



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

---

Posgrado en Ciencias Matemáticas

---

**Lógicas Paraconsistentes Genuinas**

Tesis presentada como requisito parcial para la  
obtención del grado de

Doctor en Ciencias (Matemáticas)

por

M.C. Jesús Alejandro Hernández Tello

Directores de tesis

Dr. César Cejudo Castilla

Dr. José Ramón Enrique Arrazola Ramírez

Puebla Pue.

Julio de 2018





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

---

Posgrado en Ciencias Matemáticas

---

**Lógicas Paraconsistentes Genuinas**

Tesis presentada como requisito parcial para la  
obtención del grado de

Doctor en Ciencias (Matemáticas)

por

M.C. Jesús Alejandro Hernández Tello

Directores de tesis

Dr. César Cejudo Castilla

Dr. José Ramón Enrique Arrazola Ramírez

Puebla Pue.

Julio de 2018



**Título: Lógicas Paraconsistentes Genuinas**

**Estudiante: M.C. JESÚS ALEJANDRO HERNÁNDEZ TELLO**

COMITÉ

---

Presidente

---

Secretario

---

Vocal

---

Vocal

---

Dr. César Cejudo Castilla

Asesor

---

Dr. José Ramón Enrique Arrazola Ramírez

Asesor



# Índice

<b>1</b>	<b>Marco Teórico</b>	<b>7</b>
1.1	Lógica . . . . .	9
1.2	Teoría de Prueba . . . . .	11
1.2.1	Sistemas tipo Hilbert . . . . .	11
1.3	Relaciones de Consecuencia Tarskiana . . . . .	15
1.4	Teoría de Modelos . . . . .	20
1.4.1	Semánticas Inducidas por Matrices . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Lógicas paraconsistentes</b>	<b>27</b>
2.1	Reseña Histórica . . . . .	28
2.2	Lógicas Trivaluadas . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Lógicas Paraconsistentes Genuinas</b>	<b>35</b>
3.1	Negación Paraconsistente . . . . .	36
3.2	Negación Paraconsistente Genuina . . . . .	39
3.3	Conjunción Paraconsistente Genuina . . . . .	41
3.4	Disyunción Paraconsistente Genuina . . . . .	43
3.4.1	Caso 1 . . . . .	44
3.4.2	Caso 2 . . . . .	45
3.5	Lógicas Paraconsistentes Genuinas Trivaluadas . . . . .	46
3.5.1	Algunas Propiedades de las Lógicas <b>L3A</b> y <b>L3B</b> . . . . .	48

<b>4</b>	<b>La Implicación en las Lógicas Paraconsistentes Genuinas</b>	<b>51</b>
4.1	<b>L3A<sub>G</sub></b> . . . . .	52
4.2	<b>L3B<sub>G</sub></b> . . . . .	58
4.3	Las Leyes de De Morgan en las Lógicas <b>L3A<sub>G</sub></b> y <b>L3B<sub>G</sub></b> . . . . .	63
4.4	Comparaciones con otras Lógicas . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Axiomatizaciones de las Lógicas Paraconsistentes Genuinas</b>	<b>67</b>
5.1	Un Sistema Axiomático Tipo Hilbert para <b>L3A<sub>G</sub></b> . . . . .	67
5.1.1	La Semántica Multivaluada de <b>L3A<sub>G</sub></b> . . . . .	68
5.1.2	La Teoría Formal Axiomática y algunas de sus Propiedades .	68
5.1.3	Robustez y Completitud de <b>L3A<sub>G</sub></b> con respecto a $\mathbb{L}$ . . . . .	80
5.1.4	El Teorema de Reemplazamiento en <b>L3A<sub>G</sub></b> . . . . .	87
5.2	Un Sistema Axiomático Tipo Hilbert para <b>L3B<sub>G</sub></b> . . . . .	88
5.2.1	La Semántica Multivaluada de <b>L3B<sub>G</sub></b> . . . . .	89
5.2.2	La Teoría Formal Axiomática y algunas de sus Propiedades .	89
5.2.3	Robustez y Completitud de <b>L3B<sub>G</sub></b> con respecto a $\mathbb{L}_1$ . . . . .	102
5.2.4	El Teorema del Reemplazamiento en <b>L3B<sub>G</sub></b> . . . . .	107
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>109</b>

# Introducción

*Logic is invincible, because in order to combat logic it is necessary to use logic.* P. Boutroux.

La lógica se concibe generalmente como el estudio del razonamiento, esta razón *per se* es suficiente para hacer notar la relevancia de tal actividad y justificar su desarrollo, razonar es crucial en el progreso de cualquier ciencia. La lógica es una disciplina fundamental, como se hace notar en [28], era una componente del *trivium* formado por las tres materias fundamentales: Gramática, Retórica y Lógica que a su vez eran indispensables para continuar con el estudio del *quadrivium* compuesto por Aritmética, Geometría, Música y Astronomía.

The word trivial has an interesting etymology. It is composed of “tri” (meaning “3”) and “via” (meaning “ways”). It originally referred to the *trivium*, the three fundamental curriculae: grammar, rhetoric, and logic. Mastery of these subjects was considered essential before study could continue with the quadrivium, which consisted of arithmetic, geometry, music, and astronomy. Why was logic considered to be fundamental to one’s education? To answer this question[...] [28, p.1].

Desde la lógica en la antigua Grecia hasta antes de la primera mitad del siglo XIX, a pesar de la existencia de otras lógicas, la Lógica Clásica fue básicamente el único modelo aceptado para el estudio del razonamiento. Utilizada fundamentalmente para decidir si una proposición es verdadera o falsa, opera con un conjunto de reglas de razonamiento y argumentación, y es el instrumento fundamental en

---

las actividades intelectuales pues permite distinguir lo verdadero de lo falso y los argumentos correctos de lo erróneos. Sin embargo, la Lógica Clásica resultó insuficiente para modelar los diferentes tipos de pensamiento útiles de manera adecuada.

Cuando se estudia la veracidad de las expresiones el lenguaje natural presenta un obstáculo, conduciéndonos inclusive a paradojas. Por ejemplo, si nos preguntamos sobre la veracidad de la frase: *Esta sentencia es falsa*. Dado que en Lógica Clásica sólo podemos asignarle un valor de verdad ya sea falso o bien verdadero, si la oración: *Esta sentencia es falsa* fuese falsa resultaría ser verdadera, y vice-versa.

En los albores del siglo XX surgen las lógicas multivaluadas, creadas por el lógico y filósofo polaco Jan Łukasiewicz (1920), con la intención de utilizar un tercer valor de verdad adicional para “posible” y modelar de esta manera las modalidades “es necesario que” y “es posible que”. Son lógicas no clásicas que aceptan el *Principio de Verdad Funcional*, esto significa que la veracidad de una oración compuesta está determinada por los valores de verdad de las oraciones que la componen. Las lógicas multivaluadas, a diferencia de la Lógica Clásica con dos valores de verdad no restringen este número a dos. A pesar de no existir una interpretación estándar de los grados de verdad, debido a que la forma en la que se deben interpretar depende de la aplicación que se les pretenda dar. Es de uso general asumir que hay dos grados particulares de verdad, denotados usualmente por 0 y 1, que actúan respectivamente como los valores de verdad tradicionales falso y verdadero<sup>1</sup> [2].

En la Lógica Clásica la *inconsistencia*, es decir la presencia de contradicciones y la *trivialidad*, que es el hecho de que a partir de una contradicción se pueda implicar cualquier afirmación son inseparables. A esto se le conoce *Principio de Explosión* [11].

Las lógicas paraconsistentes fueron propuestas con el objetivo de estudiar teorías

---

<sup>1</sup>En este trabajo, por simplicidad en la escritura, hacemos una identificación de estos valores con 0 y 2, dejando el valor de 1 para representar el tercer valor de verdad.

---

inconsistentes pero que no sean triviales. Las lógicas paraconsistentes de la misma manera que permiten inconsistencias locales no tienen el problema de la explosión, otra razón para decidir estudiar tales lógicas, más allá de hacerlo sólo por hacerlo, se basa en necesidades modernas, por ejemplo: modelar el pensamiento en sistemas que utilicen Inteligencia Artificial; o en el trabajo de enormes Bases de Datos, donde no es poco frecuente encontrar y enfrentarse a contradicciones. La lógica paraconsistente está relacionada a otros tipos de lógicas no clásicas como: lógicas dialécticas, lógicas relevantistas, lógicas multivaluadas e incluso con las lógicas difusas.

El estudio de las lógicas paraconsistentes posibilita el estudio de las paradojas lógicas y semánticas, y también permite analizar conceptos como el *Principio de Comprensión* en Teoría de Conjuntos. Los pioneros en el estudio de la paraconsistencia fueron Łukasiewicz y Vasíliev, pero los primeros sistemas paraconsistentes se deben a Jaskowski en 1948 y a da Costa en 1963. Este último ha propuesto y estudiado una infinidad de sistemas paraconsistentes, la familia de lógicas  $C_n$ , donde  $1 \leq n \leq \omega$ , que además de no satisfacer que  $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$  sea válido para cualquier  $\varphi$ ; tampoco cumplen necesariamente que a partir de las premisas  $\varphi$  y  $\neg\varphi$  es posible deducir cualquier fórmula. Finalmente contienen los axiomas y reglas de la Lógica Clásica que son compatibles con las dos primeras condiciones.

La definición de negación paraconsistente de forma general se establece como aquella negación que no obedece el *Principio de no Contradicción*. Sin embargo, no existe unicidad en la formulación de este principio, las dos formas más aceptadas, mencionadas en [7, 6], son:

$$\mathbf{NC} \quad \mathcal{T} \vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$$

$$\mathbf{EC} \quad \mathcal{T}, \varphi, \neg\varphi \vdash \psi$$

donde  $\vdash$  es una relación de consecuencia estructural Tarskiana,  $\mathcal{T}$  es cualquier teoría y  $\varphi, \psi$  son fórmulas, ver Sección 1.3. Observe que el lenguaje que se utiliza para formular esto sólo contiene negación y conjunción. En [9] se demuestra que

---

estas formulaciones son *independientes*<sup>2</sup>, mediante matrices trivaluadas, ya que es posible encontrar sendos modelos donde sólo se valide una formulación, para esto se toma una lógica trivaluada con tablas de negación y conjunción como las de la Tabla 1 y como conjunto de valores designados  $\{1, 2\}$  en un caso y  $\{2\}$  en otro.

	$\neg$	$\wedge$	0	1	2
0	2	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1
2	0	2	0	1	2

Tabla 1: Conectivos que muestran independencia de EC y NC

Existen lógicas paraconsistentes que no obedecen sólo alguna de estas formulaciones, por ejemplo, en la lógica *L3* de Łukasiewicz y la lógica *K3* de Kleene, no es válido **NC** pero sí **EC**. Aún cuando de manera general la idea de paraconsistencia se basa en rechazar **EC**, hay lógicas como la lógica *C<sub>1</sub>* de Newton da Costa que obedece ninguna de las dos formulaciones. Esto motivó la definición del concepto de *Lógica Paraconsistente Fuerte* en [9], después renombrado como *Lógica Paraconsistente Genuina* en [8], que será la materia prima de este trabajo de tesis.

En [8, 9] se hace un análisis exhaustivo sobre qué lógicas trivaluadas pueden ser Paraconsistentes Genuinas. Para ello se estudia la naturaleza de los conectivos de negación y conjunción; comenzando por la negación, se analiza si es posible obtener Paraconsistencia Genuina cambiando lo que se considera como la tabla estándar trivaluada de la negación para lógicas paraconsistentes, ver Tabla 2.

Es necesario mencionar que en ese trabajo sólo se consideran extensiones conservativas de los conectivos bivaluados, esto quiere decir que si restringimos las tablas de verdad a los valores bivaluados clásicos estos coinciden, ver Tabla 3, esto es justificable pues no queremos perder del todo el poder deductivo de la Lógica Clásica. Cuando se aplica este criterio a la negación sólo deja la posibilidad de realizar un

---

<sup>2</sup>Para una explicación de este término vea la Sección 3.1.

---

	$\neg$
0	2
1	1
2	0

Tabla 2: Tabla estándar de la negación paraconsistente

cambio en el renglón de en medio y decidir si el tercer valor de verdad, es decir el 1, será tomado como designado.

	$\neg$
0	2
2	0

Tabla 3: Tabla de la negación bivaluada clásica

Después, al hacer un análisis sobre la conjunción se encuentran dos lógicas Paraconsistentes Genuinas cuando se cambia la tabla estándar de la negación y dos más si no se hace este cambio. De las cuatro lógicas Paraconsistentes Genuinas que se obtienen, dos de ellas tienen la propiedad de molecularización<sup>3</sup> en sus tablas de conjunción, lo que hace que se pierda el tercer valor de verdad y por ello se decide sólo estudiar las dos restantes, considerándolas como las únicas dos lógicas trivaluadas Paraconsistentes Genuinas.

Uno de los objetivos de esta tesis es dotar de una implicación a tales lógicas. Buscamos una implicación que sea al menos: una extensión conservativa de la implicación en Lógica Clásica, que cumpla con la regla de inferencia *Modus Ponens* y que satisfaga los axiomas **Pos1-Pos8** de la Lógica Positiva **Lp** [21].

Suponiendo que es posible encontrar un conectivo de implicación adecuado, un segundo objetivo es analizar si las lógicas que se generan con dicha implicación están contenidas dentro de otra lógica paraconsistente o inclusive si la nueva lógica es

---

<sup>3</sup>Vea Sección 3.3.

---

una extensión de alguna lógica paraconsistente conocida. La metodología para esto será: priorizar las propiedades que queremos que satisfagan los sistemas obtenidos cuando se les dota de una implicación; enseguida, seleccionamos aquellos que satisfagan el mayor número de propiedades. Una vez que se tenga dicho conectivo de implicación, se analiza el cumplimiento de las propiedades relevantes de diversas lógicas.

Otro objetivo es analizar la posibilidad de dotar de una teoría de prueba a las Lógicas Paraconsistentes Genuinas después de haber sido extendidas con una implicación. La metodología para conseguir esto será generalizando la técnica empleada en [20] para mostrar la robustez y completitud de un sistema axiomático tipo Hilbert para la Lógica Clásica. En [20] Elliot Mendelson utiliza un lema propuesto por László Kalmár [17] con el que después de proponer una transformación entre fórmulas bien formadas de la Lógica Clásica, demuestra que tomando como hipótesis el conjunto de las transformaciones de los átomos de una fórmula se puede demostrar la fórmula transformada.

# Capítulo 1

## Marco Teórico

*Contrariwise, if it was so, it might be; and if  
it were so, it would be; but as it isn't, it ain't.  
That's logic.* L. Carroll.

Para comenzar el desarrollo de cualquier investigación es imprescindible conocer cuales son los objetos de estudio, por tanto empezamos por definir los conceptos que se emplean a lo largo de esta tesis. El elemento más básico del cual debemos partir es el lenguaje, sin él no podríamos definir una lógica y dado que vamos a trabajar sólo con lógicas proposicionales la siguiente definición de lenguaje es idónea para tales fines.

**Definición 1** Consideramos un **Lenguaje Proposicional**  $\mathcal{L}$  definido a partir de un **alfabeto**  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$  y una **sintaxis**  $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ . Los elementos de la pareja  $\langle \mathcal{A}_{\mathcal{L}}, \mathcal{S}_{\mathcal{L}} \rangle$  son tales que:

- $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$  está formado por: un conjunto de **letras proposicionales**  $P$ , un conjunto de **conectivos**  $C$  y un conjunto de **símbolos auxiliares**  $A = \{ (, ), , \}$ .
- La **sintaxis**  $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$  nos permite definir el concepto de **fórmula bien formada**, en este caso es mediante una definición recursiva. El conjunto de las fórmulas bien formadas del lenguaje  $\mathcal{L}$ , denotado por  $Form(\mathcal{L})$  está constituido por sucesiones de símbolos del alfabeto construidas bajo las siguientes premisas:

## CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO

---

1. Los elementos de  $P$  son fórmulas bien formadas y se denominan fórmulas atómicas, lo denotamos por  $Atom(\mathcal{L})$ .
2. Si  $*$  es un conectivo de aridad  $n$  del conjunto  $C$  y  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  son fórmulas bien formadas, entonces  $*(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  también es una fórmula bien formada.
3. Únicamente las sucesiones de símbolos producidas por la aplicación de los pasos anteriores se consideran fórmulas bien formadas.

Antes de continuar hagamos algunas acotaciones sobre la Definición 1. Los elementos de  $Form(\mathcal{L})$ , sin hacer distinción entre fórmulas atómicas o no, serán denotados por letras griegas minúsculas  $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ . Cuando queramos especificar que se trata de letras proposicionales, usamos letras latinas minúsculas  $\{p, q, r, s, \dots\}$  para su escritura. Los subconjuntos de  $Form(\mathcal{L})$ , también denominados **teorías** serán representados por letras griegas mayúsculas  $\{\Gamma, \Delta, \Theta, \dots\}$ , cualquiera sea el caso podemos emplear subíndices en caso de ser necesario.

Cuando se trate de conectivos binarios la notación del punto 2 será reemplazada por  $\alpha_1 * \alpha_2$ ; en el caso de un conectivo unario usamos indistintamente  $*\alpha$  o  $*(\alpha)$ . En algunos lenguajes los símbolos  $\top$  y  $\perp$  son fórmulas bien formadas ya sea porque se les considera como fórmulas atómicas, como conectivos de aridad cero, o porque se introducen como la abreviación de alguna fórmula<sup>1</sup> en el lenguaje, en cualquier caso la interpretación corresponde con sus respectivos valores de verdad constantes, 0 para  $\perp$  y 2 para  $\top$ .

Como hemos dicho explícitamente cual será el conjunto de letras proposicionales  $P$ , cual el de los símbolos auxiliares  $A$  y cual la sintaxis  $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ , entonces a menos que sea necesario cuando hablemos de un lenguaje, e implícitamente de  $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ , sólo basta con especificar el conjunto de conectivos.

---

<sup>1</sup>Los términos *fórmula* y *fórmula bien formada* son sinónimos.

## 1.1 Lógica

La piedra angular en la construcción de este trabajo es, sin duda, la definición del concepto de Lógica. Sin embargo, como se menciona en [10] tal definición no es tarea sencilla.

“Definir formalmente el concepto de lógica, sistema o teoría formal no es una tarea sencilla. A lo largo del tiempo tanto el concepto, como su alcance han sufrido grandes modificaciones. En [20] y en [26] podemos encontrar algunas de las definiciones más aceptadas.” [10, p.10-11]

El concepto de sustitución se utiliza en la definición de lógica y por eso lo introducimos enseguida, la definición que presentamos aquí es una generalización de la definición de Sustitución que se puede encontrar en [27].

**Definición 2** [10] *Dado un lenguaje  $\mathcal{L}$ , una **sustitución de átomos**, denotada como,  $\sigma$  es un conjunto  $\{p_1/\beta_1, p_2/\beta_2, \dots, p_n/\beta_n\}$  donde  $p_i \in \text{Atom}(\mathcal{L})$ ,  $p_i \neq p_j$  si  $i \neq j$  y  $\beta_i \in \text{Form}(\mathcal{L})$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . **La sustitución  $\sigma$  aplicada a una fórmula bien formada  $\alpha$** , denotada por  $\sigma(\alpha)$  o por  $\alpha[p_1/\beta_1, p_2/\beta_2, \dots, p_n/\beta_n]$ , es la fórmula que se obtiene al reemplazar cada ocurrencia de  $p_i$  en  $\alpha$  por la fórmula  $\beta_i$  para toda  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  de manera simultánea. **La sustitución  $\sigma$  aplicada a un conjunto de fórmulas bien formadas  $\Gamma$**  es el conjunto  $\sigma(\Gamma) = \{\sigma(\alpha) \mid \alpha \in \Gamma\}$ . **La sustitución  $\sigma$  aplicada a la pareja  $(\Gamma, \alpha)$**  es  $\sigma(\Gamma, \alpha) = (\sigma(\Gamma), \sigma(\alpha))$ .*

Ahora podemos definir lo que entenderemos por lógica, necesitamos de una definición que unifique las formas en las que se presentan las lógicas tanto de manera sintáctica como semántica por lo que la siguiente definición es una variante más amplia de la que se brinda en [13].

**Definición 3** *Dado un lenguaje  $\mathcal{L}$ , una **lógica  $\mathbf{L}$**  es un conjunto de parejas ordenadas  $\{(\mathcal{T}, \varphi) \mid \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\text{Form}(\mathcal{L})), \varphi \in \text{Form}(\mathcal{L})\}$  que cumple que sus elementos son cerrados bajo **sustitución de átomos**, y el conjunto formado por las segundas componentes es cerrado bajo **Modus Ponens**, más específicamente:*

## CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO

### 1.1. LÓGICA

---

1. Si  $(\Gamma, \alpha) \in \mathbf{L}$ , y  $\sigma$  es una sustitución, entonces  $\sigma(\Gamma, \alpha) \in \mathbf{L}$ .
2. Si  $(\Gamma, \alpha) \in \mathbf{L}$  y  $(\Gamma, \alpha \rightarrow \beta) \in \mathbf{L}$ , entonces  $(\Gamma, \beta) \in \mathbf{L}$ .

Cuando  $(\Gamma, \alpha)$  es un elemento de la lógica  $\mathbf{L}$ , lo denotamos por  $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \alpha$ , si  $\Gamma = \emptyset$  decimos que  $\alpha$  es un **teorema** y lo escribiremos como  $\vdash_{\mathbf{L}} \alpha$ . Omitiremos el subíndice cuando la lógica quede clara por el contexto.

Observe que en esta definición no estamos imponiendo la existencia de un conectivo  $\rightarrow$ , sólo estamos pidiendo que en el supuesto de que la lógica tenga un conectivo de implicación, este debe satisfacer *Modus Ponens*, si la lógica no contiene tal conectivo hay ningún requisito que satisfacer con lo que respecta al primer punto.

**Definición 4** *Dados dos lenguajes  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  tales que el conjunto de conectivos de  $\mathcal{L}_1$  está contenido en el conjunto de conectivos de  $\mathcal{L}_2$ , y dos lógicas  $\mathbf{L}_1$  en  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathbf{L}_2$  en  $\mathcal{L}_2$ . Decimos que  $\mathbf{L}_2$  es una **extensión** de  $\mathbf{L}_1$ , si  $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_2$ . Además, dada una lógica  $\mathbf{L}$ , denotamos al conjunto de todas las extensiones de  $\mathbf{L}$  con  $Ext(\mathbf{L})$ .*

Algunos sinónimos del hecho que  $\mathbf{L}_2$  sea una extensión de  $\mathbf{L}_1$ , son que  $\mathbf{L}_1$  es más débil que  $\mathbf{L}_2$  o a su vez que  $\mathbf{L}_2$  es más fuerte que  $\mathbf{L}_1$ .

**Definición 5** *Dados dos lenguajes  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  tales que el conjunto de conectivos de  $\mathcal{L}_1$  esté contenido en el conjunto de conectivos de  $\mathcal{L}_2$  y dos lógicas  $\mathbf{L}_1$  en  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathbf{L}_2$  en  $\mathcal{L}_2$  respectivamente, se dice que  $\mathbf{L}_2$  es una **extensión conservativa** de  $\mathbf{L}_1$  si  $\mathbf{L}_2$  es una extensión de  $\mathbf{L}_1$  y cualquier teorema de  $\mathbf{L}_2$  en el lenguaje  $\mathcal{L}_1$  es un teorema en  $\mathbf{L}_1$ .*

De la Definición 3 podemos ver que dado un lenguaje  $\mathcal{L}$ , buscar lógicas es investigar que conjuntos de parejas ordenadas  $(\Gamma, \alpha)$  en el producto cartesiano  $\mathcal{P}(Form(\mathcal{L})) \times Form(\mathcal{L})$ , son cerrados bajo sustitución y son tales que el conjunto formado por sus segundos elementos es cerrado bajo *Modus Ponens*. Esto que a primera vista parece fácil, supone sin embargo conocer exactamente cuáles son todos los elementos que componen una lógica, lo cual ya no resulta tan sencillo. Es más usual que a partir de un lenguaje  $\mathcal{L}$  se establezcan mecanismos para decidir

si una pareja  $(\Gamma, \alpha)$  pertenece a la lógica  $\mathbf{L}$ . Los dos procedimientos para hacer esto son: **Teoría de prueba** y **Teoría de modelos**. En las siguientes secciones hablamos sobre estos enfoques.

## 1.2 Teoría de Prueba

La **Teoría de Prueba** o algunas ocasiones llamada también **Teoría de la Demostración** se basa como su nombre sugiere en la construcción de una prueba o de una demostración de  $\alpha$  a partir de un conjunto de hipótesis  $\Gamma$  que valide la pertenencia de  $(\Gamma, \alpha)$  a la lógica  $\mathbf{L}$  y únicamente está basada en la sintaxis. La definición de *prueba* o *demostración* en una lógica  $\mathbf{L}$  varía [26]. Los métodos más comunes son:

- Tipo Hilbert o sistema axiomático.
- Cálculo de secuentes o secuentes de Gentzen.
- Deducción natural (Gentzen, Quine, Fitch, Berry).
- Tableaux (Beth, Hintikka).
- Resolución (J. Robinson).

Una de las ventajas que tiene la Teoría de Prueba es la concepción de las demostraciones como objetos matemáticos. Como mencionamos en la *Introducción*, entre los aportes de este trabajo se encuentra brindar sendos sistemas de prueba para las lógicas  $\mathbf{L3A_G}$  y  $\mathbf{L3B_G}$ , el tipo de sistema de prueba del que dotamos a estas lógicas es un sistema tipo Hilbert, por lo tanto a continuación presentamos este concepto.

### 1.2.1 Sistemas tipo Hilbert

En lógica, un sistema tipo Hilbert, a veces llamado cálculo de Hilbert, sistema deductivo estilo Hilbert o sistema de Hilbert-Ackermann, es un tipo de sistema de deducción formal atribuido a Gottlob Frege y David Hilbert. Una característica de los sistemas tipo Hilbert es que tienen un gran número de esquemas de axiomas

**CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO**  
1.2. TEORÍA DE PRUEBA

---

y un pequeño conjunto de reglas de inferencia, en contraposición a los sistemas de Deducción Natural que incluyen muchas reglas de deducción y pocos o ningún esquema de axioma. Los sistemas tipo Hilbert más comunes tienen varios esquemas de axiomas y una sola regla de inferencia en el caso proposicional y dos para el caso predicativo, siendo estos *Modus Ponens* para el caso proposicional y *Modus Ponens* y *Generalización* para el caso predicativo [10].

**Definición 6** *Dado un lenguaje  $\mathcal{L}$  y  $\alpha \in Form(\mathcal{L})$ , una **instancia** de  $\alpha$  es cualquier fórmula bien formada  $\sigma(\alpha)$ , siempre que  $\sigma$  sea una sustitución en  $\mathcal{L}$ .*

Por ejemplo, si  $\alpha$  es la fórmula bien formada  $(p \wedge q) \rightarrow q$ , entonces tomando la sustitución  $\sigma = \{p/\beta, q/\gamma\}$  tenemos que  $(\beta \wedge \gamma) \rightarrow \gamma$  es una instancia de  $\alpha$ . Por cada sustitución diferente, tendremos una instancia diferente para una fórmula dada. Dicho de otro modo, una fórmula tiene una infinidad de instancias y todas ellas tienen la misma estructura sintáctica.

**Definición 7** *Sean  $\mathcal{L}$  un lenguaje y  $\Gamma, \Delta \subset Form(\mathcal{L})$  conjuntos finitos, Decimos que una relación binaria  $\mathbf{R}$  entre teorías<sup>2</sup> de  $\mathcal{L}$ , es una **regla de inferencia**, si para cualquier  $(\Gamma, \Delta) \in \mathbf{R}$  y cualquier sustitución  $\sigma$  se tiene que  $(\sigma(\Gamma), \sigma(\Delta)) \in \mathbf{R}$ . Cuando se tiene que  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  y  $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$  se acostumbra escribir la regla  $\mathbf{R}$  simplemente como:*

$$\frac{\gamma_1 \dots \gamma_n}{\delta_1 \dots \delta_m} \mathbf{R}$$

En virtud de esta definición tenemos que sólo es relevante la estructura sintáctica para la correcta aplicación de una regla de inferencia. Más aún, en el caso particular que  $\Delta = \{\delta_1\}$  tenemos que  $\frac{\Gamma}{\delta_1} \mathbf{R}$ . Nos referiremos a este hecho diciendo que  $\alpha$  es una consecuencia de  $\Gamma$ , vía la regla de inferencia  $\mathbf{R}$ . Una de las reglas de inferencia más famosa en caso de que no sea la más conocida y de la que hablamos en la Definición 3 es *Modus Ponens*, esta regla queda representada como:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi} \mathbf{MP}$$

---

<sup>2</sup> $R \subset \mathcal{P}(Form(\mathcal{L})) \times \mathcal{P}(Form(\mathcal{L}))$

una de sus instancias es:

$$\frac{p \rightarrow q \quad p}{q} \text{MP}$$

en esta instancia particularmente tenemos que  $q$  es consecuencia de  $p$  y  $p \rightarrow q$  vía MP.

**Definición 8** Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje proposicional, un **sistema de prueba tipo Hilbert** o una **axiomática**, es un pareja ordenada  $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ , que tiene como primer elemento a un subconjunto de fórmulas bien formadas  $\mathcal{A}$  y cuyos elementos serán denominados **esquemas de axioma**. Su segundo elemento es un conjunto  $\mathcal{R}$  de reglas de inferencia.

**Definición 9** Sean  $\mathcal{L}$  un lenguaje proposicional,  $\alpha \in \text{Form}(\mathcal{L})$  y  $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$  una axiomática. Una **prueba** o **demostración** para  $\alpha$  en  $\langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$  es una sucesión finita de fórmulas  $\{\beta_i\}_{i=1}^n$  donde  $\beta_n = \alpha$  y cada elemento de la sucesión es una instancia de un esquema de axioma en  $\mathcal{A}$  o es consecuencia de fórmulas previas aplicando algún elemento de  $\mathcal{R}$ .

Si una fórmula  $\alpha$  tiene una demostración en la axiomática  $\mathbb{A} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$  decimos que es un **teorema en  $\mathbb{A}$** , esto será denotado como  $\vdash_{\mathbb{A}} \alpha$ . Se puede construir una lógica tomando la colección de todos los teoremas en una axiomática dada  $\mathbb{A} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ , como se establece en la siguiente proposición.

**Proposición 1** Sean  $\mathcal{L}$  un lenguaje y  $\mathbb{A}$  una axiomática. La **lógica generada por  $\mathbb{A}$**  se define como el conjunto  $\{(\emptyset, \alpha) \mid \vdash_{\mathbb{A}} \alpha\}$  y forma una lógica.

**Demostración** Sea  $\mathbf{A} := \{(\emptyset, \alpha) \mid \vdash_{\mathbb{A}} \alpha\}$ , debemos mostrar que  $\mathbf{A}$  es cerrado bajo sustitución y en caso de que *Modus Ponens* sea elemento de  $\mathcal{R}$ , el conjunto de las segundas componentes cerrado bajo *Modus Ponens*.

- Para demostrar que es cerrado bajo sustituciones supongamos que  $(\emptyset, \alpha) \in \mathbf{A}$ , si  $\sigma = \{p_1/\beta_1, p_2/\beta_2, \dots, p_n/\beta_n\}$  es una sustitución, entonces la aplicación de esta sustitución a los elementos que conforman la prueba de  $\alpha$  genera una demostración para la instancia de  $\alpha$  bajo la sustitución  $\sigma$  y así  $\sigma(\emptyset, \alpha) \in \mathbf{A}$ .

**CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO**  
1.2. TEORÍA DE PRUEBA

---

- Veamos que el conjunto de las segundas componentes es cerrado bajo *Modus Ponens*. Sean  $(\emptyset, \alpha_1), (\emptyset, \alpha_2) \in \mathbf{A}$  y supongamos que  $\alpha_1, \alpha_2$  son dos fórmulas susceptibles a la aplicación de *Modus Ponens*, sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\alpha_1 = \varphi \rightarrow \psi$  y  $\alpha_2 = \varphi$ . Si  $\{\beta_i\}_{i=1}^m$  es una demostración de  $\alpha_1$  y  $\{\gamma\}_{i=1}^n$  es una demostración de  $\alpha_2$ , entonces la sucesión  $\{\theta_i\}_{i=1}^{m+n+1}$  es una demostración de  $\psi$ , donde  $\{\theta_i\}_{i=1}^m = \{\beta_i\}_{i=1}^m$ ;  $\{\theta_i\}_{i=m}^{m+n} = \{\gamma\}_{i=1}^n$  y  $\theta_{m+n+1} = \psi$  se obtiene de la aplicación de *Modus Ponens* entre  $\theta_m$  y  $\theta_{m+n}$ . Por lo tanto  $(\emptyset, \psi) \in \mathbf{A}$ , como se quería demostrar. ■

Si  $\mathbf{L}$  es la lógica generada por la axiomática  $\mathbb{A} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$  y  $\mathbf{L}'$  la lógica generada por la axiomática  $\mathbb{A}' = \langle \mathcal{A}', \mathcal{R}' \rangle$ , donde  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$  y  $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$ , entonces  $\mathbf{L}' \in \text{Ext}(\mathbf{L})$  es decir  $\mathbf{L}'$  es una extensión de  $\mathbf{L}$ . Un sistema axiomático se puede extender básicamente de dos formas, agregando axiomas o agregando reglas de inferencia, esto se precisa en la siguiente definición.

