



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

MODELADO DE AGENTES EN INTERCAMBIO ECONÓ-
MICO Y REDES COMPLEJAS

Tesis presentada al

Posgrado en Ciencias (Física Aplicada)

para obtener el grado de

Maestría en Ciencias (Física Aplicada)

Presenta:

RUBÉN MARTÍNEZ DÍAZ

asesorado por

Dr. José Fernando Rojas Rodríguez

Junio, 2015

Índice

1	Introducción	5
2	Sistemas Complejos	9
2.1	La ciencia de la complejidad	9
2.2	Modelación Basada en Agentes	11
2.3	Redes Complejas	16
3	Distribuciones de riqueza, ingreso y grado y modelos de acumulación	23
3.1	Distribuciones de riqueza, ingreso y grado	23
3.2	Modelos de intercambio de dinero	31
3.2.1	Modelos sin deuda	32
3.2.2	Modelos con deuda	34
3.2.3	Transferencia proporcional de dinero	37
3.3	Teoría de Redes en el proceso de intercambio.	40
4	Modelo y Resultados	45
4.1	Modelo de intercambio de riqueza.	46
4.2	Distribuciones de riqueza para el caso $\Delta w = cte.$	49
4.3	Distribuciones de riqueza para $\Delta w = \alpha w_k - w_l $	52
4.3.1	$p(k, l) = 1$	52
4.3.2	$p(k, l) = \frac{w_k + w_l}{w_{\max}}$	56
4.3.3	$p(k, l) = \left(\frac{w_k + w_l}{w_{\max}}\right) \left(1 - \frac{d_{k,l}}{d_{\max}}\right)$	59
4.4	Distribuciones de grado de la red de intercambios	62
5	Conclusiones	69
	Bibliografía	71

Capítulo 1

Introducción

El estudio de la forma en que se producen los intercambios económicos entre personas, compañías e incluso países ha suscitado una creciente atención debido a las catastróficas consecuencias que puede acarrear en la subsistencia de comunidades enteras. Basta con observar la disminución en el poder de ingreso en diferentes países a raíz de la crisis del 2008, así como la lenta o nula recuperación del comercio internacional y la merma en la calidad de vida en muchos países. Entender cómo es que tales procesos ocurren y establecer políticas de prevención es de vital importancia para el desarrollo continuo de las sociedades. Sin embargo, no es tarea fácil debido a la enorme variedad y complejidad que pueden alcanzar.

Pongamos por ejemplo las interacciones en la bolsa de valores, en donde diferentes compañías y futuros de producciones son puestos a la venta. En este caso el precio de una acción puede depender no solamente del valor intrínseco que este tiene, ya sea porque representa una porción de una compañía con grandes ganancias, sino de la especulación alrededor de los futuros beneficios o pérdidas que pueda acarrear la compra o venta de dicha acción. Además, existen instrumentos e instituciones que regulan este tipo de comercio, lo cual afecta directamente el valor de las empresas que cotizan en la bolsa.

Por otro lado, los procesos de oferta y demanda pueden tener repercusiones graves en la economía de un sistema productivo. Está ampliamente documentado que, en aras de garantizar el precio sostenido de algún producto, algunas compañías afectan intencionalmente la disponibilidad deshaciéndose de parte de su producción disminuyendo la oferta sin afectar la demanda. Esto afecta a los consumidores manteniendo precios altos y disminuyendo la fracción de la población que puede acceder a algunos productos.

Otro factor importante en la economía de consumo es la capacidad de entes, individuales o colectivos, de contraer deuda. La crisis del 2008 puso de manifiesto que la deuda descontrolada puede afectar gravemente la economía mundial. En este caso los créditos para la adquisición de bienes en Estados Unidos y la especulación alrededor de ellos a través de instrumentos financieros de compra de deuda aceleraron la caída de todos los índices de precios y valores en el mundo.

Las políticas monetarias de los distintos países pueden afectar la frecuencia y el volumen de los intercambios económicos dentro de ellos. Es el caso de las entidades financieras, como la Reserva Federal en Estados Unidos o el Banco de México, que son las responsables de monitorear y controlar la cantidad de dinero circulante en una economía y de establecer el valor del dinero, tomando en cuenta factores macroeconómicos tales como las balanzas comerciales del intercambio internacional, importación y exportación, las reservas federales en divisas o en materias primas, entre otros.

Además, la apreciación de las diferentes monedas con respecto a una de referencia como el dólar también impactan en los volúmenes de intercambio internacional, aumentándolos o disminuyéndolos hasta extremos en los cuales cadenas productivas enteras migran de un país a otro en busca de menores inversiones que les permitan maximizar ganancias. Las tasas preferenciales de impuestos, beneficios fiscales y mano de obra barata han propiciado este fenómeno.

De igual manera, la adopción de políticas conjuntas modifica el entorno económico de una región. Baste mencionar la adopción del euro en 18 países de la Unión Europea que conllevó a su establecimiento como segunda divisa de reserva y de intercambio, la creación del Mercado Común del Sur (MERCOSUR) en Sudamérica y las tasas arancelarias comunes entre los países miembros y las zonas especiales de comercio entre China y Rusia. Todas estas políticas afectan el intercambio económico a diferentes escalas dentro y fuera de los directamente involucrados en ellas.

Todos los fenómenos antes mencionados, junto con muchos otros, emergen de la necesidad de satisfacer la demanda de productos y servicios en diferentes mercados que presentan comportamientos diversos tanto económicos como sociales. Por lo tanto, tratar de identificar y estudiar todos los elementos y relaciones que están involucrados en los procesos económicos resulta una tarea complicada.

Sin embargo, se han desarrollado enfoques que pretenden aproximarnos al entendimiento de dichos fenómenos empleando las técnicas desarrolladas por diversas áreas del conocimiento. Es el caso de la Econofísica que, como fue planteado por Stanley et. al. [1], considera que «el comportamiento de grandes números de seres humanos (medido, por ejemplo, por los índices económicos) debe ser consistente con análogos de las leyes de escalamiento que han sido útiles para describir sistemas compuestos de grandes números de objetos inanimados.»

Dicho de otra manera, la Econofísica es la disciplina que estudia los procesos económicos utilizando las herramientas matemáticas usadas en la Física Estadística para describir las propiedades estadísticas de sistemas económicos complejos que consisten de un gran número de seres humanos, centrándose en el análisis de las grandes cantidades de datos económicos y financieros a los que se tiene acceso desde la introducción de la computadora y el internet.

De manera muy particular, al construir y estudiar modelos matemáticos comprendidos por un gran número de agentes económicos interactuantes la Econofísica pretende estudiar el comportamiento económico de los humanos y comparte una base común con la modelación basada en agentes y la simulación computacional. Podemos entonces comenzar el estudio de los procesos económicos desde el comportamiento estadístico de los seres humanos representados como agentes en un sistema, suponiendo que todas las creaciones de los mercados actuales no existen, tomando en consideración únicamente el intercambio de bienes entre individuos.

Entonces, en esta tesis se presenta la construcción de un modelo matemático computacional basado en agentes que reduce el comportamiento global de la economía a un proceso simple: el intercambio de bienes, riqueza o dinero entre agentes individuales, con el objetivo de que el comportamiento estadístico que emerja del modelo coincida, de manera cualitativa, con el observado en la economía real.

Debido a que el objeto de estudio se encuentra en el área de estudio de la Econofísica, pero más ampliamente en el de los Sistemas Complejos, en el siguiente Capítulo presentamos una breve introducción a la Ciencia de los Sistemas Complejos y describimos las técnicas de Modelación Basada en Agentes y de Redes Complejas. La primera sección del Capítulo 3 está dedicado a las distribuciones estadísticas que se presentan en la economía, mientras que las secciones 3.2 y 3.3 describen algunos modelos basados en agentes del intercambio de riqueza y modelos que incorporan redes de conexiones entre los agentes, respectivamente. Finalmente, en el Capítulo 4 se presenta el modelo matemático que proponemos para describir el intercambio económico y los resultados que obtenemos de él, en términos de distribuciones de riqueza y de grado.

Por último, quiero hacer énfasis en dos cosas: 1) buscamos validar nuestro modelo de manera cualitativa debido a que, como mencionamos, los factores que influyen en la ocurrencia de ciertos comportamientos estadísticos son muy variados y de distinta índole y 2) en el desarrollo del modelo no hacemos distinción entre riqueza, dinero o bienes, como es común en Econofísica, aunque los economistas hacen énfasis en la diferencia entre tales conceptos.

Capítulo 2

Sistemas Complejos

2.1 La ciencia de la complejidad

La construcción de la Física durante el siglo pasado condujo al desarrollo de técnicas de modelación y análisis de sistemas que permitieron obtener un conocimiento más profundo acerca de las leyes y principios que gobiernan al universo, desde el comportamiento de las partículas subatómicas hasta la dinámica de las galaxias. Sin embargo, estas técnicas no se constriñeron al ámbito en el que se desarrollaron, si no que su aplicación en diferentes áreas de la ciencia ha mostrado resultados inesperados.

En particular, los métodos de la Física Estadística [2] han facilitado el estudio de sistemas que se encuentran tradicionalmente fuera del campo de la Física. Diversos trabajos al respecto de la dinámica de ecosistemas [3][4][5][6], de interacciones sociales[7][8][9], de la formación de culturas[10], de fenómenos de acumulación de recursos[11][12][13], de enfermedades y epidemias[14][15][16] y un largo etcétera, han resultado del interés de los físicos en acercarse a estas áreas. Es así como se empieza a dar forma a la ciencia de los Sistemas Complejos o Ciencia de la Complejidad.

Definir a la Ciencia de la Complejidad redundaría en definir en primera instancia lo que es un Sistema Complejo, lo cual es difícil debido a que no existe en la actualidad un consenso al respecto. Sin embargo, podemos comenzar planteando un panorama general a través de algunos ejemplos y describir algunas características comunes a todos ellos.

Pensemos por ejemplo en el comportamiento de una colonia de hormigas: aunque está constituida por individuos relativamente simples, es posible observar comportamientos muy variados y una alta organización dentro de ella. Las hormigas son capaces de especializarse en diferentes actividades todas ellas encaminadas a la supervivencia de la colonia. Por ejemplo, algunas hormigas se dedican a la búsqueda de alimento siguiendo los rastros químicos que dejan sus compañeras y se ha observado que la cantidad de hormigas que se dirigen a una fuente de alimento es proporcional al tamaño de ésta.

Otras hormigas se encargan de la construcción del hormiguero, diseñando estructuras complejas con una distribución óptima del espacio y con cámaras con funciones bien definidas, como el almacenamiento de recursos, la recepción de las larvas, sistemas de ventilación, etc. o se encargan de la defensa de la colonia. Son capaces, además, de formar puentes que facilitan la migración del nido de un lugar a otro a través de las ramas de los árboles. Todas estas actividades se llevan a cabo sin la necesidad de un sistema de control central que determine o dirija sus acciones.

Por otro lado, el funcionamiento del cerebro ha fascinado por largo tiempo a los hombres. A pesar de que las neuronas que lo conforman son células que solamente transmiten una señal eléctrica de una a otra a través de neurotransmisores químicos, el cerebro es capaz de desarrollar procesos tan complejos como la conciencia humana, la creatividad, la organización de las funciones fisiológicas de un organismo, etc.

Este proceso es similar al que se puede observar en las hormigas: los componentes del sistema, hormigas o neuronas, solamente reciben información de un pequeño conjunto de sus vecinas y un número suficientemente grande de estas señales hace que los individuos actúen de formas que producen nuevas señales en el sistema, haciendo que se presente un comportamiento «global». Aún más, ambos sistemas son capaces de adaptarse a los cambios en su entorno, modificando sus patrones de comportamiento bajo diferentes circunstancias.

Otro ejemplo lo constituye el desarrollo de la World Wide Web. Como en los casos anteriores, está conformada por individuos que con poco o nulo control publican páginas web y las asocian con otras por medio de vínculos. Sin embargo, se ha encontrado que presenta características globales en la forma en la que crece, en la topología de su estructura y en la forma en la que la información se propaga a través de ella, sin que estas propiedades se puedan explicar a partir de la forma en la que actúan sus constituyentes individualmente.

De igual manera, la economía constituye un sistema en donde las pequeñas interacciones entre personas o compañías, que solamente compran y venden bienes o servicios da lugar a un comportamiento colectivo tan difícil de predecir como lo son las fluctuaciones de precios en el mercado de valores o las variaciones en el costo de la vivienda en diferentes partes de una misma ciudad. También en este caso se observa un comportamiento de adaptación: los individuos o compañías modifican sus estrategias de compra-venta en función del comportamiento de otros individuos, con el objetivo de maximizar sus ingresos. Históricamente se ha pensado que dicho comportamiento es el responsable de que el mercado, como un todo, llegue a un estado de equilibrio en el que los precios de los bienes están fijados de tal manera que no haya cambios en la producción o el consumo que generen ganancia para todos.

Todos estos sistemas comparten características a pesar de que son diferentes en los elementos que los componen y en las formas de interacción entre ellos. Vistos de manera abstracta y general[17]:

- Están formados por vastas redes de componentes que siguen reglas relativamente simples sin un control central que los dirija. Es el comportamiento colectivo de todos ellos lo que da lugar a patrones cambiantes y difíciles de predecir a partir de las propiedades individuales.
- Producen y procesan información proveniente desde dentro y fuera de su ambiente local.
- Son capaces de adaptarse a los cambios en su ambiente a través de procesos de aprendizaje y evolución, con el fin de mejorar su probabilidad de éxito o supervivencia.

Aunque tales propiedades son generalmente aceptadas como componentes claves de un Sistema Complejo, a la fecha no se ha llegado a una definición precisa y, por lo tanto, la Ciencia de la Complejidad carece de una definición aceptada universalmente.

Sin embargo, con el desarrollo de la computación y el aumento de la capacidad de cálculo, se han desarrollado técnicas numéricas que permiten el estudio de sistemas con un gran número de componentes y de interacciones, técnicas que tiene su origen en los desarrollos de la Mecánica Estadística y se han extendido al estudio de sistemas de diversa índole[2].

Una de las limitantes que padecen es que, en general, solamente pueden ser aplicadas a sistemas donde sus componentes son partículas inertes que están sujetas a las leyes y principios fundamentales de la Física, y no es posible aplicarlas directamente a sistemas como los que mencionamos anteriormente. Es por esto que el desarrollo de la Teoría de los Sistemas Complejos ha sido acompañado por el desarrollo de métodos matemático - computacionales para estudiarlos. En las siguientes secciones detallaremos dos de las técnicas usadas para dicho efecto: la Modelación Basada en Agentes y la Teoría de Redes Complejas.

2.2 Modelación Basada en Agentes

El estudio de la dinámica de los sistemas se ha visto constreñido a la tratabilidad matemática de los modelos con los que los representamos. Así, cuando la única herramienta matemática de la que se disponía era el cálculo, se construían modelos simples a través de ecuaciones diferenciales que pudieran ser resueltas de manera analítica. Ejemplos de esto son las ecuaciones de Malthus y de Verhulst[18] que representan la evolución temporal de una población.

Desafortunadamente, tales modelos no capturan todos los factores que pueden influir, por ejemplo, al crecimiento de una población. El modelo de Malthus considera únicamente la fase de crecimiento proporcional a los individuos ya existentes y la ecuación de Verhulst solo toma en cuenta la tasa de crecimiento poblacional y la capacidad de carga del sistema.

Con el desarrollo de la computación, y por consiguiente la aparición de los métodos numéricos de solución, este tipo de limitaciones desaparecieron y se empezaron a construir modelos matemáticos involucrando una gran cantidad de términos que definen el peso de distintos factores en la evolución de un sistema. Los sistemas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales usados en la modelación de la formación de patrones de vegetación[19], por ejemplo, solamente pueden ser resueltos de manera aproximada mediante el uso de técnicas numéricas.

Dentro de las técnicas de modelación desarrolladas con el avance de la simulación computacional, se encuentra la Modelación Basada en Agentes que difiere de muchas otras en una característica fundamental: en lugar de modelar al sistema por medio de variables que representan el estado de todo el sistema, se busca modelar el comportamiento individual de las partes que lo componen.

Es decir, los Modelos Basados en Agentes (ABMs) son modelos en los cuales los individuos o agentes que conforman al sistema bajo estudio son descritos como entidades únicas y autónomas que usualmente interactúan entre ellos y con su medio ambiente de manera local[20]. Estos agentes pueden ser organismos, seres humanos, negocios, instituciones y cualquier otra entidad que persiga la consecución de un cierto objetivo.

La característica de los agentes de ser únicos implica que, en general, son diferentes uno de otro en sus características: tamaño, ubicación, recursos, historia, etc. La interacción local se refiere a la incapacidad de los componentes de interactuar con todos los agentes en el sistema, reduciéndose ésta únicamente a sus vecinos cercanos medidos ya sea por su ubicación espacial o mediante otra forma de «cercanía» (tal como sucede en los modelos de redes sociales[21][22]). Por otro lado, la autonomía toma en cuenta que un individuo actúa independientemente de los demás y persigue sus propios objetivos, como sucede con los organismos que buscan su supervivencia y reproducción.

Podemos decir entonces que, con estas características, los agentes son capaces de presentar un comportamiento adaptativo: modifican su comportamiento de acuerdo al estado de ellos mismos, del ambiente que los rodea y al de otros agentes.

Usar los ABMs nos permite enfocar problemas referentes a la emergencia de propiedades en el sistema: la dinámica que se observa surge de cómo sus componentes individuales interactúan entre ellos y cómo responden a dicha interacción y a su medio ambiente. De aquí que con los ABMs podamos estudiar cómo el comportamiento global de un sistema surge de las características y comportamientos de sus elementos constituyentes, y su vínculo con éstos.

Debido a estas propiedades, se ha extendido su uso en el modelado de sistemas de diversa índole. Un ejemplo claro y simple lo constituye el modelo de segregación presentado por Schelling [23] el cual se construye un sistema espacialmente extendido compuesto por agentes, con una posición espacial dada, que pertenecen a dos «razas» o tipos diferentes.

En este modelo se supone que los agentes se encuentran igualmente «felices» con cualquier configuración de su vecindad, con la salvedad de que no toleran más que una fracción de vecinos del otro tipo en ella. Entonces, los agentes insatisfechos con su vecindad pueden cambiar su posición, a una previamente vacía, para mejorar su nivel de satisfacción hasta que ninguno de ellos «desea» moverse. De este proceso, que empieza con una distribución aleatoria de los agentes y bajo ciertas condiciones, emerge un sistema altamente segregado[24].

Computacionalmente, el modelo de Schelling puede ser instrumentado computacionalmente de la siguiente forma: se construye el sistema donde la dinámica tiene lugar asignando, en primera instancia, una posición no ocupada a cada agente y decidiendo con probabilidad $\frac{1}{2}$ el tipo de agente del que se trata (tipo 1 y tipo 2). Como puede observarse en en la Figura 2.1, la distribución espacial inicial de los agentes es aleatoria y, aunque se pueden identificar algunos cúmulos de agentes del mismo tipo, no hay una segregación evidente.

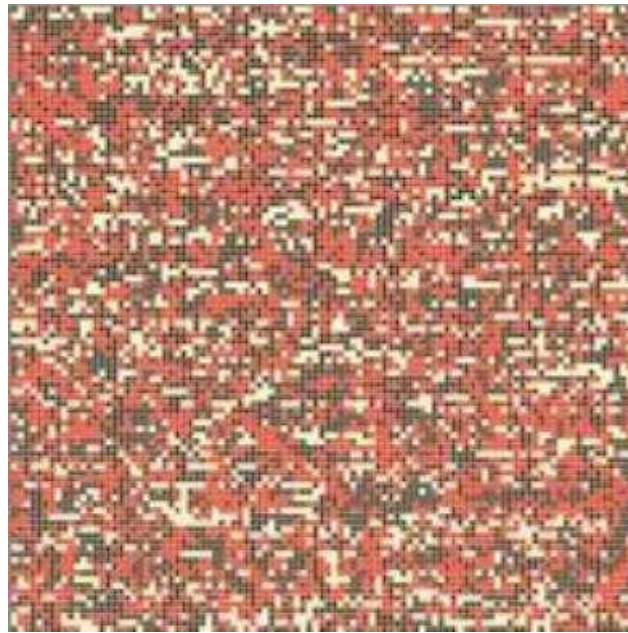


Figura 2.1. En esta imagen se muestra el estado inicial del sistema en el modelo de Schelling. Los cuadros de color rojo y negro representan los dos tipos de agentes y en color amarillo se muestran las posiciones vacías. La densidad de ocupación espacial es del 90%.

Entonces, dadas estas condiciones iniciales, la evolución temporal puede calcularse mediante el siguiente algoritmo:

1. La vecindad de cada agente es revisada en términos del número de agentes del mismo tipo.

2. Si la fracción de vecinos de diferente tipo supera un umbral ν , el agente «decide» moverse. En caso contrario permanece en su ubicación.
3. La nueva posición i del agente que ha de moverse se elige aleatoriamente de entre aquellos espacios vacíos donde $v_i < \nu$.
4. Los pasos 1, 2 y 3 se iteran para todos los agentes hasta que el sistema llega a un estado estable.

En la siguiente Figura podemos observar el resultado de la dinámica descrita, para el valor del umbral $\nu = 0.3$.

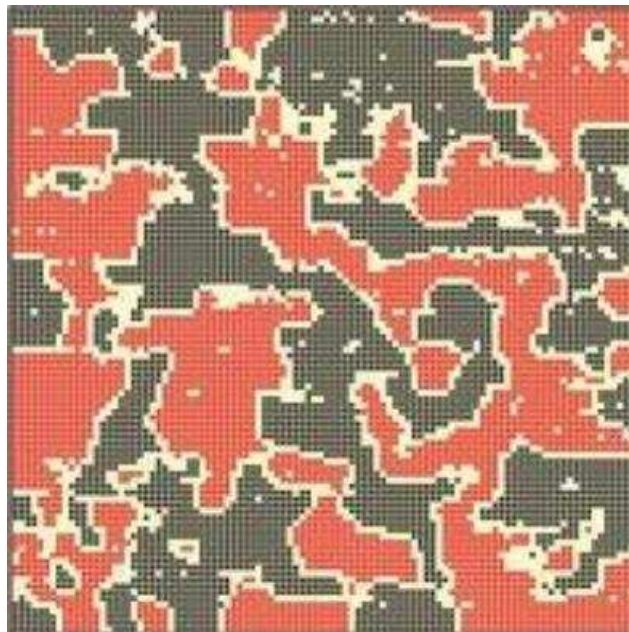


Figura 2.2. Estado final del sistema como resultado del modelo de Schelling con una densidad de ocupación del 90% y un umbral de tolerancia del 30%. Se puede observar que los agentes se han segregado en cúmulos formados, mayoritariamente, por agentes del mismo tipo.

El modelo de agentes de Schelling es interesante, y se ha convertido en uno de los más ampliamente citados dentro de la Economía, debido principalmente a que el fenómeno macroscópico de segregación emerge naturalmente de los motivos a nivel local que hacen a un agente particular desplazarse en su entorno, sin que tenga una preferencia explícita por la segregación. Además, es increíblemente simple y e ilustra claramente uno de los objetivos que se persiguen con los ABMs: la modelación de sistemas y fenómenos complejos a través de reglas simples de interacción entre sus componentes individuales.

Otro ejemplo de la utilidad de los ABMs, lo encontramos en el trabajo de Shinirifard et. al. [25] donde se utiliza el modelo estocástico de Glazier-Graner-Hogeweg^{2.1}, que describe a las células y las interacciones entre ellas en términos de energías efectivas y constricciones del sistema, para construir una simulación en tres dimensiones del crecimiento de un tumor vascular. En este modelo los agentes representan a las diferentes células involucradas en el proceso de formación del tumor. La siguiente figura muestra la evolución temporal del número de células tumorales vivas obtenida con este modelo:

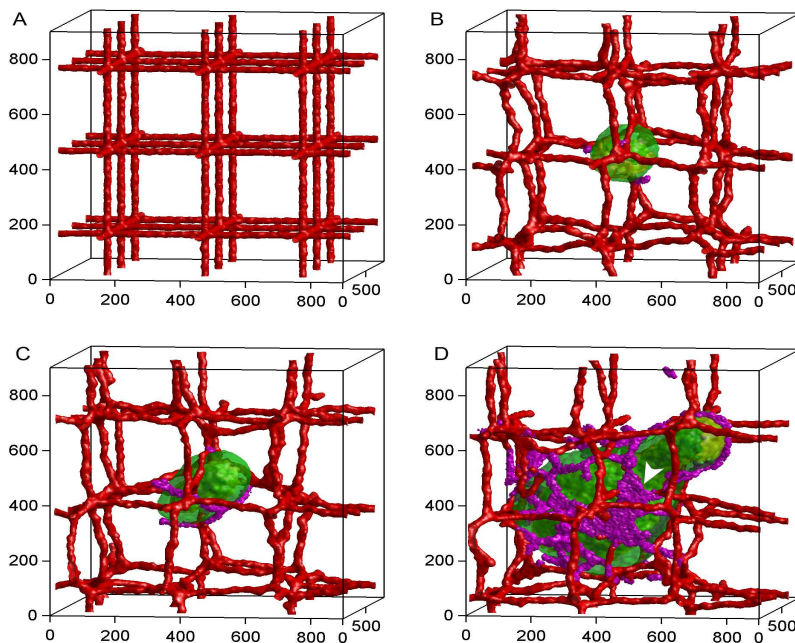


Figura 2.3. A) La vasculatura preexistente al tumor y las células tumorales iniciales. B) A los 15 días, el tumor crece en forma de una esfera con un radio máximo de $300 \mu\text{m}$. C) Al día 30, el tumor crece hasta formar un cilindro con una longitud y un radio aproximados de $350 \mu\text{m}$. La vasculatura se encuentra al borde de la ruptura. D) A los 75 días, el tumor vascularizado se encuentra desarrollado. La flecha blanca muestra a las células neovasculares organizadas en láminas bidimensionales. Los tipos de células considerados aquí son: normales (verde), hipóxicas (amarillo), necróticas (azul), vasculares (rojo) y neovasculares (púrpura).

Por otro lado, el modelo propuesto por Brown y Robinson [26] representa el proceso de desarrollo residencial dentro de un sistema urbano dadas diferentes formas de asignar características individuales a cada agente. Éstos eligen una locación dada evaluándola en términos de su cercanía a los servicios urbanos, la calidad estética del terreno y la similitud con sus posibles vecinos. Con tales condiciones, se muestra que el tamaño de los cúmulos formados depende de la forma en la que se asigne peso a las preferencias de cada agente.

^{2.1} Los detalles al respecto del modelo de Glazier-Graner-Hogeweg pueden ser consultados en la misma referencia [25].

