

**Benemérita Universidad Autónoma de Puebla**  
Instituto de Física Ing. Luis Rivera Terrazas



**Análisis de la descarga de granos con interacción repulsiva en un silo bidimensional.**

Tesis que presenta el:  
**Lic. David Hernández Enríquez**

para obtener el grado de:  
**Maestría en Ciencias (Física)**

Asesor: Dr. Felipe Pacheco Vázquez

Puebla, Pue. México

Diciembre de 2015



*Dedicado a  
ti Susana, Mamá, Papá y Hermanos,  
con todo cariño y dedicación.*



## Resumen

La presente tesis estudia la descarga de un silo de dos dimensiones. En los silos típicos, los granos interactúan a través de contacto directo entre ellos y la dinámica es dominada por fuerzas de fricción y colisiones. En este estudio, los granos son imanes que se repelen unos a los otros debido a su campo magnético. Se realizó un análisis de la razón de flujo de dicho material de manera experimental y usando simulaciones numéricas para describir su dinámica y poderla diferenciar de materiales granulares convencionales. Utilizando técnicas de video de alta velocidad y dinámica molecular en Matlab, se observó que, si bien la dependencia de la razón de flujo estudiada en función de la apertura puede modelarse con una ley de potencias con exponente  $3/2$  (de acuerdo a la ley de Beverloo para sistemas no repulsivos), los perfiles de densidad y velocidad en la salida del silo difieren completamente y es necesario tomar consideraciones nuevas para poder esclarecer la manera en que los silos con un material con potencial repulsivo se descargan. Se propone una ecuación que ajusta para valores pequeños de la apertura y recupera el comportamiento de ley de potencias a la “ $3/2$ ” para valores más grandes. Así mismo, es de mencionar que dicha interacción no evita la aparición de atascamientos e intermitencia en el flujo de descarga para aberturas más pequeñas que un tamaño crítico, determinado por el radio efectivo de los granos repulsivos.

---

## Abstract

This thesis studies the discharge of a two-dimensional silo. In typical silos, solid grains interact through direct contacts and the dynamics is dominated by friction and collisions. Here, the grains are magnets repelling one another due to their magnetic field. An analysis of the flow rate of that material was performed experimentally and using numerical simulations to describe their dynamics and to distinguish from conventional granular materials. Using high-speed video techniques and molecular dynamics in Matlab, it was observed that, while the dependence of the flow rate studied as a function of the opening can be modeled using a power law with exponent  $3/2$  (according to the Beverloo's law for non-repulsive systems), the density and velocity profiles at the outlet of the silo are completely different and it is necessary take new and different considerations to clarify how the silos with repulsive potential materials are discharged. An equation that adjusts for small values of the openings and retrieves the behavior of the power law to the " $3/2$ " for larger values is proposed. Moreover, it is worth mentioning that the repulsive interaction does not prevent the emergence of bottlenecks and intermittent discharge flow to openings smaller than a critical size determined by the effective radius of the repulsive grains.

---

Los experimentos y simulaciones presentadas en esta tesis fueron realizadas en **GrainsLab** (Laboratorio de Materiales Granulares) del Instituto de Física de la BUAP. El análisis teórico del problema se hizo en colaboración con GRASP, de la Universidad de Liège, Bélgica. Agradezco a mi asesor el Dr. Felipe Pacheco Vázquez por todo el apoyo brindado, su empeño y paciencia para la satisfactoria culminación de este trabajo, y a los sinodales de esta tesis: Dr. Umapada Pal, Dr. Jesús Arriaga y al Dr. Julio Villanueva, por la cuidadosa revisión.

---



# Índice

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Antecedentes</b>	<b>3</b>
1.1. Materia Granular en la historia . . . . .	3
1.2. Características de los medios granulares . . . . .	5
1.2.1. Ángulo de reposo . . . . .	5
1.2.2. Formación de Arcos . . . . .	7
1.2.3. Cadenas de fuerza . . . . .	8
1.2.4. Efecto Janssen . . . . .	9
<b>2. Descarga de contenedores de Materia Granular</b>	<b>11</b>
2.1. Ley de Beverloo . . . . .	11
2.2. Modificaciones recientes a la ley de Beverloo . . . . .	12
<b>3. Descarga de granos con interacción repulsiva en un silo bidimensional</b>	<b>19</b>
3.1. Diseño experimental . . . . .	20
3.1.1. Simulaciones numéricas . . . . .	22
3.2. Resultados obtenidos . . . . .	23
3.2.1. Análisis . . . . .	25
3.2.2. Simulaciones computacionales . . . . .	29
<b>4. Conclusiones</b>	<b>33</b>
<b>Apéndices</b>	<b>35</b>
<b>A. Código de dinámica molecular</b>	<b>37</b>



# Lista de Figuras

1.1.	Esquema de ángulo de reposo de una pila . . . . .	6
1.2.	Ángulo de reposo de una pila y de un cráter . . . . .	6
1.3.	Esquema de formación de arcos . . . . .	7
1.4.	Distribución de estrés aplicado en un medio granular . . . . .	8
1.5.	Esquema de la explicación del efecto Janssen . . . . .	9
1.6.	Gráfica de presiones en sistemas hidrostáticos y granulares (efecto Janssen) . . . . .	10
2.1.	Comparación de tiempos de descarga en función del tamaño de abertura para diferentes formas del contenedor . . . . .	13
2.2.	Comparación de ajustes de la Ley de Beverloo para grandes y pequeños orificios de salida . . . . .	14
2.3.	Perfiles de velocidad tomados del artículo [25] . . . . .	15
2.4.	Perfiles de densidad tomados del artículo [25] . . . . .	16
3.1.	Arreglo experimental y esquema del silo bidimensional utilizado en esta tesis . . . . .	21
3.2.	Gráfica del conteo de partículas en función del tiempo durante la descarga del silo por tamaño de abertura. . . . .	24
3.3.	Gráfica de fracción de granos descargados y ajuste usando la ec. 3.10 . . . . .	24
3.4.	Gráfica de evolución temporal de la velocidad de salida promedio de granos durante la descarga del silo y el ajuste usando la ec. 3.6 . . . . .	26
3.5.	Perfiles de velocidad a lo largo de la apertura para granos con potencial repulsivo . . . . .	27
3.6.	Gráfica de evolución temporal del promedio de densidad de granos en la salida durante la descarga del silo y ajuste usando la ec. 3.9 . . . . .	28
3.7.	Comparación de gráficas del conteo de partículas en la simulación y el experimento . . . . .	29
3.8.	Gráfica de ajuste de coeficientes de fricción usados en las simulaciones numéricas en función del tamaño de apertura . . . . .	30
3.9.	Gráfica de evolución temporal de velocidad de salida promedio de granos durante la descarga del silo en las simulaciones y ajuste usando la ec. 3.6 . . . . .	30
3.10.	Perfiles de velocidad a lo largo de la apertura para granos con potencial repulsivo en las simulaciones . . . . .	31

3.11. Gráfica de evolución temporal del promedio de densidad de granos en la salida durante la descarga del silo en las simulaciones y ajuste usando la ec. 3.9 . . . . .	32
3.12. Gráfica del ajuste de la razón de flujo en las simulaciones numéricas . . . . .	32

## Introducción

Desde el comienzo del sedentarismo humano, los granos como fuente de alimento fueron de vital importancia puesto que su naturaleza permite mayor tiempo de vida útil para consumo o siembra. Esto permitió, en aquella época, que civilizaciones enteras emergieran tomando como base de su alimentación cierto tipo de semilla, para posteriormente estrechar lazos con otras culturas a través del trueque o comercio de alimentos o materias primas, por lo que las técnicas de almacenamiento y transporte fueron mejorando en base al conocimiento empírico acumulado a través del tiempo. Sin embargo, no fue hasta los estudios fundamentales realizados por Faraday o Coulomb, y más recientemente con Osborne Reynolds, Ralph Bagnold y W. A. Beverloo, cuando surge especial interés entre la comunidad científica por entender el comportamiento de los medios granulares, mismos que, de acuerdo a muchos investigadores, dependiendo de las condiciones a las que son sometidos, se pueden comportar como sólidos, líquidos o gases.