**Definición 10** Sea  $\mathbb{A} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$  una axiomática y sean  $\mathcal{A}'$  y  $\mathcal{R}'$  conjuntos de axiomas y reglas de inferencia respectivamente, entonces  $\mathbb{A}' = \langle \mathcal{A} \cup \mathcal{A}', \mathcal{R} \rangle$  es una **axiomática extendida mediante axiomas** y  $\mathbb{A}'' = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \cup \mathcal{R}' \rangle$  es una **axiomática extendida mediante reglas de inferencia**.

En la definición previa es claro que la lógica generada por  $\mathbb{A}'$  es una extensión de la generada por  $\mathbb{A}$ , también la lógica generada por  $\mathbb{A}''$  es una extensión de la generada por  $\mathbb{A}$ . Si  $\mathbf{L}$  es la lógica generada por  $\mathbb{A}$  denotamos por  $\mathbf{L} + \mathcal{A}'$  a la lógica generada por  $\mathbb{A}'$  y por  $\mathbf{L} + \mathcal{R}'$  a la generada por  $\mathbb{A}''$ . Vale la pena mencionar que una axiomática se puede extender simultáneamente por axiomas y reglas.

En el caso que  $\mathbf{L}, \mathcal{A}'$  y  $\mathcal{R}'$  no tengan el mismo lenguaje, el lenguaje de  $\mathbf{L} + \mathcal{A}'$  y  $\mathbf{L} + \mathcal{R}'$  será respectivamente la unión de los lenguajes correspondientes. Enseguida presentamos el concepto de deducción, o consecuencia lógica.

**Definición 11** Sea  $\mathbb{A} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$  una axiomática en el lenguaje proposicional  $\mathcal{L}$  y sea  $\Gamma \subset \text{Form}(\mathcal{L})$ . Decimos que  $\beta \in \text{Form}(\mathcal{L})$  es **consecuencia lógica** de  $\Gamma$  si existe una sucesión finita de fórmulas  $\{\beta_i\}_{i=1}^n$  donde  $\beta_n = \beta$  y cada  $\beta_i$  es una instancia de

## CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO

### 1.3. RELACIONES DE CONSECUENCIA TARSKIANA

---

un esquema de axioma, o una instancia de una fórmula en  $\Gamma$  o bien consecuencia de fórmulas previas aplicando alguna regla de inferencia en  $\mathbb{A}$  y lo denotamos por  $\Gamma \vdash_{\mathbb{A}} \beta$ . Observe que si  $\Gamma = \emptyset$ , entonces  $\beta$  es un teorema en  $\mathbb{A}$ .

De forma análoga a la Proposición 1, la teoría formada por las consecuencias lógicas es también una lógica como se enuncia en la siguiente proposición.

**Proposición 2** Sean  $\mathcal{L}$  un lenguaje y  $\mathbb{A}$  una axiomática. El conjunto de consecuencias lógicas  $\{(\Gamma, \alpha) \mid \Gamma \vdash_{\mathbb{A}} \alpha\}$  forma una lógica.

En este trabajo estudiamos las lógicas que se forman por el conjunto de consecuencias lógicas de una axiomática.

### 1.3 Relaciones de Consecuencia Tarskiana

**Definición 12** [1] Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje proposicional, una relación binaria  $\vdash$  entre teorías y fórmulas bien formadas que satisface las siguientes tres condiciones:

**Reflexividad** Si  $\psi \in \mathcal{T}$ , entonces  $\mathcal{T} \vdash \psi$ .

**Monotonicidad** Si  $\mathcal{T} \vdash \psi$  y  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ , entonces  $\mathcal{T}' \vdash \psi$ .

**Transitividad** Si  $\mathcal{T} \vdash \psi$  y  $\mathcal{T}', \psi \vdash \phi$ , entonces  $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \vdash \phi$ .<sup>3</sup>

se llama **relación de consecuencia Tarskiana**. Los símbolos  $\mathcal{T} \vdash \varphi$  se leen como:  $\mathcal{T}$  deduce a  $\varphi$ .

Las condiciones impuestas en la definición de relación de consecuencia Tarskiana tienen que ver con el poder deductivo que se exige para este tipo de estructura. Que una relación de consecuencia Tarskiana sea reflexiva, obliga a que las teorías deduzcan a sus elementos; por otro lado monotonía indica que si con una teoría  $\mathcal{T}$  podemos deducir una fórmula  $\varphi$ , entonces con cualquier otra teoría que contenga a  $\mathcal{T}$  seguiremos deduciendo a  $\varphi$ . Finalmente transitividad, también conocida como corte, nos dice que si podemos deducir a una fórmula  $\psi$  con una teoría  $\mathcal{T}$ , entonces esta fórmula puede ser eliminada de las hipótesis si dentro de estas ya se tiene a  $\mathcal{T}$ .

---

<sup>3</sup>La unión de teorías,  $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$ , lo cual es también una teoría, se denota como  $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$  y si se trata de una teoría  $\{\varphi\}$ , simplemente como  $\varphi$ .

**CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO**  
**1.3. RELACIONES DE CONSECUENCIA TARSKIANA**

---

**Definición 13** Sea  $\mathcal{L}$  un lenguaje proposicional. Una relación de consecuencia tarskiana  $\vdash$  para  $\mathcal{L}$  es:

- **estructural**, si para cada sustitución  $\sigma$ , se cumple que cada vez que  $\mathcal{T} \vdash \psi$ , entonces  $\sigma(\mathcal{T}) \vdash \sigma(\psi)$ .
- **no trivial**, si existe alguna teoría  $\mathcal{T} \neq \emptyset$  y alguna fórmula  $\psi$  tal que  $\mathcal{T} \not\vdash \psi$ .
- **finitaria**, si para cada teoría  $\mathcal{T}$  y cada fórmula  $\psi$  si  $\mathcal{T} \vdash \psi$ , entonces existe una teoría finita  $\Gamma \subseteq \mathcal{T}$  tal que  $\Gamma \vdash \psi$ .

**Definición 14** Dado un lenguaje  $\mathcal{L}$ , una **lógica proposicional**  $\vdash_{\mathcal{L}}$ , es una relación de consecuencia tarskiana estructural y no trivial en el lenguaje, se llama **finitaria** si la relación lo es.

La utilidad de una lógica depende de los conectivos que contenga, conectivos particularmente importantes son: implicación, conjunción, disyunción y negación. En la siguiente definición pedimos algunas condiciones sobre conectivos binarios para que puedan ser considerados como conjunciones, disyunciones o implicaciones.[1]

**Definición 15** Sea  $\vdash_{\mathcal{L}}$  una lógica proposicional en el lenguaje  $\mathcal{L}$  con conectivos binarios  $\wedge$ ,  $\vee$  y  $\rightarrow$ , decimos que:

- $\wedge$  es una **conjunción** para  $\mathcal{L}$ , cuando:  $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \wedge \psi$  sii  $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$  y  $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ .
- $\vee$  es una **disyunción** para  $\mathcal{L}$ , cuando:  $\mathcal{T}, \varphi \vee \psi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$  sii  $\mathcal{T}, \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$  y  $\mathcal{T}, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$ .
- $\rightarrow$  es una **implicación** para  $\mathcal{L}$ , cuando:  $\mathcal{T}, \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \psi$  sii  $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \rightarrow \psi$ .

decimos que  $\vdash_{\mathcal{L}}$  es una lógica **seminormal** si tiene al menos uno de estos conectivos, si tiene a los tres conectivos se llama **normal**.

La Definición 15 no es la única caracterización para los conectivos, en la Definición 16 postulamos condiciones sobre los conectivos para llamarlos *Conectivos Clásicos*. En la Proposición 3 se establecen algunas relaciones entre las condiciones pedidas para un mismo conectivo. Vale la pena hacer hincapié en el hecho de que

**CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO**  
**1.3. RELACIONES DE CONSECUENCIA TARSKIANA**

---

en esta parte del trabajo las lógicas se están considerando únicamente como relaciones de consecuencia tarskiana estructurales. Cuando hablamos sobre Teoría de Modelos en la Sección 1.4 y específicamente en la Definición 21 pedimos condiciones sobre los conectivos pero desde el punto de vista justamente de Teoría de Modelos e igualmente establecemos relaciones entre estas definiciones.

**Definición 16** [15] *Sea  $\vdash_{\mathcal{L}}$  una lógica proposicional en el lenguaje  $\mathcal{L}$  con conectivos binarios  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ , y un conectivo unario  $\neg$  decimos que:*

- *Un operador unario  $\neg$  es una **Negación Clásica**, si*

$$\mathcal{T}, \neg\varphi \vdash \psi \text{ y } \mathcal{T}, \neg\varphi \vdash \neg\psi \text{ implican que } \mathcal{T} \vdash \varphi.$$

- *Un operador binario  $\wedge$  es una **Conjunción Clásica** si satisface:*

1.  $\mathcal{T}, \varphi \wedge \psi \vdash \varphi$
2.  $\mathcal{T}, \varphi \wedge \psi \vdash \psi$
3.  $\mathcal{T}, \varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$

- *Un operador binario  $\vee$  es una **Disyunción Clásica** si satisface:*

1.  $\mathcal{T}, \varphi \vdash \varphi \vee \psi$
2.  $\mathcal{T}, \psi \vdash \varphi \vee \psi$
3.  $\mathcal{T}, \varphi \vdash \sigma$  y  $\mathcal{T}, \psi \vdash \sigma$  implica que  $\mathcal{T}, \varphi \vee \psi \vdash \sigma$

- *Un operador binario  $\rightarrow$  es una **Implicación Clásica** si satisface:*

1.  $\mathcal{T} \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
2.  $\mathcal{T} \vdash \varphi$  y  $\mathcal{T} \vdash \varphi \rightarrow \psi$  implica que  $\mathcal{T} \vdash \psi$
3.  $\mathcal{T} \vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$

**Proposición 3** *Sea  $\vdash_{\mathcal{L}}$  una lógica proposicional en el lenguaje  $\mathcal{L}$ , entonces:*

- *Un conectivo  $\wedge$  es una conjunción si y sólo si es una conjunción clásica.*
  - *Un conectivo  $\vee$  es una disyunción si y sólo si es una disyunción clásica.*
-

**CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO**  
**1.3. RELACIONES DE CONSECUENCIA TARSKIANA**

---

- Si un conectivo  $\rightarrow$  es una implicación, entonces es una implicación clásica.

**Demostración** Sean  $\vdash_{\mathcal{L}}$  una lógica proposicional en el lenguaje  $\mathcal{L}$ .

- Supongamos que  $\wedge$  es una conjunción. Por Reflexividad  $\varphi \wedge \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \wedge \psi$  y después al aplicar Monotonía  $\mathcal{T}, \varphi \wedge \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \wedge \psi$ . De aquí por las primeras dos condiciones para conjunción tenemos  $\mathcal{T}, \varphi \wedge \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$  y  $\mathcal{T}, \varphi \wedge \psi \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ . Nuevamente, por Reflexividad se tiene  $\varphi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$  y  $\psi \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ , de donde al aplicar Monotonía se llega a  $\mathcal{T}, \varphi, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$  y  $\mathcal{T}, \varphi, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ ; y por la tercera condición pedida para conjunción  $\mathcal{T}, \varphi, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \wedge \psi$ . Es decir, si el conectivo  $\wedge$  es una conjunción, entonces también es una conjunción clásica.
- Supongamos que  $\wedge$  es una conjunción clásica, entonces:
  - Si además suponemos que  $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \wedge \psi$ , como  $\mathcal{T}, \varphi \wedge \psi \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ , usando Transitividad se obtiene  $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ . Por otro lado al aplicar Transitividad entre  $\mathcal{T}, \varphi \wedge \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$  y  $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \wedge \psi$  se obtiene  $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ .
  - Ahora supongamos que  $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \psi$  y  $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ , como  $\mathcal{T}, \varphi, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \wedge \psi$ , entonces al aplicar Transitividad primero entre  $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \psi$  y  $\mathcal{T}, \varphi, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \wedge \psi$  se obtiene  $\mathcal{T}, \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \wedge \psi$  y nuevamente por Transitividad entre esta fórmula y  $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$  se obtiene  $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \wedge \psi$ .

Con esto probamos que una conjunción clásica es una conjunción.

- Sea  $\vee$  un disyunción esto es:  $\mathcal{T}, \varphi \vee \psi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$  si y sólo si  $\mathcal{T}, \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$  y  $\mathcal{T}, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$ . Por Reflexividad y Monotonía se puede construir  $\mathcal{T}, \varphi \vee \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \vee \psi$ , entonces  $\mathcal{T}, \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \vee \psi$  y  $\mathcal{T}, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \vee \psi$ . También  $\mathcal{T}, \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$  y  $\mathcal{T}, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$  implica que  $\mathcal{T}, \varphi \vee \psi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$ , luego  $\vee$  es una disyunción clásica.
- Sea  $\vee$  una disyunción clásica, entonces  $\mathcal{T}, \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$  y  $\mathcal{T}, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$  implica que  $\mathcal{T}, \varphi \vee \psi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$ . Supongamos que  $\mathcal{T}, \varphi \vee \psi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$ . Como  $\vee$  es una disyunción clásica se cumple  $\mathcal{T}, \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \vee \psi$ , al aplicar Transitividad entre estas fórmulas se tiene  $\mathcal{T}, \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$ . Si aplicamos Transitividad entre  $\mathcal{T}, \varphi \vee \psi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$  y  $\mathcal{T}, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \vee \psi$  se concluye  $\mathcal{T}, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$ , con todo esto  $\vee$  es una disyunción.

**CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO**  
**1.3. RELACIONES DE CONSECUENCIA TARSKIANA**

---

- Resta demostrar que  $\rightarrow$  es una implicación, entonces es una implicación clásica. Supongamos que  $\mathcal{T}, \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \psi$  si y sólo si  $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \rightarrow \psi$ .
  - Por Reflexividad sabemos que  $\varphi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$  de aquí por Monotonía se obtiene  $\mathcal{T}, \varphi, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$ , entonces  $\mathcal{T}, \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \psi \rightarrow \varphi$  y  $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ .
  - Si  $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$  y  $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \rightarrow \psi$ , entonces  $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$  y  $\mathcal{T}, \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ , al aplicar Transitividad tenemos  $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \psi$ .
  - Por Reflexividad  $\varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \rightarrow \psi$  y al aplicar Monotonía se obtiene  $\mathcal{T}, \varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \rightarrow \psi$  de aquí se sigue:

$$\mathcal{T}, \varphi \rightarrow \psi, \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \psi$$

Análogamente, se puede construir  $\mathcal{T}, \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma), \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \psi \rightarrow \sigma$  y de aquí

$$\mathcal{T}, \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma), \varphi, \psi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$$

Al aplicar Transitividad a estas dos relaciones se sigue que

$$\mathcal{T}, \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma), \varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash_{\mathcal{L}} \sigma$$

y al aplicar la hipótesis tres veces:

$$\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \left( \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma) \right) \rightarrow \left( (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma) \right)$$

Con esto concluimos que  $\rightarrow$  es una implicación clásica. ■

Las relaciones de consecuencia desde la perspectiva que las acabamos de presentar se podrían considerar como parte de Teoría de Prueba, ya que sólo nos basamos en la sintaxis para saber si una fórmula bien formada pertenece a una lógica.

De la misma manera que sucedió con la lógica generada por una axiomática y con el conjunto de consecuencias lógicas, una lógica proposicional obtenida mediante una relación de consecuencia tarskiana satisface las condiciones de ser lógica, i.e. es cerrada bajo sustituciones y *Modus Ponens*. Veamos la siguiente proposición.

**Proposición 4** *Una lógica proposicional  $\vdash_{\mathcal{L}}$  en el lenguaje  $\mathcal{L}$ , es una lógica.*

**Demostración**  $\vdash_{\mathcal{L}}$  es una relación de consecuencia estructural y esto garantiza que sea cerrada bajo sustitución. Veamos que es cerrada bajo *Modus Ponens*, supongamos que  $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi \rightarrow \psi$ , donde  $\rightarrow$  es una implicación, por la Definición 15 se cumple que  $\mathcal{T}, \varphi \vdash_{\mathcal{L}} \psi$  si también se cumple  $\vdash_{\mathcal{L}} \varphi$  aplicando transitividad tenemos que  $\vdash_{\mathcal{L}} \psi$ , como queríamos probar. ■

## 1.4 Teoría de Modelos

En contraposición a la *Teoría de prueba*, que únicamente toma en consideración la sintaxis o el conjunto de reglas que definen las sucesiones que se consideran demostraciones y así decidir si una fórmula bien formada es un teorema, la *Teoría de Modelos* o *Semántica* emplea interpretaciones del lenguaje para que de acuerdo al significado de sus símbolos, se verifique si una fórmula bien formada es una tautología. Se trata del estudio de las interpretaciones de los lenguajes formales, en donde las interpretaciones son asignaciones de significados a sus símbolos, y condiciones para establecer el grado de verdad de sus fórmulas.

Dado un lenguaje formal, la construcción de una semántica *ad hoc* tiene como finalidad la caracterización de los conectivos en el lenguaje formal. Existen diferentes tipos de semántica entre los que encontramos:

1. Semánticas inducidas por matrices.
2. Semánticas algebraicas.
3. Semánticas topológicas.
4. Tablas semánticas.
5. Semánticas tipo Kripke o relacionales.

En [1] se dice que la forma semántica más estándar para definir lógicas es usando las estructuras llamadas matrices multivaluadas, matrices deterministas, matrices ordinarias, matrices multivaluadas o sencillamente matrices. En este trabajo usamos

estas estructuras cuando estudiamos a las lógicas desde el punto de vista de Teoría de Modelos, por lo que introducimos a continuación este concepto.

### 1.4.1 Semánticas Inducidas por Matrices

**Definición 17** [1] Una **matriz multivaluada** para un lenguaje  $\mathcal{L}$  es una estructura del tipo  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ , donde:

- $\mathcal{V}$  es un conjunto no vacío de valores de verdad.
- $\mathcal{D}$  es un subconjunto no vacío propio de  $\mathcal{V}$ , llamado el conjunto de valores designados de  $\mathcal{V}$ .
- $\mathcal{O}$  asocia una función  $n$ -aria  $\tilde{\delta}_{\mathcal{M}} : \mathcal{V}^n \rightarrow \mathcal{V}$  a cada conectivo  $n$ -ario  $\diamond$  de  $\mathcal{L}$ .

**Definición 18** [1] Sea  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ , una matriz para el lenguaje  $\mathcal{L}$  y sea  $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ . Una matriz  $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{V}', \mathcal{D}', \mathcal{O}' \rangle$  para  $\mathcal{L}'$  se denomina **expansión de la matriz  $\mathcal{M}$  para el lenguaje  $\mathcal{L}'$**  si  $\mathcal{V} = \mathcal{V}'$ ,  $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$  y  $\mathcal{O}(\diamond) = \mathcal{O}'(\diamond)$  para cada conectivo  $\diamond$  de  $\mathcal{L}$ .

Denotamos al conjunto  $\mathcal{V} \setminus \mathcal{D}$  como  $\overline{\mathcal{D}}$ , el conjunto  $\mathcal{D}$  de valores designados es usado para definir satisfactibilidad y validez.

**Definición 19** [1] Sea  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$  una matriz para  $\mathcal{L}$

- Una  **$\mathcal{M}$ -valuación** para  $\mathcal{L}$  es una función  $v : \text{Form}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{V}$  tal que para cada conectivo  $n$ -ario  $\diamond$  de  $\mathcal{L}$  y cada  $\psi_1, \dots, \psi_n \in \text{Form}(\mathcal{L})$  se cumple que:

$$v(\diamond(\psi_1, \dots, \psi_n)) = \tilde{\delta}(v(\psi_1), \dots, v(\psi_n))$$

al conjunto de todas las  $\mathcal{M}$ -valuaciones lo denotamos con  $\Lambda_{\mathcal{M}}$ .

- Una valuación  $v \in \Lambda_{\mathcal{M}}$  es un  **$\mathcal{M}$ -modelo** de una fórmula  $\psi$  si pertenece al conjunto de las valuaciones que hacen designada a la fórmula  $\psi$ , es decir al conjunto:

$$\text{mod}_{\mathcal{M}}(\psi) = \{v \in \Lambda_{\mathcal{M}} \mid v(\psi) \in \mathcal{D}\}$$

los  $\mathcal{M}$ -modelos de una teoría  $\mathcal{T}$  son los elementos del conjunto

$$\text{mod}_{\mathcal{M}}(\mathcal{T}) = \bigcap_{\psi \in \mathcal{T}} \text{mod}_{\mathcal{M}}(\psi)$$

## CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO

### 1.4. TEORÍA DE MODELOS

---

- Decimos que una fórmula  $\psi$  es  $\mathcal{M}$ -**satisfactible** si  $\text{mod}_{\mathcal{M}}(\psi) \neq \emptyset$ . Una teoría  $\mathcal{T}$  es  $\mathcal{M}$ -satisfactible si  $\text{mod}_{\mathcal{M}}(\mathcal{T}) \neq \emptyset$ .

Es posible generar una relación de consecuencia Tarskiana partiendo de una matriz  $\mathcal{M}$  y definiendo la relación de modelado entre teorías y fórmulas mediante contenciones de conjuntos de modelos. Una teoría modela a una fórmula cuando los  $\mathcal{M}$ -modelos de la primera están contenidos en los  $\mathcal{M}$ -modelos de la segunda, veamos la siguiente proposición.

**Proposición 5** [1] Sea  $\mathcal{M}$  una matriz en lenguaje  $\mathcal{L}$ , la relación binaria  $\models_{\mathcal{M}}$  entre teorías y fórmulas definida como:  $\mathcal{T} \models_{\mathcal{M}} \psi$  si y sólo si  $\text{mod}_{\mathcal{M}}(\mathcal{T}) \subseteq \text{mod}_{\mathcal{M}}(\psi)$ , es una relación de consecuencia Tarskiana llamada **relación de consecuencia tarskiana inducida por  $\mathcal{M}$**  y se denota por  $\models_{\mathcal{M}}$ .

**Demostración** Se debe verificar que  $\models_{\mathcal{M}}$  es reflexiva, monótona y transitiva.

- Supongamos que  $\varphi \in \mathcal{T}$ , entonces cualquier valuación que modela a  $\mathcal{T}$  modela a  $\varphi$  y por ende  $\mathcal{T} \models_{\mathcal{M}} \varphi$ .
- Para la monotonía, de acuerdo con la definición de modelos de una teoría se cumple que  $\text{mod}_{\mathcal{M}}(\mathcal{T}) \subset \text{mod}_{\mathcal{M}}(\mathcal{T}')$  si  $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ , los modelos de una teoría no aumentan al aumentar los elementos de ella.
- Supongamos que  $\mathcal{T} \models_{\mathcal{M}} \psi$  y que  $\mathcal{T}', \psi \models_{\mathcal{M}} \varphi$ . Si los modelos de  $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$  no estuvieran contenidos en los modelos de  $\varphi$  es decir si  $\text{mod}_{\mathcal{M}}(\mathcal{T} \cup \mathcal{T}') \not\subseteq \text{mod}_{\mathcal{M}}(\varphi)$  debería existir una valuación que modele a cada elemento de  $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$  y no así a  $\varphi$  lo cual contradice las hipótesis, de donde se sigue la transitividad.

■

La siguiente proposición le asocia una lógica a cada matriz multivaluada tomando como base la relación de consecuencia Tarskiana obtenida mediante modelos, su demostración se puede consultar en [24, 25].

**Proposición 6** Para cada lenguaje proposicional  $\mathcal{L}$  y una matriz  $\mathcal{M}$  cuyo conjunto de valores de verdad sea finito,  $\models_{\mathcal{M}}$  es una lógica proposicional.

## CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO

### 1.4. TEORÍA DE MODELOS

---

Nos toca ahora hablar de conectivos desde la perspectiva que brindan las matrices multivaluadas. En breve damos condiciones que permiten, por ejemplo, distinguir una conjunción de una disyunción. También definimos *Simetría* y *Extensión Conservativa*, para ello usamos los conceptos de operador  $\mathcal{A}$ -cerrado y  $\mathcal{A}$ -limitado de la siguiente definición.

**Definición 20** Sean  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$  una matriz para el lenguaje  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$  y  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{V}$ . Un conectivo  $n$ -ario  $\diamond$  de  $\mathcal{L}$  se llama:

- $\mathcal{A}$ -cerrado si  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$  implica que  $\diamond(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}$ .
- $\mathcal{A}$ -limitado si  $\diamond(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}$  implica que  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ .

Ahora definimos conectivos que llamamos *neoclásicos* su nombre se puede comprender fácilmente si se hace la identificación de valor designado con valor verdadero y no designado con falso. Estas condiciones son generalizaciones de las que satisfacen y de alguna manera definen la naturaleza de los conectivos en Lógica Clásica.

**Definición 21** [15] Sea  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$  una matriz para el lenguaje  $\mathcal{L}$ .

- Un conectivo unario  $\neg$  es una **Negación Neoclásica**, si  $\neg p \in \overline{\mathcal{D}}$  si y sólo si  $p \in \mathcal{D}$ , es decir que  $\neg p$  es no designado si y sólo si  $p$  es designado.
- Un conectivo binario  $\wedge$  es una **Conjunción Neoclásica**, si y sólo si se tiene que es  $\mathcal{D}$ -cerrado y  $\mathcal{D}$ -limitado. En otros términos una conjunción es designada si y sólo ambos conjuntandos lo son.
- Un conectivo binario  $\vee$  es una **Disyunción Neoclásica**, si y sólo si se tiene que es  $\overline{\mathcal{D}}$ -cerrado y  $\overline{\mathcal{D}}$ -limitado. Dicho de otra forma, una disyunción es no designada si y sólo si cada disyuntando es no designado.
- Un conectivo  $\rightarrow$  es una **Implicación Neoclásica**, cuando  $a_1 \rightarrow a_2 \in \mathcal{D}$  si y sólo si  $a_1 \in \overline{\mathcal{D}}$  o  $a_2 \in \mathcal{D}$ . Equivalentemente, el único caso en que una implicación es no designada es cuando el antecedente es designado y el consecuente no lo es.

## CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO

### 1.4. TEORÍA DE MODELOS

---

**Definición 22** [9] Un operador multivaluado  $\otimes$  es una **Extensión Conservativa** de un operador bivaluado si la restricción del operador multivaluado  $\otimes$  a los valores del operador bivaluado coinciden.

**Definición 23** [9] Un operador binario  $\otimes$  es **Simétrico** si  $\otimes(\varphi, \psi) = \otimes(\psi, \varphi)$  para cualesquiera fórmulas  $\varphi$  y  $\psi$ .

La siguiente proposición vincula los conectivos vistos desde la teoría de prueba hacia la teoría de modelos, relacionando las definiciones de conectivos clásicos con neoclásicos.

**Proposición 7** Negaciones, conjunciones, disyunciones e implicaciones neoclásicas definen respectivamente negaciones, conjunciones, disyunciones e implicaciones clásicas para la relación  $\models$ .

**Demostración** Damos una prueba para el caso de la implicación, las demostraciones de los otros casos son análogas. Supongamos que  $\rightarrow$  es una implicación neoclásica. Veamos que se satisfacen cada una de las condiciones de la definición de implicación clásica. Supongamos que  $\varphi$  y  $\psi$  son dos fórmulas bien formadas y  $\rightarrow$  es una implicación neoclásica.

Supongamos que  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$  toma valor no designado para alguna valuación  $v$ , esto implica que para esta misma valuación  $\varphi$  tomaría un valor designado y  $\psi \rightarrow \varphi$  no designado. Esto último obliga a que  $\varphi$  sea no designado, lo cual es una contradicción, por lo tanto  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$  debe ser designado.

Si tenemos que  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$  es no designado, por definición de implicación neoclásica, la fórmula  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)$  debe ser designada y  $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)$  no, de donde  $\varphi$  y  $\psi$  tienen que ser designados y  $\sigma$  no, contradiciendo que  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)$  es designado, luego  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$  es designado.

## CAPÍTULO 1. MARCO TEÓRICO

### 1.4. TEORÍA DE MODELOS

---

Si suponemos que  $\mathcal{T} \models_{\mathcal{M}} \varphi$  y  $\mathcal{T} \models_{\mathcal{M}} \varphi \rightarrow \psi$ , entonces se debe cumplir que cualquier valuación que hace válido a  $\mathcal{T}$  fuerza que  $\varphi$  y  $\varphi \rightarrow \psi$  sean designados, por tanto  $\psi$  debe también ser designado y así tenemos que  $\mathcal{T} \models_{\mathcal{M}} \psi$ . ■



## Capítulo 2

# Lógicas paraconsistentes

*“I predict a time when there will be mathematical investigations of calculi containing contradictions, and people will actually be proud of having emancipated themselves from contradictions.”* L. Wittgenstein

Cuando hablamos de *Lógica Paraconsistente* estamos hablando de lógicas que permiten estudiar teorías inconsistentes no triviales, una teoría es inconsistente si contiene una fórmula bien formada tal que ella y su negación son teoremas, por otro lado una teoría es trivial si cualquier fórmula en su lenguaje es un teorema. Si la lógica implícita de una teoría es la Lógica Clásica o Intuicionista, la inconsistencia y la trivialidad son equivalentes en el sentido que suponer una implica la otra y viceversa. Entonces si queremos cambiar esto debemos permitir lógicas en la que suponer inconsistencia no nos conduzca a trivialidad.

Los inicios de la paraconsistencia se remontan a los primeros estudios sistemáticos donde se rechaza o se restringe el *Principio de no Contradicción* que dice que una fórmula y su negación no pueden ser verdaderos simultáneamente, esta ley es una de las leyes básicas de la Lógica Aristotélica además del *Principio de Identidad* y de la *Ley del Tercero Excluido*. La importancia del *Principio de no Contradicción* en la Lógica Clásica radica en el hecho de que si tenemos un conjunto de premisas donde

## CAPÍTULO 2. LÓGICAS PARACONSISTENTES

### 2.1. RESEÑA HISTÓRICA

---

existe alguna contradicción, entonces es posible deducir cualquier consecuencia, lo que se conoce como *explosión* lo que hace que la teoría se trivialice y pierda su utilidad.

## 2.1 Reseña Histórica

La lógica paraconsistente se relaciona con otras lógicas no clásicas, por ejemplo con la lógica dialéctica y la lógica relevante, las lógicas multivaluadas y la lógica difusa, la teoría general de la vaguedad, la teoría de los objetos de Meinong, así como con la última tesis lógica de Wittgenstein [12].

El estudio de lógicas paraconsistentes además de permitir la construcción de teorías paraconsistentes, también da la posibilidad de estudiar paradojas lógicas y semánticas y por supuesto obtener una mejor comprensión de lo que es la negación. En el siguiente fragmento del trabajo de Walter Carnielli et al. se hace notar que las contradicciones en la ciencia, al menos en la Lógica, la Filosofía y la Matemática, no son algo novedoso.

“The status of contradiction in logic, philosophy and mathematics has a long history. It was discussed by the presocratics, and received momentum from Aristotle in his defense of non-contradiction. It was deeply discussed by Łukasiewicz and others from Russell to Meinong. It is likely to proceed for centuries, as far as the philosophical aspects of the dispute are concerned.” [12]

La paraconsistencia estudia teorías contradictorias no triviales, las lógicas paraconsistentes por su parte estudian si es posible y filosóficamente justificable tener teorías contradictorias y aún así poder realizar inferencias razonables. Jan Łukasiewicz y Nikolái Vasíliev son los precursores de la paraconsistencia pero no los primeros en construir sistemas lógicos paraconsistentes, Stanisław Jaśkowski y Newton da Costa son los primeros en hacerlo. Jaśkowski en *Un calcul des propositions pour les systèmes déductifs contradictoires* de 1948 [16], se pregunta sobre la posibilidad de construir un cálculo proposicional en el que se satisfaga que:

## CAPÍTULO 2. LÓGICAS PARACONSISTENTES

### 2.1. RESEÑA HISTÓRICA

---

- Cuando sea aplicado a sistemas contradictorios, no deduzca cualquier proposición.
- Sea lo suficientemente rico para permitir inferencias prácticas.
- Tenga una justificación intuitiva.

y la solución que propone es su Lógica Discusiva  $D_2$ , *The two-valued discursive system of the sentential calculus  $D_2$* .

A mediados del siglo pasado Newton da Costa, sin tener conocimiento del trabajo de Jaśkowski, comenzó a desarrollar sus ideas sobre la importancia del estudio de teorías contradictorias y en 1958 propuso su *Principio de Tolerancia en Matemáticas* que establece que desde el punto de vista sintáctico y semántico cualquier teoría es permisible siempre que esta no sea trivial. En 1989, Graham Priest y Richard Routley escribieron que con el trabajo de da Costa, se alcanzaba algo novedoso con respecto a lo que hasta la fecha se había hecho, no eran matrices lógicas o traducciones de la lógica modal sino toda una familia de lógicas paraconsistentes, los sistemas  $C_n$  para  $1 \leq n \leq \omega$ . Cada uno de estos sistemas no valida el *Principio de no Contradicción* formulado como  $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$  así como tampoco que a partir de premisas contradictorias sea deducible cualquier fórmula, es decir cada uno de estos sistemas es paraconsistente genuino. La jerarquía  $C_n$  se extendió a cálculo de predicados de primer orden con igualdad  $C_n^=$  para  $1 \leq n \leq \omega$  y a una jerarquía de cálculo de descripciones. [12]

“Contradictory theories do exist. Whether that is a consequence of the incorrect description of a contradictory world, or just a temporary state of our knowledge, or perhaps the result of a particular language that we have chosen to describe the world, conflicting observational criteria, or superpositions of world views, contradictions are apparently unavoidable in our theories.” [12]

No podemos evitar las contradicciones en las teorías, por lo que es mejor que aprendamos a trabajar con ellas y mientras más conozcamos sobre ellas más utilidad podremos encontrar cuando se presenten en nuestro camino.