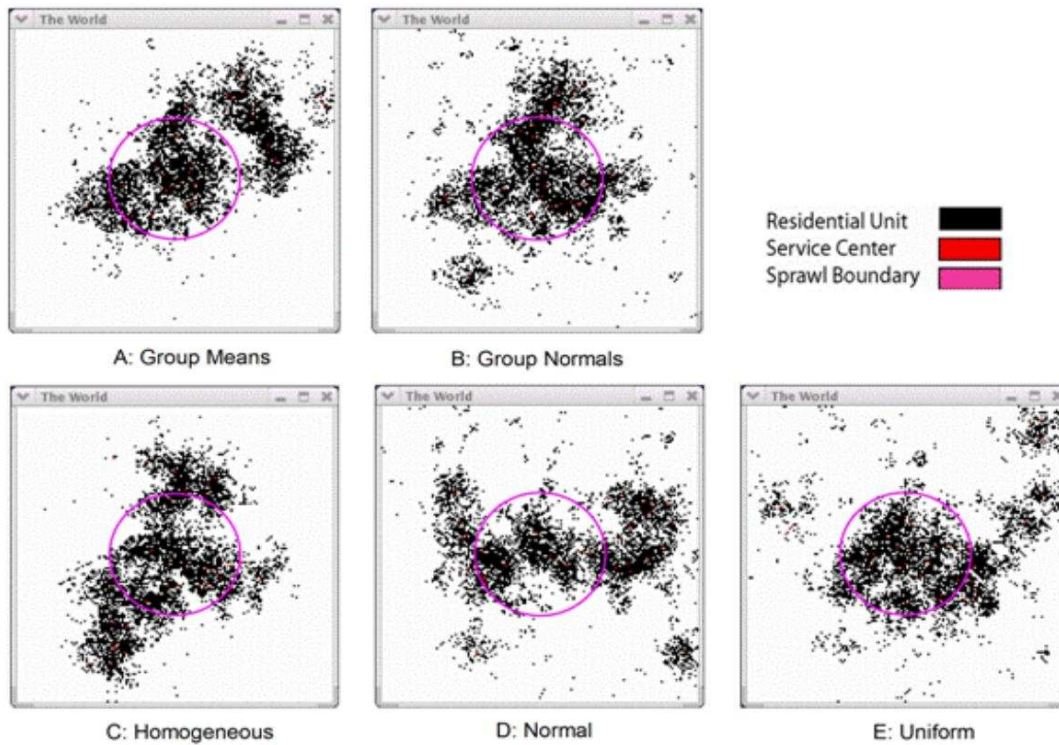


Figura 2.4. En esta figura se muestran los diferentes patrones que se forman en el proceso de elección de ubicaciones en una zona residencial. Las preferencias de los agentes en cuanto a su ubicación, están determinadas de diferentes maneras de acuerdo a encuestas realizadas en el área de Detroit, EU.

2.3 Redes Complejas

Al estudiar los Sistemas Complejos, surge el interés por entender la forma en la que las interacciones entre sus componentes da lugar a fenómenos tan inesperados e impredecibles como los mencionados en la sección 2.1. Una forma de abordar tal problema es a través del estudio de las redes de interacción que se presentan entre dichos componentes. Dicho de otra manera, el estudiar los procesos de transmisión de información en el sistema, involucrando a los entes que «emiten» y «reciben» tales señales y los canales por los que se propagan, puede arrojar luz sobre la forma en la que emergen comportamientos inesperados en él.

Un ejemplo claro lo conforma la estructura que da lugar a procesos cognitivos en el ser humano: el cerebro. Sin muchos detalles al respecto de los procesos fisiológicos que permiten su funcionamiento, es lógico considerar que el cerebro está conformado únicamente por una colección de células que generan, reciben y transmiten impulsos eléctricos a través del proceso conocido como sinápsis; esto es, que dichas células se conectan entre sí a través de la transmisión/recepción de señales.

Por lo tanto, podemos suponer que fenómenos tales como la regulación de los procesos fisiológicos en un organismo, la ocurrencia de la creatividad y la emergencia de la conciencia en el ser humano, tienen su origen en la forma en la que las neuronas o las regiones funcionales del cerebro se encuentran conectadas entre sí y responden a los estímulos que se transmiten entre ellas. Es claro entonces que estudiar estas conexiones puede ayudar al entendimiento de tales eventos. Por ejemplo, en el trabajo de Catanni y ffytche [27] se presentan diversos casos de desórdenes neurológicos y psiquiátricos que pueden ser descritos como desórdenes de desconexión entre distintas regiones del cerebro.

En muchos otros sistemas el estudio de la forma en la que sus componentes se conectan entre ellos y la naturaleza de dichas conexiones puede revelar características generales, o universalidades, que permitan no sólo entender el comportamiento global del sistema, si no que ayuden a construir la definición de Sistema Complejo y, por lo tanto, a la construcción de la Teoría de la Complejidad. Tal estudio queda englobado en la llamada Teoría de Redes Complejas.

Esta teoría tiene su fundamento en la teoría de grafos, la cual a su vez se origina con el trabajo pionero de Leonhard Euler, conocido comunmente como el problema de «los siete puentes de Königsberg^{2,2}»[28][29]. La vieja capital de Prusia del Este fue construida en una bifurcación estratégica del río Pregel (actualmente Pregolya), sobre una isla, donde las distintas partes de la ciudad estaban conectadas a través de siete puentes (Figura 2.5). El problema consiste en encontrar, de ser posible, una ruta a lo largo de la ciudad cruzando todos los puentes una única vez.

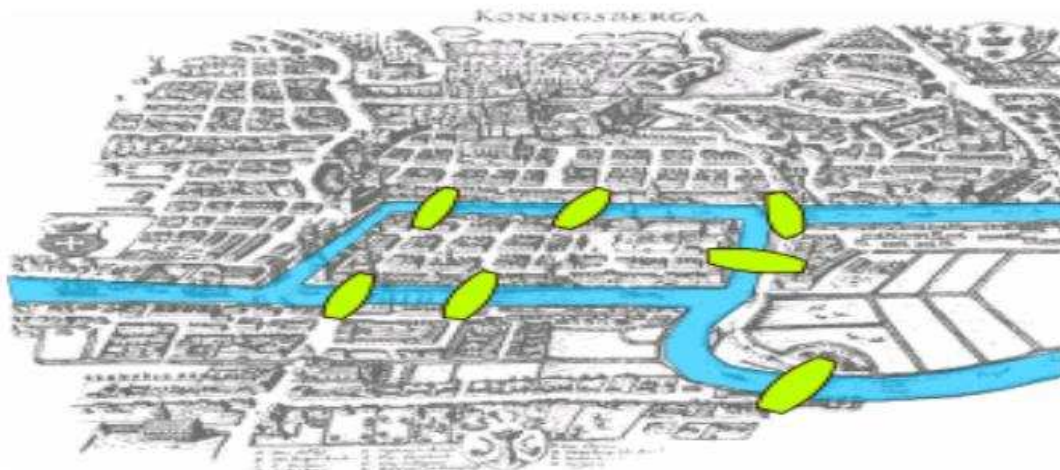


Figura 2.5. En la imagen se muestra un mapa de la ciudad de Königsberg en el tiempo de Euler, donde se puede apreciar el arreglo de los siete puentes.

2.2. Kaliningrado, Rusia.

La solución del problema fue construida al considerar una representación abstracta de la ciudad con sus puentes, conocida como grafo, donde a cada cuerpo de tierra se le asigna un punto en la representación y los puentes se piensan como líneas uniendo a distintas partes de la ciudad (Figura 2.6). De esta manera, Euler logra demostrar que es imposible encontrar una ruta que cruce exáctamente una vez cada uno de los siete puentes en la ciudad: «Si existen más de dos áreas a las cuales conduzcan un número impar de puentes, tal ruta es imposible»» (vea la referencia en [30]).

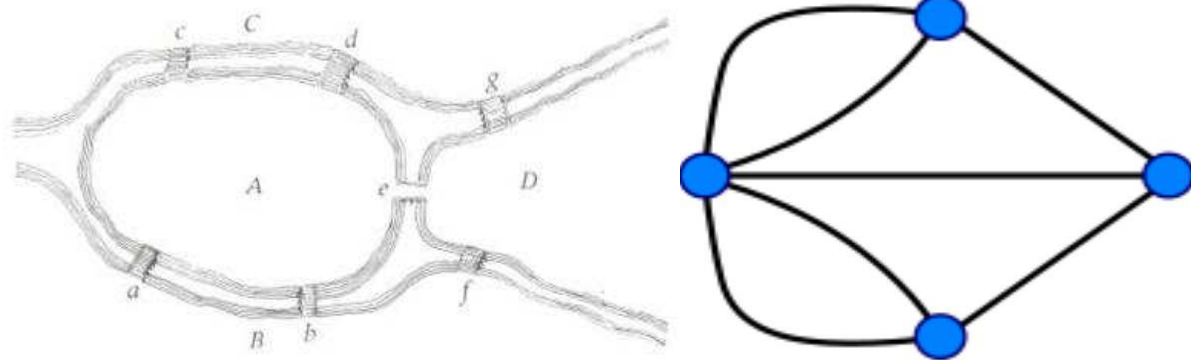


Figura 2.6. Se puede observar en la imagen la representación del problema de los siete puentes de Königsberg construida por Euler. A la derecha se presenta la representación gráfica usual de un grafo.

En esta forma de plantear el problema, y subsecuentemente en las Teorías de Grafos y de Redes Complejas, los puntos reciben el nombre de nodos y los «puentes» que los unen el nombre de vínculos. Evidentemente, la representación propuesta no es útil solamente para resolver el problema de encontrar la ruta mencionada, si no que puede ser aplicada a cualquier problema en el que se quiera tomar en cuenta el efecto de las formas y canales de interacción de los componentes de un sistema en la dinámica del mismo.

Para tal efecto se han desarrollado conceptos y medidas dentro de la Teoría de Grafos. Sin embargo, dado que uno de los objetivos de este trabajo es estudiar la formación de las redes de intercambio en un modelo de interacción en un modelo de agentes, nos centraremos en aquellas que son útiles para definir y estudiar a las Redes Complejas.

Para empezar, una Red Compleja es un grafo formado por N nodos (o vértices o puntos) y los vínculos (Figura 2.6), representando las uniones entre ellos, que presenta características topológicas distintas a las que pueden emerger del estudio de grafos aleatorios o grafos ordenados y que, en general, surgen al estudiar redes reales. Por lo tanto, el desarrollo de los

modelos de formación y ocurrencia de éstas se fundamentan en gran medida en el estudio de las redes reales. Entonces, la descripción que haremos a continuación será en términos de los ejemplos de redes que cumplan tal o cual característica.

Por ejemplo, en el estudio realizado por Travers y Milgram [31] al respecto de la forma en la que se conectan las personas en la sociedad, se enviaron paquetes a personas seleccionadas aleatoriamente de las ciudades de Omaha y Wichita en EU y se les solicitó que reenviaran el paquete al destinatario detallado en las instrucciones, en caso de conocerlo. En caso contrario, se les pedía que enviaran el paquete a alguno de sus familiares o conocidos que supusieran podía conocerlo.

Al llegar los paquetes al destinatario objetivo, se midió el número de intermediarios por los que tuvo que pasar antes de llegar a éste. Dicho número se conoce como la distancia entre dos nodos y depende del camino que se siga para llegar de uno a otro nodo a través de sus vecinos. Se encontró que la longitud promedio de camino mínimo, definida como el promedio de las distancias mínimas entre todos los pares de nodos en la red, se encontraba entre 5.5 y 6 y puede ser calculada de la siguiente manera:

$$l = \frac{1}{\frac{1}{2}N(N+1)} \sum_{i,j} d_{i,j}$$

donde N es el número de nodos de la red y $d_{i,j}$ es la distancia mínima entre los nodos i y j . A esta cualidad de la red se conoce como el fenómeno de «seis grados de separación» y es encontrado en muchas otras redes reales, principalmente como parte del llamado fenómeno de mundo pequeño que ha sido encontrado en la red de vínculos en Internet [32], en la red de coautorías en los artículos de física [33] y en la red de conexiones punto a punto [34], entre otros.

Dicho fenómeno es una característica recurrente en las redes que se forman en los Sistemas Complejos y se define por la coexistencia de dos condiciones: la presencia del fenómeno de seis grados de separación y una alta redundancia en la red, medida por el coeficiente de agrupamiento (o *clustering coefficient*) C de toda la red. Podemos entender al coeficiente de agrupamiento como la probabilidad de que tomando un nodo aleatoriamente en la red sus vecinos estén enlazados entre ellos. Usando el lenguaje de las redes sociales, el coeficiente de agrupamiento mide la probabilidad de que los amigos de mis amigos sean, a su vez, amigos míos.

Watts y Strogatz [35] proponen que el coeficiente de agrupamiento de la red sea el promedio de los coeficientes de agrupamiento locales C_i , definidos como la fracción de triángulos conectados al nodo i , T_i , entre el número de tercias de nodos t_i centradas en el nodo i :

$$c_i = \frac{T_i}{t_i}$$

donde un triángulo se entiende como un parón en la red que consiste de 3 nodos conectados entre sí y una tercia centrada en un nodo como un par de nodos que están conectados, al menos, a otro nodo en común. Se puede observar de manera más clara esta distinción en la Figura 2.7.

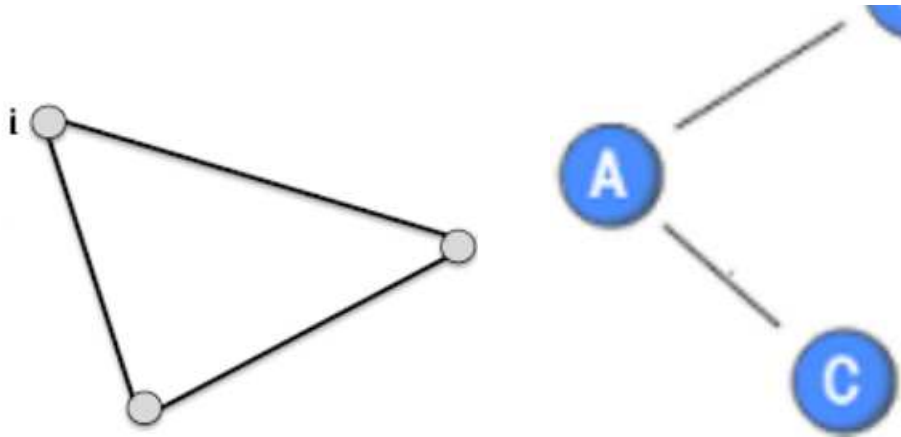


Figura 2.7. En la imagen se presentan, a la izquierda, un triángulo conectado al vértice i y, a la derecha, una tercia centrada en el nodo A .

Entonces, la expresión para el coeficiente de agrupamiento de la red sería de la forma:

$$C = \frac{1}{N} \sum_i c_i$$

Otra de las características de las Redes Complejas es que la distribución de grado, donde entendemos por grado el número k de vínculos que posee un nodo, toma la forma de una ley de potencias inversa:

$$P(k) \sim k^{-\alpha} \quad (2.1)$$

A las redes que presentan este comportamiento se les conoce como redes libres de escala dado que una distribución de grado de la forma (2.1) implica que el sistema no presenta una

escala característica. Dicho de otra manera, si consideramos únicamente un subconjunto de nodos de la red, con los vínculos entre ellos, la estructura de dicha subred es exactamente la misma. Tal es el caso de las redes que se forman en las colaboraciones entre actores [36], la red de contactos sexuales [37], las redes metabólicas en microorganismos [38], la red de citas entre artículos académicos [39] y las redes funcionales y estructurales del cerebro [40]. En la Figura 2.8 se muestran las distribuciones de grado de algunas redes reales.

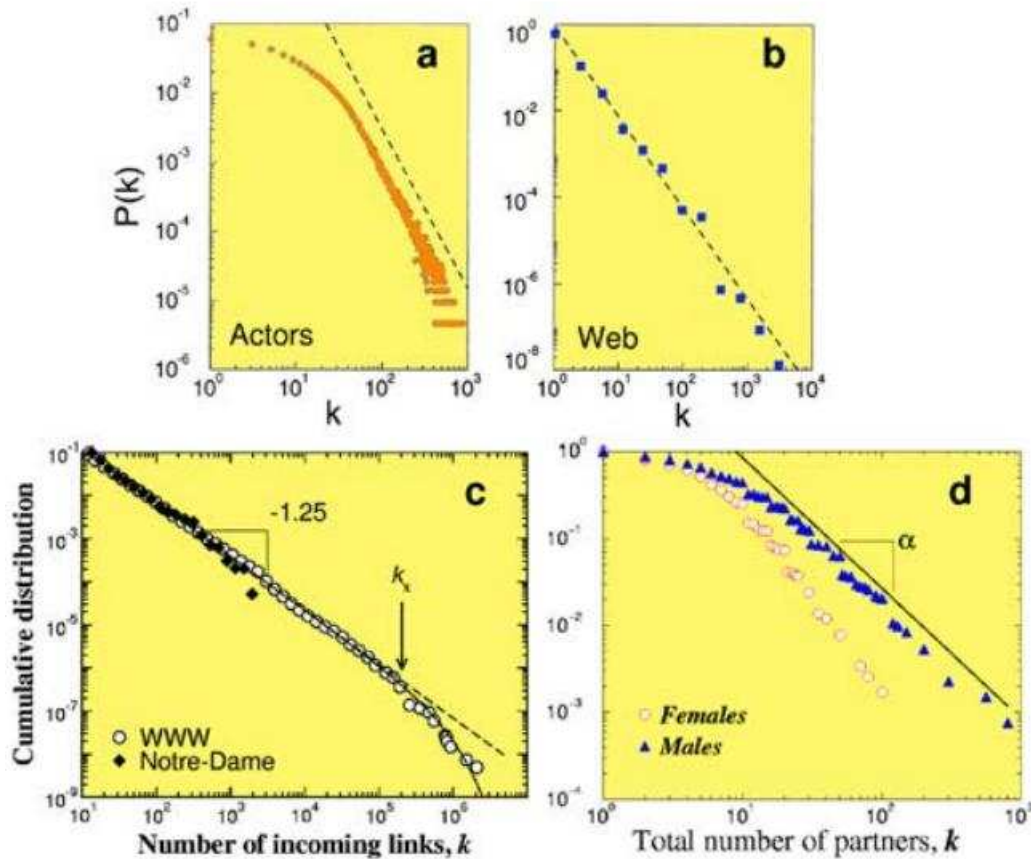


Figura 2.8. Puede observarse en cada una de las imágenes presentadas arriba el comportamiento de red libre de escala a través de una distribución de grado de la forma (2.1). Las distribuciones corresponden a las redes a) de colaboraciones de actores, b) de páginas web en el dominio nu.edu, c) de la World Wide Web y d) de parejas sexuales de hombres y mujeres Suecos. [41]

Cabe mencionar que aunque se han encontrado muchas redes libres de escala al estudiar sistemas reales, no todas presentan esta característica. Por ejemplo, la red de conexiones neuronales del nematodo *C. elegans* y la red eléctrica de la región sur de California presentan distribuciones de grado que no son de la forma (2.1).

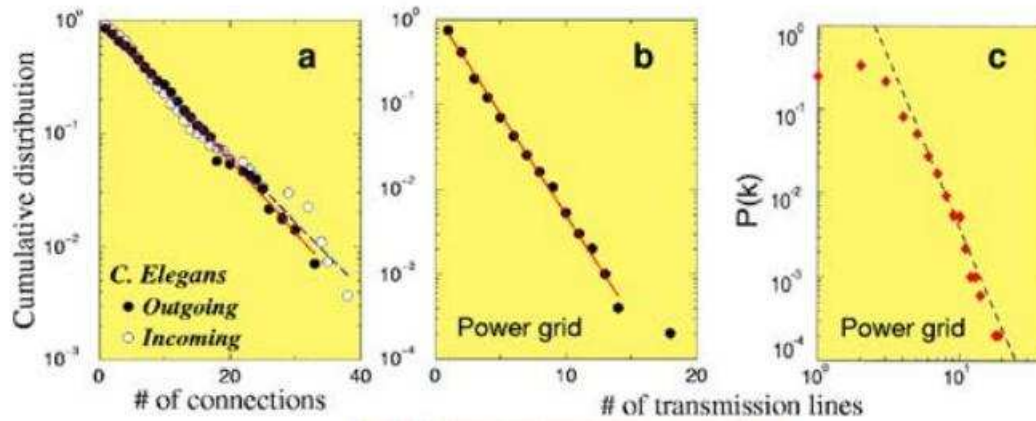


Figura 2.9. De izquierda a derecha se presentan las distribuciones de grado de a) la red de conexiones neuronales del nematodo *C. elegans* y b) de la red eléctrica en el sur de California en escala log - normal. Obsérvese que ambas distribuciones se ajustan en buena medida a una distribución exponencial $P(k) \sim e^{-k}$. La imagen c) corresponde también a la red eléctrica en a) pero en escala log - log. Nótese que los datos ajustan mejor a la distribución exponencial que a la distribución (2.1).

Las características anteriormente mencionadas nos permiten, si no definir de manera precisa una Red Compleja, por lo menos evidenciar cuándo la red bajo estudio puede ser considerada como tal. En particular, la distribución de grado $P(k)$ es una de las propiedades más reportadas en la literatura y, como se menciona en el Capítulo 3, resulta ser libre de escala en la red global de intercambios (World Trade Web).

Capítulo 3

Distribuciones de riqueza, ingreso y grado y modelos de acumulación

El estudio de los procesos económicos ha sido abordado desde diferentes perspectivas y áreas de la ciencia, construyéndose así un gran bagaje de conocimiento al respecto. En el caso particular de esta tesis, estamos interesados en abordar aquellos trabajos referentes a modelos de agentes que intercambian riqueza o dinero y donde el resultado de dichos intercambios es medido o presentado en términos de una distribución de riqueza entre los agentes.

Por lo tanto, en este capítulo describimos algunas distribuciones que se observan al medir el ingreso y la riqueza en diferentes países (Sección 3.1) y la distribución de grado encontrada al analizar tanto exportaciones como importaciones entre países. Posteriormente, presentamos diferentes modelos de intercambio que reproducen, hasta cierto grado, algunos aspectos de dichas distribuciones^{3.1}. La sección 3.2, que está dedicada a modelos conservativos, se divide en subsecciones para presentar aquellos donde no se considera la deuda como parte del sistema, modelos que sí la consideran y modelos donde la transferencia del dinero es proporcional a la riqueza de los agentes involucrados. En la última sección, describimos trabajos que incorporan características de redes como un factor más en la dinámica del intercambio económico.

3.1 Distribuciones de riqueza, ingreso y grado

3.1. Para un tratamiento más extenso de los avances recientes al respecto de la Econofísica, puede consultarse la revisión de Yakovenko y Rosser [42].

Los estudios empíricos al respecto de la distribución de ingresos en el mundo han sido realizados rutinariamente en diversos países, dado que casi todos los países mantienen un registro del ingreso de sus habitantes a través de las agencias de recaudación de impuestos. Tales estudios tienen una larga historia en la literatura económica, en particular desde el trabajo de Pareto [43] donde se muestra que la distribución de ingreso en la fracción más rica de la población obedece una ley de potencias inversa, o distribución de Pareto, de la forma:

$$P(x) \propto x^{-\alpha} \quad (3.1)$$

Este resultado hizo que se le prestara mucha atención a la porción más acaudalada de las poblaciones, donde se observan este tipo de distribuciones. Por ejemplo, el trabajo realizado por Arjun Jayadev [44] muestra los datos obtenidos para el 1% más rico en entornos urbanos y rurales en la India en dos años diferentes. Se puede observar en la Figura 3.1 que las distribuciones decaen en forma de una distribución de Pareto. El mismo comportamiento se ha encontrado en la distribución de bienes totales mayores a 30 millones de euros en Francia en el 2010 (Figura 3.2).

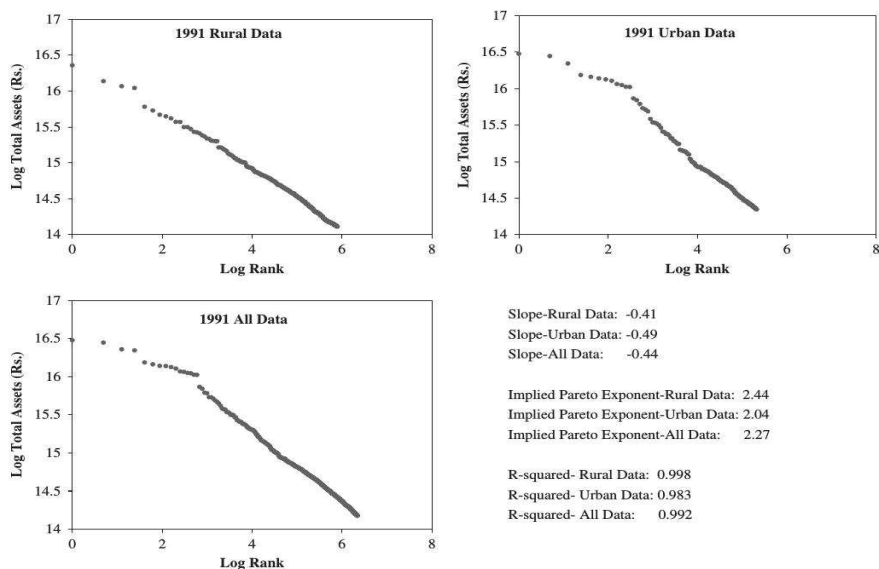


Figura 3.1. Distribuciones de riqueza del 1% más rico de los hogares entrevistados en el All India Debt and Investment Survey de 1991. Las distribuciones de la parte superior corresponden al entorno rural (izquierda) y urbano (derecha). La última figura presenta la distribución de riqueza tomando en cuenta ambos entornos.

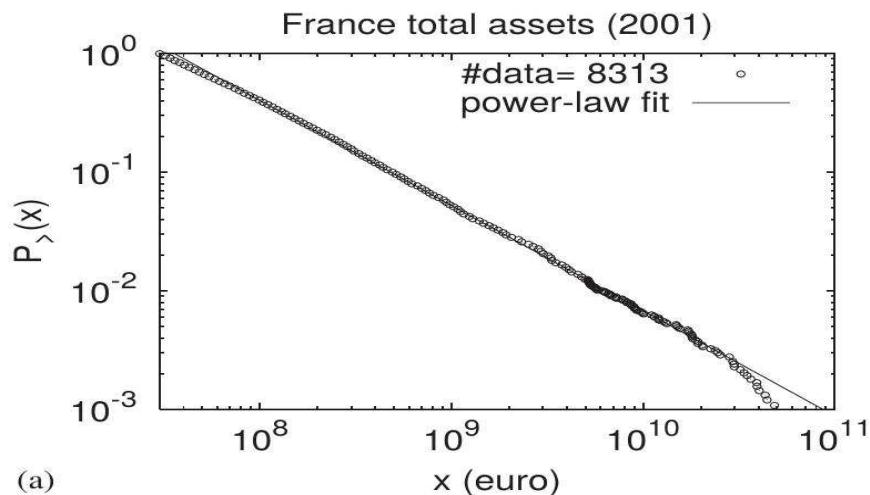


Figura 3.2. Distribución acumulada complementaria de la cantidad de bienes totales con un valor superior a los 30 millones de euros en Francia. Obsérvese que presenta un comportamiento descrito en buena medida por la expresión (3.1).

Tales distribuciones parecen ser comunes desde hace mucho tiempo, como lo muestra el trabajo de Hegyi et. al. [45] donde se analiza la distribución de la riqueza entre las familias aristocráticas e instituciones como el clero en la sociedad medieval húngara en términos del número de familias de siervos en propiedad. Como lo muestra la Figura 3.3, se puede observar nuevamente un comportamiento en la forma (3.1).