La descarga de materia granular a través de un silo es uno de los temas que en esta área ha atraído mayor atención de ingenieros y científicos. Típicamente, kilos o toneladas de granos son depositados en un contenedor y descargados a través de un orificio localizado al fondo del depósito. Los granos interactúan a través de fuerzas de fricción por contacto y la descarga está dada por una ley de potencias establecida por Beverloo. En este trabajo se contruyó un silo bidimensional que permitió estudiar los fenómenos estáticos y dinámicos que se presentan en materia granular con un potencial repulsivo, así como corroborar la validez de la Ley de Beverloo cuando no existe contacto por fricción entre los granos, tema sobre el cual existe poca información en la literatura y se espera que estas observaciones puedan contribuir al entendimiento del fenómeno y a la resolución de futuros problemas prácticos e ideales, puesto que modelar un flujo de partículas que interactúan evitando el contacto y que atraviesan por un cuello de botella puede ser tomado, por ejemplo, como base para el análisis de tráfico de vehículos en embotellamientos.

En el capítulo 1 se mostrará una breve revisión de los antecedentes históricos y conceptos fundamentales de la Física de materia granular. En el capítulo 2 se describirá la materia granular repulsiva y se presentará el dispositivo utilizado, los resultados experimentales y la discusión de los hallazgos originales y de sus posibles implicaciones. Además, se describirán simulaciones desarrolladas mediante un código de dinámica molecular en Matlab y se compararán los resultados obtenidos con las observaciones experimentales. Finalmente, se presentarán las conclusiones a las que se llegó con este trabajo.



# 1

## Antecedentes

Un material granular es una colección de partículas sólidas dispersas en un volumen determinado. No importa su naturaleza (orgánico o inorgánico) o si son poco o muy densos, sólo deben ser perfectamente distinguibles como elementos constitutivos del material y su tamaño debe ser mayor a una micra; de modo que, las agitaciones de origen browniano son despreciadas. Estos materiales se encuentran en todas partes; por ejemplo, en los alimentos (arroz, maíz, café, azúcar), en la construcción (arena, grava, cementos), en la naturaleza (desiertos, playas, montañas), en la industria química y farmacéutica (polvos y pastillas).

Los materiales granulares tienen un comportamiento especial dependiendo de las condiciones externas a las que son sometidos, que nos permite clasificarlos como un nuevo estado de la materia, lo que ha resultado ser un tema de discusión e interés para la comunidad científica desde hace muchos años. En este capítulo se repasará brevemente la historia del estudio de la materia granular.

### 1.1. Materia Granular en la historia

En el pasado, las investigaciones de los físicos [1] sobre materia granular, han recibido menos atención que aquellas relacionadas con temas como la hidrodinámica. Sin embargo, esto no ha impedido que grandes científicos a lo largo de la historia se las hallan arreglado para descifrar aspectos relevantes de este tipo de sólidos.

La primera mención de la materia granular de la que se tiene registro proviene de Lucretius (98a.c.-55 a.c.), famoso poeta y filósofo natural de la antigua Roma. Él escribió por el 55 d.c. “Uno puede recoger semillas de amapola con un cucharón tan fácilmente como si fuera agua, y al sumergir la cuchara, las semillas fluyen en una corriente continua”.

Así mismo, en la época renacentista, varios ilustres se interesaron ampliamente en los granos. Leonardo da Vinci (1452-1519) fue uno de los primeros en idear un experimento simple y conveniente para demostrar las leyes de fricción seca. Él, junto con otros individuos, fueron capaces de realizar declaraciones acertadas acerca de pilas de arena. No fue hasta el final del siglo XVIII que Charles de Coulomb (1736-1806) escribió un artículo contundente, que sigue citándose en la actualidad, titulado “Ensayo sobre las reglas de Máximos y Mínimos aplicados a algunos problemas de equilibrio concerniente a la arquitectura” [2]. Dicho escrito es muy interesante en varios sentidos, puesto que está basado en un buen número de observaciones experimentales de equilibrio de terraplenes, la estabilidad de estructuras de piedra y otras construcciones, estableciendo el conocimiento fundamental de los materiales granulares a tal punto que incluso a día de hoy, es difícil de contrariar; por ejemplo, condujo a las célebres leyes de fricción seca entre sólidos de Coulomb, que se pueden extender a materiales granulares.

En 1780, Ernst Chladni (1777-1827) se percató de un número interesante de diferencias (mismas que siguen siendo desconcertantes hasta hoy), entre el comportamiento de granulados pequeños, y otros más gruesos (como la arena). Él observó lo que se conoce como las figuras complementarias de Chladni [3]. Sus experimentos fueron replicados y corroborados de manera breve por Christiaan Oerstedt (1777-1851), quien empleó polvo de una clase de helechos (*Lycopodium*), un material extremadamente fino utilizado en otros descubrimientos. Por otro lado Félix Savart (1791-1841) se interesó, entre otras cosas, en la música. Él haría uso en 1827 de las figuras geométricas de Chladni para estudiar las longitudes de onda y frecuencias de ondas de sonido.

Michael Faraday (1791-1867) fue otro personaje ilustre que, a pesar del trasfondo de su trabajo principal en inestabilidades hidrodinámicas, también tuvo un fuerte interés en la manera en que las vibraciones inducen formaciones de pilas de arena [4]. Este fenómeno, muy relacionado con los experimentos de Chladni, permaneció como un misterio hasta nuestros días.

William Rankine (1820-1872) examinó las implicaciones teóricas de la fricción en materiales granulares por ahí del año 1857 [5]. Partiendo de las ideas de Coulomb, estableció un número de principios; los cuales, permanecen completamente válidos en la actualidad. Él definió lo que ahora se llaman Estados pasivos y activos de Rankine.

El problema de la distribución de fuerzas de equilibrio en un medio granular almacenado en un silo ha sido estudiado por varios investigadores. En 1884, I. Roberts se percató de que “en una estructura cuyas paredes laterales son paralelas, la presión ejercida por el material almacenado en la base cesa su incremento cuando la estructura es llenada a una altura de más de dos veces el diámetro del círculo inscrito” [6]. Unos años más tarde, H. Janssen, un ingeniero alemán de la ciudad de Bremen, propuso un modelo basado en un coeficiente que describe el redireccionamiento de las fuerzas hacia las paredes [7]. Él no hizo referencia al trabajo de Roberts, presumiblemente porque no lo conocía. Sustancialmente la misma idea inspiró el trabajo de John Strutt (1842-1919), publicado en 1906 [8]. Él mencionó las observaciones de Robert, pero no el trabajo de Janssen, de nuevo porque no conocía de su existencia. Por mera casualidad, Strutt (quien es más conocido como Lord Rayleigh, ganador del Nobel de física en 1904), sugirió una interesante analogía entre este problema y la manera en que una cuerda enrollada alrededor de un palo resiste la tracción.

En la última parte del siglo XIX, Osborne Reynolds (1842-1912), ya distinguido en el campo

---

de la hidrodinámica (con el Número de Reynolds) [9], realizó contribuciones fundamentales a la teoría de materiales granulares por el año de 1885. Algunos conceptos que él desarrolló, como la dilatancia y el análisis de embarques inclinados, permanecen en la lista de temas de investigación moderna.

## 1.2. Características de los medios granulares

Las propiedades de los medios granulares dependen principalmente de la naturaleza de las interacciones entre las partículas, pero también es importante la interacción con el medio ambiente. Un tipo importante de estos sistemas es la materia granular seca, en la que las interacciones se reducen a fricción y colisión entre las partículas con las paredes del contenedor y se desprecian los factores ambientales. En la práctica, la disipación de la energía a través de múltiples colisiones es acompañada, inevitablemente, por la aparición de carga electrostática en las paredes del contenedor o en las esferas mismas; la cual, es muy difícil de eliminar. Es por ello que, llevar un serio control de las condiciones experimentales, es importante para la reproducción de los experimentos. Podemos clasificar los materiales granulares por medio del Factor de Empaquetamiento ( $\phi$ ), el cual está definido como la razón del volumen real de los granos con respecto al volumen total ocupado por los granos (incluyendo el espacio entre ellos), y sus valores típicos oscilan alrededor de  $\phi \sim 0.64$ . De acuerdo a esto, los materiales granulares se dividen en polvos, sólidos granulares o sólidos fracturados:

- Un polvo está constituido de partículas de dimensiones menores a  $100 \mu\text{m}$  de diámetro. Es común hacer distinciones más minuciosas entre polvos granulares ( $>100$  a  $10 \mu\text{m}$ ), polvos superfinos ( $>10$  a  $1 \mu\text{m}$ ) y polvos hiperfinos ( $>1$  a  $0.1 \mu\text{m}$ ). En estos últimos, la carga estática y la humedad son dominantes.
- Un sólido granular está formado por granos cuyo tamaño oscila entre los  $100$  y  $3000 \mu\text{m}$ . La disipación de energía por fricción domina en este régimen.
- Un sólido fracturado es un material granular cuyo diámetro de partícula es mayor a  $3 \text{ mm}$ . La pérdida de energía por colisiones es fundamental en este rango de tamaños.