## 2.2 Lógicas Trivaluadas

Los primeros sistemas en ser llamados *Paraconsistentes Genuinos* son las lógicas trivaluadas **L3A** y **L3B** presentadas en [9], es por ello que un buen punto de partida para estudiar lógicas paraconsistentes genuinas lo brinda el marco de las lógicas trivaluadas. Los sistemas trivaluados que presentamos tienen una estructura básica formada por tres valores de verdad 0, 1 y  $2^1$ ; algunos conectivos binarios entre los que están: disyunción, conjunción e implicación y una operación unaria de negación.

Algunas de las lógicas trivaluadas más famosas ya sea por su aplicación en computación o por su trascendencia histórica son expuestas a continuación, algunas de ellas son paraconsistentes. Las diferencias entre estas lógicas se deben principalmente a los conectivos que son tomados como primitivos, su interpretación y a los valores de verdad designados.

Presentamos estos sistemas mediante matrices multivaluadas en todos ellos el conjunto de valores de verdad es  $\mathcal{V} = \{0, 1, 2\}$ , en cada caso se especifica el conjunto de valores designados. Aunque en la mayoría de las lógicas se interpreta a la conjunción como el mínimo de los valores de los conjuntandos y a la disyunción como el máximo de los valores de los disyuntandos se da la interpretación de los conectivos mediante tablas de verdad, lo que corresponde con el conjunto  $\mathcal{O}$  del que hablamos en la Sección 1.4.1.

Hay otro conectivo del que también presentamos su tabla de verdad, es el conectivo obtenido mediante la abreviación  $N(x) := \varphi \wedge \neg\varphi$ . El interés en presentar este conectivo está fundamentado en la utilidad que tiene para la axiomatización de las lógicas **L3A<sub>G</sub>** y **L3B<sub>G</sub>**, que son las lógicas paraconsistentes genuinas extendidas con implicación de Gödel y queremos tener a la mano esta comparación con otras lógicas.

---

<sup>1</sup>En algunos textos prefieren usar los valores 0,  $\frac{1}{2}$ , 1. En este trabajo utilizamos estos valores para homogeneizar los sistemas presentados con el artículo [15].

**CAPÍTULO 2. LÓGICAS PARACONSISTENTES**  
2.2. LÓGICAS TRIVALUADAS

---

1. La lógica *PAC* con matriz  $\mathcal{M} = \{\mathcal{V}, \{1, 2\}, \mathcal{O}\}$ , esta lógica es paraconsistente.

$x$	$\neg x$	$\neg\neg x$	$N(x)$
0	2	0	0
1	1	1	1
2	0	2	0

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	1	2
2	0	1	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

*PAC*

2. La Lógica Trivaluada de Kleene,  $K_3$ , cuando se toma  $\mathcal{M} = \{\mathcal{V}, \{2\}, \mathcal{O}\}$  el sistema no tiene tautologías, no es paraconsistente. La conjunción, disyunción y negación son conectivos primitivos y la implicación está definida por  $a \rightarrow b = \neg a \vee b$ .

$x$	$\neg x$	$\neg\neg x$	$N(x)$
0	2	0	0
1	1	1	1
2	0	2	0

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	1	1	2
2	0	1	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

*Kleene*

3. La Lógica Trivaluada de Kleene, si  $\mathcal{M} = \{\mathcal{V}, \{1, 2\}, \mathcal{O}\}$ , se obtienen exactamente las tautologías clásicas, es paraconsistente.

$x$	$\neg x$	$\neg\neg x$	$N(x)$
0	2	0	0
1	1	1	1
2	0	2	0

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	1	1	2
2	0	1	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

*Kleene*

4. La lógica trivaluada de Łukasiewicz Ł3 con  $\mathcal{M} = \{\mathcal{V}, \{2\}, \mathcal{O}\}$ . Tiene como conectivos primitivos a la negación y a la implicación. Se trata de una lógica

**CAPÍTULO 2. LÓGICAS PARACONSISTENTES**  
2.2. LÓGICAS TRIVALUADAS

---

paraconsistente.

$x$	$\neg x$	$\neg\neg x$	$N(x)$
0	2	0	0
1	1	1	1
2	0	2	0

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	1	2	2
2	0	1	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

*Lukasiewicz*

5. La lógica  $G3$  con matriz  $\mathcal{M} = \{\mathcal{V}, \{2\}, \mathcal{O}\}$ , no es una lógica paraconsistente.

$x$	$\neg x$	$\neg\neg x$	$N(x)$
0	2	0	0
1	0	2	0
2	0	2	0

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$G3$

6. La lógica  $G3'$  con matriz  $\mathcal{M} = \{\mathcal{V}, \{2\}, \mathcal{O}\}$ , no es una lógica paraconsistente.

$x$	$\neg x$	$\neg\neg x$	$N(x)$
0	2	0	0
1	2	0	1
2	0	2	0

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$G3'$

7. La lógica  $CG3'$  con  $\mathcal{M} = \{\mathcal{V}, \{1, 2\}, \mathcal{O}\}$  es paraconsistente.

$x$	$\neg x$	$\neg\neg x$	$N(x)$
0	2	0	0
1	2	0	1
2	0	2	0

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$CG3'$

8. Dmitry Anatol'evich Bochvar construyó la lógica trivaluada sin sentido  $B_3$  con la intención de formalizar el problema de las paradojas semánticas. El valor 1

**CAPÍTULO 2. LÓGICAS PARACONSISTENTES**  
**2.2. LÓGICAS TRIVALUADAS**

---

representa conocimiento paradójico, su matriz es  $\mathcal{M} = \{\mathcal{V}, \{2\}, \mathcal{O}\}$ , los conectivos primitivos son  $\neg$ ,  $\wedge$  y un conectivo que denominó *external assertion* que tiene aridad  $n$  y toma valor de 0 únicamente cuando cada uno de los operandos toma valor 2. Los demás conectivos corresponden a las abreviaciones  $x \vee y := \neg(\neg x \wedge \neg y)$ ,  $x \rightarrow y := \neg x \vee y$  [18]. No es paraconsistente.

$x$	$\neg x$	$\neg\neg x$	$N(x)$
0	2	0	0
1	1	1	1
2	0	2	0

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	1	1	1
2	0	0	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	1
2	2	1	2

Bochvar



## Capítulo 3

# Lógicas Paraconsistentes Genuinas

*“We used to think that if we knew one, we knew two, because one and one are two. We are finding that we must learn a great deal more about **and**.”* A. Eddington.

Las Lógicas Paraconsistentes Genuinas fueron presentadas en el *5th World Congress of Paraconsistency* que tuvo lugar en Calcuta, India en febrero de 2014. Los sistemas paraconsistentes, como ya lo hemos mencionado en capítulos previos, permiten trabajar con inconsistencias sin llegar a teorías triviales. En palabras de Newton da Costa, uno de sus creadores, al hablar de la importancia de tales sistemas dice: *“Una importante característica de la lógica paraconsistente es que encuentra numerosas aplicaciones en Filosofía, Mecánica Cuántica, Inteligencia Artificial, Control de Tráfico, Medicina, Economía, Finanzas y Computación. Por lo que estamos en presencia de un área de la lógica que abre nuevas direcciones de investigación en Filosofía, Ciencia y Tecnología”* [5].

Al año siguiente de este congreso mundial de paraconsistencia, en 2015 se publican las memorias del *5th World Congress of Paraconsistency* y en el artículo:

## CAPÍTULO 3. LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS

### 3.1. NEGACIÓN PARACONSISTENTE

---

*Strong Three-valued Paraconsistent Logics*, sus autores Jean Yves Béziau y Anna Franceschetto, definen las Lógicas Paraconsistentes Genuinas aunque bajo el nombre de Lógicas Paraconsistentes Fuertes. Posteriormente en 2016, Jean Yves Béziau publica el artículo: *Two Genuine 3-Valued Paraconsistent Logics* donde analiza la naturaleza de los conectivos que pueden definir este tipo de lógicas tomando en cuenta para tal fin un conectivo unario: negación y dos conjuntivos binarios: conjunción y disyunción. Este estudio le permite concluir que sólo hay dos lógicas paraconsistentes genuinas trivaluadas. En este capítulo desarrollamos estos trabajos.

### 3.1 Negación Paraconsistente

Como hemos ya indicado, las lógicas paraconsistentes permiten trabajar con teorías inconsistentes no triviales. Esto lo logran a través de dos estrategias esenciales, o bien rechazando o bien restringiendo el *Principio de no Contradicción*. Este principio afirma que un objeto no puede ser y no ser al mismo tiempo. En lógica esto se traduce diciendo que una proposición y su negación no pueden ser verdaderas simultáneamente. Estos motivos nos conducen a estudiar el conectivo de negación y también a afirmar a algunos autores que una lógica paraconsistente es aquella en la que se encuentra una negación paraconsistente. Nosotros restringiremos el *Principio de no Contradicción*, la controversia estriba en la forma de cómo formular este principio.

Lo podemos hacer mediante lógicas inducidas por matrices, es decir mediante relaciones de consecuencia tarskiana estructurales con la forma:

$$\mathbf{EC} \quad \mathcal{T}, \varphi, \neg\varphi \models_{\mathcal{M}} \psi$$

conocida como *Principio de Explosión*. Usamos **EC** para indicar que se trata de *Explosión por Contradicción*. Cuando se dice que una lógica es explosiva es por que se valida este principio, por ejemplo, la Lógica Clásica es explosiva.

Explicamos enseguida la idea de esta formulación. El *Principio de Explosión*

---

**CAPÍTULO 3. LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS**  
**3.1. NEGACIÓN PARACONSISTENTE**

---

**EC** dice que a partir de una teoría donde se tengan como premisas una afirmación lógica y la negación de esta, es posible deducir cualquier afirmación. Si  $\models_{\mathcal{M}}$  es la lógica obtenida por la relación de consecuencia inducida por la matriz  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{O} \rangle$ , **EC** significa que cualquier valuación que haga designados a cada uno de los elementos de la teoría a la izquierda de  $\models_{\mathcal{M}}$  debe también hacer designado a  $\psi$ , y dado que  $\psi$  puede tomar un valor no designado, ya que tiene ninguna relación con los elementos de la teoría, la única opción que queda es que no existan valuaciones que hagan designados a  $\varphi$  y  $\neg\varphi$  simultáneamente.

Por la concepción general que tenemos de la conjunción, es decir la de aquel conectivo que es verdadero únicamente cuando sus dos conjuntandos lo son. Cuando sucede que  $\varphi$  y  $\neg\varphi$  son no designados al mismo tiempo uno espera que la conjunción de ambas fórmulas sea no designada y por tanto la negación de esta conjunción sea designada. Así que en un sistema donde sea cumpla el *Principio de no Contradicción*, uno espera que  $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$  sea un teorema, esto se denota como **NC** para referirnos a *Negación de una Contradicción*

$$\mathbf{NC} \quad \mathcal{T} \models_{\mathcal{M}} \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$$

Sin embargo, la definición de paraconsistencia de forma general se establece en términos de rechazar **EC**, aunque permite **NC**. Es decir que hay lógicas paraconsistentes en las que  $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$  es un teorema. También hay lógicas paraconsistentes, como la  $C_1$  de Newton da Costa, que rechazan tanto a **NC** como a **EC** y en el ejemplo siguiente vemos que es posible encontrar lógicas donde se rechaza **NC** pero se acepta **EC**.

**Ejemplo 1** Sea  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$  una matriz multivaluada con conectivos  $\neg$  y  $\wedge$  definidos por las siguientes tablas:

	$\neg$
0	2
1	1
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

### CAPÍTULO 3. LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS

#### 3.1. NEGACIÓN PARACONSISTENTE

---

tenemos entonces dos casos dependiendo como consideramos al conjunto de valores designados,  $\mathcal{D} = \{1, 2\}$  o  $\mathcal{D} = \{2\}$ , veamos que sucede en cada situación.

- En el caso  $\mathcal{D} = \{1, 2\}$ , existe una valuación que hace designado a una fórmula y a su negación simultáneamente, y por tanto no es válido **EC**. Sin embargo, cuando  $v(\varphi) = 1$  se tiene que  $v(\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)) = 1$  lo que hace válido **NC**.
- Cuando  $\mathcal{D} = \{2\}$ , tenemos que no existe valuación que haga designado a una fórmula y a su negación simultáneamente y por tanto es válido **EC** ya que los modelos de la teoría  $\{\varphi, \neg\varphi\}$  son el conjunto vacío y están por tanto contenidos en los modelos de cualquier otra fórmula aún cuando estos también sean el conjunto vacío. Por otro lado  $v(\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)) = 1$  cuando  $v(\varphi) = 1$ , que no es un valor designado y por tanto no es válido **NC**.

Con el Ejemplo 1 queda expuesto que no existe relación entre la ocurrencia de **EC** y **NC**, en este sentido decimos que son independientes. Esto motivó a estudiar lógicas donde no se validen ambas formulaciones simultáneamente, surgiendo así el concepto de Lógicas Paraconsistentes Genuinas, que presentamos en la Definición 24.

**Definición 24** Sea  $\mathcal{M}$  una matriz con conjunto de valores de verdad finito, la lógica  $\models_{\mathcal{M}}$  en la que para algunas fórmulas  $\varphi$  y  $\psi$  en el lenguaje se cumplan las condiciones siguientes:

1.  $\not\models_{\mathcal{M}} \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$
2.  $\varphi, \neg\varphi \not\models_{\mathcal{M}} \psi$

se denomina **Lógica Paraconsistente Genuina**.

Veamos ahora cómo deben ser los conectivos de negación, conjunción y disyunción en las Lógicas Paraconsistentes Genuinas, lo hacemos dentro del marco de las Lógicas Trivaluadas y empezamos por analizar el caso de la negación.

### 3.2 Negación Paraconsistente Genuina

Como buscamos una negación que sea una *Extensión Conservativa* de la negación en lógica clásica, entonces debemos partir de una tabla como la que se muestra en la Tabla 3.1. Bajo este supuesto, tenemos tres posibilidades para asignarle valor a  $n$ :  $n = 0$ ,  $n = 1$  y  $n = 2$ . Analizamos cada uno de estos casos. No fijamos postura sobre el conjunto de valores designados pudiendo ser  $\mathcal{D} = \{2\}$  o  $\mathcal{D} = \{1, 2\}$  y por tanto debemos analizar los subcasos que se generan.

$\varphi$	$\neg\varphi$
0	2
1	$n$
2	0

Tabla 3.1: Posiciones fijas en la negación

1. Para  $n = 0$ , tenemos la Tabla 3.2 y en este caso sin importar si el conjunto de valores designados es  $\mathcal{D} = \{1\}$  o  $\mathcal{D} = \{1, 2\}$ , ninguna valuación hace que  $\varphi$  y  $\neg\varphi$  sean designados simultáneamente, así **EC** es válido y por tanto no podemos obtener Lógicas Paraconsistentes Genuinas bajo este supuesto.

$\varphi$	$\neg\varphi$
0	2
1	0
2	0

Tabla 3.2: Negación, caso  $n = 0$

2. Para  $n = 1$ , tenemos la Tabla 3.3 y ahora dos subcasos dependiendo del conjunto de valores designados:
  - (a) Si  $\mathcal{D} = \{2\}$  ninguna valuación hace que  $\varphi$  y  $\neg\varphi$  sean designados simultáneamente, así **EC** es válido y consecuentemente tampoco podemos obtener Lógicas Paraconsistentes Genuinas en este caso.

## CAPÍTULO 3. LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS

### 3.2. NEGACIÓN PARACONSISTENTE GENUINA

---

- (b) Si  $\mathcal{D} = \{1, 2\}$  vemos que  $\varphi$  y  $\neg\varphi$  son designados cuando  $\varphi$  toma el valor 1. Esta negación rechaza **EC** por esta razón puede conducirnos a Lógicas paraconsistentes Genuinas. Debemos entonces analizar lo que sucede con la conjunción, sin embargo, postergamos este análisis hasta después de haber revisado los demás casos de la negación.

$\varphi$	$\neg\varphi$
0	2
1	1
2	0

Tabla 3.3: Negación, caso  $n = 1$

3. Para  $n = 2$ , tenemos la Tabla 3.4 y ahora dos subcasos dependiendo del conjunto de valores designados:

- (a) Si  $\mathcal{D} = \{2\}$ , tenemos un caso análogo al 3-(a) que como ya expusimos, carece de interés para nuestros fines.
- (b) Si  $\mathcal{D} = \{1, 2\}$  y  $\varphi$  toma el valor 1,  $\varphi$  y  $\neg\varphi$  son ambos designados. Así que esta negación rechaza **EC** y ahora debemos analizar lo que sucede con la conjunción.

$\varphi$	$\neg\varphi$
0	2
1	2
2	0

Tabla 3.4: Negación, caso  $n = 2$

En síntesis tenemos que los únicos dos casos de interés para, posiblemente, obtener Lógicas Paraconsistentes Genuinas son 2-(b) y 3-(b). Analicemos ahora la situación de la conjunción.

### 3.3 Conjunción Paraconsistente Genuina

Es necesario hacer énfasis en que el conjunto de valores designados en los únicos dos casos de interés, 2-(b) y 3-(b), es  $\mathcal{D} = \{1, 2\}$ . Como dijimos ya, los conectivos por los que tenemos interés son *Extensiones Conservativas* de sus correspondientes operadores bivaluados y que además de pedir que sean *Simétricos*, se pide que sean *Neoclásicos*. Esto implica que tengamos parcialmente definida una tabla para la conjunción, a saber, la Tabla 3.5, analizamos ahora como deben ser los valores de las variables  $x$  e  $y$  en cada caso.

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	$x$	$y$
2	0	$y$	2

Tabla 3.5: Tabla parcial de la conjunción

#### Caso 2-(b)

Primero analicemos que sucede con el valor de  $x$  en la Tabla 3.5:

1. No se puede dar el caso  $x = 0$ , pues se violaría el requisito de ser un conectivo neoclásico.
2. Si hacemos  $x = 1$ , entonces  $v(\neg(\varphi \wedge \neg\varphi))$  es siempre designado y por tanto no se rechaza **NC**. Este caso no es de interés.
3. Si  $x = 2$ , entonces  $v(\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)) = 0$  cuando  $v(\varphi) = 1$  y tenemos una Lógica Paraconsistente Genuina, donde falta escoger el valor de  $y$ . Para satisfacer neoclasicidad únicamente se debe descartar  $y = 0$ , por lo que tenemos dos opciones:  $y = 1$  o  $y = 2$

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	1
2	0	1	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	2
2	0	2	2

**CAPÍTULO 3. LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS**  
**3.3. CONJUNCIÓN PARACONSISTENTE GENUINA**

---

La segunda tabla se descarta por ser **molecular**<sup>1</sup>, entonces la lógica con conectivos

	$\neg$
0	2
1	1
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	1
2	0	1	2

es una Lógica Paraconsistente Genuina, con  $\mathcal{D} = \{1, 2\}$ .

**Caso 3-(b)**

En este caso conviene primero estudiar en la Tabla 3.5, los posibles valores de la variable  $y$ .

1. No se puede dar el caso  $y = 0$ , pues se violaría el requisito de ser un conectivo neoclásico.
2. Si hacemos  $y = 1$ , entonces  $v(\neg(\varphi \wedge \neg\varphi))$  es siempre designado y por tanto no se rechaza **NC**. Este caso no es de interés.
3. Si  $y = 2$ , entonces  $v(\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)) = 0$  cuando  $v(\varphi) = 1$  y tenemos una Lógica Paraconsistente Genuina. Falta escoger el valor de la variable  $x$ . Para satisfacer neoclasicidad únicamente se tienen dos posibilidades para la variable  $x$ :  $x = 1$  o  $x = 2$ . Esto genera las siguientes tablas:

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	2
2	0	2	2

Similármemente al Caso 2-(b), descartamos la segunda de estas tablas por ser molecular. La segunda Lógica Paraconsistente Genuina trivaluada está formada por los conectivos siguientes:

---

<sup>1</sup>Decimos que un conectivo  $n$ -ario  $\otimes(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ,  $n \geq 1$ , es molecular cuando el conjunto de los valores que toma no es igual al conjunto de valores de verdad.

**CAPÍTULO 3. LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS**  
**3.4. DISYUNCIÓN PARACONSISTENTE GENUINA**

---

	$\neg$
0	2
1	2
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

es una Lógica Paraconsistente Genuina, con  $\mathcal{D} = \{1, 2\}$ .

### 3.4 Disyunción Paraconsistente Genuina

Analizamos ahora el conectivo de disyunción para estas Lógicas Paraconsistentes Genuinas. Recordemos que estamos tomando únicamente en cuenta operadores *Simétricos*, *Neoclásicos* y *Extensiones Conservativas*. Esto hace que tengamos una tabla parcialmente definida para la disyunción, la Tabla 3.6, analizamos ahora como completar los valores de las variables  $x, y$  y  $z$  en cada una de las Lógicas Paraconsistentes Genuinas.

$\vee$	0	1	2
0	0	$x$	2
1	$x$	$y$	$z$
2	2	$z$	2

Tabla 3.6: Tabla parcial de la disyunción

Es de interés en lógica manipular los conectivos, por ejemplo, tratando de distribuir o asociar negaciones sobre las conjunciones y disyunciones, esto es lo que se conoce como Leyes de De Morgan. Las cuatro leyes de De Morgan básicas para la conjunción y disyunción son las siguientes:

- D1a**             $\neg(\varphi \wedge \psi) \models_{\mathcal{M}} \neg\varphi \vee \neg\psi$
- D1b**             $\neg\varphi \vee \neg\psi \models_{\mathcal{M}} \neg(\varphi \wedge \psi)$
- D2a**             $\neg(\varphi \vee \psi) \models_{\mathcal{M}} \neg\varphi \wedge \neg\psi$
- D2b**             $\neg\varphi \wedge \neg\psi \models_{\mathcal{M}} \neg(\varphi \vee \psi)$

**CAPÍTULO 3. LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS**  
**3.4. DISYUNCIÓN PARACONSISTENTE GENUINA**

---

Analizamos ahora lo que sucede con las lógicas que encontramos en la Sección 3.4 y las leyes de De Morgan, hacemos este análisis de manera independiente. Para brevedad del análisis realizamos este estudio bajo la siguiente denominación:

**Caso 1:** La lógica con tablas:

	$\neg$
0	2
1	2
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

**Caso 2:** La lógica con tablas:

	$\neg$
0	2
1	1
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	1
2	0	1	2

### 3.4.1 Caso 1

La Tabla 3.7 se puede calcular siguiendo las definiciones de los conectivos, los valores de las variables  $x, y$  y  $z$  están sujetos a que se cumplan las leyes de De Morgan. Notemos que las columnas correspondientes a las fórmulas  $\neg(\varphi \wedge \psi)$  y  $\neg\varphi \vee \neg\psi$  son las componentes de las formas  $D1a$  y  $D1b$  y están fijas, de donde se concluye que sin importar como se construya la disyunción la fórmula  $D1a$  se satisface mientras que la fórmula  $D1b$  queda imposibilitada.

Para hacer que se cumpla  $D2a$  debemos hacer que  $\neg z$  tome valor 0, esto sólo se consigue si  $z = 2$ . Sin embargo, para hacer que se cumpla  $D2b$  debemos pedir que el valor de  $\neg x$  esté en el conjunto  $\{1, 2\}$ . Este mismo comportamiento se tiene en el caso de  $\neg y$ . Debido a la naturaleza del conectivo negación, en este caso, no es posible que la negación tome valor 1, por tanto se debe cumplir que el valor de  $\neg x$  sea 2, lo cual deja la posibilidad de que  $x$  valga 0 o 1, pero para asegurar la neoclasicidad del conectivo se debe quedar que  $x = 1$ .

**CAPÍTULO 3. LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS**  
**3.4. DISYUNCIÓN PARACONSISTENTE GENUINA**

---

El mismo razonamiento se sigue para la variable  $y$ . Con esto la tabla de la disyunción, en el Caso 1, queda como la tabla estándar, es decir aquella tabla en la que el valor de la disyunción es el mínimo de los valores de los disyuntandos.

$\varphi$	$\psi$	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$
0	0	2	2	2	2
0	1	2	2	$\neg x$	2
0	2	2	2	0	0
1	0	2	2	$\neg x$	2
1	1	2	2	$\neg y$	2
1	2	0	2	$\neg z$	0
2	0	2	2	0	0
2	1	0	2	$\neg z$	0
2	2	0	0	0	0

Tabla 3.7: Componentes Leyes de De Morgan

### 3.4.2 Caso 2

Por medio de un análisis similar al presentado en la Sección 3.4.1, comenzamos por calcular la Tabla 3.8 siguiendo las definiciones de los conectivos del que llamamos **Caso 2** en la Sección 3.4. Notemos que la tercer columna, que corresponde a la fórmula  $\neg(\varphi \wedge \psi)$ , tiene todos sus valores fijos. Por otro lado, en la columna correspondiente a la fórmula  $\neg\varphi \vee \neg\psi$  los espacios faltantes sólo pueden ser llenados por algún valor designado, el cual denotamos por  $d_i$ . De aquí se concluye que  $D1a$  se satisface mientras que  $D1b$  no por culpa del quinto renglón, pues en el caso de que las fórmulas  $\varphi$  y  $\psi$  tomen ambas el valor 1,  $\neg\varphi \vee \neg\psi$  toma el valor designado  $d_3$ , mientras que la fórmula  $\neg(\varphi \wedge \psi)$  valdrá 0.

Para hacer que se cumpla  $D2a$  debemos hacer que  $\neg z$  tome valor 0, esto sólo se consigue si  $z = 2$ . También debemos pedir que el valor de  $\neg x$  esté en el conjunto  $\{1, 2\}$ , lo cual sólo permite que  $x$  valga 0 o 1, pero para asegurar la neoclasicidad del conectivo se debe quedar que  $x = 1$ .

**CAPÍTULO 3. LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS**  
**3.5. LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS TRIVALUADAS**

---

Para hacer cumplir  $D2b$  debemos hacer que el valor de  $\neg y$  esté en el conjunto  $\{1, 2\}$ . El mismo razonamiento que se usó para  $x$  nos permite concluir que  $y = 1$ . Por lo tanto tenemos misma tabla de la disyunción en ambas lógicas.

$\varphi$	$\psi$	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$
0	0	2	2	2	2
0	1	2	$d_1$	$\neg x$	1
0	2	2	2	0	0
1	0	2	$d_2$	$\neg x$	1
1	1	0	$d_3$	$\neg y$	2
1	2	1	$d_4$	$\neg z$	0
2	0	2	2	0	0
2	1	1	$d_5$	$\neg z$	0
2	2	0	0	0	0

Tabla 3.8: Componentes Leyes de De Morgan

### 3.5 Lógicas Paraconsistentes Genuinas Trivaluadas

Después de haber realizado un análisis exhaustivo de los conectivos negación, conjunción y disyunción, que bajo determinadas condiciones pueden dar lugar a Lógicas Paraconsistentes Genuinas Trivaluadas hemos encontrado a las dos únicas Lógicas Paraconsistentes Genuinas que se pueden definir de esta manera, a continuación presentamos las definiciones de estas lógicas, que están dadas a partir de una matriz multivaluada  $\mathcal{M}$ .

**Definición 25** Sea  $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2\}, \{1, 2\}, \mathcal{O} \rangle$  una matriz multivaluada, con conectivos  $\neg$ ,  $\wedge$  y  $\vee$ , entonces:

*La Lógica Paraconsistente Genuina Trivaluada L3A está definida por las siguientes tablas de verdad para sus conectivos:*

**CAPÍTULO 3. LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS**  
**3.5. LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS TRIVALUADAS**

---

	$\neg$
0	2
1	2
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

*L3A*

**Definición 26** Sea  $\mathcal{M} = \langle \{0, 1, 2\}, \{1, 2\}, \mathcal{O} \rangle$  una matriz multivaluada, con conectivos  $\neg$ ,  $\wedge$  y  $\vee$ , entonces:

La **Lógica Paraconsistente Genuina Trivaluada L3B** está definida por las siguientes tablas de verdad para sus conectivos:

	$\neg$
0	2
1	1
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	1
2	0	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

*L3B*

Las lógicas **L3A** y **L3B** de las Definiciones 25 y 26 por la forma en la que fueron construidas y los operadores que incluyen satisfacen que:

1. El conectivo  $\neg$  es una extensión conservativa de la negación para Lógica Clásica.
2. Los conectivos binarios,  $\wedge$  y  $\vee$  cumplen las siguientes propiedades:
  - (a) Son operadores Neoclásicos.
  - (b) Son operadores Simétricos.
  - (c) Son Extensiones Conservativas de sus correspondientes operadores bivaluados en Lógica Clásica.

---

**CAPÍTULO 3. LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS**  
**3.5. LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS TRIVALUADAS**

---

### 3.5.1 Algunas Propiedades de las Lógicas L3A y L3B

En esta parte presentamos algunas propiedades básicas de las Lógicas Paraconsistentes Genuinas Trivaluadas que presentamos en la Sección 3.5. Las demostraciones de las siguientes afirmaciones se siguen directamente de las tablas de verdad de estas lógicas y de la definición de  $\models_{\mathcal{L}}$ .

**Proposición 8** *Si  $\models_{L3A}$  y  $\models_{L3B}$  son las lógicas paraconsistentes genuinas trivaluadas de la Definiciones 25 y 26, entonces:*

1.  $\models_{L3A} \varphi \vee \neg\varphi$ .
2.  $\models_{L3B} \varphi \vee \neg\varphi$ .
3.  $\neg\neg\varphi \models_{L3A} \varphi$ .
4.  $\varphi \not\models_{L3A} \neg\neg\varphi$ .
5.  $\neg\neg\varphi \models_{L3B} \varphi$ .
6.  $\varphi \models_{L3B} \neg\neg\varphi$ .

**Proposición 9** *En ninguna de las lógicas  $\models_{L3A}$  y  $\models_{L3B}$  se cumple:*

- Si  $\mathcal{T}, \varphi \models_{\mathcal{L}} \psi$ , entonces  $\mathcal{T}, \neg\psi \models_{\mathcal{L}} \neg\varphi$ .
- Reducción al absurdo. Si  $T, \neg\varphi \models_{\mathcal{L}} \psi$  y  $T, \neg\varphi \models_{\mathcal{L}} \neg\psi$ , entonces  $T \models \varphi$ .

Debido a la propiedad 4 de la Proposición 8, además de las fórmulas de De Morgan  $D1a, D2b, D2a$  y  $D2b$ , que ya hemos estudiado, debemos analizar casos donde algunas de sus fórmulas contienen negación, por lo que en la Tabla 3.9 presentamos estas posibilidades. En las Proposiciones 10 y 11 indicamos cuales de estas propiedades se satisfacen para las lógicas **L3A** y **L3B**.

**CAPÍTULO 3. LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS**  
**3.5. LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS TRIVALUADAS**

---

$D1a$	$\neg(\varphi \wedge \psi) \models \neg\varphi \vee \neg\psi$	$D1b$	$\neg\varphi \vee \neg\psi \models \neg(\varphi \wedge \psi)$
$D2a$	$\neg(\varphi \vee \psi) \models \neg\varphi \wedge \neg\psi$	$D2b$	$\neg\varphi \wedge \neg\psi \models \neg(\varphi \vee \psi)$
$D3a$	$\neg(\neg\varphi \wedge \psi) \models \varphi \vee \neg\psi$	$D3b$	$\varphi \vee \neg\psi \models \neg(\neg\varphi \wedge \psi)$
$D4a$	$\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \models \neg\varphi \vee \psi$	$D4b$	$\neg\varphi \vee \psi \models \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$
$D5a$	$\neg(\neg\varphi \vee \psi) \models \varphi \wedge \neg\psi$	$D5b$	$\varphi \wedge \neg\psi \models \neg(\neg\varphi \vee \psi)$
$D6a$	$\neg(\varphi \vee \neg\psi) \models \neg\varphi \wedge \psi$	$D6b$	$\neg\varphi \wedge \psi \models \neg(\varphi \vee \neg\psi)$
$D7a$	$\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \models \varphi \vee \psi$	$D7b$	$\varphi \vee \psi \models \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
$D8a$	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \models \varphi \wedge \psi$	$D8b$	$\varphi \wedge \psi \models \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

Tabla 3.9: Leyes de De Morgan

**Proposición 10** *En la lógica **L3A** sólo se satisfacen las fórmulas:  $D1a$ ,  $D2a$ ,  $D2b$ ,  $D3a$ ,  $D4a$ ,  $D5a$ ,  $D6a$ ,  $D7a$   $D8a$ .*

**Proposición 11** *En la lógica **L3B** sólo se satisfacen las fórmulas:  $D1a$ ,  $D2a$ ,  $D2b$ ,  $D3a$ ,  $D4a$ ,  $D5a$ ,  $D5b$ ,  $D6a$ ,  $D6b$ ,  $D7a$ ,  $D8a$  y  $D8b$ .*



## Capítulo 4

# La Implicación en las Lógicas Paraconsistentes Genuinas

*“Logical consequences are the scarecrows of fools and the beacons of wise men.”*

Thomas H. Huxley

El conectivo de implicación es un conectivo básico en cualquier lógica. También este conectivo es imprescindible si es que se desea desarrollar teoría de prueba, debido a que una de las reglas de inferencia más comunes en Teoría de Prueba es *Modus Ponens* y su formulación está hecha en términos de implicación. En algunas ocasiones la implicación se toma como un conectivo primitivo y en otras se considera como abreviación de la combinación de otros conectivos, por ejemplo en Lógica Clásica se puede abreviar como:  $\varphi \rightarrow \psi := \neg\varphi \vee \psi$ .

