo hicieron también en el problemas de área ya mencionado.

El estudiante A24 pasó de un razonamiento no lineal adecuado en el pre-test al dar la solución correcta (21600 mg) a un razonamiento no lineal inadecuado pues en el post-test obtiene como resultado 27000 mg y argumenta lo siguiente: “*porque el peso es de 800 mg y hay que multiplicarlo por tres y el resultado se multiplica por 3 y lo mismo hasta 27000*”. El estudiante A22 realizó un procedimiento confuso en ambos test y se agregaron a esta categoría A14 y A21 pues dieron como respuesta 1800 mg pero no argumentan ni realizan operaciones aritméticas para observar cómo obtuvieron dicho resultado, ellos habían utilizado un razonamiento lineal pues habían aplicado proporcionalidad en el pre-test. A3 y A15 habían aplicado proporcionalidad en el pre-test pero con error al aplicar el algoritmo, en el caso de A3 paso a la subcategoría aplica proporcionalidad mientras que A15 permaneció en la misma del pre-test. A7 y A11 habían aplicado proporcionalidad en el pre-test, situación que se conservó en el post-test pero con la característica de que en éste tuvieron algún error al aplicar el algoritmo. Otro estudiante que cambió de categoría fue A17 pues en el pre-test había aplicado proporcionalidad pero en el post-test obtiene como resultado 30 mm de la suma de 10 mm + 10 mm + 10mm = 30 mm, por ello se categorizó en "operaciones diversas". Los otros 15 estudiantes utilizaron el modelo lineal para ambos test.

El estudiante C15 y C17, utilizó operaciones diversas y aplico proporcionalidad con error al aplicar algoritmo, respectivamente en el pre-test mientras que en el post-test ambos aplicaron proporcionalidad, es decir, respondieron 2400 mg. Los estudiantes C1 y C12 utilizaron el modelo lineal por lo que aplicaron proporcionalidad en el pre-test pero en el post-test tuvieron algún error al aplicar el algoritmo. Algo semejante ocurrió con el estudiante C9 pero con la diferencia de que en el post-test realizó un procedimiento confuso y propuso como respuesta 100 mg y argumenta que: "*porque es el doble de tamaño*", sin embargo, no realiza operaciones aritméticas para encontrar elación entre el argumento y la respuesta. El estudiante C11 no respondió a este problema en el post-test y utilizó proporcionalidad en el pre-test. Los once estudiantes restantes utilizaron proporcionalidad en ambos test.

En el grupo "B" hubo varios cambios de categorías. Por ejemplo, los estudiantes B10, B13 y B15 habían utilizado proporcionalidad en el pre-test pero en el post-test su procedimiento fue confuso pues B10 dio como resultado 1 kg y argumenta que obtuvo ese resultado con: "*solo utilizar la lógica*", en el caso de B13 responde 1 mg y dice que obtuvo dicho resultado con ayuda de: "*la lógica*" y el estudiante B15 propone como resultado 2850 mg y menciona que: "*solo es una aproximación del peso además se tiene que tomar en cuenta que se obtiene la aproximación del peso real*", este estudiante constantemente menciona que sus resultados son "aproximaciones" (como se puede observar en la descripción de análisis de problemas anteriores), cabe mencionar que ninguno de estos tres estudiantes realizó operaciones en el post-test por ello fueron incluidos en la subcategoría "procedimiento confuso" ya que no existe alguna operación que indique qué es lo que realizaron.

Los estudiantes B2 y B6 utilizaron proporcionalidad en el pre-test, situación que se repitió en el post-test pero en este caso tuvieron algún error al aplicar el algoritmo. Del resto de estudiantes, 3 de ellos (B1, B3 y B16) utilizaron razonamiento no lineal adecuado pues obtuvieron la respuesta correcta para este problema (21,600 mg), B1 había tenido algún error al aplicar el algoritmo de la "regla de tres" en el pre-test mientras que los otros 2 habían aplicado proporcionalidad. Los 3 estudiantes realizaron esquemas que permitieron la correcta solución y utilizaron argumentos como: "*saque lo de un lado y lo multiplique por 3*" (B1), "*multipliqué el peso por 27, el 27 lo tome de la caja de 30 mm, tiene cuadritos, si lo ponemos en mosaico y así nos da el resultado*" (B3) y "*la explicación está mejor expresada en el dibujo*" (B16).

El estudiante B3 se dio cuenta que si la figura crece al triple de lado, entonces al ser una figura tridimensional (cubo) su volumen aumentará 27 veces con respecto de la figura original, algo semejante realiza el estudiante B16 pues realiza una especie de "pavimentación" entre el cubo original y el ampliado, ello propicia a que observe que el cubo pequeño cabe 27 veces en el cubo ampliado por lo cual su peso aumentará 27 veces y lo multiplica por 800 mg para obtener la solución. El estudiante B1 realizó algo semejante que el estudiante B16 pues al parecer primero obtuvo el peso de una "capa" del cubo ampliado es decir de 9 cubos pequeños y ese resultado lo multiplicó por tres para así tener el peso de los 27 cubos pequeños que conforman al cubo ampliado. Cabe mencionar que los estudiantes B1 y B16 también obtuvieron el resultado correcto en el problema de área "agricultor" y B3 estuvo dentro de la categoría razonamiento no lineal inadecuado en el mismo problema.

Los estudiantes B11, B12 y B14 habían tenido algún error al aplicar el algoritmo de la "regla de tres" en el pre-test, dicho error no se repitió en el post-test pues aplicar proporcionalidad. Los otros 6 estudiantes no lograron "romper" con el razonamiento lineal por lo que en ambos test aplicaron proporcionalidad.

Se puede observar que en el problema perteneciente a volumen los estudiantes presentan bastante dificultad. A pesar de que se aplicó la propuesta didáctica, muy pocos de los estudiantes pudieron erradicar la ilusión de la linealidad a pesar de que se haya dado también un fuerte énfasis en este tipo de problemas al igual que los de área, pues en ambos casos se utilizaron una mayor cantidad de sesiones que las que se utilizaron para los problemas de tipo falta de autenticidad y constante. Al parecer los esquemas realizados por los estudiantes desempeñó un papel importante en la resolución de este tipo de problemas pues los estudiantes que lograron resolverlo correctamente utilizaron este recurso y se pudieron percatar que el cubo ampliado era 27 veces más grande que el original, el hecho de que fuera una figura regular al parecer también influyó para la correcta solución como lo fue en el problema de área “agricultor”. De Bock et al., (2007) menciona que al igual que los problemas de área, en los problemas de volumen existe una muy fuerte resistencia por parte de los estudiantes para dejar de utilizar el modelo lineal o proporcionalidad, esto quedó probado en el análisis de la presente investigación.

5.2.5 Problema proporcional

En la presente sección se analiza el problema “castillo”, no se había hablado con profundidad de este problema debido a que se resuelve por medio del modelo lineal. De Bock et al., (2007) sugieren que si los estudiantes reciben algún tratamiento para disminuir o erradicar la linealidad posteriormente, dichos estudiantes abusan de la no linealidad. Con base en lo que sugieren los investigadores, se analiza lo que sucedió en la presente investigación.

A continuación se muestran los resultados del problema “castillo”

Grupo	Test	Problema	Razonamiento lineal		Razonamiento no lineal	Otro			Sin respuesta
			Aplica proporcionalidad	Aplica proporcionalidad con error en algoritmo		Operaciones diversas	Procedimiento confuso	Aplica proporcionalidad inversa	
A	Pre		18	0	0	0	5	0	1
	Post		21	0	0	0	3	0	0
B	Pre		13	0	0	2	2	0	0
	Post		12	0	2	0	3	0	0
C	Pre		16	0	0	0	1	0	0
	Post		14	2	0	0	1	0	0

Tabla 28. Tabla comparativa del problema "castillo".

De forma general se observa que los estudiantes de los 3 grupos con los cuales se realizó la investigación tuvieron cantidades parecidas en ambos test para las diferentes categorías. Sin embargo, ocurrió algo curioso pues a pesar de que son muy pocos los estudiantes que utilizaron razonamiento no lineal, estos estudiantes están dentro del grupo donde se aplicó la propuesta didáctica, es decir, de alguna manera (aunque no masiva) la aplicación de la propuesta didáctica si tuvo algún efecto en estos estudiantes para que en el post-test utilizaran razonamiento no lineal.

En el grupo “A” ocurrió una situación peculiar pues aumentó la cantidad de estudiantes que aplicaron proporcionalidad para resolver éste problema. Los estudiantes A5, A10, A18, A20 y A24 habían utilizado un procedimiento confuso en el pre-test, A18 fue el único que permaneció en la misma subcategoría al proponer como resultado 25 minutos y menciona: “*solo sumé el tiempo*”, sin embargo, no realiza ninguna suma, el resto de estudiantes que pertenecían a esta categoría en el pre-test, utilizaron proporcionalidad en el post-test. Los estudiantes A1 y A21 habían utilizado razonamiento lineal y aplicaron proporcionalidad en el pre-test pero en el post-test realizaron un procedimiento confuso, el estudiante A1 propone como resultado 25 minutos pero no escribe ningún argumento para relacionarlo con su respuesta, en el caso del estudiante A21 propone como resultado 20 minutos, realiza la división 150/50 = 3 pero posteriormente anota 3 = 20 min y no describe porqué realiza dicha igualdad. El estudiante A15 también había aplicado proporcionalidad en el pre-test pero en el post-test no respondió este problema. Los otros 18 estudiantes permanecieron dentro de la categoría razonamiento lineal y aplica proporcionalidad en ambos test.

En el grupo “C”, 13 estudiantes permanecieron dentro de la categoría razonamiento lineal al aplicar proporcionalidad en ambos test. Los estudiantes C2 y C5 habían aplicado proporcionalidad en el pre-test, situación que ocurrió nuevamente en el post-test pero con error al aplicar el algoritmo, en ambos caso primero multiplicaron (150) (50) = 7500 y este resultado lo dividieron entre 10, es decir, 7500/10 = 750 lo cual escribieron como resultado ambos estudiantes. El estudiante A14 había utilizado un procedimiento confuso en el pre-test pero en el post-test aplicó proporcionalidad. En el caso específico del estudiante C9 ocurrió lo inverso pues en el pre-test aplicó proporcionalidad y en el post-test utilizó un procedimiento confuso debido a que propuso como resultado 7 horas y menciona que: “*se podría decir que para una zanja que de la vuelta a una casa para empezar necesita una hora para dar una vuelta entonces serían 7 para cavar bien una zanja*” y no realiza ninguna operación aritmética.

En el grupo “B” hubo algunos movimientos en la categorización. Del total de estudiantes (17), 10 de ellos se mantuvieron en la categoría razonamiento lineal al aplicar proporcionalidad en ambos tests. Los estudiantes B12 y B17 habían realizado un procedimiento confuso en el pre-test mientras que en el post-test B12 aplicó proporcionalidad y B17 permaneció en la misma subcategoría al dar como respuesta 30 m x lado (suponemos que la “m” se refiere a minutos, por lo cual su respuesta sería 30 minutos por lado) y argumentar que: *“…dependiendo el tamaño del castillo más tiempo le tomará cavar la zanja a su alrededor*”, desafortunadamente no describe el motivo por el cual se debe tardar 30 minutos por cada lado.

Los estudiantes B6 y B11 habían realizado operaciones diversas en el pre-test, B6 realizó un procedimiento confuso al dar como resultado 10 minutos y escribir: “*porque si dice que Ricardo necesita 100 minutos entonces si serían 10 minutos*”, el problema no hace referencia a “100 minutos” como lo hace en su argumento, mientras que B11 aplicó proporcionalidad en el post-test. El estudiante B14 aplicó proporcionalidad en el pre-test pero en el post-test utilizó un procedimiento confuso debido a que su resultado fue 40 minutos y menciona que: “*pues es un cuadrado y cada lado se va hacer 10 minutos*”, incluso realiza un cuadrado el cual divide en 9 partes pero no realiza algún otro argumento u operación aritmética que permita relacionar la respuesta con el argumento. Los estudiantes B1 y B15 fueron los únicos que “abusaron” de la no linealidad pues el primero (B1) realizó un esquema representando un cuadrado con 150 cm de lado el cual dividió en 9 cuadrados iguales (más pequeños) y dentro de cada cuadrado pequeño fue colocó un múltiplo de 10 hasta llegar al 90 (debido a que eran 9 cuadrados) y así obtener la respuesta: “*90 minutos*” y él argumenta que: “*hice el dibujo y de ahí me guie para dar el tiempo*”, el estudiante no se percató que el problema hacía alusión al perímetro (el cual si crece de manera proporcional) y lo que él tomó en cuenta fue la superficie del mismo.

El estudiante B15 se encuentra en esta categoría debido a que toma en cuenta situaciones de la vida real pues como en análisis anteriores, toma en cuenta un “aproximado” pero ahora lo toma en cuenta haciendo referencia al cansancio pues argumenta que: “*se tiene que utilizar regla de 3 pero con más tiempo por el cansancio o si se toma un tiempo*” por lo cual su respuesta es 30 minutos o 1 hora.

Se observa que en este problema perteneciente a modelo lineal, la cantidad de alumnos permanece prácticamente “estable” pues la cantidad de estudiantes que utilizaron el modelo lineal o proporcional en el pre-test casi fueron los mismos que en el post-test. Ocurrió parte de lo que dicen De Bock et al., (2007) pues un par de estudiantes del grupo donde se aplicó la propuesta didáctica comenzaron a “abusar” de la no linealidad debido a que en este problema no lograron percibir que aquí si era necesario utilizar el modelo lineal, es decir, la aplicación de la propuesta didáctica si tuvo algún efecto en estos dos estudiantes para que en el post-test utilizaran razonamiento no lineal.

5.3 Seguimiento puntual

En la presente sección se muestra parte de la transición de algunos alumnos a los cuales se les aplicó la propuesta didáctica desde el pre-test hasta el post-test tomando en cuenta dicha propuesta de cada uno de los diferentes problemas. Debido a que fueron varias sesiones y cada una tenía un objetivo se toman partes específicas de los materiales impresos de las sesiones.

5.3.1 Problemas con falta de autenticidad

Primero se analizan los problemas “corredora” y “altura de los mexicanos”, pertenecientes a problemas con falta de autenticidad. Se analizan para el problema “corredora” a los estudiantes B1 y B4 mientras que para el problema altura de los “mexicanos” se analiza a B8 y B10, cabe mencionar que para dicho análisis se toman en cuenta las sesiones de los problemas con falta de autenticidad (ver Anexo 2).

Primero se analizará la transición en el problema “corredora”. En el caso del estudiante B1 utiliza lo siguiente para resolver dicho problema en el pre-test.

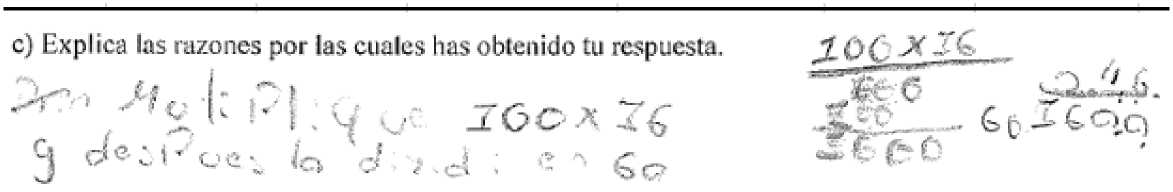


Figura 1. Explicación del estudiante B1 del problema “corredora” en el pre-test.

Se observa que el estudiante tiene un razonamiento lineal debido a que pretende utilizar “regla de tres” para resolver dicho problema pues indica que multiplica 100x16 y el resultado lo divide entre 60, este último dato no se menciona en el problema. El resultado que propone es el siguiente:

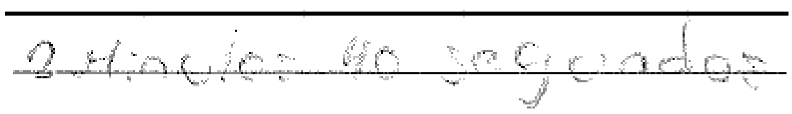
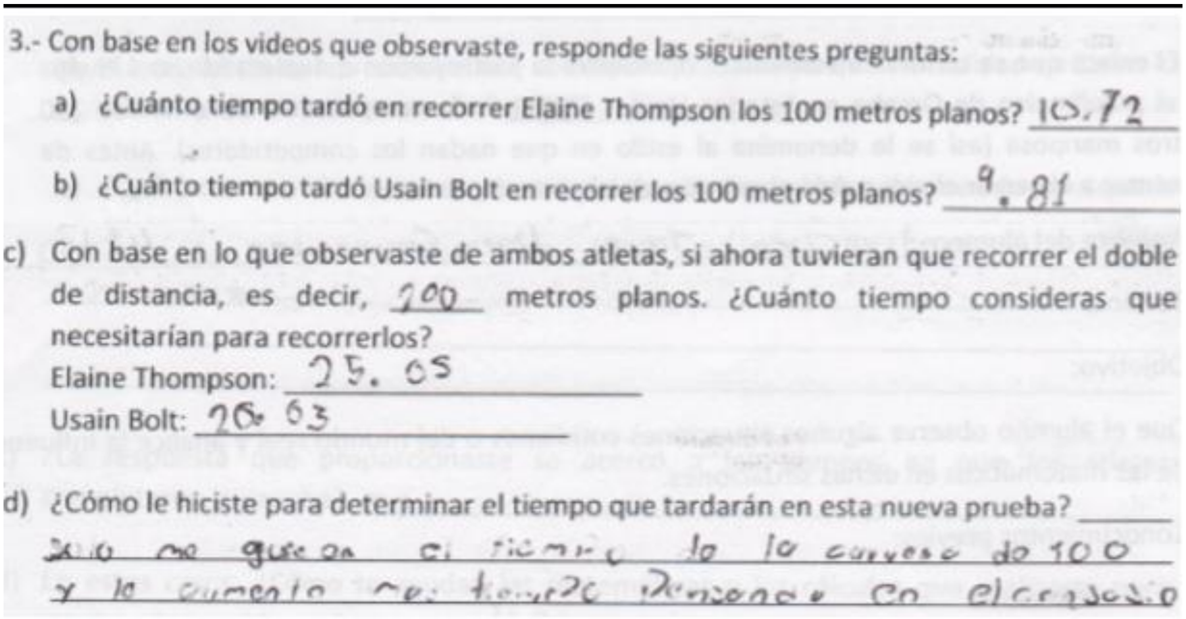


Figura 2. Respuesta del estudiante B1 del problema “corredora” en el pre-test.

2 minutos 40 segundos, lo que equivale a 160 segundos y que a su vez es la respuesta de utilizar proporcionalidad, al parecer el estudiante tiene ciertas complicaciones para realizar el algoritmo, sin embargo, existe la posibilidad de que el estudiante haya resuelto el problema mentalmente pues el resultado que obtiene de las operaciones aritméticas no lo toma en cuenta ya que propone como respuesta algo diferente.

Dentro de la propuesta didáctica de la sesión 2 de falta de autenticidad se proyectaron 2 videos de carreras de 100 metros planos de los juegos olímpicos de Río de Janeiro 2016 donde participaron Elaine Thompson y Usain Bolt.


3.- Con base en los videos que observaste, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto tiempo tardó en recorrer Elaine Thompson los 100 metros planos? 10.72

b) ¿Cuánto tiempo tardó Usain Bolt en recorrer los 100 metros planos? 9.81

c) Con base en lo que observaste de ambos atletas, si ahora tuvieran que recorrer el doble de distancia, es decir, 200 metros planos. ¿Cuánto tiempo consideras que necesitarían para recorrerlos?

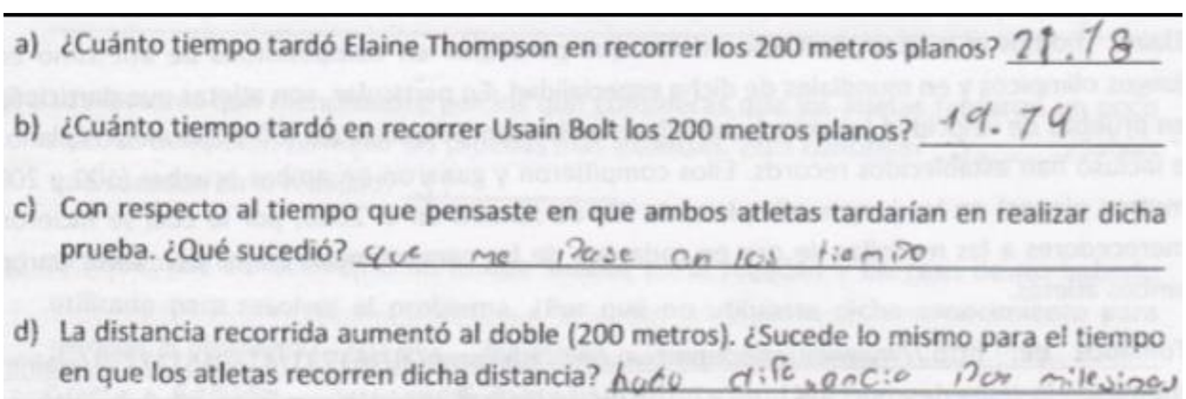
Elaine Thompson: 25.05

Usain Bolt: 20.03

d) ¿Cómo le hiciste para determinar el tiempo que tardarán en esta nueva prueba? Solo me guie en el tiempo de la carrera de 100 y le aumento mi tiempo pensando en el cansancio

Figura 3. Respuesta del estudiante B1 durante la propuesta didáctica de falta de autenticidad sesión dos, después de observar el video de los atletas al recorrer los 100 metros planos.

Podemos observar que el estudiante menciona que para proponer el tiempo en que los dos atletas realizarán la prueba de 200 metros planos (doble de distancia con respecto de la primera) se guió en el tiempo de la carrera de 100 metros y le aumentó un tiempo pensando en el cansancio y así proponer como respuesta 25.05 y 20.03 segundos para Elaine y Usain respectivamente. Lo anterior es de suma importancia pues al momento de aplicar la secuencia didáctica el estudiante ya está tomando en cuenta ciertas condiciones realistas como el cansancio, situación que no ocurrió cuando el estudiante respondió el pre-test. Posteriormente se proyectan los videos donde los atletas participan en la prueba de 200 metros y se les pide que respondan algunos cuestionamientos.


a) ¿Cuánto tiempo tardó Elaine Thompson en recorrer los 200 metros planos? 21.78

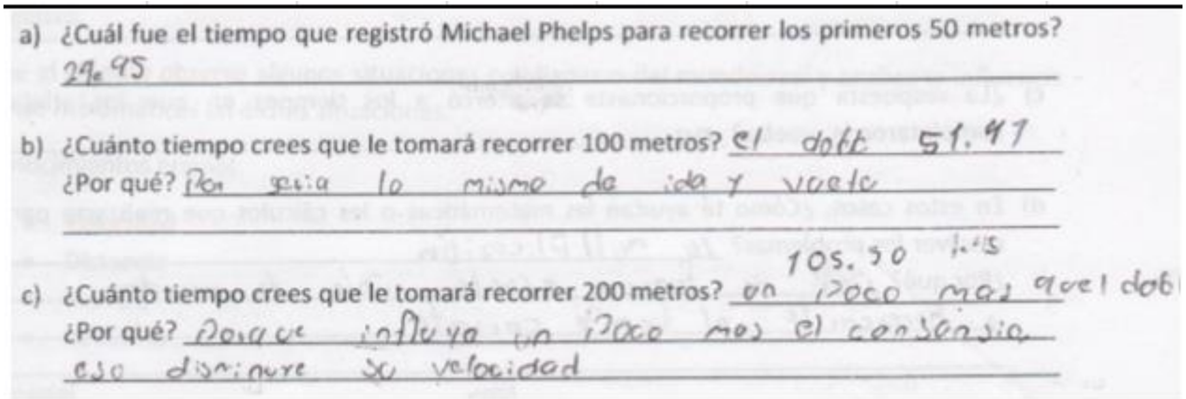
b) ¿Cuánto tiempo tardó en recorrer Usain Bolt los 200 metros planos? 19.74

c) Con respecto al tiempo que pensaste en que ambos atletas tardarían en realizar dicha prueba. ¿Qué sucedió? que me pase en los tiempo

d) La distancia recorrida aumentó al doble (200 metros). ¿Sucede lo mismo para el tiempo en que los atletas recorren dicha distancia? hace diferencia por milesimas

Figura 4. Respuesta del estudiante B1 durante la propuesta didáctica de falta de autenticidad sesión dos, después de observar el video de los atletas al recorrer los 200 metros planos.

El estudiante observa que si bien tomó en cuenta ciertos aspectos realistas, no fueron del todo indicados pues el tiempo que él propone no fue acertado. Posteriormente se muestra un video del nadador Michael Phelps en el preolímpico de Omaha en Estados Unidos (2016) en la competencia denominada 200 metros mariposa y se les pide que respondan algunos cuestionamientos.



a) ¿Cuál fue el tiempo que registró Michael Phelps para recorrer los primeros 50 metros?
24.95

b) ¿Cuánto tiempo crees que le tomará recorrer 100 metros? el dobl 51.91
¿Por qué? Por sería lo mismo de ida y vuelta

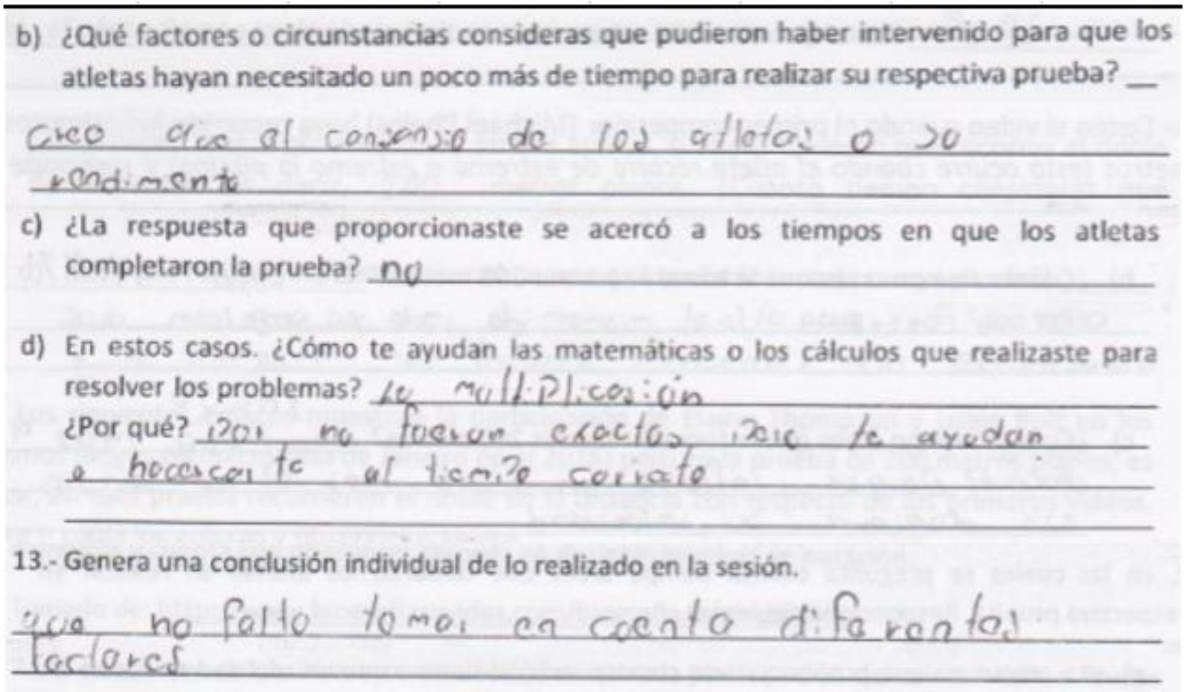
105.50

c) ¿Cuánto tiempo crees que le tomará recorrer 200 metros? un poco mas que el dobl
¿Por qué? Porque influya un poco mas el consensio eso disminuye su velocidad

Figura 5. Conjetura del estudiante B1 durante la propuesta didáctica de falta de autenticidad sesión dos, después de observar el video del nadador en los primeros 50 metros.