### 1.2.1. Ángulo de reposo

Como es bien sabido, las fuerzas de contacto que hay entre las partículas, son las que hacen que el comportamiento de la materia granular sea diferente a la materia líquida o sólida. El material granular, al ser vertido, forma un montículo cónico o pila, ya que los granos se acumulan. En cambio, como los sólidos tienen una forma definida que no se modifica, tienen la capacidad de soportar un esfuerzo aplicado. Siguiendo un proceso similar, la materia líquida fluye hasta el punto en que su superficie se encuentra horizontal, es decir, no soporta esfuerzo.

El comportamiento del medio granular se encuentra a la mitad del sólido y del líquido, siendo incapaz de formar pilas con una pendiente mayor a cierto ángulo  $\theta$ . En general se ha observado que



Figura 1.1: Esquema del ángulo de reposo formado por una pila de materia granular y la superficie donde ésta se encuentra.

cuando se sobrepasa el umbral de dicho ángulo, se colapsa hasta formar una pendiente con ángulo  $\theta$  respecto a la superficie de reposo; por el contrario, por debajo del ángulo mencionado, la pila tiende a mantenerse en equilibrio estático, a menos que se vierta más material sobre la misma o se someta a fuerzas externas. En este último caso, habría un colapso de los granos que culminaría con la formación de una nueva pendiente, cuyo valor de ángulo de inclinación varía en un rango de  $30^\circ$  a  $35^\circ$ , dependiendo del material. A este ángulo se le conoce como “ángulo de reposo”.

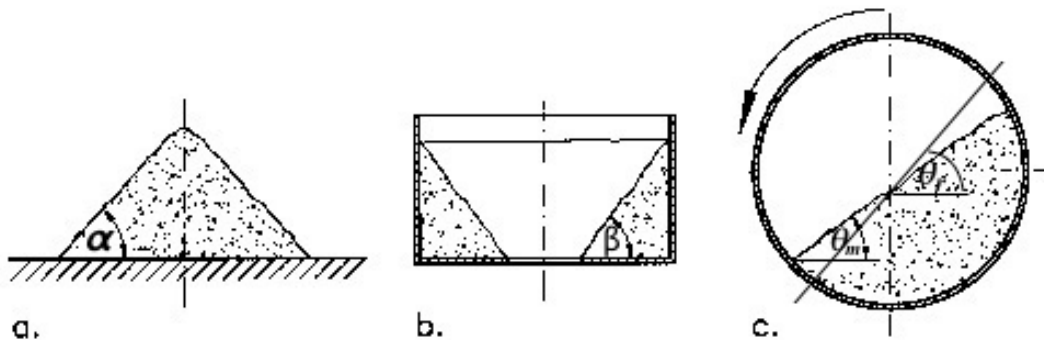


Figura 1.2: Ilustración del ángulo de reposo de a) una pila granular por deposición de material, y b) del perfil de un cráter. c) Ángulo de avalancha obtenido al rotar una celda cilíndrica cargada de granos. Imágen tomada de la referencia [1].

El ángulo de reposo ha sido objeto de observaciones cuantitativas. A lo largo de los estudios sobre materia granular, uno de los primeros en hacer esas observaciones fue Charles Coulomb, quien sustenta que dos capas de granos adyacentes no pueden deslizarse una sobre la otra, a menos que se encuentren inclinadas por encima de un ángulo  $\theta$ , parecido a la  $\tan^{-1}(\mu_s)$ ; considerando a  $\mu_s$ , por analogía al caso de los sólidos, como un coeficiente característico de la fricción. Es importante que cuando se trabaje con materia granular, se defina sin ambigüedades el ángulo de reposo, el cual está en función de la manera en que se contruyó la pila. Son dos factores principales de los que depende la determinación del ángulo de reposo; ellos son: factor geométrico y factor de movimiento.

- Factor geométrico: Definido por la curvatura de una pila. En la fig. 1.2 se puede observar, por comparación: (a) el ángulo  $\alpha$  que forma un medio granular con respecto a la base, al descargarse a través de un orificio, con el (b) ángulo  $\beta$  que dicho material forma al observarse el perfil de un cráter. La cercanía o proximidad de las partículas en la base del crater, está más densamente poblada si comparamos con la base de la pila de descarga, lo que genera que los ángulos sean diferentes, es decir, se ha observado que en general,  $\alpha > \beta$ . Mientras más crezca el radio de curvatura de la superficie, la diferencia existente entre ambos ángulos tenderá a desaparecer.
- Factor de movimiento: A este ángulo se le conoce como *talud* y se observa al tener el medio granular en un tambor giratorio con paredes transparentes, mismo que rota sobre su eje a una velocidad pequeña (del orden de 0.01 rps). Sin embargo nos encontramos con que este ángulo no es único, sino que incrementa hasta un valor característico llamado el ángulo de *movimiento* (o de avalancha),  $\theta_m$ , y una vez alcanzado se produce una leve avalancha, para posteriormente caer abruptamente de  $\theta_m$  a un ángulo menor,  $\theta_r$ , correspondiente al ángulo de reposo. La diferencia  $\delta = \theta_m - \theta_r$  se conoce como ángulo de relajación, cuyo valor típico es alrededor de  $2^\circ$  para medios granulares secos.

### 1.2.2. Formación de Arcos

Para que un material granular se halle en reposo debe suceder que, la suma de fuerzas sobre cada una de sus partículas sea igual a cero (de acuerdo con la primera ley de Newton) y ésto sucede si el peso de una partícula determinada se equilibra con la fuerza normal y la fricción estática debidas a las partículas vecinas; es decir, un grano debe ser sostenido por las partículas debajo y a los lados para evitar caer. A su vez, las partículas debajo de éste, deben estar sostenidas por otras más abajo, y así sucesivamente hasta alcanzar el fondo o las paredes del recipiente. Esta sucesión de fuerzas se considera como una cadena de esfuerzos; cada parte del material granular está sostenido por esfuerzos transmitidos de partícula en partícula hasta llegar a la base (o paredes) del contenedor. Asimismo, si se aplica una fuerza sobre la superficie del medio, dicha fuerza será transmitida hacia abajo y a los lados dentro del material, repartiéndose entre todos los granos.

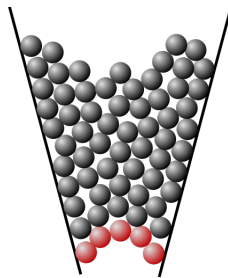


Figura 1.3: Esquema de la formación de arcos, en la descarga de materia granular a través de un orificio.

La transmisión de fuerzas a través de las partículas, solamente puede darse a través del punto

de contacto entre los granos. La cantidad de puntos de contacto que tienen las partículas entre sí depende en gran medida de la fracción de volumen del material granular. Entre más separados estén los granos unos de otros —es decir, si la fracción de volumen es menor— habrá menor cantidad de puntos de contacto por partícula y la transmisión de esfuerzos será menos eficiente. La forma en que se crean las cadenas de esfuerzos depende, entonces, en gran medida de la forma en que se acomodan las partículas en el material. Un ligero cambio en la compactación del medio provocará que las cadenas adopten otra forma.

Los silos y las tolvas reales tienen una salida en la parte inferior del depósito que es del tamaño de varios diámetros de las partículas que contiene. Experimentalmente, se ha encontrado que si dicha apertura es menor que de 5 a 6 veces el diámetro de las partículas, el silo comienza a presentar bloqueos por la formación de arcos (fig. 1.3).