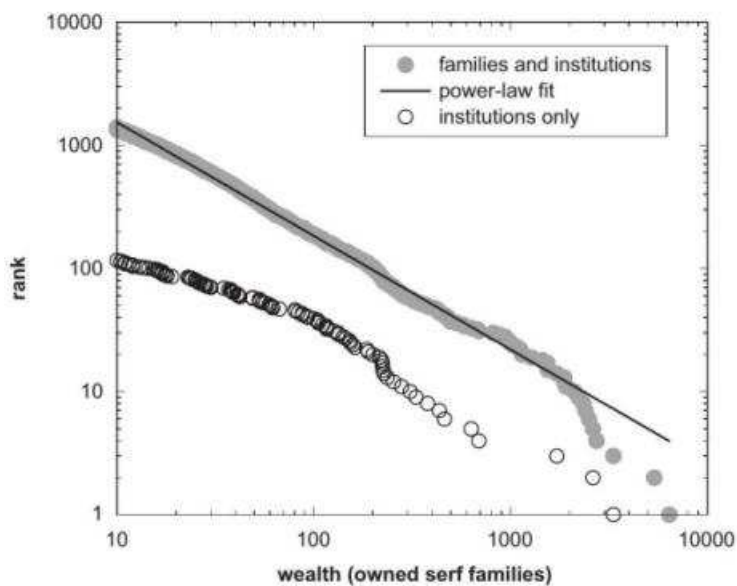


Figura 3.3. Distribución acumulada de riqueza del 8% más rico en la sociedad húngara de 1550. La riqueza es estimada a través del número de familias de siervos que mantenían como propiedad. Esta distribución, mostrada en escala log - log, sugiere un comportamiento de Pareto con $\alpha = 0.92$.

Sin embargo, se ha encontrado que las distribuciones de Pareto no son comunes a toda la población. Dragulescu y Yakovenko [46] mostraron evidencias de que la distribución para el resto de la población podía ser ajustado a una función exponencial $P(x) = ce^{-x/T}$, como en el caso de la distribución de ingreso en Estados Unidos y en Australia (Figuras 3.4 y 3.5) en diferentes años [46][47].

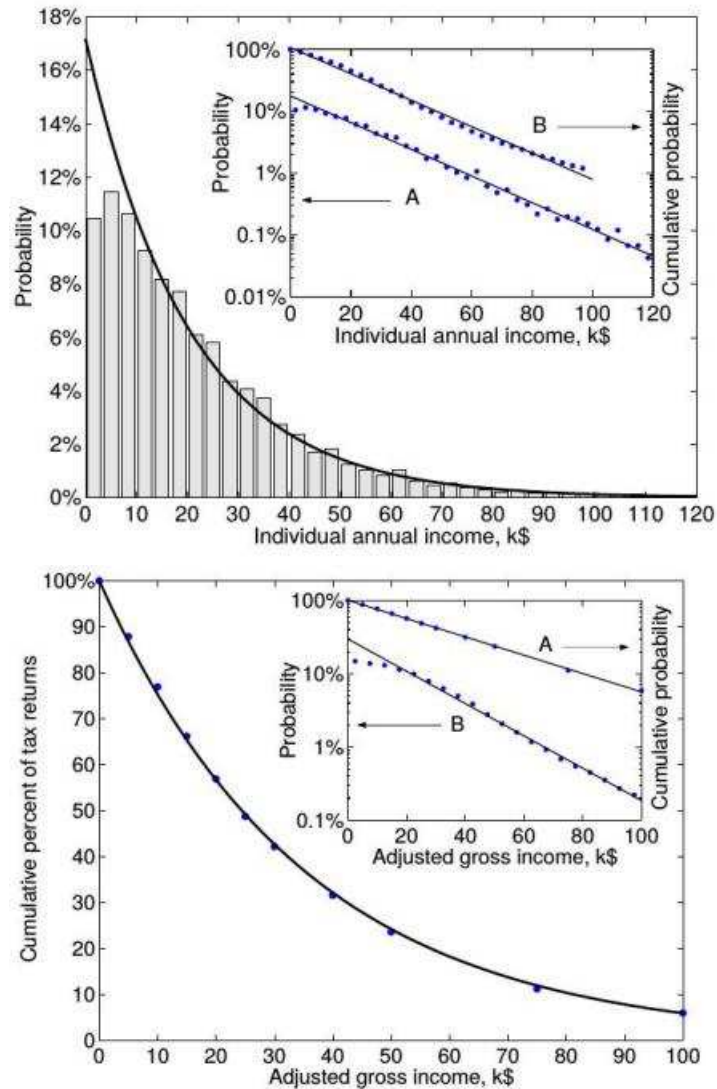


Figura 3.4. Las imágenes muestran la distribución de ingreso individual (arriba) y de devoluciones de impuestos contra ingreso en Estados Unidos en los años de 1996 y 1997 respectivamente. En los recuadros se muestran las distribuciones en escala log - normal que, como puede observarse, corresponden a una distribución exponencial $P(x) = ce^{-x/T}$.

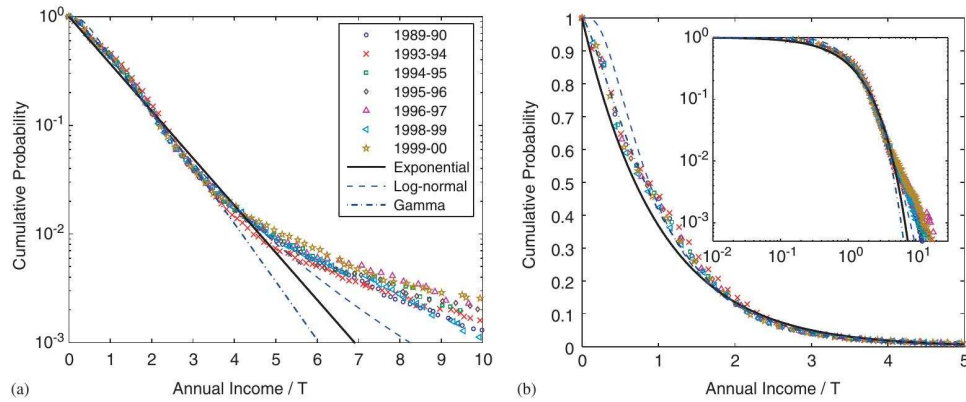


Figura 3.5. En las imágenes se muestra la distribución acumulada de ingreso de diferentes años en Australia y su ajuste a funciones de forma exponencial, log - normal y gamma. Las distribuciones se encuentran en escalas a) log - lineal, b) lineal - lineal y log - log en el recuadro de la figura b). Podemos observar (en el recuadro) que el mejor ajuste corresponde a una distribución exponencial $P(x) = ce^{-x/T}$.

Aún más, en un trabajo posterior [48], Dragulescu y Yakovenko demostraron la coexistencia de las dos distribuciones: una ley de potencias para la parte más rica y una exponencial para la fracción de menores ingresos. Como puede observarse en la Figura 3.6, esto es cierto particularmente para la distribución acumulada de devoluciones de impuestos en EU en el periodo de 1983 a 2001.

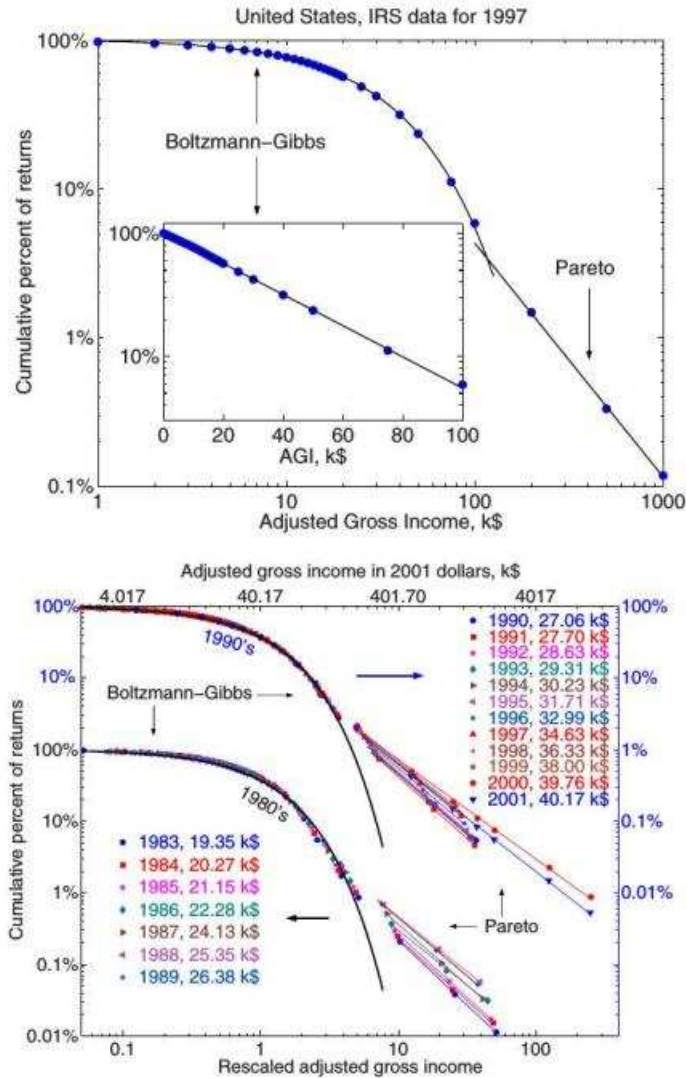


Figura 3.6. En esta figura se muestran las distribuciones de probabilidad acumulada complementaria de las devoluciones de impuestos en Estados Unidos en diferentes años[49][50]. Ambas se encuentran en escala log-log y en ambos casos se observa el comportamiento en forma exponencial y de Pareto de la distribución (líneas sólidas).

Desafortunadamente, en el caso de las distribuciones de riqueza es difícil encontrar datos empíricos que abarquen a toda la población. Sin embargo, en algunos países como el Reino Unido la agencia de impuestos realizó, con un método de ajuste basado en la edad, género y otras características, una reconstrucción de la distribución de riqueza de toda la población [48]. En la figura siguiente se puede observar que dicha distribución mantiene el mismo comportamiento que el descrito en la Figura 3.6.

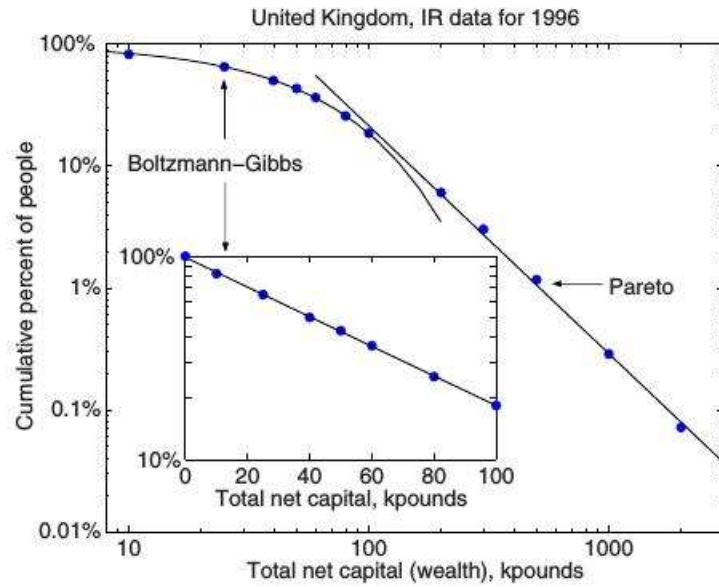


Figura 3.7. En escala log - log, se muestra la distribución acumulada de riqueza del Reino Unido en 1996. Obsérvese la coexistencia de dos regímenes: Pareto para aproximadamente el 10% de la población, y exponencial para el resto. En el recuadro se muestra la porción correspondiente a la distribución de Boltzmann - Gibbs en escala log - normal.

Además, un resultado similar se observa en las distribuciones de ingreso construidas con los datos de la agencia de impuestos de Estados Unidos [51], como se muestra en la siguiente figura:

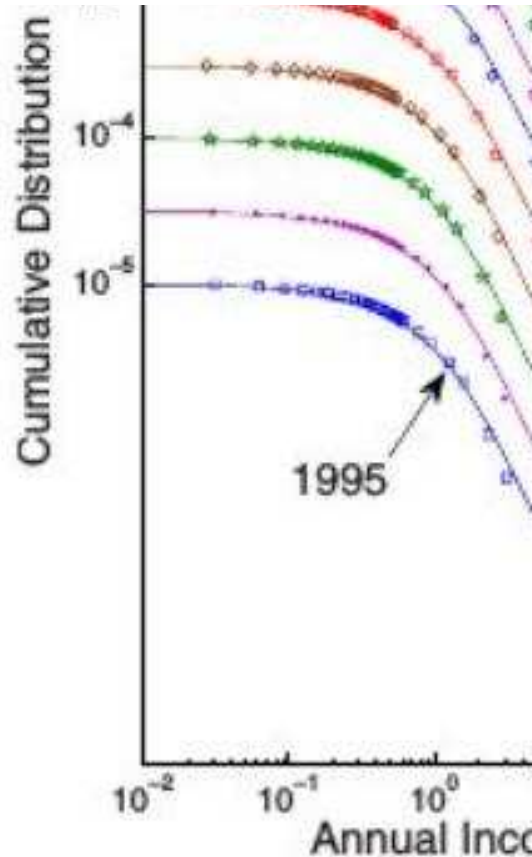


Figura 3.8. En escala log - log se presentan las distribuciones acumuladas de ingreso en Estados Unidos en diferentes años. Todas las gráficas fueron reconstruídas a partir de los datos del IRS (Internal Revenue Service) y están desplazadas verticalmente por claridad. Se puede observar la existencia de regímenes tanto de Pareto como de Boltzmann - Gibbs.

Por otro lado, con respecto a la red de intercambio global (World Trade Web) Li et. al. [52] presentan un análisis de ésta considerando que los nodos y los vínculos que la conforman representan 179 países y las operaciones de exportación e importación de bienes y servicios entre ellos, respectivamente. Encuentran que la red global presenta un comportamiento libre de escala que, como mencionamos anteriormente, se observa en que la distribución de grado de la red es una distribución de Pareto de la forma (3.1) (Figura 3.9).

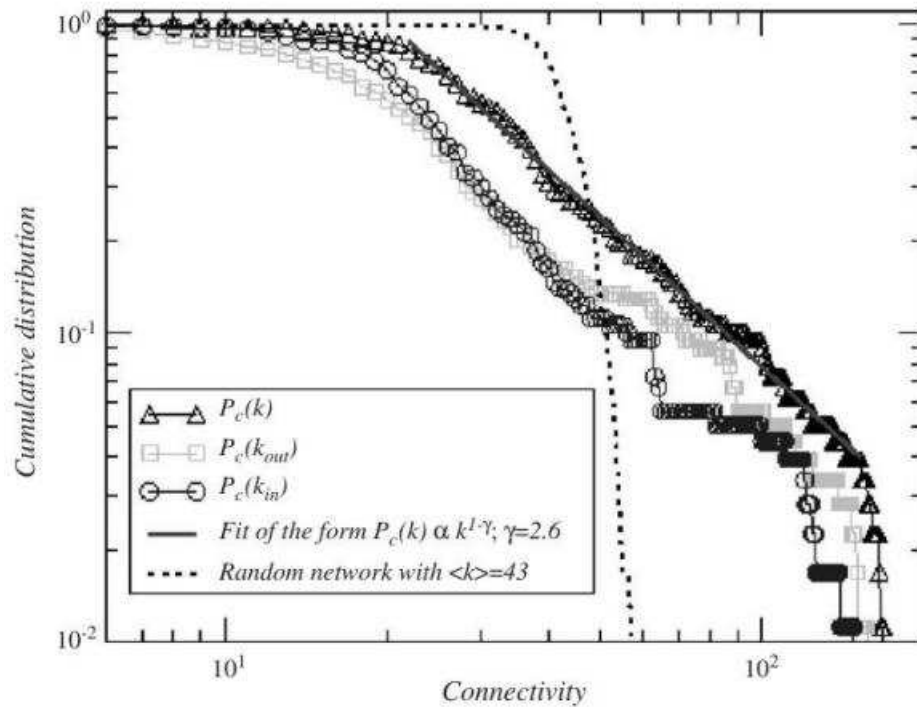


Figura 3.9. En la imagen se pueden observar las distribuciones acumuladas de grado de la red de intercambio global (WTW) cuando se considera a los vínculos como las relaciones de exportación $P_c(k_{out})$, de importación $P_c(k_{in})$ y de importación/exportación $P_c(k)$. Puede notarse que esta última presenta una región en la cual coincide con un ajuste en la forma de la distribución de Pareto (3.1), con $\alpha = 1.6$.

Como se mencionó anteriormente, el objetivo de esta tesis es reproducir la coexistencia de las distribuciones de Pareto y de Boltzmann-Gibbs y la ocurrencia de la distribución de grado mediante un modelo de intercambio económico entre agentes. Es por esto que, en las siguientes secciones^{3.2}, presentamos algunos ABMs que han sido usados para estudiar el proceso de acumulación e intercambio de riqueza y modelos que incorporan la Teoría de Redes Complejas a tal proceso.

3.2 Modelos de intercambio de dinero

En esta sección describimos algunos modelos que han abordado el problema de la acumulación de dinero o riqueza mediante un proceso conservativo de intercambio entre agentes.

^{3.2.} La estructura de dicha sección fue tomada de la referencia [42] dado que consideramos que el orden en el que se presentan los modelos permite comprender cada uno de ellos, y sus diferencias, claramente. Nuestro más sincero agradecimiento a los autores.

Aunque breve, consideramos que lo presentado es suficiente para entender la utilidad y los alcances de dichos modelos.

3.2.1 Modelos sin deuda

Uno de los modelos más sencillos que representan el intercambio de dinero entre agentes considera interacciones a pares en un sistema donde la cantidad de dinero total es conservada. Esto es lógico si pensamos que una persona sólo puede recibir dinero de otra ya que únicamente los bancos centrales tienen la facultad de «crear» dinero [53]. Tomemos dos agentes i y j que intercambian una cierta cantidad de dinero Δm . Entonces, después del intercambio, la cantidad total de dinero de ambos sigue las siguientes reglas:

$$\begin{aligned} m_i &\rightarrow m'_i = m_i - \Delta m \\ m_j &\rightarrow m'_j = m_j + \Delta m \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde es el agente i el que «paga» una cierta cantidad de dinero al agente j por un bien o servicio. Las reglas se aplican para todos los agentes siempre y cuando $\Delta m \leq m_i$, esto es, sin que a los agentes se les permita contraer deuda. Observemos que tal condición establece un valor mínimo para el dinero de un agente, ya que $m_i \geq 0$. Además, puede deducirse fácilmente de las reglas de intercambio que la cantidad total de dinero se mantiene constante en cada intercambio:

$$m_i + m_j = m'_i + m'_j \tag{3.3}$$

Este tipo de modelos conservativos no considera la naturaleza de los bienes o servicios por los que se intercambia el dinero; solamente registra su flujo de un agente a otro. Cabe mencionar que modelos como el presentado no sólo han sido estudiados desde el punto de vista de la Física, si no que también han sido tratados en la literatura económica [54][55].

Nótese que visto de esta forma, las reglas para la transferencia de dinero (3.2) son análogas a aquellas para la transferencia de energía de una molécula a otra en las colisiones moleculares en un gas, y que la ecuación (3.3) es análoga a la conservación de energía en dichas colisiones. Por lo tanto, la distribución de dinero entre los agentes debe ser similar a la distribución de energía de Boltzmann-Gibbs:

$$P(m) = c e^{-m/T_m} \tag{3.4}$$

donde c es una constante de normalización mientras que $T_m = \frac{M}{N}$ es el dinero promedio por agente (M y N representan el dinero total y el número de agentes respectivamente). En el trabajo de Dragulescu y Yakovenko [53] se muestra, mediante una simulación computacional, que la ecuación (3.4) corresponde a la distribución de dinero obtenida del proceso definido por las ecuaciones (3.2) al considerar que $\Delta m = cte$, como podemos apreciar en la Figura 3.10.

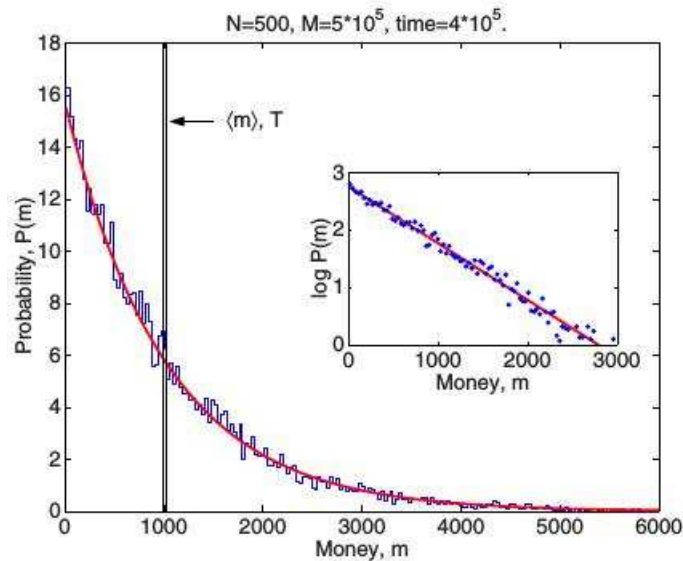


Figura 3.10. En la imagen se muestran la distribución de probabilidad estacionaria del dinero (histograma) obtenida en una simulación computacional del ABM definido por la ec. (3.2), la distribución inicial de dinero $w_0 = \langle m \rangle$ (línea vertical) y los ajustes a la distribución de Boltzmann - Gibbs (curvas sólidas). En este caso, la cantidad de dinero Δm que fluye de un agente a otro es tomada como constante para todos los intercambios. En el recuadro aparece el ajuste en escala log - normal.

En el mismo trabajo, Dragulescu y Yakovenko varían la forma en la que se elige la cantidad Δm . Comprueban que la distribución de dinero entre los agentes es exactamente la misma si se toma a Δm como constante, como una fracción aleatoria de la cantidad promedio de dinero por agente y como una fracción aleatoria del promedio de dinero de los dos agentes en cada intercambio, y que dicha distribución toma la forma (3.4) con una frontera impermeable en $m = 0$.

Además, Dragulescu y Yakovenko [53] presentan una variante al considerar que la economía moderna está dominada por firmas comerciales que consisten de varios agentes. En esta situación, un agente es elegido cada cierto tiempo para tomar el papel de firma y obtiene un préstamo K de otro agente debiendo pagar un interés hK . Entonces, el agente elegido contrata L agentes a un salario w para producir una cantidad Q de bienes que venderá a un

precio p , por los que recibe un beneficio $pQ - wL - hK$. Todos los entes involucrados son elegidos al azar y la cantidad total de dinero en el sistema es considerada constante.

Interesantemente, la distribución estable de dinero en este modelo, que utiliza una función $p(Q) = v/Q^\eta$ para modelar el proceso de oferta y demanda y supone que la producción de bienes de la firma sigue una función de Cobb - Douglas^{3.3} [56][57] (tradicional en economía) $Q(L, K) = L^\alpha K^{1-\alpha}$, resulta ser de la forma (3.4) sin que el valor elegido de los parámetros afecte dicha distribución.

3.2.2 Modelos con deuda

Como su nombre lo indica, los agentes pueden contraer deuda al intercambiar dinero cuando la cantidad de la que dispongan sea menor que la cantidad necesaria para dicho intercambio. Desde el punto de vista de un agente individual, la deuda puede ser considerada como dinero negativo: cuando pide un préstamo a un reservorio, que se considera externo al sistema por simplicidad, la cantidad de dinero en su balance personal aumenta (dinero positivo) pero al mismo tiempo contrae una deuda (dinero negativo) de tal forma que el dinero total que posee se mantiene constante. Por lo tanto, la cantidad total de dinero en el sistema cumple con la suposición de conservación al definirla como la suma del total del dinero positivo M y el total del dinero negativo D , es decir, $M_T = M + D$.

Después de un intercambio binario en la forma (3.2), en el caso en que un agente recibe dinero del reservorio, su balance personal se vuelve negativo. Esto hace que la frontera que se observa en los modelos anteriores, $m_i \geq 0$, ya no sea válida debido a que el estado base del sistema ya no es $m_i = 0$. Entonces, la existencia de deuda en el sistema no viola el principio de conservación del dinero, si no que más bien se refleja en una modificación de la frontera $m_i \geq 0$ [58][59].

Si en el sistema se considera una cantidad ilimitada de deuda, la distribución de dinero $P(m)$ no se estabiliza y el sistema nunca alcanza un estado estacionario, de tal manera que $P(m)$ se extiende en forma Gaussiana indefinidamente hacia $m = \pm\infty$. Es decir, algunos agentes se vuelven más y más ricos a expensas de los agentes que contraen cada vez más deuda. Sin embargo, la falta de restricciones en cuanto a la deuda causa una enorme inestabilidad en los sistemas reales, debido a que agentes individuales pueden seguir comprando bienes y servicios sin producir nada a cambio por el simple mecanismo de adquirir deuda ilimitada.

3.3. La función de Cobb - Douglas es una forma de función de producción que representa las relaciones entre un producto y las variaciones de los insumos y el capital, entre otros parámetros.

Para evitar dicho comportamiento, puede establecerse un límite a la deuda para todos los agentes de tal manera que el balance individual de dinero cumpla que $m_i \geq -m_d$. Bajo estas condiciones, la distribución de probabilidad del dinero resulta ser la misma que en la Figura 3.10 con la diferencia de que la frontera que aparece en $m_i = 0$ se recorre hasta $m_i = -m_d$, como se observa en la siguiente figura.

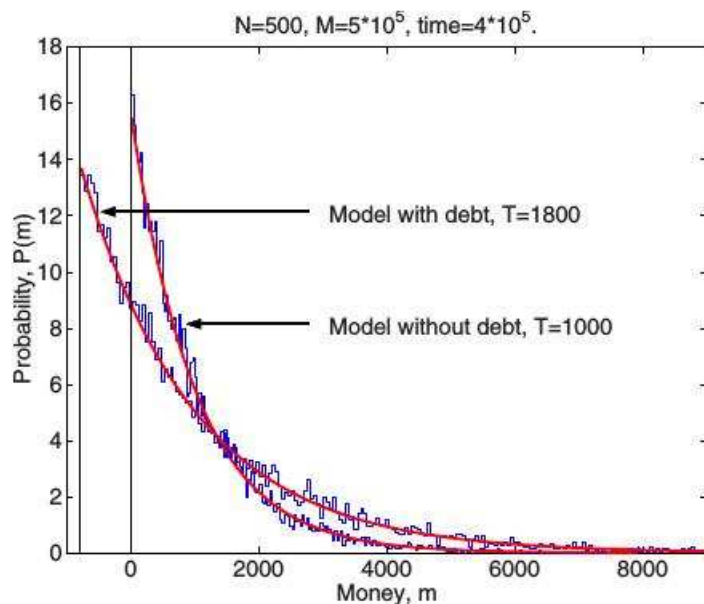


Figura 3.11. En la imagen se muestran las distribuciones de dinero para los modelos con y sin deuda. Obsérvese que ambas distribuciones presentan el mismo comportamiento (3.4) con diferentes fronteras para la cantidad mínima de dinero por agente.