Sucede algo curioso pues el estudiante menciona que en los 50 y 100 metros de la prueba, el tiempo sería el mismo de ida y vuelta (la piscina tiene 50 metros de longitud) por lo cual sería un razonamiento proporcional. El estudiante hace referencia a que si el nadador para recorrer 50 metros necesitó 24.95, entonces para 100 metros (el doble de 50 metros) necesitará 51.91 segundos lo cual no corresponde a lo que describe sobre que sería el mismo tiempo de ida y vuelta pues si él utiliza este razonamiento el resultado sería 49.90 segundos, al parecer el estudiante sigue tomando el factor cansancio en cuenta pues es su respuesta hay algunos segundos más de lo que correspondería con respecto a su argumento. Para la respuesta de 200 metros su argumento cambia pues menciona que: "*influye un poco más el cansancio, eso disminuye su velocidad*" por ello su respuesta fue 105.50 segundos ("*un poco más del doble*").

Posteriormente se les solicita que respondan a otros cuestionamientos.



b) ¿Qué factores o circunstancias consideras que pudieron haber intervenido para que los atletas hayan necesitado un poco más de tiempo para realizar su respectiva prueba?

Creo que el consanso de los atletas o su rendimento

c) ¿La respuesta que proporcionaste se acercó a los tiempos en que los atletas completaron la prueba? no

d) En estos casos. ¿Cómo te ayudan las matemáticas o los cálculos que realizaste para resolver los problemas? la multiplicasión

¿Por qué? pos no fueron exactos pero te ayudan a hacercarte al tiempo correcto

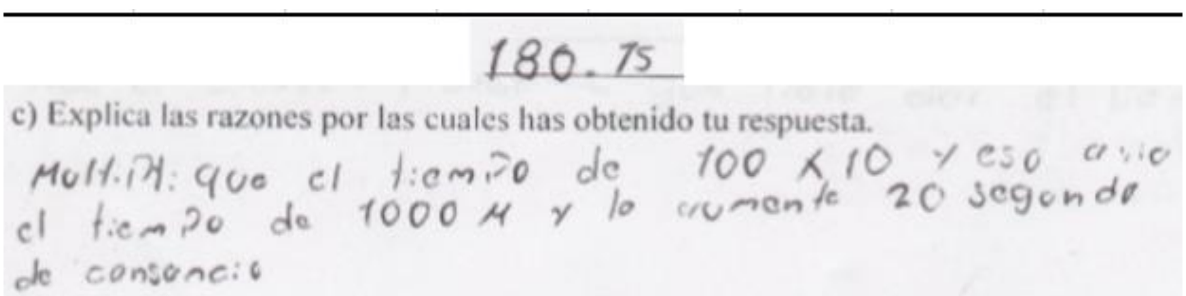
13.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

que nos falta tomar en cuenta diferentes factores

Figura 6. Respuestas del estudiante B1 durante la propuesta didáctica de Falta de autenticidad: sesión dos, después de observar los videos de los atletas.

El estudiante menciona algunos factores que influyen en el desempeño de los atletas tales como el cansancio o su rendimiento y menciona que para este caso las matemáticas le ayudan en la multiplicación pues no fue exacto el cálculo realizado pero le ayudó para acercarse al tiempo correcto, es decir, le sirve para tener una aproximación de lo que puede suceder. Además menciona a modo de conclusión que: "nos falta tomar en cuenta diferentes factores.

Ya en el post-test el estudiante responde lo siguiente:



180.15

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

Multipli: que el tiempo de 100 x 10 y eso avio el tiempo de 1000 M y lo aumente 20 segundo de consancio

Figura 7. Respuesta del estudiante B1 en el problema "corredora" en el post-test.

Ahora el estudiante propone como respuesta 180.15 segundos y explica que además de los cálculos que realiza, "*aumenta 20 segundos*" (en realidad aumenta un poco más) por el cansancio, a pesar de que el estudiante toma en cuenta ciertos factores de la vida real sigue dando una respuesta exacta con lo cual se hace presente el “contrato didáctico” y en realidad no es más que una aproximación. En el caso de este alumno hubo un avance sustancial pues pasó de un razonamiento lineal a un razonamiento no lineal inadecuado porque toma en cuenta ciertos factores pero sigue proponiendo una respuesta exacta.

En el caso del estudiante B4 respondió en el pre-test lo siguiente:

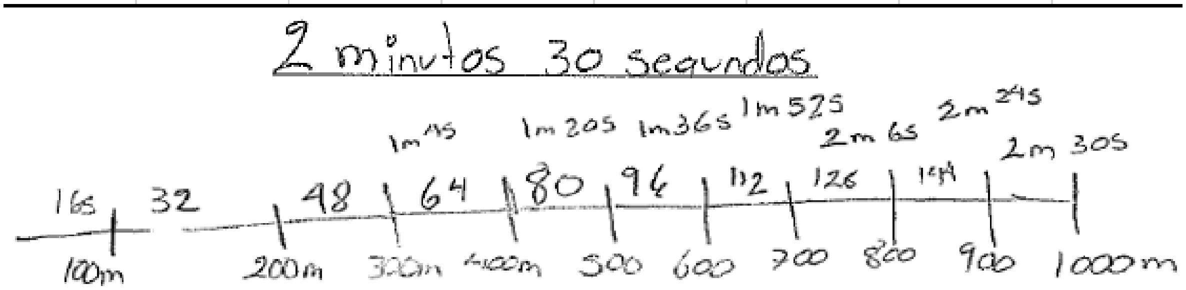
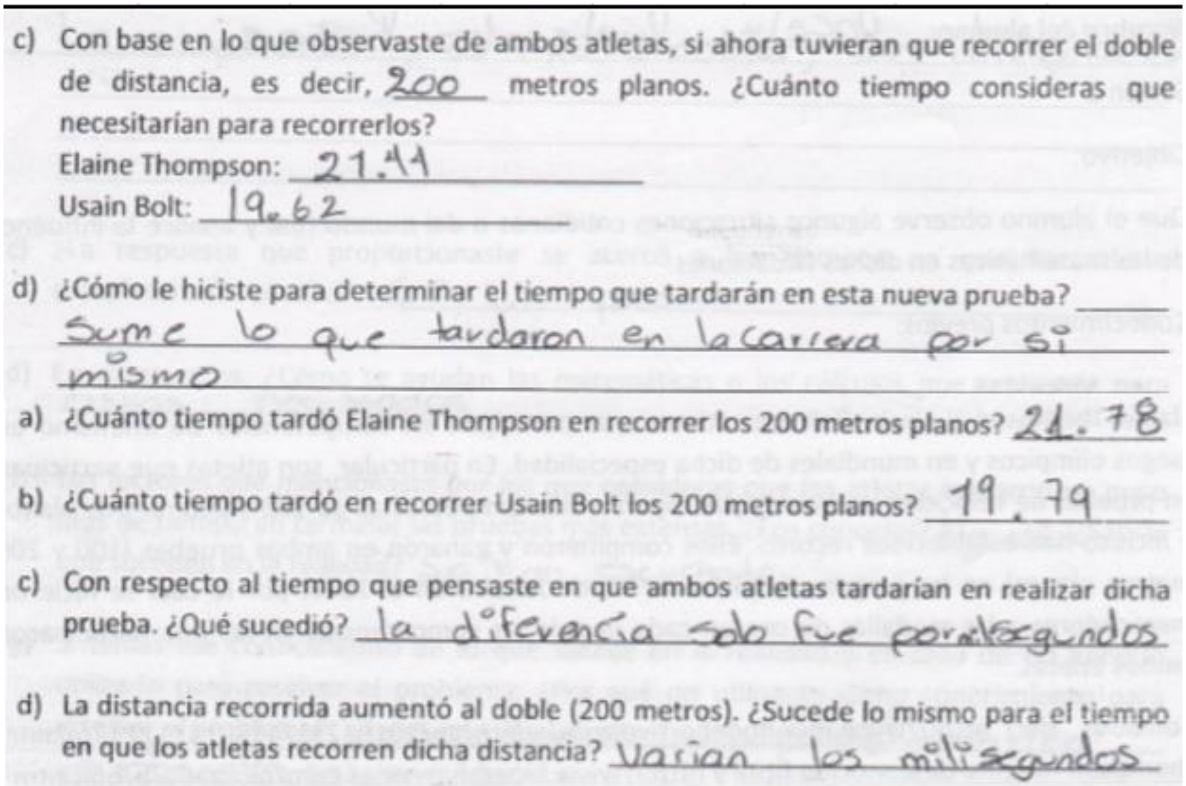


Figura 8. Respuesta y representación del estudiante B4 del problema “corredora” en el pre-test.

El estudiante realizó una especie de recta con la cual hasta los 900 metros llevaban 144 segundos pero a los 1000 metros dice que la corredora tardará 2 minutos 30 segundos lo que equivale a 150 segundos, por ello, este alumno fue categorizado dentro del razonamiento no lineal inadecuado.

En la sesión de la propuesta didáctica sucedió lo siguiente:



c) Con base en lo que observaste de ambos atletas, si ahora tuvieran que recorrer el doble de distancia, es decir, 200 metros planos. ¿Cuánto tiempo consideras que necesitarían para recorrerlos?

Elaine Thompson: 21.41

Usain Bolt: 19.62

d) ¿Cómo le hiciste para determinar el tiempo que tardarán en esta nueva prueba? Sume lo que tardaron en la carrera por si mismo

a) ¿Cuánto tiempo tardó Elaine Thompson en recorrer los 200 metros planos? 21.78

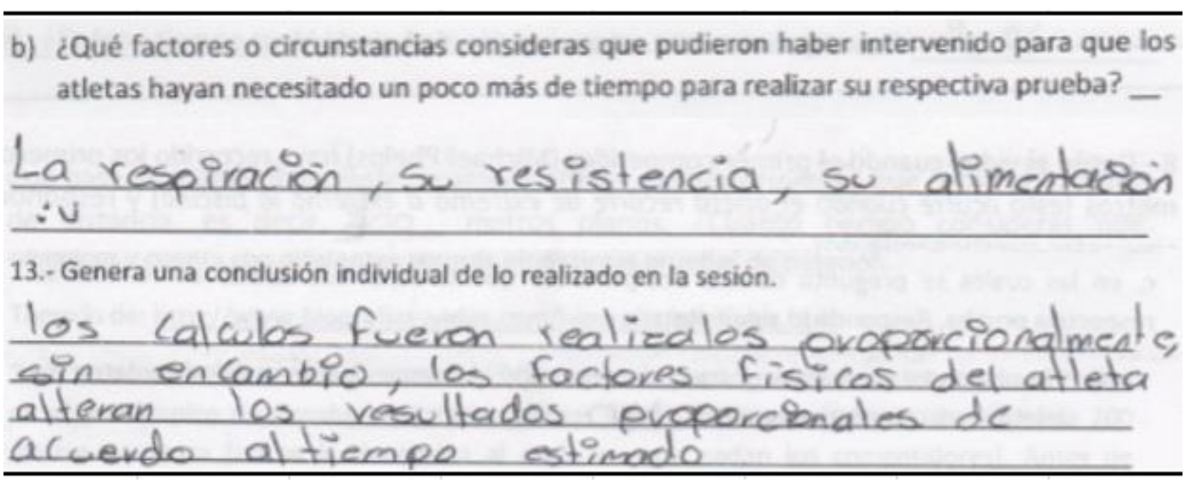
b) ¿Cuánto tiempo tardó en recorrer Usain Bolt los 200 metros planos? 19.79

c) Con respecto al tiempo que pensaste en que ambos atletas tardarian en realizar dicha prueba. ¿Qué sucedió? la diferencia solo fue por milisegundos

d) La distancia recorrida aumentó al doble (200 metros). ¿Sucede lo mismo para el tiempo en que los atletas recorren dicha distancia? Varían los milisegundos

Figura 9. Conjeturas del estudiante B4 durante la propuesta didáctica de falta de autenticidad sesión dos, después de observar el video de los atletas al recorrer los 100 metros planos.

En este caso, el estudiante sigue pensando de forma lineal cuando le preguntan cuánto tiempo tardarán los dos atletas en recorrer los 200 metros planos pues al doble de distancia se tardarán el doble de tiempo, sin embargo, después de proyectar el video se percata que lo que respondió es incorrecto al haber algunas centésimas de diferencia.



b) ¿Qué factores o circunstancias consideras que pudieron haber intervenido para que los atletas hayan necesitado un poco más de tiempo para realizar su respectiva prueba?

La respiración, su resistencia, su alimentación, etc.

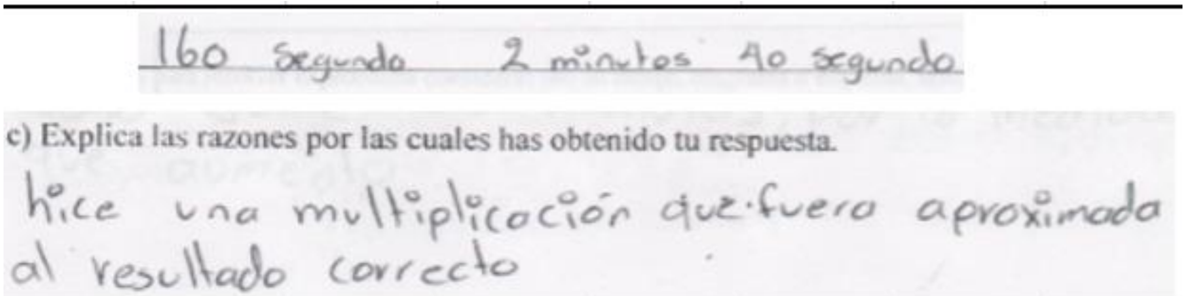
13.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

los calculos fueron realizados proporcionalmente, sin en cambio, los factores fisicos del atleta alteran los resultados proporcionales de acuerdo al tiempo estimado

Figura 10. Respuesta del estudiante B4 durante la propuesta didáctica de falta de autenticidad sesión dos, después de observar los diferentes videos.

El estudiante se da cuenta que varios factores físicos intervienen en el rendimiento de los atletas tales como la respiración, resistencia, alimentación e incluso a manera de conclusión menciona que los cálculos que había realizado fueron proporcionales pero que existen factores físicos en los atletas que alteran el tiempo en que realizan las pruebas.

En el post-test el estudiante responde al problema “corredora” lo siguiente


160 segundo 2 minutos 40 segundo

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

hice una multiplicación que fuera aproximada al resulltado correcto

Figura 11. Respuesta del estudiante B4 en el problema "corredora" en el post-test.

El estudiante dentro de la propuesta didáctica logró percatarse de que existen factores que alteran el rendimiento de los atletas y por ende el tiempo para realizar dicha prueba, al aplicar el post-test, en su argumento dice: “*hice una multiplicación que fuera aproximada al resultado correcto*” pero su respuesta (160 segundos) corresponde al razonamiento lineal, es decir, el estudiante se resistió a dejar a un lado el razonamiento lineal.

Ahora se analiza la transición en el problema “altura de los mexicanos”. El estudiante B8 respondió en el pre-test lo siguiente:

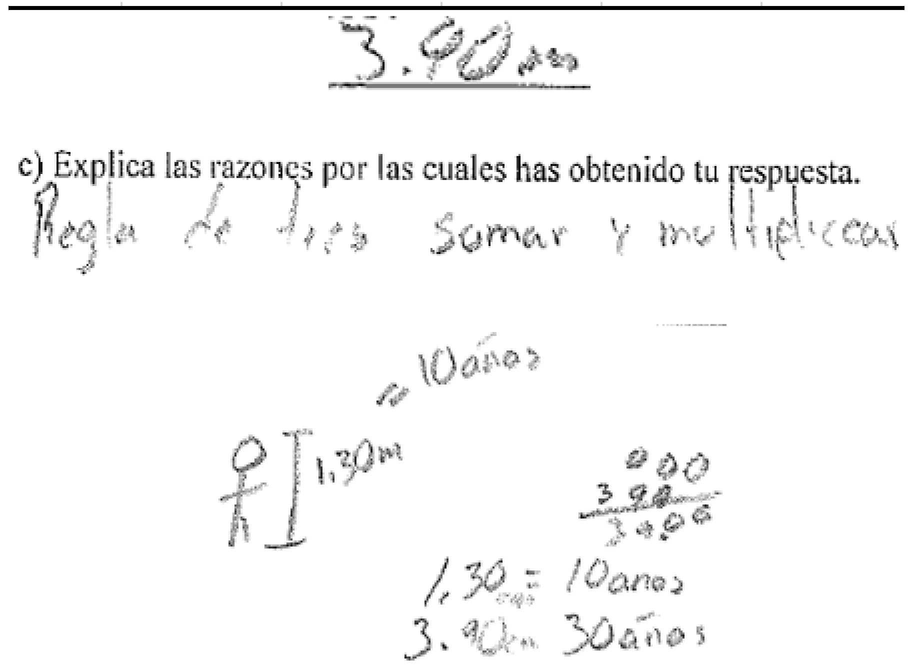


Figura 12. Respuesta del estudiante B8 en el problema "altura de los mexicanos" en el pre-test.

El estudiante menciona que utiliza regla de tres para solucionar el problema e incluso realiza un esquema que simula a un mexicano de 1.30 m a la edad de 10 años y obtiene como respuesta que la edad de 30 años la altura de los mexicanos es de 3.90 m.

Dentro de la sesión 1 de la propuesta didáctica correspondiente a falta de autenticidad (ver anexo 2), se le solicita al estudiante que lea parte de la información de la Organización Mundial de la Salud (OMS) y que responda algunos cuestionamientos

Según información de la Organización mundial de la salud (2006), a la edad de un año (12 meses):

- Un niño "normal" debe de pesar aproximadamente 9.6 kilogramos y debe de medir (aproximadamente) 75.7 centímetros. 12.6m
- Una niña "normal" debe de pesar aproximadamente 8.9 kilogramos y debe de medir (aproximadamente) 74 centímetros.

Nota: se dice que un niño o niña es "normal" cuando no está por debajo o por encima de los parámetros establecidos, por ejemplo, en cuestión del peso, que no tenga un peso bajo (desnutrición) o un peso alto (sobrepeso).

2.- Responde lo que se te indica del cuadro siguiente.

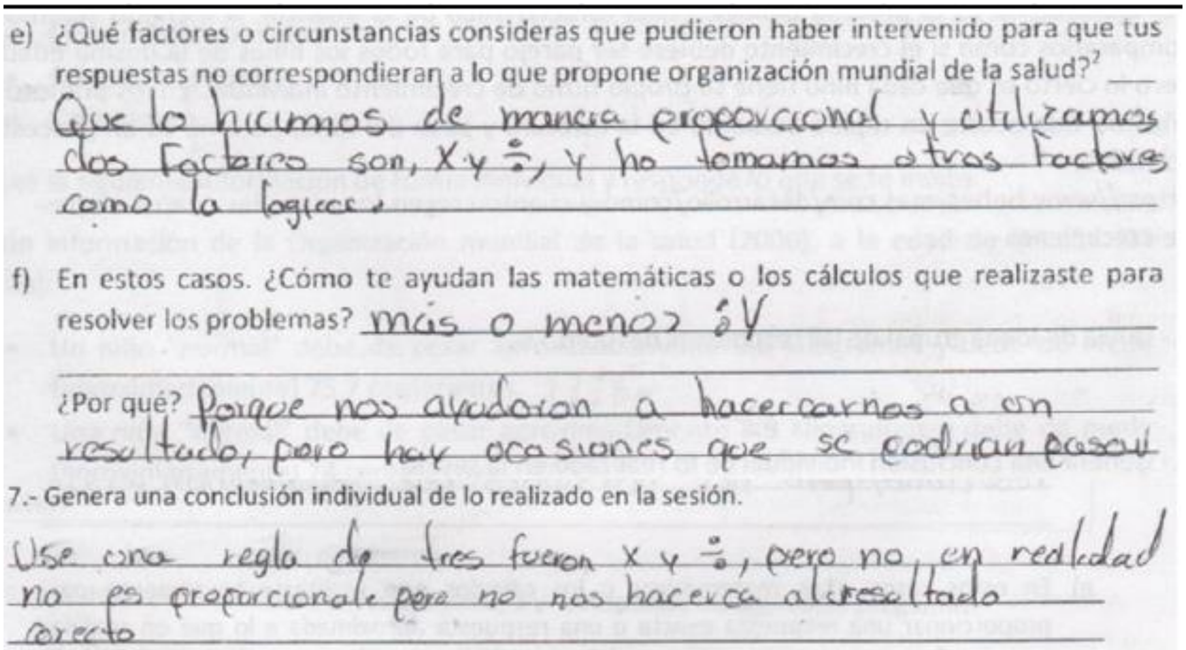
	Niño ("normal")	Niña ("normal")
¿Cuál debe ser el **peso** a la edad de **6 meses**?	~~[illegible] kg~~ 6 kg	~~[illegible] kg~~ 5.56 kg
¿Cuál debe ser la **altura** a la edad de **6 meses**?	25.1	12.3
¿Cuál debe ser el **peso** a la edad de **4 años**?	48 kg	40 kg
¿Cuál debe ser la altura a la edad de **4 años**?	117.6	116.8

Figura 13. Conjetura del estudiante B8 durante la propuesta didáctica de falta de autenticidad sesión uno.

El estudiante realiza un aproximado de lo que debe medir y pesar un niño y niña normal a los 6 meses, posteriormente se le pide que obtenga las mismas características (peso y altura) de pero a la edad de 4 años a lo cual toma como referencia lo que él propone a la edad de 6 meses pues dice que a esa edad un niño normal debe de pesar 6 kg y medir 25.1 cm y los 4 años (es equivalente a 48 meses, que a su vez son 8 veces 6 meses) por ello en el peso menciona que a los 4 años va a pesar 48 kg (8 veces más) y con respecto a la estatura dice que un niño normal medirá a la edad de 4 años 117.6 cm lo que equivale a aproximadamente 4.68 veces 25.1 cm posiblemente porque se le ha de haber hecho exagerada al multiplicarla por 8 veces lo cual serían 200.8 cm, tal vez obtuvo dicha cantidad pero pudo haber pensado que era elevada pues equivale a poco más de 2 metros. En el caso de la niña normal, el estudiante propone que a la edad de 6 meses debe pesar 5.56 kg y mide 12.3 cm lo cual es una estatura pequeña (eso mide aproximadamente un feto a las 17 semanas de gestación) mientras que a la edad de 4 años menciona que pesa 40 kg (al parecer multiplicó la parte entera de lo que propuso a los 6 meses por 8, es decir,

$5\ kg\ x\ 8\ =\ 40\ kg$) y menciona que mide 116.8 cm lo cual es 9.49 veces más con respecto a lo que propone a los 6 meses.

Posteriormente se les entrega información de la OMS referente a estos indicadores, se les pide que llenen una tabla con los valores que propone dicha organización y que respondan algunos cuestionamientos.


e) ¿Qué factores o circunstancias consideras que pudieron haber intervenido para que tus respuestas no correspondieran a lo que propone organización mundial de la salud?[2] Que lo hicimos de manera proporcional y utilizamos dos factores son, X y ÷, y no tomamos otros factores como la logica.

f) En estos casos. ¿Cómo te ayudan las matemáticas o los cálculos que realizaste para resolver los problemas? más o menos ¿V

¿Por qué? Porque nos ayudaron a hacercarnos a un resultado, pero hay ocasiones que se podrían pasar

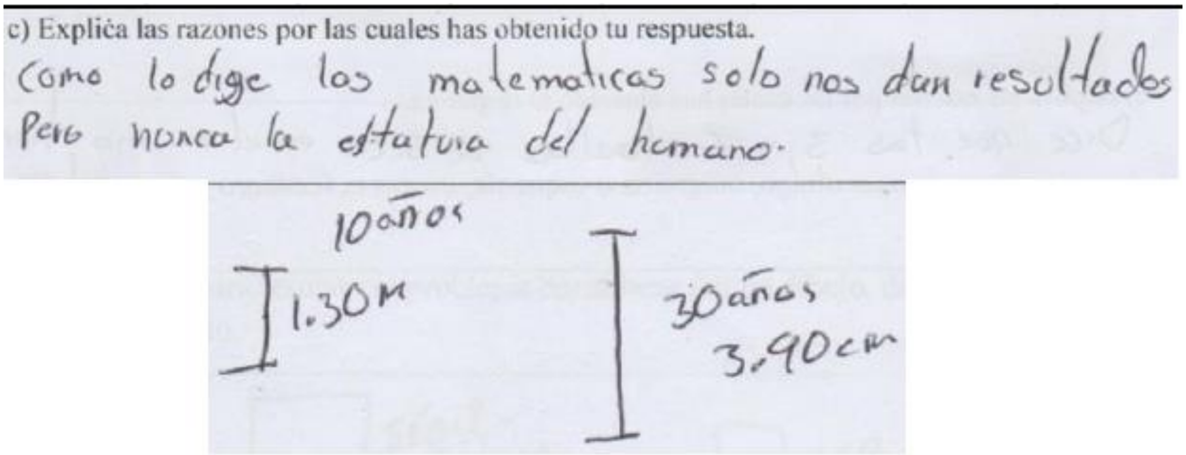
7.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

Use una regla de tres fueron X y ÷, pero no, en realidad no es proporcional. pero no nos hacerca al resultado corecto

Figura 14. Respuesta del estudiante B8 durante la propuesta didáctica de falta de autenticidad sesión uno, después de comparar sus conjeturas y la información de la OMS.

Al ser cuestionado el esudiante sobre los factores o circunstancias que pudieron haber intervenido en la respuesta, el menciona que lo que realizó lo hizo de manera proporcional y que utilizó multiplicación y división para ello, sin embargo, no tomo otros factores como la lógica. Ambien menciona que las matemáticas en este caso lo ayudaon para acercarse al resultado pero que en ocasiones utilizarlas puede ocasionar que se puedan “pasar”, lo anterior, lo menciona posiblemente debido a los rresultados que propuso al principio ya que eran un poco elevados. En su conclusión, el estudiante retoma lo que ya había escrito pues menciona que durante la sesión él uso regla de tres y que no es proporcional (las actividades realizadas) pero que esto puede ayudar a acercarse al resultado.

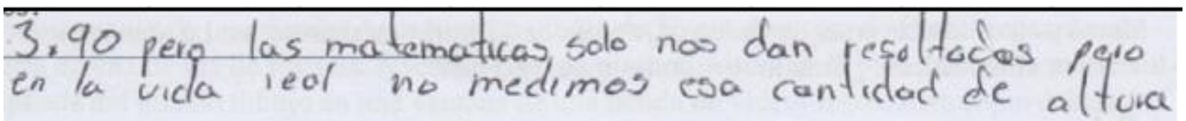
Ya en el post-test el estudiante B8 menciona lo siguiente:



c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.
Como lo dige los matematicas solo nos dan resultados
Pero nonca la estatura del humano.

Figura 15. Explicación del estudiante B8 en el problema "altura de los mexicanos" en el post-test.

Al parecer, la propuesta didáctica tuvo un impacto favorable pues el estudiante menciona que las matemáticas dan resultados pero no la estatura del ser humano y en su respuesta coloca lo siguiente:

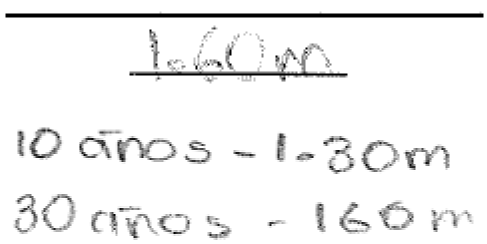


3.90 pero las matematicas solo nos dan resoltados pero
en la vida reol no medimos esa cantidad de altura

Figura 16. Respuesta del estudiante B8 en el problema "altura de los mexicanos" en el post-test.

Resuelve el problema con “regla de tres” pero hace mención de que las matemáticas (que el utilizó) dan ciertos resultados pero en la vida real no medimos esa altura, al parecer la propuesta didáctica tuvo un impacto positivo pues el estudiante había utilizado un razonamiento lineal en el pre-test pero después fue capaz de argumentar que eso no sucede en la vida real.

En el caso del estudiante B10, propone como solución lo siguiente en el pre-test.