### 1.2.3. Cadenas de fuerza

Al analizar las fuerzas (esfuerzo) que se propagan a través de cada uno de los elementos que constituyen el sistema en un medio granular, se observa un comportamiento errático en la propagación de las mismas, sirviéndose de medio el contacto físico entre partículas. Si las fuerzas se ven aumentadas, se llegará a deformar la estructura general del sistema y se incrementarán los puntos de contacto, lo que a su vez, modificará la transmisión del esfuerzo, llegando a consolidar lo que se conoce como cadenas de fuerza (fig. 1.4); es decir, la distribución de las fuerzas a las que se somete el sistema seguirán caminos bien definidos a través del contacto entre partículas, hasta llegar a las paredes del contenedor.

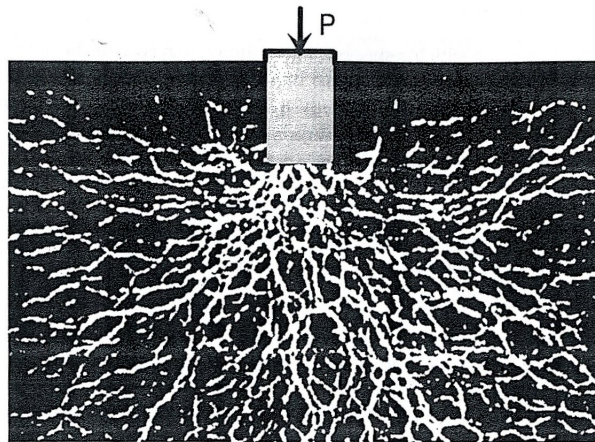


Figura 1.4: Cualquier estrés aplicado sobre un material granular, se redistribuye a través de las cadenas de fuerza formadas por el contacto entre los granos. Es posible observar dicha distribución usando discos fotoelásticos que se iluminan al ser sujetos a alguna tensión externa y que se visualizan utilizando pantallas polarizadas. Imágen tomada de la referencia [1].

### 1.2.4. Efecto Janssen

Una observación clásica es que la presión en la base de un silo, producida por el peso de la columna granular, es independiente de la altura de llenado. Para comprender este comportamiento, el ingeniero alemán H. A. Janssen [7] propuso en 1895 el siguiente análisis: Sea un depósito cilíndrico de radio  $R$ , lleno con un medio granular, en el cual queremos calcular la dependencia de la presión  $p(h)$  con la altura.

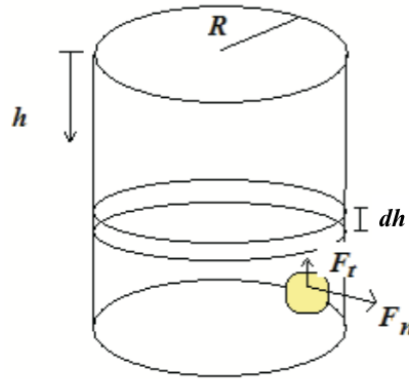


Figura 1.5: Esquema de un cilindro contenedor de materia granular donde el efecto Janssen es evidente.

Asumiendo que la fuerza normal  $F_n$  ejercida por el granulado en una unidad de área  $A$  de la pared del silo es proporcional a  $p$ , tendríamos:

$$F_n = kp \quad (1.1)$$

Además, la fuerza de fricción tangencial  $F_t$  por unidad de área  $A$ , que se opone al movimiento de los granos sobre las paredes del silo es:

$$F_t = \mu F_n = \mu K p \quad (1.2)$$

Si consideramos una sección vertical del cilindro de espesor  $dh$  mostrado en la fig. 1.5 y que se encuentra en equilibrio estático, el balance de fuerzas para esta sección sería de la forma:

$$\pi R^2 dh \rho g = \pi R^2 \frac{dp}{dh} dh + 2\pi R dh \mu K p \quad (1.3)$$

donde el lado izquierdo es el peso de la sección con densidad  $\rho$ .

El primer término del lado derecho, es la fuerza debido al gradiente de presión vertical y el segundo término, es la fuerza de fricción de Coulomb con las paredes. Esto lo podemos escribir como una ecuación diferencial:

$$\frac{dp}{dh} + \frac{p}{\Lambda} = \rho g \quad (1.4)$$

y cuya solución es:

$$p(h) = \Lambda \rho g \left(1 - e^{-\frac{h}{\Lambda}}\right) \quad (1.5)$$

donde se ha usado la condición de frontera  $p(0) = 0$  y la longitud:

$$\Lambda = \frac{R}{2\mu k} \quad (1.6)$$

en la cual la presión converge exponencialmente hacia un valor constante conforme aumenta la altura de llenado, como se observa en el diagrama de la figura 1.6.

Esta longitud disminuye con el coeficiente de fricción de las paredes  $\mu$ . Consecuentemente, si la fricción no desaparece y el cilindro es muy alto, la presión es independiente de la altura de llenado. Las fuerzas de contacto entre los granos, junto con la fricción estática entre ellos y las paredes del contenedor, dan como resultado que el peso excedente sea soportado precisamente por las paredes, debido a la formación de arcos dentro del material que transmiten los esfuerzos hacia las paredes.

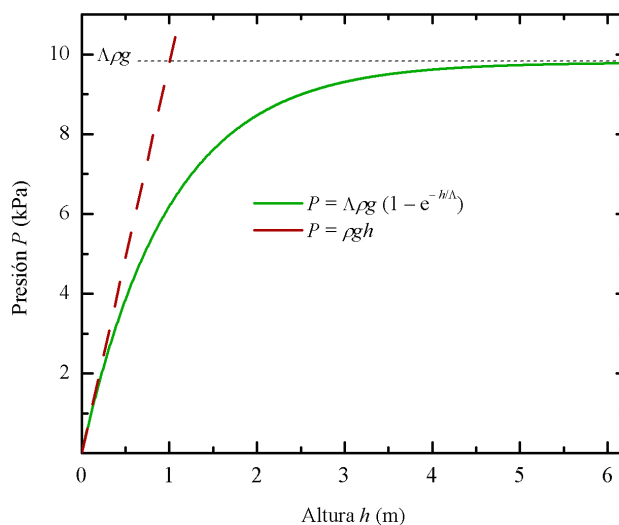


Figura 1.6: Cuando la altura de una columna granular alcanza un valor determinado, la presión en el fondo del depósito alcanza un valor de saturación.

# 2

## Descarga de contenedores de Materia Granular

De acuerdo a la literatura, existe gran variedad de trabajos experimentales y computacionales que hablan sobre la descarga de silos y tolvas en función de la apertura de los mismos. Fenómenos tan simples (y a la vez complejos) como el flujo de objetos discretos a través de los cuellos de botella, es un tema importante en muchos campos de la ciencia y tiene vastas aplicaciones industriales; dichos objetos podrían ser animales [10], peatones [11, 12], insectos [13], glóbulos rojos de la sangre [14], bacterias [15], coches [16] o granos. Una característica importante de estos flujos es la obstrucción [17, 18] que se observa durante el escape de emergencia en los flujos de tráfico y durante la descarga del silo. Se observan dos modos diferentes de flujo: flujo de objetos en contacto, como en materiales granulares y el flujo de objetos sin contacto, como en el tráfico por carretera. Transiciones entre la ausencia de contacto, a un modo de flujo con contacto, podrían ser observadas. Es de resaltar que, en general, la razón de flujo de un material granular a través de una abertura es independiente del diámetro del silo ( $L$ ) en un primer orden de aproximación, siempre y cuando se cumpla que:  $L$  sea más grande que 2.5 veces el diámetro de la apertura de salida ( $D_0$ ) y también que sea más grande que  $D_0 + 30d_p$ , donde  $d_p$  es el diámetro de las partículas [24]. Aquí se presentará un breve resumen de algunas publicaciones que servirán de base para el trabajo discutido en el capítulo 3.

### 2.1. Ley de Beverloo

En la comunidad de materiales granulares, el flujo de granos en contacto a través de la salida de un silo ha sido objeto de numerosos estudios [17–25]. Al contrario del flujo en líquidos, cuya

velocidad de salida se rige por una dependencia hidrostática, el flujo de material granular a través de la salida de un silo es constante durante la descarga y es sólo variable al final de la misma. Además, para pequeñas aberturas, la probabilidad de observar atascos de granos es significativa.