Por otro lado, Xi et. al. [60] presentan un modelo en el cual la restricción a la deuda no está especificada en términos de la deuda individual de cada agente, $m_i \geq -m_d$, si no a través de la capacidad de deuda total en el sistema dada por la capacidad de préstamo $(1 - R)M$ de un banco central. M y el parámetro R representan el total de depósitos en el banco y la fracción de éstos requerida como reserva, respectivamente.

Entonces, cuando en un intercambio uno de los agentes participantes no cuenta con la cantidad de dinero Δm suficiente, puede obtener el faltante siempre y cuando el banco conserve su capacidad de préstamo. En caso contrario el intercambio es cancelado. Además, cuando el agente que recibe dinero como resultado del intercambio tiene deudas con el banco, destina el dinero recibido para pagarlas. De esta manera, con los sucesivos préstamos y pagos con el banco, la cantidad de dinero positivo disponible para los agentes en el sistema se ve incrementada a $M = \frac{M_b}{R}$ donde M_b es la cantidad inicial de dinero y $\frac{1}{R}$ es el «factor multiplicador de dinero» [61].

Puede observarse que el incremento en la cantidad de dinero disponible para las transacciones entre los agentes resulta del incremento en la deuda total del sistema. Cuando la deuda es máxima, $D = M_b/R - M_b$, se tienen dos constricciones para las cantidades de dinero positivo, M_b/R , y negativo, D , que circulan entre los agentes, debido a que estas dos expresiones están limitadas por el factor R . Las distribuciones estacionarias que resultan mantienen el comportamiento en la forma (3.4) con diferentes valores del parámetro T_m para el dinero negativo y positivo (Figura 3.12).

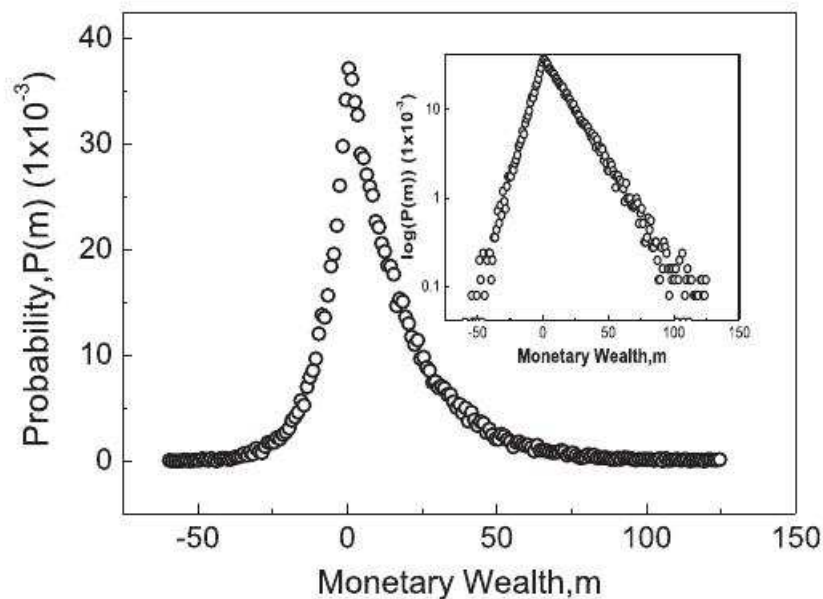


Figura 3.12. Como puede observarse en la imagen, la distribución de probabilidad estacionaria de dinero en el modelo de Xi [60] resulta ser de la forma (3.4) tanto para el dinero positivo como para el negativo (obsérvese que ambos regímenes se encuentran en $m = 0$). En el recuadro se observan más claramente estos comportamientos en escala log - normal.

Aunque los modelos descritos representan un sistema más cercano a la realidad que los considerados en la sección 3.2.1 al introducir la posibilidad de endeudamiento de los agentes, una de sus limitantes consiste en que dicha deuda no genera intereses. En la referencia [53] Dragulescu y Yakovenko describen un modelo simple con diferentes tasas de interés para los depósitos y préstamos en y de los bancos. Los agentes poseen cuentas en el banco, por las cuales obtienen un cierto interés, y pueden obtener préstamos de él, pagando a su vez un porcentaje al banco de manera mensual en forma de interés. Si un agente no puede hacer el pago que le corresponde, es declarado en bancarrota y es liberado de la deuda; sin embargo, la obligación de cubrir ésta es transferida al banco con el objetivo de mantener un modelo conservativo.

Al realizar diferentes simulaciones computacionales encuentran que, dependiendo de los valores de los parámetros, puede suceder uno de dos escenarios: los agentes en conjunto pierden constantemente dinero en favor del banco o es el banco el que pierde dinero constantemente en favor de los agentes. A pesar del flujo constante de dinero de uno de los componentes del sistema al otro, de los agentes al banco o viceversa, la distribución de dinero entre los agentes sigue presentando una forma exponencial (3.4).

Existen modelos más complejos que los mencionados anteriormente, como el modelo macroeconómico propuesto por Keen [62][63], que presenta un comportamiento de colapso económico inducido por la deuda en donde toda la actividad económica desaparece y no puede ser reactivada sin una moratoria en la deuda. Tanto en el modelo de Yakovenko como en éste último los intereses son considerados constantes para cada simulación.

Por otro lado, Cockshot y Cotrell [64] proponen un mecanismo en el cual las tasas de interés son calculadas para garantizar un proceso estocástico de retiros y depósitos en el banco. A través de simulaciones basadas en agentes, encuentran que la disponibilidad de dinero para los intercambios entre los agentes aumenta hasta cierto límite donde la economía sufre un colapso debido al peso de la deuda total en el sistema.

3.2.3 Transferencia proporcional de dinero

Como ha podido observarse, una característica común a la mayoría de los modelos presentados anteriormente es que la cantidad de dinero transferida de un agente a otro durante el proceso de intercambio es completamente independiente del capital o riqueza que posean dichos agentes al momento de tal intercambio. Para tomar en cuenta la influencia del capital individual, Ispolatov et. al. [65] desarrollan el llamado modelo de intercambio multiplicativo de bienes en el cual la cantidad intercambiada es una fracción fija γ del capital del agente que «paga», i. e., $\Delta m = \gamma m_i$.

Al contrario de los modelos anteriores, éste no produce una distribución estacionaria del dinero en la forma (3.4) si no que presenta una similar a la de la distribución Gamma (Figura 3.13):

$$P(m) = cm^\beta e^{-m/T} \quad (3.5)$$

y se encuentra que los parámetros γ y β satisfacen la relación $\beta = -1 - \ln 2 / \ln(1/\gamma)$.

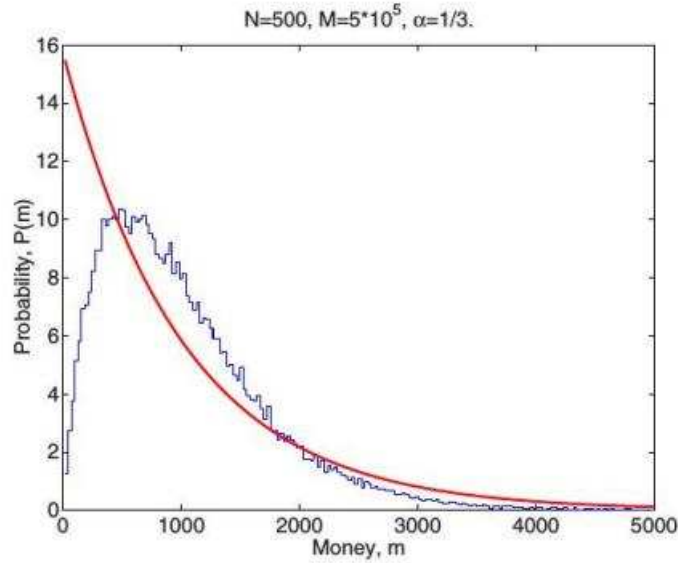


Figura 3.13. En la imagen se observa la distribución estacionaria obtenida del modelo de intercambio multiplicativo de bienes (histograma) para $\gamma = 1/3$ comparada la distribución de Boltzmann - Gibbs (curva sólida).

Aunque Ispolatov y sus colegas no justifican completamente el uso de la proporcionalidad de Δm , en un modelo muy similar [66][67][68] llamado «el proceso de la desigualdad» el sociólogo John Angle desarrolla esta idea a partir de la teoría de estratificación social de Engels, donde se postula que la desigualdad en la sociedad se presenta cuando las personas son capaces de producir más recursos de los que necesitan para su supervivencia. Entonces, el superávit en la producción puede entonces transferirse de una a otra persona, generándose en consecuencia la desigualdad.

En trabajos posteriores [69][70], Angle desarrolla la idea de proporcionalidad considerando que diferentes grupos de agentes poseían distintos valores del parámetro de proporcionalidad γ con el fin de representar los efectos de cualidades intrínsecas a los agentes, tales como la educación u otro tipo de capital humano, en el proceso de intercambio. En ambos casos, donde γ es el mismo o diferente para todos los agentes, la distribución de dinero estacionaria que se encuentra es similar a la distribución Gamma.

Por otro lado, Chakraborti y Chakrabarti [71] presentan un modelo en el cual los agentes «deciden» reservar una fracción λm_i de su riqueza destinando el resto a un proceso de intercambios aleatorios, en los cuales la cantidad de dinero transferida es proporcional a la suma del capital de ambos agentes. Es decir, las reglas de intercambio (3.2) son modificadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} m'_i &= \lambda m_i + \xi(1 - \lambda)(m_i + m_j) \\ m'_j &= \lambda m_j + (1 - \xi)(1 - \lambda)(m_i + m_j) \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde λ es llamado la propensión al ahorro y ξ es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $(0, 1)$. Como puede observarse en la Figura 3.14, la distribución estacionaria que resulta de la este modelo tiene la forma de una distribución gamma (3.5).

Se puede demostrar, tal como aparece en el trabajo de Angle [70], que al hacer el cambio de variable $\lambda \rightarrow (1 - \gamma)$ y que ξ tome los valores discretos 0 y 1 las ecuaciones (3.6) son similares a (3.2) con $\Delta m = \lambda m_i$. Consecuentemente, cuando la propensión al ahorro λ de los agentes es igual a cero, la distribución estacionaria resulta ser una distribución exponencial en la forma (3.4).

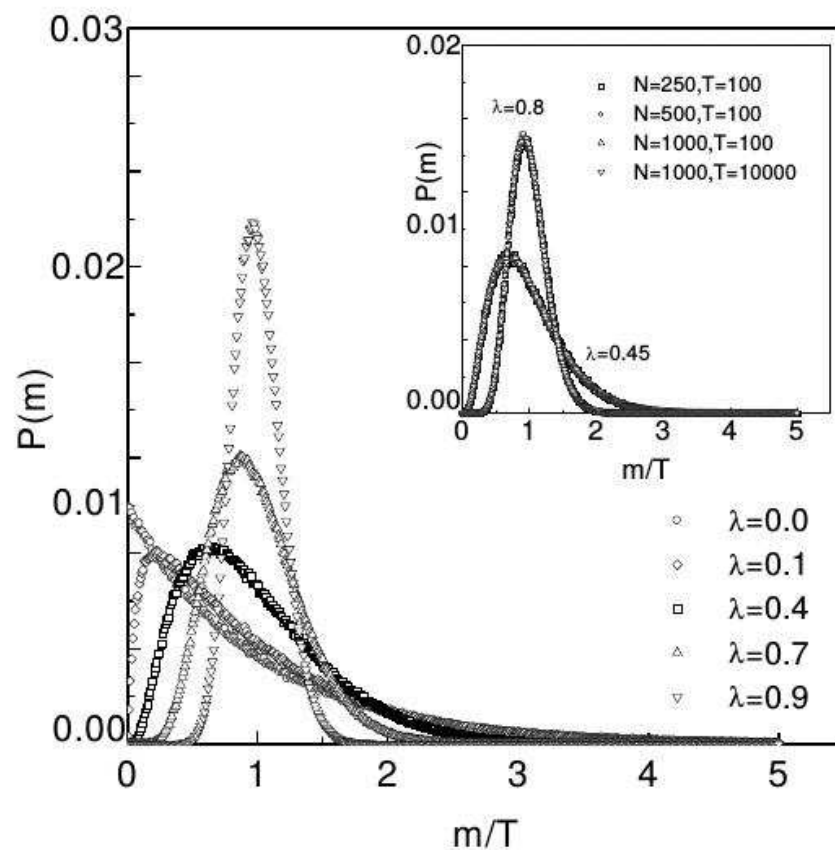


Figura 3.14. En la imagen se pueden apreciar las distribuciones de dinero estacionarias contra el capital de los agentes en la simulación del modelo de Chakraborti para diferentes valores del parámetro γ . Obsérvese que las distribuciones tienen la forma de las distribuciones Gamma de la forma (3.5). T representa el valor promedio de dinero por agente.

Al considerar que el parámetro λ puede variar entre los agentes, y por lo tanto describirlo como una variable aleatoria uniformemente distribuida entre 0 y 1, Chatterjee et. al. [72] encuentran que el modelo descrito anteriormente produce distribuciones de probabilidad $P(m)$ en la forma de una ley de potencias (3.1) con $\alpha = 2$ para valores grandes de m como se muestra en la Figura 3.15. Este comportamiento se origina en aquellos agentes cuya

propensión al ahorro es cercana a 1, con lo cual la fracción de su riqueza disponible para el intercambio es mínima.

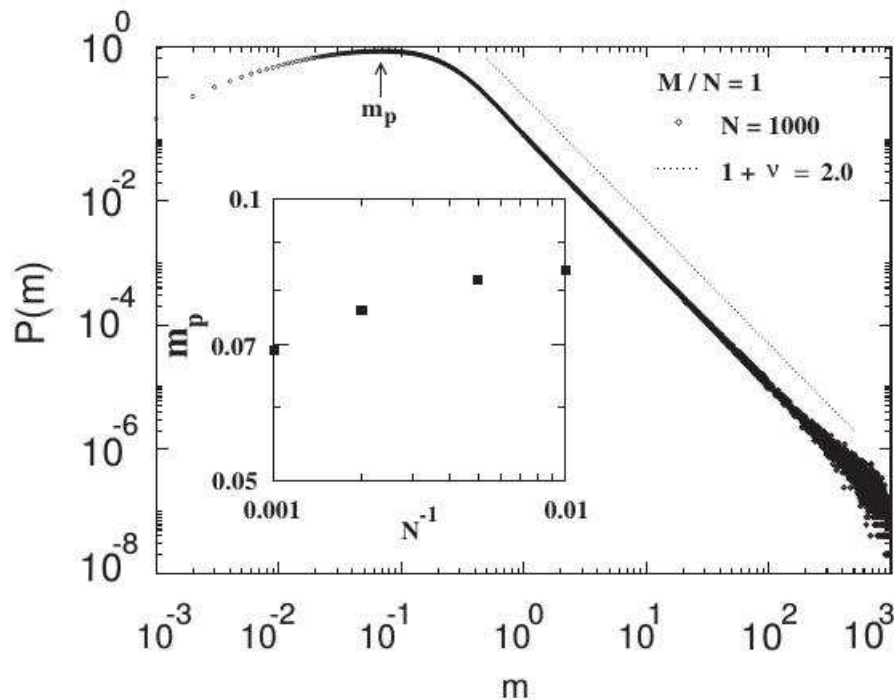


Figura 3.15. La distribución de probabilidad estacionaria $P(m)$ mostrada en la figura corresponde a una distribución de Pareto con un exponente $\alpha = 2$ obtenida del modelo de Chatterjee con λ uniformemente distribuido entre 0 y 1. En el recuadro se muestra el punto donde se encuentra el valor más probable m_p .

3.3 Teoría de Redes en el proceso de intercambio.

Una característica del proceso de intercambio que no es considerada en los modelos presentados en la sección anterior es la existencia de redes que enlazan a los agentes y que pueden afectar la forma en la que interactúan. Por ejemplo, Takashi [73] estudia la distribución de riqueza del modelo de Bouchaud-Mézard [74] cuando su dinámica temporal tiene lugar en redes aleatorias y de mundo pequeño, en las cuales los N agentes que conforman el sistema están representados por los nodos en la red. La evolución de la riqueza de un agente individual x_i está determinada por:

$$dx_i = J \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i - x_j) dt + \sqrt{2} \sigma dW_i$$

donde J es el coeficiente de difusión de la riqueza, a_{ij} toma el valor 1 si existe un vínculo entre los agentes i y j , 0 en caso contrario, y el último término en la ecuación es una variable aleatoria Gaussiana que representa el crecimiento o decrecimiento espontáneo de la riqueza

debido a fluctuaciones en la economía. Bajo estas condiciones, Takashi realiza simulaciones computacionales que le permiten determinar numéricamente la distribución de riqueza entre los agentes para diferentes valores de la constante J además de determinar su forma analítica (Figura 3.16).

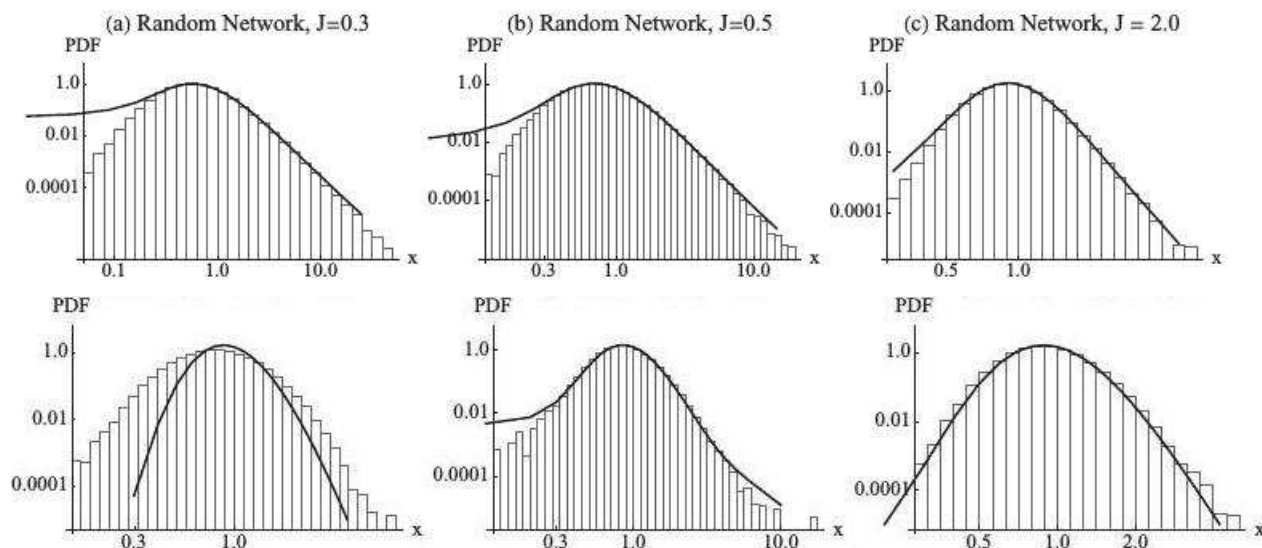


Figura 3.16. En las imágenes se pueden observar tanto los resultados numéricos (histograma) como las aproximaciones analíticas (línea sólida) de las distribuciones de riqueza que resultan de la dinámica del modelo de Bouchaud-Mézard en redes aleatorias (superior) y de mundo pequeño (inferior). En ambos casos se observa una buena concordancia entre ambos resultados.

Por otro lado, Hu y sus colaboradores [75] presentan un modelo dónde se construye a priori una estructura de red, siguiendo los modelos de redes aleatoria de Erdos - Renyi [76] y libre de escala de Barabási - Albert [77], sobre la cuál se produce el intercambio entre los agentes siguiendo las reglas de ganancia de los juegos del dilema del prisionero y de la avalancha de nieve^{3,4}. En estos juegos, los agentes se dividen entre cooperadores y no cooperadores y la ganancia está dada en términos de las combinaciones de comportamiento que haya entre un par de agentes dado. Además, los vínculos permiten que un nodo modifique su comportamiento en las siguientes interacciones.

En cada paso de la evolución temporal, todos los pares de agentes directamente conectados se involucran en uno de estos juegos para determinar la ganancia que obtienen. Posteriormente modifican su comportamiento (cooperador o no cooperador) al copiarlo del agente con mayor riqueza entre sus vecinos, con el fin de reflejar la capacidad de aprendizaje y adaptación que ocurren en los procesos económicos reales.

Las distribuciones de riqueza que se obtienen de la simulación resultan ser distribuciones de Pareto y distribuciones de Boltzmann - Gibbs con ambos juegos para las redes de Erdos - Renyi y Barabási - Albert (Figura 3.17).

3.4. Dichos juegos, Prisoners Dilema Game y Snowdrift Game, y algunos otros han sido ampliamente usados para modelar algunos procesos sociales y biológicos[78].

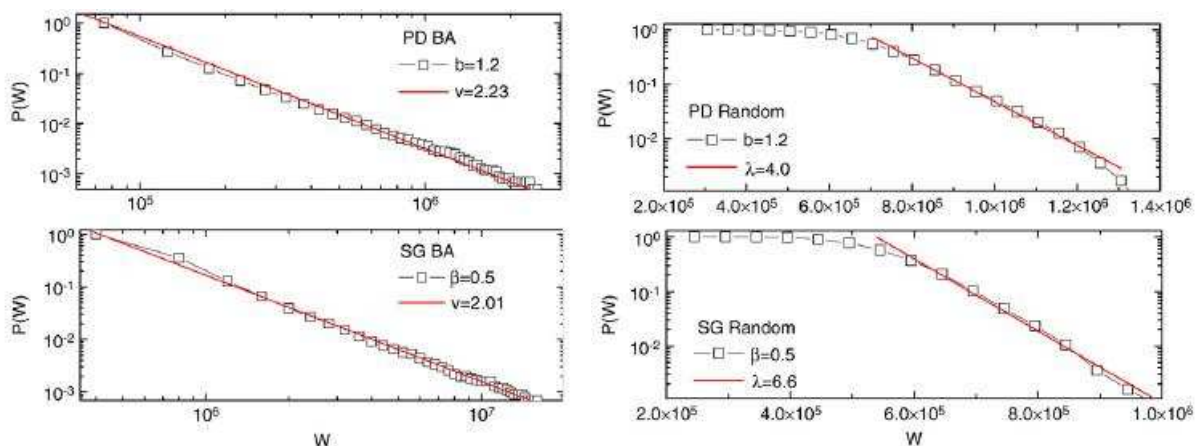


Figura 3.17. De izquierda a derecha se presentan las distribuciones estacionarias de riqueza correspondientes a los modelos de red de Barabási - Albert y de Erdos - Renyi en escalas log - log y log - normal respectivamente. Las imágenes superiores corresponden al juego del dilema del prisionero y las inferiores al de la avalancha de nieve. Como puede observarse gracias a la escala elegida, las redes de Erdos producen distribuciones exponenciales (3.4) mientras que las de Barabási generan distribuciones de Pareto (3.1) sin importar el juego seleccionado en cada caso.

Los vínculos en una red no necesariamente permanecen inalterados en el transcurso de la dinámica de intercambio, como sucede en los casos anteriores. En el trabajo de Coelho et al. [79] se considera un modelo conservativo de intercambio de riqueza donde la estructura de red representa las relaciones familiares de primer grado a través de los vínculos entre los agentes. Cada agente está caracterizado por su edad $A(i)$, que inicialmente es $N + 1 - i$, y su riqueza $w(i)$, distribuida aleatoriamente de manera uniforme en el intervalo $(0, 1)$ como condiciones iniciales.

En cada paso de tiempo, se elimina del sistema al nodo más viejo j y su riqueza es redistribuida de manera uniforme entre los nodos directamente enlazados a él. Con el objetivo de mantener el número N de agentes constante en todo el proceso, se reintroduce el nodo j con $A(j) = 0$ y se enlaza a dos nodos k y l aleatoriamente seleccionados con la condición de que su riqueza sea mayor que cierta cantidad q . Entonces, la cantidad de riqueza $2q$ es repartida a partes iguales entre s agentes, con una probabilidad proporcional a su riqueza para favorecer el fenómeno de acumulación, y una fracción p de la riqueza de k y l es otorgada al nodo j como su riqueza inicial. Finalmente, la edad de todos los nodos es incrementada en una unidad.

Es claro que el modelo descrito trata de representar, a través de la muerte de los nodos y de la distribución de $2q$ entre agentes en la red, los procesos de herencia y del costo de fundar una nueva familia. Como puede observarse en las Figuras 3.18 y 3.19, los resultados de la simulación computacional de este modelo reproducen el comportamiento libre de escala y una distribución de riqueza similar a las presentadas en la Sección 3.1.

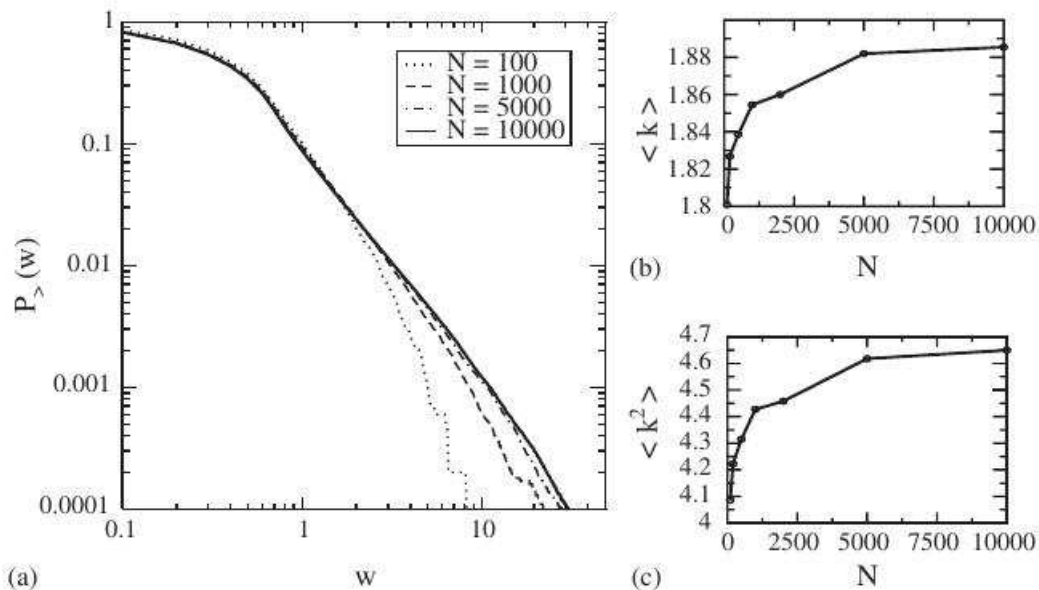


Figura 3.18. En la imagen se presentan las distribuciones de grado estacionarias para diferentes tamaños de la red a), el grado promedio b), y el grado cuadrado promedio c) contra el tamaño de la red. Puede apreciarse que la distribución en a) para $N = 10,000$ tiene la forma de una distribución de Pareto.