1.60 m

10 años - 1.30 m
30 años - 160 m

Figura 17. Respuesta y representación del estudiante B10 en el problema "altura de los mexicanos" en el post-test.

Este estudiante fue catalogado en la subcategoría procedimiento confuso debido a que no argumentó en que se basó o cómo obtuvo dicho resultado (1.60 m). Ya en la propuesta didáctica respondió lo siguiente:

Según información de la Organización mundial de la salud (2006), a la edad de un año (12 meses):

- Un niño "normal" debe de pesar aproximadamente 9.6 kilogramos y debe de medir (aproximadamente) 75.7 centímetros.
- Una niña "normal" debe de pesar aproximadamente 8.9 kilogramos y debe de medir (aproximadamente) 74 centímetros.

Nota: se dice que un niño o niña es "normal" cuando no está por debajo o por encima de los parámetros establecidos, por ejemplo, en cuestión del peso, que no tenga un peso bajo (desnutrición) o un peso alto (sobrepeso).

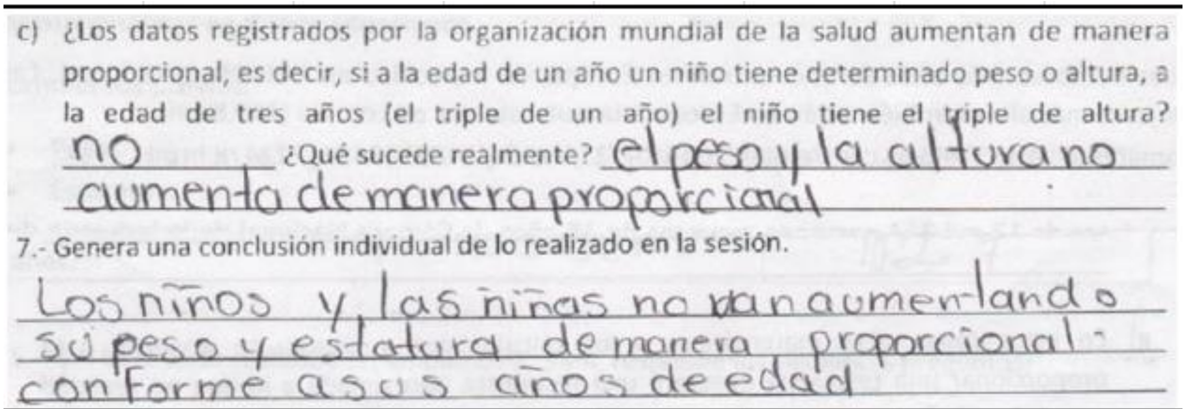
2.- Responde lo que se te indica del cuadro siguiente.

	Niño ("normal")	Niña ("normal")
¿Cuál debe ser el **peso** a la edad de **6 meses**?	4.8 Kg	4.4 Kg
¿Cuál debe ser la **altura** a la edad de **6 meses**?	37.8cm	37 cm
¿Cuál debe ser el **peso** a la edad de **4 años**?	38.4 Kg	35.6 Kg
¿Cuál debe ser la **altura** a la edad de **4 años**?	302.8 cm	296 cm

Figura 18. Conjeturas del estudiante B10 durante la propuesta didáctica de falta de autenticidad sesión uno.

En este caso el estudiante claramente utiliza razonamiento lineal pues aplica proporcionalidad o "regla de tres" para dar respuesta a lo que se indica con la caacterística de que solo utiliza un decimal para dichas respuestas.

Posteriomente al proporcionarles la información de la OMS y solicitarles que respondan algunos cuestionamientos, este estudiante responde lo siguiente:



c) ¿Los datos registrados por la organización mundial de la salud aumentan de manera proporcional, es decir, si a la edad de un año un niño tiene determinado peso o altura, a la edad de tres años (el triple de un año) el niño tiene el triple de altura? no ¿Qué sucede realmente? el peso y la altura no aumenta de manera proporcional

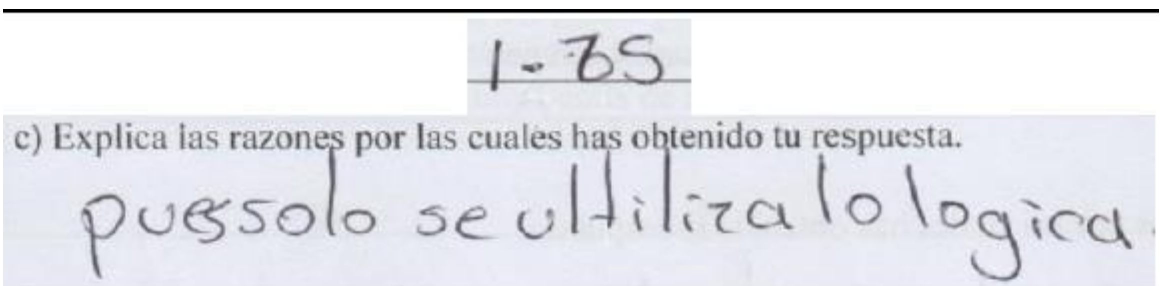
7.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

Los niños y las niñas no van aumentando su peso y estatura de manera proporcional conforme a sus años de edad

Figura 19. Respuesta del estudiante B10 durante la propuesta didáctica de falta de autenticidad sesión uno, después de comparar sus conjeturas y la información de la OMS.

El estudiante al comparar sus respuestas con las de la OMS se percata de que además de no ser correcto lo que él propone menciona que: "*el peso y la altura no aumentan de manera proporcional*", lo anterior es mencionado nuevamente en su conclusión de la sesión.

Este estudiante respondió en el post-test lo siguiente:



1.75

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

puesolo se ultiliza lo logica

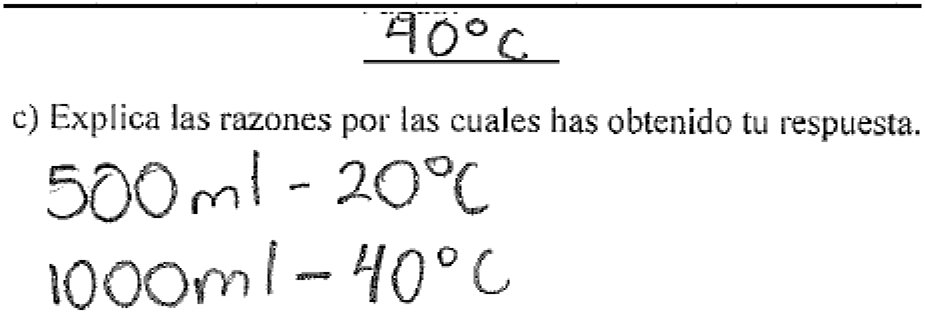
Figura 20. Respuesta y explicación del estudiante B10 en el problema "altura de los mexicanos" en el post-test.

A pesar de que argumenta que utiliza lógica, no menciona cuál es esa lógica y para motivos de interpretación pareciera que su lógica es que los hombres mexicanos tienen esa estatura a la edad de 30 años. Si bien no utilizó el razonamiento lineal en ninguno de los 2 test, tampoco logró erradicar dar una respuesta exacta (situación que no ocurre) a pesar de que en la propuesta didáctica observó ciertas particularidades.

5.3.2 Problemas constantes

Ahora se analizan los problemas "temperatura del agua" y "toallas", pertenecientes a problemas constantes. Se analizan para el problema "temperatura del agua" a los estudiantes B10 y B11 mientras que para el problema altura de los "mexicanos" se analiza a B13 y B17.

Primero se analizará la transición en el problema “temperatura del agua” del estudiante B10, el cual utilizó lo siguiente para resolver dicho problema en el pre-test.


40°c

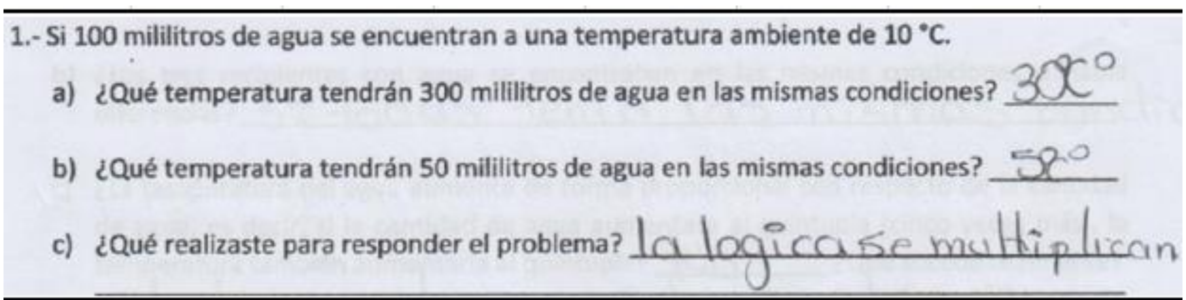
c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

500ml - 20°C

1000ml - 40°C

Figura 21. Respuesta y explicación del estudiante B10 en el problema "temperatura del agua" en el pre-test.

Como podemos observar este estudiante utilizó razonamiento lineal al aplicar proporcionalidad para resolver este problema. En la sesión de la propuesta didáctica correspondiente, éste estudiante respondió lo siguiente:


1.- Si 100 mililitros de agua se encuentran a una temperatura ambiente de 10 °C.

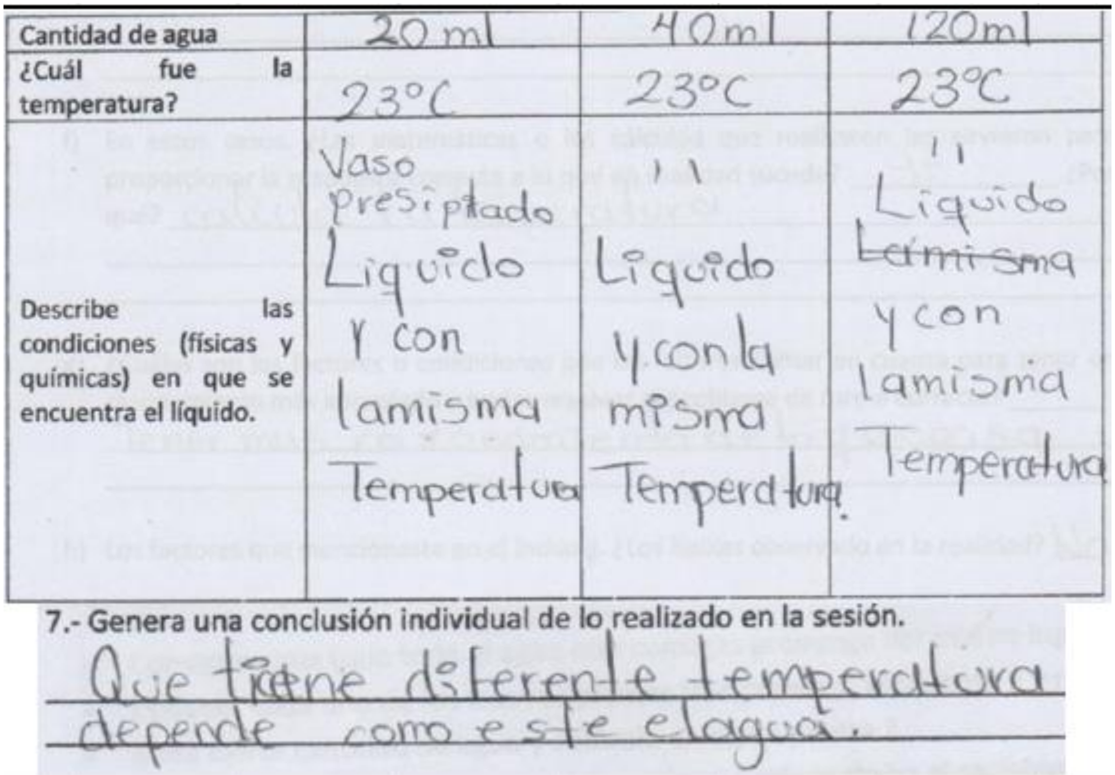
a) ¿Qué temperatura tendrán 300 mililitros de agua en las mismas condiciones? 30C°

b) ¿Qué temperatura tendrán 50 mililitros de agua en las mismas condiciones? 5C°

c) ¿Qué realizaste para responder el problema? la logica se multiplican

Figura 22. Conjeturas del estudiante B10 durante la propuesta didáctica Constante sesión dos, antes de realizar el experimento.

Se observa que en las primeras preguntas el estudiante sigue utilizando razonamiento proporcional y que su argumento para dar solución es que utiliza la lógica y multiplica



Cantidad de agua	20 ml	40 ml	120 ml
¿Cuál fue la temperatura?	23°C	23°C	23°C
Describe las condiciones (físicas y químicas) en que se encuentra el líquido.	Vaso presiptado Liquido y con lamisma Temperatura	" Liquido y con la misma Temperatura.	" Liquido ~~lamisma~~ y con lamisma Temperatura

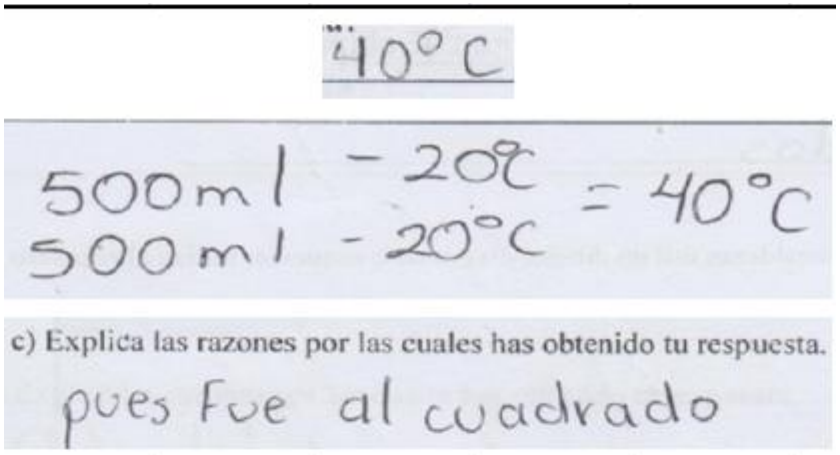
7.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

Que tiene diferente temperatura depende como este elagua.

Figura 23. Respuestas del estudiante B10 durante la propuesta didáctica Constante sesión dos, después de realizar el experimento.

Posteriormente, se le pide al estudiante que coloque cierta cantidad de agua en diferentes recipientes, que tome la temperatura en cada uno de ellos y que describa las condiciones de cada uno de estos. Por último, en su conclusión menciona que: "*tiene diferente temperatura, depende como este el agua*" posiblemente se refiere que cuando se realizó la retroalimentación los equipos mencionaron diferentes temperaturas debido a que el agua no provino del mismo sitio.

En el post-test, respondió lo siguiente:


40° C

500 ml - 20°C
500 ml - 20°C = 40 °C

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.
pues Fue al cuadrado

Figura 24. Respuesta y explicación del estudiante B10 en el problema "temperatura del agua" en el post-test.

El estudiante B10 no logró salir de la ilusión de la linealidad a pesar de que pudo experimentar que la temperatura del agua no cambia a pesar de que la cantidad de agua sea diferente, por lo tanto permaneció en la categoría razonamiento lineal. Además de que presenta algunas dificultades para diferenciar el doble del “cuadrado” de una cantidad.

El estudiante B11 menciona en el pre-test lo siguiente:

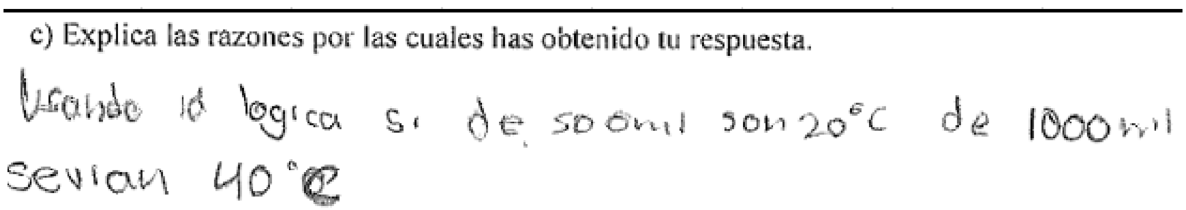
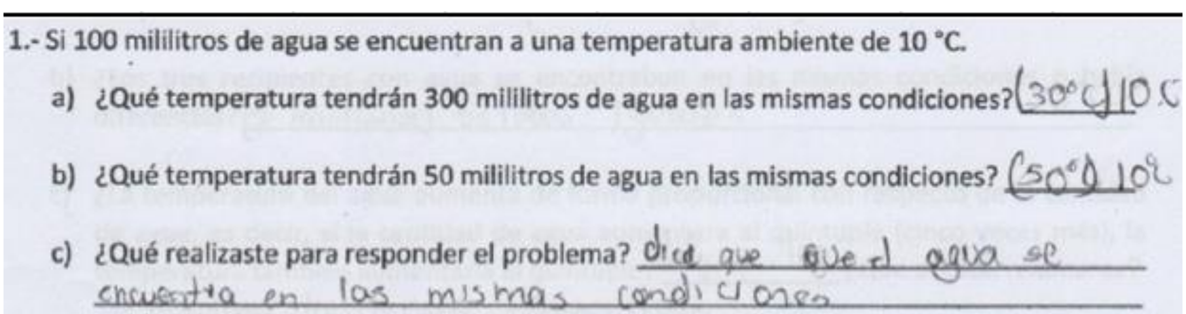

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.
Usando la logica si de 500 ml son 20°C de 1000 ml serian 40 °C

Figura 25. Respuesta y explicación del estudiante B11 en el problema "temperatura del agua" en el pre-test.

Menciona que: “*usando la lógica si de 500 ml son 20 °C de 1000 ml serían 40 °C*”, es decir, el estudiante está aplicando proporcionalidad para resolver el problema. En la propuesta didáctica realiza lo siguiente:


1.- Si 100 mililitros de agua se encuentran a una temperatura ambiente de 10 °C.

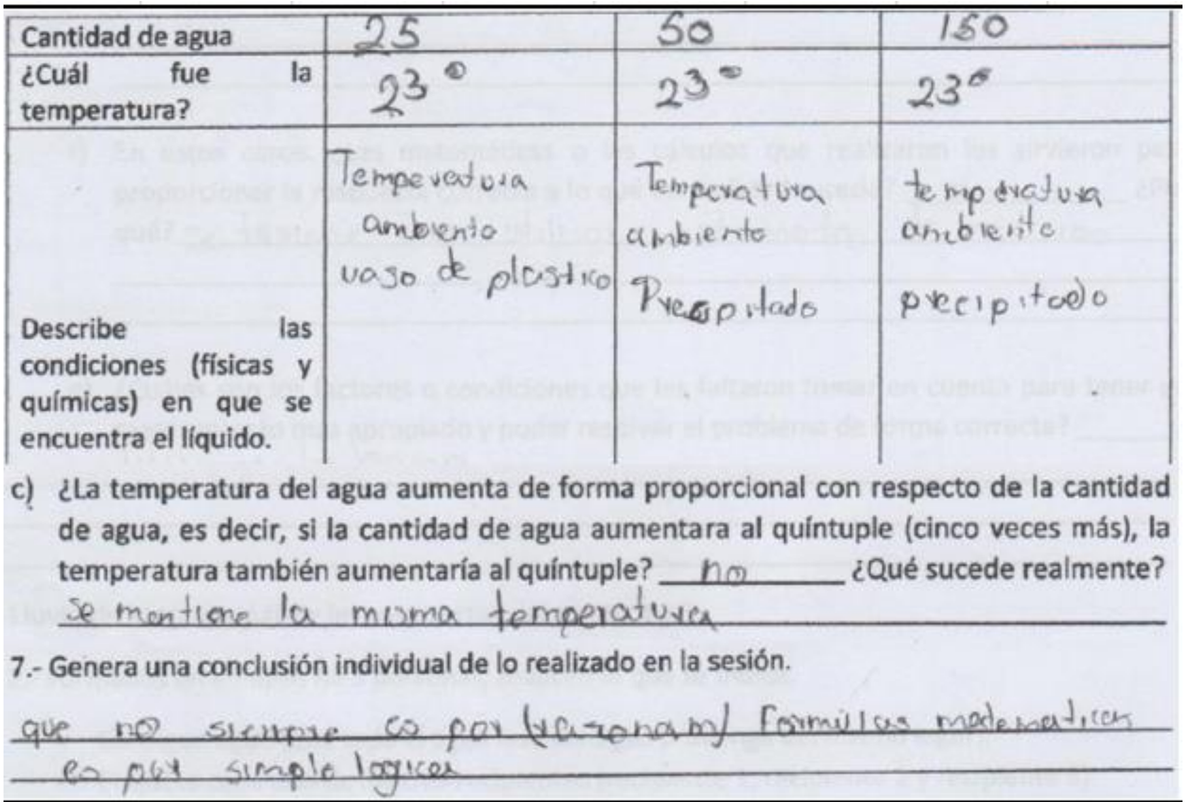
a) ¿Qué temperatura tendrán 300 mililitros de agua en las mismas condiciones? ~~30°C~~ 10 C

b) ¿Qué temperatura tendrán 50 mililitros de agua en las mismas condiciones? ~~50°C~~ 10°C

c) ¿Qué realizaste para responder el problema? dice que que el agua se encuentra en las mismas condiciones

Figura 26. Conjeturas del estudiante B11 durante la propuesta didáctica Constante sesión dos, antes de realizar el experimento.

El estudiante al parecer en un primer momento había utilizado razonamiento proporcional pues había escrito 30 °C y 50 °C (aunque en este último resultado al parecer existe un error al aplicar el algoritmo pues la respuesta debería ser 5 °C), pero al parecer se dio cuenta que no es apropiado utilizar dicho razonamiento, por lo cual encerró en paréntesis los primeros resultados para después colocar 10 °C lo cual sería la respuesta correcta.



Cantidad de agua	25	50	150
¿Cuál fue la temperatura?	23°	23°	23°
Describe las condiciones (físicas y químicas) en que se encuentra el líquido.	Temperatura ambiento vaso de plastico	Temperatura ambiento Precipitado	temperatura ambiento precipitado

c) ¿La temperatura del agua aumenta de forma proporcional con respecto de la cantidad de agua, es decir, si la cantidad de agua aumentara al quíntuple (cinco veces más), la temperatura también aumentaría al quíntuple? no ¿Qué sucede realmente? se mantiene la misma temperatura

7.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

que no siempre es por ~~(razonam)~~ formulas matematicas es por simple logica

Figura 27. Respuestas del estudiante B10 durante la propuesta didáctica Constante sesión dos, después de realizar el experimento.

Posteriormente, al realizar el experimento, el estudiante toma las temperaturas de los tres recipientes y describe las condiciones en las que se encuentran estos. Con base en esto, el estudiante observa que la temperatura se mantiene independientemente de la cantidad de agua por ello concluye que: "*no siempre es por fórmulas matemáticas, es por simple lógica*". Finalmente, en el post-test respondió lo siguiente:

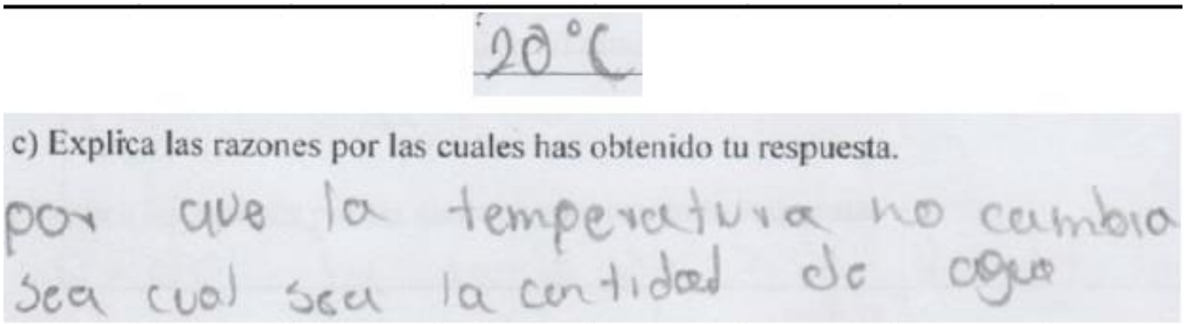


Figura 28. Respuesta y explicación del estudiante B10 en el problema "temperatura del agua" en el post-test.

En el caso de este estudiante, la propuesta didáctica tuvo un impacto positivo pues el estudiante logró dejar el razonamiento lineal del pre-test y dar paso al razonamiento no lineal en el post-test pues en este último menciona que “*la temperatura no cambia sea cual sea la cantidad de agua*” y así proporcionar la respuesta correcta (20 °C).

Ahora se analizará la transición en el problema “toallas” del estudiante B13, el cual respondió lo siguiente en el pre-test.

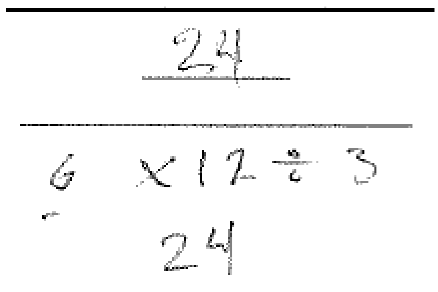


Figura 29. Respuesta y representación del estudiante B13 en el problema "toallas" en el pre-test.

El estudiante utilizó razonamiento lineal pues aplicó la “regla de tres” para resolver este problema y obtener así 24 horas. En la sesión correspondiente este tipo de problemas, respondió lo siguiente:

3.- Completa el siguiente cuadro para las toallas que se encuentran dentro del aula.

	3 toallas	6 toallas
¿Cuál fue el tiempo en que se secaron?	33. 20	33. 20
Describe las condiciones en que se encuentran.	Esta templado	No hay sol

7.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

Secado de toallas en tiempo de multiplicar el secado

Figura 30. Respuestas del estudiante B13 durante la propuesta didáctica Constante sesión uno, después de realizar el experimento.

Al realizar el experimento y anotar el tiempo de secado de 3 y 6 toallas húmedas podemos observar que el tiempo es el mismo y que las condiciones en las que se encuentran son relativamente semejantes, sin embargo, al solicitar una conclusión de lo realizado en la sesión, ésta no es muy clara pues menciona lo siguiente: "*secado de toallas en tiempo de multiplicar el secado*". Posteriormente, en el post-test responde de la siguiente manera.

24 hrs

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

multiplicar

Figura 31. Respuesta y explicación del estudiante B13 en el problema "toallas" en el post-test.

Como podemos observar el estudiante no logró salir del razonamiento lineal en ninguno de los dos test a pesar de que en lo experimentado haya sido diferente. Este estudiante fue el único que aplicó proporcionalidad en el post-test.

Ahora, el estudiante B17 respondió al problema "toallas" de la siguiente manera:

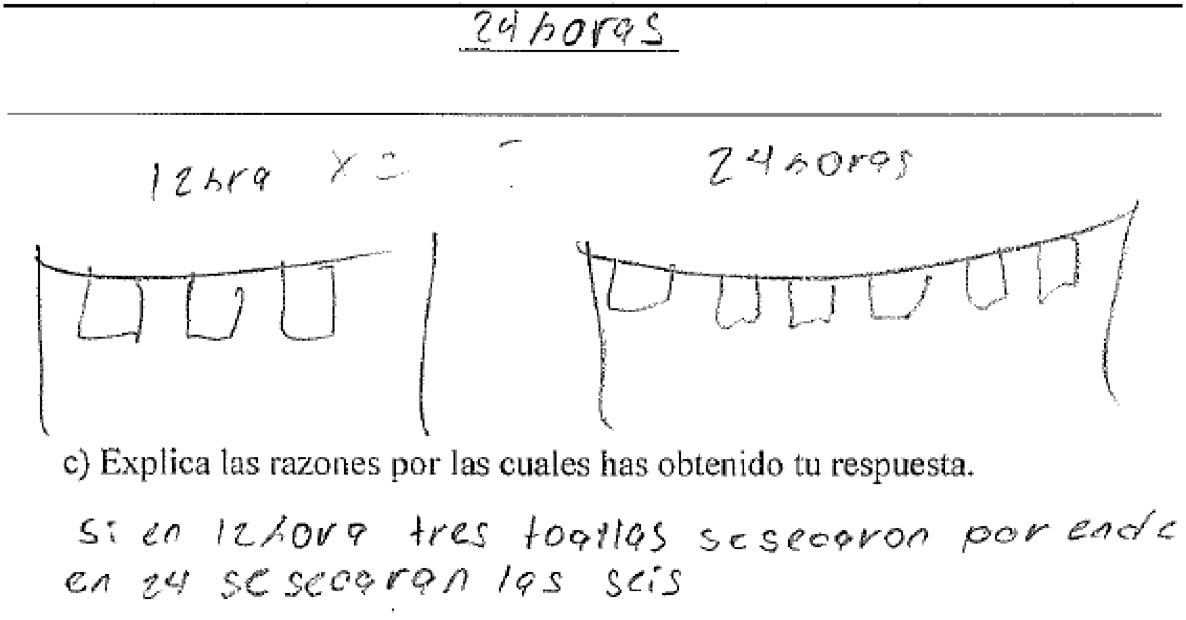


Figura 32. Respuesta, representación y explicación del estudiante B17 en el problema "toallas" en el pre-test.