En 1961, Beverloo, Leninger y Velde [26] realizaron una investigación experimental en la descarga de silos con distintas aperturas en tamaño y forma, utilizando diferentes tipos de semillas y arena de diferentes “gruesos”, obteniendo semi-empíricamente mediante análisis dimensional, una expresión fenomenológica para la razón de flujo granular  $W$  (número de granos por unidad de tiempo) en la salida de un silo como función del tamaño de la abertura del silo  $D$ . Esta relación se deduce de la conjunción de dos premisas: (i) la razón de flujo  $W$  se bloquea cuando la abertura está por debajo de un umbral determinado por  $kd$ , donde  $k$  es un parámetro libre y  $d$  el diámetro del grano, y (ii) los granos experimentan una caída libre antes de pasar por la abertura. Dicha expresión es de la forma:

$$W = C\rho_b\sqrt{g}(D - kd)^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

donde  $C$  y  $k$  son los coeficientes de descarga y forma del recipiente respectivamente,  $\rho$  es la densidad aparente y  $g$  la aceleración de la gravedad, siendo esta justificada asumiendo la existencia de una región justo sobre la abertura donde los granos salen en caída libre. El exponente  $n = 2$  surge de resultados experimentales en tres dimensiones, siendo  $n = 1$  el valor del exponente para el caso bidimensional. Así mismo, el valor del exponente en la expresión anterior puede ser obtenido mediante análisis dimensional, considerando que los parámetros relevantes en el experimento son la gravedad  $g$ , la densidad de los granos  $\rho$ , el tamaño de la abertura  $D$  y el diámetro de los granos  $d$ , de modo que:

$$W(t) \propto \rho_b^a g^b (D - kd)^c \quad (2.2)$$

Entonces, dimensionalmente se tiene:

$$\frac{[M]}{[t]} = \left(\frac{[M]}{[L]^3}\right)^a \left(\frac{[L]}{[t]^2}\right)^b [L]^c \quad (2.3)$$

de donde  $b = 0.5$ ,  $a = 1$  y  $c = 2.5$ , valores que coinciden con lo propuesto por Beverloo.

## 2.2. Modificaciones recientes a la ley de Beverloo

Otra publicación interesante sobre la descarga de un reloj de arena es presentada por Mills *et al.* [28] quienes realizan un estudio de la descarga con distintos tipos de materiales, variando la forma y tamaño del recipiente, la abertura y la densidad del material. Ellos encuentran que cuando el reloj es llenado con esferitas de vidrio conocidas como ballotina, los resultados se ajustan mejor a la ley de Beverloo. Una gráfica de los resultados obtenidos para los distintos contenedores se muestra en la fig. 2.1.

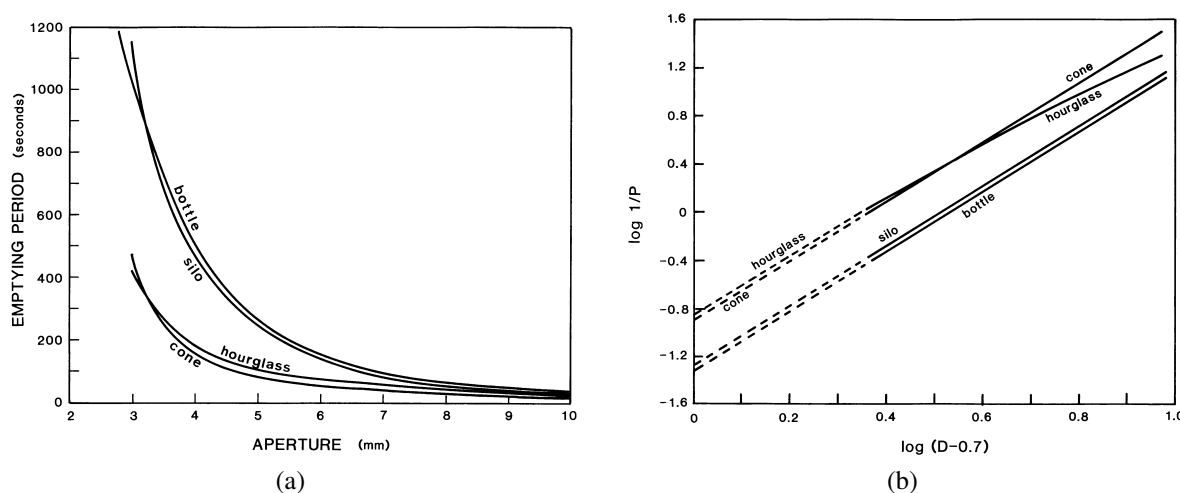


Figura 2.1: a) Dependencia experimental del tiempo de descarga  $T$  en función de la apertura, obtenidos para distintas formas del contenedor (reloj de arena comercial, botella, cono y silo.). b) Ajuste logarítmico que se coincide con la ley de Beverloo. Imágen tomada de la referencia [28].

Así mismo, C. Mankoc, A. Janda *et al.* [24] proponen, por medio de experimentos y simulaciones numéricas, una modificación a la Ley de Beverloo que es válida para todos los tamaños de apertura de descarga (muy grandes o muy pequeños) partiendo del hecho de que, a pesar de que dicha ley funciona para muchos tipos de partículas, es independiente del factor de empaquetamiento, densidad, propiedades de la superficie o forma y describe bien la razón de flujo para diferentes patrones de flujo desarrollados dentro del silo —es decir, flujos máxicos, flujos de embudo o flujos combinados—, los principios físicos detrás del flujo de granos a través de un orificio permanecen sin elucidar y más aún, los coeficientes empíricos necesitan ser determinados experimentalmente para cada tipo de grano y propiedades del contenedor.

El valor de  $C$ , comúnmente llamado coeficiente de descarga, depende de la densidad de bulto y se encontró que está en un rango de  $0.55 < C < 0.65$  por Beverloo *et al.* El coeficiente de forma  $k$  es generalmente aceptado que depende de la forma de las partículas y de la inclinación de la tolva. Pese a esto, el significado del término  $-kd$  ha provocado una gran controversia. La primera interpretación aceptada de este término fue la realizada por Brown y Richards [27] quienes propusieron que el centro de las partículas sólo se puede aproximar al borde del orificio de salida a no menos de una distancia de  $kd/2$ . Por lo tanto el centro de las partículas debe pasar por un orificio efectivo de diámetro  $D_0 - kd$ . Se ha encontrado que el valor de  $k$  es independiente del tamaño de partícula en un rango entre  $1 < k < 2$  dependiendo del tipo de partícula y de las propiedades de la tolva. Más aún, los trabajos realizados hasta la fecha siguen dos patrones: (i) algunos de ellos sólo trabajan con orificios muy grandes en silos reales donde el valor de  $k$  tiene sólo una pequeña influencia en el ajuste y (ii) otros exploran la región de pequeños orificios pero no alcanzan valores grandes de  $D_0$ . Este hecho puede llevar a una mala interpretación de los resultados; así como, hacernos pensar que el ajuste parece adecuado porque el rango elegido para  $D_0$  no es suficientemente largo y los

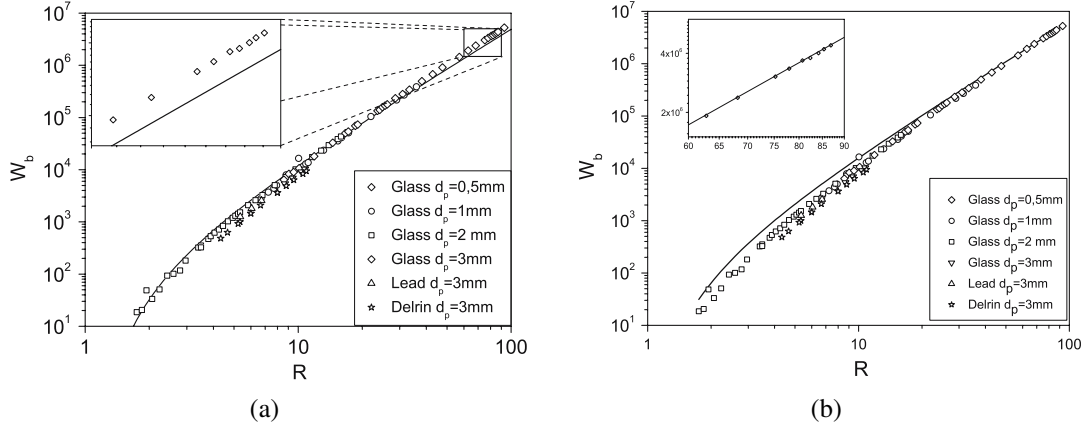


Figura 2.2: (izq.) Gráfica logarítmica de la razón de flujo de partículas  $W_b$  para un silo tridimensional ( $W_b$  es el número de granos expulsados por minuto y  $R = D/d$ ). La línea sólida es el mejor ajuste de la ecuación 2.1 para pequeños valores de  $R$ . La gráfica insertada muestra un acercamiento a la región de  $60 \leq R \leq 90$  donde se aprecia una discrepancia entre el ajuste y los valores experimentales. (der) Mismos datos pero ajustando para valores grandes de  $R$ . La gráfica insertada muestra un acercamiento a la región de  $60 \leq R \leq 90$  pero se aprecia discrepancia con los valores correspondientes a  $R$  pequeños. Imágen tomada de la referencia [24].