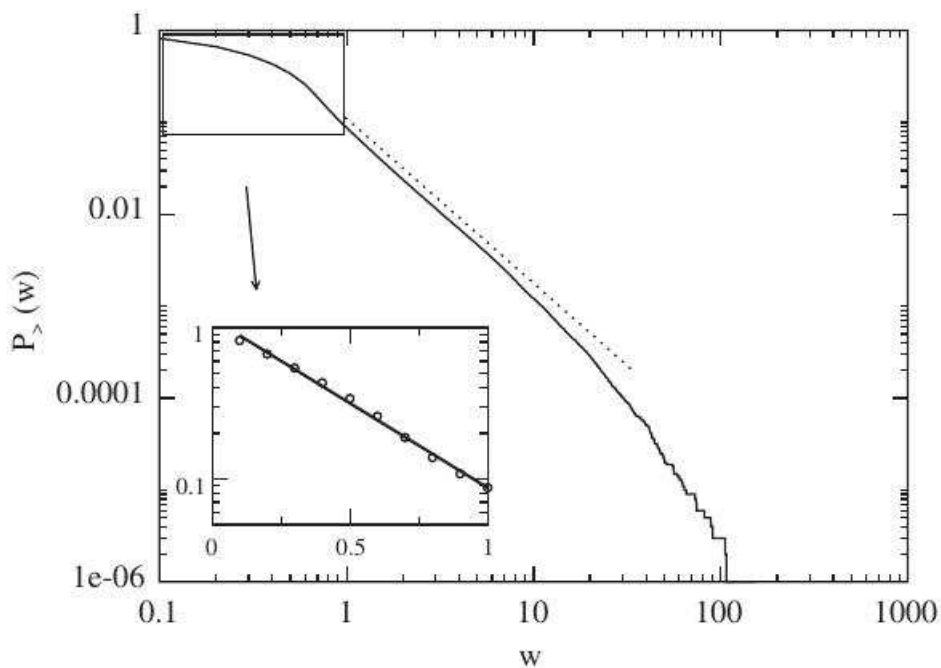


Figura 3.19. La distribución estacionaria de riqueza mostrada en la imagen corresponde a la simulación realizada con 10,000 nodos en la red en escala log - log. Nótese que mientras una sección se ajusta a la de Pareto, la tendencia inicial es de una distribución exponencial en la forma (3.4), como puede observarse en la escala log - normal del recuadro.

Como puede observarse de los modelos presentados, la existencia de una estructura de red establecida a priori, que determina la forma en la que están conectados los agentes en el sistema y las interacciones que se dan entre ellos, permite modelar características tanto personales de un individuo como la influencia que tienen las interacciones de corto alcance en la dinámica del intercambio económico.

Sin embargo, la topología inicial de la red afecta la dinámica de intercambio y, por lo tanto, la forma de las distribuciones de riqueza que se obtienen de dichos modelos. Por ejemplo, Di Matteo y sus colaboradores [80] encuentran que la distribución de riqueza resultante depende en gran medida de la distribución de grado de la red usada, en particular en el caso de las redes libres de escala que generan distribuciones que decaen en la forma de una distribución de Pareto (3.1) en la región de mayor riqueza.

Capítulo 4

Modelo y Resultados

Construir un modelo matemático que refleje la influencia de todas las variables involucradas en el proceso de intercambio y acumulación de riqueza es difícil, debido particularmente a que las formas en las que el intercambio ocurre son muy variadas y a que la riqueza no necesariamente está asociada con recursos monetarios si no también con bienes, inversiones, acciones, etc. que no son fácilmente usados como valores de cambio.

Sin embargo, es importante desarrollar modelos que permitan reproducir algunos de los aspectos relacionados con tal proceso. Dichos modelos reducidos ayudan a obtener información acerca de las variables más representativas del sistema en cuestión, lo que a su vez permite el desarrollo de teorías y modelos más completos que, en un futuro, nos permitan comprender y predecir el comportamiento de la economía global como un todo.

Una de las ventajas que representa el uso de los ABMs es que nos permiten capturar, mediante reglas simples, comportamientos tan complejos como las interacciones sociales que están involucradas en fenómenos como el del intercambio económico. Sin embargo, una de las limitaciones de esta forma de modelar es que su simplicidad puede esconder características importantes del fenómeno bajo estudio y, consecuentemente, impedir una correspondencia exacta de los resultados del modelo con las cantidades que se pueden medir en la realidad; a veces, dichos resultados o predicciones pueden ser difíciles o incluso imposibles de obtener.

Es por esto que en esta tesis nos centramos en construir un modelo que reproduzca de manera cualitativa el comportamiento de las distribuciones de riqueza y de grado de la red de intercambios que se observan en diferentes economías al rededor del mundo, con la esperanza de que tal correspondencia cualitativa nos permita establecer qué comportamientos de los agentes o condiciones en el sistema son los suficientes para que conduzcan a la emergencia de dichas estructuras.

Por lo tanto, en este capítulo presentamos el proceso de construcción del modelo de intercambio de riqueza entre agentes y las reglas dinámicas que proponemos y los resultados obtenidos en términos de las distribuciones de riqueza en el sistema y de la distribución de grado de la red de intercambios.

4.1 Modelo de intercambio de riqueza.

Para modelar el proceso de intercambio y acumulación, consideramos un sistema cerrado conformado por un conjunto de N agentes con una distribución inicial de riqueza y una posición espacial dadas. Entonces, cada paso temporal en la dinámica del sistema va a estar caracterizado por el intercambio, con alguna probabilidad de ocurrencia p , de una cantidad Δw entre un par de agentes. De manera sintética, el sistema propuesto puede resumirse en el siguiente algoritmo:

1. Se genera el sistema de N agentes, cada uno con una posición diferente (i, j) .
2. Asignamos una cantidad de riqueza inicial w_k a cada agente de tal manera que la riqueza total sea constante ($W_T = \text{cte}$).
3. Un par de agentes, k y t , se escoge al azar e intercambiarán riqueza con una probabilidad que dependa del par escogido $p = p(k, l)$.
4. Uno de los agentes le «ganará» la cantidad Δw a su contraparte con probabilidad $e = e(k, l)$.
5. Los intercambios ocurrirán hasta que las distribuciones de riqueza en el sistema sean aproximadamente estables.

Para llevar a cabo tal algoritmo, es necesario definir la distribución inicial de la riqueza, la forma de la probabilidad p de que ocurra el intercambio y la cantidad Δw intercambiada en cada transacción. Además, para considerar la posibilidad de que un agente individual pueda afectar las reglas de intercambio, debemos introducir la probabilidad e de que un agente gane sobre otro.

En particular, en este trabajo buscamos las reglas dinámicas que conducen a un sistema de intercambio económico a presentar las distribuciones de riqueza reales (Sec. 3.1) y, entonces, debemos garantizar que las condiciones iniciales de nuestro modelo no condicionan la ocurrencia de dichas distribuciones. Es por esto que la distribución de riqueza inicial elegida para los agentes es homogénea, de tal manera que la riqueza individual de cada agente es de la forma:

$$w_0(k) = \frac{W_T}{N} \quad (4.1)$$

que, junto con la posición (i, j) del agente k , constituyen las condiciones iniciales del sistema.

Puesto que estamos constriñendo la dinámica del intercambio a un sistema cerrado, es necesario que las reglas de evolución de la riqueza individual de todos los agentes reflejen dicha condición. Entonces, consideramos que el intercambio será de la forma (3.2):

$$\begin{aligned} w_k(t+1) &= w_k(t) + \Delta w \\ w_l(t+1) &= w_l(t) - \Delta w \end{aligned} \quad (4.2)$$

siendo Δw la cantidad intercambiada entre el par^{4.1}. Nótese que escritas en la forma (4.2), las expresiones (3.2) reflejan su carácter discreto en el tiempo.

Debido a que queremos evitar el concepto de deuda debemos garantizar que $\Delta w < w_l$. Además, podemos considerar como primera aproximación que la cantidad Δw es constante en todos los intercambios sin importar el par de agentes (k, l) elegidos, de manera análoga al modelo más simple presentado en la Sección 3.2.1.

Por otro lado, la probabilidad p de ocurrencia del intercambio puede no ser la misma para todos los pares de agentes posibles, si no que puede depender tanto de características globales del sistema como de características intrínsecas de cada agente. En este trabajo consideramos que puede depender de la distancia entre los agentes y/o de la cantidad de riqueza que posean. Entonces, dado un par de agentes (k, l) elegido de manera aleatoria, las formas de la probabilidad p al tiempo t que proponemos son:

$$\begin{aligned} p_1(k, l) &= \frac{w_k + w_l}{w_{\max}} \\ & y \\ p_2(k, l) &= \left(\frac{w_k + w_l}{w_{\max}} \right) \left(1 - \frac{d_{k,l}}{d_{\max}} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.1. A modelos como el presentado, donde la riqueza total se conserva y el número de agentes permanece constante, se les conoce como modelos de intercambio de bienes, o *asset exchange models* [53][65][71].

donde w_k , w_l y $d_{k,l}$ representan la cantidad de riqueza de los agentes k y l y la distancia entre ellos, respectivamente. La riqueza máxima del sistema al tiempo t está denotada por w_{\max} y d_{\max} es la distancia más grande existente entre un par de agentes.

Podemos notar que aunque las probabilidades (4.3) establecen la condición que deben satisfacer los agentes para involucrarse en el intercambio, no permiten necesariamente su ocurrencia, debido a que la condición realmente necesaria es la incapacidad de contraer deuda: dicho de otra manera, aunque los agentes cumplan alguna de las probabilidades (4.3) debe garantizarse que Δw sea menor que la riqueza del agente que pierde en el intercambio.

Una vez que el par (k, l) satisface alguna de las relaciones (4.3), es necesario decidir cuál de los agentes recibirá una ganancia del intercambio. Dado que queremos tomar en cuenta la capacidad de ellos de modificar las condiciones del intercambio para favorecer su ganancia, suponemos que tal capacidad está directamente relacionada con la experiencia obtenida de los intercambios previos. De esta manera, proponemos que la probabilidad del agente k de ganar sobre el agente l sea de la forma:

$$e(k, l) = \frac{e_k}{e_k + e_l} \quad (4.4)$$

donde e_k y e_l representan el número de intercambios previos en los cuales han ganado los agentes k y l respectivamente. Esta suposición puede ser interpretada en términos de la información que posee el agente k acerca de las condiciones económicas y de mercado que, en la realidad, favorecen la ganancia. Es decir, mientras más información (experiencia) posea un individuo, es más probable que su riqueza aumente.

Sin embargo, aunque la expresión (4.4) no determina cuál de los agentes obtendrá una ganancia del intercambio, si permite que uno de ellos acumule toda la riqueza en el sistema. Dado que la experiencia de todos los agentes es cero al inicio de la dinámica^{4.2}, el que gane en el primer intercambio verá aumentadas no sólo su probabilidad de ganar en el siguiente, si no también su probabilidad de involucrarse en un nuevo intercambio debido al aumento en su riqueza: estamos entonces construyendo un mecanismo de retroalimentación positiva que induce a un agente a acumular riqueza de manera desmedida.

Con la intención de construir un contrapeso al proceso descrito, y dado que los volúmenes de intercambio entre entidades reales no siguen la suposición de que $\Delta w = cte$, introducimos

4.2. Aunque para fines conceptuales decimos que la experiencia inicial de los agentes es cero, para la instrumentación numérica de la probabilidad (4.4) debemos evitar la singularidad en $e_k + e_l = 0$. Entonces, en todas las simulaciones numéricas consideramos que la experiencia inicial de todos los agentes es igual a la unidad.

otra forma de calcular Δw en cada transacción mediante la siguiente regla:

$$\Delta w = \alpha |w_k - w_l| \quad (4.5)$$

La expresión anterior está fundamentada en la suposición de que los agentes con una riqueza similar, o que pertenecen al mismo estrato económico, tienen aproximadamente la misma cantidad de influencia en su entorno económico y, por lo tanto, la capacidad que tiene un agente para obtener una mayor ganancia del otro es menor. El parámetro α es un factor que nos permite decidir la ganancia que obtendrán los agentes en cada intercambio y puede ser interpretado como la disposición de los agentes dentro del sistema de gastar parte de sus recursos.

Obsérvese que si consideramos la expresión (4.1), Δw calculada en la forma (4.5) es igual a cero para cualquier par de agentes. Para evitarlo, supondremos que la distribución inicial de riqueza es uniforme alrededor de $\langle w_0 \rangle = \frac{W_T}{N}$.

Las reglas (4.2) junto con las probabilidades de ocurrencia del intercambio (4.3), de ganar preferencialmente debido a la información (4.4) y las formas de la cantidad intercambiada $\Delta w = cte$ y (4.5) conforman el modelo estocástico computacional que proponemos para simular el proceso de intercambio económico.

En las siguientes secciones presentamos la forma en que la riqueza se distribuye entre los agentes del sistema y presentamos un análisis de los sub-grafos de la red de intercambio que se forma en el proceso.

Cabe mencionar que se realizaron diferentes simulaciones computacionales con el objetivo de evaluar el desempeño del modelo bajo diferentes condiciones. Por ejemplo, se llevaron a cabo corridas con diferentes valores de la cantidad total de riqueza W_T , del número de agentes N y del parámetro α . Sin embargo, dado que presentar todos y cada uno de los resultados de estas pruebas sería confuso, mostramos únicamente aquellas que consideramos relevantes para la validación del modelo. Para todos los casos que se presentan se empleó un sistema de 2000 agentes que se reparten $W_T = 10^5$ unidades de riqueza.

4.2 Distribuciones de riqueza para el caso $\Delta w = cte$.

En las Figuras 4.1 y 4.2 se muestran las distribuciones acumuladas complementarias estacionarias de riqueza^{4.3} $P(w)$ en escala normal y log-normal para las probabilidades de ocurrencia del intercambio (4.3) respectivamente. Podemos observar de la primera que aunque la forma de la distribución no corresponde completamente a la distribución de Boltzmann-Gibbs, observada en los modelos conservativos revisados en la Sección 3.2.1, mantienen dicho comportamiento en un rango de valores de riqueza entre 0.9 y 0.95.

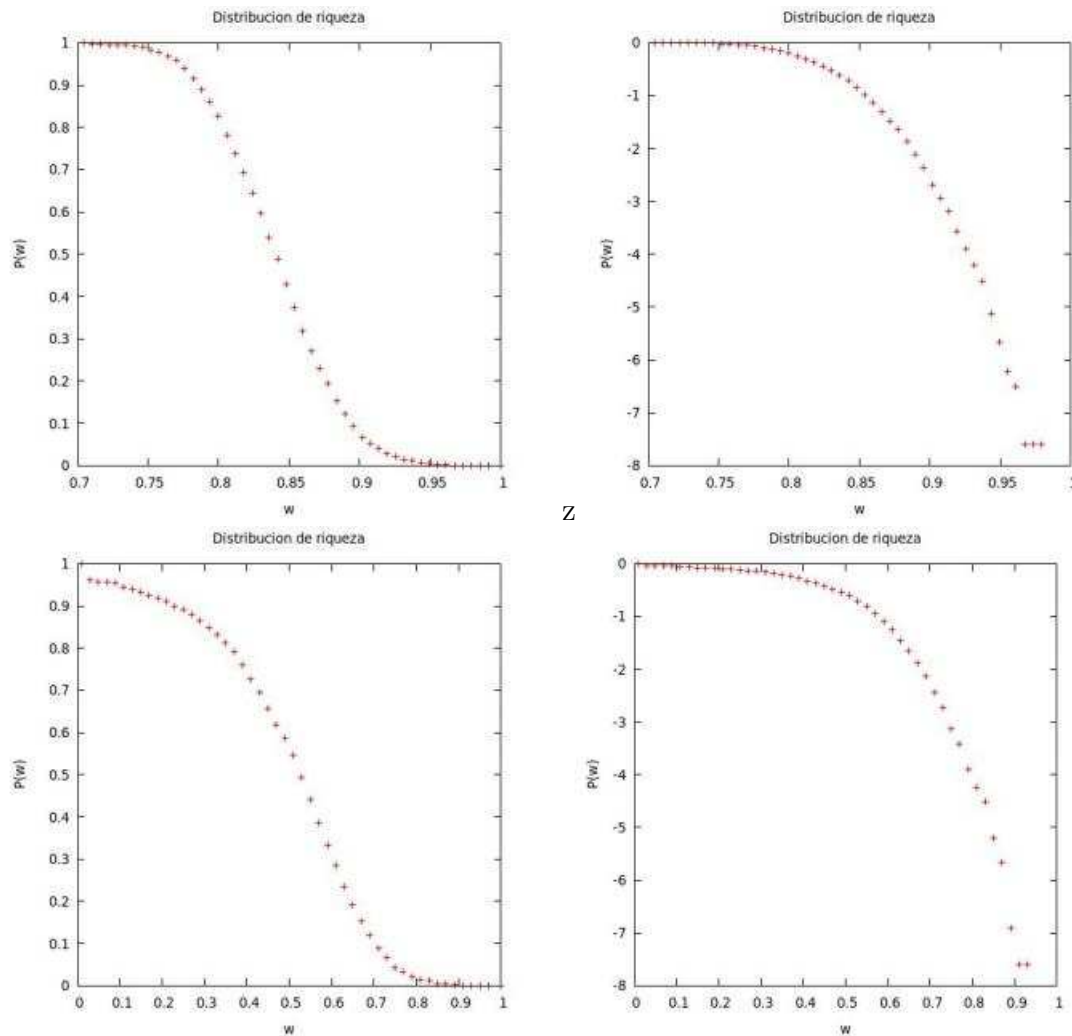


Figura 4.1. Se muestran de arriba a abajo los resultados de la simulación del intercambio económico con y sin «experiencia» (expresión 4.4), utilizando la probabilidad de ocurrencia $p_1(k, l) = \frac{w_k + w_l}{w_{\max}}$ y $\Delta w = cte$. Las imágenes de la izquierda se encuentran en escala normal, mientras que las de la derecha en escala log-normal. Obsérvese que aunque las distribuciones no reproducen completamente el comportamiento predicho en los modelos conservativos, salvo en la región comprendida entre 0.9 y 0.95, tampoco se asemejan a las distribuciones que se observan en la realidad (Sección 3.1).

4.3. Todas las distribuciones presentadas fueron obtenidas de simulaciones de simulaciones computacionales a las 10^6 iteraciones, que equivalen a 10^9 intercambios efectivos de riqueza entre agentes, donde las distribuciones de riqueza son estacionarias.

En la Figura 4.2 es claro que la probabilidad $p_2(k, l)$ conduce al sistema a un comportamiento similar al anterior para el caso en que la «experiencia» (4.4) no es tomada en cuenta, aunque es notoriamente distinto cuando los agentes tienen una ganancia preferencial debido a sus experiencias previas. Nótese que la riqueza se acumula en un pequeño número de agentes, quedando la mayor parte (muy cerca del 100%) con cero, o casi cero, riqueza.

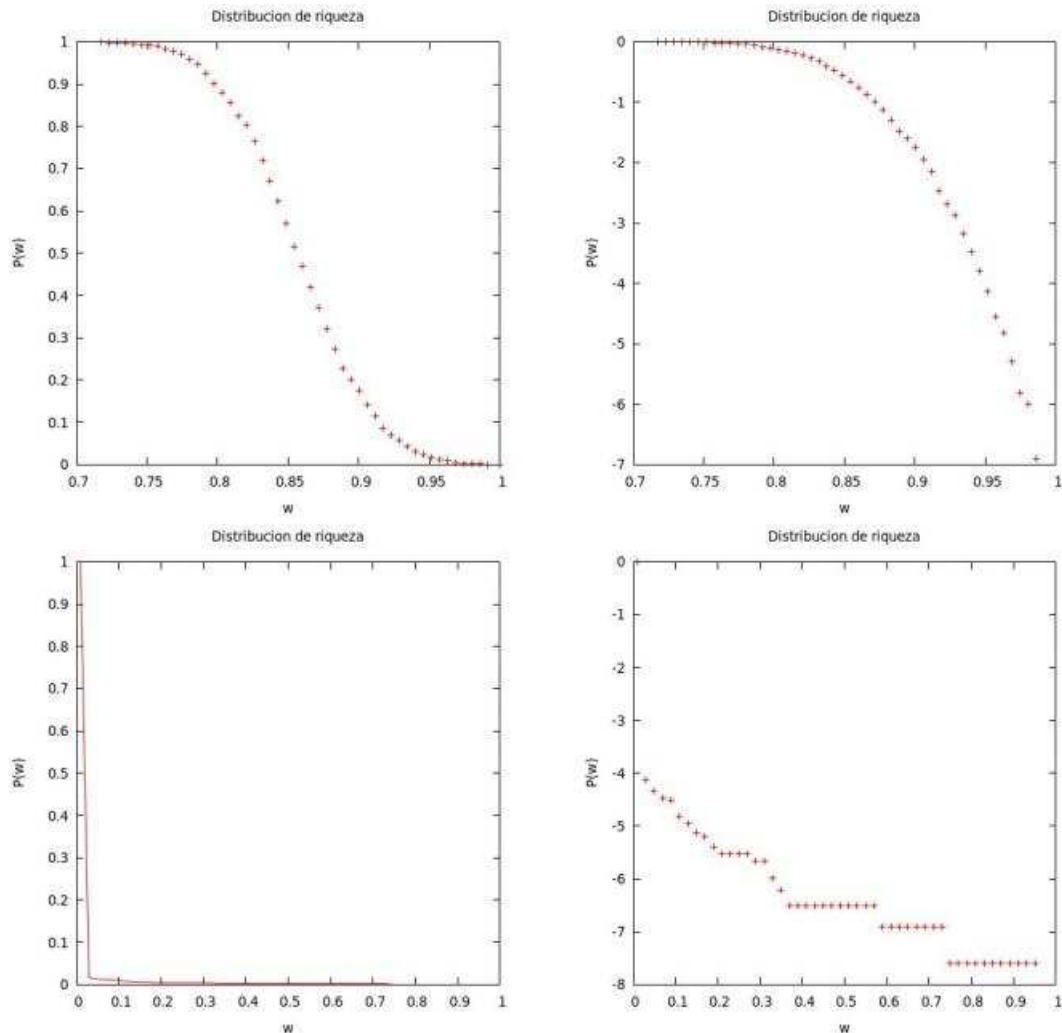


Figura 4.2. En las imágenes se pueden observar las distribuciones de riqueza que se obtienen de emplear la probabilidad $p_2(k, l) = \left(\frac{w_k + w_l}{w_{\max}}\right)\left(1 - \frac{d_{k,l}}{d_{\max}}\right)$ de que el intercambio ocurra. Es interesante notar que aunque el comportamiento en el caso sin «experiencia» (arriba) es similar a aquellos obtenidos para la probabilidad $p_1(k, l)$, el considerar la experiencia (abajo) conduce a una super acumulación de la riqueza. Las imágenes a la izquierda se encuentran en escala normal mientras que a la derecha se muestran en escala log-normal. Por claridad, se usan líneas para unir los puntos de la distribución inferior izquierda.

Aunque las probabilidades (4.3) modifican las distribuciones de riqueza, no consiguen, por si solas o con la presencia de la experiencia, reproducir las obtenidas de sistemas reales. Además, resulta interesante constatar que, en el caso en el que se usa la probabilidad $p_2(k, l)$ junto con la experiencia, emerge una super acumulación de la riqueza por unos pocos agentes, debida al proceso de retroalimentación positiva determinado por la ecuación (4.4). La imagen inferior izquierda en la Figura 4.2 resalta la necesidad de un contrapeso al efecto de la «información» en el proceso de acumulación. Las simulaciones que emplean la ecuación (4.5) en este sentido son mostradas en la siguiente sección.

4.3 Distribuciones de riqueza para $\Delta w = \alpha |w_k - w_l|$

Todas las distribuciones de riqueza aquí presentadas emplean las ecuaciones (4.4) y (4.5) para calcular la cantidad intercambiada y la probabilidad de ganar de un agente sobre el otro en cada interacción, manteniéndose la condición de que $\Delta w < w_l$ en las reglas de intercambio (4.2).

Cabe mencionar que en las simulaciones realizadas α toma valores en el intervalo [0.2, 0.7] debido a que por debajo de este rango no emerge ninguna tendencia importante en ninguno de los casos y para valores mayores a 0.7 las distribuciones de riqueza no modifican sustancialmente su comportamiento.

4.3.1 $p(k, l) = 1$

En las Figuras 4.3 a la 4.5 se muestran las distribuciones de riqueza, para distintos valores del parámetro α , que se obtienen al considerar que dos agentes elegidos al azar, k y l , pueden interactuar siempre y cuando $\Delta w < w_l$. Podemos observar que en todos los casos se presenta tanto el comportamiento parecido al de la distribución exponencial de Boltzmann-Gibbs (3.4) cómo al de la distribución de Pareto (3.1).

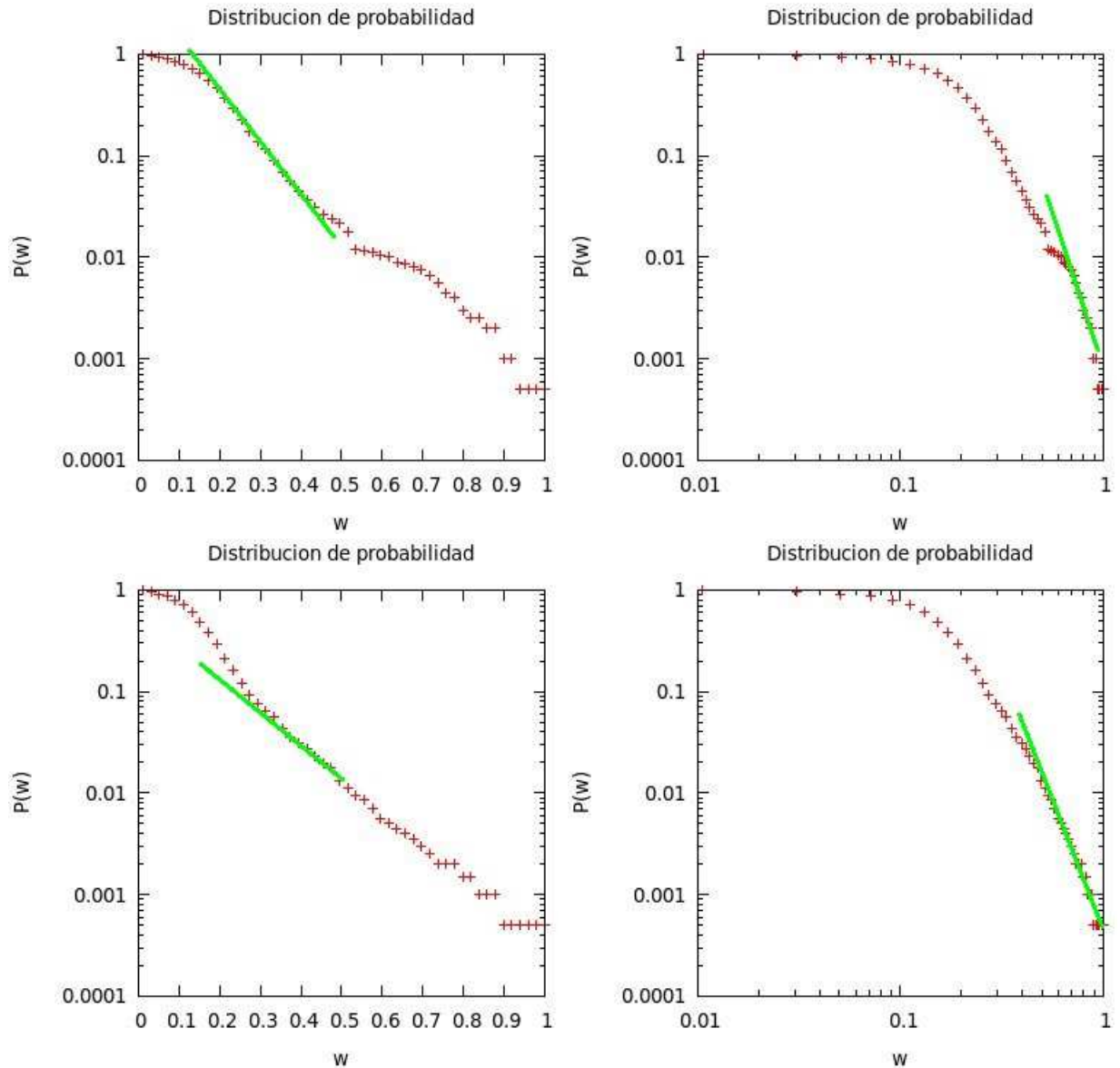


Figura 4.3. Distribuciones acumuladas de riqueza para la probabilidad de que ocurra el intercambio $p(k, l) = 1$ con $a = 0.2$ y 0.3 , de arriba a abajo. A la izquierda se observa, gracias a la escala log-normal de la imagen, que ambas presentan el comportamiento de una distribución de Boltzmann-Gibbs, mientras que en la imagen de la derecha, en escala log-log, podemos apreciar el comportamiento en forma de Pareto. Las líneas sólidas indican la porción de la distribución en la que se presentan tales comportamientos.