Se observa tanto en los diagramas como en el argumento que el estudiante está utilizando proporcionalidad pues dice que al ser el doble de toallas entonces será el doble de tiempo a pesar de que en el diagrama se observe que las toallas están tendidas al mismo tiempo. En la sesión de la propuesta didáctica, el estudiante respondió de la siguiente forma.

4.- Completa el siguiente cuadro para las toallas que se encuentran fuera del aula.

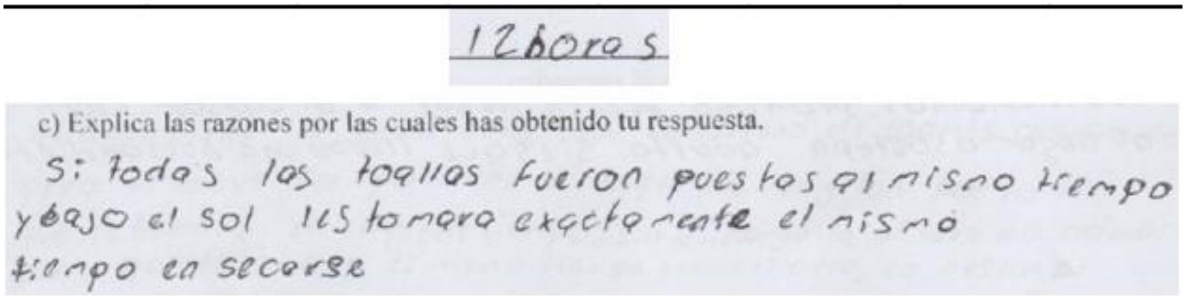
	3 toallas	6 toallas
¿Cuál fue el tiempo en que se secaron?	16mn 50sg	16mn 50sg
Describe las condiciones en que se encuentran.	nublado y con viento	nublado y con viento

7.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

los toallas se secaron dependiendo a su ambiente ya sea caloroso, seco o frio los tiempos bariaron

Figura 33. Respuestas del estudiante B17 durante la propuesta didáctica Constante sesión uno, después de realizar el experimento.

Se observa que las 3 y 6 toallas se secaron al mismo tiempo y bajo las mismas condiciones, el estudiante argumenta que el tiempo de secado de las toallas va a depender del ambiente en el que se encuentren ya sea caluroso, seco o frío y que ello puede hacer que varíe el tiempo de secado. Por último, en el post-test responde así


12horas

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

Si todas las toallas fueron puestos al mismo tiempo ybajo el sol les tomara exactamente el mismo tiempo en secarse

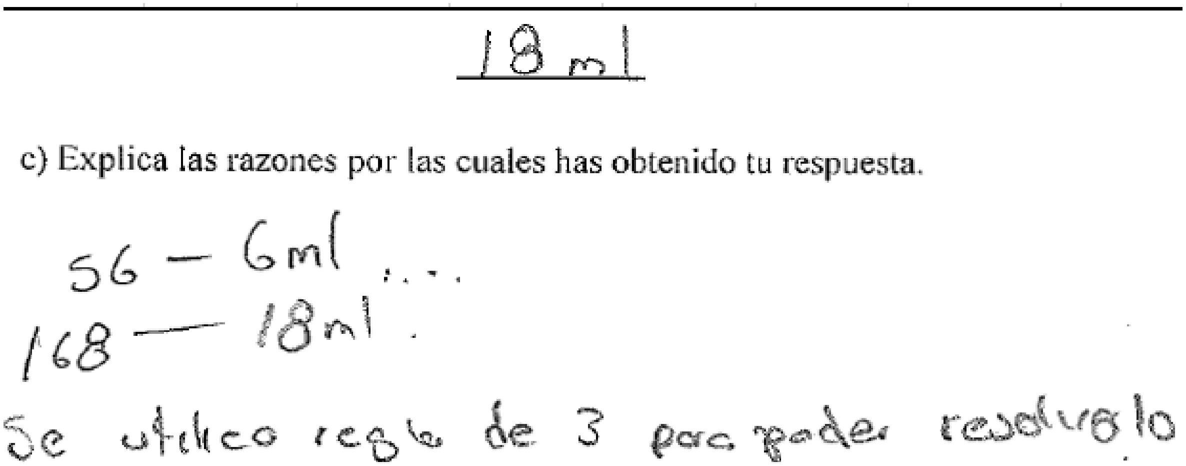
Figura 34. Respuesta y explicación del estudiante B17 en el problema "toallas" en el post-test.

Ahora, el estudiante menciona que: “si todas las toallas fueron puestas al mismo tiempo y bajo el sol, les tomará exactamente el mismo tiempo en secarse”, por ello, la solución propuesta de este alumno es 12 horas, lo cual es correcto.

5.3.3 Problemas de área

Los problemas que se analizan en esta sección son los problemas “pintor” y “agricultor”, pertenecientes a problemas de área. Se analiza para el problema “pintor” al estudiante B15 debido que fue el más próximo solucionarlo y para el problema altura de los “agricultor” se analiza a B2 y B16.

El estudiante B15 utiliza lo siguiente para resolver el problema “pintor” en el pre-test.

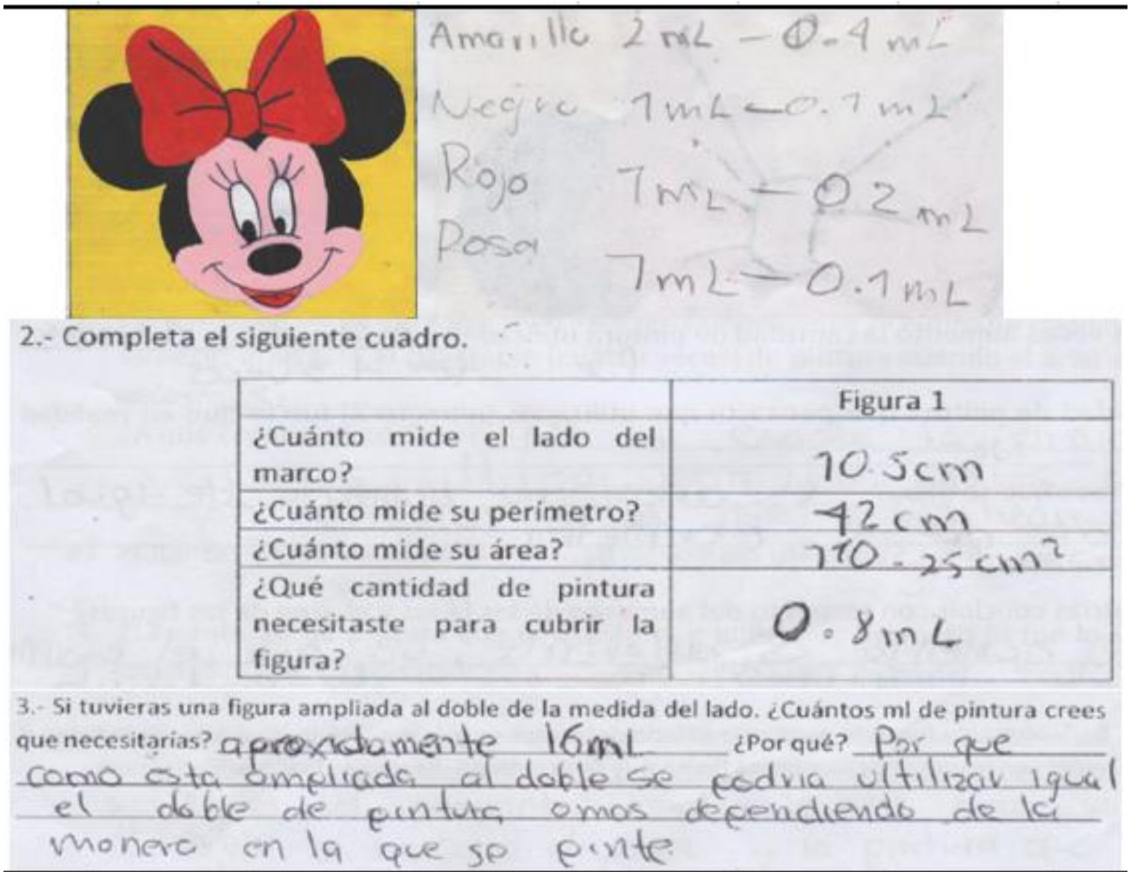

18 ml

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

56 — 6ml ...
168 — 18ml.
Se utilico regla de 3 para poder resolverlo.

Figura 35. Respuesta, representación y explicación del estudiante B15 en el problema "pintor" en el pre-test.

Como podemos observar, el estudiante utiliza el modelo lineal para resolver este problema. Dentro de la propuesta didáctica se les solicitó a los estudiantes que pintaran unos dibujos y que completaran algunos cuadros y cuestionamientos


Amarillo 2 mL — 0.4 mL
Negro 1 mL — 0.1 mL
Rojo 7 mL — 0.2 mL
Rosa 7 mL — 0.1 mL

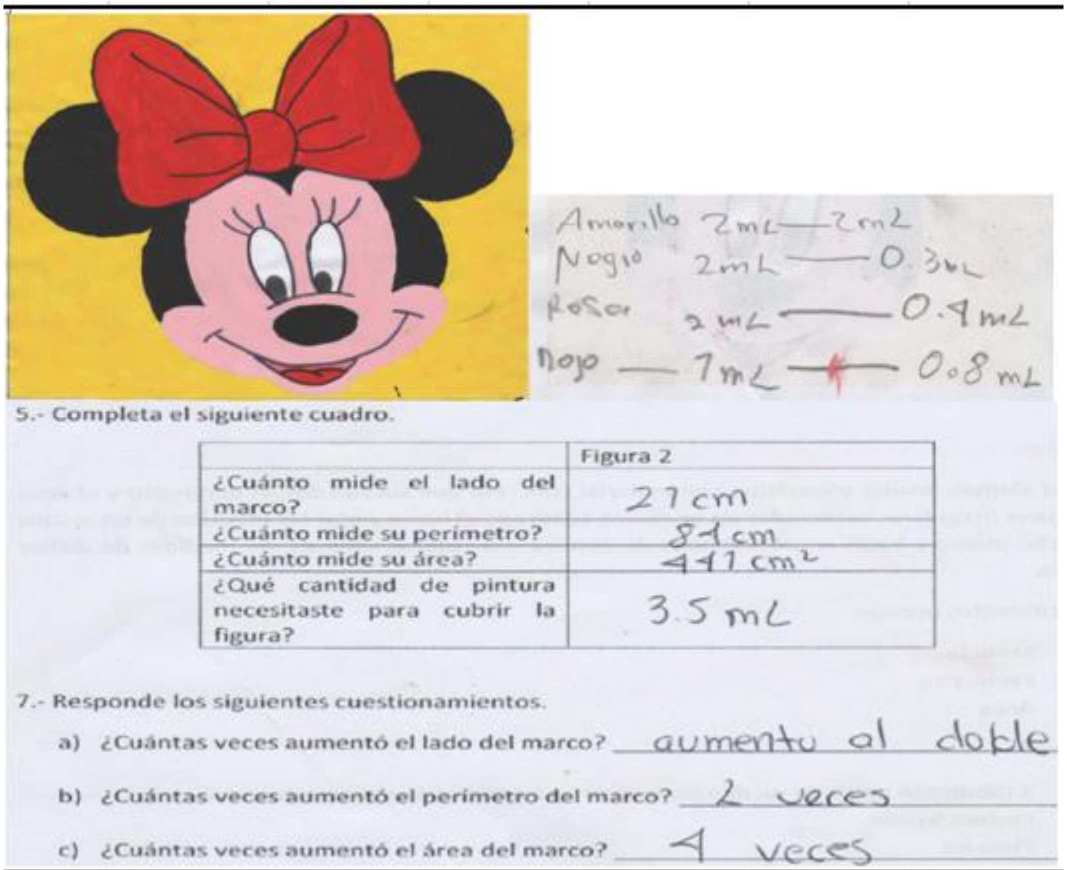
2.- Completa el siguiente cuadro.

	Figura 1
¿Cuánto mide el lado del marco?	10.5cm
¿Cuánto mide su perímetro?	42 cm
¿Cuánto mide su área?	110.25 cm²
¿Qué cantidad de pintura necesitaste para cubrir la figura?	0.8 mL

3.- Si tuvieras una figura ampliada al doble de la medida del lado. ¿Cuántos ml de pintura crees que necesitarías? aproxidamente 16mL ¿Por qué? Por que como esta ampliada al doble se podria ultilizar igual el doble de pintura omos dependiendo de la manera en la que se pinte

Figura 36. Respuestas del estudiante B15 durante la propuesta didáctica Área sesión dos, después de haber pintado el dibujo original.

Se le solicitó al estudiante que pintara un dibujo, que obtuviera el valor de la arista, perímetro y área, además de la cantidad de pintura utilizada. Para este caso podemos que utilizó 0.8 ml. Posteriormente se le cuestiona sobre qué pasará si se amplía la arista del dibujo al doble, a lo cual el estudiante menciona que 16 ml aproximadamente, aunque al parecer hay un error y en lugar de esa cantidad es 1.6 ml pues posteriormente argumenta que: "*como esta ampliada al doble se podría utilizar igual el doble de pintura o más dependiendo de la manera en que se pinte*", es decir, el estudiante está utilizando el razonamiento lineal aunque está tomando ciertas condiciones realista pues menciona que la cantidad de pintura también va a depender de la manera en que se pinte.



Amarillo 2mL — 2mL
Negro 2mL — 0.3mL
Rosa 2mL — 0.4mL
Rojo — 1mL — 0.8mL

5.- Completa el siguiente cuadro.

	Figura 2
¿Cuánto mide el lado del marco?	21 cm
¿Cuánto mide su perímetro?	84 cm
¿Cuánto mide su área?	441 cm²
¿Qué cantidad de pintura necesitaste para cubrir la figura?	3.5 mL

7.- Responde los siguientes cuestionamientos.

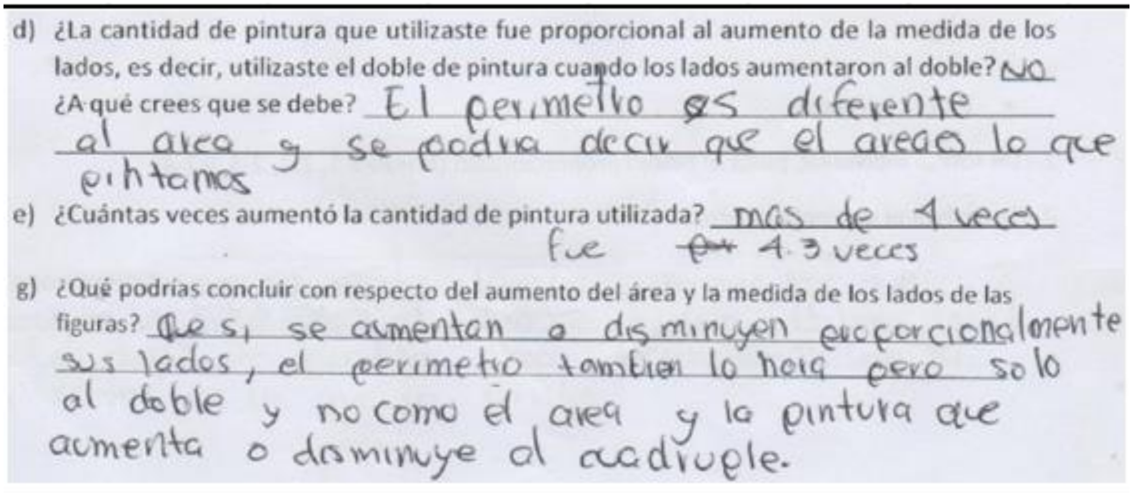
a) ¿Cuántas veces aumentó el lado del marco? aumento al doble

b) ¿Cuántas veces aumentó el perímetro del marco? 2 veces

c) ¿Cuántas veces aumentó el área del marco? 4 veces

Figura 37. Respuestas del estudiante B15 durante la propuesta didáctica Área sesión dos, después de haber pintado el dibujo ampliado.

Posteriormente se le solicita al estudiante que pinte la figura ampliada, que obtenga su arista, perímetro y área, además pide la cantidad de pintura que necesita para esta nueva figura (3.5 ml). También se pide que realice una comparación entre las medidas de ambas figuras a lo cual responde que la arista y perímetro crecen al doble mientras que el área lo hace al cuádruple.



d) ¿La cantidad de pintura que utilizaste fue proporcional al aumento de la medida de los lados, es decir, utilizaste el doble de pintura cuando los lados aumentaron al doble? No
¿A qué crees que se debe? El perimetro es diferente al area y se podria decir que el area es lo que pintamos

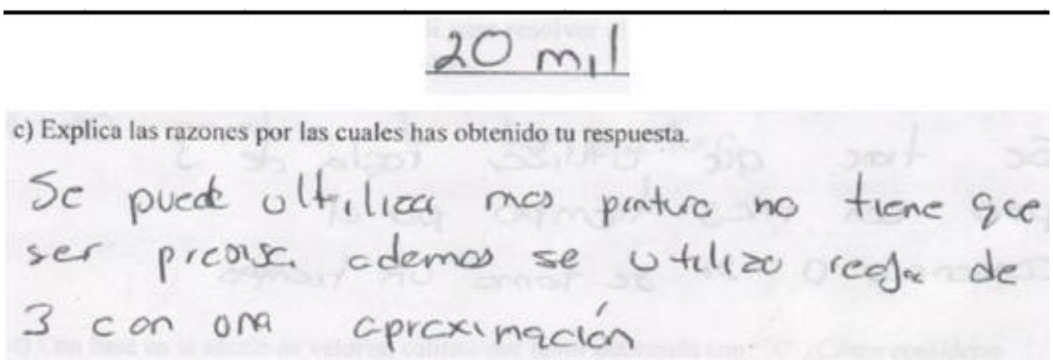
e) ¿Cuántas veces aumentó la cantidad de pintura utilizada? mas de 4 veces fue ~~en~~ 4.3 veces

g) ¿Qué podrías concluir con respecto del aumento del área y la medida de los lados de las figuras? Que si se aumentan o disminuyen proporcionalmente sus lados, el perimetro tambien lo hara pero solo al doble y no como el area y la pintura que aumenta o disminuye al cuadruple.

Figura 38. Respuestas del estudiante B15 durante la propuesta didáctica Área sesión dos, después de haber realizado el experimento.

Al solicitar que responda las preguntas que se muestran, el estudiante observa que el perímetro es diferente al área y que lo que está pintando en realidad es el área, y que para esta nueva figura ampliada necesitó mas de 4 veces de pintura, para ser exactos 4.3 veces. En su conclusión menciona que los lados y el perímetro crecen proporcionalmente pero que el área y pintura aumenta o disminuye al cuádruple.

En el post-test el estudiante respondió lo siguiente:



20 ml

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

Se puede utilizar mas pintura no tiene que ser precisa. ademas se utilizo regla de 3 con una aproximación

Figura 39. Respuesta y explicación del estudiante B15 en el problema "pintor" en el post-test.

El estudiante hace mención a que: "*se puede utilizar más pintura, no tiene que ser precisa además utilizo regla de tres con una aproximación*" y su respuesta es 20 ml, posiblemente agrega un poco más de pintura a su respuesta porque recuerde que para pintar el dibujo ampliado necesitó un poco más de pintura de la que tenía planeado, desafortunadamente no recordó que la superficie o área crece de forma diferente a la de una arista.

Ahora se analiza al estudiante B2 en el problema “agricultor”. En el pre-test respondió lo siguiente

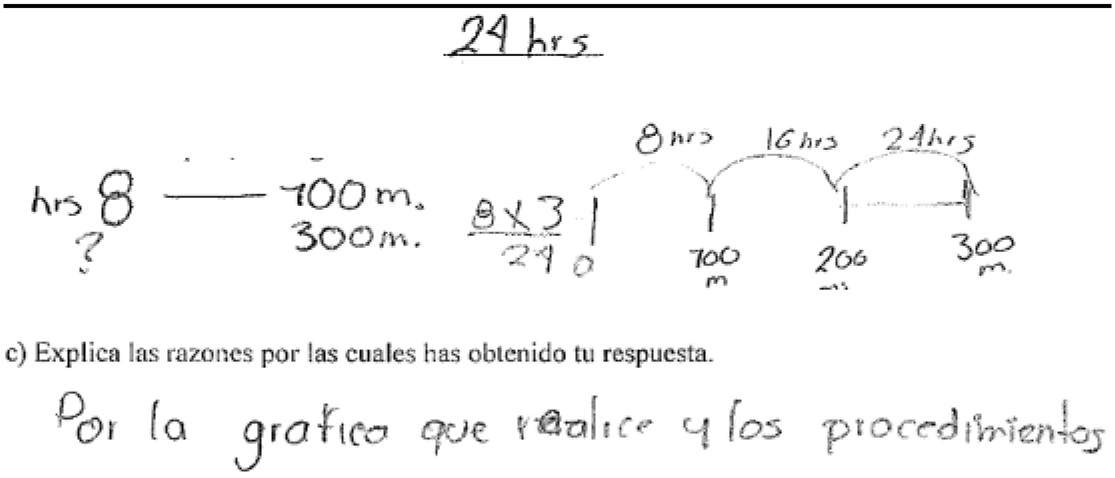


Figura 40. Respuesta, representación y explicación del estudiante B2 en el problema "agricultor" en el pre-test.

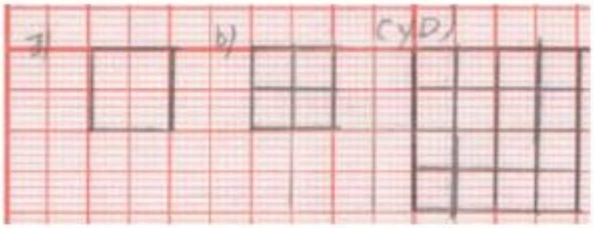
El estudiante realiza razonamiento lineal en cualquiera de sus representaciones pues plantea la “regla de tres” y en la recta que propone realiza “los saltos de la rana” para que en cualquiera de ambas obtenga como resultado 24 horas que pertenece a la respuesta proporcional.

En la propuesta didáctica sucede lo siguiente:

1.- Recientemente, un albañil colocó azulejos en una casa. Él necesitó 4 azulejos cuadrados para cubrir una parte de piso de una habitación que tenía forma cuadrada con lados de 1 metro. Otro piso de la casa también de forma cuadrada pero con lados de 2 metros necesita que le coloquen azulejos los cuales aún no se han comprado.

a) ¿Cuántos azulejos cuadrados necesitarán comprar? 8 → 16 azulejos

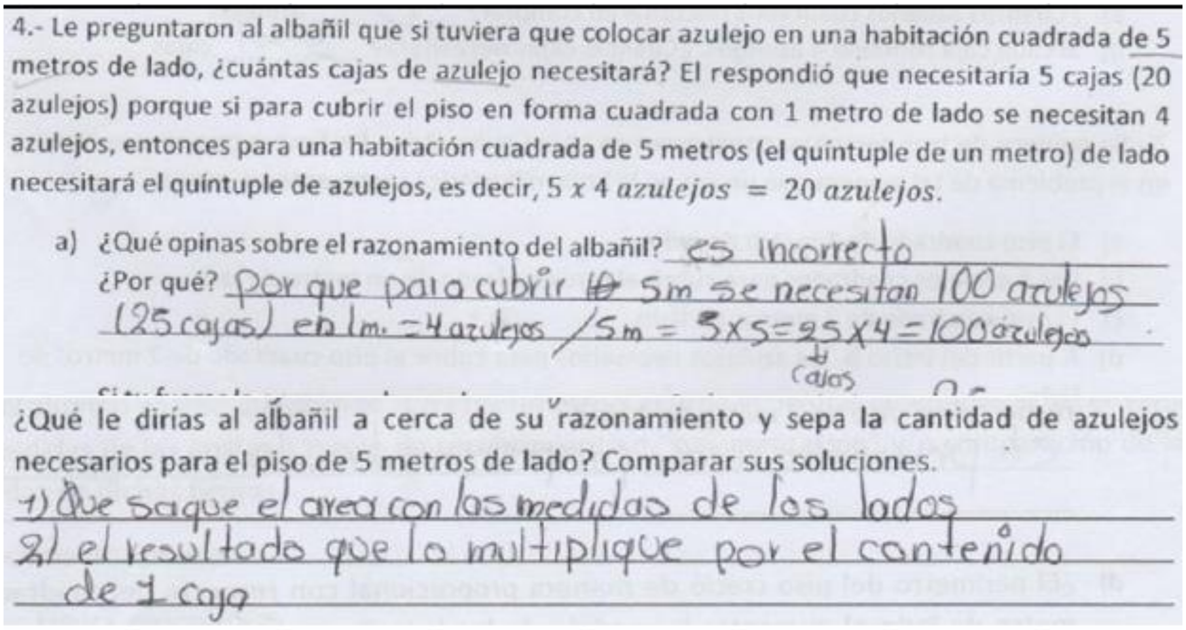
b) Si cada caja contiene 4 azulejos. ¿Cuántas cajas necesitará? 2 → 4 cajas



	Piso 1	Piso 2
¿Cuánto mide de lado?	1m	2m
¿Cuánto mide su perimetro?	4m	8m
¿Cuánto mide su área?	1m	4m
¿Cuántos azulejos se necesitaron para cubrir el área?	4	16

Figura 41. Conjeturas y respuestas del estudiante B2 durante la propuesta didáctica Área sesión uno, utilizando la figura original (piso cuadrado de un metro de lado).

El estudiante utiliza en un principio razonamiento lineal pues menciona que necesita 8 azulejos para cubrir un piso cuadrado de 2 m de lado ya que para un piso cuadrado de 1 m de lado se necesitan 4 azulejos, al parecer se da cuenta que no es correcto su razonamiento y corrige, esta corrección es correcta, algo semejante ocurre con el inciso b pues el estudiante dice que si para un piso cuadrado de 1 m de lado se necesitan 1 caja con cuatro azulejos, entonces para cubrir un piso cuadrado de 2 m de lado se necesitan 2 cajas pero de igual manera se da cuenta que no es correcto ello y corrige de forma correcta, posiblemente en un principio había realizado las operaciones mentalmente pero después se apoyó de algunos esquemas que el mismo estudiante realizó en las hojas milimétricas que se les proporcionaron y que le permitieron cambiar de razonamiento. Posteriormente se le solicita que complete una tabla con base en la información anterior y lo hace correctamente.