valores para  $C$  y  $k$  son elegidos arbitrariamente. Todo esto permitió a Mankoc *et al.* darse cuenta de que una elección de los parámetros  $C$  y  $k$  no sirve para describir el comportamiento completo de la descarga al tener un amplio rango de orificios de salida grandes y pequeños (desde 1.5 hasta 1000 veces el diámetro de las partículas). Para resolver este problema proponen una modificación a la ec. de Beverloo donde se elimina el parámetro  $k$ , mediante la introducción de un factor exponencial de la forma:

$$W = C' \sqrt{g} \rho_b \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-b(D-1)} \right) (D-d)^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.4)$$

donde  $C'$  y  $b$  dependen del material y la forma del contenedor. Esta ecuación se ajusta mejor a los datos experimentales que ellos obtienen para cualquier tamaño de apertura e incluye dos diferencias importantes con respecto a la expresión de Beverloo: (i) el flujo de granos cesa justo cuando el tamaño de la apertura es igual al diámetro de la partícula y (ii) un factor exponencial es incluido para ajustar la razón de flujo en un gran rango de tamaños de salida, siendo este factor atribuible a la baja densidad del material cercano a la salida; por tanto, este es un factor de densidad reducida.

Por su parte [25], A. Janda, I. Zuriguel y D. Maza proponen una nueva expresión para el flujo de partículas a través de orificios al utilizar cámaras de alta velocidad para filmar y analizar las descargas utilizando perfiles de velocidad, obtenidos al rastrear la posición con respecto al tiempo de las partículas para determinar su velocidad vertical justo al pasar por la salida, y la fracción de volumen, la cual consta del área de cada grano dentro de una área rectangular predeterminada, que

es una caja rectangular de altura  $d$  y largo  $D$ , centrada en el medio del orificio de salida.

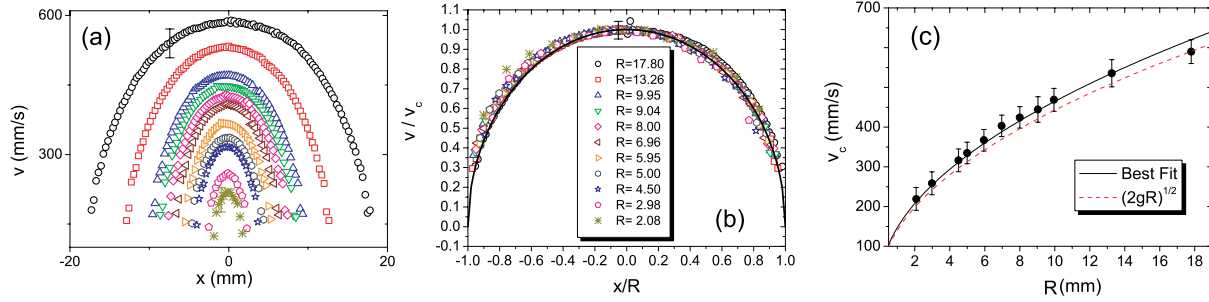


Figura 2.3: a) Perfiles de velocidad para diferentes tamaños de apertura. El origen del eje horizontal corresponde al punto medio de la salida del silo. b) Velocidades normalizadas y la función de escalamiento propuesta. c) Dependencia de la velocidad en el centro de la salida como función de  $R$ . La línea sólida es el mejor ajuste y la línea punteada representa  $v_c = \sqrt{2gR}$ . Imágen tomada de la referencia [25].

Para ello comienzan analizando el perfil de velocidad para valores de  $R$  (con  $R = D/2$ ) entre 2.08 y 17.8 mm (fig. 2.3a). Es evidente cómo los perfiles parecen seguir la misma función suave independientemente del tamaño de salida. Aprovechando esta característica ellos hicieron un reescalamiento de todas las gráficas en una sola curva (fig. 2.3b) junto con la función  $\frac{v}{v_c} = \sqrt{1 - (x/R)^2}$ , donde  $v_c$  es la velocidad medida en el centro del orificio. Dicha función puede ser obtenida del razonamiento siguiente: asumiendo que existe un arco parabólico,  $y = h[1 - (\frac{x}{R})^2]$ , de altura  $h$  justo sobre la salida del silo a partir del cual los granos están sometidos a caída libre, se puede considerar que la velocidad de caída de las partículas en esta zona es  $v^2 = 2gy$ , de modo que podemos escribir la distribución de velocidades de salida a lo largo de la apertura como:

$$v(x) = \sqrt{2gh} \sqrt{1 - (x/R)^2} = v_c \sqrt{1 - (x/R)^2} \quad (2.5)$$

La dependencia de  $v_c$  con  $R$  se observa en la (fig. 2.3c). Al ajustar los datos con la expresión  $v_c = \sqrt{2g\gamma R}$ , asumiendo que la altura del domo debe ser proporcional al tamaño de salida del silo, encuentran que  $\gamma = 1.07 \pm 0.015$  lo que significa que la altura del domo parabólico es sólo 7% más grande que el radio del orificio, considerando  $v_c = \sqrt{2gR}$  como una buena aproximación (línea punteada en fig. 2.3c).

En el caso del perfil de fracción de volumen a lo largo de la apertura  $\phi(x)$ , siguieron el mismo procedimiento, reescalando las curvas con la función  $\frac{\phi}{\phi_c} = (1 - (x/R)^2)^{1/\nu}$ , donde  $\phi(x)$  corresponde a la fracción de volumen en el centro de la apertura, y obtienen el mejor ajuste con  $1/\nu = 0.22$  (fig. 2.4 a y b). Al observar la dependencia de  $\phi_c$  respecto a  $R$  (fig. 2.4 c) se puede notar que tiene un comportamiento que corresponde a un aumento asintótico, mismo que puede ser ajustado por una saturación exponencial de la forma  $\phi_c(R) = \phi_\infty[1 - \alpha_1 e^{-R/\alpha_2}]$ , donde  $\phi_\infty$  –valor asintótico de la fracción de volumen para grandes orificios–,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son parámetros de ajuste con valores  $\phi_\infty = 0.83 \pm 0.01$ ,  $\alpha_1 = 0.50 \pm 0.01$  y  $\alpha_2 = 3.3 \pm 0.05$  mm. En este ajuste, el carácter de magnitud de  $\alpha_2$  indica que los extremos del orificio tienen una influencia significativa en la fracción de volumen

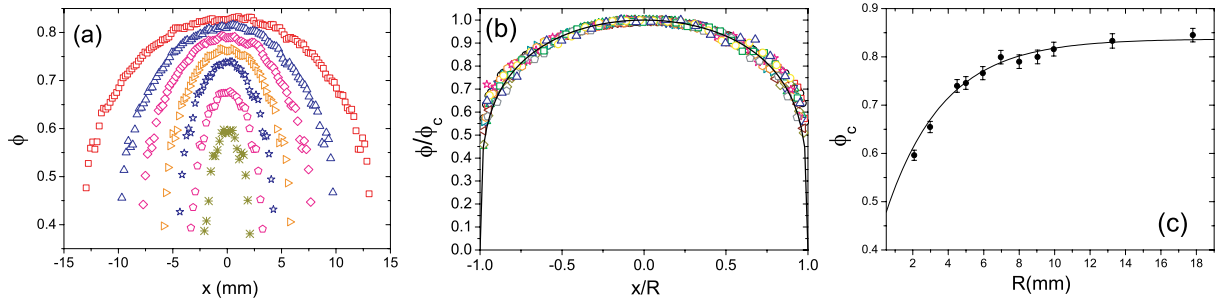


Figura 2.4: a) Perfiles de densidad para diferentes tamaños de aperturas. b) Colapso de los perfiles de los datos mostrados en a). La simbología es la misma que en la figura 2.3 c) Dependencia de la de la fracción de volumen en el centro de la salida como función de  $R$ . La línea sólida es el mejor ajuste. Imágen tomada de la referencia [25].