En el Capítulo 3 definimos a las lógicas Paraconsistentes Genuinas como aquellas lógicas que rechazan las dos formulaciones más aceptadas del *Principio de no Contradicción*, posteriormente en las Secciones 3.2, 3.3 y 3.4 analizamos como deben ser los conectivos de negación, conjunción y disyunción para que definan Lógicas Paraconsistentes Trivaluadas Genuinas y encontramos las únicas dos lógicas con estas condiciones, **L3A** y **L3B** definidas en la Sección 3.5. En este Capítulo buscamos una implicación para extender estas lógicas.

## CAPÍTULO 4. LA IMPLICACIÓN EN LAS LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS

### 4.1. $\mathbf{L3A_G}$

---

Se busca una implicación que cumpla, en la medida de lo posible, las condiciones que satisfacen los demás operadores binarios en estas lógicas. Específicamente se pide que sea una *Extensión Conservativa y Neoclásica*. Por otro lado, la condición de *Simetría* no es una condición ordinaria en este tipo de operador. Además de estas condiciones pedimos que algunas fórmulas que consideramos importantes, como  $\neg\neg(\varphi \rightarrow \varphi)$  y la fórmula  $\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$  sean tautologías.

Para ambas lógicas  $\mathbf{L3A}$  y  $\mathbf{L3B}$ , la tabla de la implicación tiene nueve espacios y cada espacio puede ser ocupado por alguno de los 3 valores de verdad. Esto genera un abanico de posibilidades con un total de  $3^9 = 19863$  implicaciones diferentes, en cada caso.

En cada una de las lógicas  $\mathbf{L3A}$  y  $\mathbf{L3B}$ , analizamos estas poblaciones para determinar aquellas implicaciones que satisfagan los requisitos ya mencionados. Al final de cada caso se selecciona una implicación del conjunto de implicaciones posibles, dando lugar a las lógicas  $\mathbf{L3A_G}$  y  $\mathbf{L3B_G}$ . A continuación desarrollamos esto individualmente.

### 4.1 $\mathbf{L3A_G}$

Las restricciones combinadas de ser un conectivo *Neoclásico* y una *Extensión Conservativa* reducen drásticamente la población de implicaciones, a menos de un cinco por ciento, así que empezamos por ver las implicaciones que quedan después de aplicar estas condiciones. En primer lugar la condición impuesta para la implicación, de ser una *Extensión Conservativa*, hace que se fijen los lugares de las esquinas en la tabla de la implicación, ver Tabla 4.1.

Recordemos que la condición de que un conectivo de implicación  $\rightarrow$  sea *Neoclásico* significa que el valor de este es no designado cuando y sólo cuando el antecedente es designado y el consecuente no lo es, en términos esto queda expresado como:

$$\varphi \rightarrow \psi \in \overline{\mathcal{D}} \text{ sii } \varphi \in \mathcal{D} \text{ y } \psi \in \overline{\mathcal{D}}$$

**CAPÍTULO 4. LA IMPLICACIÓN EN LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

4.1. **L3A<sub>G</sub>**

→	0	1	2
0	2		2
1			
2	0		2

Tabla 4.1: Implicación tipo Extensión Conservativa

o de manera equivalente esa condición indica que el valor de la implicación es designado por alguno de los siguientes motivos: o el antecedente es no designado o el consecuente es designado, es decir:

$$\varphi \rightarrow \psi \in \mathcal{D} \text{ sii } \varphi \in \overline{\mathcal{D}} \text{ o } \psi \in \mathcal{D}$$

esta condición nos conduce a la Tabla 4.2, donde  $d_i$  representa un valor designado es decir 1 o 2.

→	0	1	2
0	$d_0$	$d_1$	$d_2$
1	0	$d_3$	$d_4$
2	0	$d_5$	$d_6$

Tabla 4.2: Implicación Neoclásica

La información combinada de las Tablas 4.1 y 4.2 fuerza a que la implicación  $\varphi \rightarrow \varphi$  tome la segunda columna de la Tabla 4.3 y si pretendemos que la fórmula  $\neg\neg(\varphi \rightarrow \varphi)$  de la tercer columna de la Tabla 4.3 sea designada, debemos hacer que  $d_3 = 2$ .

$\varphi$	$\varphi \rightarrow \varphi$	$\neg\neg(\varphi \rightarrow \varphi)$
0	2	2
1	$d_3$	0/2
2	2	2

Tabla 4.3:  $\neg\neg(\varphi \rightarrow \varphi)$

Con el análisis hecho hasta ahora tenemos una tabla parcial para la implicación con 8 posibilidades, ver Tabla 4.4. Ahora analicemos lo que sucede con la fórmula

**CAPÍTULO 4. LA IMPLICACIÓN EN LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**4.1. L3A<sub>G</sub>**

$\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$  en la Tabla 4.5. Si queremos que esta fórmula sea una tautología debemos hacer que  $d_5 = 1$ , para que en el renglón que corresponde a la valuación  $v(\varphi) = 2$  y  $v(\psi) = 1$ , la fórmula  $\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$  tome el valor 0.

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	$d_1$	2
1	0	2	$d_4$
2	0	$d_5$	2

Tabla 4.4: Implicación Neoclásica

Finalmente nos quedamos con 4 posibilidades, cuando los valores de  $d_1$  y  $d_4$  se toman del conjunto  $\mathcal{D}$ , estas cuatro posibilidades las presentamos en la Tabla 4.6.

$\varphi$	$\psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	$\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$
0	0	2	2	2
0	1	$d_1$	0/2	2
0	2	2	2	2
1	0	0	0	2
1	1	2	2	2
1	2	$d_4$	0/2	2
2	0	0	0	0
2	1	$d_5$	0/2	0
2	2	2	2	2

Tabla 4.5: Análisis de la fórmula  $\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$  en **L3A**

<table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <tr><td><math>\rightarrow</math></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	$\rightarrow$	0	1	2	0	2	2	2	1	0	2	2	2	0	1	2	<table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <tr><td><math>\rightarrow</math></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	$\rightarrow$	0	1	2	0	2	1	2	1	0	2	2	2	0	1	2	<table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <tr><td><math>\rightarrow</math></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	$\rightarrow$	0	1	2	0	2	2	2	1	0	2	1	2	0	1	2	<table border="1" style="border-collapse: collapse;"> <tr><td><math>\rightarrow</math></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	$\rightarrow$	0	1	2	0	2	1	2	1	0	2	1	2	0	1	2
$\rightarrow$	0	1	2																																																																
0	2	2	2																																																																
1	0	2	2																																																																
2	0	1	2																																																																
$\rightarrow$	0	1	2																																																																
0	2	1	2																																																																
1	0	2	2																																																																
2	0	1	2																																																																
$\rightarrow$	0	1	2																																																																
0	2	2	2																																																																
1	0	2	1																																																																
2	0	1	2																																																																
$\rightarrow$	0	1	2																																																																
0	2	1	2																																																																
1	0	2	1																																																																
2	0	1	2																																																																
$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$																																																																

Tabla 4.6: Candidatos a Implicaciones en **L3A**

## CAPÍTULO 4. LA IMPLICACIÓN EN LAS LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS

### 4.1. $L3A_G$

---

Antes de decantarnos por alguna de estas implicaciones presentamos algunas propiedades comunes en todas ellas. Empezamos por la regla de inferencia *Modus Ponens*.

**Proposición 12** *Si extendemos  $L3A$  con cualquiera de las implicaciones de la Tabla 4.6, la lógica que se obtiene satisface Modus Ponens, es decir si  $\varphi$  y  $\varphi \rightarrow \psi$  son tautologías, entonces  $\psi$  también lo es.*

**Demostración** Si suponemos que  $\varphi$  y  $\varphi \rightarrow \psi$  son tautologías y que  $\psi$  no lo es tendríamos una contradicción, pues  $\varphi$  debería tomar el valor 0. ■

Notemos que en la siguiente proposición las propiedades **P1** a **P8** son aquellas que definen de manera axiomática al fragmento positivo de la lógica intuicionista.

**Proposición 13** *Si extendemos  $L3A$  con alguna de las implicaciones de la Tabla 4.6, la lógica que se obtiene tiene como tautologías a las siguientes fórmulas:*

$$\mathbf{Pos1} := \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\mathbf{Pos2} := (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$$

$$\mathbf{Pos3} := (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$$

$$\mathbf{Pos4} := (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$$

$$\mathbf{Pos5} := \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$$

$$\mathbf{Pos6} := \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$$

$$\mathbf{Pos7} := \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$$

$$\mathbf{Pos8} := (\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \sigma))$$

$$\mathbf{CW2} := \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$$

$$\mathbf{Pierce} := ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$$

## CAPÍTULO 4. LA IMPLICACIÓN EN LAS LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS

### 4.1. $\mathbf{L3A_G}$

$$\mathbf{NI} := \neg\neg(\varphi \rightarrow \varphi)$$

$$\mathbf{DNI} := \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$$

$$\mathbf{WE} := \neg\varphi \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\mathbf{WC1} := (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\neg\neg\psi \rightarrow \neg\neg\varphi)$$

$$\mathbf{WC2} := (\neg\neg\psi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$$

$$\mathbf{AZ2} := \left( (\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \right) \rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$$

$$\mathbf{TAUT1} := (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \rightarrow \psi$$

**Demostración** La prueba de estos resultados se sigue de las definiciones de las tablas de verdad de los conectivos. ■

También hay algunas fórmulas que vale la pena mencionar que no se satisfacen en todas estas extensiones, como lo exhibe la Proposición 14.

**Proposición 14** *Ninguna de las extensiones de  $\mathbf{L3A}$  con alguna de las implicaciones de la Tabla 4.6 satisface:*

$$\mathbf{DNI2} := (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi) \rightarrow \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\mathbf{DNC1} := \neg\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)$$

**Demostración** Para mostrar que  $\mathbf{DNI2}$  no es tautología es suficiente con tomar una valuación  $v$ , tal que  $v(\varphi) = 1$  y  $v(\psi) = 0$ . En el caso de  $\mathbf{DNC1}$ , basta con hacer  $v(\varphi) = 1$   $v(\psi) = 2$ . ■

Un resultado interesante es que cualquiera de las extensiones que se pueden formar a partir de  $\mathbf{L3A}$  agregando alguna de las cuatro extensiones de la Tabla 4.6 satisface el Teorema de la Deducción, una herramienta de gran importancia cuando se desarrolla Teoría de Prueba. Ver Teorema 1.

**Teorema 1** *Si  $\mathbf{L}$  es alguna extensión de  $\mathbf{L3A}$  con  $I1, I2, I3$  o  $I4$ , entonces se cumple que:*

**CAPÍTULO 4. LA IMPLICACIÓN EN LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

4.1. **L3A<sub>G</sub>**

$$\varphi \models_{\mathbf{L}} \psi \text{ si y sólo si } \models_{\mathbf{L}} \varphi \rightarrow \psi.$$

**Demostración** Para probar la necesidad es suficiente con notar que en cualquiera de las implicaciones de la Tabla 4.6, cada vez que el antecedente y consecuente son ambos designados la implicación también lo es. Para la suficiencia si suponemos que  $\varphi \rightarrow \psi$  y  $\varphi$  son ambos designados, entonces  $\psi$  también debe serlo. ■

Una característica relevante en cualquier lógica es que contenga la constante lógica *Falsum*, la cual se denota por  $\perp$  y recibe el nombre de *bottom*, es una constante que siempre toma el valor 0 bajo cualquier valuación y **L3A** lo tiene.

**Proposición 15** *Si extendemos L3A con cualquier implicación de la Tabla 4.6, la lógica obtenida contiene la partícula  $\perp$  en la forma:  $\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi$  para cualquier fórmula  $\varphi$ . Esto significa que para cualquier fórmula  $\psi$ , el valor de  $\perp \rightarrow \psi$ , siempre es designado.*

**Demostración** Es suficiente con apreciar que dada cualquier valuación  $v$ , se tiene que  $v(\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi) = 0$ . Por lo tanto  $v(\perp \rightarrow \varphi) \in \{1, 2\}$ , para cualquiera de las implicaciones de la Tabla 4.6. ■

Al final de este proceso hemos decidido escoger la implicación de Gödel [4], ya que con esta implicación la lógica obtenida queda cercana a lógicas paraconsistentes interesantes tales como la lógica de da Costa [23] y particularmente con dos de sus extensiones, las lógicas  $G3'$  y  $CG3'$  [14]. Dejamos el estudio de las demás implicaciones como trabajo a futuro. Tenemos entonces la siguiente definición.

**Definición 27** *la lógica obtenida a partir de L3A agregando el conectivo de implicación de la lógica G3 se denota como L3A<sub>G</sub> y sus tablas de verdad se muestran en seguida.*

	$\neg$	$\wedge$	0	1	2	$\vee$	0	1	2	$\rightarrow$	0	1	2
0	2	0	0	0	0	0	0	1	2	0	2	2	2
1	2	1	0	1	2	1	1	1	2	1	0	2	2
2	0	2	0	2	2	2	2	2	2	2	0	1	2

L3A<sub>G</sub>

CAPÍTULO 4. LA IMPLICACIÓN EN LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS

4.2.  $L3B_G$

## 4.2 $L3B_G$

En esta parte del trabajo examinamos las implicaciones que podemos obtener para la lógica  $L3B$ , la forma en que lo hacemos es análoga a la que usamos en el caso de la lógica  $L3A$ . Ya vimos en la Sección 4.1, que la combinación de los requisitos pedidos a un operador de implicación de ser extensión conservativa y neoclásico, reducen radicalmente la población de implicaciones.

Por lo que hacemos un análisis similar para la lógica  $L3B$ , y empezamos por la exigencia de considerar sólo extensiones conservativas, lo que hace que se fijen los lugares de las esquinas en la Tabla 4.7.

$\rightarrow$	0	1	2
0	2		2
1			
2	0		2

Tabla 4.7: Implicación tipo Extensión Conservativa

Respetando la condición de que la implicación sea un conectivo Neoclásico llegamos a la Tabla 4.8, donde  $d_i$  representa un valor designado es decir 1 o 2.

$\rightarrow$	0	1	2
0	$d_0$	$d_1$	$d_2$
1	0	$d_3$	$d_4$
2	0	$d_5$	$d_6$

Tabla 4.8: Implicación Neoclásica

Las Tablas 4.7 y 4.8 nos dan 16 posibilidades que se presentan abreviadas en la Tabla 4.9. A diferencia de  $L3A$  donde el análisis de las dos fórmulas:

$$\neg\neg(\varphi \rightarrow \varphi)$$

$$\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$$

**CAPÍTULO 4. LA IMPLICACIÓN EN LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

4.2. **L3B<sub>G</sub>**

redujo el número de implicaciones. Para **L3B** este análisis no disminuye esta cifra, este fenómeno se explica principalmente por la forma de la negación de **L3B**, que no es molecular como en **L3A**. Presentamos en la Tabla 4.10 las 16 posibilidades de un conectivo de implicación con el que se puede extender la lógica **L3B**.

→	0	1	2
0	2	$d_1$	2
1	0	$d_3$	$d_4$
2	0	$d_5$	2

Tabla 4.9: Posibles Implicaciones

Tabla 4.10: Candidatos a implicación en **L3B**.

<table border="1"><tr><td>→</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	→	0	1	2	0	2	2	2	1	0	2	2	2	0	2	2	<table border="1"><tr><td>→</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	→	0	1	2	0	2	2	2	1	0	2	1	2	0	2	2	<table border="1"><tr><td>→</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	→	0	1	2	0	2	2	2	1	0	2	1	2	0	1	2	<table border="1"><tr><td>→</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	→	0	1	2	0	2	1	2	1	0	2	2	2	0	2	2
→	0	1	2																																																																
0	2	2	2																																																																
1	0	2	2																																																																
2	0	2	2																																																																
→	0	1	2																																																																
0	2	2	2																																																																
1	0	2	1																																																																
2	0	2	2																																																																
→	0	1	2																																																																
0	2	2	2																																																																
1	0	2	1																																																																
2	0	1	2																																																																
→	0	1	2																																																																
0	2	1	2																																																																
1	0	2	2																																																																
2	0	2	2																																																																
<i>I1</i>	<i>I2</i>	<i>I3</i>	<i>I4</i>																																																																
<table border="1"><tr><td>→</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	→	0	1	2	0	2	1	2	1	0	2	1	2	0	2	2	<table border="1"><tr><td>→</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	→	0	1	2	0	2	1	2	1	0	2	2	2	0	1	2	<table border="1"><tr><td>→</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	→	0	1	2	0	2	1	2	1	0	2	1	2	0	1	2	<table border="1"><tr><td>→</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	→	0	1	2	0	2	2	2	1	0	1	2	2	0	2	2
→	0	1	2																																																																
0	2	1	2																																																																
1	0	2	1																																																																
2	0	2	2																																																																
→	0	1	2																																																																
0	2	1	2																																																																
1	0	2	2																																																																
2	0	1	2																																																																
→	0	1	2																																																																
0	2	1	2																																																																
1	0	2	1																																																																
2	0	1	2																																																																
→	0	1	2																																																																
0	2	2	2																																																																
1	0	1	2																																																																
2	0	2	2																																																																
<i>I5</i>	<i>I6</i>	<i>I7</i>	<i>I8</i>																																																																
<table border="1"><tr><td>→</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	→	0	1	2	0	2	2	2	1	0	1	1	2	0	2	2	<table border="1"><tr><td>→</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	→	0	1	2	0	2	2	2	1	0	1	2	2	0	1	2	<table border="1"><tr><td>→</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	→	0	1	2	0	2	2	2	1	0	1	1	2	0	1	2	<table border="1"><tr><td>→</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	→	0	1	2	0	2	1	2	1	0	1	2	2	0	2	2
→	0	1	2																																																																
0	2	2	2																																																																
1	0	1	1																																																																
2	0	2	2																																																																
→	0	1	2																																																																
0	2	2	2																																																																
1	0	1	2																																																																
2	0	1	2																																																																
→	0	1	2																																																																
0	2	2	2																																																																
1	0	1	1																																																																
2	0	1	2																																																																
→	0	1	2																																																																
0	2	1	2																																																																
1	0	1	2																																																																
2	0	2	2																																																																
<i>I9</i>	<i>I10</i>	<i>I11</i>	<i>I12</i>																																																																
<table border="1"><tr><td>→</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	→	0	1	2	0	2	1	2	1	0	1	1	2	0	2	2	<table border="1"><tr><td>→</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	→	0	1	2	0	2	1	2	1	0	1	2	2	0	1	2	<table border="1"><tr><td>→</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	→	0	1	2	0	2	1	2	1	0	1	1	2	0	1	2	<table border="1"><tr><td>→</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	→	0	1	2	0	2	2	2	1	0	2	2	2	0	1	2
→	0	1	2																																																																
0	2	1	2																																																																
1	0	1	1																																																																
2	0	2	2																																																																
→	0	1	2																																																																
0	2	1	2																																																																
1	0	1	2																																																																
2	0	1	2																																																																
→	0	1	2																																																																
0	2	1	2																																																																
1	0	1	1																																																																
2	0	1	2																																																																
→	0	1	2																																																																
0	2	2	2																																																																
1	0	2	2																																																																
2	0	1	2																																																																
<i>I13</i>	<i>I14</i>	<i>I15</i>	<i>I16</i>																																																																

## CAPÍTULO 4. LA IMPLICACIÓN EN LAS LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS

### 4.2. $\mathbf{L3B_G}$

En las Proposiciones 16 y 17 se presentan propiedades que satisfacen las 16 lógicas que se pueden obtener al extender  $\mathbf{L3B}$  con alguna de las implicaciones presentadas en la Tabla 4.10. También en la Proposición 18 se muestran algunas fórmulas que no se cumplen en ninguna de estas extensiones. Las demostraciones de las Proposiciones 16 y 17 se siguen directamente de las tablas de verdad de las posibles extensiones.

**Proposición 16** *Si extendemos  $\mathbf{L3B}$  con cualquiera de las implicaciones de la Tabla 4.10, la lógica que se obtiene satisface Modus Ponens, es decir si  $\varphi$  y  $\varphi \rightarrow \psi$  son tautologías, entonces  $\psi$  también lo es.*

Las extensiones de  $\mathbf{L3B}$  igual que las extensiones de  $\mathbf{L3A}$ , también contienen a los axiomas del fragmento positivo de la Lógica Intuicionista, así como los axiomas **CW2**, **Pierce**, **NI**, **DNI** que también son tautologías en las extensiones de  $\mathbf{L3A}$ . Por otra parte contiene a las fórmulas **DNI2**, **DNC1** que no son tautologías en las extensiones de  $\mathbf{L3A}$ . Con esto se exhibe que las extensiones de  $\mathbf{L3B}$  no están contenidas en las extensiones de  $\mathbf{L3A}$ .

**Proposición 17** *Si extendemos  $\mathbf{L3B}$  con alguna de las implicaciones de la Tabla 4.10, la lógica que se obtiene tiene como tautologías a las siguientes fórmulas:*

$$\mathbf{Pos1} := \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\mathbf{Pos2} := (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$$

$$\mathbf{Pos3} := (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$$

$$\mathbf{Pos4} := (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$$

$$\mathbf{Pos5} := \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$$

$$\mathbf{Pos6} := \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$$

$$\mathbf{Pos7} := \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$$

$$\mathbf{Pos8} := (\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \sigma))$$

**CAPÍTULO 4. LA IMPLICACIÓN EN LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

4.2. **L3B<sub>G</sub>**

$$\mathbf{CW2} := \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$$

$$\mathbf{Pierce} := ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$$

$$\mathbf{NI} := \neg\neg(\varphi \rightarrow \varphi)$$

$$\mathbf{DNI} := \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$$

$$\mathbf{DNI2} := (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi) \rightarrow \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\mathbf{DNC1} := \neg\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)$$

La Proposición 18 muestra algunas fórmulas que no se satisfacen en ninguna de las extensiones de **L3B**, por ejemplo la fórmula **WE**, note que esta fórmula si es tautología en cualquiera de las extensiones de **L3A**. Lo cual implica que ninguna de las extensiones de **L3A** está contenida en alguna de las extensiones de **L3B**.

**Proposición 18** *En ninguna de las extensiones de **L3B** con alguna de las implicaciones de la Tabla 4.10 son tautologías las fórmulas siguientes:*

$$\mathbf{WE} := \neg\varphi \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\mathbf{WC1} := (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\neg\neg\psi \rightarrow \neg\neg\varphi)$$

$$\mathbf{WC2} := (\neg\neg\psi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$$

$$\mathbf{AZ2} := ((\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \neg\psi)) \rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$$

$$\mathbf{TAUT1} := (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \rightarrow \psi$$

**Demostración** Para mostrar que **TAUT1** y **WE** no son tautologías es suficiente con tomar la valuación  $v$  donde  $v(\varphi) = 1$  y  $v(\psi) = 0$ . En el caso de **WC1**, la valuación que hace  $v(\varphi) = 0$  y  $v(\psi) = 1$  muestra que no es tautología. Para **WC2**, consideramos  $v(\varphi) = 1$  y  $v(\psi) = 2$  y finalmente para la fórmula **AZ2**,  $v(\varphi) = 2$  y  $v(\psi) = 1$ . ■

Una situación similar a la que ocurre con las extensiones de **L3A**, donde cualquiera de ellas cumple el Teorema de la Deducción, también es el caso en las extensiones de **L3B**, como se enuncia en el Teorema 2, su demostración es análoga al caso **L3A**.

## CAPÍTULO 4. LA IMPLICACIÓN EN LAS LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS

### 4.2. $\mathbf{L3B_G}$

---

**Teorema 2** *Si  $\mathbf{L}$  es cualquier extensión de la lógica paraconsistente genuina  $\mathbf{L3B}$  al agregar alguna de las implicaciones de la Tabla 4.10, entonces se cumple:*

$$\varphi \models_{\mathbf{L}} \psi \text{ si y sólo si } \models_{\mathbf{L}} \varphi \rightarrow \psi.$$

**Proposición 19** *Si extendemos  $\mathbf{L3B}$  con cualquier implicación de la Tabla 4.10, la lógica obtenida contiene la partícula  $\perp$  en la forma:  $\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi)$  para cualquier fórmula  $\varphi$ . Esto significa que para cualquier fórmula  $\psi$ , el valor de  $\perp \rightarrow \psi$ , siempre es designado.*

En la Proposición 17 se han mencionado una lista de propiedades que satisfacen las extensiones de  $\mathbf{L3B}$ , dependiendo de la implicación seleccionada, las tablas de estas fórmulas toman valores 1 o 2 para algunas valuaciones. Para determinadas implicaciones algunas de éstas propiedades toman sólo el valor 2.

Aún cuando ambos valores 1 y 2 son designados, podemos pensar que el valor 1 es intermedio entre el valor clásico de verdad al que asignamos el valor 2, por lo cual sería preferible tener una implicación para la cual este valor fuese 2 en la mayoría de las fórmulas presentadas, por este motivo buscamos las implicaciones con este comportamiento.

Después de calcular las tablas de verdad de las propiedades de la Proposición 17 con las implicaciones de la Tabla 4.9 observamos que la implicación que logra esto con todas las propiedades es  $I1$ , sin embargo, esta implicación es molecular, la siguiente implicación en generar más propiedades sólo con valor 2 es la implicación de Gödel, es decir la  $I16$ . Esta implicación sólo falla en las fórmulas **Pos3**, **Pos4** y **Pierce** donde aparecen algunos unos al calcular sus tablas.

Por esta razón decidimos extender  $\mathbf{L3B}$  con la implicación trivaluada de Gödel y dejar como en el caso de  $\mathbf{L3A}$  el estudio del resto de extensiones como un trabajo a futuro. Presentamos entonces la Lógica Trivaluada Paraconsistente Genuina con implicación  $\mathbf{L3B_G}$  en la Definición 28.

**CAPÍTULO 4. LA IMPLICACIÓN EN LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**4.3. LAS LEYES DE DE MORGAN EN LAS LÓGICAS  $L3A_G$  Y  $L3B_G$**

---

**Definición 28** *La lógica obtenida a partir de  $L3B$  agregando el conectivo de implicación de la lógica  $G3$  será denotada por  $L3B_G$  y sus tablas de verdad son las siguientes.*

	¬	∧	0	1	2	∨	0	1	2	→	0	1	2
0	2	0	0	0	0	0	0	1	2	0	2	2	2
1	1	1	0	2	1	1	1	1	2	1	0	2	2
2	0	2	0	1	2	2	2	2	2	2	0	1	2

$L3B_G$

### 4.3 Las Leyes de De Morgan en las Lógicas $L3A_G$ y $L3B_G$

En esta sección analizamos las leyes de De Morgan para las lógicas  $L3A_G$  y  $L3B_G$ . Continuamos con la notación de la Tabla 3.9 con los 16 casos como se presenta en el artículo [9].

- |   |   |
|---|---|
| <p><b>D1a:</b> <math>\models_L \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi</math></p> <p><b>D1b:</b> <math>\models_L \neg\varphi \vee \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)</math></p> <p><b>D2a:</b> <math>\models_L \neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi</math></p> <p><b>D2b:</b> <math>\models_L \neg\varphi \wedge \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)</math></p> <p><b>D3a:</b> <math>\models_L \neg(\neg\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi \vee \neg\psi</math></p> <p><b>D3b:</b> <math>\models_L \varphi \vee \neg\psi \rightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \psi)</math></p> <p><b>D4a:</b> <math>\models_L \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi \vee \psi</math></p> <p><b>D4b:</b> <math>\models_L \neg\varphi \vee \psi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\psi)</math></p> | <p><b>D5a:</b> <math>\models_L \neg(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow \varphi \wedge \neg\psi</math></p> <p><b>D5b:</b> <math>\models_L \varphi \wedge \neg\psi \rightarrow \neg(\neg\varphi \vee \psi)</math></p> <p><b>D6a:</b> <math>\models_L \neg(\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi \wedge \psi</math></p> <p><b>D6b:</b> <math>\models_L \neg\varphi \wedge \psi \rightarrow \neg(\varphi \vee \neg\psi)</math></p> <p><b>D7a:</b> <math>\models_L \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \varphi \vee \psi</math></p> <p><b>D7b:</b> <math>\models_L \varphi \vee \psi \rightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)</math></p> <p><b>D8a:</b> <math>\models_L \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow \varphi \wedge \psi</math></p> <p><b>D8b:</b> <math>\models_L \varphi \wedge \psi \rightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)</math></p> |
|---|---|

Los siguientes resultados se siguen del Teorema 1 y los resultados sobre las leyes de De Morgan presentados en la Sección 3.5.1

**Corolario 1** *En la lógica  $L3A_G$  sólo se cumplen las siguiente leyes de De Morgan:*

---

**CAPÍTULO 4. LA IMPLICACIÓN EN LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**  
4.4. COMPARACIONES CON OTRAS LÓGICAS

---

$D1a, D2a, D2b, D3a, D4a, D5a, D6a, D7a$  y  $D8a$ .

**Corolario 2** *En  $\mathbf{L3B_G}$  sólo las siguientes leyes de De Morgan son válidas:  $D1a, D2a, D2b, D3a, D4a, D5a, D5b, D6a, D6b, D7a, D8a$  y  $D8b$ .*

## 4.4 Comparaciones con otras Lógicas

Una vez que se tienen dos lógicas, digamos  $\mathbb{L}_1$  y  $\mathbb{L}_2$ , es siempre de interés general preguntarse si alguna de ellas es extensión de la otra, a esto se le conoce como comparación entre lógicas. La forma de despejar esta duda, cuando se tiene Teoría de Modelos, es encontrar sendas fórmulas  $\alpha$  y  $\beta$  por ejemplo, de modo que para una de ellas se tenga un modelo en una lógica y no en la otra y viceversa, es decir:

$$\begin{array}{cc} \models_{\mathbb{L}_1} \alpha & \not\models_{\mathbb{L}_2} \alpha \\ \models_{\mathbb{L}_2} \beta & \not\models_{\mathbb{L}_1} \beta \end{array}$$

De las Proposiciones 13, 14, 17 y 18 se sigue inmediatamente el Corolario 3.

**Corolario 3** *Ningún elemento del conjunto de extensiones de la lógica  $\mathbf{L3A}$  es comparable con ningún elemento del conjunto de extensiones de la lógica  $\mathbf{L3B}$ .*

En particular tenemos que:

**Corolario 4** *Las lógicas  $\mathbf{L3A_G}$  y  $\mathbf{L3B_G}$  no son comparables.*

Las lógicas  $CG3'$  [19] y  $\mathbf{L3A_G}$  [15] comparten conectivos de negación, disyunción e implicación y sólo difieren en la conjunción. Una pregunta interesante surge de esta cercanía entre sus conectivos, de manera natural uno se pregunta si alguna de estas lógicas es extensión de la otra. En la Proposición 20 damos respuesta a esto.

**Proposición 20** *Las lógicas  $CG3'$  y  $\mathbf{L3A_G}$  son incomparables.*

**Demostración** Si consideramos las abreviaturas  $\sim \varphi := \varphi \rightarrow (\neg \varphi \wedge \neg \neg \varphi)$  y  $\nabla \varphi := \sim \sim \varphi \wedge \neg \varphi$ , entonces en  $CG3'$  la fórmula  $\sim (\varphi \wedge \psi) \vee \neg \neg (\varphi \wedge \psi) \vee (\nabla \varphi \wedge \nabla \psi)$  no es una tautología, basta con tomar una valuación  $v$  tal que  $v(\varphi) = 2$  y

**CAPÍTULO 4. LA IMPLICACIÓN EN LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**4.4. COMPARACIONES CON OTRAS LÓGICAS**

---

$v(\psi) = 1$ . Esta misma fórmula es una tautología en  $\mathbf{L3A_G}$ , con esto demostramos que  $L3A_G \not\subseteq CG3'$ . Por otra parte la fórmula  $\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\neg\varphi$  es una tautología en  $CG3'$  pero no lo es en  $\mathbf{L3A_G}$ , basta con que  $v(\varphi) = 1$  y  $v(\psi) = 2$  y por lo tanto  $CG3' \not\subseteq L3A_G$ . ■



## Capítulo 5

# Axiomatizaciones de las Lógicas Paraconsistentes Genuinas

*“The axiomatic method has many advantages  
over honest work.”*

Bertrand Russell.

En este Capítulo proveemos de sistemas axiomáticos tipo Hilbert para las Lógicas Paraconsistentes Genuinas Trivaluadas que definimos en el Capítulo 4, las lógicas  $\mathbf{L3A_G}$  y  $\mathbf{L3B_G}$ . Empezamos por  $\mathbf{L3A_G}$ .

### 5.1 Un Sistema Axiomático Tipo Hilbert para $\mathbf{L3A_G}$

Recordamos de manera concisa la definición de  $\mathbf{L3A_G}$  por medio de semánticas multivaluadas, y después proponemos una teoría formal axiomática  $\mathbb{L}$  y empezamos por demostrar algunas propiedades básicas en ella, después exponemos algunos resultados necesarios para probar finalmente que  $\mathbb{L}$  es robusta y completa con respecto a la lógica  $\mathbf{L3A_G}$ . Terminamos este análisis de  $\mathbf{L3A_G}$  mostrando que el Teorema de Reemplazamiento no es válido de manera general, pero una versión restringida de él si lo es.

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

5.1. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA **L3A<sub>G</sub>**

---

**5.1.1 La Semántica Multivaluada de L3A<sub>G</sub>**

La lógica paraconsistente genuina trivaluada **L3A<sub>G</sub>** se define en [15] y está dada por la matriz  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ ; donde  $\mathcal{V} = \{0, 1, 2\}$  es el dominio,  $\mathcal{D} = \{1, 2\}$  es el conjunto de valores designados, y  $\mathcal{O}$  es la interpretación de las funciones de verdad para los conectivos  $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}$  y consiste de las funciones de la Tabla 5.1.