4.- Le preguntaron al albañil que si tuviera que colocar azulejo en una habitación cuadrada de 5 metros de lado, ¿cuántas cajas de azulejo necesitará? El respondió que necesitaría 5 cajas (20 azulejos) porque si para cubrir el piso en forma cuadrada con 1 metro de lado se necesitan 4 azulejos, entonces para una habitación cuadrada de 5 metros (el quíntuple de un metro) de lado necesitará el quíntuple de azulejos, es decir, $5 \times 4\ azulejos\ =\ 20\ azulejos$.

a) ¿Qué opinas sobre el razonamiento del albañil? es Incorrecto

¿Por qué? por que para cubrir ~~10~~ 5m se necesitan 100 azulejos (25 cajas) en 1m. = 4azulejos /5m = 5x5=25x4=100 azulejos
cajas

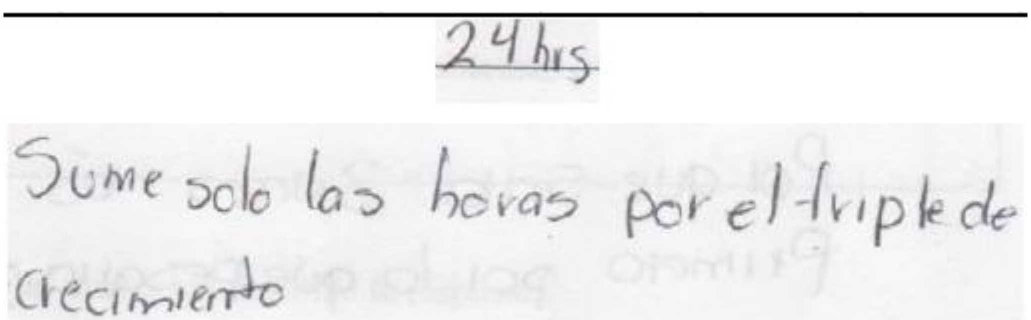
¿Qué le dirías al albañil a cerca de su razonamiento y sepa la cantidad de azulejos necesarios para el piso de 5 metros de lado? Comparar sus soluciones.

1) Que saque el area con las medidas de los lados
2) el resultado que lo multiplique por el contenido de 1 caja

Figura 42. Conjeturas y respuestas del estudiante B2 durante la propuesta didáctica Área sesión uno, utilizando la figura ampliada (piso cuadrado de cinco metros de lado).

El estudiante al parecer ha entendido que la superficie no crece de forma proporcional. Se le plantea cierta situación y la responde correctamente, incluso, hace la aclaración de que necesita 100 azulejos para cubrir el piso de la habitación con 5 metros de lado y por lo tanto se necesitarán 25 cajas pues cada caja contiene 4 azulejos. Como parte de la recomendación que el estudiante propone para saber la cantidad de azulejos es que primero se obtenga el área de la habitación con base en la medida del lado y posteriormente dicha área la multiplique por el contenido de azulejos de cada caja.

Posteriormente, al aplicar el post-test el estudiante respondió lo siguiente:



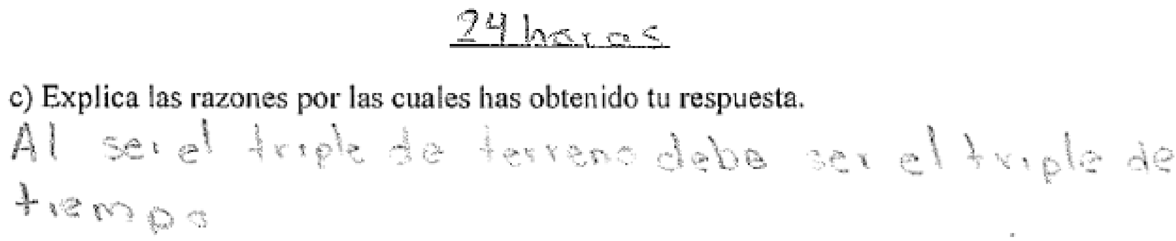
24 hrs

Sume solo las horas por el triple de crecimiento

Figura 43. Respuesta y explicación del estudiante B2 en el problema "agricultor" en el post-test.

A pesar de haber realizado correctamente la actividad de la propuesta didáctica, el estudiante se resiste y sigue utilizando la linealidad pues en el post-test aplica proporcionalidad nuevamente. Al igual que este estudiante, varios estudiantes estuvieron en una situación semejante pues durante las sesiones de la propuesta didáctica de área respondieron correctamente pero al momento de responder el post-test siguieron utilizando el modelo lineal.

El estudiante B16 responde el problema “agricultor” en el pre-test de la siguiente manera:


24 horas

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

Al ser el triple de terreno debe ser el triple de tiempo

Figura 44. Respuesta y explicación del estudiante B16 en el problema "agricultor" en el pre-test.

Menciona que: “*al ser el triple de terreno debe ser el triple de tiempo*”, es decir, aplica proporcionalidad para resolver el problema y obtener como solución 24 horas.

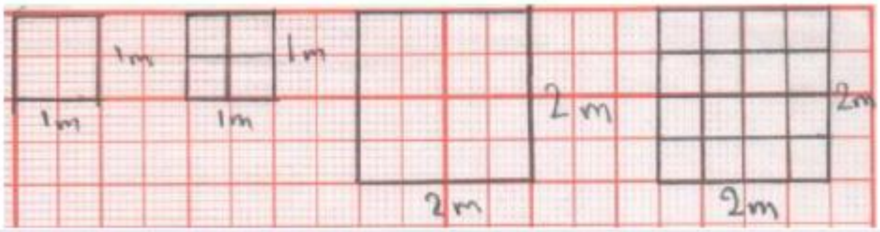
Ya en la propuesta didáctica, el estudiante responde de la siguiente forma

Responde de manera individual lo siguiente.

1.- Recientemente, un albañil colocó azulejos en una casa. Él necesitó 4 azulejos cuadrados para cubrir una parte de piso de una habitación que tenía forma cuadrada con lados de 1 metro. Otro piso de la casa también de forma cuadrada pero con lados de 2 metros necesita que le coloquen azulejos los cuales aún no se han comprado.

a) ¿Cuántos azulejos cuadrados necesitarán comprar? 16 azulejos

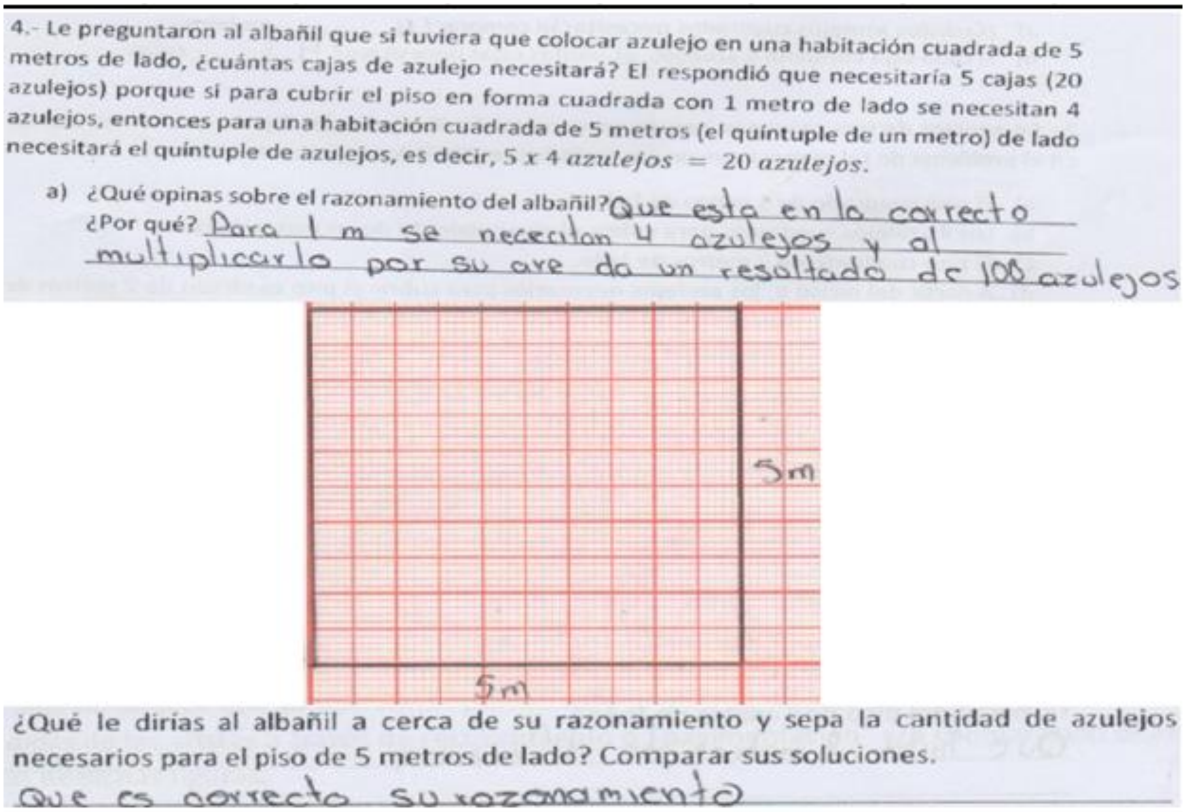
b) Si cada caja contiene 4 azulejos. ¿Cuántas cajas necesitará? 4 cajas



	Piso 1	Piso 2
¿Cuánto mide de lado?	1 metro	2 metros
¿Cuánto mide su perímetro?	4 metros	8 metros
¿Cuánto mide su área?	1 m^2	4 m^2
¿Cuántos azulejos se necesitaron para cubrir el área?	4 azulejos	16 azulejos

Figura 45. Conjeturas y respuestas del estudiante B16 durante la propuesta didáctica Área sesión uno, utilizando la figura original (piso cuadrado de un metro de lado).

Como ya se mencionó, se le proporcionó una hoja milimétrica a cada estudiante. Al parecer el estudiante B16 utilizó dicha hoja desde el principio pues al responder los incisos a y b del ejercicio 1, lo hizo correctamente. En los esquemas que el estudiante elaboró se observa que realiza un cuadrado para simular el piso de 1 metro de lado, inmediatamente a la derecha de éste vuelve a dibujar un cuadrado con las mismas dimensiones pero con la característica que lo divide en 4 partes posiblemente simulando los 4 azulejos que se requieren para cubrir la superficie antes mencionada, como si se tratara de una especie de "pavimentación", en el tercer esquema (de izquierda a derecha) que realizó el estudiante se puede observar que dibujó un cuadrado con el doble de longitud en las aristas con respecto del primero y por último realiza un cuadrado con las mismas dimensiones que el tercero pero lo divide en cuadrados más pequeños que simulan la cantidad de azulejos que necesita para cubrir dicha superficie. Con base en lo que realizó el estudiante completa la tabla que se muestra de manera correcta



4.- Le preguntaron al albañil que si tuviera que colocar azulejo en una habitación cuadrada de 5 metros de lado, ¿cuántas cajas de azulejo necesitará? El respondió que necesitaría 5 cajas (20 azulejos) porque si para cubrir el piso en forma cuadrada con 1 metro de lado se necesitan 4 azulejos, entonces para una habitación cuadrada de 5 metros (el quíntuple de un metro) de lado necesitará el quíntuple de azulejos, es decir, $5 \times 4\ azulejos = 20\ azulejos$.

a) ¿Qué opinas sobre el razonamiento del albañil? Que esta en lo correcto
¿Por qué? Para 1 m se nececitan 4 azulejos y al multiplicarlo por su are da un resoltado de 100 azulejos

5m

5m

¿Qué le dirías al albañil a cerca de su razonamiento y sepa la cantidad de azulejos necesarios para el piso de 5 metros de lado? Comparar sus soluciones.

Que es correcto su razonamiento

Figura 46. Conjeturas y respuestas del estudiante B16 durante la propuesta didáctica Área sesión uno, utilizando la figura ampliada (piso cuadrado de cinco metros de lado).

Al realizar algunos cuestionamientos sobre la cantidad de azulejos necesarios para cubrir un piso de una superficie cuadrada con 5 metros de lado se menciona que el albañil al cual hace alusión el problema, propone que se necesitarán 20 azulejos a lo cual el estudiante responde que es correcto, sin embargo, al pedirle al estudiante que justifique, él menciona que: “*si para 1 m se necesitan 4 azulejos y al multiplicarlo por su área da un resultado de 100 azulejos*”, lo cual es contradictorio con su primera respuesta, incluso se puede observar que el diagrama que el propone y con base en las particiones de los esquemas anteriores, éste es acorde al argumento que propone, pero posteriormente (en otro cuestionamiento) vuelve a mencionar que el razonamiento del albañil es correcto lo cual es contradictorio al argumento y esquema que el estudiante había propuesto previamente.

Finalmente, en el post-test el estudiante resuelve el problema “agricultor” de la siguiente manera.

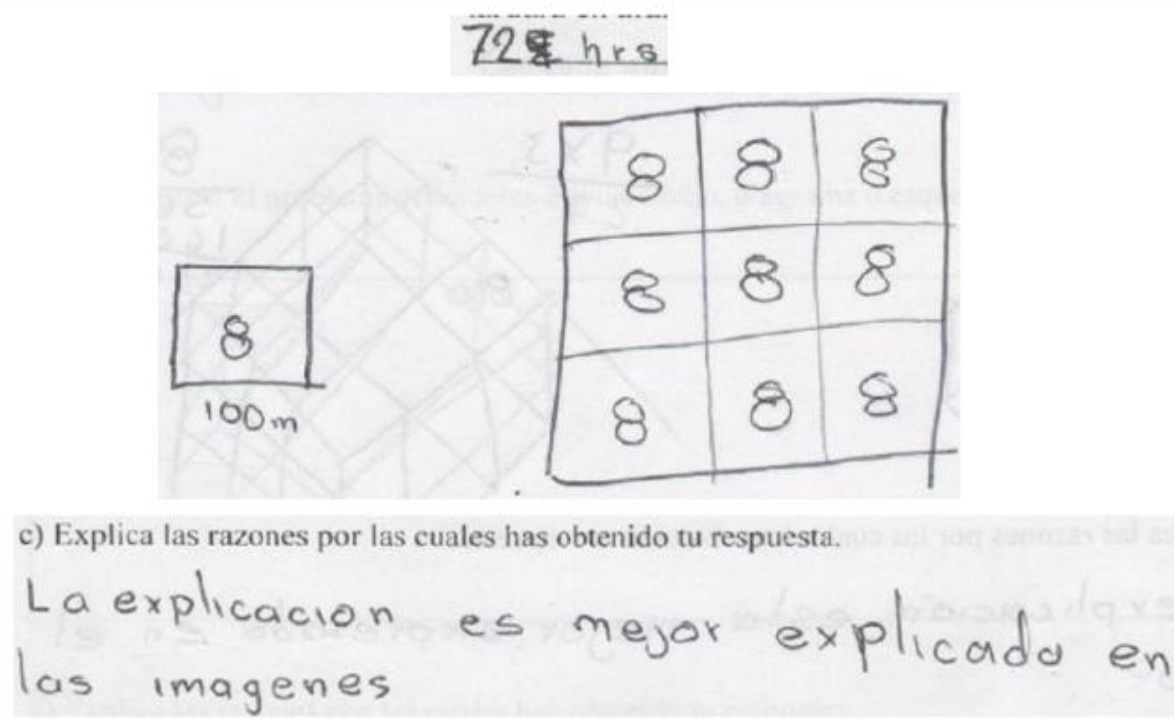


Figura 47. Respuesta, representación y explicación del estudiante B16 en el problema "agricultor" en el post-test.

El estudiante vuelve a realizar esquemas para apoyarse y responder el problema, se observa que primero realiza un cuadrado pequeño que simula el terreno de 100 m de lado y dentro de la figura coloca un 8, emulando que para arar ese terreno se necesitan 8 horas. Posteriormente, realizó otro esquema de un cuadrado con el triple de longitud en cada lado, luego realiza una especie de "pavimentación" pues realiza una partición en cuadrados más pequeños como los que se describen previamente y en cada uno de estos cuadrados más pequeños coloca un 8 simulando que en cada una de esas partes el agricultor se tardará 8 horas en arar el terreno, con base en ello el estudiante llega a la conclusión de que para el terreno ampliado necesitará 72 horas para ararlo, lo cual es correcto. Pudimos observar que el estudiante comenzó con un razonamiento lineal en el pre-test y a pesar de algunas contradicciones en la propuesta didáctica, el estudiante logró resolver el problema correctamente en el post-test utilizando diagramas.

5.3.4 Problema de volumen

Por último, se analiza en esta sección el problema "dados", pertenecientes a problemas de volumen. Para este problema se analizarán 2 casos, el estudiante B7 y B16

El estudiante B7 utiliza lo siguiente para resolver el problema antes mencionado en el pre-test.

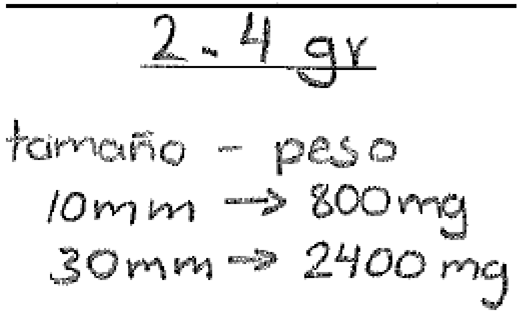
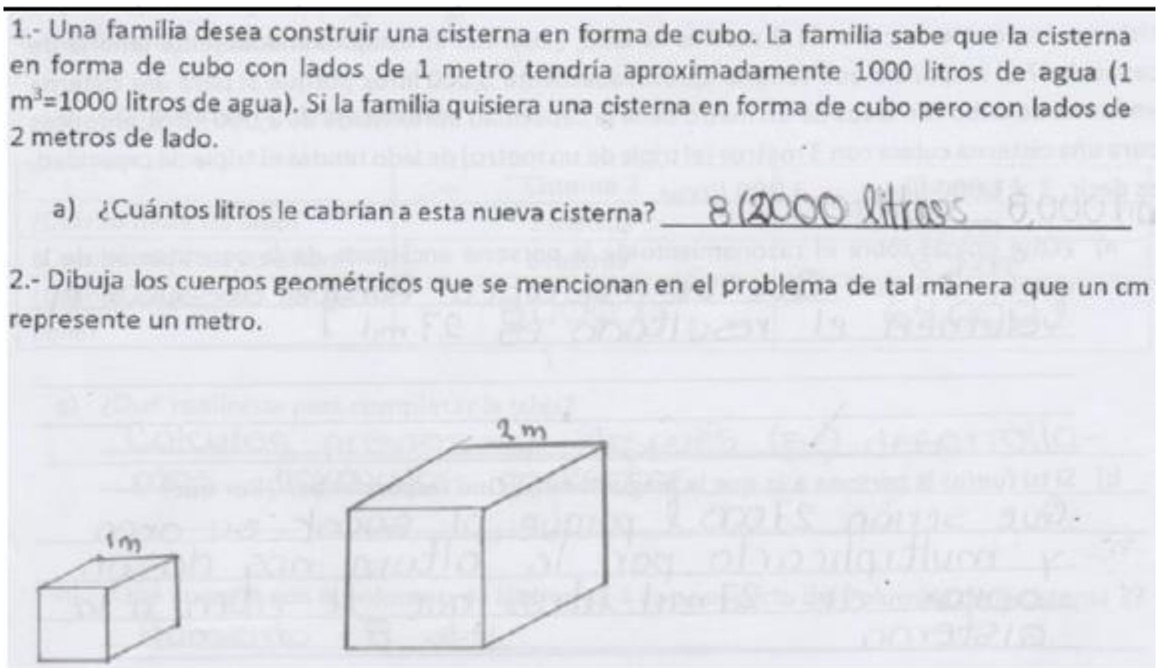


Figura 48. Respuesta y representación del estudiante B7 en el problema "dados" en el pre-test.

El estudiante claramente utiliza proporcionalidad por lo cual propone como resultado 2400 miligramos, lo que equivale a 2.4 gramos.

En la propuesta didáctica de la sesión 1, el estudiante realiza lo siguiente:



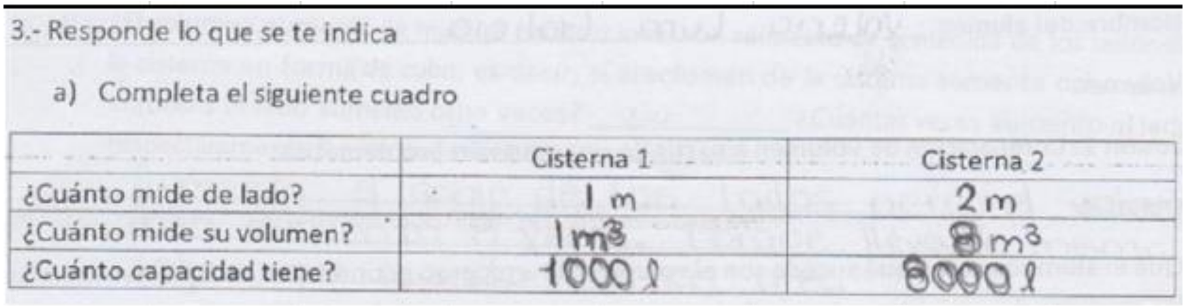
1.- Una familia desea construir una cisterna en forma de cubo. La familia sabe que la cisterna en forma de cubo con lados de 1 metro tendría aproximadamente 1000 litros de agua (1 m^3=1000 litros de agua). Si la familia quisiera una cisterna en forma de cubo pero con lados de 2 metros de lado.

a) ¿Cuántos litros le cabrían a esta nueva cisterna? 8(2000 litros

2.- Dibuja los cuerpos geométricos que se mencionan en el problema de tal manera que un cm represente un metro.

Figura 49. Conjeturas y representaciones del estudiante B7 durante la propuesta didáctica Volumen: sesión uno, a partir de una situación problemática (cubos de 1 y 2 metros de lado).

Se le propone una situación al estudiante en la cual se requiere saber la cantidad de agua que le cabe a una cisterna en forma de cubo que mide 2 metros de lado a partir de que se sabe que en una cisterna de la misma forma pero de 1 metro de lado contiene 1000 litros, a lo cual el estudiante responde 2000 litros, es decir, el estudiante piensa que si el lado de la figura crece al doble, entonces la cantidad de agua que contendrá será el doble, al parecer el estudiante se dio cuenta momentos después de que su respuesta no era la indicada por lo cual coloca un 8 (ocho) a un lado del 2000. Posteriormente, se les solicita que realicen los dibujos que simulan las cisternas mencionadas en el problema pero visualmente parecen prismas cuadrangulares, el fin de que esquematicen es para que visualicen el tamaño entre cada una y les ayude a razonar diferente.

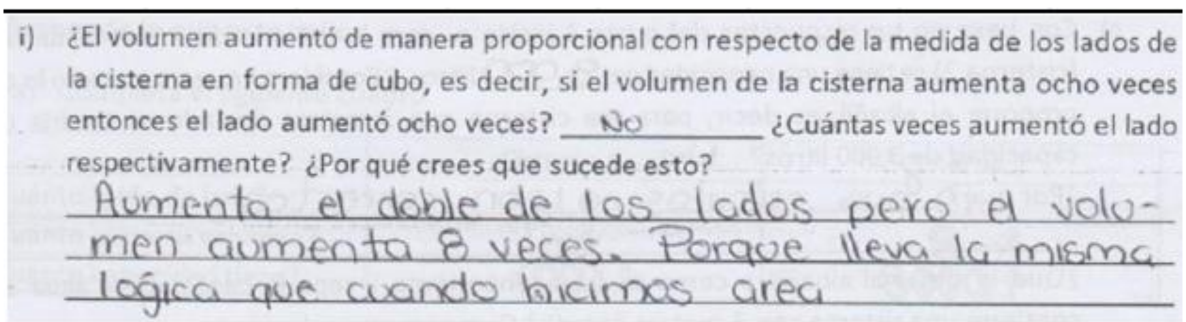

3.- Responde lo que se te indica

a) Completa el siguiente cuadro

	Cisterna 1	Cisterna 2
¿Cuánto mide de lado?	1 m	2 m
¿Cuánto mide su volumen?	1 m^3	8 m^3
¿Cuánto capacidad tiene?	1000 l	8000 l

Figura 50. Respuestas del estudiante B7 durante la propuesta didáctica Volumen: sesión uno, a partir de una situación problemática que requiere la comparación de características (cubos de 1 y 2 metros de lado).

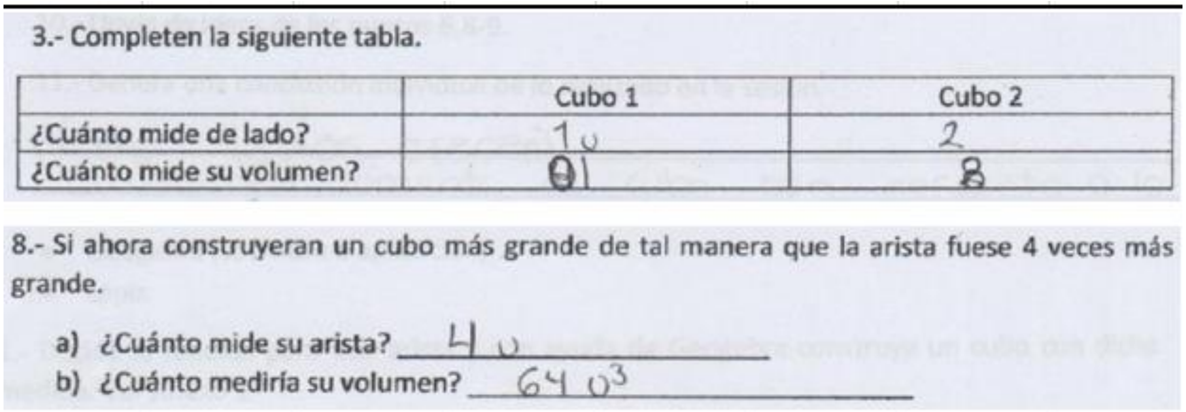
Luego se le solicita al estudiante que complete una tabla que corresponde a las medidas y capacidades de las cisternas mencionadas en los problemas lo cual responde correctamente. Posiblemente al momento de completar esta tabla el estudiante se da cuenta que la capacidad de la cisterna ampliada tiene una capacidad de 8000 litros y por ello coloca el 8 (ocho) en el inciso a de la situación inicial.


i) ¿El volumen aumentó de manera proporcional con respecto de la medida de los lados de la cisterna en forma de cubo, es decir, si el volumen de la cisterna aumenta ocho veces entonces el lado aumentó ocho veces? No ¿Cuántas veces aumentó el lado respectivamente? ¿Por qué crees que sucede esto?

Aumenta el doble de los lados pero el volumen aumenta 8 veces. Porque lleva la misma lógica que cuando hicimos area

Figura 51. Respuestas del estudiante B7 durante la propuesta didáctica Volumen: sesión uno, al analizar el volumen de un cubo a partir del aumento de sus lados.

Se le cuestiona al estudiante si el volumen es proporcional con respecto al aumento de la medida de los lados a lo que no y menciona que: "*aumenta al doble de los lados pero el volumen aumenta 8 veces Porque lleva la misma lógica que cuando hicimos área*", el estudiante observa que los lados si aumentan proporcionalmente, en este caso al doble pero no sucede lo mismo en el volumen pues aumenta 8 veces e incluso recuerda las sesiones de área y menciona que sucede algo semejante.



3.- Completen la siguiente tabla.

	Cubo 1	Cubo 2
¿Cuánto mide de lado?	1 u	2
¿Cuánto mide su volumen?	1	8

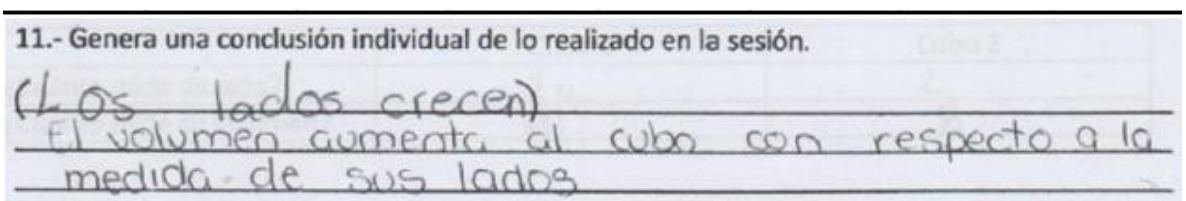
8.- Si ahora construyeran un cubo más grande de tal manera que la arista fuese 4 veces más grande.

a) ¿Cuánto mide su arista? 4 u

b) ¿Cuánto mediría su volumen? 64 u^3

Figura 52. Respuestas y conjeturas del estudiante B7 durante la propuesta didáctica Volumen: sesión tres, a partir de la construcción de cubos en Geogebra y la comparación de características.