resultante para orificios más chicos que 6 veces el diámetro de las partículas. El significado de  $\alpha_1$  es más sutil: cuando el tamaño del orificio decrece aproximándose al tamaño del grano, el valor de la fracción de volumen tiende a un valor finito (0.48) controlado por  $\alpha_1$ , siendo éste obtenido al asumir la situación hipotética en la que los granos caen a través del orificio uno por uno desde una altura igual a  $R$  (0.52). Así mismo, la magnitud de  $\phi_\infty$  indica que el material que atraviesa el orificio tiene una densidad menor que la densidad de bulto (mayor que 0.9). De modo que la distribución del perfil de densidad justo a la salida del silo es de la forma:

$$\phi(x) = \phi_\infty [1 - \alpha_1 e^{-R/\alpha_2}] (1 - (x/R)^2)^{1/\nu} \quad (2.6)$$

Ahora, asumiendo que ambos perfiles (de velocidad y de densidad) son estacionarios, A. Janda *et al.* calculan la razón de flujo usando argumentos de conservación de masa por medio de la integral:

$$W = \frac{2}{m} \int_0^R \sigma \phi(x) v(x) dx \quad (2.7)$$

donde  $m$  es la masa de las partículas y  $\sigma$  es la densidad de superficie, puesto que están estudiando la proyección bidimensional del problema, obteniendo así que:

$$W = C'' \sqrt{g} \phi_\infty \left[ 1 - \alpha_1 e^{-R/\alpha} \right] R^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

donde la constante  $C'' = 4\beta \left( \frac{\nu+2}{2\nu}, \frac{1}{2} \right) / \pi d^2$  depende del diámetro de las partículas  $d$  y de la magnitud de la curvatura del perfil de densidad,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son parámetros de ajuste y  $R = D/2$ , con  $D$  el tamaño de la abertura del silo. La predicción de la ec. 2.2 coincide muy bien con los resultados experimentales, aunque presenta una pequeña discrepancia con valores pequeños de la apertura, misma que puede ser atribuida a la formación de arcos que bloquean el flujo de salida de manera intermitente, por lo que el flujo presenta fluctuaciones.

Todos los estudios hasta ahora descritos, consideran partículas que interactúan a través de fuerzas de contacto; es decir, cada uno de los granos está en contacto directo con sus vecinos. Pero, ¿qué sucede si las partículas interactúan a través de un potencial diferente, por ejemplo, una repulsión a distancia? El siguiente capítulo se enfocará en el problema principal de esta tesis: encontrar una ecuación que describa la descarga de material granular con interacción repulsiva.

---



# 3

## Descarga de granos con interacción repulsiva en un silo bidimensional

Durante una descarga de un silo típico, la razón de flujo de material que escapa a través de la apertura está determinado por las fuerzas de contacto entre los granos. Sin embargo, se ha demostrado recientemente que la relación de Beverloo falla para pequeños orificios en los que es posible la obstrucción [24], y en el trabajo de A. Janda, I. Zuriguel y D. Maza [25] se constató que los perfiles de densidad y velocidad son auto-similares en toda la gama de aberturas, donde la razón de flujo  $Q$  debe ser modificada por un factor exponencial relacionada con la menor densidad de material cerca de la salida.

Hasta ahora, todos los estudios sobre materia granular que fluye a través de aberturas, involucraban partículas que interactúan a través de fuerzas de contacto. En esta tesis, se presentan resultados experimentales relativos a un material granular repulsivo que fluye en un silo de dos dimensiones. Los granos son imanes cilíndricos que se repelen entre sí, con un potencial altamente no lineal. Si no están demasiado cerca uno del otro, los imanes individuales pueden ser considerados como dipolos magnéticos. La fuerza  $\vec{F}(r, \theta)$  entre dos dipolos magnéticos separados por una distancia  $r$  con un ángulo  $\theta$  entre la dirección del campo magnético y la línea que une los centros de dipolo está dado por:

$$\vec{F}(r, \theta) = \frac{3\mu m^2}{4\pi r^4} [(1 - 3\cos^2\theta) \hat{r} + \sin 2\theta \hat{\theta}] \quad (3.1)$$

donde  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío. La influencia de esta interacción magnética en el flujo de materiales granulares densos ha sido ya considerado en un estudio anterior [29]. En la configuración actual,  $\theta = 90^\circ$ . Por lo tanto, la fuerza de repulsión no lineal entre dos granos en

el silo es de la forma  $F(r) = \frac{3\mu_0 m^2}{4\pi r^4}$ . Teniendo en cuenta esta interacción repulsiva, investigamos la velocidad de flujo en la salida del silo para diferentes tamaños de abertura y su relación con el perfil de velocidad a lo largo de la abertura del silo y con la densidad detrás de la abertura.

De esta manera, se pretende estudiar, de manera experimental y computacional:

- La descarga de materia granular con interacción repulsiva, para determinar cuál es la dependencia entre la razón de descarga con el tamaño de la abertura, y qué nuevas consideraciones deben agregarse a los estudios realizados con partículas sin repulsión.

### 3.1. Diseño experimental

Un conjunto de  $N_{tot} = 565$  cilindros magnéticos de neodimio de espesor  $t = 3.0 \pm 0.02$  mm, diámetro  $d = 5.0 \pm 0.02$  mm, masa  $m = 0.4$  g y, de acuerdo al fabricante, campo magnético en la superficie  $H = 5.9$  kG, se introducen en un silo bidimensional. Las paredes frontales del silo consisten en dos placas de vidrio transparentes separados por  $3.10 \pm 0.05$  mm y las paredes laterales son barras de neodimio (con el mismo valor de H que los imanes cilíndricos) con su magnetización orientada perpendicularmente a las paredes de vidrio. Los granos se introdujeron cuidadosamente con la misma orientación con el fin de obtener la repulsión de grano-grano y la interacción grano-pared (fig. 3.1). El silo está dividido en dos compartimentos separados por una compuerta móvil y la estructura está montada en un borde que se puede girar con el fin de recargar el compartimento superior después de cada descarga. La inclinación de las puertas se fijó en  $\alpha = 22^\circ$  para asegurar la descarga completa de los 565 imanes. Una vez que el compartimento superior está cargado, el tamaño de la abertura D se fija con el flujo inicialmente bloqueado por un interruptor electromecánico. Cuando el interruptor se apaga, los granos comienzan a fluir y la descarga es grabada con una cámara de alta velocidad a 250 fps. Debido a que las partículas no tienen contacto, es fácil rastrear las partículas de los vídeos mediante Mathematica para obtener sus posiciones, velocidades y la razón de flujo.

#### Experimento: preparación y puesta en marcha

Una vez montado el dispositivo experimental, se procedió a realizar las mediciones. A continuación se describe el procedimiento seguido durante cada experimento, paso a paso:

- Una vez colocados todos los imanes cilíndricos en el sistema, con las compuertas cerradas, se coloca un “seguro” por fuera (barra magnética con los polos alineados en sentido opuesto a los imanes cilíndricos que se encuentran dentro del silo), justo sobre la zona que ocupará la salida de la compuerta, de modo que los imanes que estén más próximos a ésta barra quedarán fijos por la atracción con el seguro, y permitirá fijar el tamaño de la abertura D, sin que los imanes caigan de manera no controlada.
- Se ajusta la iluminación y se coloca la cámara de alta velocidad de modo que se enfoque en la parte superior del silo y la compuerta.