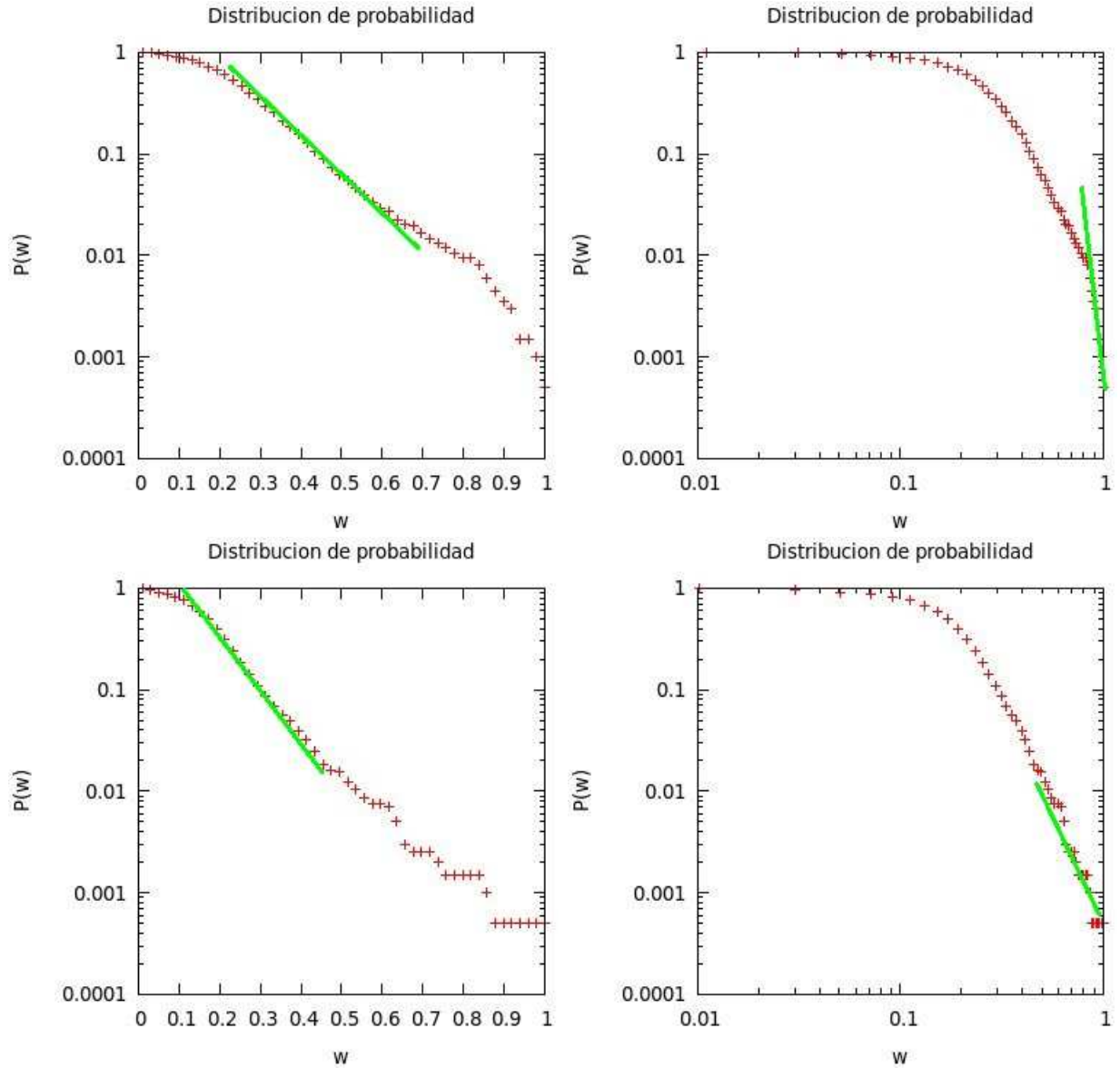


Figura 4.4. De arriba a abajo, se presentan las distribuciones acumuladas de riqueza obtenidas para $\alpha = 0.4$ y 0.5 en escalas log-normal (izquierda) y log-log (derecha). Puede observarse que muestran un comportamiento parecido a las obtenidas con $\alpha = 0.2$ y 0.3 .

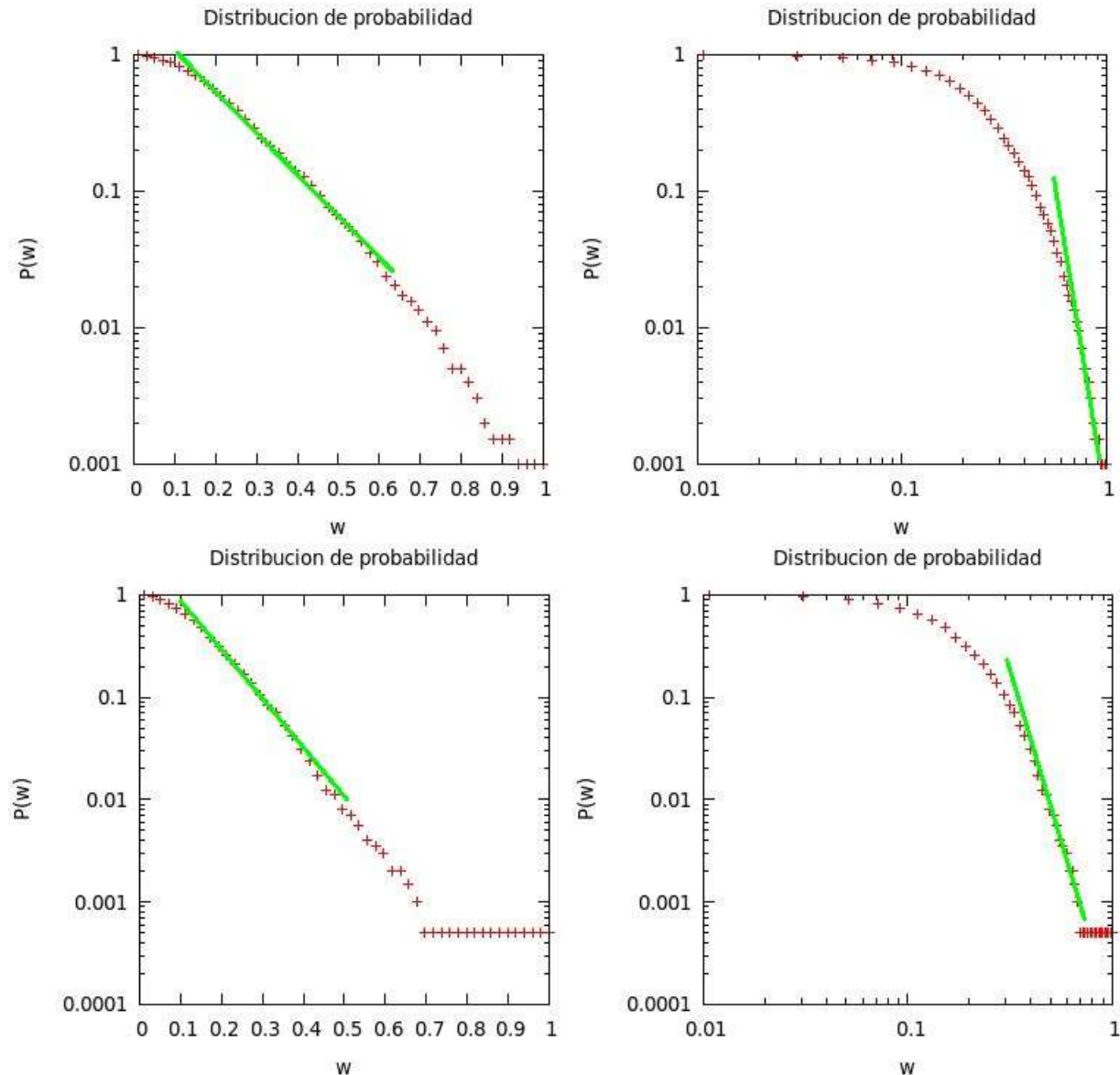


Figura 4.5. En las imágenes se muestran las distribuciones acumuladas de riqueza en escalas log-normal y log-log, izquierda y derecha respectivamente, obtenidas para los valores 0.6 (superior) y 0.7 (inferior) del parámetro α . Podemos observar que ambos regímenes, exponencial y de Pareto, en la distribución se encuentran más definidos que para valores más pequeños de α .

Es interesante corroborar que en todos los casos la porción de agentes distribuidos en forma de ley de potencias no supera el 10%, como ha sido encontrado para las distribuciones de riqueza en el Reino Unido (Figura 3.7) y de devoluciones de impuestos en EU (Figura 3.6) y que, de manera particular, se presenta para al rededor del 1% de la población, como fue mostrado en el análisis [44] del 1% más rico de la población en la India (Figura 3.1).

Además, en los casos que corresponden a los valores 0.6 y 0.7 del parámetro α (Figura 4.5) la tendencia hacia las distribuciones exponencial y de Pareto se presenta más definida

que para los anteriores (Figuras 4.3 y 4.4).

$$4.3.2 \quad p(k, l) = \frac{w_k + w_l}{w_{\max}}$$

En las siguientes figuras presentamos las distribuciones de riqueza que se obtienen de las simulaciones computacionales para el caso en el que la probabilidad de ocurrencia de la interacción entre un par de agentes dado toma la forma $p_1(k, l)$.

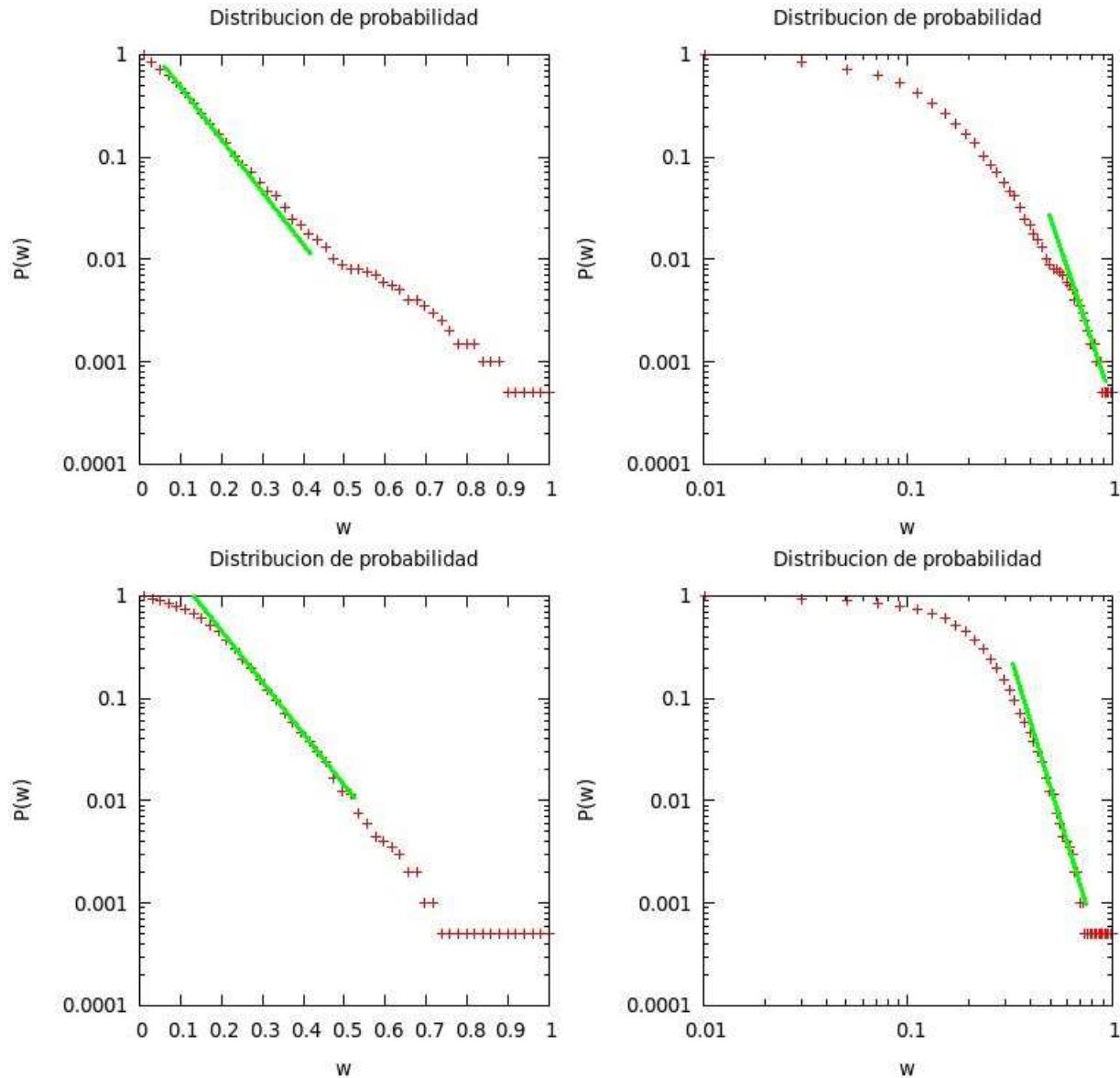


Figura 4.6. De arriba a abajo, y de izquierda a derecha, las imágenes corresponden a las distribuciones de riqueza obtenidas para cuando $p(k, l) = \frac{w_k + w_l}{w_{\max}}$, con $\alpha = 0.2$ y 0.3 en escalas log-normal y log -log, respectivamente. Las líneas sólidas en las imágenes de la izquierda evidencian el comportamiento exponencial y, en las de la derecha, el comportamiento de Pareto de nuestras distribuciones.

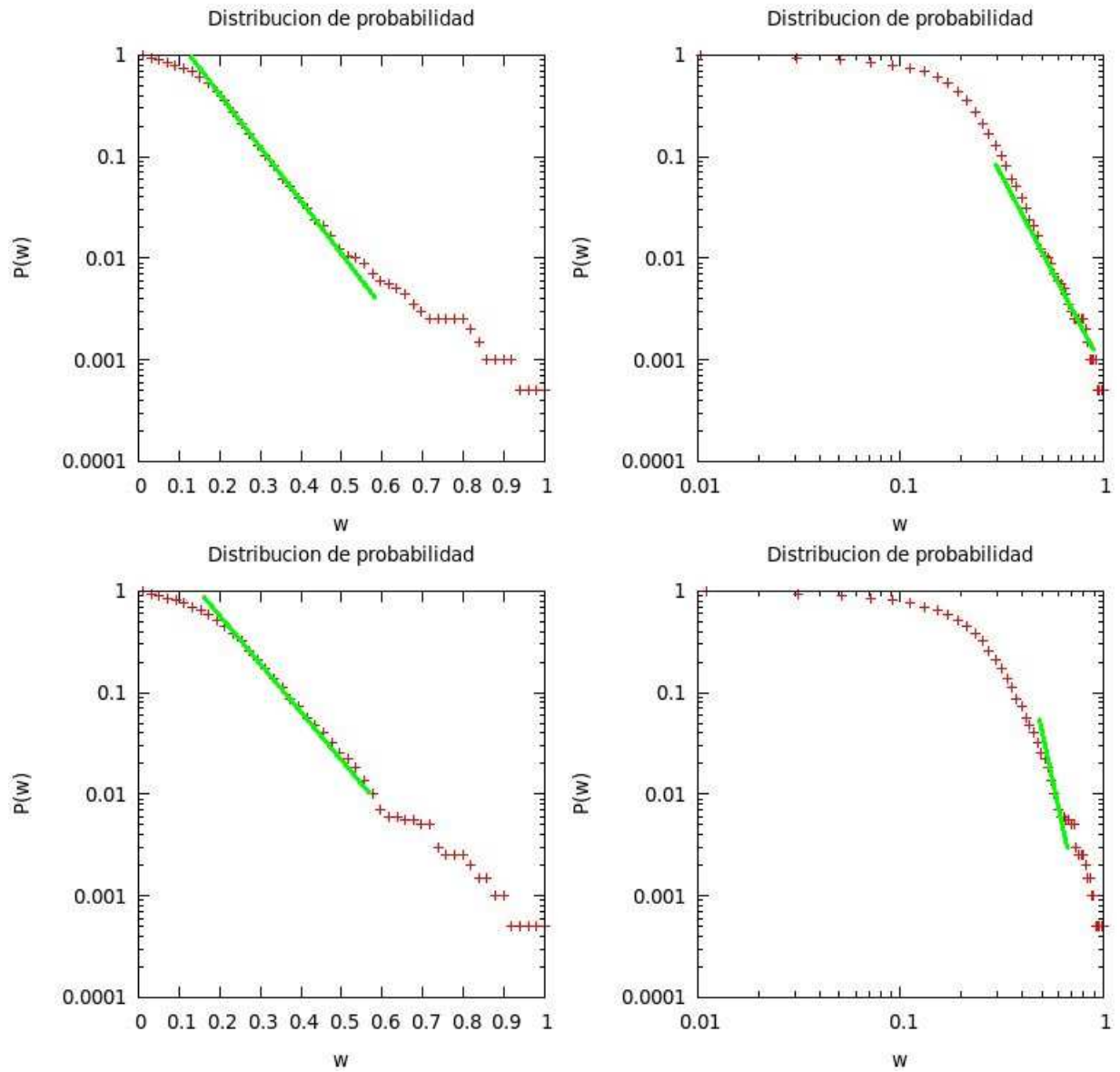


Figura 4.7. Las imágenes muestran los resultados obtenidos para $\alpha = 0.4$ y 0.5 con las mismas condiciones usadas en la Figura 4.6. Como en la anterior, obsérvese que las distribuciones reproducen de manera cualitativa las encontradas en las economías de distintos países.

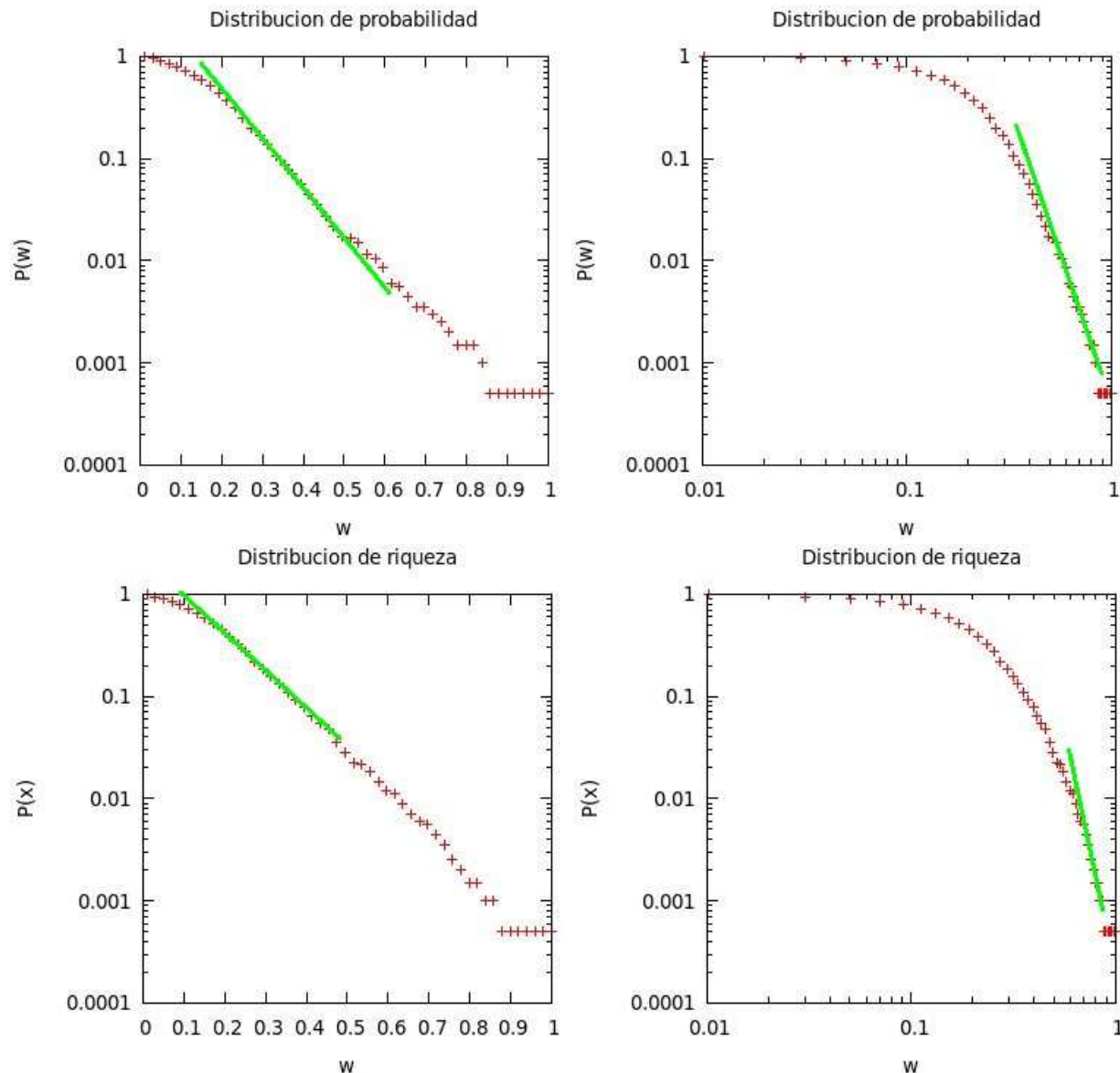


Figura 4.8. De la misma manera que en las Figuras anteriores, se observa que las distribuciones para los valores 0.6 y 0.7 del parámetro α reproducen los comportamientos en forma de ley de potencias para la porción más rica de la población mientras que el resto se ajusta a una forma exponencial.

Como se puede apreciar, emergen los mismos comportamientos, en el mismo rango de valores de α , que en el caso anterior. Ésto puede ser un indicador de que no es la forma en la que se evalúe la probabilidad de que se dé la interacción la que determina la aparición de las distribuciones de Boltzmann-Gibbs y de Pareto en el sistema, si no la dinámica definida por la «información» y la forma de calcular la cantidad intercambiada.

Además, las distribuciones obtenidas en este caso muestran una tendencia más marcada hacia dichos comportamientos que cuando la única condición para la interacción es la incapacidad de los agentes de contraer deuda (subsección anterior). Los resultados aquí mostrados sugieren que, a la par de que la probabilidad $p_1(k, l)$ induce un mayor número de

interacciones de los agentes con mayor riqueza, también refuerza la aparición de los regímenes mencionados.

$$4.3.3 \quad p(k, l) = \left(\frac{w_k + w_l}{w_{\max}} \right) \left(1 - \frac{d_{k,l}}{d_{\max}} \right)$$

Las Figuras que mostramos en esta subsección corresponden a una probabilidad $p_2(k, l)$ de que ocurra un intercambio. Cada una de ellas se presenta en el mismo formato que las de los casos anteriores y, como se podrá observar, los comportamientos que emergen son similares.

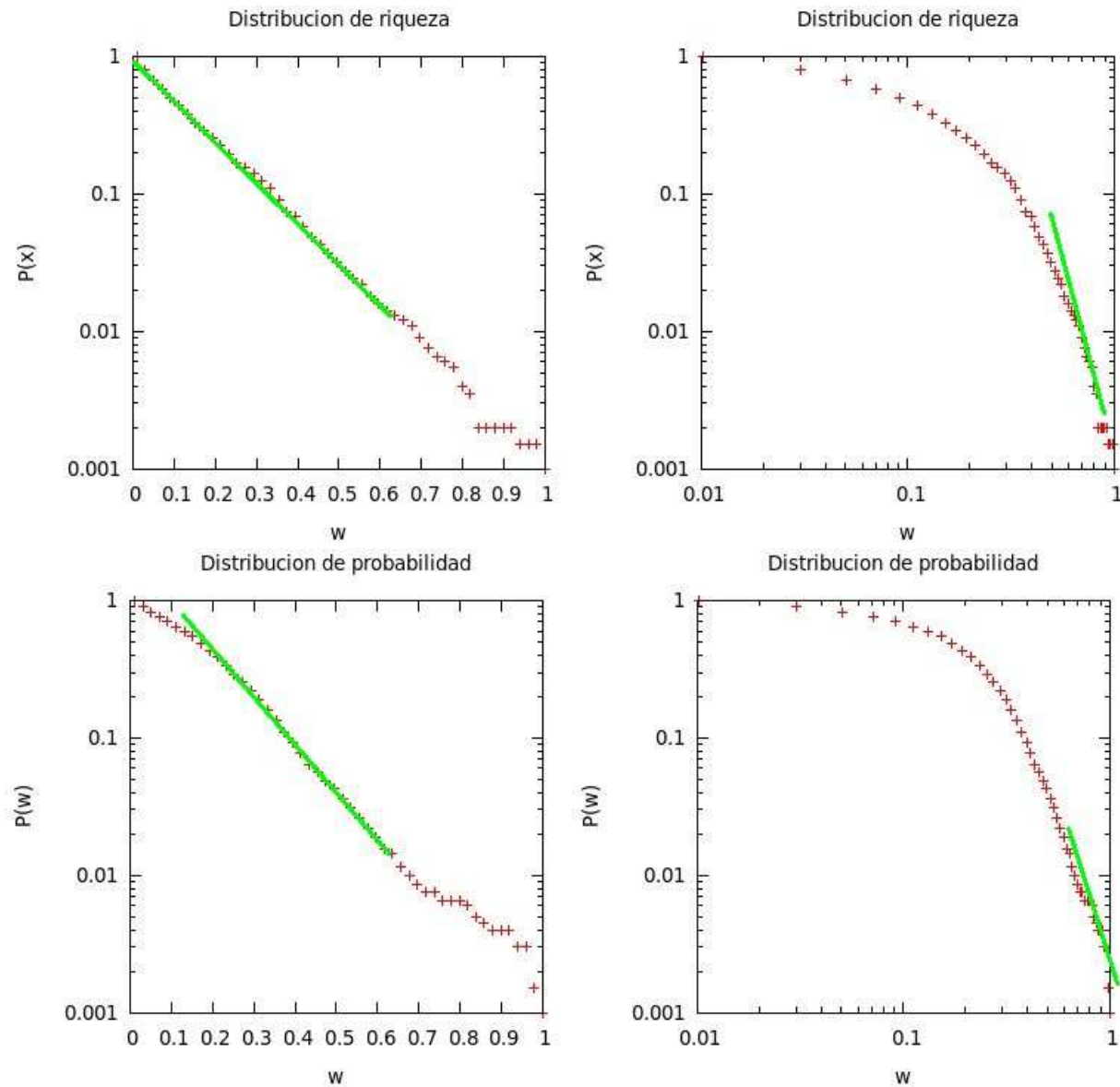


Figura 4.9. En las figuras se muestran las distribuciones de riqueza para $\alpha = 0.2$ (arriba) y 0.3 en escalas log-normal y log-log de arriba a abajo respectivamente. Observemos que los comportamientos de Boltzmann-Gibbs y Pareto aparecen en forma de una línea recta.