	$\neg$
0	2
1	2
2	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$\rightarrow$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

Tabla 5.1: Funciones de verdad para los conectivos  $\neg, \rightarrow, \wedge$  y  $\vee$  en **L3A<sub>G</sub>**

**5.1.2 La Teoría Formal Axiomática y algunas de sus Propiedades**

Consideremos una teoría formal axiomática  $\mathbb{L}$  para la lógica **L3A<sub>G</sub>** formada por los conectivos lógicos primitivos:  $\neg, \rightarrow, \vee$  y  $\wedge$ . También consideramos dos conectivos lógicos  $G(\varphi)$  y  $N(\varphi)$  definidos en términos de los primitivos como:  $G(\varphi) := \varphi \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$  y  $N(\varphi) := \varphi \wedge \neg\varphi$ .

Las fórmulas bien formadas se construyen de la manera usual, y los esquemas de axiomas son:

- Pos1** :  $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- Pos2** :  $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$
- Pos3** :  $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$
- Pos4** :  $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$
- Pos5** :  $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$
- Pos6** :  $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$
- Pos7** :  $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$
- Pos8** :  $\vdash (\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \sigma))$
- Cw1** :  $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$
- WE** :  $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$
- L3A1** :  $\vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)) \rightarrow \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$

## CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS

### 5.1. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA **L3A<sub>G</sub>**

---

$$\mathbf{L3A2} : \vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$$

$$\mathbf{L3A3} : \vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$$

$$\mathbf{L3A4} : \vdash (\varphi \wedge \neg\neg\psi) \rightarrow \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$$

$$\mathbf{L3A5} : \vdash \neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow \neg\varphi$$

$$\mathbf{L3A6} : \vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$$

$$\mathbf{L3A7} : \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \neg\psi)$$

y *Modus Ponens* (**MP**) como la única regla de inferencia. Usamos  $\Lambda \vdash \lambda$  para indicar que existe una deducción de  $\lambda$  en  $\mathbb{L}$  con hipótesis las fórmulas del conjunto  $\Lambda$ . Cuando  $\Lambda = \emptyset$  escribimos simplemente  $\vdash \lambda$ , para decir que podemos demostrar  $\lambda$  sin hipótesis. Además, usamos  $\Lambda, \varphi \vdash \psi$  para representar que  $\Lambda \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ . Presentamos ahora propiedades generales que se satisfacen en la teoría formal axiomática  $\mathbb{L}$ .

**Teorema 3** Sean  $\Gamma, \Delta$  conjuntos de fórmulas, y sean  $\varphi, \psi$  fórmulas arbitrarias, entonces las siguientes propiedades se cumplen en  $\mathbb{L}$ .

<b>Monotonía</b>	Si $\Gamma \vdash \varphi$ , entonces $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$ .
<b>Teorema de la Deducción</b>	$\Gamma, \varphi \vdash \psi$ si y sólo si $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ .
<b>Corte</b>	Si $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Delta, \varphi \vdash \psi$ , entonces $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$ .
<b>Reglas-AND</b>	$\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \psi$ .
<b>Prueba fuerte por casos</b>	$\Gamma, \varphi \vdash \psi$ y $\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi$ si y sólo si $\Gamma \vdash \psi$ .

#### Demostración

**Monotonía (Mon).** Se sigue del hecho de que una deducción en **L3A<sub>G</sub>** con  $\Gamma$  como hipótesis es también una deducción con  $\Gamma \cup \Delta$  como hipótesis.

**Teorema de la Deducción (DT).** Como tenemos los axiomas **Pos1**, **Pos2** y **MP** como la única regla de inferencia, entonces de  $\Gamma, \varphi \vdash \psi$  podemos demostrar que  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$  [20]. El recíproco puede ser obtenido al aplicar **Mon** y **MP** a  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ .

**Corte.** Esto se demuestra partiendo de que una deducción de  $\psi$  con  $\varphi$  y  $\Delta$  como hipótesis puede ser precedida con una deducción de  $\varphi$  con  $\Gamma$  como hipótesis para obtener  $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$ .

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.1. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $\mathbf{L3A_G}$**

---

**Reglas-AND (R-AND).** Podemos aplicar **Mon** a los axiomas **Pos3** y **Pos4** para obtener  $\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$  y  $\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$  respectivamente, entonces con  $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$  como hipótesis y aplicando **MP** tenemos  $\Gamma \vdash \varphi$  y  $\Gamma \vdash \psi$ . Por otro lado, del axioma **Pos5** podemos tener  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$  al usar **Mon**, luego si tenemos  $\Gamma \vdash \varphi$  y  $\Gamma \vdash \psi$  como hipótesis concluimos  $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$  por medio de **MP**.

**Prueba fuerte por casos (SPC).** Supongamos que  $\Gamma, \varphi \vdash \psi$  y  $\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi$ . Usando **DT** tenemos que  $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$  y  $\Gamma \vdash \neg\varphi \rightarrow \psi$ , luego aplicando **Pos8** derivamos  $\Gamma \vdash (\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow \psi$ . Finalmente por el axioma **Cw1** y **MP**, obtenemos  $\Gamma \vdash \psi$ , como se requería. ■

En el Lema 1 hacemos una lista de algunas propiedades que se cumplen en  $\mathbb{L}$ , entre los motivos por los que estamos interesados en estas propiedades específicamente, está que ellas son necesarias en la demostración del Lema 2 que a su vez nos ayuda a demostrar el Lema 3, indispensable para obtener la completitud de la teoría  $\mathbb{L}$  con respecto a la lógica  $\mathbf{L3A_G}$ .

**Lema 1** *Para cualesquiera fórmulas  $\varphi, \psi, \sigma$  y  $\xi$ , las siguientes propiedades se satisfacen en  $\mathbb{L}$ .*

- (a)  $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ .
- (b) Si  $\vdash \varphi \rightarrow \psi$  y  $\vdash \psi \rightarrow \sigma$ , entonces  $\vdash \varphi \rightarrow \sigma$ .
- (c)  $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$ .
- (d)  $\vdash (\neg\neg\psi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$ .
- (e)  $\vdash (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$ .
- (f)  $\vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\varphi$ .
- (g)  $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \rightarrow \psi$ .
- (h)  $G(\varphi), \varphi \vdash \psi$ .
- (i)  $G(\varphi) \vdash \neg\varphi$ .

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.1. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3A_G$**

---

- (j)  $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (G(\psi) \rightarrow G(\varphi))$ .
- (k) Si  $\varphi \vdash \psi$  y  $\sigma \vdash \xi$ , entonces  $\varphi \wedge \sigma \vdash \psi \wedge \xi$ .
- (l) Si  $G(\varphi) \vdash \psi$ ,  $N(\varphi) \vdash \psi$  y  $\neg\neg\varphi \vdash \psi$ , entonces  $\vdash \psi$ .
- (m)  $\varphi \wedge \psi \vdash \sigma$  si y sólo si  $\varphi, \psi \vdash \sigma$ .

Antes de presentar la demostración de este Lema es preciso hacer algunas aclaraciones con respecto a la forma en que se presentaran las demostraciones de las pruebas en este Capítulo. Las demostraciones tienen la siguiente estructura: en el extremo izquierdo están numeradas las líneas que conforman la demostración. La columna derecha es lo que llamamos análisis de la deducción, ahí indicamos la o las razones por las cuales la fórmula bien formada correspondiente a ese renglón se obtiene, las abreviaciones que se usan son las que se presentan a lo largo de este capítulo. Cuando se escribe entre paréntesis dos números, estos representan las líneas que se están tomando para aplicar alguna de las propiedades.

**Demostración**

- (a)  $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ .
- |    |   |                 |
|----|---|-----------------|
| 1. | $\neg\neg\varphi, \neg\varphi \vdash \varphi$ | <b>WE, DT</b>   |
| 2. | $\neg\neg\varphi, \varphi \vdash \varphi$     | <b>Mon</b>      |
| 3. | $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$              | <b>SPC(1,2)</b> |

- (b) Si  $\vdash \varphi \rightarrow \psi$  y  $\vdash \psi \rightarrow \sigma$ , entonces  $\vdash \varphi \rightarrow \sigma$ .

Por **DT** tenemos que  $\varphi \vdash \psi$  y  $\psi \vdash \sigma$ , después aplicando **Corte** se llega a  $\varphi \vdash \sigma$ , y finalmente al aplicar nuevamente **DT** concluimos  $\vdash \varphi \rightarrow \sigma$ .

- (c)  $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$ .
- |    |  |           |
|----|--|-----------|
| 1. | $\varphi, \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma), \psi \vdash \sigma$   | <b>MP</b> |
| 2. | $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma), \psi \vdash \varphi \rightarrow \sigma$                              | <b>DT</b> |
| 3. | $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma) \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)$                 | <b>DT</b> |
| 4. | $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$ | <b>DT</b> |
-

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.1. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3A_G$**

---

(d)  $\vdash (\neg\neg\psi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$ .

- |     |   |                  |
|-----|---|------------------|
| 1.  | $\vdash \neg\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$  | <b>Pos1</b>      |
| 2.  | $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$   | <b>WE</b>        |
| 3.  | $\neg\neg\psi \rightarrow \neg\neg\varphi$  | <b>Hipótesis</b> |
| 4.  | $\vdash \neg\neg\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$  | Lema 1-b(3,2)    |
| 5.  | $\vdash \left( \neg\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \right) \rightarrow$<br>$\left( (\neg\neg\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)) \rightarrow ((\neg\psi \vee \neg\neg\psi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)) \right)$ | <b>Pos8</b>      |
| 6.  | $\vdash (\neg\neg\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)) \rightarrow ((\neg\psi \vee \neg\neg\psi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi))$  | <b>MP(1,5)</b>   |
| 7.  | $\vdash (\neg\psi \vee \neg\neg\psi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$  | <b>MP(4,6)</b>   |
| 8.  | $\vdash \neg\psi \vee \neg\neg\psi$   | <b>Cw1</b>       |
| 9.  | $\vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$   | <b>MP(7,8)</b>   |
| 10. | $\neg\neg\psi \rightarrow \neg\neg\varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$  | 1-9              |
| 11. | $\vdash (\neg\neg\psi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$  | <b>DT</b>        |

(e)  $\vdash (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$ .

- |    |  |                     |
|----|--|---------------------|
| 1. | $\vdash \neg\neg\psi \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$ | <b>Pos1</b>         |
| 2. | $\vdash \neg\varphi \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$  | <b>WE, Lema 1-c</b> |
| 3. | $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$   | <b>Hipótesis</b>    |
| 4. | $\vdash \neg\psi \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$     | Lema 1-b(3,2)       |

El resto de la demostración es similar al caso anterior. Observe que en la demostración del inciso d) si se toma como punto de partida a los renglones 1 y 4, y después se aplica **Pos8** se concluye la línea 10 que tiene como premisa la hipótesis de 3.

(f)  $\vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\varphi$ .

- |    |  |                |
|----|--|----------------|
| 1. | $\vdash \neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$   | Lema 1-a       |
| 2. | $\vdash (\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\varphi)$ | Lema 1-d       |
| 3. | $\vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\varphi$   | <b>MP(1,2)</b> |

(g)  $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \rightarrow \psi$ .

De la fórmula  $\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi$  como hipótesis y  $\neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$ , que es válida por **WE**, obtenemos  $\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi \vdash \psi$ , y con aplicación de **DT** llegamos al resultado.

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.1. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3A_G$**

---

**(h)  $G(\varphi), \varphi \vdash \psi$ .**

- |    |   |            |
|----|---|------------|
| 1. | $\varphi, \varphi \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \vdash \neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi$ | MP         |
| 2. | $\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi \vdash \psi$  | Lema 1-g   |
| 3. | $\varphi, \varphi \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \vdash \psi$                               | Corte(1,2) |
| 4. | $\varphi, G(\varphi) \vdash \psi$   | abrev. $G$ |

**(i)  $G(\varphi) \vdash \neg\varphi$ .**

- |    |  |          |
|----|--|----------|
| 1. | $G(\varphi), \neg\varphi \vdash \neg\varphi$ | Mon      |
| 2. | $G(\varphi), \varphi \vdash \neg\varphi$     | Lema 1-h |
| 3. | $G(\varphi) \vdash \neg\varphi$              | SPC(1,2) |

**(j)  $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (G(\psi) \rightarrow G(\varphi))$ .**

- |    |   |            |
|----|---|------------|
| 1. | $\varphi, \varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow (\neg\psi \wedge \neg\neg\psi) \vdash (\neg\psi \wedge \neg\neg\psi)$                  | MP         |
| 2. | $(\neg\psi \wedge \neg\neg\psi) \vdash (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$  | Lema 1-g   |
| 3. | $\varphi, \varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow (\neg\psi \wedge \neg\neg\psi) \vdash (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$            | Corte(1,2) |
| 4. | $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow (\neg\psi \wedge \neg\neg\psi) \vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$ | DT         |
| 5. | $\varphi \rightarrow \psi, G(\psi) \vdash G(\varphi)$   | abrev. $G$ |
| 6. | $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (G(\psi) \rightarrow G(\varphi))$  | DT         |

**(k) Si  $\varphi \vdash \psi$  y  $\sigma \vdash \xi$ , entonces  $\varphi \wedge \sigma \vdash \psi \wedge \xi$ .**

- |    |  |            |
|----|--|------------|
| 1. | $\varphi \wedge \sigma \vdash \varphi$         | Pos3, MP   |
| 2. | $\varphi \wedge \sigma \vdash \sigma$          | Pos4, MP   |
| 3. | $\varphi \vdash \psi$                          | Hipótesis  |
| 4. | $\sigma \vdash \xi$                            | Hipótesis  |
| 5. | $\varphi \wedge \sigma \vdash \psi$            | Corte(1,3) |
| 6. | $\varphi \wedge \sigma \vdash \xi$             | Corte(2,4) |
| 7. | $\varphi \wedge \sigma \vdash \psi \wedge \xi$ | R-AND(5,6) |

**(l) Si  $G(\varphi) \vdash \psi, N(\varphi) \vdash \psi$  y  $\neg\neg\varphi \vdash \psi$ , entonces  $\vdash \psi$ .**

- |    |  |            |
|----|--|------------|
| 1. | $\varphi, \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi$  | MP         |
| 2. | $\neg\neg\varphi \vdash \psi$  | Hipótesis  |
| 3. | $\varphi, \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi \vdash \psi$   | Corte(1,2) |
| 4. | $\varphi, \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi$              | MP, Pos5   |
| 5. | $\neg\varphi, \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi)$ | DT         |
| 6. | $\neg\varphi, \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi \vdash G(\varphi)$   | abrev. $G$ |
-

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.1. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3A_G$**

7.	$G(\varphi) \vdash \psi$	<b>Hipótesis</b>
8.	$\neg\varphi, \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi \vdash \psi$	<b>Corte(6,7)</b>
9.	$\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi \vdash \psi$	<b>SPC(3,8)</b>
10.	$\neg(\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \vdash \varphi \wedge \neg\neg\varphi$	<b>L3A7</b>
11.	$\varphi \wedge \neg\neg\varphi \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$	Lema 1-a, <b>Mon</b>
12.	$\neg(\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$	<b>Corte(10,11)</b>
13.	$\neg(\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \vdash N(\varphi)$	abrev. <b>N</b>
14.	$N(\varphi) \vdash \psi$	<b>Hipótesis</b>
15.	$\neg(\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \vdash \psi$	<b>Corte(13,14)</b>
16.	$\vdash \psi$	<b>SPC(9,15)</b>

**(m)**  $\varphi \wedge \psi \vdash \sigma$  si y sólo si  $\varphi, \psi \vdash \sigma$ .

Si  $\varphi \wedge \psi \vdash \sigma$ , entonces  $\varphi, \psi \vdash \sigma$ .

1.	$\varphi$	<b>Hipótesis</b>
2.	$\psi$	<b>Hipótesis</b>
3.	$\varphi \wedge \psi$	<b>MP(Pos5,1-2)</b>
4.	$\sigma$	$\varphi \wedge \psi \vdash \sigma$
5.	$\varphi, \psi \vdash \sigma$	1-4

Si  $\varphi, \psi \vdash \sigma$ , entonces  $\varphi \wedge \psi \vdash \sigma$ .

1.	$\varphi \wedge \psi$	<b>Hipótesis</b>
2.	$\varphi$	<b>MP(Pos3,1)</b>
3.	$\psi$	<b>MP(Pos4,2)</b>
4.	$\sigma$	$\varphi, \psi \vdash \sigma$
5.	$\varphi \wedge \psi \vdash \sigma$	1-4

A continuación presentamos el Lema 2 que refleja el comportamiento de los conectivos de  $L3A_G$ . En la Sección 5.1.3, notemos que la Definición 29 transforma fórmulas teniendo en cuenta el valor que tomen en una determinada valuación. La manera de transformar una fórmula es bajo el siguiente esquema: si una fórmula  $v(\varphi) = 0$ , entonces a  $\varphi$  se le asigna  $G(\varphi)$ . Cuando  $v(\varphi) = 1$ , se le asigna  $N(\varphi)$ , mientras que  $\neg\neg\varphi$  corresponde al caso en que  $v(\varphi) = 2$ .

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.1. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3A_G$**

---

Con estas ideas, e interpretando la implicación como una consecuencia del antecedente. En la línea **N1**, donde tenemos  $\vdash G(\varphi) \rightarrow \neg\neg(\neg\varphi)$ , podemos interpretar que el antecedente  $G(\varphi)$  nos dice que el valor de la fórmula  $\varphi$  es 0, entonces el valor de su negación  $\neg\varphi$  debe valer 2, lo que se escribe como  $\neg\neg(\neg\varphi)$ .

La línea **N2** indica que si  $\varphi$  vale 1, expresado con el antecedente  $N(\varphi)$ , su negación debe valer 2.

Finalmente la línea **N3** modela el hecho que cuando una fórmula toma valor 2 su negación debe valer 0. Esto modela la negación. Los conectivos conjunción, disyunción e implicación se modelan con las líneas **C**'s, **D**'s e **I**'s respectivamente.

**Lema 2** *Para cualesquiera fórmulas  $\varphi$  y  $\psi$ , son teoremas en  $\mathbb{L}$  las siguientes fórmulas bien formadas.*

<b>N1:</b>	$\vdash G(\varphi) \rightarrow \neg\neg(\neg\varphi)$	<b>C1:</b>	$\vdash G(\varphi) \rightarrow G(\varphi \wedge \psi)$
<b>N2:</b>	$\vdash N(\varphi) \rightarrow \neg\neg(\neg\varphi)$	<b>C2:</b>	$\vdash (N(\varphi) \wedge N(\psi)) \rightarrow N(\varphi \wedge \psi)$
<b>N3:</b>	$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow G(\neg\varphi)$	<b>C3:</b>	$\vdash (N(\varphi) \wedge \neg\neg\psi) \rightarrow \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$
		<b>C4:</b>	$\vdash (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi) \rightarrow \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$
<b>I1:</b>	$\vdash G(\varphi) \rightarrow \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$		
<b>I2:</b>	$\vdash \neg\neg\psi \rightarrow \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$		
<b>I3:</b>	$\vdash (N(\varphi) \wedge N(\psi)) \rightarrow \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	<b>D1:</b>	$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg(\varphi \vee \psi)$
<b>I4:</b>	$\vdash (\neg\neg\varphi \wedge N(\psi)) \rightarrow N(\varphi \rightarrow \psi)$	<b>D2:</b>	$\vdash (G(\varphi) \wedge N(\psi)) \rightarrow N(\varphi \vee \psi)$
<b>I5:</b>	$\vdash (N(\varphi) \wedge G(\psi)) \rightarrow G(\varphi \rightarrow \psi)$	<b>D3:</b>	$\vdash (N(\varphi) \wedge N(\psi)) \rightarrow N(\varphi \vee \psi)$
<b>I6:</b>	$\vdash (\neg\neg\varphi \wedge G(\psi)) \rightarrow G(\varphi \rightarrow \psi)$	<b>D4:</b>	$\vdash (G(\varphi) \wedge G(\psi)) \rightarrow G(\varphi \vee \psi)$

**Demostración**

**N1:**  $\vdash G(\varphi) \rightarrow \neg\neg(\neg\varphi)$ .

1.	$\varphi, \varphi \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi) \vdash \neg\varphi$	<b>MP, Pos3</b>
2.	$\varphi, G(\varphi) \vdash \neg\varphi$	abrev. G
3.	$\neg\varphi, G(\varphi) \vdash \neg\varphi$	<b>Mon</b>
4.	$G(\varphi) \vdash \neg\varphi$	<b>SPC(2,3)</b>
5.	$\neg\varphi \vdash \neg\neg\neg\varphi$	Lema 1-f
6.	$G(\varphi) \vdash \neg\neg\neg\varphi$	<b>Corte(4,5)</b>
7.	$\vdash G(\varphi) \rightarrow \neg\neg(\neg\varphi)$	<b>DT</b>

---

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.1. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3A_G$**

---

**N2:**  $\vdash N(\varphi) \rightarrow \neg\neg(\neg\varphi)$ .

- |    |   |                   |
|----|---|-------------------|
| 1. | $\varphi \wedge \neg\varphi \vdash \neg\varphi$     | <b>Pos3, DT</b>   |
| 2. | $N(\varphi) \vdash \neg\varphi$                     | abrev. N          |
| 3. | $\neg\varphi \vdash \neg\neg\neg\varphi$            | Lema 1-f          |
| 4. | $N(\varphi) \vdash \neg\neg\neg\varphi$             | <b>Corte(2,3)</b> |
| 5. | $\vdash N(\varphi) \rightarrow \neg\neg\neg\varphi$ | <b>DT</b>         |

**N3:**  $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow G(\neg\varphi)$ .

- |    |   |           |
|----|---|-----------|
| 1. | $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\neg\varphi))$ | <b>WE</b> |
| 2. | $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow G(\neg\varphi)$   | abrev. G  |

**I1:**  $\vdash G(\varphi) \rightarrow \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ .

- |     |  |                   |
|-----|--|-------------------|
| 1.  | $G(\varphi), \varphi \vdash \neg\neg\psi$  | Lema 1-h          |
| 2.  | $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$   | Lema 1-a          |
| 3.  | $G(\varphi), \neg\neg\varphi \vdash \neg\neg\psi$  | <b>Corte(1,2)</b> |
| 4.  | $G(\varphi) \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$   | <b>DT</b>         |
| 5.  | $G(\varphi), \varphi \vdash \psi$  | Lema 1-h          |
| 6.  | $G(\varphi) \vdash \varphi \rightarrow \psi$   | <b>DT</b>         |
| 7.  | $G(\varphi) \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$                         | <b>R-AND(4,6)</b> |
| 8.  | $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi) \vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ | <b>L3A1</b>       |
| 9.  | $G(\varphi) \vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$   | <b>Corte(7,8)</b> |
| 10. | $\vdash G(\varphi) \rightarrow \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$   | <b>DT</b>         |

**I2:**  $\vdash \neg\neg\psi \rightarrow \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ .

- |    |  |                     |
|----|--|---------------------|
| 1. | $\neg\neg\psi \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$   | <b>Pos1, DT</b>     |
| 2. | $\neg\neg\psi \vdash \psi$   | Lema 1-a, <b>DT</b> |
| 3. | $\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$   | <b>Pos1, DT</b>     |
| 4. | $\neg\neg\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$   | <b>Corte(2,3)</b>   |
| 5. | $\neg\neg\psi \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$                                     | <b>R-AND(1,4)</b>   |
| 6. | $\vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)) \rightarrow \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ | <b>L3A1</b>         |
| 7. | $\neg\neg\psi \vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$   | <b>Corte(5,6)</b>   |
| 8. | $\vdash \neg\neg\psi \rightarrow \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$   | <b>DT</b>           |

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.1. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3A_G$**

---

**I3:**  $\vdash (N(\varphi) \wedge N(\psi)) \rightarrow \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$ .

1.	$\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$	Pos1, DT
2.	$\varphi \wedge \neg\varphi \wedge \psi \wedge \neg\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$	Mon
3.	$\neg\varphi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	Pos1, DT
4.	$\neg\psi \rightarrow \neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$	Lema 1-e, DT
5.	$\neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$	Corte(3,4)
6.	$\varphi \wedge \neg\varphi \wedge \psi \wedge \neg\psi \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$	Mon
7.	$\varphi \wedge \neg\varphi \wedge \psi \wedge \neg\psi \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$	R-AND(2,6)
8.	$\vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)) \rightarrow \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	L3A1
9.	$\varphi \wedge \neg\varphi \wedge \psi \wedge \neg\psi \vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	Corte(7,8)
10.	$N(\varphi) \wedge N(\psi) \vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	abrev. N
11.	$\vdash (N(\varphi) \wedge N(\psi)) \rightarrow \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	DT

**I4:**  $\vdash (\neg\neg\varphi \wedge N(\psi)) \rightarrow N(\varphi \rightarrow \psi)$ .

1.	$\vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	Pos1
2.	$\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$	DT
3.	$\neg\neg\varphi \wedge \psi \wedge \neg\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$	Mon
4.	$\vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$	L3A2
5.	$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\neg\psi)$	Lema 1-c
6.	$\neg\neg\varphi \vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\neg\psi$	DT
7.	$\vdash (\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\neg\psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi))$	Lema 1-d
8.	$\neg\neg\varphi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$	Corte(6,7)
9.	$\neg\neg\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi)$	DT
10.	$\neg\neg\varphi \wedge \neg\psi \wedge \psi \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi)$	Mon
11.	$\neg\neg\varphi \wedge \neg\psi \wedge \psi \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg(\varphi \rightarrow \psi)$	R-AND(3,10)
12.	$\neg\neg\varphi \wedge N(\psi) \vdash N(\varphi \rightarrow \psi)$	abrev. N
13.	$\vdash (\neg\neg\varphi \wedge N(\psi)) \rightarrow N(\varphi \rightarrow \psi)$	DT

**I5:**  $\vdash (N(\varphi) \wedge G(\psi)) \rightarrow G(\varphi \rightarrow \psi)$ .

1.	$\varphi, \varphi \rightarrow \psi, G(\psi) \vdash \psi$	MP
2.	$\varphi, \varphi \rightarrow \psi, G(\psi) \vdash G(\psi)$	Mon
3.	$\varphi, \varphi \rightarrow \psi, G(\psi) \vdash \psi \wedge G(\psi)$	R-AND(1,2)
4.	$\psi, G(\psi) \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	Lema 1-h

---

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.1. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3A_G$**

- |     |   |                   |
|-----|---|-------------------|
| 5.  | $\psi \wedge G(\psi) \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$                                       | Lema 1-m          |
| 6.  | $\varphi, \varphi \rightarrow \psi, G(\psi) \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$                | <b>Corte(3,5)</b> |
| 7.  | $\varphi, G(\psi) \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi))$ | <b>DT</b>         |
| 8.  | $\varphi, G(\psi) \vdash G(\varphi \rightarrow \psi)$   | abrev. G          |
| 9.  | $\varphi, \neg\varphi, G(\psi) \vdash G(\varphi \rightarrow \psi)$  | <b>Mon</b>        |
| 10. | $N(\varphi), G(\psi) \vdash G(\varphi \rightarrow \psi)$  | abrev. N          |
| 11. | $N(\varphi) \wedge G(\psi) \vdash G(\varphi \rightarrow \psi)$  | Lema 1-m          |
| 12. | $\vdash (N(\varphi) \wedge G(\psi)) \rightarrow G(\varphi \rightarrow \psi)$  | <b>DT</b>         |

**I6:**  $\vdash (\neg\neg\varphi \wedge G(\psi)) \rightarrow G(\varphi \rightarrow \psi)$ .

- |     |   |                   |
|-----|---|-------------------|
| 1.  | $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$  | Lema 1-a          |
| 2.  | $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$  | <b>DT</b>         |
| 3.  | $\varphi, \varphi \rightarrow \psi, G(\psi) \vdash \psi$  | <b>MP</b>         |
| 4.  | $\varphi, \varphi \rightarrow \psi, G(\psi) \vdash G(\psi)$   | <b>Mon</b>        |
| 5.  | $\varphi, \varphi \rightarrow \psi, G(\psi) \vdash \psi \wedge G(\psi)$   | <b>R-AND(3,4)</b> |
| 6.  | $\psi, G(\psi) \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$   | Lema 1-g          |
| 7.  | $\psi \wedge G(\psi) \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$   | Lema 1-m          |
| 8.  | $\varphi, \varphi \rightarrow \psi, G(\psi) \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$                        | <b>Corte(5,7)</b> |
| 9.  | $\neg\neg\varphi, \varphi \rightarrow \psi, G(\psi) \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi)$                | <b>Corte(2,8)</b> |
| 10. | $\neg\neg\varphi, G(\psi) \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \rightarrow \psi))$ | <b>DT</b>         |
| 11. | $\neg\neg\varphi, G(\psi) \vdash G(\varphi \rightarrow \psi)$   | abrev. G          |
| 12. | $\neg\neg\varphi \wedge G(\psi) \vdash G(\varphi \rightarrow \psi)$   | Lema 1-m          |
| 13. | $\vdash (\neg\neg\varphi \wedge G(\psi)) \rightarrow G(\varphi \rightarrow \psi)$   | <b>DT</b>         |

**C1:**  $\vdash G(\varphi) \rightarrow G(\varphi \wedge \psi)$ .

- |    |  |                |
|----|--|----------------|
| 1. | $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$   | <b>Pos3</b>    |
| 2. | $\vdash ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow (G(\varphi) \rightarrow G(\varphi \wedge \psi))$ | Lema 1-j       |
| 3. | $\vdash G(\varphi) \rightarrow G(\varphi \wedge \psi)$   | <b>MP(1,2)</b> |

**C2:**  $\vdash (N(\varphi) \wedge N(\psi)) \rightarrow N(\varphi \wedge \psi)$ .

- |    |  |                          |
|----|--|--------------------------|
| 1. | $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi$   | $\lambda \vdash \lambda$ |
| 2. | $\neg\varphi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$   | <b>L3A3</b>              |
| 3. | $\varphi \wedge \psi \wedge \neg\varphi \wedge \neg\psi \vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)$ | Lema 1-k(1,2)            |
| 4. | $N(\varphi) \wedge N(\psi) \vdash N(\varphi \wedge \psi)$  | abrev. N                 |
| 5. | $\vdash (N(\varphi) \wedge N(\psi)) \rightarrow N(\varphi \wedge \psi)$  | <b>DT</b>                |

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.1. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA L3A<sub>G</sub>**

**C3:**  $\vdash (N(\varphi) \wedge \neg\neg\psi) \rightarrow \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$ .

- |    |   |             |
|----|---|-------------|
| 1. | $\vdash (\varphi \wedge \neg\neg\psi) \rightarrow \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$      | <b>L3A4</b> |
| 2. | $\varphi \wedge \neg\neg\psi \vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$                    | <b>DT</b>   |
| 3. | $\varphi \wedge \neg\neg\psi \wedge \neg\varphi \vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$ | <b>Mon</b>  |
| 4. | $N(\varphi) \wedge \neg\neg\psi \vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$                 | abrev. N    |
| 5. | $\vdash (N(\varphi) \wedge \neg\neg\psi) \rightarrow \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$   | <b>DT</b>   |

**C4:**  $\vdash (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi) \rightarrow \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$ .