En la sesión 3 de volumen se le pide al estudiante que construya un cubo con la cantidad de unidades que el estudiante desee con la ayuda de Geogebra y que después construya otro cubo con el doble de la medida de la arista del primer cubo. Luego se le pide que complete una tabla con base en las medidas de los cubos construidos, en este caso construyó un cubo de 1 unidad y de 2 unidades de lado para obtener de volumen 1 y 8 unidades cúbicas respectivamente lo cual es correcto. Después se le cuestiona al estudiante sobre qué sucedería si construyera un cubo 4 veces más grande con respecto del primero que construyó, el estudiante menciona correctamente que mediría 4 unidades de lado y por ende 64 unidades cúbicas de volumen.



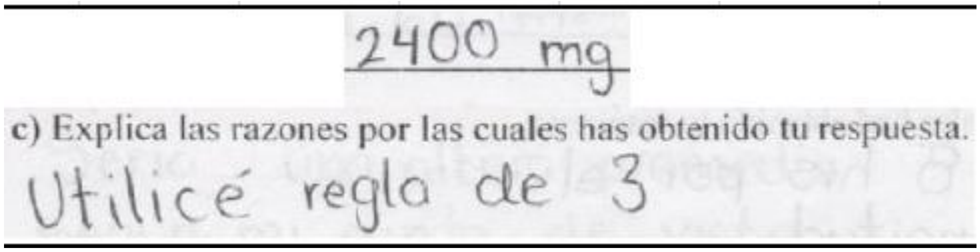
11.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

(Los lados crecen)
El volumen aumenta al cubo con respecto a la medida de sus lados

Figura 53. Conclusión del estudiante B7 durante la propuesta didáctica Volumen: sesión tres, a partir de la construcción de cubos en Geogebra.

Al finalizar de la sesión 3 se le pide al estudiante que genere una conclusión a lo cual menciona que: "*el volumen aumenta al cubo con respecto a la medida de sus lados*", al parecer el estudiante observó que a partir de la ampliación de los lados o aristas, el volumen crece el número de veces que crece el lado o arista pero desarrollado al cubo.

Ya en la aplicación del post-test el estudiante responde al problema de la siguiente manera:


2400 mg

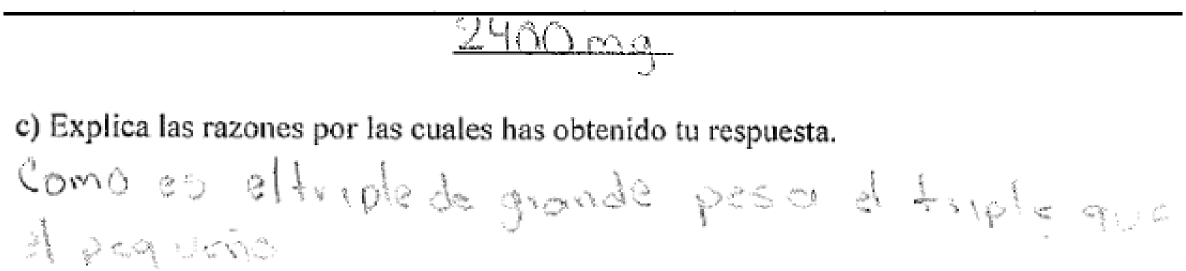
c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

Utilicé regla de 3

Figura 54. Respuesta y explicación del estudiante B7 en el problema "dados" en el post-test.

El estudiante a pesar de responder correctamente en varios partes de las sesiones de volumen, no sucede lo mismo al momento de responder el problema “dados” en el post-test pues menciona que utiliza “regla de tres” y su respuesta es 2400 mg, es decir, su razonamiento es lineal. Varios estudiantes estuvieron en una situación semejante a la de este estudiante pues durante las sesiones de la propuesta didáctica correspondiente respondieron correctamente pero al momento de responder el post-test se mostraron resistentes para cambiar de razonamiento y en su lugar siguieron utilizando el modelo lineal.

En el caso del estudiante B16 responde lo siguiente en el pre-test.


2400mg

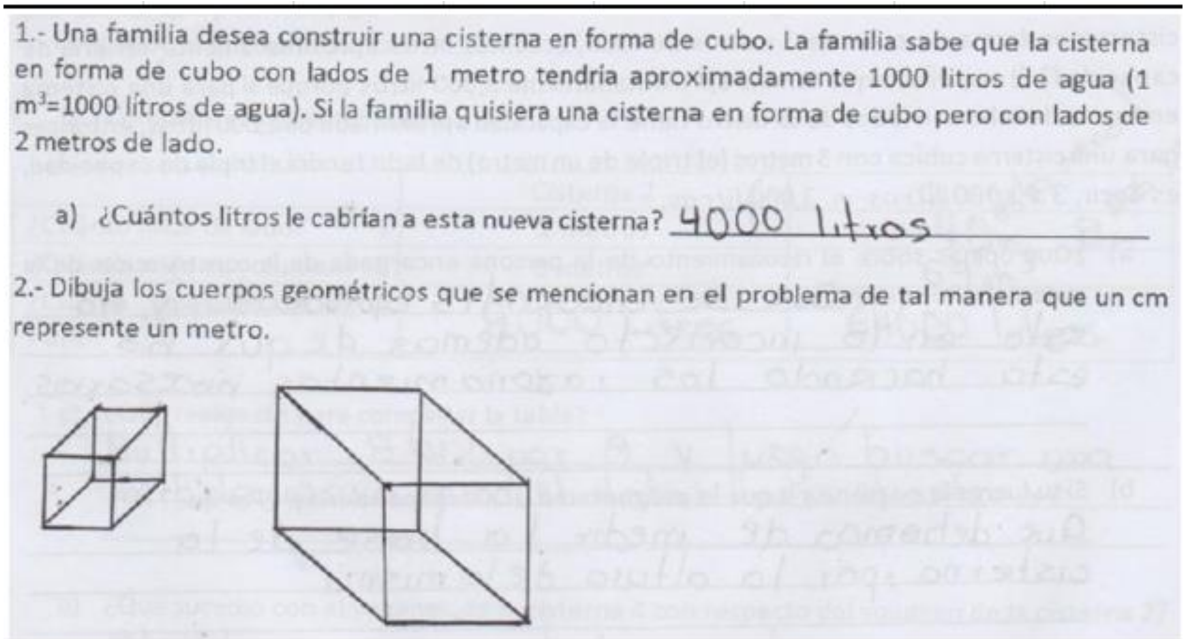
c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

Como es eltriple de grande peso el triple que el pequeño

Figura 55. Respuesta y explicación del estudiante B16 en el problema "dados" en el pre-test.

Como se muestra en la figura, el estudiante aplica proporcionalidad pues menciona que: “*como es el triple de grande pesa el triple que el pequeño*” y por lo tanto obtiene como resultado 2400 mg.

En la sesión 1 de la propuesta didáctica el estudiante responde de la siguiente forma.



1.- Una familia desea construir una cisterna en forma de cubo. La familia sabe que la cisterna en forma de cubo con lados de 1 metro tendría aproximadamente 1000 litros de agua (1 m^3=1000 litros de agua). Si la familia quisiera una cisterna en forma de cubo pero con lados de 2 metros de lado.

a) ¿Cuántos litros le cabrían a esta nueva cisterna? 4000 litros

2.- Dibuja los cuerpos geométricos que se mencionan en el problema de tal manera que un cm represente un metro.

Figura 56. Conjeturas y representaciones del estudiante B16 durante la propuesta didáctica Volumen: sesión uno, a partir de una situación problemática (cubos de 1 y 2 metros de lado).

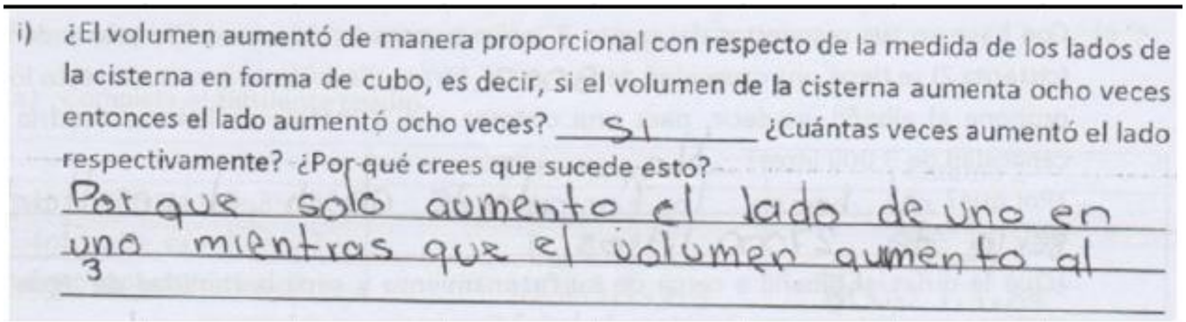
Al igual que en caso anterior, se le propone una situación en la cual se requiere saber la cantidad de agua que le cabe a una cisterna en forma de cubo que mide 2 metros de lado a partir de que se sabe que en una cisterna de la misma forma pero de 1 metro de lado contiene 1000 litros, a lo cual el estudiante responde 4000 litros, al parecer en este caso el estudiante cree que el volumen aumenta de igual manera que el área, es decir, el estudiante piensa que si el lado de la figura crece al doble, entonces la cantidad de agua que contendrá en este caso será el cuádruple. Posteriormente, se les solicita que realice los dibujos que simulan las cisternas mencionadas en el problema con el fin de que visualicen el tamaño entre una y otra, pero visualmente en lugar de cubos se observan prismas cuadrangulares.

a) Completa el siguiente cuadro

	Cisterna 1	Cisterna 2
¿Cuánto mide de lado?	1 m	2 m
¿Cuánto mide su volumen?	1 m^3	8 m^3
¿Cuánto capacidad tiene?	1000 litros	8000 litros

Figura 57. Respuestas del estudiante B16 durante la propuesta didáctica Volumen: sesión uno, a partir de una situación problemática que requiere la comparación de características (cubos de 1 y 2 metros de lado).

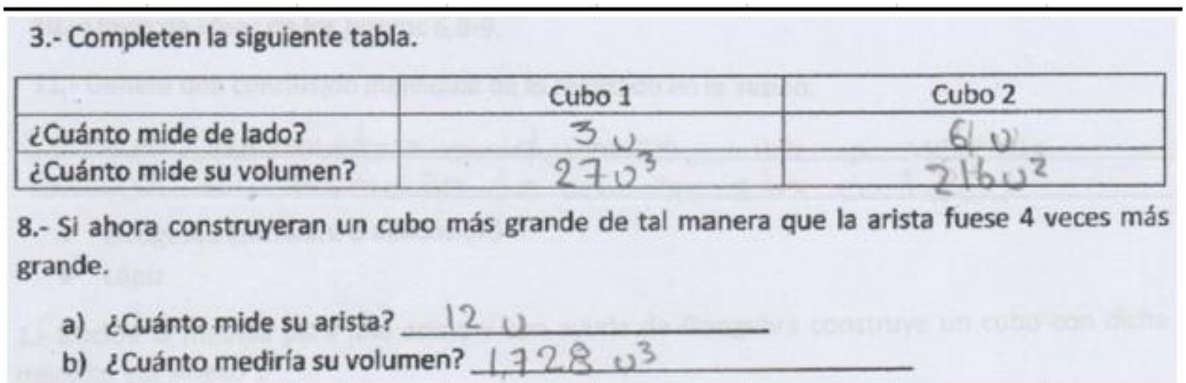
Después se le solicita al estudiante que complete una tabla que corresponde a las medidas y capacidades de las cisternas mencionadas, el estudiante completa correctamente la tabla y observa que lo que había respondido previamente no concuerda.


i) ¿El volumen aumentó de manera proporcional con respecto de la medida de los lados de la cisterna en forma de cubo, es decir, si el volumen de la cisterna aumenta ocho veces entonces el lado aumentó ocho veces? SI ¿Cuántas veces aumentó el lado respectivamente? ¿Por qué crees que sucede esto?

Porque solo aumento el lado de uno en uno mientras que el volumen aumento al 3

Figura 58. Respuestas del estudiante B16 durante la propuesta didáctica Volumen: sesión uno, al analizar el volumen de un cubo a partir del aumento de sus lados.

Se le cuestiona al estudiante si el volumen es proporcional con respecto al aumento de la medida de los lados a lo que sí, sin embargo, al justificar su respuesta menciona: "*porque solo aumentó el lado de uno en uno mientras que el volumen aumentó al cubo*", el estudiante observa que los lados si aumentan proporcionalmente pero no sucede lo mismo con el volumen pues menciona que aumenta al cubo.


3.- Completen la siguiente tabla.

	Cubo 1	Cubo 2
¿Cuánto mide de lado?	3 u	6 u
¿Cuánto mide su volumen?	27 u^3	216 u^2

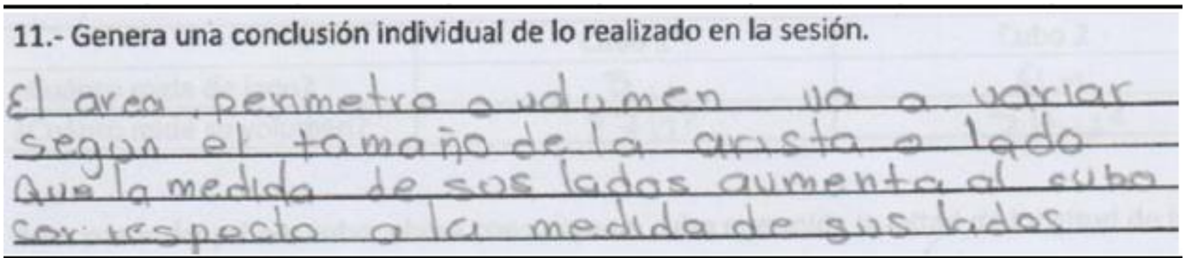
8.- Si ahora construyeran un cubo más grande de tal manera que la arista fuese 4 veces más grande.

a) ¿Cuánto mide su arista? 12 u

b) ¿Cuánto mediría su volumen? 1,728 u^3

Figura 59. Respuestas y conjeturas del estudiante B16 durante la propuesta didáctica Volumen: sesión tres, a partir de la construcción de cubos en Geogebra y la comparación de características.

En la sesión 3 de volumen se le solicita al estudiante que construya un cubo con la cantidad de unidades que el estudiante desee con la ayuda de Geogebra y que después construya otro cubo con el doble de la medida de la arista del primer cubo. Luego se le pide que complete una tabla con base en las medidas de los cubos construidos, en este caso construyó cubos de 3 y 6 unidades de lado para obtener de volumen 27 y 216 unidades cúbicas respectivamente, lo cual es correcto. Después se le cuestiona al estudiante sobre qué sucedería si construyera un cubo 4 veces más grande con respecto del primero que construyó, el estudiante menciona correctamente que mediría 12 unidades de lado y que el volumen será de 1728 unidades cúbicas.


11.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

El area, perimetro o volumen va a variar
segun el tamaño de la arista o lado
Que la medida de sus lados aumenta al cubo
con respecto a la medida de sus lados

Figura 60. Conclusión del estudiante B16 durante la propuesta didáctica Volumen: sesión tres, a partir de la construcción de cubos en Geogebra.

Al finalizar de la sesión 3 se le solicita al estudiante que genere una conclusión, a lo cual menciona que: "*el área, perímetro o volumen va a variar según el tamaño de la arista o lado. Que la medida de sus lados aumenta al cubo con respecto a la medida de sus lados*", el estudiante identifica que el área, perímetro y volumen se comportan de manera diferente cada uno cuando el lado de la figura aumenta o disminuye. La siguiente parte es un poco confusa pues menciona que la medida de los lados aumenta al cubo con respecto a la medida de sus lados, posiblemente se refiere a que para obtener el volumen se requiere la cantidad de veces que aumenta o disminuye la figura desarrollada al cubo.

Ya en la aplicación del post-test el estudiante responde al problema de la siguiente manera:

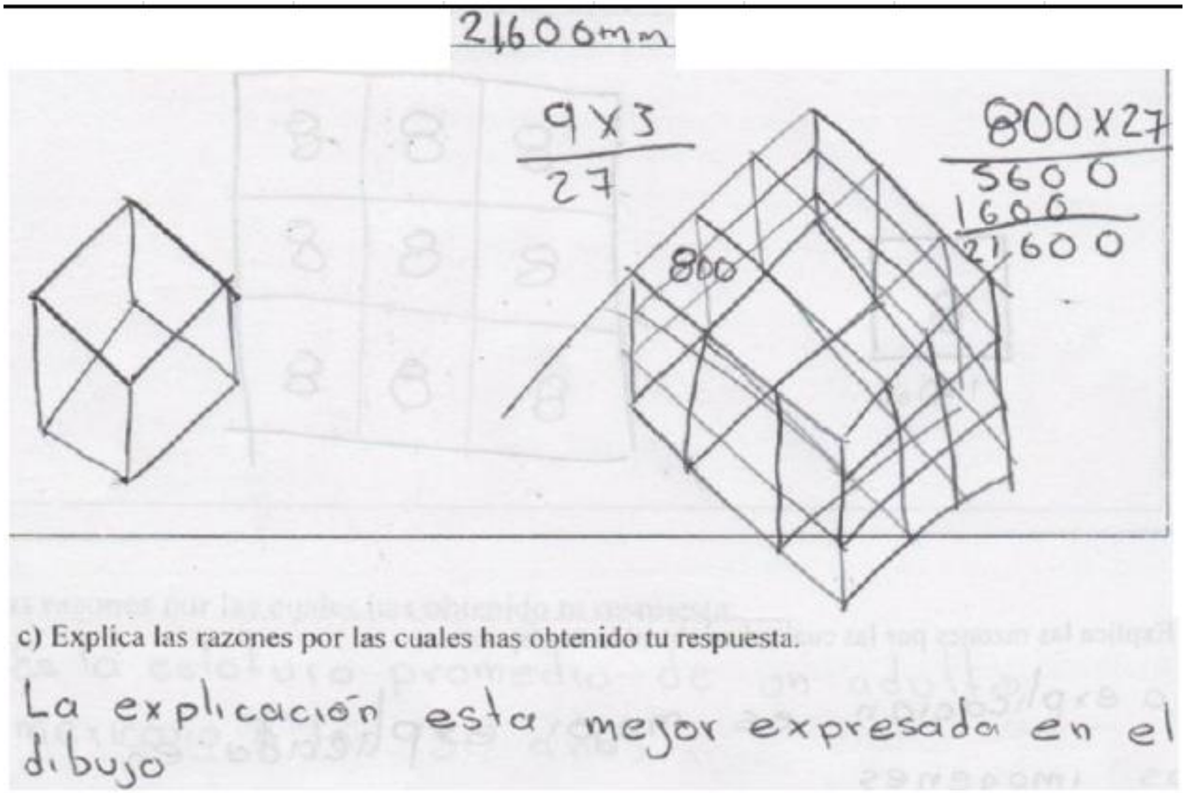


Figura 61. Respuesta, representación y explicación del estudiante B16 en el problema "dados" en el post-test.

El estudiante respondió correctamente al problema “dados” en el post-test. El estudiante realizó algunos esquemas que simulan el dado de 10 mm y el de 30 mm, se percató que si la longitud del dado pequeño crece al triple, entonces su volumen crecerá 27 veces, incluso el estudiante hace una especie de “pavimentación” de los dados pequeños con respecto del grande pues realiza particiones en el cubo aumentado y como ya se mencionó, el estudiante observa que el dado pequeño cabe 27 veces en el dado grande por lo cual posteriormente multiplica la cantidad de veces que aumentó el volumen por el peso del dado pequeño y así obtener la respuesta correcta a este problema ($27x800 = 21600$).

En general, como pudimos observar en los diferentes ejemplos de seguimiento puntual de algunos alumnos, no en todos los casos surtió efecto la propuesta didáctica pues aunque los estudiantes realizaban y respondían de forma correcta las actividades propuestas, ellos se resistían a cambiar de razonamiento al momento de responder el post-test e incurrían nuevamente en el modelo lineal sobre todo en los problemas pertenecientes a área y volumen donde la cantidad de estudiantes que lograron responder correctamente fue pequeña. En el caso de los problemas constantes y falta de autenticidad los estudiantes presentaron un avance más sustancial posiblemente porque no intervienen figuras geométricas en lo que se propuso en esta investigación.

Conclusiones

En este apartado se presentan las conclusiones a las que se llegaron a lo largo de este proceso de investigación de: “la ilusión de la linealidad: el análisis de una propuesta didáctica en estudiantes de bachillerato”. De acuerdo con los resultados obtenidos podemos decir que la mayoría de los estudiantes se encontraban en la ilusión de la linealidad como se pudo observar en el pre-test.

En el pre-test se pudo observar también que, en el grupo A, el problema donde mayoritariamente se presenta la ilusión de la linealidad es en uno con falta de autenticidad, en específico, en el problema “La corredora”, pues casi todos los estudiantes utilizaron el modelo lineal para resolverlo, incluso, fue el que más utilizó dicho modelo para resolverlo. Dentro de este grupo, también se presentó una fuerte tendencia para aplicar el modelo lineal en los problemas de área, volumen y constante (“temperatura del agua”). Cabe mencionar también que estos alumnos utilizaron menos el modelo lineal en el problema “altura de los mexicanos”.

Para el caso del grupo B sucedió algo semejante al grupo anterior, pues en este grupo se aplicó con mayor frecuencia la linealidad en problemas de área (“pintor”), volumen (“dados”) y falta de autenticidad (“corredor”), sin embargo, el problema “altura de los mexicanos” fue en el que se utilizó más el modelo lineal de entre los tres grupos. En este grupo también se presentó con mayor frecuencia el uso del modelo lineal para el problema “toallas” y “dados”, en éste último, todos los estudiantes utilizaron dicho modelo y fue el único problema donde sucedió ello.

En el grupo C se utilizó con maxyor frecuencia el modelo lineal en diferentes tipos de problema, de tipo constante (“temperatura del agua”), área (“pintor” y “agricultor”) y volumen (“dados”) en comparación con los otros grupos. Incluso, casi la totalidad de los estudiantes utilizaron el modelo lineal pues solo faltó un estudiante de este grupo para que ello se llevara a cabo.

No todos los estudiantes cayeron en la ilusión de la linealidad en el pre-test, sin embargo, lo anterior no indica que los estudiantes que no aplicaron el modelo lineal tengan un razonamiento apropiado, es decir, algunos estudiantes que utilizaron razonamiento lineal estuvieron en otras categorías como: realiza operaciones diversas, proporcionalidad inversa, utiliza procedimiento confuso o, en su defecto, no respondieron el problema.

Dentro de los problemas con falta de autenticidad en el problema “corredora” se utilizó más el modelo lineal que en el problema “altura de los mexicanos” en el pre-test, posiblemente porque en este último los estudiantes presentan una mayor disposición a utilizar sus conocimientos del mundo real o de su entorno pues fue el problema que mayor repuestas no lineales tuvo de entre todos los problemas los alumnos al parecer se pudieron percatar que el uso del modelo lineal no era adecuado pues al utilizar dicho modelo la repuesta obtenida era excesiva para ser la altura de los mexicanos (3.9 metros) caso contrario al problema “corredora” pues en él parece que los estudiantes “suspenden” su conocimiento del mundo al no tomar factores como el cansancio o el rendimiento.

Dentro de los problemas de tipo constante en el que mayor cantidad de estudiantes utilizaron razonamiento lineal en el pre-test fue en el problema “temperatura del agua”, incluso, en este problema hubo cierta particularidad pues fue el único problema en el pre-test en el cual 3 estudiantes utilizaron proporcionalidad inversa y respondieron que la temperatura para 1000 mililitros de agua es de 10 °C. En el problema “toallas” es el problema donde los estudiantes presentaron mayor disposición a utilizar sus conocimientos del mundo real o de su entorno pues fue el problema que mayor cantidad de repuestas no lineales adecuadas hubo de entre todos los problemas.

En los problemas de área fue en los que más se utilizó el razonamiento lineal en el pre-test pues resolvieron dicho problema con proporcionalidad o “regla de tres”, cabe señalar que ningún estudiante se percató que si el dibujo crece en una dimensión (largo por ejemplo) entonces también tiene que crecer en la otra dimensión (ancho) la misma cantidad de veces, en específico, si crecía en una dimensión 3 veces, en la otra también tiene que crecer 3 veces (para guardar uniformidad en el nuevo dibujo, de lo contrario estaría “deforme”), es decir, sería 9 veces más grande que el original, por lo tanto, necesitaría aproximadamente 9 veces más de pintura (54 mililitros). En el problema “agricultor” sucedió algo semejante que en el problema anterior, pues si se considera un terreno 3 veces más grande y se debe de conservar la misma figura (cuadrado) entonces debe de crecer 3 veces del otro lado, es decir, sería 9 veces más grande que el original, por lo tanto, necesitaría aproximadamente 9 veces más de tiempo (72 horas), en este problema, de entre todos los estudiantes solo uno logró responder de manera correcta este problema.

El problema de volumen fue el problema en el que más se utilizó el modelo lineal en el pre-test de entre todos los problemas. Al igual que en los problemas de área, solo un estudiante se percató que al ser el cubo una figura tridimensional y cada arista crece 3 veces entonces en total crecerá 27 veces, es decir, el cubo con mayores dimensiones es 27 veces más grande con respecto del primero, por lo tanto, el peso del cubo más grande sería de aproximadamente 21600 miligramos. El estudiante que resolvió correctamente este problema es el mismo que resolvió correctamente el problema “agricultor”.

También pudimos observar en los diferentes ejemplos de seguimiento puntual que no en todos los estudiantes surtió un efecto positivo la propuesta didáctica pues aunque los estudiantes realizaban y respondían de forma correcta las actividades propuestas de dicha propuesta didáctica, ellos se resistían volvieron a utilizar razonamiento lineal al momento de responder el post-test e incurrían nuevamente en el modelo lineal sobre todo en los problemas pertenecientes a área y volumen donde la cantidad de estudiantes que lograron responder correctamente fue pequeña. Sin embargo, a pesar de que hubo bastante resistencia para cambiar de razonamiento en los problemas de área y volumen, resulta que en los problemas constantes y falta de autenticidad los estudiantes presentaron un avance significativo y sustancial posiblemente porque estos problemas están más cerca de su realidad.

Se pudo observar después de aplicar la propuesta didáctica que el grupo al cual se le aplicó dicha propuesta (grupo B) tuvo cierta mejoría en comparación a los otros dos grupos (A y C) pues algunos estudiantes optaron por no utilizar el modelo lineal para resolver los problemas, la menor cantidad de estudiantes que resuelven los problemas con dicho modelo se presenta en el grupo B.

Después de aplicar el post-test, en los grupos A y C se observó que las respuestas aún estaban “cargadas” o acumuladas en la categoría Razonamiento lineal, es decir, en estos grupos predominó el uso del modelo lineal para resolver los problemas propuestos. Sin embargo, existen algunas excepciones, a los grupos a los cuales no se les aplicó la propuesta didáctica tuvieron un cambio al momento de resolver los problemas “altura de los mexicanos” y “toallas” (pertenecientes a problemas con falta de autenticidad y constantes respectivamente) pues la mayor parte de las respuestas se encuentran en la categoría Razonamiento no lineal, es decir, en estos problemas la mayoría de los estudiantes de estos grupos no creyeron apropiado el modelo lineal para dar solución y, posiblemente pusieron en práctica sus conocimientos o experiencias del mundo real para proporcionar una solución apropiada o al menos cercana a ella.

Cabe señalar que en los problemas “corredora”, “dados”, “pintor” y “agricultor” pertenecientes a problemas con falta de autenticidad, volumen y área respectivamente son los problemas en los que se siguió utilizando con mayor frecuencia el modelo lineal en los tres diferentes grupos.

Se puede observar también que al grupo al que se le aplicó la propuesta didáctica (grupo B), este tipo de razonamiento (lineal) no se erradicó totalmente, pues al menos un estudiante utilizó el modelo lineal en cada uno de los problemas.