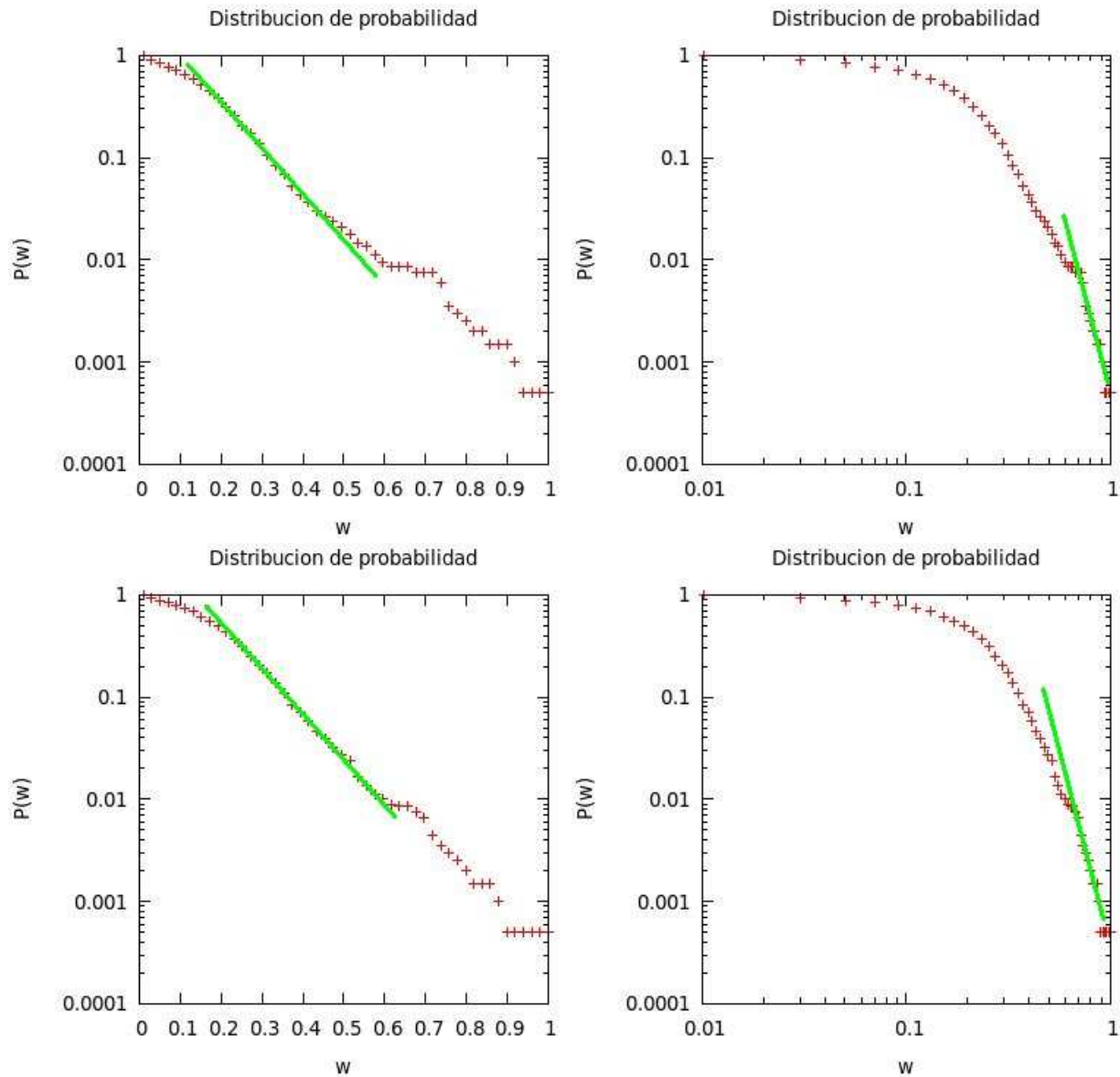


Figura 4.10. De arriba a abajo presentamos las distribuciones de riqueza correspondientes a $\alpha = 0.4$ y 0.5 . Podemos apreciar en las imágenes de la izquierda, en escala log-normal, que la distribución se comporta como la de Boltzmann-Gibbs y, en escala log-log, como la distribución de Pareto.

Los resultados mostrados en las Figuras 4.9, 4.10 y 4.11 confirman que la coexistencia de los regímenes de Boltzmann-Gibbs y de Pareto en las distribuciones de riqueza que se obtienen del modelo propuesto son el resultado del proceso de acumulación, ec. (4.4), atenuado a través de la forma en la que se calcula Δw , ec. (4.5).

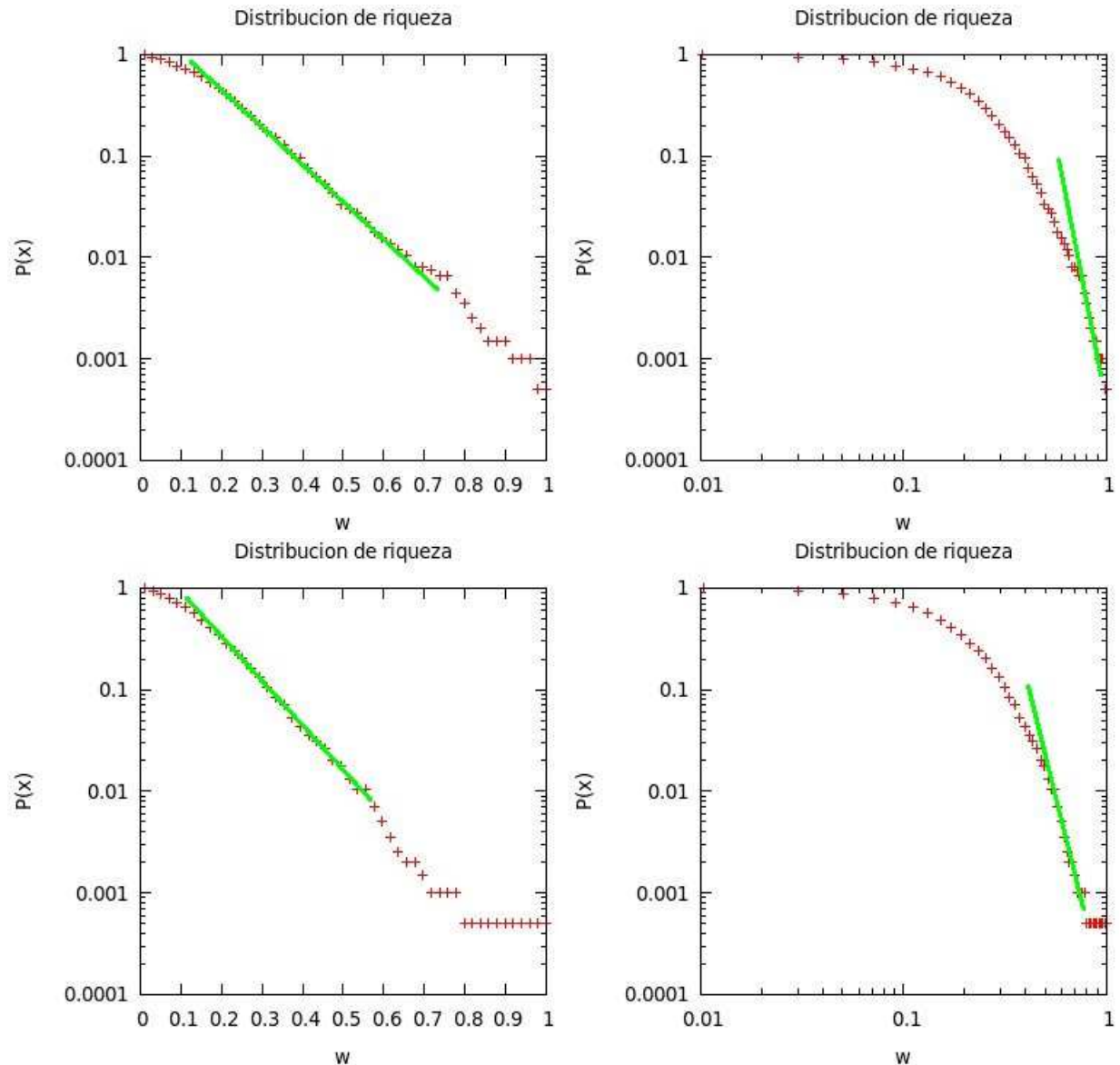


Figura 4.11. En las imágenes presentadas se puede observar que las distribuciones de riqueza para $\alpha = 0.6$ y 0.7 presentan los comportamientos de las distribuciones de Boltzmann-Gibbs y de Pareto en las escalas log-normal y log-log, a la izquierda y derecha respectivamente.

Los resultados que hemos mostrado en esta sección, aunque alentadores puesto que reproducen las distribuciones reales de la riqueza en diferentes países y épocas, no nos permiten determinar cuál de las formas elegidas para la probabilidad $p(k, l)$ de ocurrencia del intercambio es la más acertada, debido a que para todas ellas las distribuciones muestran comportamientos parecidos.

Entonces, para tener un criterio más que nos permita dilucidar tal cuestión, en la siguiente sección presentamos de manera breve el análisis de las distribuciones de grado que surgen

de las redes de intercambio.

4.4 Distribuciones de grado de la red de intercambios

Como mencionamos en la Sección 3.1, una de las propiedades que caracteriza a la red de intercambio global, o *World Trade Web* (WTW), es que pertenece a la categoría de redes libres de escala, donde la distribución de grado de la red es una distribución de Pareto (Figura 3.9). Sería deseable entonces que la red de intercambio de nuestro modelo presentara dicho comportamiento.

Debido a que cuando $\Delta w = \alpha|w_k - w_l|$ las distribuciones de riqueza reproducen los comportamientos reales, en las simulaciones presentadas en la sección anterior construimos la red de intercambio al considerar que los agentes en el sistema corresponden a los nodos en ella y los vínculos entre un par dado representan la existencia de al menos un intercambio entre ellos. Además, contabilizamos el número de interacciones individuales por agente.

En primera instancia, la Figura 4.12 muestra la distribución del número de interacciones cuando $\Delta w = \alpha|w_k - w_l|$ para algunos valores de α . Como se puede observar, tanto la forma de la probabilidad $p(k, l)$ como el valor de α modifican tal distribución. Cuando $p(k, l) = 1$ encontramos que las interacciones se distribuyen de manera uniforme para todos los valores de α .

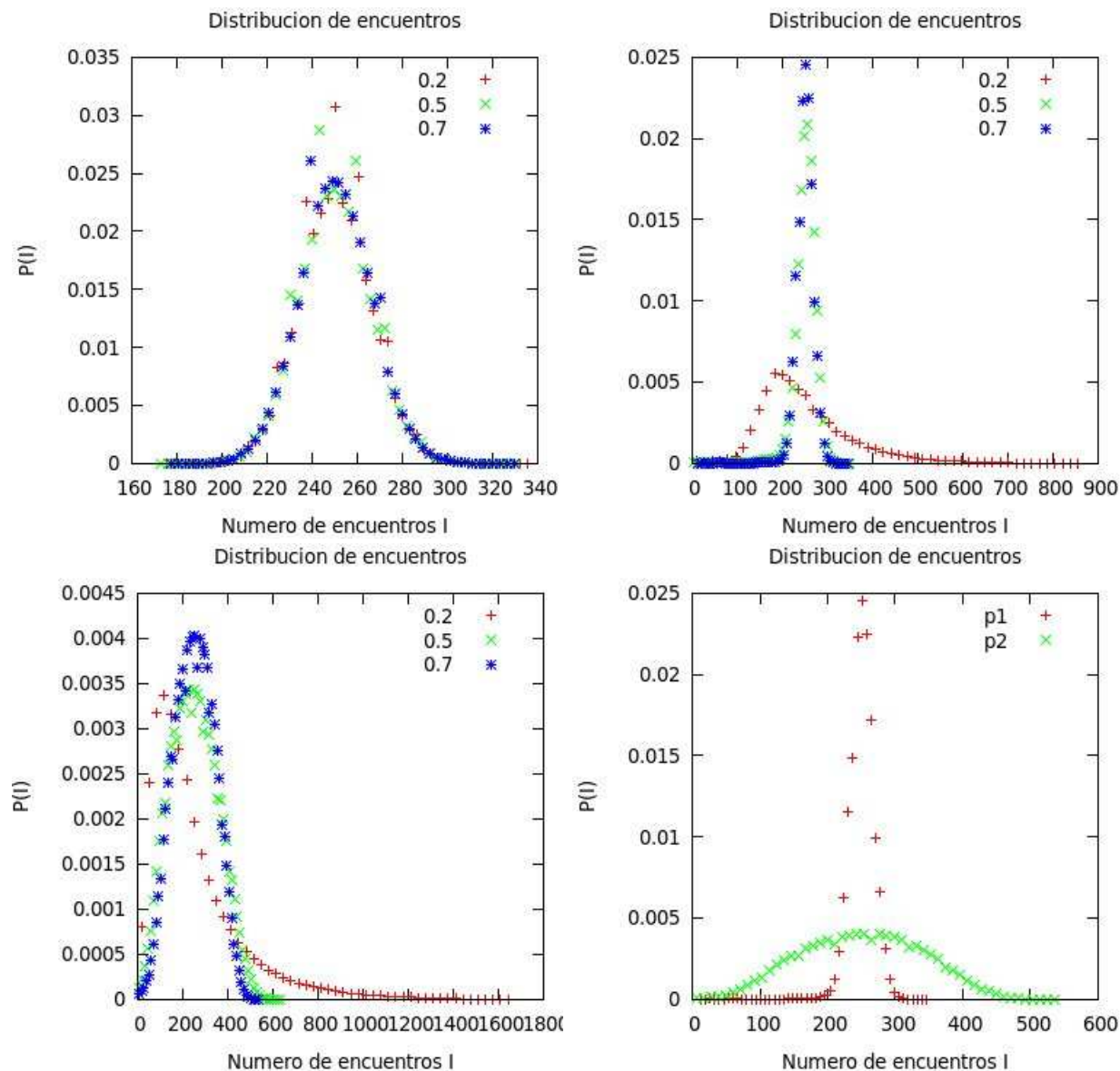


Figura 4.12. De izquierda a derecha y de arriba a abajo, las tres primera imágenes presentan las distribuciones del número de encuentros para los 3 diferentes casos presentados en la Sección 4.3, con $\alpha = 0.2, 0.5$ y 0.7 . Como puede observarse, las distribuciones dejan de ser uniformes cuándo se emplean las probabilidades p_1 y p_2 aunque, como puede apreciarse en la última figura, en el caso de p_2 las distribuciones tienden a volverse uniformes para valores altos de α .

Como era de esperarse, tanto para p_1 como para p_2 las distribuciones dejan de ser uniformes, debido a que ambas probabilidades dependen de la riqueza mutua permitiéndole a los agentes con mayor riqueza interactuar un mayor número de veces en cada simulación. Sin embargo, es interesante observar de la última imagen que en el segundo caso la distribución tiende a ser uniforme conforme el valor de α crece, no así para p_1 .

Por otro lado, al analizar las distribuciones de grado de la red de intercambios encontramos que en los casos considerados todos los agentes interactúan entre ellos, sin que exista

un solo par que no intercambie riqueza. Entonces, dado que en ninguna simulación las distribuciones de encuentro son homogéneas, obtuvimos las distribuciones de grado considerando un número de interacciones mínimo I_{\min} que deben satisfacer los pares de agentes para que se forme un vínculo entre ellos. En la Figura 4.13 se pueden observar las distribuciones de grado obtenidas para cuando $p(k, l) = 1$ y para diferentes valores de α .

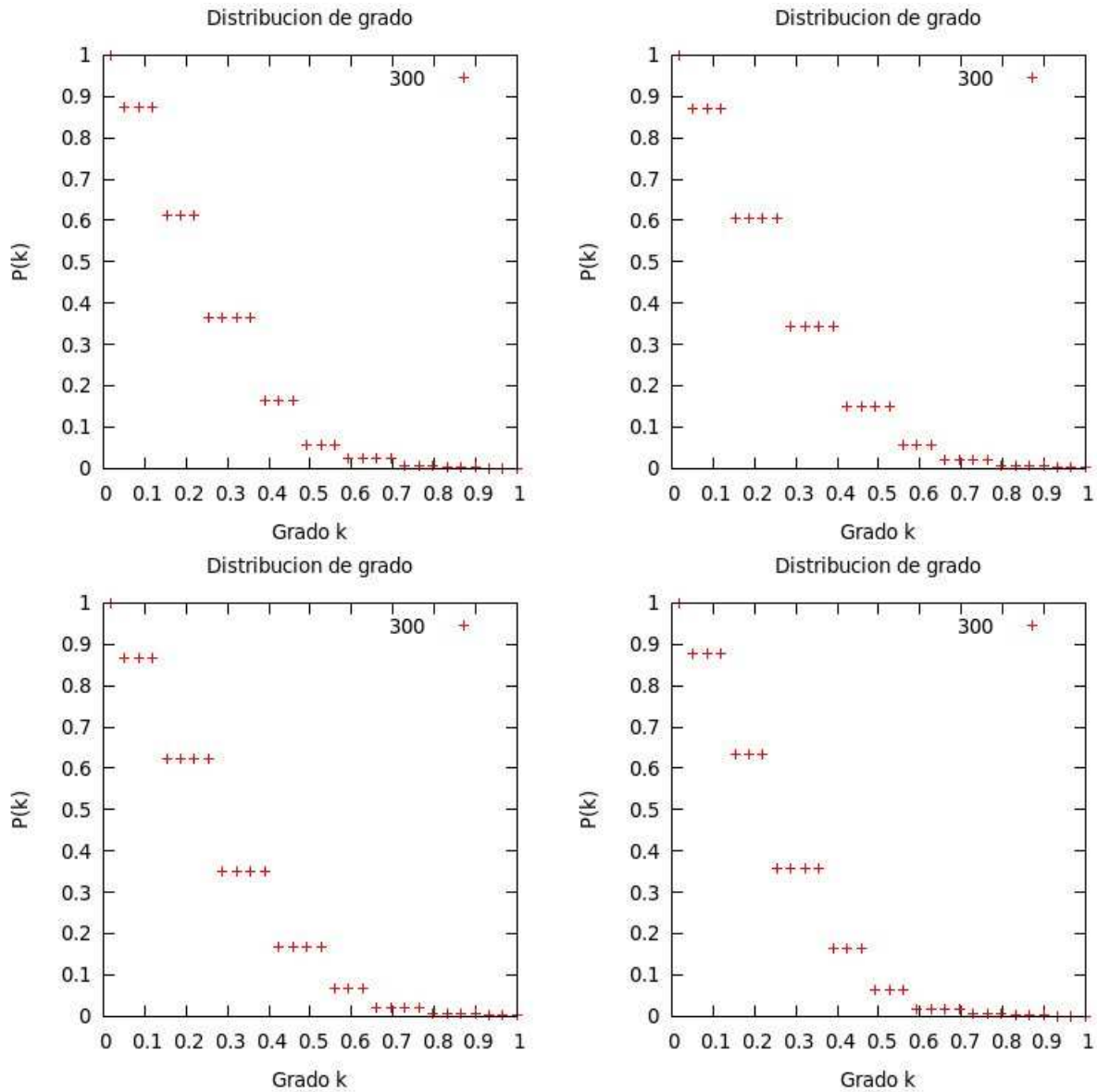


Figura 4.13. Las imágenes mostradas presentan las distribuciones de grado de la red de intercambios obtenidas en el caso en el que la probabilidad de ocurrencia de éstos es $p(k, l) = 1$. Nótese que no hay un comportamiento bien definido para ninguno de los valores de α presentados, que son 0.2, 0.4, 0.6 y 0.7 de izquierda a derecha y de arriba a abajo, aún y cuando se utiliza el umbral $I_{\min} = 300$ para discriminar vínculos.

Como se puede apreciar en la figura, aún al discriminar algunos vínculos no existe un comportamiento bien definido en las distribuciones de grado y, aún más, permanecen inalte-

radas con respecto al valor de α . Entonces, pareciera ser que, aunque permite la ocurrencia de distribuciones de riqueza que se asemejan a las reales, la imposibilidad de los agentes para contraer deuda no conduce, por si sola, a un comportamiento similar al encontrado en la WTW.

Ésto no sucede para los otros dos casos considerados en la sección anterior. La Figura 4.14 muestra los resultados obtenidos con la probabilidad p_1 para diferentes valores de α y del umbral I_{\min} ,

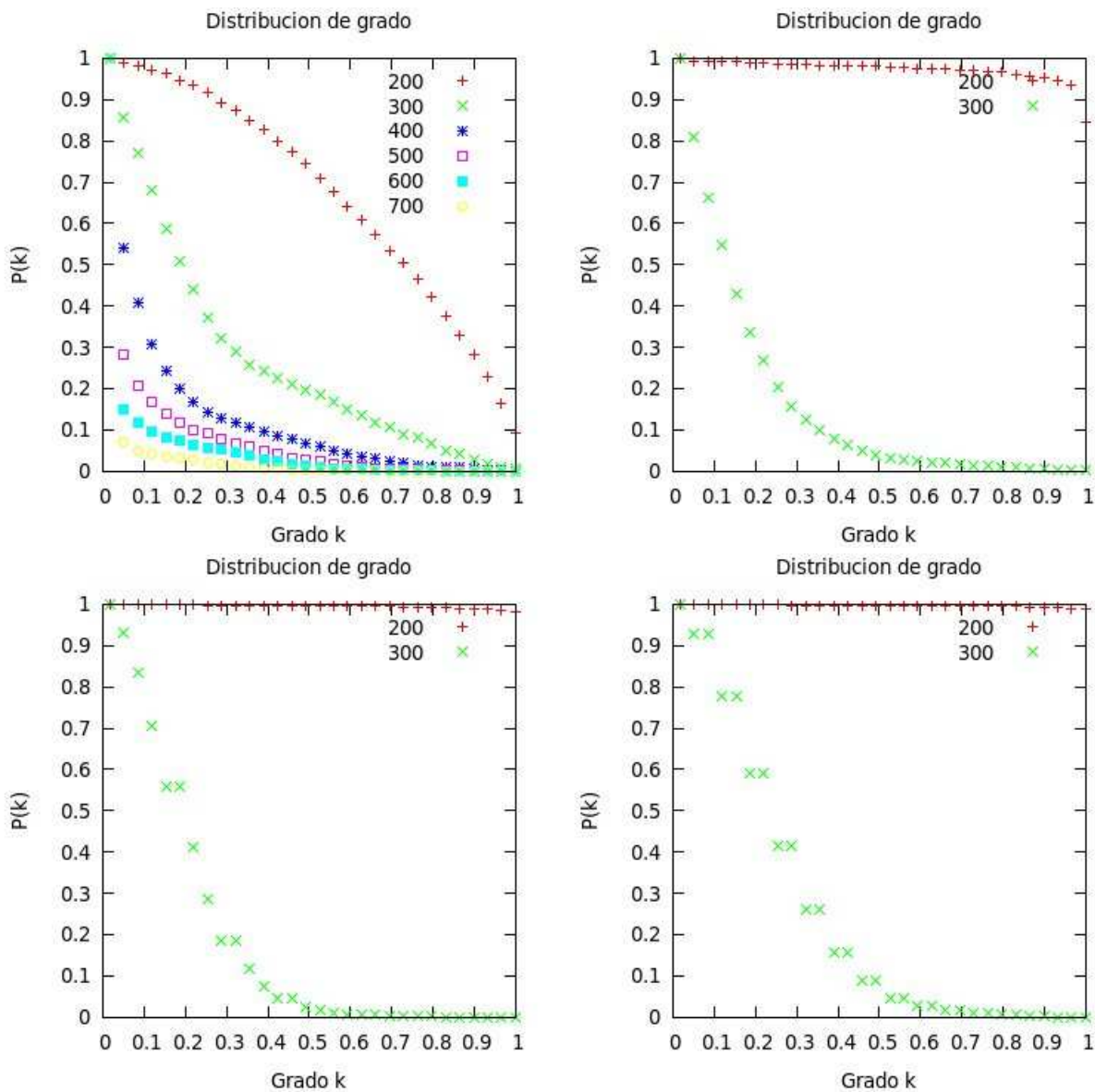


Figura 4.14. En las imágenes presentadas se muestran las distribuciones de grado de la red de intercambios para cuando $p(k, l) = \frac{w_k + w_l}{w_{\max}}$. De izquierda a derecha y de arriba a abajo los valores correspondientes de α son 0.2, 0.4, 0.6 y 0.7.

Por un lado, podemos apreciar que a medida que el valor de I_{\min} crece cambia la forma en la que se comporta la distribución de grado de la red, de una tendencia cada vez más decreciente con respecto al grado a distribuciones que decaen de manera parecida a las de Boltzmann-Gibbs y de Pareto. Por otro lado, es notorio que se aprecia mejor dicho comportamiento conforme crece el valor de α aunque, en concordancia con las distribuciones de encuentros, disminuye el número máximo de encuentros por agente y, por lo tanto, el número de agentes cuyas interacciones sobrepasan el umbral I_{\min} .

Para determinar, al menos de manera cualitativa, si las distribuciones de grado corresponden a una de Boltzmann-Gibbs o a una de Pareto, en la Figura 4.15 presentamos en escala log-log los histogramas que corresponden a algunos valores de α obtenidos con la probabilidad p_1 . Obsérvese que en este caso emerge el comportamiento en forma de ley de potencias inversa (Pareto) al aplicar el umbral definido por I_{\min} .