- |    |  |                          |
|----|--|--------------------------|
| 1. | $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$   | Lema 1-a                 |
| 2. | $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$   | <b>DT</b>                |
| 3. | $\neg\neg\psi \vdash \neg\neg\psi$   | $\lambda \vdash \lambda$ |
| 4. | $\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi \vdash \varphi \wedge \neg\neg\psi$                 | Lema 1-k(2,3)            |
| 5. | $\vdash (\varphi \wedge \neg\neg\psi) \rightarrow \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$         | <b>L3A4</b>              |
| 6. | $\varphi \wedge \neg\neg\psi \vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$                       | <b>DT</b>                |
| 7. | $\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi \vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$               | <b>Corte(4,6)</b>        |
| 8. | $\vdash (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi) \rightarrow \neg\neg(\varphi \wedge \psi)$ | <b>DT</b>                |

**D1:**  $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg(\varphi \vee \psi)$ .

- |    |  |                |
|----|--|----------------|
| 1. | $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow \neg\varphi$   | <b>L3A5</b>    |
| 2. | $\vdash (\neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg(\varphi \vee \psi))$ | Lem 1-e        |
| 3. | $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg(\varphi \vee \psi)$   | <b>MP(1,2)</b> |

**D2:**  $\vdash (G(\varphi) \wedge N(\psi)) \rightarrow N(\varphi \vee \psi)$ .

- |     |  |                          |
|-----|--|--------------------------|
| 1.  | $G(\varphi) \vdash \neg\varphi$  | Lema 1-i                 |
| 2.  | $G(\varphi) \wedge \psi \wedge \neg\psi \vdash \neg\varphi$  | <b>Mon</b>               |
| 3.  | $\neg\psi \vdash \neg\psi$   | $\lambda \vdash \lambda$ |
| 4.  | $G(\varphi) \wedge \psi \wedge \neg\psi \vdash \neg\psi$   | <b>Mon</b>               |
| 5.  | $G(\varphi) \wedge \psi \wedge \neg\psi \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$                        | <b>R-AND(2,4)</b>        |
| 6.  | $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$                         | <b>L3A6</b>              |
| 7.  | $\neg\varphi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$                                       | <b>DT</b>                |
| 8.  | $G(\varphi) \wedge \psi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$                            | <b>Corte(5,7)</b>        |
| 9.  | $\psi \vdash \varphi \vee \psi$  | <b>Pos7</b>              |
| 10. | $G(\varphi) \wedge \psi \wedge \neg\psi \vdash \varphi \vee \psi$                                  | <b>Mon</b>               |
| 11. | $G(\varphi) \wedge \psi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \psi)$ | <b>R-AND(8,10)</b>       |
| 12. | $G(\varphi) \wedge N(\psi) \vdash N(\varphi \vee \psi)$  | abrev. N                 |
| 13. | $\vdash (G(\varphi) \wedge N(\psi)) \rightarrow N(\varphi \vee \psi)$                              | <b>DT</b>                |

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.1. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $\mathbf{L3A_G}$**

---

**D3:**  $\vdash (N(\varphi) \wedge N(\psi)) \rightarrow N(\varphi \vee \psi)$ .

- |    |  |                   |
|----|--|-------------------|
| 1. | $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$   | <b>Pos6, DT</b>   |
| 2. | $\varphi \wedge \neg\varphi \wedge \psi \wedge \neg\psi \vdash \varphi \vee \psi$                                  | <b>Mon</b>        |
| 3. | $\neg\varphi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$   | <b>L3A6, DT</b>   |
| 4. | $\varphi \wedge \neg\varphi \wedge \psi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$                            | <b>Mon</b>        |
| 5. | $\varphi \wedge \neg\varphi \wedge \psi \wedge \neg\psi \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \vee \psi)$ | <b>R-AND(2,4)</b> |
| 6. | $N(\varphi) \wedge N(\psi) \vdash N(\varphi \vee \psi)$  | abrev. N          |
| 7. | $\vdash (N(\varphi) \wedge N(\psi)) \rightarrow N(\varphi \vee \psi)$  | <b>DT</b>         |

**D4:**  $\vdash (G(\varphi) \wedge G(\psi)) \rightarrow G(\varphi \vee \psi)$ .

- |     |   |                     |
|-----|---|---------------------|
| 1.  | $G(\varphi) \wedge G(\psi)$   | <b>Hipótesis</b>    |
| 2.  | $G(\varphi)$  | <b>MP(Pos3,1)</b>   |
| 3.  | $G(\psi)$   | <b>MP(Pos4,1)</b>   |
| 4.  | $G(\varphi) \vdash \varphi \rightarrow (\neg(\varphi \vee \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \vee \psi))$  | Lema 1-h, <b>DT</b> |
| 5.  | $G(\psi) \vdash \psi \rightarrow (\neg(\varphi \vee \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \vee \psi))$        | Lema 1-h, <b>DT</b> |
| 6.  | $\vdash \varphi \rightarrow (\neg(\varphi \vee \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \vee \psi))$             | <b>Corte(2,4)</b>   |
| 7.  | $\vdash \psi \rightarrow (\neg(\varphi \vee \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \vee \psi))$                | <b>Corte(3,5)</b>   |
| 8.  | $\vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg(\varphi \vee \psi) \wedge \neg\neg(\varphi \vee \psi))$ | <b>MP(Pos8,6-7)</b> |
| 9.  | $\vdash G(\varphi \vee \psi)$   | abrev. G            |
| 10. | $G(\varphi) \wedge G(\psi) \vdash G(\varphi \vee \psi)$   | 1-8                 |
| 11. | $\vdash (G(\varphi) \wedge G(\psi)) \rightarrow G(\varphi \vee \psi)$                                 | <b>DT</b>           |

### 5.1.3 Robustez y Completitud de $\mathbf{L3A_G}$ con respecto a $\mathbb{L}$

Iniciamos por demostrar que  $\mathbf{L3A_G}$  es robusta con respecto a  $\mathbb{L}$ , lo que significa que los teoremas en  $\mathbb{L}$  son tautologías en  $\mathbf{L3A_G}$ .

**Teorema 4** *Sea  $\varphi$  una fórmula, si  $\varphi$  es un teorema en  $\mathbb{L}$ , entonces  $\varphi$  es una tautología  $\mathbf{L3A_G}$ , i.e. si  $\vdash_{\mathbb{L}} \varphi$ , entonces  $\models_{\mathbf{L3A_G}} \varphi$ .*

**Demostración** De acuerdo con las tablas de verdad de los conectivos en  $\mathbf{L3A_G}$ , cada axioma es una tautología. Resta verificar que *Modus Ponens* preserva tautologías. Si  $\psi$  y  $\psi \rightarrow \gamma$  son tautologías. Supongamos contrariamente a lo que queremos demostrar que  $\gamma$  toma el valor 0 para alguna trivaluación, como  $\psi$  es una tautología, debe valuar 1 o 2. De esto se sigue que  $\psi \rightarrow \gamma$  debe valuar 0 en ese caso,

## CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS

### 5.1. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA $\mathbf{L3A_G}$

---

lo cual contradice la hipótesis de que  $\psi \rightarrow \gamma$  es una tautología. Así que  $\gamma$  nunca toma valor 0 y es por tanto una tautología. ■

Para demostrar completitud debemos probar que cada tautología en  $\mathbf{L3A_G}$  es un teorema en  $\mathbb{L}$ . Esta demostración necesita algunos resultados auxiliares, empezamos por definir una transformación entre fórmulas de  $\mathbf{L3A_G}$  de acuerdo con la siguiente definición.

**Definición 29** *Dada un trivaluación  $v$  de  $\mathbf{L3A_G}$  y una fórmula  $\varphi$ , se denota la imagen de  $\varphi$  bajo la valuación  $v$  con  $\varphi_v$  y se define como sigue:*

$$\varphi_v = \begin{cases} G(\varphi) & \text{si } v(\varphi) = 0 \\ N(\varphi) & \text{si } v(\varphi) = 1 \\ \neg\neg\varphi & \text{si } v(\varphi) = 2 \end{cases}$$

Para un conjunto  $\Phi$  de fórmulas, con  $\Phi_v$  denotamos al conjunto  $\{\varphi_v | \varphi \in \Phi\}$ .

El Lema 3 afirma que si tomamos una fórmula cualquiera del lenguaje de  $\mathbf{L3A_G}$  y a cada uno de sus átomos les aplicamos la transformación de la Definición 29 para formar un conjunto, este demuestra a la fórmula transformada de acuerdo a la Definición 29.

**Lema 3** *Sean  $\varphi \in Form(\mathbf{L3A_G})$  y  $v$  una trivaluación en  $\mathbf{L3A_G}$ , si con  $Atoms(\varphi)$  denotamos el conjunto de fórmulas atómicas en  $\varphi$ , entonces se puede demostrar que  $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$ .*

**Demostración** Sea  $\varphi \in Form(\mathbf{L3A_G})$  y  $v$  una trivaluación en  $\mathbf{L3A_G}$ . La prueba se hace por inducción sobre la complejidad de la fórmula  $\varphi$ . Debemos tener presente que en  $\mathbf{L3A_G}$  hay cuatro conectivos primitivos y por tanto la demostración debe hacerse en cada caso.

**Caso Base:** Si  $\varphi = p$ , donde  $p$  es una fórmula atómica, entonces los átomos de  $\varphi$  transformados son:  $Atoms(\varphi)_v = \varphi_v = p_v$ , como en  $\mathbb{L}$  tenemos los axiomas **Pos1**, **Pos2** y a *Modus Ponens* como regla de inferencia, sabemos que se puede demostrar  $\varphi_v \vdash \varphi_v$ , por lo tanto  $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$ .

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.1. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $\mathbf{L3A_G}$**

---

Supongamos ahora que para cualquier fórmula  $\beta \in Form(\mathbf{L3A_G})$  con complejidad menor que la de  $\varphi$ , la afirmación es verdadera, esto es  $Atoms(\beta)_v \vdash \beta_v$ . Enseguida, empezando por la negación, analizamos lo que sucede con cada conectivo de la lógica  $\mathbf{L3A_G}$ .

**Caso  $\neg$ :** Supongamos que  $\varphi = \neg\psi$ , sabemos que  $Atoms(\varphi) = Atoms(\psi)$  y por hipótesis inductiva tenemos que  $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$ . Dependiendo cual sea el valor de  $\varphi$  bajo la valuación  $v$  se cumple alguno de los siguientes casos:

1. Si  $\mathbf{v}(\varphi) = \mathbf{0}$ , entonces  $v(\psi) = 2$ ,  $\psi_v = \neg\neg\psi$ ,  $\varphi_v = G(\varphi) = G(\neg\psi)$  y  $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg\psi$ . Por **N3** tenemos que  $\neg\neg\psi \vdash G(\neg\psi)$  y si aplicamos **Corte** concluimos que  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\neg\psi)$ .
2. Si  $\mathbf{v}(\varphi) = \mathbf{1}$ , note que  $v(\varphi) \neq 1$  para cualquier fórmula  $\varphi$ , por lo que este caso no tiene sentido.
3. Si  $\mathbf{v}(\varphi) = \mathbf{2}$ , entonces  $v(\psi) = 0$  o  $v(\psi) = 1$  y en cualquier caso  $\psi_v = \neg\neg\varphi = \neg\neg\neg\psi$ . Analicemos estos subcasos:

Si  $v(\psi) = 0$ , entonces  $\psi_v = G(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\psi)$  y por la propiedad **N1**  $G(\psi) \vdash \neg\neg\neg\psi$  así que  $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg\neg\psi$ .

En el caso que  $\mathbf{v}(\psi) = \mathbf{1}$  se tiene que  $\psi_v = N(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi)$  y por **N2**  $N(\psi) \vdash \neg\neg\neg\psi$  de donde se concluye  $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg\neg\psi$ .

Así que sin importar cual es el valor de  $\varphi$ , concluimos que  $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$ .

**Caso  $\rightarrow$ :** Supongamos que  $\varphi = \psi \rightarrow \sigma$ . Por hipótesis inductiva sabemos que:  $Atoms(\psi)_v \vdash \psi_v$  y  $Atoms(\sigma)_v \vdash \sigma_v$ .

Como  $Atoms(\varphi)_v = Atoms(\psi)_v \cup Atoms(\sigma)_v$ , entonces aplicando **Mon** llegamos a que  $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$  y  $Atoms(\varphi)_v \vdash \sigma_v$ . Dependiendo cual sea el valor que la valuación asigne a  $\varphi$  debemos analizar las siguientes posibilidades:

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

5.1. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA **L3A<sub>G</sub>**

---

1. Si  $v(\varphi) = \mathbf{0}$ , entonces tenemos dos posibles escenarios:  $v(\psi) = 1$  y  $v(\sigma) = 0$ ; o  $v(\psi) = 2$  y  $v(\sigma) = 0$ , pero en cualquier caso  $\varphi_v = G(\varphi) = G(\psi \rightarrow \sigma)$ .

Si  $v(\psi) = 1$  y  $v(\sigma) = 0$ , por la Definición 29 tenemos que:  $\psi_v = N(\psi)$ ,  $\sigma_v = G(\sigma)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\sigma)$ , por lo que si aplicamos **R-AND** a estas hipótesis y **MP** a la fórmula resultante y la propiedad **I5**  $\vdash (N(\psi) \wedge G(\sigma)) \rightarrow G(\psi \rightarrow \sigma)$  obtenemos  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\psi \rightarrow \sigma)$ .

Si es el caso que  $v(\psi) = 2$  y  $v(\sigma) = 0$ , entonces tenemos que las transformaciones de estas fórmulas son  $\psi_v = \neg\neg\psi$  y  $\sigma_v = G(\sigma)$ . Además por hipótesis inductiva se debe cumplir que  $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg\psi$  y  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\sigma)$ . Por otro lado por **I6** sabemos que  $\vdash (\neg\neg(\psi) \wedge G(\sigma)) \rightarrow G(\psi \rightarrow \sigma)$  y nuevamente como en el caso anterior, mediante **R-AND** con las hipótesis y **MP** con la resultante y la propiedad **I6**, concluimos que  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\psi \rightarrow \sigma)$ .

2. Si  $v(\varphi) = \mathbf{1}$ , entonces sólo hay una posibilidad para las fórmulas  $\varphi$  y  $\psi$ , a saber,  $v(\psi) = 2$  y  $v(\sigma) = 1$ . Como consecuencia las transformaciones son  $\psi_v = \neg\neg\psi$ ,  $\sigma_v = N(\sigma)$  y  $\varphi_v = N(\varphi) = N(\psi \rightarrow \sigma)$ . Aplicando hipótesis inductiva se tiene  $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg\psi$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\sigma)$ . La propiedad **I4** dice que  $\vdash (\neg\neg(\psi) \wedge N(\sigma)) \rightarrow N(\psi \rightarrow \sigma)$ . Aplicando **R-AND** y **MP** a esta información adecuadamente obtenemos  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi \rightarrow \sigma)$ .

3. Si  $v(\varphi) = \mathbf{2}$  de acuerdo con la tabla de verdad, sólo existen tres combinaciones para los valores del antecedente y consecuente, esta son: El antecedente vale cero  $v(\psi) = 0$ ; o bien el consecuente toma valor dos  $v(\sigma) = 2$ ; o ambos valen 1  $v(\psi) = v(\sigma) = 1$ , cualquiera que sea el caso tenemos  $\varphi_v = \neg\neg\varphi = \neg\neg(\psi \rightarrow \sigma)$ . Nuevamente estudiamos cada caso.

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.1. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3A_G$**

---

Si  $v(\psi) = 0$ , entonces las transformaciones son:  $\psi_v = G(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\psi)$ .

Por **I1**  $G(\psi) \vdash \neg\neg(\psi \rightarrow \sigma)$  después de aplicar **Corte** concluimos que  $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg(\psi \rightarrow \sigma)$ .

Si  $v(\sigma) = 2$ , las transformaciones son:  $\sigma_v = \neg\neg\sigma$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg\sigma$ . Por **I2**  $\neg\neg\sigma \vdash \neg\neg(\psi \rightarrow \sigma)$  si usamos **Corte** podemos derivar  $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg(\psi \rightarrow \sigma)$ .

Si  $v(\psi) = v(\sigma) = 1$  tenemos que  $\psi_v = N(\psi)$ ,  $\sigma_v = N(\sigma)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi)$ . Además por hipótesis inductiva se cumple que  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\sigma)$  y por la regla **I3**  $N(\psi) \wedge N(\sigma) \vdash \neg\neg(\psi \rightarrow \sigma)$  por lo que usando **R-AND** y **Corte** apropiadamente tenemos que  $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg(\psi \rightarrow \sigma)$ .

Concluimos en cualquier caso que:  $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$ .

**Caso  $\wedge$ :** Supongamos que  $\varphi = \psi \wedge \sigma$ . De forma análoga al caso de la implicación, sabemos que  $Atoms(\varphi)_v = \psi_v$  y  $Atoms(\varphi)_v = \sigma_v$ . Con base en la valuación de  $\varphi$  debemos estudiar los siguientes casos:

1. If  $v(\varphi) = \mathbf{0}$  tenemos dos posibilidades  $v(\psi) = 0$  o  $v(\sigma) = 0$ , en cualquier caso  $\varphi_v = G(\varphi) = G(\psi \wedge \sigma)$ .

Si  $v(\psi) = 0$ , entonces  $\psi_v = G(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\psi)$ , y por la propiedad **C1** sabemos que:  $G(\psi) \vdash G(\psi \wedge \sigma)$  de donde se sigue que  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\psi \wedge \sigma)$ .

Si  $v(\sigma) = 0$ , usando el mismo argumento que el caso previo tenemos que  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\psi \wedge \sigma)$ .

2. Si  $v(\varphi) = \mathbf{1}$ , entonces  $v(\psi) = v(\sigma) = 1$ , de aquí las transformaciones de las fórmulas son:  $\psi_v = N(\psi)$ ,  $\sigma_v = N(\sigma)$ ,  $\varphi_v = N(\varphi) = N(\psi \wedge \sigma)$ . Sabemos por hipótesis inductiva que  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi)$  y  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\sigma)$ , y por la propiedad **C2**, tenemos  $N(\psi) \wedge N(\sigma) \vdash N(\psi \wedge \sigma)$ . Así que aplicando **R-AND** a las hipótesis inductivas y **Corte** obtenemos  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi \wedge \sigma)$ .

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.1. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3A_G$**

---

3. Si  $v(\varphi) = 2$ , entonces hay tres posibles situaciones:  $v(\psi) = 2$  y  $v(\sigma) = 1$ ;  $v(\psi) = 1$  y  $v(\sigma) = 2$ ; o bien  $v(\psi) = v(\sigma) = 2$ . En cualquier caso se tiene que  $\varphi_v = \neg\neg(\varphi) = \neg\neg(\psi \wedge \sigma)$ .

Si  $v(\psi) = 2, v(\sigma) = 1$ , entonces  $\psi_v = \neg\neg\psi$ ,  $\sigma_v = N(\sigma)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\sigma)$  y por la propiedad **C3**  $\neg\neg\psi \wedge N(\sigma) \vdash \neg\neg(\psi \wedge \sigma)$ , entonces usando **R-AND** y **Corte** concluimos  $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg(\psi \wedge \sigma)$ .

Si  $v(\psi) = 1, v(\sigma) = 2$  por un análisis similar al caso previo tenemos que  $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg(\psi \wedge \sigma)$ .

Si  $v(\psi) = v(\sigma) = 2$ , entonces  $\psi_v = \neg\neg\psi$ ,  $\sigma_v = \neg\neg\sigma$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg\psi$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg\sigma$  y por **C4**  $\neg\neg\psi \wedge \neg\neg\sigma \vdash \neg\neg(\psi \wedge \sigma)$  por lo tanto usando **R-AND** y **Corte** obtenemos  $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg(\psi \wedge \sigma)$ .

En los puntos 1, 2 y 3 hemos verificado que:  $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$ . Por lo que en el caso de la disyunción se verifica el Lema.

**Caso  $\vee$ :** Supongamos que  $\varphi = \psi \vee \sigma$ . Análogamente al caso previo, sabemos que  $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$  y  $Atoms(\varphi)_v \vdash \sigma_v$ . Con base en la valuación de  $\varphi$ , debemos estudiar los casos siguientes:

1. Si  $v(\varphi) = 0$ , entonces  $v(\psi) = v(\sigma) = 0$  de aquí que las fórmulas transformadas sean  $\psi_v = G(\psi)$ ,  $\sigma_v = G(\sigma)$ ,  $\varphi_v = G(\varphi) = G(\psi \vee \sigma)$  y aplicando la hipótesis inductiva  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\sigma)$ . Además por la propiedad **D4**,  $G(\psi) \wedge G(\sigma) \vdash G(\psi \wedge \sigma)$  así que usando **R-AND** y **Corte** como en casos previos, podemos concluir  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\psi \vee \sigma)$ .
2. Si  $v(\varphi) = 1$ , tenemos tres posibilidades para que los disyuntandos tomen valores:  $v(\psi) = 1$  y  $v(\sigma) = 0$ ; o  $v(\psi) = 0$  y  $v(\sigma) = 1$ ; o se tiene que  $v(\psi) = v(\sigma) = 1$ . Sin importar cual sea la situación, tenemos  $\varphi_v = N(\varphi) = N(\psi \wedge \sigma)$ .

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.1. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3A_G$**

---

Si  $v(\psi) = 1$  y  $v(\sigma) = 0$  se tiene que  $\psi_v = N(\psi)$ ,  $\sigma_v = G(\sigma)$ . De acuerdo con la hipótesis inductiva,  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\sigma)$ , también por la propiedad **D2**,  $N(\psi) \wedge G(\sigma) \vdash N(\psi \wedge \sigma)$  luego usando **R-AND** y **Corte** concluimos que  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi \vee \sigma)$ .

Si es el caso que  $v(\psi) = 0$  y  $v(\sigma) = 1$  mediante un análisis similar al caso previo tenemos que  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi \vee \sigma)$ .

Si para  $v$  se tiene que  $v(\psi) = v(\sigma) = 1$ , entonces las transformaciones son  $\psi_v = N(\psi)$ ,  $\sigma_v = N(\sigma)$ . También por hipótesis inductiva  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\sigma)$ , y por la propiedad **D3**,  $N(\psi) \wedge N(\sigma) \vdash N(\psi \wedge \sigma)$ . Como en casos previos usando **R-AND** y **Corte** concluimos, como se requería, que  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi \vee \sigma)$ .

3. Si  $v(\varphi) = 2$ , entonces hay dos casos,  $v(\psi) = 2$  o  $v(\sigma) = 2$ , en cualquiera de ellos  $\varphi_v = \neg\neg(\varphi) = \neg\neg(\psi \vee \sigma)$ .

Si  $v(\psi) = 2$ , entonces  $\psi_v = \neg\neg(\psi)$  y aplicando la hipótesis de inducción  $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg\psi$ , además por la propiedad **D1**, se sabe que  $\neg\neg\psi \vdash \neg\neg(\psi \wedge \sigma)$ , luego  $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg(\psi \wedge \sigma)$ .

Si  $v(\sigma) = 2$ , entonces el caso es análogo al anterior y podemos concluir que  $Atoms(\varphi)_v \vdash \neg\neg(\psi \wedge \sigma)$ .

Sin importar el valor que tome la disyunción se verifica que:  $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$ .  
Con este caso concluimos la demostración.

■

## CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS

### 5.1. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA $\mathbf{L3A_G}$

---

Tenemos ahora el material necesario para poder demostrar que  $\mathbf{L3A_G}$  es completa con respecto a la teoría formal axiomática  $\mathbb{L}$  y con esto garantizar que tenemos una axiomatización para la lógica  $\mathbf{L3A_G}$ .

**Teorema 5** *Sea  $\varphi$  una fórmula, si  $\varphi$  es una tautología en  $\mathbf{L3A_G}$ , entonces  $\varphi$  es un teorema en  $\mathbb{L}$ . Esto es, si  $\models_{\mathbf{L3A_G}} \varphi$ , entonces  $\vdash_{\mathbb{L}} \varphi$ .*

**Demostración** Supongamos que  $\varphi$  es una tautología cuyo conjunto de fórmulas atómicas es  $\Phi$ , entonces tenemos dos casos,  $v(\varphi) = 2$  o  $v(\varphi) = 1$ , ya que ambos son valores designados.

Si  $v(\varphi) = 2$ , entonces  $\varphi_v = \neg\neg\varphi$  y por el Lema 3 tenemos que  $\Phi_v \vdash \neg\neg\varphi$ , ahora usando la parte a) del Lema 1 y *Modus Ponens* tenemos que  $\Phi_v \vdash \varphi$ . Si además  $p$  es un átomo de  $\Phi$  y  $\Gamma := \Phi \setminus \{p\}$ , entonces se cumple que  $\Gamma, p_v \vdash \varphi$  para cualquier valuación  $v$ . Por lo tanto, se cumple que:  $\Gamma, \neg\neg p \vdash \varphi$ ;  $\Gamma, N(p) \vdash \varphi$  y  $\Gamma, G(p) \vdash \varphi$ . Usando la parte l) del Lema 1 se sigue que  $\Gamma \vdash \varphi$ , si a este proceso le llamamos un *paso*, entonces después de  $|\Phi|$  *pasos* obtenemos  $\vdash \varphi$ .

Si  $v(\varphi) = 1$ , entonces  $\varphi_v = N(\varphi)$  y por el Lema 3, se tiene que  $\Phi_v \vdash N(\varphi)$ . También sabemos que  $N(\varphi) \vdash \varphi$ , entonces usando **Corte** obtenemos que  $\Phi_v \vdash \varphi$ . Sea  $p$  un átomo de  $\Phi$  y sea  $\Gamma := \Phi \setminus \{p\}$ . Procediendo análogamente al caso previo tenemos  $\Gamma \vdash \varphi$ . Repitiendo este proceso una cantidad  $|\Phi|$  de veces concluimos que  $\vdash \varphi$ .

Por lo tanto en cualquier caso  $\varphi$  es un teorema. ■

#### 5.1.4 El Teorema de Reemplazamiento en $\mathbf{L3A_G}$

Vale la pena mencionar que el conectivo binario llamado bicondicional  $\leftrightarrow$  definido como  $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$  no define una relación de congruencia entre fórmulas de  $\mathbf{L3A_G}$ . Es suficiente con considerar la fórmula  $(\varphi \rightarrow \varphi) \leftrightarrow (\varphi \vee G(\varphi))$  la cuál es un teorema, sin embargo  $\neg(\varphi \rightarrow \varphi) \leftrightarrow \neg(\varphi \vee G(\varphi))$  no lo es. Siguiendo un análisis similar al propuesto en [3], es posible definir una noción de equivalencia

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $\mathbf{L3B_G}$**

---

entre fórmulas más fuerte por medio del conectivo binario  $\Leftrightarrow$  como sigue. Con la fórmula  $\varphi \Leftrightarrow \psi$  abreviamos:

$$\neg((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg(\psi \rightarrow \varphi)) \wedge \neg((\psi \rightarrow \varphi) \wedge \neg(\varphi \rightarrow \psi))$$

Se puede verificar mediante cálculo directo que  $\varphi \leftrightarrow \psi$  es una tautología si y sólo si para cada valuación  $v$  se cumple alguno de los siguientes casos;  $v(\varphi) = v(\psi)$ ;  $v(\varphi) = 2$  y  $v(\psi) = 1$ ; o  $v(\varphi) = 1$  y  $v(\psi) = 2$ . Por otro lado  $\varphi \Leftrightarrow \psi$  es una tautología si y sólo si para cada valuación  $v$ ,  $v(\varphi) = v(\psi)$ , ver Tabla 5.3.

$\leftrightarrow$	0	1	2
0	2	0	0
1	0	2	1
2	0	1	2

$\Leftrightarrow$	0	1	2
0	2	0	0
1	0	2	0
2	0	0	2

Tabla 5.3: Tablas de  $\leftrightarrow$  y  $\Leftrightarrow$  en  $\mathbf{L3A_G}$

**Teorema 6** Si  $\sigma_1 = \{p/\varphi\}$  y  $\sigma_2 = \{p/\psi\}$  son dos sustituciones<sup>1</sup> en  $\mathbf{L3A_G}$  tales que  $\varphi \Leftrightarrow \psi$  es una tautología, entonces  $\sigma_1(\rho) \Leftrightarrow \sigma_2(\rho)$  es una tautología para cualquier fórmula  $\rho$ .

**Demostración** Si  $\varphi \Leftrightarrow \psi$  es una tautología, entonces para cada valuación  $v$  en  $\mathbf{L3A_G}$ ,  $v(\varphi) = v(\psi)$ . Por lo tanto,  $v(\sigma_1(\rho)) = v(\sigma_2(\rho))$  así,  $\sigma_1(\rho) \Leftrightarrow \sigma_2(\rho)$  es una tautología. ■

## 5.2 Un Sistema Axiomático Tipo Hilbert para $\mathbf{L3B_G}$

Con un procedimiento similar al realizado en la Sección 5.1, en esta sección se brinda un sistema axiomático tipo Hilbert para la lógica  $\mathbf{L3B_G}$ , siguiendo el mismo orden que se uso para  $\mathbf{L3A_G}$ . Empezamos por recordar la semántica multivaluada de  $\mathbf{L3B_G}$ , posteriormente definimos una teoría formal axiomática  $\mathbb{L}_1$  y demostramos algunas propiedades básicas y resultados útiles en ella, y finalmente demostramos

---

<sup>1</sup>Ver la Definición 2.

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $\mathbf{L3B_G}$**

---

que  $\mathbb{L}_1$  es robusta y completa con respecto a la lógica  $\mathbf{L3B_G}$ , en una sección final mostramos que el teorema de reemplazamiento no es válido aunque una versión restringida de él si lo es.

**5.2.1 La Semántica Multivaluada de  $\mathbf{L3B_G}$**

La lógica paraconsistente genuina trivaluada  $\mathbf{L3B_G}$  se define en [15] y está dada por la matriz multivaluada  $\mathcal{M} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{D}, \mathcal{O} \rangle$ ; donde  $\mathcal{V} = \{0, 1, 2\}$  es el dominio,  $\mathcal{D} = \{1, 2\}$  es el conjunto de valores designados, y  $\mathcal{O}$  indica el comportamiento de las funciones de verdad  $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg\}$  por medio de las funciones de la Tabla 5.4.

	$\neg$	$\wedge$	0	1	2	$\vee$	0	1	2	$\rightarrow$	0	1	2
0	2	0	0	0	0	0	0	1	2	0	2	2	2
1	1	1	0	2	1	1	1	1	2	1	0	2	2
2	0	2	0	1	2	2	2	2	2	2	0	1	2

Tabla 5.4: Funciones de verdad para los conectivos  $\neg, \rightarrow, \wedge$  y  $\vee$  en  $\mathbf{L3B_G}$

**5.2.2 La Teoría Formal Axiomática y algunas de sus Propiedades**

Sea  $\mathbb{L}_1$ , una teoría formal axiomática para  $\mathbf{L3B_G}$  constituida por los conectivos primitivos:  $\neg, \rightarrow, \vee$  y  $\wedge$  y dos conectivos definidos en términos de los primitivos  $G$  y  $N$  definidos como:  $G(\varphi) := \varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi))$  y  $N(\varphi) := \varphi \wedge \neg\varphi$ . Las fórmulas bien formadas se construyen de la manera usual y los esquemas de axioma son los siguientes:

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3B_G$**

---

- Pos1** :  $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$   
**Pos2** :  $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$   
**Pos3** :  $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$   
**Pos4** :  $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$   
**Pos5** :  $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$   
**Pos6** :  $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$   
**Pos7** :  $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$   
**Pos8** :  $\vdash (\varphi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \sigma))$   
**Cw1** :  $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$   
**Cw2** :  $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$   
**SWE** :  $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow (\neg(\varphi \wedge \varphi) \rightarrow \psi)$   
**L3B1** :  $\vdash N(\varphi \wedge \psi) \rightarrow G(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$   
**L3B2** :  $\vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \neg\psi)$   
**L3B3** :  $\vdash \neg N(\varphi) \rightarrow G(N(\varphi))$   
**L3B4** :  $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg N(\psi)) \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$   
**L3B5** :  $\vdash N(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow G(N(\varphi))$   
**L3B6** :  $\vdash ((\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg N(\varphi)) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$   
**L3B7** :  $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow \neg\varphi$   
**L3B8** :  $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$

la única regla de inferencia es *Modus Ponens* (**MP**). Con  $\Lambda \vdash \lambda$  indicamos que existe una deducción de  $\lambda$  en  $\mathbb{L}_1$  a partir de las hipótesis tomadas del conjunto  $\Lambda$ . En el caso que  $\Lambda = \emptyset$  escribimos  $\vdash \lambda$ , lo que significa que podemos demostrar  $\lambda$  sin necesidad de hipótesis. También, escribimos  $\Lambda, \varphi \vdash \psi$  para representar  $\Lambda \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ . A continuación presentamos una lista de propiedades que se satisfacen en  $\mathbb{L}_1$ . Vale la pena mencionar que el esquema de axioma **Cw2** no corresponde al esquema usual  $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ , que de hecho se puede demostrar en la teoría y está en la parte a) del Lema 4.

**Teorema 7** Sean  $\Gamma$  y  $\Delta$  dos conjuntos de fórmulas y sean  $\varphi$  y  $\psi$  fórmulas arbitrarias, las siguientes propiedades se verifican en  $\mathbb{L}_1$ .

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3B_G$**

---

<b>Monotonía</b>	<i>Si <math>\Gamma \vdash \varphi</math>, entonces <math>\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi</math>.</i>
<b>Teorema de la Deducción</b>	<i><math>\Gamma, \varphi \vdash \psi</math> si y sólo si <math>\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi</math>.</i>
<b>Corte</b>	<i>Si <math>\Gamma \vdash \varphi</math> y <math>\Delta, \varphi \vdash \psi</math>, entonces <math>\Gamma \cup \Delta \vdash \psi</math>.</i>
<b>Reglas-AND</b>	<i><math>\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi</math> si y sólo si <math>\Gamma \vdash \varphi</math> y <math>\Gamma \vdash \psi</math>.</i>
<b>Prueba fuerte por casos</b>	<i><math>\Gamma, \varphi \vdash \psi</math> y <math>\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi</math> si y sólo si <math>\Gamma \vdash \psi</math>.</i>

**Demostración** Ver la prueba del Teorema 3. ■

En el siguiente Lema resumimos algunas propiedades de  $\mathbb{L}_1$ . Seleccionamos estas propiedades ya que son necesarias para continuar con el estudio de la teoría.

**Lema 4** *Para cualesquiera fórmulas bien formadas  $\varphi, \psi, \sigma$  y  $\xi$ , se cumplen las siguientes propiedades en  $\mathbb{L}_1$ .*

- (a)  $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ .
- (b) *Si  $\vdash \varphi \rightarrow \psi$  y  $\vdash \psi \rightarrow \sigma$ , entonces  $\vdash \varphi \rightarrow \sigma$ .*
- (c)  $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$ .
- (d)  $\varphi \wedge \psi \vdash \sigma$  si y sólo si  $\varphi, \psi \vdash \sigma$ .
- (e)  $\vdash (\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi)) \rightarrow \psi$ .
- (f)  $\vdash (\neg\neg\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi)) \rightarrow \psi$ .
- (g)  $G(\varphi), \varphi \vdash \psi$ .
- (h)  $G(\varphi) \vdash \neg\varphi$ .
- (i)  $\neg G(\varphi) \vdash \varphi$ .
- (j)  $\varphi \vdash G(G(\varphi))$ .
- (k)  $G(G(\varphi)) \vdash \varphi$ .
- (l)  $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (G(\psi) \rightarrow G(\varphi))$ .
- (m) *Si  $\varphi \vdash \psi$  y  $\sigma \vdash \xi$ , entonces  $\varphi \wedge \sigma \vdash \psi \wedge \xi$ .*
- (n) *Si  $G(\varphi) \vdash \psi$ ,  $N(\varphi) \vdash \psi$  y  $\neg G(\varphi) \wedge \neg N(\varphi) \vdash \psi$ , entonces  $\vdash \psi$ .*

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3B_G$**

---

**Demostración**

(a)  $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ .

- |    |  |                 |
|----|--|-----------------|
| 1. | $\varphi \wedge \varphi \vdash \varphi$                        | <b>Pos3, DT</b> |
| 2. | $\varphi \wedge \varphi, \neg\neg\varphi \vdash \varphi$       | <b>Mon</b>      |
| 3. | $\neg(\varphi \wedge \varphi), \neg\neg\varphi \vdash \varphi$ | <b>SWE, DT</b>  |
| 4. | $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$                               | <b>SPC(2,3)</b> |

(b) **Si  $\vdash \varphi \rightarrow \psi$  y  $\vdash \psi \rightarrow \sigma$ , entonces  $\vdash \varphi \rightarrow \sigma$ .**

Ver demostración del Lema 1, parte b).

(c)  $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$ .

Ver demostración del Lema 1, parte c).

(d)  $\varphi \wedge \psi \vdash \sigma$  si y sólo si  $\varphi, \psi \vdash \sigma$ .

Ver demostración del Lema 1, parte m).

(e)  $\vdash (\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi)) \rightarrow \psi$ .

- |    |   |                   |
|----|---|-------------------|
| 1. | $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$  | <b>Cw2, DT</b>    |
| 2. | $\neg\neg\varphi, \neg(\varphi \wedge \varphi) \vdash \psi$             | <b>SWE, DT</b>    |
| 3. | $\varphi, \neg(\varphi \wedge \varphi) \vdash \psi$                     | <b>Corte(1,2)</b> |
| 4. | $\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi) \vdash \psi$               | Lema 4-d          |
| 5. | $\vdash (\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi)) \rightarrow \psi$ | <b>DT</b>         |

(f)  $\vdash (\neg\neg\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi)) \rightarrow \psi$ .

- |    |   |                |
|----|---|----------------|
| 1. | $\neg\neg\varphi, \neg(\varphi \wedge \varphi) \vdash \psi$                     | <b>SWE, TD</b> |
| 2. | $\neg\neg\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi) \vdash \psi$               | Lema 4-d       |
| 3. | $\vdash (\neg\neg\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi)) \rightarrow \psi$ | <b>DT</b>      |

(g)  $G(\varphi), \varphi \vdash \psi$ .

- |    |   |                   |
|----|---|-------------------|
| 1. | $\varphi, \varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi)) \vdash \varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi)$ | <b>MP</b>         |
| 2. | $\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi) \vdash \psi$   | Lema 4-e          |
| 3. | $\varphi, \varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi)) \vdash \psi$  | <b>Corte(1,2)</b> |
| 4. | $\varphi, G(\varphi) \vdash \psi$   | abrev. $G$        |

Una consecuencia de este resultado al aplicarle **DT**, es  $G(\varphi) \vdash \varphi \rightarrow \psi$ .

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3B_G$**

- (h)**  $G(\varphi) \vdash \neg\varphi$ .
1.  $G(\varphi), \neg\varphi \vdash \neg\varphi$  **Mon**
  2.  $G(\varphi), \varphi \vdash \neg\varphi$  Lema 4-g
  3.  $G(\varphi) \vdash \neg\varphi$  **SPC(1,2)**
- (i)**  $\neg G(\varphi) \vdash \varphi$ .
1.  $\vdash \neg(\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi))) \rightarrow (\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi)))$  **L3B2**
  2.  $\vdash (\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi))) \rightarrow \varphi$  **Pos3**
  3.  $\vdash \neg(\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi))) \rightarrow \varphi$  Lema 4-b
  4.  $\vdash \neg G(\varphi) \rightarrow \varphi$  abrev. G
- (j)**  $\varphi \vdash G(G(\varphi))$ .
1.  $\varphi, G(\varphi) \vdash G(\varphi) \wedge \neg(G(\varphi) \wedge G(\varphi))$  Lema 4-g
  2.  $\varphi \vdash G(\varphi) \rightarrow (G(\varphi) \wedge \neg(G(\varphi) \wedge G(\varphi)))$  **DT**
  3.  $\varphi \vdash G(G(\varphi))$  abrev. G
- (k)**  $G(G(\varphi)) \vdash \varphi$ .
1.  $G(G(\varphi)) \vdash \neg G(\varphi)$  Lema 4-h
  2.  $\neg G(\varphi) \vdash \varphi$  Lema 4-i
  3.  $G(G(\varphi)) \vdash \varphi$  **Corte(1,2)**
- (l)**  $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (G(\psi) \rightarrow G(\varphi))$ .
1.  $\varphi, \varphi \rightarrow \psi, G(\psi) \vdash \psi \wedge G(\psi)$  **MP, Mon**
  2.  $\psi \wedge G(\psi) \vdash \varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi)$  Lema 4-g
  3.  $\varphi, \varphi \rightarrow \psi, G(\psi) \vdash \varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi)$  **Corte(1,2)**
  4.  $\varphi \rightarrow \psi, G(\psi) \vdash \varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi))$  **DT**
  5.  $\varphi \rightarrow \psi, G(\psi) \vdash G(\varphi)$  abrev. G
  6.  $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (G(\psi) \rightarrow G(\varphi))$  **DT**
- (m)** Si  $\varphi \vdash \psi$  y  $\sigma \vdash \xi$ , entonces  $\varphi \wedge \sigma \vdash \psi \wedge \xi$ .

La prueba es análoga a la parte k) del Lema 1.

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3B_G$**

**(n)** Si  $G(\varphi) \vdash \psi$ ,  $N(\varphi) \vdash \psi$  y  $\neg G(\varphi) \wedge \neg N(\varphi) \vdash \psi$ , entonces  $\vdash \psi$ .

1.	$G(\varphi) \vdash \psi$	<b>Hipótesis</b>
2.	$N(\varphi) \vdash \psi$	<b>Hipótesis</b>
3.	$\neg G(\varphi) \wedge \neg N(\varphi) \vdash \psi$	<b>Hipótesis</b>
4.	$\neg N(\varphi) \vdash \psi$	<b>SPC(1,3)</b>
5.	$\vdash \psi$	<b>SPC(2,4)</b>

Es necesario hacer algunas precisiones sobre el conectivo  $G$ . en primer lugar notemos que por la parte e) si denotamos  $\varphi \wedge \neg(\varphi \wedge \varphi)$  por  $\perp_\varphi$ , entonces  $\perp_\varphi \vdash \perp_\psi$  para cualesquiera fórmulas  $\varphi$  y  $\psi$ . De la misma manera se puede demostrar que para cualesquiera fórmulas  $\varphi$  y  $\psi$  en  $\mathbb{L}_1$  se cumple que  $G(\varphi) \vdash \varphi \rightarrow \perp_\psi$  y  $\varphi \rightarrow \perp_\psi \vdash G(\varphi)$ . Por la parte h) tenemos que  $G(G(\varphi)) \vdash \neg G(\varphi)$  y usando **Corte** con esto y con la parte j) obtenemos  $\varphi \vdash \neg G(\varphi)$ , la parte i) nos da  $\neg G(\varphi) \vdash \varphi$ .

**Observación 1** *Esto nos permite usar indistintamente  $\perp$  o  $\perp_\varphi$ ;  $\varphi \rightarrow \perp$  o  $G(\varphi)$ , y  $\varphi$  o  $\neg G(\varphi)$ . Continuamos ahora con algunas propiedades necesarias para probar el Lema 6, esencial para demostrar completitud. Este Lema juega un papel similar al del Lema 2 modelando el comportamiento de los conectivos.*

**Lema 5** *Para cualesquiera fórmulas  $\varphi$  y  $\psi$ , los siguientes son teoremas en  $\mathbb{L}_1$ .*

<b>N'1:</b>	$\vdash G(\varphi) \rightarrow D(\neg\varphi)$	<b>C'1:</b>	$\vdash G(\varphi) \rightarrow G(\varphi \wedge \psi)$
<b>N'2:</b>	$\vdash N(\varphi) \rightarrow N(\neg\varphi)$	<b>C'2:</b>	$\vdash N(\varphi) \wedge N(\psi) \rightarrow D(\varphi \wedge \psi)$
<b>N'3:</b>	$\vdash D(\varphi) \rightarrow G(\neg\varphi)$	<b>C'3:</b>	$\vdash D(\varphi) \wedge D(\psi) \rightarrow D(\varphi \wedge \psi)$
		<b>C'4:</b>	$\vdash N(\varphi) \wedge D(\psi) \rightarrow N(\varphi \wedge \psi)$
<b>I'1:</b>	$\vdash G(\varphi) \rightarrow D(\varphi \rightarrow \psi)$		
<b>I'2:</b>	$\vdash D(\psi) \rightarrow D(\varphi \rightarrow \psi)$		
<b>I'3:</b>	$\vdash N(\varphi) \wedge N(\psi) \rightarrow D(\varphi \rightarrow \psi)$	<b>D'1:</b>	$\vdash D(\varphi) \rightarrow D(\varphi \vee \psi)$
<b>I'4:</b>	$\vdash D(\varphi) \wedge N(\psi) \rightarrow N(\varphi \rightarrow \psi)$	<b>D'2:</b>	$\vdash G(\varphi) \wedge N(\psi) \rightarrow N(\varphi \vee \psi)$
<b>I'5:</b>	$\vdash N(\varphi) \wedge G(\psi) \rightarrow G(\varphi \rightarrow \psi)$	<b>D'3:</b>	$\vdash N(\varphi) \wedge N(\psi) \rightarrow N(\varphi \vee \psi)$
<b>I'6:</b>	$\vdash D(\varphi) \wedge G(\psi) \rightarrow G(\varphi \rightarrow \psi)$	<b>D'4:</b>	$\vdash G(\varphi) \wedge G(\psi) \rightarrow G(\varphi \vee \psi)$

donde para cualquier fórmula  $\lambda$ ,  $D(\lambda)$  representa  $\neg G(\lambda) \wedge \neg N(\lambda)$ .

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA L3B<sub>G</sub>**

**Demostración**

**N'1:**  $\vdash G(\varphi) \rightarrow D(\neg\varphi)$ .

- |     |   |                                   |
|-----|---|-----------------------------------|
| 1.  | $\varphi \rightarrow \perp, \neg\neg\varphi \wedge \neg\varphi \vdash \perp$              | <b>Pos3</b> , Lema 4-a, <b>MP</b> |
| 2.  | $\varphi \rightarrow \perp \vdash (\neg\neg\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \perp$ | <b>TD</b>                         |
| 3.  | $G(\varphi) \vdash N(\neg\varphi) \rightarrow \perp$                                      | abrev. G, abrev. N                |
| 4.  | $G(\varphi) \vdash G(N(\neg\varphi))$   | abrev. G                          |
| 5.  | $G(N(\neg\varphi)) \vdash \neg N(\neg\varphi)$  | Lema 4-h                          |
| 6.  | $G(\varphi) \vdash \neg N(\neg\varphi)$   | <b>Corte(4,5)</b>                 |
| 7.  | $G(\varphi) \vdash \neg\varphi$   | Lema 4-h                          |
| 8.  | $\neg\varphi \vdash \neg G(\neg\varphi)$  | <b>Obs 1</b>                      |
| 9.  | $G(\varphi) \vdash \neg G(\neg\varphi)$   | <b>Corte(7,8)</b>                 |
| 10. | $G(\varphi) \vdash \neg G(\neg\varphi) \wedge \neg N(\neg\varphi)$                        | <b>R-AND(6,14)</b>                |
| 11. | $G(\varphi) \vdash D(\neg\varphi)$  | abrev. D                          |

**N'2:**  $\vdash N(\varphi) \rightarrow N(\neg\varphi)$ .

- |    |  |                          |
|----|--|--------------------------|
| 1. | $\varphi \wedge \neg\varphi \vdash \neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi$ | <b>Pos3</b> , <b>Cw2</b> |
| 2. | $N(\varphi) \vdash N(\neg\varphi)$                                     | abrev. N                 |
| 3. | $\vdash N(\varphi) \rightarrow N(\neg\varphi)$                         | <b>DT</b>                |

**N'3:**  $\vdash D(\varphi) \rightarrow G(\neg\varphi)$ .

- |    |   |                         |
|----|---|-------------------------|
| 1. | $\neg N(\varphi) \vdash G(N(\varphi))$  | <b>L3B3</b> , <b>DT</b> |
| 2. | $\neg N(\varphi) \vdash N(\varphi) \rightarrow \perp$                         | abrev. G                |
| 3. | $\neg N(\varphi), N(\varphi) \vdash \perp$                                    | <b>DT</b>               |
| 4. | $\neg N(\varphi), \varphi \wedge \neg\varphi \vdash \perp$                    | abrev. N                |
| 5. | $\neg N(\varphi) \wedge \varphi, \neg\varphi \vdash \perp$                    | <b>Obs 1</b>            |
| 6. | $\neg N(\varphi) \wedge \varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow \perp$         | <b>DT</b>               |
| 7. | $\neg G(\varphi) \vdash \varphi$  | Lema 4-i                |
| 8. | $\neg N(\varphi) \wedge \neg G(\varphi) \vdash \neg\varphi \rightarrow \perp$ | <b>Corte(7,6)</b>       |
| 9. | $D(\varphi) \vdash G(\neg\varphi)$  | abrev. D, G             |

Note que en virtud de la línea 3, utilizando **Reglas-AND** y Teorema de la Deducción se demuestra que para cualquier fórmula  $\lambda$  se cumple  $\vdash \neg N(\lambda) \wedge N(\lambda) \rightarrow \perp$ .

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA L3B<sub>G</sub>**

**I'1:**  $\vdash G(\varphi) \rightarrow D(\varphi \rightarrow \psi)$ .

1.	$G(\varphi)$	<b>Hipótesis</b>
2.	$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	<b>Hipótesis</b>
3.	$\varphi \wedge \neg\psi$	<b>MP(L3B2,2)</b>
4.	$\varphi$	<b>MP(Pos3,3)</b>
5.	$\perp$	<b>MP(1,4)</b>
6.	$G(\varphi), \neg(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \perp$	1-5
7.	$G(\varphi), \varphi \rightarrow \psi \wedge \neg(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \perp$	<b>Mon, Obs 1</b>
8.	$G(\varphi), N(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \perp$	abrev. N
9.	$G(\varphi) \vdash N(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \perp$	<b>DT</b>
10.	$N(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \perp \vdash \neg N(\varphi \rightarrow \psi)$	Lema 4-h
11.	$G(\varphi) \vdash \neg N(\varphi \rightarrow \psi)$	<b>Corte(9,10)</b>
12.	$G(\varphi) \vdash \varphi \rightarrow \psi$	Lema 4-g
13.	$\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg G(\varphi \rightarrow \psi)$	<b>Obs 1</b>
14.	$G(\varphi) \vdash \neg G(\varphi \rightarrow \psi)$	<b>Corte(12,13)</b>
15.	$G(\varphi) \vdash \neg G(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg N(\varphi \rightarrow \psi)$	<b>R-AND(11,14)</b>
16.	$G(\varphi) \vdash D(\varphi \rightarrow \psi)$	abrev. D
17.	$\vdash G(\varphi) \rightarrow D(\varphi \rightarrow \psi)$	<b>DT</b>

**I'2:**  $\vdash D(\psi) \rightarrow D(\varphi \rightarrow \psi)$ .

1.	$\neg N(\psi)$	<b>Hipótesis</b>
2.	$\varphi \rightarrow \psi$	<b>Hipótesis</b>
3.	$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	<b>Hipótesis</b>
4.	$\varphi \wedge \neg\psi$	<b>MP(L3B2,3)</b>
5.	$\varphi$	<b>MP(Pos3,4)</b>
6.	$\neg\psi$	<b>MP(Pos4,4)</b>
7.	$\psi$	<b>MP(2,5)</b>
8.	$\neg\psi \wedge \psi$	<b>R-AND(6,7)</b>
9.	$N(\psi)$	abrev. N
10.	$\neg N(\psi) \wedge N(\psi)$	<b>R-AND(1,9)</b>
11.	$\perp$	<b>MP(<math>\neg N(\lambda) \wedge N(\lambda) \vdash \perp</math>,10)</b>
12.	$\neg N(\psi), \varphi \rightarrow \psi, \neg(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \perp$	1-11
13.	$\neg N(\psi), (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \perp$	<b>Obs 1</b>
14.	$\neg N(\psi), N(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \perp$	abrev. N

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3B_G$**

15.	$\neg N(\psi) \vdash N(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \perp$	<b>DT</b>
16.	$N(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \perp \vdash \neg N(\varphi \rightarrow \psi)$	Lema 4-h
17.	$\neg N(\psi) \vdash \neg N(\varphi \rightarrow \psi)$	<b>Corte(15,16)</b>
18.	$\psi$	<b>Hipótesis</b>
19.	$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \perp$	<b>Hipótesis</b>
20.	$\varphi \rightarrow \psi$	<b>MP(Pos1,18)</b>
21.	$\perp$	<b>MP(19,20)</b>
22.	$\psi, (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \perp \vdash \perp$	18-21
23.	$\neg G(\psi) \vdash \psi$	Lema 4-i
24.	$\neg G(\psi), G(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \perp$	<b>Corte(22,23)</b> , abrev. G
25.	$\neg G(\psi) \vdash G(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \perp$	<b>DT</b>
26.	$G(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \perp \vdash \neg G(\varphi \rightarrow \psi)$	Lema 4-h
27.	$\neg G(\psi) \vdash \neg G(\varphi \rightarrow \psi)$	<b>Corte (25,26)</b>
28.	$\neg G(\psi) \wedge \neg N(\psi) \vdash \neg G(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg N(\varphi \rightarrow \psi)$	Lema 4-m(27,17)
29.	$D(\psi) \vdash D(\varphi \rightarrow \psi)$	abrev. N

**I'3:**  $\vdash (N(\varphi) \wedge N(\psi)) \rightarrow D(\varphi \rightarrow \psi)$ .

1.	$\psi, (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \perp \vdash \perp$	<b>I'2</b> , Línea 22
2.	$\neg\psi, \psi, G(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \perp$	<b>Mon</b> , abrev. G
3.	$\neg\psi \wedge \psi \vdash G(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \perp$	<b>DT, Obs 1</b>
4.	$G(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \perp \vdash \neg G(\varphi \rightarrow \psi)$	Lema 4-h
5.	$N(\psi) \vdash \neg G(\varphi \rightarrow \psi)$	<b>Corte(3,4)</b> , abrev. N
6.	$N(\varphi \rightarrow \psi) \vdash G(N(\varphi))$	<b>L3B5, DT</b>
7.	$N(\varphi \rightarrow \psi) \vdash N(\varphi) \rightarrow \perp$	abrev. G
8.	$N(\varphi \rightarrow \psi), N(\varphi) \vdash \perp$	<b>DT</b>
9.	$N(\varphi) \vdash N(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \perp$	<b>DT</b>
10.	$N(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \perp \vdash \neg N(\varphi \rightarrow \psi)$	Lema 4-h
11.	$N(\varphi) \vdash \neg N(\varphi \rightarrow \psi)$	<b>Corte(9,10)</b>
12.	$N(\psi) \wedge N(\varphi) \vdash \neg G(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg N(\varphi \rightarrow \psi)$	Lema 4-m(5,11)
13.	$N(\psi) \wedge N(\varphi) \vdash D(\varphi \rightarrow \psi)$	abrev. D

**I'4:**  $\vdash (D(\varphi) \wedge N(\psi)) \rightarrow N(\varphi \rightarrow \psi)$ .

1.	$\psi \vdash \varphi \rightarrow \psi$	<b>Pos1, DT</b>
2.	$(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg N(\varphi) \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi)$	<b>L3B6, DT</b>
3.	$\psi \wedge (\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg N(\varphi) \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg(\varphi \rightarrow \psi)$	Lema 4-m(1,2)

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3B_G$**

- |     |   |                   |
|-----|---|-------------------|
| 4.  | $\psi \wedge (\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg N(\varphi) \vdash N(\varphi \rightarrow \psi)$ | abrev. N          |
| 5.  | $\psi \wedge \neg\psi, \varphi \wedge \neg N(\varphi) \vdash N(\varphi \rightarrow \psi)$         | <b>Obs 1</b>      |
| 6.  | $N(\psi), \varphi \wedge \neg N(\varphi) \vdash N(\varphi \rightarrow \psi)$                      | Abbr N            |
| 7.  | $\neg G(\varphi) \vdash \varphi$  | Lema 4-i          |
| 8.  | $N(\psi), \neg G(\varphi) \wedge \neg N(\varphi) \vdash N(\varphi \rightarrow \psi)$              | <b>Corte(6,7)</b> |
| 9.  | $N(\psi), D(\varphi) \vdash N(\varphi \rightarrow \psi)$  | abrev. D          |
| 10. | $D(\varphi) \wedge N(\psi) \vdash N(\varphi \rightarrow \psi)$                                    | <b>Obs 1</b>      |
| 11. | $\vdash (D(\varphi) \wedge N(\psi)) \rightarrow N(\varphi \rightarrow \psi)$                      | <b>DT</b>         |

**I'5:**  $\vdash (N(\varphi) \wedge G(\psi)) \rightarrow G(\varphi \rightarrow \psi)$ .

- |    |   |                         |
|----|---|-------------------------|
| 1. | $\varphi, \varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \perp \vdash \perp$                    | <b>MP</b>               |
| 2. | $\varphi \wedge \neg\varphi, \varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \perp \vdash \perp$ | <b>Mon</b>              |
| 3. | $N(\varphi), \varphi \rightarrow \psi, G(\psi) \vdash \perp$                                | abrev. N,G              |
| 4. | $N(\varphi), G(\psi) \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \perp$                   | <b>DT</b>               |
| 5. | $N(\varphi) \wedge G(\psi) \vdash G(\varphi \rightarrow \psi)$                              | <b>Obs 1</b> , abrev. G |
| 6. | $\vdash (N(\varphi) \wedge G(\psi)) \rightarrow G(\varphi \rightarrow \psi)$                | <b>DT</b>               |

**I'6:**  $\vdash (D(\varphi) \wedge G(\psi)) \rightarrow G(\varphi \rightarrow \psi)$ .

- |    |  |                             |
|----|--|-----------------------------|
| 1. | $\varphi, \varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \perp \vdash \perp$             | <b>MP</b>                   |
| 2. | $\varphi, G(\psi) \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \perp$               | abrev. G, <b>DT</b>         |
| 3. | $\neg G(\varphi) \vdash \varphi$   | Lema 4-i                    |
| 4. | $\neg G(\varphi), G(\psi) \vdash G(\varphi \rightarrow \psi)$                        | abrev. G, <b>Corte(2,3)</b> |
| 5. | $\neg N(\varphi) \wedge \neg G(\varphi), G(\psi) \vdash G(\varphi \rightarrow \psi)$ | <b>Mon</b>                  |
| 6. | $D(\varphi) \wedge G(\psi) \vdash G(\varphi \rightarrow \psi)$                       | abrev. D, <b>Obs 1</b>      |
| 7. | $\vdash (D(\varphi) \wedge G(\psi)) \rightarrow G(\varphi \rightarrow \psi)$         | <b>DT</b>                   |

**C'1:**  $\vdash G(\varphi) \rightarrow G(\varphi \wedge \psi)$ .

- |    |  |                |
|----|--|----------------|
| 1. | $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$   | <b>Pos3</b>    |
| 2. | $\vdash ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow (G(\varphi) \rightarrow G(\varphi \wedge \psi))$ | Lema 4-l       |
| 3. | $\vdash G(\varphi) \rightarrow G(\varphi \wedge \psi)$   | <b>MP(1,2)</b> |

**C'2:**  $\vdash (N(\varphi) \wedge N(\psi)) \rightarrow D(\varphi \wedge \psi)$ .

- |    |  |            |
|----|--|------------|
| 1. | $\varphi \wedge \psi, (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \perp \vdash \perp$                                    | <b>MP</b>  |
| 2. | $\neg\varphi \wedge \neg\psi \wedge \varphi \wedge \psi, (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \perp \vdash \perp$ | <b>Mon</b> |

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3B_G$**

3.	$\neg\varphi \wedge \neg\psi \wedge \varphi \wedge \psi, G(\varphi \wedge \psi) \vdash \perp$	abrev. G
4.	$\neg\varphi \wedge \neg\psi \wedge \varphi \wedge \psi \vdash G(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \perp$	<b>DT</b>
5.	$N(\varphi) \wedge N(\psi) \vdash G(G(\varphi \wedge \psi))$	abrev. N,G
6.	$G(G(\varphi \wedge \psi)) \vdash \neg G(\varphi \wedge \psi)$	Lema 4-i
7.	$N(\varphi) \wedge N(\psi) \vdash \neg G(\varphi \wedge \psi)$	<b>Corte(5,6)</b>
8.	$N(\varphi \wedge \psi) \vdash G(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	<b>L3B1, DT</b>
9.	$N(\varphi \wedge \psi) \vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \perp$	abrev. G
10.	$N(\varphi \wedge \psi), (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vdash \perp$	<b>DT</b>
11.	$\neg\varphi \wedge \neg\psi \vdash N(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \perp$	<b>DT</b>
12.	$\neg\varphi \wedge \neg\psi \vdash G(N(\varphi \wedge \psi))$	abrev. G
13.	$G(N(\varphi \wedge \psi)) \vdash \neg N(\varphi \wedge \psi)$	Lema 4-i
14.	$\neg\varphi \wedge \neg\psi \vdash \neg N(\varphi \wedge \psi)$	<b>Corte(12,13)</b>
15.	$\varphi \wedge \neg\varphi \wedge \psi \wedge \neg\psi \vdash \neg N(\varphi \wedge \psi)$	<b>Mon</b>
16.	$N(\varphi) \wedge N(\psi) \vdash \neg N(\varphi \wedge \psi)$	abrev. N
17.	$N(\varphi) \wedge N(\psi) \vdash \neg N(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg G(\varphi \wedge \psi)$	<b>R-AND (16,7)</b>
18.	$N(\varphi) \wedge N(\psi) \vdash D(\varphi \wedge \psi)$	abrev. D

**C'3:**  $\vdash (D(\varphi) \wedge D(\psi)) \rightarrow D(\varphi \wedge \psi)$ .

1.	$\neg G(\varphi)$	<b>Hipótesis</b>
2.	$\neg G(\psi)$	<b>Hipótesis</b>
3.	$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \perp$	<b>Hipótesis</b>
4.	$\varphi$	<b>Corte(<math>\neg G(\varphi) \vdash \varphi, 1</math>)</b>
5.	$\psi$	<b>Corte(<math>\neg G(\psi) \vdash \psi, 2</math>)</b>
6.	$\varphi \wedge \psi$	<b>R-AND(4,5)</b>
7.	$\perp$	<b>MP(3,6)</b>
8.	$\neg G(\varphi), \neg G(\psi), (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \perp \vdash \perp$	<b>1-7</b>
9.	$\neg N(\varphi), \neg G(\varphi), \neg N(\psi), \neg G(\psi), G(\varphi \wedge \psi) \vdash \perp$	<b>Mon</b>
10.	$\neg N(\varphi) \wedge \neg G(\varphi), \neg N(\psi) \wedge \neg G(\psi), G(\varphi \wedge \psi) \vdash \perp$	<b>Obs 1</b>
11.	$D(\varphi), D(\psi), G(\varphi \wedge \psi) \vdash \perp$	abrev. N
12.	$D(\varphi) \wedge D(\psi), G(\varphi \wedge \psi) \vdash \perp$	<b>Obs 1</b>
13.	$D(\varphi) \wedge D(\psi) \vdash G(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \perp$	<b>DT</b>
14.	$D(\varphi) \wedge D(\psi) \vdash G(G(\varphi \wedge \psi))$	<b>DT</b>
15.	$G(G(\varphi \wedge \psi)) \vdash \neg G(\varphi \wedge \psi)$	Lema 4-h
16.	$D(\varphi) \wedge D(\psi) \vdash \neg G(\varphi \wedge \psi)$	<b>Corte(14,15)</b>

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA L3B<sub>G</sub>**

---

**C'4:**  $\vdash (N(\varphi) \wedge D(\psi)) \rightarrow N(\varphi \wedge \psi)$ .

- |     |  |                          |
|-----|--|--------------------------|
| 1.  | $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg N(\psi)) \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$   | <b>L3B4</b>              |
| 2.  | $\neg\varphi \wedge \neg N(\psi) \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$   | <b>DT</b>                |
| 3.  | $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi$   | $\lambda \vdash \lambda$ |
| 4.  | $\neg\varphi \wedge \neg N(\psi) \wedge \varphi \wedge \psi \vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)$ | Lema 4-m                 |
| 5.  | $\neg\varphi \wedge \varphi, \psi \wedge \neg N(\psi) \vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)$       | <b>Obs 1</b>             |
| 6.  | $N(\varphi), \psi \wedge \neg N(\psi) \vdash N(\varphi \wedge \psi)$   | abrev. N                 |
| 7.  | $\neg G(\psi) \vdash \psi$   | Lema 4-i                 |
| 8.  | $N(\varphi), \neg G(\psi) \wedge \neg N(\psi) \vdash N(\varphi \wedge \psi)$   | <b>Corte(7,6)</b>        |
| 9.  | $N(\varphi), D(\psi) \vdash N(\varphi \wedge \psi)$  | abrev. D                 |
| 10. | $N(\varphi) \wedge D(\psi) \vdash N(\varphi \wedge \psi)$  | <b>Obs 1</b>             |
| 11. | $\vdash (N(\varphi) \wedge D(\psi)) \rightarrow N(\varphi \wedge \psi)$  | <b>DT</b>                |

**D'1:**  $\vdash D(\varphi) \rightarrow D(\varphi \vee \psi)$ .

- |     |  |                     |
|-----|--|---------------------|
| 1.  | $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$   | <b>Pos6</b>         |
| 2.  | $\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)) \rightarrow (G(\varphi \vee \psi) \rightarrow G(\varphi))$           | Lema 4-l            |
| 3.  | $\vdash G(\varphi \vee \psi) \rightarrow G(\varphi)$   | <b>MP(1,2)</b>      |
| 4.  | $\vdash (G(\varphi \vee \psi) \rightarrow G(\varphi)) \rightarrow (G(G(\varphi)) \rightarrow G(G(\varphi \vee \psi)))$ | Lema 4-l            |
| 5.  | $\vdash G(G(\varphi)) \rightarrow G(G(\varphi \vee \psi))$   | <b>MP(3,4)</b>      |
| 6.  | $G(G(\varphi)) \vdash G(G(\varphi \vee \psi))$   | <b>DT</b>           |
| 7.  | $\varphi \vdash G(G(\varphi))$   | Lema 4-j            |
| 8.  | $\varphi \vdash G(G(\varphi \vee \psi))$   | <b>Corte(6,7)</b>   |
| 9.  | $G(G(\varphi \vee \psi)) \vdash \neg G(\varphi \vee \psi)$   | Lema 4-h            |
| 10. | $\varphi \vdash \neg G(\varphi \vee \psi)$   | <b>Corte(8,9)</b>   |
| 11. | $\neg G(\varphi) \vdash \varphi$   | Lema 4-i            |
| 12. | $\neg G(\varphi) \vdash \neg G(\varphi \vee \psi)$   | <b>Corte(11,10)</b> |
| 13. | $\neg N(\varphi) \wedge \neg G(\varphi) \vdash \neg G(\varphi \vee \psi)$  | <b>Mon</b>          |
| 14. | $D(\varphi) \vdash \neg G(\varphi \vee \psi)$  | abrev. D            |
| 15. | $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi), (\varphi \wedge \neg\varphi) \vdash \perp$  | <b>N'3, Línea 3</b> |
| 16. | $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi), \varphi, \neg\varphi \vdash \perp$  | <b>Obs 1</b>        |
| 17. | $\neg(\varphi \vee \psi) \vdash \neg\varphi$   | <b>L3B7</b>         |
| 18. | $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi), \varphi, \neg(\varphi \vee \psi) \vdash \perp$                                      | <b>Corte(16,17)</b> |
| 19. | $\neg G(\varphi) \vdash \varphi$   | Lema 4-i            |
| 20. | $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi), \neg G(\varphi), \neg(\varphi \vee \psi) \vdash \perp$                              | <b>Corte(18,19)</b> |

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA L3B<sub>G</sub>**

21.	$\neg N(\varphi), \neg G(\varphi), \neg(\varphi \vee \psi) \vdash \perp$	abrev. N
22.	$\neg N(\varphi) \wedge \neg G(\varphi), \neg(\varphi \vee \psi) \vdash \perp$	<b>Obs 1</b>
23.	$D(\varphi), \neg(\varphi \vee \psi) \vdash \perp$	abrev. D
24.	$D(\varphi), \neg(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \psi) \vdash \perp$	<b>Mon</b>
25.	$D(\varphi), N(\varphi \vee \psi) \vdash \perp$	abrev. N
26.	$D(\varphi) \vdash N(\varphi \vee \psi) \rightarrow \perp$	<b>DT</b>
27.	$N(\varphi \vee \psi) \rightarrow \perp \vdash \neg N(\varphi \vee \psi)$	Lema 4-i
28.	$D(\varphi) \vdash \neg N(\varphi \vee \psi)$	<b>Corte(26,27)</b>
29.	$D(\varphi) \vdash \neg G(\varphi \vee \psi) \wedge \neg N(\varphi \vee \psi)$	<b>R-AND(14,28)</b>
30.	$D(\varphi) \vdash D(\varphi \vee \psi)$	abrev. D

**D'2:**  $\vdash (G(\varphi) \wedge N(\psi)) \rightarrow N(\varphi \vee \psi)$ .

1.	$\psi \vdash \varphi \vee \psi$	<b>Pos7</b>
2.	$G(\varphi), \neg\psi, \psi \vdash \varphi \vee \psi$	<b>Mon</b>
3.	$G(\varphi), \neg\psi \wedge \psi \vdash \varphi \vee \psi$	<b>Obs 1</b>
4.	$G(\varphi), N(\psi) \vdash \varphi \vee \psi$	abrev. N
5.	$G(\varphi) \wedge N(\psi) \vdash \varphi \vee \psi$	<b>Obs 1</b>
6.	$G(\varphi)$	<b>Hipótesis</b>
7.	$N(\psi)$	<b>Hipótesis</b>
8.	$\neg\varphi$	<b>MP(<math>\vdash G(\varphi) \rightarrow \neg\varphi</math>, 6)</b>
9.	$\neg\psi$	<b>MP(<math>\vdash N(\psi) \rightarrow \neg\psi</math>, 7)</b>
10.	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	<b>R-AND(8,9)</b>
11.	$G(\varphi) \wedge N(\psi) \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$	6-10
12.	$G(\varphi) \wedge N(\psi) \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \vee \psi)$	<b>R-AND(5,11)</b>
13.	$G(\varphi) \wedge N(\psi) \vdash N(\varphi \vee \psi)$	abrev. N

**D'3:**  $\vdash (N(\varphi) \wedge N(\psi)) \rightarrow N(\varphi \vee \psi)$ .

1.	$\varphi \vdash \varphi \vee \psi$	<b>Pos6</b>
2.	$N(\varphi) \wedge N(\psi) \vdash \varphi \vee \psi$	<b>Mon, Obs 1</b>
3.	$\neg\varphi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$	<b>L3B8</b>
4.	$\varphi \wedge \neg\varphi, \psi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$	<b>Mon, Obs 1</b>
5.	$N(\varphi), N(\psi) \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$	abrev. N
6.	$N(\varphi) \wedge N(\psi) \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$	<b>Obs 1</b>
7.	$N(\varphi) \wedge N(\psi) \vdash (\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \vee \psi)$	<b>R-AND(2,6)</b>

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $\mathbf{L3B_G}$**

- |    |   |           |
|----|---|-----------|
| 8. | $N(\varphi) \wedge N(\psi) \vdash N(\varphi \vee \psi)$               | abrev. N  |
| 9. | $\vdash (N(\varphi) \wedge N(\psi)) \rightarrow N(\varphi \vee \psi)$ | <b>DT</b> |

**D'4:**  $\vdash (G(\varphi) \wedge G(\psi)) \rightarrow G(\varphi \vee \psi)$ .

- |    |   |                  |
|----|---|------------------|
| 1. | $\varphi \rightarrow \perp$   | <b>Hipótesis</b> |
| 2. | $\psi \rightarrow \perp$  | <b>Hipótesis</b> |
| 3. | $\vdash (\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow ((\psi \rightarrow \perp) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \perp))$ | <b>Pos8</b>      |
| 4. | $\vdash (\psi \rightarrow \perp) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \perp)$   | <b>MP(1,3)</b>   |
| 5. | $\vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \perp$  | <b>MP(2,4)</b>   |
| 6. | $\varphi \rightarrow \perp, \psi \rightarrow \perp \vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \perp$                                | 1-5              |
| 7. | $G(\varphi), G(\psi) \vdash G(\varphi \vee \psi)$   | abrev. G         |
| 8. | $G(\varphi) \wedge G(\psi) \vdash G(\varphi \vee \psi)$   | <b>Obs 1</b>     |
| 9. | $\vdash (G(\varphi) \wedge G(\psi)) \rightarrow G(\varphi \vee \psi)$   | <b>DT</b>        |

### 5.2.3 Robustez y Completitud de $\mathbf{L3B_G}$ con respecto a $\mathbb{L}_1$

Primero demostramos la robustez de  $\mathbf{L3B_G}$  con respecto a la teoría  $\mathbb{L}_1$ , lo que significa verificar que los teoremas de la teoría  $\mathbb{L}_1$  son tautologías en  $\mathbf{L3B_G}$ .