Los estudiantes de los diferentes grupos tuvieron un avance con respecto a sus respuestas en al menos un problema, independientemente de haber recibido o no la aplicación de la propuesta didáctica pues como ya se mencionó, en el pre-test la mayoría de los alumnos utilizaron razonamiento lineal mientras que en el pos-test tal parece que los alumnos utilizaron sus conocimientos del mundo para dar solución a dichos problemas. Al parecer en el problema “altura de los mexicanos” fue más evidente la falta de autenticidad del problema pues aumentó la cantidad de estudiantes que tuvieron razonamiento no lineal.

Con base en lo anterior se puede observar que los estudiantes de los diferentes grupos tuvieron un avance con respecto a sus respuestas en ambos problemas, independientemente de haber recibido o no la aplicación de la propuesta didáctica pues en el pre-test se puede observar como la mayoría de los alumnos utilizaron el razonamiento lineal mientras que en el pos-test tal parece que los alumnos utilizaron sus conocimientos del mundo para dar solución a dichos problemas.

En los problemas pertenecientes a área los estudiantes presentaron mayor dificultad para resolverlos. Aunque se aplicó la propuesta didáctica, muy pocos de los estudiantes pudieron erradicar la ilusión de la linealidad a pesar de que se hayan utilizado una mayor cantidad de sesiones que las que se utilizaron para los problemas de tipo falta de autenticidad y constante. Los pocos estudiantes que lograron erradicar la ilusión de la linealidad solo lo consiguieron en el problema “agricultor”. Al parecer el tipo de figura desempeñó un papel importante en la resolución de este tipo de problemas pues algunos estudiantes realizaron esquemas, en el problema “pintor” algunos estudiantes que realizaron dichos esquemas no percibieron que la figura crecía tanto en largo como en ancho para que la figura no se distorsionara, sin embargo, en el problema “agricultor” estos esquemas fueron de gran utilidad pues los estudiantes que lograron resolver correctamente utilizaron este recurso y se pudieron percatar que el terreno ampliado era 9 veces mayor que el más pequeño, lo anterior debido a que la figura a la que se hace referencia en el problema es una figura regular.

En el problema perteneciente a volumen los estudiantes presentaron bastantes dificultades. A pesar de que se aplicó la propuesta didáctica, muy pocos de los estudiantes pudieron erradicar la ilusión de la linealidad a pesar de que se haya dado también un fuerte énfasis en este tipo de problemas al igual que los de área, pues se utilizaron una mayor cantidad de sesiones que en otro tipo de problemas. Aquí los esquemas realizados por los estudiantes también desempeñaron un papel importante en la resolución de este tipo de problemas pues los estudiantes que lograron resolverlo correctamente utilizaron este recurso y se pudieron percatar que el cubo ampliado era 27 veces más grande que el más pequeño. Con base en esto pudimos percatarnos que en los problemas de área y de volumen existe una mayor resistencia por parte de los estudiantes para dejar de utilizar el modelo lineal o proporcionalidad que en otro tipo de problemas.

En el problema “castillo” perteneciente a modelo lineal, se pensaba en un principio que los estudiantes a los cuales se les aplicó la propuesta didáctica abusarían de la no linealidad después de ser aplicada, sin embargo, la cantidad de alumnos permanece prácticamente igual pues la cantidad de estudiantes que utilizaron el modelo lineal o proporcional en el pre-test casi fueron los mismos que en el post-test. Solo un par de estudiantes del grupo donde se aplicó la propuesta didáctica comenzaron a “abusar” de la no linealidad debido a que en este problema no lograron percibir que aquí si era necesario utilizar el modelo lineal, es decir, la aplicación de la propuesta didáctica si tuvo algún efecto en estos estudiantes para que en el post-test utilizaran razonamiento no lineal en el problema donde se tenía que aplicar razonamiento lineal.

En los diferentes grupos hubo un avance con respecto a la resolución de problemas no lineales pero en el grupo al cual se le aplicó la propuesta didáctica hubo una mayor mejoría, es decir, la propuesta didáctica tuvo un impacto positivo en los estudiantes, en especial, en los problemas de tipo constante y falta de autenticidad. En los problemas de área y volumen, a pesar de que la cantidad de estudiantes que lograron resolver los problemas no lineales fue pequeña, la propuesta didáctica influyó para que esos alumnos pudieran tener otro tipo de razonamiento. Cabe mencionar que si bien la propuesta didáctica tuvo un impacto positivo, no se pudo erradicar totalmente la ilusión de la linealidad en ninguno de los diferentes tipos de problema.

Referencias bibliográficas

Block, D., Mendoza, T. y Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica.* México: SM.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). Action research. En L. M. Cohen, *Research Methods in Education* (págs. 297-316). New York: Routledge.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2002). Improper Use of Linear Reasoning: An In-Depth Study of the Nature and the Irresistibility of Secondary School Students' Errors. *Educational Studies in Mathematics, 50*(3), 311-334.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement.* New York: Springer.

Fernández J., Elortegui, N., Moreno, T. y Rodríguez, J. F. (1999). *¿Cómo hacer unidades didácticas inovadoras?* Sevilla: Díada.

Juárez, J. A., Mejía, A., González A. y Slisko, J. (2014). La construcción del modelo situacional de un problema matemático: El análisis basado en el Marco del Experimentador Inmerso. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 87*, 81-99.

Palm, T. (2009). Theory of authentic task situations. En L. G. Verschaffel, *Words and Worls: Modelling Verbal Descriptions of Situations* (págs. 3-20). Rotterdan, The Netherlands: Sense Publisher.

Tobón, S., Pimienta, J. H. y García, J. A. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación en competencias.* Edo de México: Pearson.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The Illusion of Linearity: Expanding the Evidence towards Probabilistic Reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 53*(2), 113-138.

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M. y Verschaffel, L. (2009). Students' Overuse of Proportionality on Missing-Value Problems: How Numbers May Change Solutions. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(2), 187-211.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2005). Not Everything Is Proportional: Effects of Age and Problem Type on Propensities for Overgeneralization. *Cognition and Instruction*, *23*(1), 57-86.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2008). The Linear Imperative: An Inventory and Conceptual Analysis of Students' Overuse of Linearity. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(3), 311-342.

Anexo 1

Nombre: ____

Edad: años _____ meses_____ Grupo: _______________

Lee cada uno de los problemas e intenta resolverlos.

1.- El mejor tiempo de Alicia para correr 100 metros es de 16 segundos. ¿Cuánto tiempo le llevará correr 1000 metros?

____

b) Si para resolver el problema consideras útil un dibujo, diagrama o esquema, utiliza el recuadro de abajo.

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

d) Con base en la escala de valores, califica por favor marcando con "X" ¿Cómo consideras al problema?

60% COMPLEJO	70% DIFICIL	80% SIMPLE	90% FÁCIL	100% SUMAMENTE SENCILLO

2.- Si 500 ml de agua se encuentran a 20℃ en el ambiente. ¿Qué temperatura tendrán 1000 ml de agua?

____

b) Si para resolver el problema consideras útil un dibujo, diagrama o esquema, utiliza el recuadro de abajo.

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

d) Con base en la escala de valores, califica por favor marcando con “X” ¿Cómo consideras al problema?

60% COMPLEJO	70% DIFICIL	80% SIMPLE	90% FÁCIL	100% SUMAMENTE SENCILLO

3.- Ricardo necesita 10 minutos para cavar una zanja alrededor de un castillo de arena cuadrado cuyo lado mide 50 cm. ¿Cuánto tiempo se necesita aproximadamente para cavar una zanja alrededor de un castillo de arena cuadrado de 150 cm de lado?

____

b) Si para resolver el problema consideras útil un dibujo, diagrama o esquema, utiliza el recuadro de abajo.

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

d) Con base en la escala de valores, califica por favor marcando con “X” ¿Cómo consideras al problema?

60% COMPLEJO	70% DIFICIL	80% SIMPLE	90% FÁCIL	100% SUMAMENTE SENCILLO

4.- Luis es un pintor publicitario. En los últimos días, tuvo que pintar las decoraciones de varias ventanas de una tienda. Ayer hizo un dibujo de 56 cm de altura de Bart Simpson en la puerta de una tienda de regalos. Necesitó 6 ml de pintura. Ahora se le pide hacer una versión ampliada del mismo dibujo en una ventana de una tienda de videojuegos. Esta copia debe ser de 168 cm de alto. ¿Qué cantidad de pintura necesitará aproximadamente Luis para hacerlo?

____

b) Si para resolver el problema consideras útil un dibujo, diagrama o esquema, utiliza el recuadro de abajo.

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

d) Con base en la escala de valores, califica por favor marcando con “X” ¿Cómo consideras al problema?

60% COMPLEJO	70% DIFICIL	80% SIMPLE	90% FÁCIL	100% SUMAMENTE SENCILLO

5.- Mamá puso 3 toallas en el tendedero. Después de 12 horas estaban secas. La abuela puso 6 toallas en el tendedero. ¿Cuánto tiempo les toma secarse?

____

b) Si para resolver el problema consideras útil un dibujo, diagrama o esquema, utiliza el recuadro de abajo.

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

d) Con base en la escala de valores, califica por favor marcando con “X” ¿Cómo consideras al problema?

60% COMPLEJO	70% DIFICIL	80% SIMPLE	90% FÁCIL	100% SUMAMENTE SENCILLO

6.- Los mexicanos miden a los 10 años aproximadamente 1.30 m. ¿Cuánto medirán a los 30 años?

____

b) Si para resolver el problema consideras útil un dibujo, diagrama o esquema, utiliza el recuadro de abajo.

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

d) Con base en la escala de valores, califica por favor marcando con “X” ¿Cómo consideras al problema?

☹	😐	😐	☺	☺
60% COMPLEJO	70% DIFICIL	80% SIMPLE	90% FÁCIL	100% SUMAMENTE SENCILLO

7.- Un agricultor se tarda 8 horas en arar un terreno cuadrado de 100 m de lado. ¿Cuánto tardará en arar un terreno de la misma forma pero con el triple de longitud?

____

b) Si para resolver el problema consideras útil un dibujo, diagrama o esquema, utiliza el recuadro de abajo.

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

d) Con base en la escala de valores, califica por favor marcando con “X” ¿Cómo consideras al problema?

60% COMPLEJO	70% DIFICIL	80% SIMPLE	90% FÁCIL	100% SUMAMENTE SENCILLO

8.- En su caja de juguetes, María tiene dados en varios tamaños. El más pequeño mide 10 mm de lado y tiene un peso de 800 mg. ¿Cuál sería el peso de un dado más grande cuyo lado mide 30 mm?

b) Si para resolver el problema consideras útil un dibujo, diagrama o esquema, utiliza el recuadro de abajo.

c) Explica las razones por las cuales has obtenido tu respuesta.

d) Con base en la escala de valores, califica por favor marcando con “X” ¿Cómo consideras al problema?

60% COMPLEJO	70% DIFICIL	80% SIMPLE	90% FÁCIL	100% SUMAMENTE SENCILLO

Anexo 2

Propuesta didáctica

Con base en los resultados obtenidos en el instrumento y parte de la literatura se diseñó la siguiente propuesta didáctica:

Área

Sesión 1: Recubrimiento (“pavimentación”) de áreas de situaciones problemáticas.

Objetivo:

Que el alumno analice qué sucede con el perímetro y el área de figuras cuadradas al hacer variar las medidas de las aristas a través de recubrimiento o “pavimentación” y/o comparación de las medidas de dichas figuras.

Conocimientos previos:

- Figura geométrica
- Cuadrado
- Medida
- Perímetro
- Área

Material

- Hojas de papel milimétrico
- Lápiz
- Tijeras
- Regla

Responde de manera individual lo siguiente.
1.- Recientemente, un albañil colocó azulejos en una casa. Él necesitó 4 azulejos cuadrados para cubrir una parte de piso de una habitación que tenía forma cuadrada con lados de 1 metro. Otro piso de la casa también de forma cuadrada pero con lados de 2 metros necesita que le coloquen azulejos los cuales aún no se han comprado.

a) ¿Cuántos azulejos cuadrados necesitarán comprar? __________ azulejos
b) Si cada caja contiene 4 azulejos. ¿Cuántas cajas necesitará? __________ cajas

2.- En equipos de tres personas, construyan en papel milimétrico las figuras que se mencionan en el problema de tal manera que un cm en la hoja milimétrica represente un metro.

a) El piso cuadrado de 1 metro de lado.
b) Los 4 azulejos cuadrados para cubrir el piso cuadrado de un metro de lado.
c) El piso cuadrado de 2 metros de lado.
d) A partir del inciso b, los azulejos necesarios para cubrir el piso cuadrado de 2 metros de lado.

3.- Responde lo que se te indica

a) Completa el siguiente cuadro

	Piso 1	Piso 2
¿Cuánto mide de lado?		
¿Cuánto mide su perímetro?		
¿Cuánto mide su área?		
¿Cuántos azulejos se necesitaron para cubrir el área?		

b) ¿Qué sucede con el perímetro del cuadrado al hacer crecer sus lados?
____
____

¿El perímetro crece de manera proporcional con respecto al aumento de sus lados, es decir, si los lados del cuadrado aumentan al triple entonces el perímetro aumenta el triple? ________ ¿Por qué? ____

____

c) ¿Qué sucede con el área del cuadrado al hacer crecer sus lados?

____

____

¿El área crece de manera proporcional con respecto al aumento de sus lados, es decir, si los lados del cuadrado aumentan al triple entonces el área aumenta el triple? __________ ¿Por qué? ____

____

4.- Le preguntaron al albañil que si tuviera que colocar azulejo en una habitación cuadrada de 5 metros de lado, ¿cuántas cajas de azulejo necesitará? El respondió que necesitaría 5 cajas (20 azulejos) porque si para cubrir el piso en forma cuadrada con 1 metro de lado se necesitan 4 azulejos, entonces para una habitación cuadrada de 5 metros (el quíntuple de un metro) de lado necesitará el quíntuple de azulejos, es decir, $5\ x\ 4\ azulejos\ = 20\ azulejos$.

a) ¿Qué opinas sobre el razonamiento del albañil?__________________________________ ¿Por qué? _________________

____

Si tu fueras la persona a la que le preguntaran. ¿Qué responderías?
__________________ ¿Por qué? ____

____

b) Con base en tus respuestas del punto 3 inciso a, para el piso de 2 metros de lado se necesitan ______ azulejos. ¿Consideras que es correcto lo que propone el albañil, es decir, para el piso con 5 metros de lado necesitaría 20 azulejos? ____________
¿Por qué? ____

____

¿Qué le dirías al albañil a cerca de su razonamiento y sepa la cantidad de azulejos necesarios para el piso de 5 metros de lado? Comparar sus soluciones.

____

____

____

5.- Tiempo después, el albañil fue contratado nuevamente para colocar azulejos en otro piso cuadrado. Los dueños saben que se necesitan 4 azulejos cuadrados para cubrir piso cuadrado con lados de 1 metro por lo cual compraron 15 cajas con azulejos.

a) Sin romper o fragmentar los azulejos ¿Cuáles son las posibles medidas del piso (cuadrado) que se desea cubrir? ____
____
____

A partir de lo mencionado en el problema, el albañil pensó en dos posibles opciones para el piso cuadrado al que se le iban a colocar los azulejos.

- Opción uno: que sobrarán 11 azulejos
- Opción dos: faltará una caja con azulejos.

6.- Responde lo que se te indica

a) Completa el siguiente cuadro

	Piso cuadrado	Opción 1	Opción 2
Total de azulejos necesarios para cubrir el piso	4		
Azulejos necesarios para cubrir cada lado	2		
¿Cuánto mide de lado?	1 m		
¿Cuánto mide su perímetro?	4 m		
¿Cuánto mide su área?	1 m^2		

b) ¿Qué realizaste para completar la tabla?
____
____
____
____

c) ¿Qué sucedió con el perímetro y el área de las dos opciones que pensó el albañil con respecto del piso de 1 metro de lado?

____

____

d) ¿El perímetro del piso creció de manera proporcional con respecto del cuadrado de 1 metro de lado al aumentar la medida de los lados? ____________________ ¿Cuántas veces creció respectivamente? ____________________________________

e) ¿El área del piso creció de manera proporcional con respecto del cuadrado de 1 metro de lado al aumentar la medida de los lados, es decir, el área aumenta al doble cuando los lados del cuadrado aumentan al doble? _________________________ ¿Cuántas veces aumentó el área? _______________

Sesión 2: Recubrimiento de figuras con pintura y su respectiva ampliación y/o reducción.

Objetivo:

Que el alumno analice y verifique con material concreto qué sucede con el perímetro y el área de figuras irregulares contenidas en un marco cuadrado al hacer variar las medidas de las aristas de dicho marco y hacer recubrimientos de pintura y/o comparación de las medidas de dichas figuras.

Conocimientos previos:

- Medida
- Perímetro
- Área

Material

- 3 Dibujos (A partir de un dibujo, realizar una ampliación y una reducción)
- Pintura líquida
- Recipientes para la pintura
- Regla
- Lápiz

- Pipeta o jeringas
- Bombillas*

1.- De forma individual, pinta el dibujo proporcionado (Anexo 2.1, 2.2, 2.3, y 2.4)

2.- Completa el siguiente cuadro.

	Figura 1
¿Cuánto mide el lado del marco?	
¿Cuánto mide su perímetro?	
¿Cuánto mide su área?	
¿Qué cantidad de pintura necesitaste para cubrir la figura?	

3.- Si tuvieras una figura ampliada al doble de la medida del lado. ¿Cuántos ml de pintura crees que necesitarías? ____ ¿Por qué? _________
____
____

4.- Pinta el dibujo proporcionado.

5.- Completa el siguiente cuadro.

	Figura 2
¿Cuánto mide el lado del marco?	
¿Cuánto mide su perímetro?	
¿Cuánto mide su área?	
¿Qué cantidad de pintura necesitaste para cubrir la figura?	

7.- Responde los siguientes cuestionamientos.

a) ¿Cuántas veces aumentó el lado del marco? ________________________________

b) ¿Cuántas veces aumentó el perímetro del marco? ___________________________

c) ¿Cuántas veces aumentó el área del marco? _________________________________

d) ¿La cantidad de pintura que utilizaste fue proporcional al aumento de la medida de los lados, es decir, utilizaste el doble de pintura cuando los lados aumentaron al doble? ____ ¿A qué crees que se debe? ___________________________________
____

e) ¿Cuántas veces aumentó la cantidad de pintura utilizada? ______________________

f) ¿La cantidad de pintura que pensaste que utilizarías (número 3) fue lo que en realidad utilizaste? ____
¿A qué crees que se deba? ____
____

g) ¿Qué podrías concluir con respecto del aumento de los lados y el área de las figuras?
____
____

8.- Si ahora en lugar de aumentar el lado del marco se quisiera disminuir el área de la figura 4 veces con respecto de la primera figura que se te entregó. Responde lo siguiente:

a) ¿Cuánto debe medir el lado del marco? ____________________________________

b) ¿Cuánto debe medir el perímetro del marco? _____________________________

c) ¿Cuánto debería medir el área del marco? ____________________________

d) ¿Qué cantidad de pintura necesitarías para cubrir la figura? ____________________

9.- Con base en la figura proporcionada completa el siguiente cuadro.

	Figura 3

¿Cuánto mide el área del marco?	
¿Cuánto mide su perímetro?	
¿Cuánto mide cada lado?	
¿Qué cantidad de pintura necesitaste para cubrir la figura?	

10.- Responde los siguientes cuestionamientos.

a) ¿Cuántas veces disminuyó el lado del marco? ______________________________

b) ¿Cuántas veces disminuyó el perímetro del marco? __________________________

c) ¿Cuántas veces disminuyó el área del marco? ______________________________

d) ¿La cantidad de pintura que utilizaste fue proporcional a la disminución de la medida del área, es decir, utilizaste una cuarta parte de pintura cuando el área disminuyó cuatro veces? _______________
¿A qué crees que se debe? ____
____

e) ¿Cuántas veces disminuyó la cantidad de pintura utilizada? ___________________

f) ¿La cantidad de pintura que pensaste que utilizarías (número 8) fue lo que en realidad usaste? ______ ¿Por qué? ____
____

g) ¿Qué podrías concluir con respecto del aumento del área y la medida de los lados de las figuras? ____
____

Sesión 3: Variación de las aristas con ayuda de las TIC´s.

Objetivo:

Que el alumno analice y generalice qué sucede con el perímetro y el área de figuras geométricas al hacer variar las medidas de sus respectivas aristas por medio de las TIC´s (Geogebra).

Conocimientos previos:

Figura geométrica

Cuadrado y rectángulo

Medida

Perímetro

Área

Material

Geogebra (software o aplicación)

Lápiz

1.- Con Geogebra construye un cuadrado de la medida que deseen. Anexo 1 (Instrucciones para realizar las figuras en Geogebra.)

2.- Construye otro cuadrado que mida el doble de lado que el primero.

3.- Completen la siguiente tabla.

	Cuadrado 1	Cuadrado 2
¿Cuánto mide de lado?		
¿Cuánto mide su perímetro?		
¿Cuánto mide su área?		

4.- Construye un rectángulo de las medidas que desees.

5.- Construye otro rectángulo que tenga el doble de las medidas que el primero.

6.- Complete la siguiente tabla

	Rectángulo 1	Rectángulo 2
¿Cuánto miden los lados?		

¿Cuánto mide su perímetro?		
¿Cuánto mide su área?		

7.- Reúnete con otro compañero para comparar los datos obtenidos y responder las siguientes preguntas.

¿Qué sucede con el perímetro del cuadrado y el rectángulo al hacer crecer sus lados?

____

____

¿Cuál es la relación que existe entre la medida de los lados de los cuadrados y rectángulos con respecto a la medida de su perímetro?

____

¿El perímetro crece de manera proporcional con respecto al aumento de sus lados? _____
¿Por qué? ____

____

¿Qué sucede con el área del cuadrado y el rectángulo al hacer crecer sus lados? ___

____

¿Cuál es la relación que existe entre la medida de los lados de los cuadrados y rectángulos con respecto a la medida de su área? ______________________________

____

¿El área crece de manera proporcional con respecto al aumento de sus lados? ________
¿Por qué? ____

____

8.- Si ahora construyeras un cuadrado y un rectángulo 5 veces más grande comparado con los primeros respectivamente.

¿Cuánto veces crecería su perímetro y cuántas veces su área? ________________

¿Cuánto mediría su perímetro y su área? ________________________________

9.- Construye las figuras geométricas y verifica si tus respuestas son correctas.

¿Sucedió lo que pensaste? __________________ ¿Por qué? _________________

10.- Lluvia de ideas de los puntos 7-9.

11.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

Sesión 4: Variación de las áreas con ayuda de las TIC´s.

Objetivo:

El alumno analice y generalice qué sucede con el perímetro y las aristas de figuras geométricas al hacer variar las medidas de su respectiva área por medio de las TIC´s (Geogebra).

Conocimientos previos:

Figura geométrica

Cuadrado y rectángulo

Medida

Perímetro

Área

Material

Geogebra (software o aplicación)

Lápiz

1.- Construye en Geogebra un cuadrado que tenga 10 unidades de lado.

2.- Construye un cuadrado que mida el doble del área que el cuadrado anterior.

¿Cómo obtuviste el cuadrado con el doble de área? ___________________________

____

____

3.- Completen la siguiente tabla.

	Cuadrado 1	Cuadrado 2
¿Cuánto mide su área?		
¿Cuánto mide el lado?	10 cm	
¿Cuánto mide su perímetro?		

4.- Construye un rectángulo que mida 24 cm^2.

5.- Construye un rectángulo que mida la mitad del área que el anterior.

¿Cómo obtuviste el rectángulo con la mitad de área? __________________________

____

____

6.- Completen la siguiente tabla.

	Rectángulo 1	Rectángulo 2
¿Cuánto mide su área?	24 cm^2	
¿Cuánto miden sus lados?		
¿Cuánto mide su perímetro?		

7.- Si ahora se quisiera un cuadrado con la mitad de área que el primero.

¿Cuánto medirían sus lados? ____

¿La medida de los lados del cuadrado disminuye a la mitad? ___________________ ¿Por qué? ____

____

____

8.- Si se requiriera de un rectángulo con doble de área que el primero.

¿Cuáles podrían ser las medidas de sus lados? _______________________________

¿La medida de los lados del rectángulo disminuye a la mitad? _______________________ ¿Por qué? _____________________________________

____

____

9.- Con base en los datos obtenidos respondan lo siguiente:

Si se tiene el área de alguna figura geométrica y se desea otra con la mitad o al doble (de área), ¿la medida de sus lados disminuye a la mitad o aumenta al doble respectivamente? _______________ ¿Por qué? ____

____

____

10.- Lluvia de ideas de los puntos 7-9.

11.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

____

____

____

____

Volumen

Sesión 1: Comparación de volumen a partir de una situación problemática.

Objetivo:

Que el alumno analice qué sucede con el volumen de un cuerpo geométrico (cubo) al hacer variar las medidas de sus aristas a través de la comparación de las medidas de dichas figuras.

Conocimientos previos:

Figura geométrica

Cuerpo geométrico

Cubo

Medida

Arista

Volumen

Material

Regla

Lápiz

Calculadora

1.- Una familia desea construir una cisterna en forma de cubo. La familia sabe que la cisterna en forma de cubo con lados de 1 metro tendría aproximadamente 1000 litros de agua (1 m^3=1000 litros de agua). Si la familia quisiera una cisterna en forma de cubo pero con lados de 2 metros de lado.

¿Cuántos litros le cabrían a esta nueva cisterna? ________________________________

2.- Dibuja los cuerpos geométricos que se mencionan en el problema de tal manera que un cm represente un metro.

3.- Responde lo que se te indica

Completa el siguiente cuadro

	Cisterna 1	Cisterna 2
¿Cuánto mide de lado?		
¿Cuánto mide su volumen?		
¿Cuánto capacidad tiene?		

¿Qué sucede con el volumen del cubo al hacer crecer sus lados?

____

____

¿El volumen aumenta de manera proporcional con respecto al aumento de sus lados, es decir, si los lados del cubo aumentan al doble entonces el volumen aumenta al doble? ¿Por qué?

____

____

____

____

4.- La familia preguntó al encargado de construir la cisterna lo siguiente: si quisiéramos una cisterna en forma de cubo de 3 metros de lado, ¿cuántos litros aproximadamente tendría de capacidad? Él respondió que tendría aproximadamente 3,000 litros porque si para una cisterna en forma de cubo con lados de un metro tiene la capacidad aproximada de 1,000 litros, entonces para una cisterna cubica con 3 metros (el triple de un metro) de lado tendrá el triple de capacidad, es decir, $3\ x\ 1{,}000\ litros\ =\ 3{,}000\ litros$.

¿Qué opinas sobre el razonamiento de la persona encargada de la construcción de la cisterna? ¿Por qué? ____

____

____

____

____

Si tu fueras la persona a la que le preguntaran. ¿Qué responderías? ¿Por qué?

____

____

____

____

Con base en tus respuestas del punto 3 inciso a, para la cisterna de 2 metros de lado (cisterna 2) se tiene una capacidad de ________ litros. ¿Consideras que es correcto lo que propone el albañil, es decir, para una cisterna con 3 metros de lado se tendría una capacidad de 3,000 litros? ____________

¿Por qué? ____

____

¿Qué le dirías al albañil a cerca de su razonamiento y sepa la cantidad de agua que contiene una cisterna con 3 metros de lado? Comparar sus soluciones.

____

____

____

____

5.- Tiempo después, la persona que construyó la cisterna fue contratado nuevamente pero por otra familia para la construcción de otra cisterna. La persona encargada de la construcción le dijo a la nueva familia que una cisterna en forma de cubo con 2 metros en cada lado tiene aproximadamente la capacidad de __________ litros de agua. La familia determinó que quería una cisterna con 8 veces la capacidad de la de 2 metros.

¿Qué capacidad desea la nueva familia que tenga su cisterna? _______________ litros

¿Cuántos metros crees que debe de medir el lado de dicha cisterna en forma de cubo?

____________ metros.

6.- Responde lo que se te indica.

Completa el siguiente cuadro

	Cisterna 2	Cisterna 4
¿Cuánto mide de lado?	2 metros	
¿Cuánto mide su volumen?	8 metros^3	
¿Cuánta capacidad de agua tiene?		

¿Qué realizaste para completar la tabla?