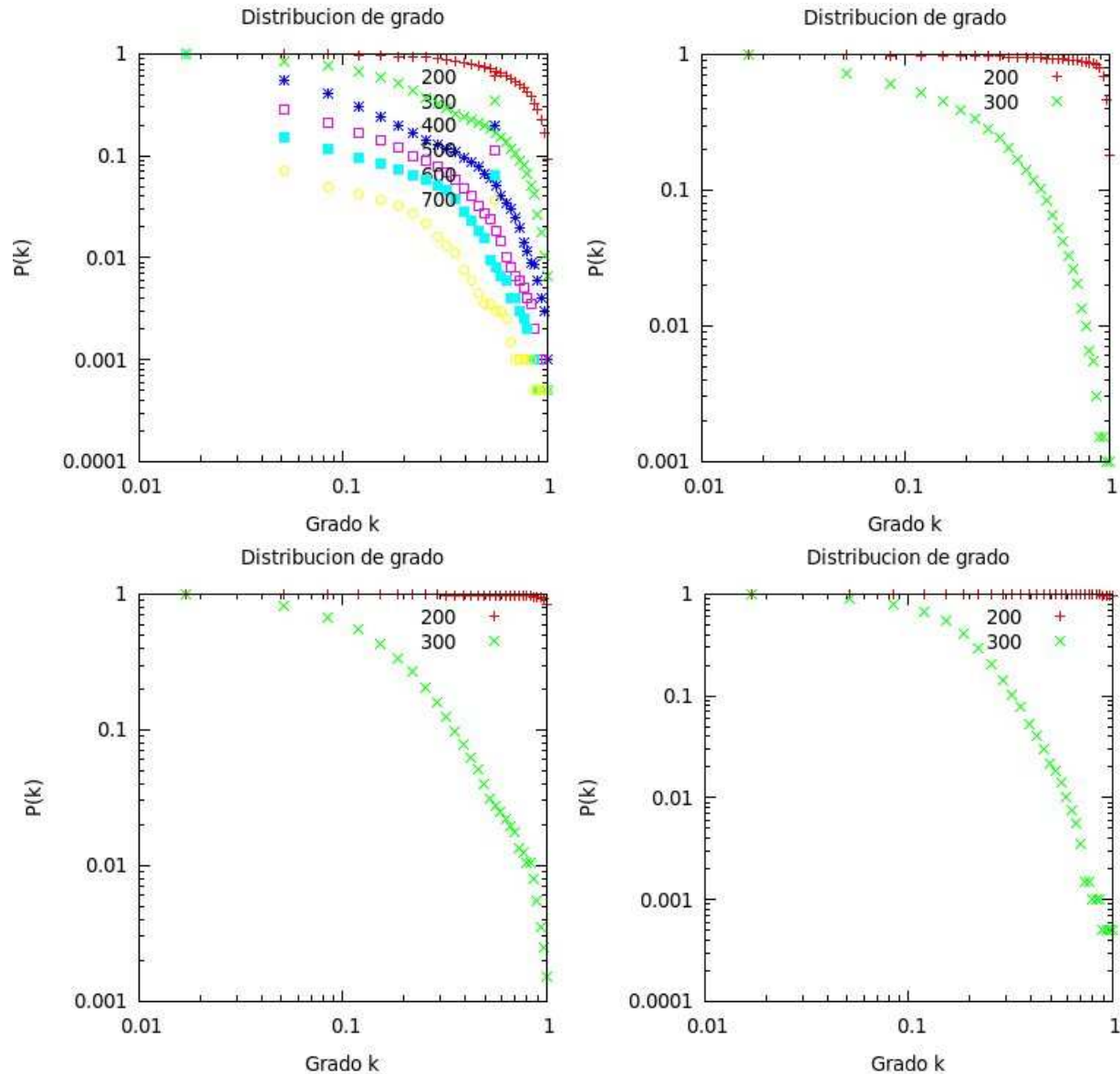


Figura 4.15. En las imágenes se puede observar que los valores de $\alpha = 0.2, 0.3, 0.4$ y 0.5 reproducen distribuciones de grado que presentan un comportamiento de Pareto para valores de $I_{\min} = 300$. Obsérvese, además, que de acuerdo a las distribuciones de encuentro los umbrales para las últimas tres discriminan la mayor parte de los vínculos en la red.

Sin embargo, en el caso en que la probabilidad de ocurrencia del intercambio es p_1 , es a partir de $I_{\min} = 300$ cuándo se comienza a presentar el comportamiento esperado. Desafortunadamente, de acuerdo con las distribuciones de encuentros, para este valor estamos discriminando la mayor parte de los vínculos de la red, por lo que tal comportamiento pudiera ser marginal en el modelo que construimos.

Ésto no es así para las distribuciones de grado cuándo consideramos en el modelo a p_2 . Como puede observarse en la Figura 4.16, la ley de potencias se presenta para valores de I_{\min} cercanos al valor medio de encuentros en la distribución correspondiente de la Figura 4.12,

de tal manera que aproximadamente la mitad de los vínculos de la red original permanezcan en el subgrafo analizado.

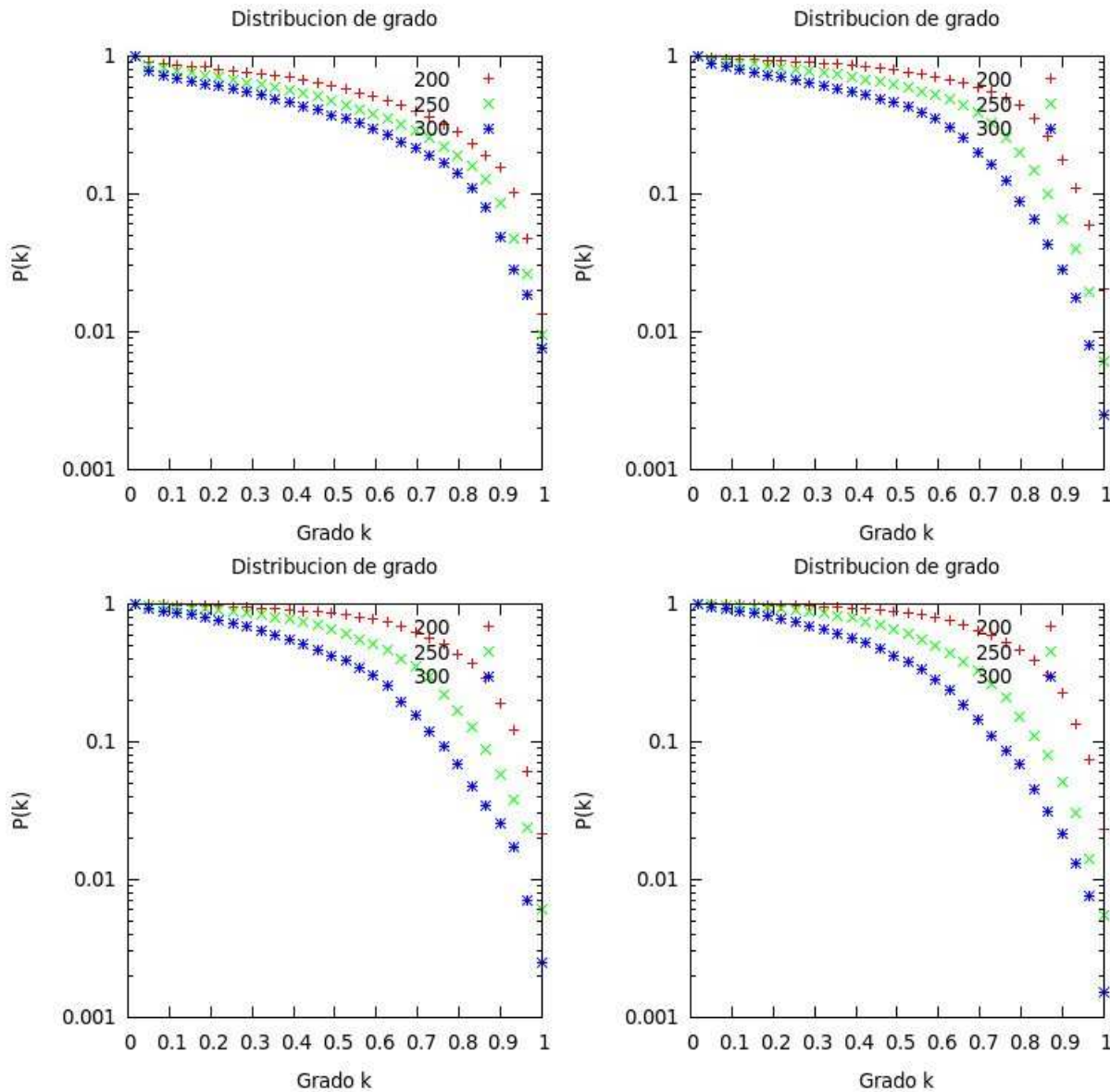


Figura 4.16. De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran las distribuciones de grado de las redes de intercambio que surgen al considerar que la probabilidad de ocurrencia es $p(k, l) = \left(\frac{w_k + w_l}{w_{\max}}\right) \left(1 - \frac{d_{k,l}}{d_{\max}}\right)$. Podemos notar que los valores del umbral I_{\min} que se usan se encuentran cerca del valor medio de encuentros durante la simulación numérica.

Las distribuciones de riqueza de la Sección 4.3.3 junto con las de grado de la Figura 4.16 nos indican que la probabilidad p_2 permite la ocurrencia de las características estadísticas reales del fenómeno de intercambio económico: una red de intercambio libre de escala y los regímenes de Boltzmann-Gibbs y de Pareto en la distribución de riqueza entre los agentes.

Capítulo 5

Conclusiones

En primer lugar, queremos recalcar que el objetivo de la presente tesis es reproducir de manera cualitativa algunas de las características que muestra el fenómeno de intercambio de riqueza: la combinación de los comportamientos de Boltzmann-Gibbs y de Pareto en la distribución de riqueza y una distribución de grado de la red de intercambios en forma de Pareto (Sección 3.1).

Con ésto en mente, construimos un modelo conservativo donde los agentes en el sistema no pueden contraer deudas y en los que no importa el tipo de bienes intercambiado. Como detallamos en la Sección 3.2.1, tales modelos han sido estudiados tanto desde la perspectiva de la Física como de la Economía, y se ha reportado que las distribuciones de riqueza o bienes que emergen de ellos se comportan como la distribución de Boltzmann-Gibbs, incluso cuando se permite la existencia de deuda (Sección 3.2.2).

Por lo tanto, introducimos en el modelo una restricción a la ocurrencia del intercambio en la forma de las probabilidades (4.3) que dependen tanto de propiedades individuales o mutuas de los agentes, las riquezas individuales w_k y w_l en ambas y la distancia entre agentes $d_{k,l}$ en p_2 , como de propiedades del entorno en el que tiene lugar el intercambio, la riqueza w_{\max} y distancia (d_{\max}) máximas. Pudimos observar de las simulaciones presentadas en las Figuras 4.1 y 4.2 que tales probabilidades modifican las distribuciones de riqueza manteniendo, en un cierto rango, su comportamiento de Boltzmann-Gibbs pero sin que se acercaran a las distribuciones reales.

Es entonces cuando incorporamos en el sistema la capacidad de los agentes de influir en el resultado de sus interacciones, a través de la «información» que poseen, mediante la expresión (4.4) que define la probabilidad de que un agente gane el intercambio y, por lo tanto, de aumentar la cantidad de información que tiene. Pudimos comprobar que, como se argumentó en la Sección 4.1, tal probabilidad aleja a las distribuciones de riqueza del comportamiento real conduciéndolas a una súper acumulación de la riqueza del sistema (Figura 4.2) en manos de un único agente.

Para evitar la acumulación desmedida propusimos que la cantidad que se intercambia en cada interacción depende del par de agentes elegido y de un parámetro global α del sistema que puede interpretarse como la disposición al riesgo de los agentes, de tal manera que la frecuencia con que ocurran intercambios entre individuos con riquezas similares sea mayor que entre individuos con una gran diferencia entre sus riquezas, debido a que la cantidad Δw debe ser siempre menor que el capital del agente que «pierde» en el intercambio.

Interesantemente, la combinación de la probabilidad dependiente de la información (4.4) con la cantidad de riqueza que se intercambia (4.5) resultan en distribuciones que reproducen en buena medida aquellas que se observan en la realidad para todos los casos considerados, como se mostró en las Figuras de la Sección 4.3. Tales resultados sugieren que las condiciones (4.4) y (4.5) son suficientes para que emerja el comportamiento buscado, sin que la elección de la probabilidad de ocurrencia del intercambio afecte notablemente las distribuciones de riqueza.

Por otro lado, a través del análisis de la red de intercambios que realizamos en la Sección 4.4 encontramos que todos los pares posibles de agentes en el sistema han intercambiado riqueza en al menos una ocasión o, dicho de otra manera, la red está completamente conectada. Entonces, incorporamos un valor umbral de encuentros I_{\min} a partir del cual se forma un vínculo entre dos agentes, lo que nos permitió estudiar la topología de la red tomando en cuenta las interacciones que ocurrían con mayor frecuencia.

De esta manera, los resultados obtenidos mostraron que solamente en los casos en los que se usaban las probabilidades p_1 y p_2 emergía la distribución de Pareto en las distribuciones de grado (Figuras 4.15 y 4.16) de la red. Sin embargo, al cotejar dichas distribuciones con las correspondientes de encuentros, encontramos que para p_1 el valor umbral que evidencia el régimen de Pareto discrimina a la mayor parte de los vínculos en la red, lo que parece indicar que no es un comportamiento característico de la red generada con tal probabilidad.

En el caso en el que se usó la probabilidad p_2 (Figura 4.16), hallamos el comportamiento buscado en las distribuciones de grado para valores de I_{\min} cercanos al valor medio de encuentros entre agentes, con lo que estamos considerando a aproximadamente la mitad de los vínculos originales en la red. Por lo tanto, estamos ante un comportamiento que sí es propio de la dinámica del modelo que proponemos y que parece emerger de considerar que la ocurrencia del intercambio depende no sólo de la riqueza de los participantes si no también de la distancia que los separa (la segunda de las ecuaciones 4.3).

Los resultados obtenidos apuntan a que la dinámica descrita por la expresión p_2 para la ocurrencia del intercambio junto con la forma (4.5) de la cantidad intercambiada en cada interacción y la preferencia en el ganador (4.4) es la que reproduce de mejor manera las distribuciones de grado y riqueza que se observan en diferentes países y épocas. Queda, sin embargo, mucho trabajo por hacer para que nuestro modelo represente de manera fiel los procesos globales e individuales que subyacen al fenómeno del intercambio de riqueza.

Dentro de los diversos factores que pueden incorporarse están la capacidad de contraer deuda y de crear riqueza, ya sea a través de entidades como los bancos o a través de la producción de materias primas, la aversión al riesgo de los agentes al considerar que el parámetro α puede ser una función de la información local y global del sistema que posean los agentes, la movilidad de ellos y la capacidad de establecer sociedades o redes de cooperación y estructuras que representen políticas públicas que limiten o promuevan el intercambio, entre muchos otros. Sin embargo, estas extensiones ameritan un trabajo posterior.

Bibliografía

- [1] H. E. Stanley, V. Afanasyev, L. A. N. Amaral, S. V. Buldyrev, A. L. Goldberger, S. Havlin, H. Leschhorn, P. Maass, R. N. Mantegna, C.-K. Peng, P. A. Prince, M. A. Salinger, M. H. R. Stanley, and G. M. Viswanathan. Anomalous fluctuations in the dynamics of complex systems: from DNA and physiology to econophysics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 224:302–321, 1996.
- [2] J. P. Sethna. volume 14. Oxford University Press, 2006.
- [3] Denis Boyer et al. Scale-free foraging by primates emerges from their interaction with a complex environment. *Proceedings of The Royal Society B*, (273):1743–1750, 2006.
- [4] C. Folke, T. Hahn, P. Olsson, and J. Norberg. Adaptive governance of social-ecological systems. *Annu. Rev. Environ. Resour.*, 30:441–473, 2005.
- [5] S. L. Pimm. The complexity and stability of ecosystems. *Nature*, 307(5949):321–326, 1984.
- [6] S. A. Levin. Ecosystems and the biosphere as complex adaptive systems. *Ecosystems*, 1(5949):431–436, 1998.
- [7] D. S. Byrne. Psychology Press, 1998.
- [8] C. S. Holling. Understanding the complexity of economic, ecological, and social systems. *Ecosystems*, 4(5949):390–405, 2001.
- [9] R. M. Diaz and L. E. Berk. Psychology Press, 2014.
- [10] G. Nicolis and C. Nicolis. World Scientific, 2012.
- [11] D. Rigney. Columbia University Press, 2010.
- [12] M. W. Telfer, R. M. Bailey, S. L. Burrough, A. E. S. Stone, D. S. G. Thomas, and G. S. F. Wiggs. Understanding linear dune chronologies: insights from a simple accumulation model. *Geomorphology*, 120(3):195–208, 2010.
- [13] M. Weigl, S. Hornung, S. K. Parker, R. Petru, J. Glaser, and P. Angerer. Work engagement accumulation of task, social, personal resources: A three-wave structural equation model. *Journal of Vocational Behavior*, 77(1):140–153, 2010.
- [14] S. Blower and M. H. Go. The importance of including dynamic social networks when modeling epidemics of airborne infections: does increasing complexity increase accuracy? *BMC medicine*, 9(1):88, 2011.
- [15] G. Z. Zeng, L. S. Chen, and L. H. Sun. Complexity of an SIR epidemic dynamics model with impulsive vaccination control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 26(273):495–505, 2005.
- [16] B. M. Bolker and B. T. Grenfell. Chaos and biological complexity in measles dynamics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences*, 251(1330):75–81, 1993.
- [17] M. Mitchell. 2009.
- [18] N. Bacaer. Springer-Verlag London Limited, 2011.
- [19] J. von Hardenberg, E. Meron, M. Shachack, and Y. Zarmi. Diversity of vegetation patterns and desertification. *Physical Review Letters*, 87(19):198101, 2001.
- [20] S. F. Railsback and V. Grimm. *Railsback, S. F., & Grimm, V. (2011). Agent-based and individual-based modeling: a practical introduction*. Princeton University Press, 2011.

- [21] L. Hamill and L. Gilbert. Simulating Large Social Networks In Agent-Based Models: A Social Circle Model. *Emergence: Complexity & Organization*, 12(4), 2010.
- [22] M. Franz and C. L. Nunn. Network-based diffusion analysis: a new method for detecting social learning. *Proceedings of the Royal Society B*, 276(1663):1829–1836, 2009.
- [23] T. C. Schelling. Dynamic models of segregation. *Economic Review, Papers and Proceedings of the Journal of Mathematical Sociology*, 1(2):143–186, 1971.
- [24] R. Pancs and N. J. Vriend. Schelling’s spatial proximity model of segregation revisited. *Journal of Public Economics*, 91:1–24, 2007.
- [25] A. Shinirifard, J. S. Gens, B. L. Zaitlen, N. J. Poplawski, M. Swat, and A. J. Glazier. 3D Multi-Cell Simulation of Tumor Growth and Angiogenesis. *PLoS ONE*, 4(10), 2009.
- [26] D. G. Brown and D. T. Robinson. Effects of Heterogeneity in Residential Preferences on an Agent-Based Model of Urban Sprawl. *Ecology and Society*, 2006.
- [27] M. Catani and D. M. Ffytche. The rises and falls of disconnection syndromes. *Brain*, 128(10):2224–2239, 2005.
- [28] J. H. Barnett. Early writings on graph theory: Euler circuits and the Königsberg bridge problem. In *Resources for Teaching Discrete Mathematics: Classroom Projects, History Modules, and Articles*. Mathematical Association of America, 2009.
- [29] N. Biggs. *Algebraic graph theory*. Cambridge University Press, 1993.
- [30] L. Shields. Cultural topology: The seven bridges of Königsburg, 1736. *Theory, Culture & Society*, 29(4-5):43–57, 2012.
- [31] J. Travers and S. Milgram. An experimental study of the small world problem. *Sociometry*, pages 425–443, 1969.
- [32] Q. Chen, H. Chang, R. Govindan, S. Jamin, S. J. Shenker, and W. Willinger. The origin of power laws in Internet topologies revisited. IEEE Computer Society, 2002.
- [33] M. E. Newman. Scientific collaboration networks. I. Network construction and fundamental results. *Physical review E*, 64(1):016131, 2001.
- [34] M. Ripeanu, I. Foster, and A. Iamnitchi. Mapping the gnutella network: Properties of large-scale peer-to-peer systems and implications for system design. *IEEE Internet Computing*, 6:50–57, 2002.
- [35] D. J. Watts and S. H. Strogatz. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393(6684):440–442, 1998.
- [36] L. A. N. Amaral, A. Scala, M. Barthelemy, and H. E. Stanley. Classes of small-world networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 97(21):11149–11152, 2000.
- [37] F. Liljeros, C. R. Eding, and L. A. N. Amaral. Sexual networks: implications for the transmission of sexually transmitted infections. *Microbes and Infection*, 5(2):189–196, 2003.
- [38] H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z. N. Oltvai, and A. L. Barabási. The large-scale organization of metabolic networks. *Nature*, 407(6804):651–654, 2000.
- [39] S. Redner. How popular is your paper? An empirical study of the citation distribution. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 4(2):131–134, 1998.
- [40] E. Bullmore and O. Sporns. Complex brain networks: graph theoretical analysis of structural and functional systems. *Nature Reviews Neuroscience*, 10(3):186–198, 2009.
- [41] L. A. N. Amaral and J. M. Ottino. Complex Networks. Augmenting the framework for the study of complex systems. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 38:147–162, 2004.
- [42] V. M. Yakovenko and J. B. Rosser Jr. Colloquium: Statistical mechanics of money, wealth, and income. *Reviews of Modern Physics*, 81, 2009.

- [43] V. Pareto. *Cours d'Économie Politique*. <(3)51>L'Université de Lausanne, 1897.
- [44] A. Jayadev. A power law tail in India's wealth distribution: Evidence from survey data . *Physica A*, (387):270–276, 2008.
- [45] G. Hegyi, Z. Nédá, and M. A. Santos. Wealth distribution and Pareto's law in the Hungarian medieval society. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 380:271–277, 2007.
- [46] A. A. Dragulescu and V. M. Yakovenko. Evidence for the exponential distribution of income in the USA. *The European Physical Journal B*, (20):585–589, 2001.
- [47] A. Banerjee, V. M. Yakovenko, and T. Di Matteo. A study of the personal income distribution in Australia . *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 307(1):54–59, 2006.
- [48] A. A. Dragulescu and V. M. Yakovenko. Exponential and power-law probability distributions of wealth and income and power-law probability distributions of wealth in the United Kingdom and the United States. *Physica A*, 299:213–221, 2001.
- [49] P. L. Garrido and J. Marro, editors. *Statistical mechanics of money, income, and wealth: a short survey*, number 661, 2003.
- [50] A. C. Silva and V. M. Yakovenko. Temporal evolution of the 'thermal' and 'superthermal' income classes in the USA during 1983–2001. *Europhysics Letters*, 64:304–310, 2005.
- [51] A. Banerjee. *Studies of Complex Systems in Condensed Matter Physics and Economics*. PhD thesis, 2008.
- [52] X. Li, Y. Ying Jin, and G. Che. Complexity and synchronization of the world trade web. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 328(1):287–296, 2003.
- [53] A. A. Dragulescu and V. M. Yakovenko. Statistical mechanics of money. *The European Physical Journal B*, 17:723–729, 2000.
- [54] N. Kiyotaki and R. Wright. A search-theoretic approach to monetary economics. *The American Economic Review*, 83:63–77, 1993.
- [55] M. Molico. The distribution of money and prices in search equilibrium. *International Economic Review*, 47:701–722, 2006.
- [56] C. W. Cobb and P. H. Douglas. A Theory of Production. *The American Economic Review*, 18:139–165, 1928.
- [57] C. W. Cobb and P. H. Douglas. Are there Laws of Production? *The American Economic Review*, 380:1–41, 1948.
- [58] D. Braun. Assets and liabilities are the momentum of particles and antiparticles displayed in Feynman-graphs. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 290:491–500, 2001.
- [59] R. Fischer and D. Braun. Transfer potentials shape and equilibrate monetary systems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 321:605–618, 2003.
- [60] N. Xi, N. Ding, and Y. Wang. How required reserve ratio affects distribution and velocity of money. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 357(3):543–555, 2005.
- [61] C. R. McConnell and S. L. Brue.
- [62] S. Keen. Finance and economic breakdown: Modeling Minsky's 'financial instability hypothesis'. *Journal of Post Keynesian Economics*, pages 607–635, 1995.
- [63] W. A. Barnett. The nonlinear economics of debt deflation. In *Commerce, complexity, and evolution: topics in economics, finance, marketing, and management: proceedings of the Twelfth International Symposium in Economic Theory and Econometrics*, number 12. Cambridge University Press, 2000.
- [64] P. Cockshott and A. Cottrell. Probabilistical political economy and endogenous money. 2008.
- [65] S. Ispolatov, P. L. Krapivsky, and S. Redner. Wealth distributions in asset exchange models. *The European Physical Journal B*, 2(2):267–276, 1998.

- [66] J. Angle. The surplus theory of social stratification and the size distribution of personal wealth. *Social Forces*, 65(2):293–326, 1986.
- [67] J. Angle. The inequality process and the distribution of income to blacks and whites. *Journal of Mathematical Sociology*, 17(1):77–98, 1992.
- [68] J. Angle. Deriving the size distribution of personal wealth from “the rich get richer, the poor get poorer”. *The Journal of mathematical sociology*, 18(1):27–46, 1993.
- [69] J. Angle. The Statistical Signature of Pervasive Competition on Wage and Salary Incomes. *Journal of Mathematical Sociology*, 26(4):217–270, 2002.
- [70] J. Angle. The Inequality Process as a wealth maximizing process. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 367:388–414, 2006.
- [71] A. Chakraborti and B. K. Chakrabarti. Statistical mechanics of money: how saving propensity affects its distribution. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 17(1):167–170, 2000.
- [72] A. Chatterjee, B. K. Chakrabarti, and S. S. Manna. Pareto law in a kinetic model of market with random saving propensity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 335(1):155–163, 2004.
- [73] I. Takashi. Wealth distribution on complex networks. *Physical review E*, 86:066115, 2012.
- [74] J.-P. Bouchaud and M. Mézard. Wealth condensation in a simple model of economy. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 282:536–545, 2000.
- [75] M-B Hu, R. Jiang, Y-H Wu, R. Wang, and Q-S Wu. Properties of wealth distribution in multi-agent systems of a complex network . *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387:5862–5867, 2008.
- [76] P. Erdős and A. Rényi. On the strength of connectedness of a random graph. *Acta Mathematica Hungarica*, 12(1-2):261–267, 1961.
- [77] A. L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512, 1999.
- [78] A. M. Colman. *Game Theory and Its Applications in the Social and Biological Sciences*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 1995.
- [79] R. Coelho, Z. Neda, J. J. Ramasco, and M. A. Santos. A family-network model for wealth distribution in societies. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 353:515–528, 2005.
- [80] T. Di Matteo, T. Aste, and S. T. Hyde. Exchanges in complex networks: income and wealth distributions . volume 155, pages 435–442. IOS Press.