**Teorema 8** *Sea  $\varphi$  una fórmula. Si  $\varphi$  es un teorema en  $\mathbb{L}_1$ , entonces  $\varphi$  es una tautología en  $\mathbf{L3B_G}$ . i.e.  $\vdash_{\mathbb{L}_1} \varphi$  implica  $\vDash_{\mathbf{L3B_G}} \varphi$ .*

**Demostración** Ver la demostración del Teorema 4 ■

En forma similar a la del caso de  $\mathbf{L3A_G}$  para demostrar que cada tautología en  $\mathbf{L3B_G}$  es un teorema de  $\mathbb{L}_1$ , necesitamos definir la siguiente transformación entre fórmulas de  $\mathbf{L3B_G}$  de acuerdo al valor que tomen para una valuación  $v$  dada.

**Definición 30** *Dada una trivaluación  $v$  de  $\mathbf{L3B_G}$  y una fórmula  $\varphi$ , definimos la fórmula  $\varphi_v$  llamada la imagen de  $\varphi$ , como sigue:*

$$\varphi_v = \begin{cases} G(\varphi) & \text{if } v(\varphi) = 0 \\ N(\varphi) & \text{if } v(\varphi) = 1 \\ D(\varphi) & \text{if } v(\varphi) = 2 \end{cases}$$

donde  $G(\varphi) := \varphi \rightarrow \perp$ ,  $N(\varphi) := \varphi \wedge \neg\varphi$  y  $D(\varphi) := \neg G(\varphi) \wedge \neg N(\varphi)$ . Para un conjunto  $\Phi$  de fórmulas, con  $\Phi_v$  denotamos al conjunto  $\{\varphi_v \mid \varphi \in \Phi\}$ .

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $\mathbf{L3B_G}$**

---

**Lema 6** Sean  $\varphi \in Form(\mathbf{L3B_G})$  y  $v$  una trivaluación en  $\mathbf{L3B_G}$ , si  $Atoms(\varphi)$  denota al conjunto de fórmulas atómicas en  $\varphi$ , entonces  $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$ .

La demostración de este Lema es análoga a la presentada para la lógica  $\mathbf{L3A_G}$  por lo que algunos pasos se obviarán.

**Demostración** Sea  $\varphi \in Form(\mathbf{L3B_G})$  y  $v$  una trivaluación en  $\mathbf{L3B_G}$ . La prueba es por inducción sobre la complejidad de la fórmula  $\varphi$ .

**Caso Base:** Si  $\varphi = p$ , donde  $p$  es una fórmula atómica, entonces su conjunto de átomos sólo contiene a la fórmula en sí, luego  $Atoms(\varphi)_v = \varphi_v = p_v$ , pero sabemos que  $\varphi_v \vdash \varphi_v$ , por lo tanto  $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$ .

Supongamos que para cualquier  $\beta \in Form(\mathbf{L3B_G})$  cuya complejidad es menor que aquella de  $\varphi$  la afirmación es verdadera, es decir  $Atoms(\beta)_v \vdash \beta_v$ . Analicemos lo que sucede con  $\varphi$  para ello debemos considerar cada conectivo en  $\mathbf{L3B_G}$ .

**Caso  $\neg$ :** Supongamos que  $\varphi = \neg\psi$ , sabemos que  $Atoms(\varphi) = Atoms(\psi)$  por hipótesis inductiva tenemos que  $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$ . Dependiendo de la valuación  $\varphi$  tenemos alguno de los siguientes casos:

1. Si  $v(\varphi) = \mathbf{0}$ , entonces  $v(\psi) = 2$ ,  $\psi_v = D(\psi)$ ,  $\varphi_v = G(\varphi) = G(\neg\psi)$  y  $Atoms(\varphi)_v \vdash D(\psi)$ . Por **N'3** tenemos que  $D(\psi) \vdash G(\neg\psi)$  al aplicar **Corte** concluimos  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\neg\psi)$ .
2. Si  $v(\varphi) = \mathbf{1}$ , entonces  $v(\psi) = 1$ ,  $\psi_v = N(\psi)$ ,  $\varphi_v = N(\varphi) = N(\neg\psi)$  y  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi)$ . Por **N'2** tenemos  $N(\psi) \vdash N(\neg\psi)$  y al aplicar **Corte** se concluye  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\neg\psi)$ .
3. Si  $v(\varphi) = \mathbf{2}$ , entonces  $v(\psi) = 0$ ,  $\psi_v = G(\psi)$ ,  $\varphi_v = D(\varphi) = D(\neg\psi)$  y  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\psi)$ . Por la propiedad **N'1**,  $G(\psi) \vdash D(\neg\psi)$  por tanto  $Atoms(\varphi)_v \vdash D(\neg\psi)$ .  
Para cualquier valor de  $\varphi$ , concluimos  $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$ .

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3B_G$**

---

**Caso  $\rightarrow$ :** Supongamos que  $\varphi = \psi \rightarrow \sigma$ . Por la hipótesis inductiva sabemos que  $Atoms(\psi)_v \vdash \psi_v$  y  $Atoms(\sigma)_v \vdash \sigma_v$ . Como  $Atoms(\varphi)_v = Atoms(\psi)_v \cup Atoms(\sigma)_v$ , entonces por **Mon** se tiene  $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$  y  $Atoms(\varphi)_v \vdash \sigma_v$ . Dependiendo de la valuación de  $\varphi$  se deben considerar los casos siguientes:

1. Si  $v(\varphi) = \mathbf{0}$  tenemos dos posibles escenarios  $v(\psi) = 1$  y  $v(\sigma) = 0$  o  $v(\psi) = 2$  y  $v(\sigma) = 0$ , en cualquier caso se cumple  $\varphi_v = G(\varphi) = G(\psi \rightarrow \sigma)$ .

Si  $v(\psi) = 1$  y  $v(\sigma) = 0$ , por la Definición 30, tenemos  $\psi_v = N(\psi)$ ,  $\sigma_v = G(\sigma)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\sigma)$ , y por la propiedad **I'5** sabemos que  $\vdash (N(\psi) \wedge G(\sigma)) \rightarrow G(\psi \rightarrow \sigma)$ , entonces aplicando **R-AND** y **MP** obtenemos que  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\psi \rightarrow \sigma)$ .

Si  $v(\psi) = 2$  y  $v(\sigma) = 0$  tenemos que  $\psi_v = D(\psi)$ ,  $\sigma_v = G(\sigma)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash D(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\sigma)$ , además por **I'6** se sabe que  $\vdash (D(\psi) \wedge G(\sigma)) \rightarrow G(\psi \rightarrow \sigma)$  del mismo modo que en el caso previo, al aplicar **R-AND** y **MP** se concluye  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\psi \rightarrow \sigma)$ .

2. Si  $v(\varphi) = \mathbf{1}$ , existe un único caso para los valores del antecedente y consecuente, y es cuando  $v(\psi) = 2$  y  $v(\sigma) = 1$ . Tenemos que  $\psi_v = D(\psi)$ ,  $\sigma_v = N(\sigma)$ ,  $\varphi_v = N(\varphi) = N(\psi \rightarrow \sigma)$ , también se cumple que  $Atoms(\varphi)_v \vdash D(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\sigma)$ , y por la Propiedad **I'4** sabemos que  $\vdash (D(\psi) \wedge N(\sigma)) \rightarrow N(\psi \rightarrow \sigma)$ , entonces al aplicar **R-AND** y **MP** obtenemos que:  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi \rightarrow \sigma)$ .

3. Si  $v(\varphi) = \mathbf{2}$ , entonces tenemos tres posibilidades, que son:  $v(\psi) = 0$  o  $v(\sigma) = 2$  o  $v(\psi) = v(\sigma) = 1$ , en cualquier caso  $\varphi_v = D(\varphi) = D(\psi \rightarrow \sigma)$ .

Si  $v(\psi) = 0$ , entonces  $\psi_v = G(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\psi)$  de acuerdo a la Propiedad **I'1**  $G(\psi) \vdash D(\psi \rightarrow \sigma)$  y por **Corte** concluimos  $Atoms(\varphi)_v \vdash D(\psi \rightarrow \sigma)$ .

Si  $v(\sigma) = 2$ , entonces  $\sigma_v = D(\sigma)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash D(\sigma)$  y por **I'2** se cumple que  $D(\sigma) \vdash D(\psi \rightarrow \sigma)$  si se usa **Corte** se obtiene  $Atoms(\varphi)_v \vdash D(\psi \rightarrow \sigma)$ .

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3B_G$**

---

Si  $v(\psi) = v(\sigma) = 1$ , entonces  $\psi_v = N(\psi)$ ,  $\sigma_v = N(\sigma)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\sigma)$  y por **I'3**  $N(\psi) \wedge N(\sigma) \vdash D(\psi \rightarrow \sigma)$ . Si aplicamos **R-AND** y **Corte** de manera adecuada obtenemos  $Atoms(\varphi)_v \vdash D(\psi \rightarrow \sigma)$ .

En cualquier situación se verifica que:  $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$ .

**Caso  $\wedge$ :** Supongamos que  $\varphi = \psi \wedge \sigma$ . Análogamente al caso de la implicación, sabemos que  $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$  y  $Atoms(\varphi)_v \vdash \sigma_v$ . Con base en la valuación de  $\varphi$  se deben estudiar los siguientes casos:

1. Si  $v(\varphi) = \mathbf{0}$  se tienen dos posibilidades  $v(\psi) = 0$  o  $v(\sigma) = 0$ , en cualquier caso se tiene  $\varphi_v = G(\varphi) = G(\psi \wedge \sigma)$ .

Cuando  $v(\psi) = 0$ , se tiene  $\psi_v = G(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\psi)$ , por la propiedad **C'1** sabemos que  $G(\psi) \vdash G(\psi \wedge \sigma)$  y por tanto  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\psi \wedge \sigma)$ .

Si  $v(\sigma) = 0$ , siguiendo el mismo argumento al caso previo tenemos que:  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\psi \wedge \sigma)$ .

2. Si  $v(\varphi) = \mathbf{1}$ , entonces  $v(\sigma) = 1$  y  $v(\psi) = 2$  o  $v(\sigma) = 2$  y  $v(\psi) = 1$ . Tenemos que  $\varphi_v = N(\varphi) = N(\sigma \wedge \psi)$ .

Si  $v(\psi) = 1, v(\sigma) = 2$ , entonces  $\psi_v = N(\psi)$ ,  $\sigma_v = D(\sigma)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash D(\sigma)$  y por la propiedad **C'4** se sabe que  $N(\psi) \wedge D(\sigma) \vdash N(\psi \wedge \sigma)$  si usamos **R-AND** y **Corte** concluimos  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi \wedge \sigma)$ .

Si  $v(\psi) = 2, v(\sigma) = 1$  el caso es análogo al anterior, luego  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi \wedge \sigma)$ .

3. Cuando  $v(\varphi) = \mathbf{2}$  se tienen dos posibilidades: una cuando  $v(\psi) = 2, v(\sigma) = 2$  y la otra cuando  $v(\psi) = 1, v(\sigma) = 1$ , en ambos casos  $\varphi_v = D(\varphi) = D(\psi \wedge \sigma)$ .

Si  $v(\psi) = 2, v(\sigma) = 2$ , entonces  $\psi_v = D(\psi)$ ,  $\sigma_v = D(\sigma)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash D(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash D(\sigma)$ , por la propiedad **C'3**  $D(\psi) \wedge D(\sigma) \vdash D(\psi \wedge \sigma)$  y al usar **R-AND** y **Corte** se concluye  $Atoms(\varphi)_v \vdash D(\psi \wedge \sigma)$ .

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $L3B_G$**

---

Si  $v(\psi) = v(\sigma) = 1$  se cumple  $\psi_v = N(\psi)$ ,  $\sigma_v = N(\sigma)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\sigma)$ . Por **C'2**  $N(\psi) \wedge N(\sigma) \vdash D(\psi \wedge \sigma)$  por tanto si se aplica **R-AND** y **Corte** se obtiene  $Atoms(\varphi)_v \vdash D(\psi \wedge \sigma)$ .

En cualquiera de los tres casos de la conjunción se cumple:  $Atoms(\varphi)_v \vdash \varphi_v$ .

**Caso  $\vee$ :** Si  $\varphi = \psi \vee \sigma$  sabemos que  $Atoms(\varphi)_v \vdash \psi_v$  y  $Atoms(\varphi)_v \vdash \sigma_v$ . Dependiendo el valor que tome  $\varphi$  tenemos los siguientes casos:

1. Si  $v(\varphi) = 0$ , entonces  $v(\psi) = v(\sigma) = 0$  de donde  $\psi_v = G(\psi)$ ,  $\sigma_v = G(\sigma)$ ,  $\varphi_v = G(\varphi) = G(\psi \vee \sigma)$  y  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\sigma)$  luego por la propiedad **D'4**,  $G(\psi) \wedge G(\sigma) \vdash G(\psi \vee \sigma)$ , al usar **R-AND** y **Corte** se tiene  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\psi \vee \sigma)$ .

2. Cuando  $v(\varphi) = 1$ , se tiene  $v(\psi) = 1, v(\sigma) = 0$  o  $v(\psi) = 0, v(\sigma) = 1$  o  $v(\psi) = v(\sigma) = 1$ . Además  $\varphi_v = N(\varphi) = N(\psi \wedge \sigma)$ .

Si  $v(\psi) = 1, v(\sigma) = 0$ , entonces  $\psi_v = N(\psi)$ ,  $\sigma_v = G(\sigma)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash G(\sigma)$  por la propiedad **D'2**  $N(\psi) \wedge G(\sigma) \vdash N(\psi \vee \sigma)$  si se usa **R-AND** y **Corte** se sigue que  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi \vee \sigma)$ .

Si  $v(\psi) = 0, v(\sigma) = 1$ , el caso es análogo al previo.

Si  $v(\psi) = v(\sigma) = 1$ , entonces  $\psi_v = N(\psi)$ ,  $\sigma_v = N(\sigma)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\sigma)$ , de acuerdo con la propiedad **D'3**  $N(\psi) \wedge N(\sigma) \vdash N(\psi \vee \sigma)$ , si usamos **R-AND** y **Corte** se concluye que  $Atoms(\varphi)_v \vdash N(\psi \vee \sigma)$ .

3. Cuando  $v(\varphi) = 2$  hay dos opciones,  $v(\psi) = 2$  o  $v(\sigma) = 2$ . En ambos casos se tiene:  $\varphi_v = D(\varphi) = D(\psi \vee \sigma)$ .

Si  $v(\psi) = 2$ , entonces  $\psi_v = D(\psi)$ ,  $Atoms(\varphi)_v \vdash D(\psi)$ , por la propiedad **D'1** sabemos que  $D(\psi) \vdash D(\psi \vee \sigma)$  de donde  $Atoms(\varphi)_v \vdash D(\psi \vee \sigma)$ .

Si  $v(\sigma) = 2$ , el caso es análogo al previo.

## CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS PARACONSISTENTES GENUINAS

### 5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA $\mathbf{L3B_G}$

---

Con esto se han analizado todos los casos, por lo que se verifica la afirmación del Lema. ■

Veamos que la lógica  $\mathbf{L3B_G}$  es completa con respecto a la teoría  $\mathbb{L}_1$ .

**Teorema 9** *Sea  $\varphi$  una fórmula. Si  $\varphi$  es una tautología en  $\mathbf{L3B_G}$ , entonces  $\varphi$  es un teorema en  $\mathbb{L}_1$ , i.e.,  $\models_{\mathbf{L3B_G}} \varphi$  implica  $\vdash_{\mathbb{L}_1} \varphi$ .*

**Demostración** Supongamos que  $\varphi$  es una tautología con conjunto de fórmulas atómicas  $\Phi$ , tenemos dos casos,  $v(\varphi) = 2$  o  $v(\varphi) = 1$ .

Si  $v(\varphi) = 2$ , entonces  $\varphi_v = D(\varphi)$  por el Lema 6 se sabe que  $\Phi_v \vdash D(\varphi)$ . Por la parte j) del Lema 4  $\neg G(\varphi) \vdash \varphi$ , al aplicar **Monotonía** a esto concluimos  $D(\varphi) \vdash \varphi$ . Finalmente por **Corte** obtenemos  $\Phi_v \vdash \varphi$ . El resto de la prueba es análogo al caso de  $\mathbf{L3A_G}$  pero se utiliza la parte o) del Lema 4 para eliminar hipótesis y después de quitar todos los elementos del conjunto de átomos obtener  $\vdash_{\mathbb{L}_1} \varphi$ .

Si  $v(\varphi) = 1$ , entonces  $\varphi_v = N(\varphi)$  y por Lema 6 se tiene que  $\Phi_v \vdash N(\varphi)$ . Por otro lado,  $N(\varphi) \vdash \varphi$ , si se usa **Corte** se obtiene  $\Phi_v \vdash \varphi$ . Nuevamente se usa la parte o) del Lema 4 para eliminar hipótesis y concluir después de un número finito de pasos que  $\vdash_{\mathbb{L}_1} \varphi$ .

En cualquier caso se ha probado que  $\varphi$  es un teorema siempre que sea una tautología, como lo afirma el Teorema. ■

#### 5.2.4 El Teorema del Reemplazamiento en $\mathbf{L3B_G}$

La lógica  $\mathbf{L3B_G}$  del mismo modo que la lógica  $\mathbf{L3A_G}$  no es congruencial, lo que significa que el conectivo binario  $\leftrightarrow$  definido como  $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$  no define una relación de congruencia entre fórmulas de  $\mathbf{L3B_G}$ . Para ver esto basta con considerar la fórmula  $(\varphi \rightarrow \varphi) \leftrightarrow (\varphi \vee G(\varphi))$  que es un teorema de la lógica; pero  $\neg(\varphi \rightarrow \varphi) \leftrightarrow \neg(\varphi \vee G(\varphi))$  no lo es. Siguiendo un tratamiento similar al propuesto en [3], podemos definir una noción más fuerte de equivalencia que la del conectivo

**CAPÍTULO 5. AXIOMATIZACIONES DE LAS LÓGICAS  
PARACONSISTENTES GENUINAS**

**5.2. UN SISTEMA AXIOMÁTICO TIPO HILBERT PARA  $\mathbf{L3B_G}$**

---

$\leftrightarrow$ , mediante un conectivo binario  $\Leftrightarrow$  de la manera siguiente. Escribimos  $\varphi \Leftrightarrow \psi$  para denotar la fórmula:

$$\neg((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg(\psi \rightarrow \varphi) \wedge \neg(\psi \rightarrow \varphi)) \wedge \neg((\psi \rightarrow \varphi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \wedge \neg(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg(\varphi \rightarrow \psi))$$

Usando las tablas de verdad de la lógica  $\mathbf{L3B_G}$  se puede verificar que  $\varphi \leftrightarrow \psi$  es una tautología si se cumple alguno de los siguiente casos  $v(\varphi) = v(\psi)$ ;  $v(\varphi) = 2$  y  $v(\psi) = 1$ ;  $v(\varphi) = 1$  y  $v(\psi) = 2$ , donde  $v$  es cualquier valuación. Por otra parte  $\varphi \Leftrightarrow \psi$  es una tautología si y sólo si para cada valuación  $v$ ,  $v(\varphi) = v(\psi)$ , como se puede ver en la Tabla 5.5.

$\leftrightarrow$	0	1	2
0	2	0	0
1	0	2	1
2	0	1	2

$\Leftrightarrow$	0	1	2
0	2	0	0
1	0	2	0
2	0	0	2

Tabla 5.5: Tablas de verdad de  $\leftrightarrow$  y  $\Leftrightarrow$   $\mathbf{L3B_G}$

**Teorema 10** Si  $\sigma_1 = \{p/\varphi\}$  y  $\sigma_2 = \{p/\psi\}$  son dos sustituciones en la lógica  $\mathbf{L3B_G}$  tales que  $\varphi \Leftrightarrow \psi$  es una tautología, entonces para cualquier fórmula  $\rho$  se tiene que  $\sigma_1(\rho) \Leftrightarrow \sigma_2(\rho)$  es una tautología.

**Demostración** Si  $\varphi \Leftrightarrow \psi$  es una tautología, entonces para cada valuación  $v$  en  $\mathbf{L3B_G}$ ,  $v(\varphi) = v(\psi)$ . Por lo tanto,  $v(\sigma_1(\rho)) = v(\sigma_2(\rho))$  así,  $\sigma_1(\rho) \Leftrightarrow \sigma_2(\rho)$  es una tautología. ■

## Capítulo 6

# Conclusiones

La definición de Paraconsistencia se fundamenta en rechazar o restringir el *Principio de no Contradicción*. En la lógica se ha optado por restringir este principio dando así lugar a la Lógica Paraconsistente. Debido a que no existe unicidad en la formulación del *Principio de no Contradicción*, surge un problema entre los lógicos para proponer una restricción a este principio.

Sin embargo, se encuentran dos formas ampliamente aceptadas por la comunidad científica involucrada para formular esto. La gran mayoría lo hace diciendo que: A partir de hipótesis contradictorias sea posible deducir cualquier afirmación, a esto lo llaman *Contradicción por Explosión*(**EC**); otro grupo afirma que si se niega la conjunción de una proposición y su negación lo que se debe obtener es algo verdadero, a esta forma se le llama *Ley de No Contradicción*(**NC**).

Una agravante a esta situación yace en que ambas formulaciones son independientes en el sentido de que la exigencia de una no conduce a la otra y viceversa. Debido a esta problemática Jean-Yves Béziau propone estudiar aquellas lógicas que restringen ambas formulaciones y define así a las, *Lógicas Paraconsistentes Genuinas*.

Para definir la noción de *Lógica Paraconsistentes Genuina* basta que el lenguaje contenga los conectivos de negación y conjunción, Jean-Yves Béziau en [8] presenta dos de estas lógicas para lo cual emplea matrices lógicas trivaluadas, entre los aportes de este trabajo está extender estas lógicas con una implicación. Para realizar esto,

## CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

---

se explora el universo de conectivos trivaluados de forma que al seleccionar algunos de ellos satisfagan propiedades que les permitan considerarse implicaciones. Además de satisfacer condiciones similares, en la medida de lo posible, a las de los conectivos con los que se construyen las *Lógicas Paraconsistentes Genuinas*, por ejemplo, ser un conectivo *Neoclásico*, ser *Extensión Conservativa*, cumplir con los axiomas de la *Lógica Positiva* [15].

Una vez delimitado este conjunto, se demuestran propiedades que se obtienen al extender las lógicas genuinas con alguno de los conectivos de ese conjunto reducido, propiedades tales como: satisfacer el *Teorema de la Deducción*, del mismo modo se estudian propiedades que no se cumplen, por ejemplo, la *Contrarecíproca de la Implicación* [15].

Con base en diferentes criterios de acuerdo a cada *Lógica Paraconsistente Genuina Trivaluada* se seleccionó un conectivo para definir a las lógicas **L3A<sub>G</sub>** y **L3B<sub>G</sub>** y se realizó un estudio de ellas demostrando propiedades que satisfacen desde el punto de vista de Teoría de Modelos, por ejemplo las Leyes de De Morgan, así como algunas comparaciones de estas lógicas con otras cercanas a ellas, cercanía establecida por la naturaleza de sus conectivos.

Otro de los aportes de este trabajo fue dotar de sendos sistemas axiomáticos tipo Hilbert a estas lógicas, desarrollando para ello una generalización del Lema de Kalmár usado para demostrar completitud en la Lógica Proposicional Clásica.

Como trabajo a futuro queda aún mucho por hacer, por ejemplo, encontrar otros sistemas axiomáticos para estas lógicas, posiblemente mediante el análisis de conjuntos maximales consistentes, o por medio de semánticas tipo Kripke. También queda pendiente explorar las extensiones que se obtienen tomando otra implicación, del conjunto de implicaciones posibles, recordemos que de ese conjunto sólo se eligió la implicación de Gödel.

Carnielli et al. en [11], definen la familia de lógicas *8Kb* y prueban una serie de resultados interesantes que cumplen sus elementos. Las lógicas **L3A<sub>G</sub>** y **L3B<sub>G</sub>** son parte de esta familia y por tanto satisfacen estas propiedades. Uno de estos resultados establece que no es válido el *Teorema del Reemplazamiento* como lo mencionamos al final de Capítulo 5 y mostramos un ejemplo en el que no se válida

## CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

---

este resultado, también se afirma que los elementos de esta familia son Blok-Pigozzi algebrizables, como trabajo a futuro queda estudiar estas algebrizaciones.

Carballido et al. en [22], demuestran un conjunto de resultados sobre las lógicas multivaluadas *D-elementales* y su utilidad en el marco de los programas disyuntivos, por ejemplo demuestran que si  $E$  es una lógica *D-elemental*,  $P$  un programa disyuntivo y  $M$  un conjunto de átomos entonces,  $P \cup \neg\tilde{M} \vdash_E M$  si y sólo si  $RED(P, M) \vdash_E M$ . Resulta que las dos lógicas paraconsistentes genuinas trivaluadas que estudiamos en este trabajo son lógicas *D-elementales* y por lo tanto este resultado es válido. Se pueden analizar, en estos casos particulares, los beneficios del teorema anterior.



# Bibliografía

- [1] ARIELI, O., AND AVRON, A. Three-valued paraconsistent propositional logics. In *New Directions in Paraconsistent Logic*. Springer, 2015, pp. 91–129.
- [2] ARRAZOLA, J., BORJA, V., AND ARIZA, E. Lógicas trivaluadas naturales. *Puebla: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla* (2007), 167.
- [3] ARRAZOLA, J. M., OSORIO, M., AND ARIZA, E. The n'5 logic. In . (2010).
- [4] BAAZ, M., ET AL. Infinite-valued gödel logics with 0-1-projections and relativizations. In *Gödel'96: Logical foundations of mathematics, computer science and physics—Kurt Gödel's legacy, Brno, Czech Republic, August 1996, proceedings*. Association for Symbolic Logic, 1996, pp. 23–33.
- [5] BEZIAU, I., CHAKRABORTY, M., AND DUTTA, D. New directions in paraconsistent logic. In *Proceedings of the 5th World Congress on Paraconsistency (WCP), Kolkata, India* (2014), Springer, pp. 13–17.
- [6] BÉZIAU, J.-Y. What is paraconsistent logic. In *In Batens et al.[6* (2000), Citeseer.
- [7] BÉZIAU, J.-Y. Are paraconsistent negations negations? *Lecture notes in pure and applied mathematics* (2002), 465–486.
- [8] BEZIAU, J.-Y. Two genuine 3-valued paraconsistent logics. In *Towards Paraconsistent Engineering*. Springer, 2016, pp. 35–47.
- [9] BEZIAU, J.-Y., AND FRANCESCHETTO, A. Strong three-valued paraconsistent logics. In *New directions in paraconsistent logic*. Springer, 2015, pp. 131–145.

- [10] BORJA, V. *Extensiones de la Lógica Intuicionista, extensiones de la Lógica de da Costa y su relación*. Tesis doctoral, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Julio 2017.
- [11] CARNIELLI, W., CONIGLIO, M. E., AND MARCOS, J. Logics of formal inconsistency. In *Handbook of philosophical logic*. Springer, 2007, pp. 1–93.
- [12] CARNIELLI, W. A., CONIGLIO, M., AND D’OTTAVIANO, I. M. L. *Paraconsistency: The logical way to the inconsistent*. CRC Press, 2002.
- [13] CHAGROV, A., AND ZAKHARYASCHEV, M. Modal logic, volume 35 of oxford logic guides, 1997.
- [14] GALINDO, M. O., MACÍAS, V. B., AND RAMÍREZ, J. R. E. A. Revisiting da costa logic. *Journal of Applied Logic* 16 (2016), 111–127.
- [15] HERNÁNDEZ-TELLO, A., RAMÍREZ, J. A., AND GALINDO, M. O. The pursuit of an implication for the logics l3a and l3b. *Logica Universalis* 11, 4 (2017), 507–524.
- [16] JASKOWSKI, S. Un calcul des propositions pour les systemes deductifs contradictoires. *Studia Scientarium Torunensis, Section A* 1 (1948), 55–77.
- [17] KALMÁR, L. Über die axiomatisierbarkeit des aussagenkalküls. *Acta scientiarum mathematicarum* 7, 4 (1935), 222–43.
- [18] KARPENKO, A., AND TOMOVA, N. Bochvar’s three-valued logic and literal paralogics: Their lattice and functional equivalence. *Logic and Logical Philosophy* 26, 2 (2016), 207–235.
- [19] MACÍAS, V. B., AND PÉREZ-GASPAR, M. Kripke type semantics for cg3’. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* 328, Supplement C (2016), 17 – 29. Tenth Latin American Workshop on Logic/Languages, Algorithms and New Methods of Reasoning (LANMR).
- [20] MENDELSON, E. *Introduction to Mathematical Logic*. CRC Press, 2015.

- [21] ODINTSOV, S. *Constructive negations and paraconsistency*, vol. 26. Springer Science & Business Media, 2008.
- [22] OSORIO GALINDO, M., ARRAZOLA RAMÍREZ, J. R., AND CARBALLIDO, J. L. Logical weak completions of paraconsistent logics. *Journal of Logic and Computation* 18, 6 (2008), 913–940.
- [23] PRIEST, G. Dualising intuitionistic negation. *Principia* 13, 2 (2009), 165.
- [24] SHOESMITH, D. J., AND SMILEY, T. J. Deducibility and many-valuedness. *The Journal of Symbolic Logic* 36, 4 (1971), 610–622.
- [25] SHOESMITH, D. J., AND SMILEY, T. J. *Multiple-conclusion logic*. CUP Archive, 1978.
- [26] STRASSURGER, L. What is a logic, and what is a proof? In *Logica Universalis*. Springer, 2007, pp. 135–152.
- [27] VAN DALEN, D. *Logic and structure*. Springer, 2004.
- [28] VARDI, M. Y. *A brief history of logic*, 2003.