____

____

____

¿Qué sucedió con el volumen de la cisterna 4 con respecto del volumen de la cisterna 2?

____

¿El volumen aumentó de manera proporcional con respecto de la medida de los lados de la cisterna en forma de cubo, es decir, si el volumen de la cisterna aumenta ocho veces entonces el lado aumentó ocho veces? _____________ ¿Cuántas veces aumentó el lado respectivamente? ¿Por qué crees que sucede esto?

Sesión 2: Medida y llenado de cubos con ampliación y/o reducción.

Objetivo:

Que el alumno analice y verifique con material concreto qué sucede con el volumen de cuerpos geométricos (cubos) al hacer variar las medidas de sus aristas y/o comparando las medidas de dichos cuerpos.

Conocimientos previos:

Figura geométrica

Cuerpo geométrico

Cubo

Medida

Arista

Volumen

Material

3 cubos sin tapa

Agua o algún líquido para verterlo en los cubos

Regla

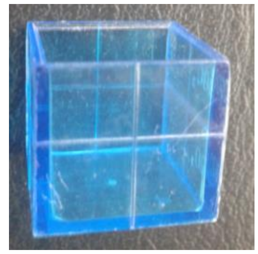
Lápiz

Pipeta y/o vaso de precipitados

Bombillas

1.- Toma el cubo proporcionado (cubo mediano), llénalo con agua y toma registro de lo que se te indica a continuación.

2.- Completa el siguiente cuadro

	Cubo 1	
¿Cuánto mide el lado del cubo?		
¿Cuánto mide su volumen?		
¿Qué cantidad de líquido le cabe a este cubo?		

3.- Si tuvieras un cubo ampliado dos veces y medio (2.5 veces) de la arista.

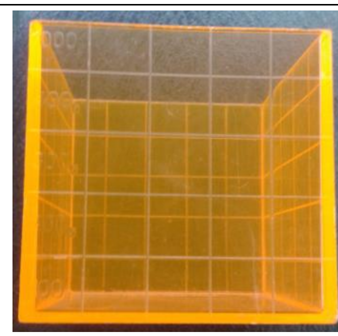
¿Cuánto mide su arista? ____________________________

¿Cuánta agua consideras que contendrá? ____________________________

¿Cuánto crees que es su volumen? ____________________________

4.- Llena con agua el nuevo cubo proporcionado (cubo 2) y toma registro de lo que se te indica en el siguiente punto.

5.- Completa el siguiente cuadro

	Cubo 2	
¿Cuánto mide el lado del cubo?		
¿Cuánto mide su volumen?		
¿Qué cantidad de líquido le cabe a este cubo?		

7.- Responde los siguientes cuestionamientos

¿Cuántas veces aumentó el lado del cubo 2 (con respecto del cubo 1)? ________________

¿Cuántas veces aumentó el volumen del cubo 2 (con respecto del cubo 1)? ___________________

¿Cuántas veces aumentó la cantidad de agua contenida en el cubo 2? ___________________

¿La cantidad de agua que creíste que contendría fue proporcional al aumento de la medida de las aristas, es decir, contuvo dos veces y media más de agua cuando las aristas aumentaron dos veces y media? ____

¿El agua que pensaste que contendría el cubo 2 fue lo que en realidad contuvo? ________
¿A qué crees que se deba? ____

____
____
____

¿Qué podrías concluir con respecto del aumento de los lados y el volumen de los cuerpos geométricos? ____

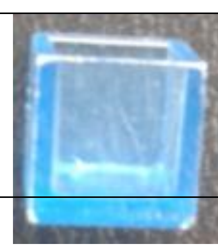
____
____
____
____

8.- Si ahora en lugar de aumentar el lado del cubo se quisiera disminuir 8 veces el volumen del primer cuerpo geométrico (cubo 1) que se te entregó. Responde lo siguiente

¿Qué cantidad de agua debe contener el cubo 3? _________________________________

¿Cuánto debe de medir la arista (lado) del cubo 3? ________________________________

9.- Con base en el cuerpo geométrico, completa el siguiente cuadro

	Cubo 3	
¿Cuánto mide el lado del cubo?		

¿Cuánto mide su volumen?		
¿Qué cantidad de líquido le cabe a este cubo?		

10.- Responde los siguientes cuestionamientos

¿Cuántas veces disminuyó la cantidad de agua contenida en el cubo 3 (con respecto del cubo 1)? ___________________________

¿Cuántas veces disminuyó el lado del cubo (con respecto del cubo 1)? ________________

¿La disminución en la cantidad de agua fue proporcional a la medida de la arista (lado) del cubo 3, es decir, si la cantidad de agua contenida que registraste era la octava parte entonces la arista disminuyó ocho veces? ________________________________

¿La arista que pensaste que tendría el cubo (número 8) fue lo que en realidad registraste? ___________ ¿Por qué? ____

____

¿Qué podrías concluir con respecto del aumento del volumen y la medida de los lados de las figuras? ____

____
____
____

Sesión 3: Variación de las aristas con ayuda de las TIC´s.

Objetivo:

Que el alumno analice y generalice qué sucede con el volumen de los cuerpos geométricas al hacer variar las medidas de sus aristas por medio de las TIC´s (Geogebra).

Conocimientos previos:

Figura geométrica

Cuerpo geométrico

Cubo

Medida

Arista

Volumen

Material

Geogebra (software o aplicación)

Lápiz

1.- Decide la medida para una arista y con ayuda de Geogebra construye un cubo con dicha medida. Ver Anexo 1

2.- Haz crecer el cubo de manera que la arista mida el doble de la primera.

3.- Completen la siguiente tabla.

	Cubo 1	Cubo 2
¿Cuánto mide de lado?		
¿Cuánto mide su volumen?		

4.- A partir del primer cubo, ahora construye un cubo que mida la mitad de longitud de la arista que elegiste.

5.- Complete la siguiente tabla

	Cubo 1	Cubo 3
¿Cuánto mide de lado?		
¿Cuánto mide su perímetro?		
¿Cuánto mide su área?		

6.- Responde los siguientes cuestionamientos

¿Qué sucede con el volumen del cubo al hacer crecer sus aristas o lados? ____________

____

¿Cuál es la relación que existe entre la medida de los lados del cubo con respecto a su volumen?
____
____

¿El volumen crece de manera proporcional con respecto al aumento de sus lados?
__________ ¿Por qué? ____

____
____

7.- Reúnete con otro compañero para comparar los datos y respuestas obtenidas

8.- Si ahora construyeran un cubo más grande de tal manera que la arista fuese 4 veces más grande.

¿Cuánto mide su arista? _________________________

¿Cuánto mediría su volumen? ______________________________

9.- Construye las figuras geométricas y verifica si tus respuestas son correctas.

10.- Lluvia de ideas de los puntos 6,8-9.

11.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

____
____
____
____
____

Sesión 4: Variación del volumen con ayuda de las TIC´s.

Objetivo:

Que el alumno analice y generalice qué sucede con la medida de las aristas del cuerpo geométricas al hacer variar las medidas de su volumen por medio de las TIC´s (Geogebra).

Conocimientos previos:

Figura geométrica

Cuerpo geométrico

Cubo

Medida

Arista

Volumen

Material

Geogebra (software o aplicación)

Lápiz

1.- Construye en Geogebra un cubo que tenga 3 unidades de lado.

2.- Construye un cubo que mida el triple del volumen del cubo anterior.

¿Cómo obtuviste el cubo con el triple de volumen? ______________________________

____

____

3.- Completen la siguiente tabla.

	Cubo 1	Cubo 2
¿Cuánto mide su volumen?		
¿Cuánto mide el lado?	3 unidades	

4.- Construye un cubo que mida 64 cm^3.

5.- Construye un cubo que mida la mitad del volumen que el anterior.

¿Cómo obtuviste el cubo con la mitad de volumen? ______________________________

____
____

6.- Completen la siguiente tabla.

	Cubo 3	Cubo 4
¿Cuánto mide su Volumen?	64 cm^3	
¿Cuánto miden sus lados?		

7.- Si ahora se quisiera un cubo con la mitad de volumen que el primero.

¿Cuánto medirían sus lados? _____________________________

¿La medida de los lados disminuye a la mitad? _______________________ ¿Por qué? ___

____
____

8.- Si se requiriera de un cubo con el doble de volumen que el primero.

¿Cuáles podrían ser las medidas de sus lados? _____________________________

¿La medida de los lados aumentó al doble? _______________________ ¿Por qué? _____

____
____

9.- Con base en los datos obtenidos respondan lo siguiente:

Si se tiene el volumen de algún cuerpo geométrico y se desea otro con la mitad o al doble (de volumen), ¿la medida de sus lados disminuye a la mitad o aumenta al doble respectivamente? ___________ ¿Por qué? _____________________________________

____

10.- Lluvia de ideas de los puntos 7-9.

11.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

____
____
____
____
____

Constante

Sesión 1-2: Situaciones problemáticas del mundo real.

Objetivo:

Que el alumno observe y analice que al variar la cantidad de objetos o las condiciones que intervienen en algunas situaciones cotidianas tales variaciones no afectan o alteran dicha situación.

Conocimientos previos:

Cantidad

Tiempo

Realismo

Material

Toallitas húmedas

Lazo (tendedero)

Pinzas para ropa

Cronómetro

Lápiz

Responde individualmente.

1.- Si 5 toallas se secan en 2 horas. ¿En qué tiempo se secarán 10 toallas?

¿Cómo le hiciste para solucionar el problema? ___________________________________

____

____

¿Alguna vez has colocado alguna prenda para que se seque en el tendedero?
____

2.- Formados en equipos de 3 personas, realicen lo que se indica.

Coloca dos lazos que servirán como tendedero dentro del aula.

Comienza a tomar el tiempo de secado a partir de que sacas las toallitas húmedas del empaque.

Coloca en un tendedero 3 toallitas húmedas y en el otro coloca el doble (6).

Repite el procedimiento pero en alguna zona que esté a la intemperie fuera del aula.

3.- Completa el siguiente cuadro para las toallas que se encuentran dentro del aula.

	3 toallas	6 toallas
¿Cuál fue el tiempo en que se secaron?		
Describe las condiciones en que se encuentran.		

4.- Completa el siguiente cuadro para las toallas que se encuentran fuera del aula.

	3 toallas	6 toallas
¿Cuál fue el tiempo en que se secaron?		
Describe las condiciones en que se encuentran.		

5.- Con base en lo realizado en los puntos 3 y 4 responde las siguientes preguntas:

Con base en lo que también realizaste en el punto 1. ¿Qué opinas de tus respuestas con respecto al tiempo de secado de las toallas? ____

____

____

____

¿Todas las toallas que se colocaron dentro del aula se encontraban en las mismas condiciones o había diferencias? ____

¿El tiempo de secado de las toallas que se colocaron dentro del aula aumenta de forma proporcional con respecto de la cantidad de toallas, es decir, si la cantidad de toallitas húmedas aumenta al doble, el tiempo de secado aumentó al doble? _______________
¿Qué sucede realmente? ____

____
____
____

¿Qué podrían concluir del experimento realizado con las toallas que se colocaron dentro del aula? ____

____
____

¿Todas las toallas que se colocaron fuera del aula se encontraban en las mismas condiciones o había diferencias? ____

¿El tiempo de secado de las toallas que se colocaron fuera del aula aumenta de forma proporcional con respecto de la cantidad de toallas, es decir, si la cantidad de toallitas húmedas aumenta al doble, el tiempo de secado aumentó al doble? ________________
¿Qué sucede realmente? ____

____
____

¿Qué podrían concluir del experimento realizado con las toallas que se colocaron fuera del aula? ____

____
____

En estos casos. ¿Cómo te ayudan las matemáticas o los cálculos que realizaste para resolver los problemas? ____ ¿Por qué? ____

____
____

En estos casos. ¿Las matemáticas o los cálculos que realizaste te sirvieron para proporcionar la respuesta correcta a lo que en realidad sucede? _____________________
¿Por qué? ____

____
____

¿Cuáles son los factores o condiciones que les faltaron tomar en cuenta para tener un razonamiento más apropiado y poder resolver el problema de forma correcta? ________

____
____

Los factores que mencionaste en el inciso j. ¿Los habías observado en la realidad? ______

Si tenías ese conocimiento de lo que sucede en la realidad con respecto al tiempo de secado de alguna prenda y en caso de no haberlo utilizado para resolver el problema. ¿Por qué crees que no utilizaste dicho conocimiento para resolver el problema? ________

____
____
____

6.- Lluvia de ideas grupal de las respuestas del punto 5.

7.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

Sesión 1-2: Situaciones problemáticas del mundo real.

Objetivo:

Que el alumno observe y analice que al variar la cantidad de sustancia en determinada situación, tal variación no afecta o altera dicha situación.

Conocimientos previos:

Cantidad

Temperatura

Realismo

Material

Sustancias líquidas (preferentemente agua)

Recipientes graduados (3)

Pipetas

Termómetro

Lápiz

Responde individualmente

1.- Si 100 mililitros de agua se encuentran a una temperatura ambiente de 10 °C.

¿Qué temperatura tendrán 300 mililitros de agua en las mismas condiciones? ___________

¿Qué temperatura tendrán 50 mililitros de agua en las mismas condiciones? ____________

¿Qué realizaste para responder el problema? ___________________________________

____

____

2.- Formados en equipos de 3 personas, realicen lo que se indica.

Consigue agua (que toda el agua que consigas provenga del mismo lugar).

Etiqueta cada uno de los tres recipientes (recipiente 1, recipiente 2 y recipiente 3).

Mide cierta cantidad de agua y colócala en el recipiente 2.

En el recipiente 1 coloca la mitad de agua que colocaste en el recipiente 2.

En el recipiente 3 coloca el triple de agua que colocaste en el recipiente 2.

Registra y responde la tabla del punto 3.

3.- Completa el siguiente cuadro para la temperatura del agua en los recipientes.

	1er recipiente	2do recipiente	3er recipiente
Cantidad de agua			
¿Cuál fue la temperatura?			
Describe las condiciones (físicas y químicas) en que se encuentra el líquido.			

4.- Con base en lo realizado en los puntos 3 responde las siguientes preguntas:

Con base en lo que también realizaste en el punto 1. ¿Qué opinan de su respuesta con respecto a la temperatura del agua? ______________________________________

¿Los tres recipientes con agua se encontraban en las mismas condiciones o había diferencias? ____

¿La temperatura del agua aumenta de forma proporcional con respecto de la cantidad de agua, es decir, si la cantidad de agua aumentara al quíntuple (cinco veces más), la temperatura también aumentaría al quíntuple? ___________ ¿Qué sucede realmente?

____
____
____

¿Qué podrían concluir del experimento realizado con los recipientes? _____________

____
____
____

En estos casos. ¿Cómo les ayudaron las matemáticas o los cálculos que realizaron para resolver el problema? ____

____
¿Por qué? ____

____

____

En estos casos. ¿Las matemáticas o los cálculos que realizaron les sirvieron para proporcionar la respuesta correcta a lo que en realidad sucede? ________________ ¿Por qué? ____

____
____

¿Cuáles son los factores o condiciones que les faltaron tomar en cuenta para tener un razonamiento más apropiado y poder resolver el problema de forma correcta? ________

____

____

Los factores que mencionaste en el inciso g. ¿Los habías observado en la realidad? ______

Si tenían ese conocimiento de lo que sucede en la realidad con respecto a la temperatura determinado líquido y en caso de no haberlo tomado en cuenta para resolver el problema. ¿Por qué crees que no utilizaste dicho conocimiento para resolver el problema? ________

____
____

5.- Inventen algún problema donde a pesar de variar la cantidad de objetos o de sustancia ello no altere o afecte determinada situación.

____
____
____
____

6.- Lluvia de ideas grupal de las respuestas del punto 4 y 5.

7.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

____

Falta de autenticidad

Sesión 1: Situaciones problemáticas del mundo real.

Objetivo:

Que el alumno observe algunas situaciones cotidianas o del mundo real y analice la influencia de las matemáticas en dichas situaciones.

Conocimientos previos:

Peso

Estatura

Tiempo (edad)

Realismo

Material

Folletos

Lápiz

Cinta métrica o metro

Gises (azul y rosa)

Calculadora

1.- Lee la siguiente información de forma individual y responde lo que se te indica.

Según información de la Organización mundial de la salud (2006), a la edad de un año (12 meses):

Un niño “normal” debe de pesar aproximadamente 9.6 kilogramos y debe de medir (aproximadamente) 75.7 centímetros.

Una niña “normal” debe de pesar aproximadamente 8.9 kilogramos y debe de medir (aproximadamente) 74 centímetros.

Nota: se dice que un niño o niña es “normal” cuando no está por debajo o por encima de los parámetros establecidos, por ejemplo, en cuestión del peso, que no tenga un peso bajo (desnutrición) o un peso alto (sobrepeso).

2.- Responde lo que se te indica del cuadro siguiente.

	Niño (“normal”)	Niña (“normal”)
¿Cuál debe ser el **peso** a la edad de **6 meses**?		
¿Cuál debe ser la **altura** a la edad de **6 meses**?		
¿Cuál debe ser el **peso** a la edad de **4 años**?		
¿Cuál debe ser la altura a la edad de **4 años**?		

¿Cómo le hiciste para dar solución al problema? ________________________________

____
____
____

3.- En parejas y con base en las respuestas del punto 2 de alguno de los integrantes, realicen lo siguiente:

tracen 3 líneas (con el gis azul) en el suelo de tal manera que cada una represente la altura de un niño “normal” a la edad de 6 meses, un año y 4 años.

tracen 3 lineal (con el gis rosa) en el suelo de tal manera que cada una represente la altura de una niña “normal” a la edad de 6 meses, un año y 4 años.

4.- Con base en los folletos otorgados (Anexo 4), identifica la información requerida en el cuadro siguiente y responde lo que se te indica.

	Niño (“normal”)	Niña (“normal”)
¿Cuál el **peso** aproximado a la edad de **6 meses**?		
¿Cuál es la **altura** aproximada a la edad de **6 meses**?		
¿Cuál debe ser el **peso** aproximado a la edad de **4 años**?		
¿Cuál debe ser la **altura** aproximada a la edad de **4 años**?		

5.- Con base en lo realizado en los puntos 2, 3 y 4, responde las siguientes preguntas:

Con base en lo que realizaste en el punto 3 (trazar líneas que representan la altura de los niños y niñas “normales”). ¿Qué opinas de tus respuestas con respecto a las representaciones de las alturas de los niños y niñas a los 6 meses, 1 año y 4 años? ________
¿Crees que un niño o niña “normal” pueda tener esa altura?[1] ________________________

____
____

¿Qué opinas de tus respuestas con respecto al peso de los niños y niñas a los 6 meses, 1 año y 4 años? ____

____

¿Crees que un niño o niña “normal” pueda tener ese peso? _______________________

____

____

¿Los datos registrados por la organización mundial de la salud aumentan de manera proporcional, es decir, si a la edad de un año un niño tiene determinado peso o altura, a la edad de tres años (el triple de un año) el niño tiene el triple de altura? ______________

¿Qué sucede realmente? ____

____

____

____

¿La respuesta que proporcionaste en el cuadro del punto 2 correspondieron a lo que propone la organización mundial de la salud? __________________________________

¿Qué factores o circunstancias consideras que pudieron haber intervenido para que tus respuestas no correspondieran a lo que propone organización mundial de la salud?[2] ____

____

____

____

En estos casos. ¿Cómo te ayudan las matemáticas o los cálculos que realizaste para resolver los problemas? ____

____

¿Por qué? ____

____

____

En estos casos. ¿Las matemáticas o los cálculos que realizaste te sirvieron para proporcionar una respuesta exacta o una respuesta aproximada a lo que en realidad sucede? ____ ¿Por qué? ____

____

Los factores que mencionaste en el inciso e. ¿Los conocías? ___________ ¿Sabías que suceden en la realidad? _____________

Si tenías ese conocimiento de lo que sucede en la realidad con respecto al desarrollo de la altura y peso de los niños y niñas y, en caso de no haberlo utilizado para resolver el problema. ¿Por qué no utilizaste dicho conocimiento para resolver el problema? _______

____
____
____
____

[1] Los hombres más altos se encuentran en Europa, en específico en Holanda (182,5 cm). Las mujeres más altas también están en Europa, aunque esta vez en Letonia (169,8 cm).

Tomado de: http://elpais.com/elpais/2016/07/21/media/1469127433_712478.html

Con datos de **17 mil 364 personas mayores de 18 años**, la Cámara Nacional de la Industria del Vestido encontró que **el hombre mexicano promedio pesa 74.8 kilos y mide 1.64 metros**, mientras que **las mujeres 1.58 metros de altura y 68.7 kilos de peso**.

Tomado de: http://www.muyinteresante.com.mx/preguntas-y-respuestas/12/02/09/medidas-poblacion-mexicana/

[2] El crecimiento es el proceso biológico más característico de la infancia. A menudo solemos compararlos como si el crecimiento debiese ser parejo para todos los niños de la misma edad, pero lo cierto es que cada niño tiene su propio ritmo de crecimiento individual. En los primeros años de vida ocurre un rápido aumento en la estatura y peso del niño, pero no es un proceso constante.

https://www.bebesymas.com/desarrollo/como-y-cuanto-crecen-los-ninos-las-cuatro-etapas-de-crecimiento

6.- Lluvia de ideas grupal de las respuestas del punto 5.

7.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

____

Sesión 2: Situaciones problemáticas del mundo real.

Objetivo:

Que el alumno observe algunos situaciones cotidianas o del mundo real y analice la influencia de las matemáticas en dichas situaciones.

Conocimientos previos:

Velocidad

Distancia

Tiempo

Realismo

Material

Internet

Lápiz

1.- En parejas, lean la siguiente información y respondan lo que se indica.

Elaine Thompson y Usain Bolt son atletas que participan en competencias de atletismo en juegos olímpicos y en mundiales de dicha especialidad. En particular, son atletas que participan en pruebas de velocidad (carreras), participan en las competencias de 100 y 200 metros planos e incluso han establecidos records. Ellos compitieron y ganaron en ambas pruebas (100 y 200 metros planos) en los juegos olímpicos de Río de Janeiro en el 2016, por lo cual se hicieron merecedores a las medallas de oro en cada una de las competencias en las que participaron ambos atletas.

Tomados de: http://www.mundodeportivo.com/atletismo/20161231/413015117739/elaine-thompson-la-reina-desconocida.html y
http://www.biografiasyvidas.com/biografia/b/bolt.htm

2.- Los siguientes enlaces muestran la participación de Elaine Thompson y Usain Bolt en la prueba de 100 metros planos.

https://www.youtube.com/watch?v=up6veKKkzSU

http://elcomercio.pe/deporte-total/rio-2016/usain-bolt-vivo-online-va-su-primer-oro-rio-2016-100m-planos-noticia-1924008

3.- Con base en los videos que observaste, responde las siguientes preguntas:

¿Cuánto tiempo tardó en recorrer Elaine Thompson los 100 metros planos? ___________

¿Cuánto tiempo tardó Usain Bolt en recorrer los 100 metros planos? _________________

Con base en lo que observaste de ambos atletas, si ahora tuvieran que recorrer el doble de distancia, es decir, ______ metros planos. ¿Cuánto tiempo consideras que necesitarían para recorrerlos?

Elaine Thompson: ______________________

Usain Bolt: _______________________

¿Cómo le hiciste para determinar el tiempo que tardarán en esta nueva prueba? _______

____

____

4.- Los siguientes enlaces muestran la participación de Elaine Thompson y Usain Bolt en los mismos juegos olímpicos (Río de Janeiro en el 2016) pero en la prueba de 200 metros planos, es decir, en esta prueba recorrieren el doble de la distancia con respecto de los primeros videos. Abre o copia los enlaces y observa los videos.

https://www.youtube.com/watch?v=GHXqVb6QzIU

https://www.youtube.com/watch?v=J5rIB0_MmS0&t=9s

5.- Con base en los últimos dos videos observados, responde las siguientes preguntas:

¿Cuánto tiempo tardó Elaine Thompson en recorrer los 200 metros planos? ___________

¿Cuánto tiempo tardó en recorrer Usain Bolt los 200 metros planos? ________________

Con respecto al tiempo que pensaste en que ambos atletas tardarían en realizar dicha prueba. ¿Qué sucedió? ____

La distancia recorrida aumentó al doble (200 metros). ¿Sucede lo mismo para el tiempo en que los atletas recorren dicha distancia? ___________________________________

6.- Lee la siguiente información.

Michael Phelps es un atleta muy reconocido a nivel mundial. Él participa en diferentes competencias de natación tanto en mundiales de la especialidad (mundiales de natación) como en juegos olímpicos. Actualmente (en el año 2017) tiene más de 20 medallas de oro en juegos olímpicos y cuenta con diferentes records en distintas pruebas de natación.

Tomado de: http://www.biografiasyvidas.com/biografia/p/phelps.htm

7.- El enlace que se observa a continuación, muestra la participación del atleta Michael Phelps en el preolímpico de Omaha en Estados Unidos (2016) en la competencia denominada 200 metros mariposa (así se le denomina al estilo en que nadan los competidores). Antes de comenzar a observar el video del enlace, atiende el punto 8 por favor.

https://www.youtube.com/watch?v=ikg5HEDg0zc

8.- Detén el video cuando el primer competidor (Michael Phelps) haya recorrido los primeros 50 metros (*esto ocurre cuando el atleta recorre de extremo a extremo la piscina*) y responde los siguientes cuestionamientos

¿Cuál fue el tiempo que registró Michael Phelps para recorrer los primeros 50 metros?

____

¿Cuánto tiempo crees que le tomará recorrer 100 metros? _______________________
¿Por qué? ____

____

¿Cuánto tiempo crees que le tomará recorrer 200 metros? _______________________
¿Por qué? _________________________________

____

9. Termina de observar el video y responde lo siguiente.

¿Cuánto tiempo tardó en recorrer 100 metros? _______________________

¿Cuánto tiempo tardó en recorrer los 200 metros de la competición? _______________

Con respecto al tiempo que pensaste en que Michael Phelps tardaría en recorrer determinadas distancias. ¿Qué sucedió? _____________________________________

____

El primer registro que tomaste fue cuando Michael Phelps había recorrido 50 metros, para los registros posteriores la distancia recorrida aumentó al doble (100 metros) y cuádruple (200 metros). ¿Sucedió lo mismo para el tiempo, es decir, aumento al doble cuando recorrió los 100 metros y aumento al cuádruple cuando recorrió los 200 metros? ______________

10.- Reúnete con otra pareja de compañero para responder y discutir lo que se te indica en el punto siguiente (punto 11).

11.- Con base en las respuestas proporcionadas en el punto 3 inciso c y en el punto 8 incisos b y c, en las cuales se pregunta cuánto tiempo crees que tardarán los atletas en realizar su respectiva prueba. Responde lo siguiente:

¿La respuesta que proporcionaste correspondió al tiempo que en realidad tardaron los atletas en su respectiva prueba? ________________________

¿Qué factores o circunstancias consideras que pudieron haber intervenido para que los atletas hayan necesitado un poco más de tiempo para realizar su respectiva prueba? ____

____
____
____
____

¿La respuesta que proporcionaste se acercó a los tiempos en que los atletas completaron la prueba? ____

En estos casos. ¿Cómo te ayudan las matemáticas o los cálculos que realizaste para resolver los problemas? ____ ¿Por qué? ____

____
____

En estos casos. ¿Las matemáticas o los cálculos que realizaste te sirven para proporcionar una respuesta exacta o una respuesta aproximada a lo que en realidad sucede? ________ ¿Por qué? ____

____
____

Los factores que mencionaste por los que consideras que los atletas tardaron un poco más de tiempo en terminar las pruebas más extensas. ¿Los conocías? ________ ¿Sabías que suceden en la realidad? ______________

Si tenías ese conocimiento de lo que sucede en la realidad y en caso de no haberlo utilizado para resolver el problema. ¿Por qué no utilizaste dicho conocimiento para resolver el problema? ____

____
____
____

12.- Lluvia de ideas grupal de las respuestas del punto 11.

13.- Genera una conclusión individual de lo realizado en la sesión.

____
____
____
____
____
____
____