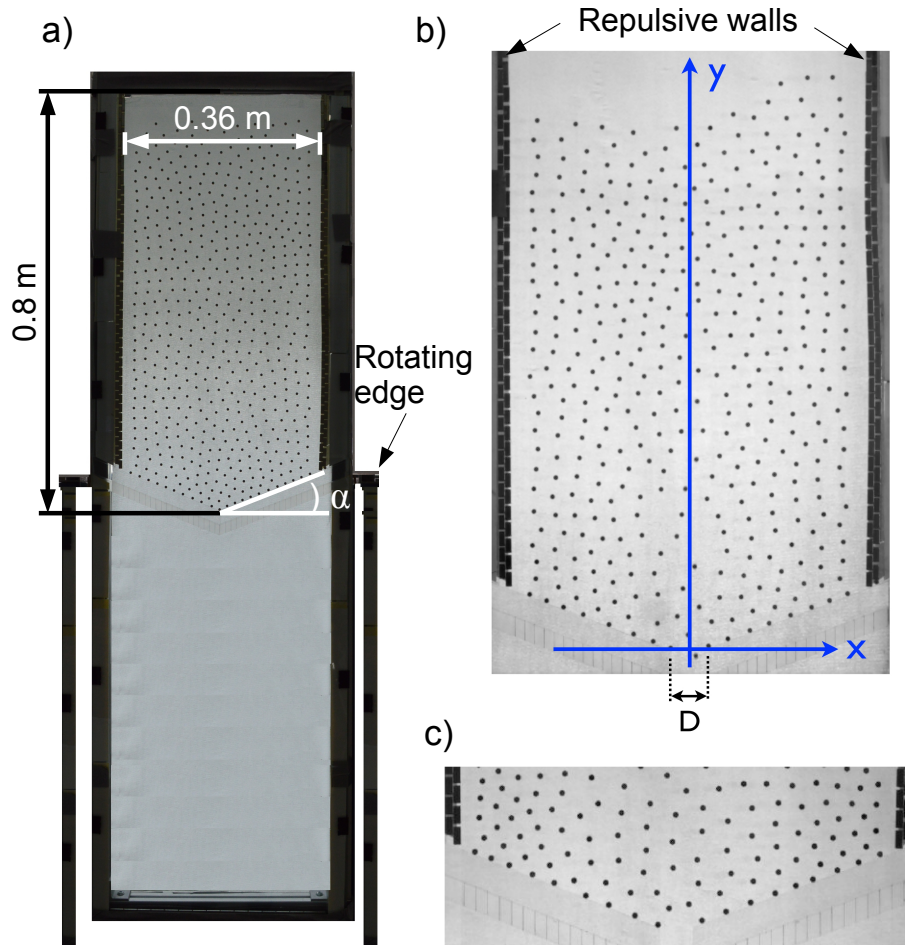


Figura 3.1: a) Arreglo experimental de reloj de arena con material granular repulsivo: Celda Hele-Shaw vertical de 1.5m x 0.5 m x 3 mm (alto-largo-ancho). La celda se divide en dos partes y tiene una compuerta de descarga de tamaño variable. En la parte superior de la celda se introducirán de 1 a 565 imanes cilíndricos con sus dipolos dirigidos en el mismo sentido, con el fin de obtener un efecto repulsivo entre ellos (la geometría cilíndrica evita que los imanes puedan rotar y que el sistema se colapse). El sistema se encuentra sujeto por esquinas que le permiten rotar. b) Detalle de las paredes magnéticas de los lados y la abertura del sistema. c) Acercamiento a un evento de atasco en la descarga del sistema, la abertura es menor a 4 cm.

- Se comienza a grabar al mismo tiempo que se retira el seguro.
- La grabación se detiene cuando ya no hay imanes en el contenedor del silo.

Este proceso se repitió para diferentes valores de la abertura de salida  $D = 4 \text{ cm}, 6 \text{ cm}, 8 \text{ cm}, 10 \text{ cm}, 12 \text{ cm}, 15 \text{ cm}, 18 \text{ cm}, 22 \text{ cm}, 26 \text{ cm}, 30 \text{ cm}, 36 \text{ cm}$ . Posteriormente, se utilizó el software Mathematica, donde se procesaron los fotogramas del video de alta velocidad, para obtener

mediciones de los tiempos asociados a la descarga del silo.

### 3.1.1. Simulaciones numéricas

De manera paralela al desarrollo de las pruebas experimentales, se usó dinámica molecular para simular discos de dos dimensiones con un potencial repulsivo, a manera de replicar la repulsión imán-imán de las partículas del silo utilizado para nuestros experimentos. Puesto que, al analizar todos los videos de alta velocidad, se ha visto que en ningún momento se produce un contacto físico entre las partículas magnéticas, no es necesario considerar el cálculo de colisiones.

La fuerza de repulsión entre las partículas se simuló con la siguiente expresión:

$$F(r) = \frac{3\mu_0 m^2}{4\pi r^4} \quad (3.2)$$

donde  $\mu_0$  es la permeabilidad del espacio,  $m$  es la magnetización del imán,  $r$  corresponde a la distancia entre los centros de cada imán. Se utilizó el algoritmo de velocidades de Verlet para integrar las ecuaciones de movimiento; el cual, se puede resumir en calcular posiciones ( $\vec{x}_i$ ), velocidades ( $\vec{v}_i$ ) y aceleraciones ( $\vec{a}_i$ ) correspondientes al siguiente paso en el tiempo, conociendo las mismas al tiempo actual, esquematizándose en las siguientes ecuaciones:

$$\vec{x}_i(t + \Delta t) = \vec{x}_i(t) + \vec{v}_i(t) \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a}_i(t) \Delta t^2 \quad (3.3)$$

$$\vec{v}_i(t + \Delta t) = \vec{v}_i(t) + \frac{\vec{a}_i(t) + \vec{a}_i(t + \Delta t)}{2} \Delta t \quad (3.4)$$

$$\vec{a}_i(t + \Delta t) = \frac{\vec{F}_i(x_i(t)) + \vec{\xi}_i}{m_i} \quad (3.5)$$

donde  $t$  y  $t + \Delta t$  corresponden al paso actual y posterior en el tiempo, el subíndice  $i$  indica la identidad de la partícula de la que se está haciendo el cálculo y  $\vec{\xi}$  denota el término disipativo o de fricción.

La simulación comienza con 565 discos colocados en un arreglo rectangular con velocidades aleatorias tomadas de una distribución gaussiana. Los discos son dejados caer bajo gravedad a través del silo. Una vez que todos los granos han caído y el cambio en el promedio de la energía cinética de todas las partículas entre dos pasos consecutivos de la simulación es menor que un cierto valor  $\varepsilon = 0.0001 J$ , esto para asegurar un estado cuasi-estático al iniciar la simulación, se abre la compuerta del fondo del silo y los granos caen. El flujo es medido al contar el número de partículas que han caído por cada paso de tiempo en la simulación.

En este caso se consideró  $\vec{\xi} = \lambda \vec{v}_i$  como una fuerza de arrastre viscoso como buena aproximación, siendo que los imanes están en contacto todo el tiempo con las paredes de vidrio de la celda y dentro de la misma existe aire que opone resistencia a la caída de las partículas.

Las paredes del contenedor y las pendientes inclinadas son construidas con partículas con y sin potencial repulsivo, respectivamente, que mantienen su posición fija, de modo que los choques

entre las pendientes y los imanes se consideran cuando la distancia  $r$  entre los centros de dos discos es menor a dos veces el radio de las partículas; en ese momento se aplica una fuerza repulsiva en la dirección normal de la colisión, proporcional al traslapamiento, previniendo que los granos se traslapen uno sobre otro.

Durante la simulación, el nivel de granos se mantiene constante al reintroducir los granos existentes en la parte superior del silo. Esta condición permite despreciar cualquier efecto de las paredes o del método de llenado que afecte la razón de flujo. La condición de parada será entonces el tiempo en el que el código haya contado que 565 imanes pasaron por la salida del silo. Para más detalles ver Apéndice 1.

Se hicieron simulaciones con arrastre y sin arrastre viscoso (ocasionado por el aire) y fricción (por las paredes) para determinar si el confinamiento era un factor determinante en los resultados observados.

## 3.2. Resultados obtenidos

Como parte de este estudio, se han obtenido resultados, los cuales corresponden al tiempo de descarga de un reloj de arena de materia granular repulsiva en función del tamaño de la apertura del mismo. Tres videos [30] muestran el flujo de los granos magnéticos en los casos en que  $D = 0.03 m$ ,  $D = 0.08 m$  y  $D = 0.18 m$ . Para  $D = 0.03 m$ , se observa un flujo intermitente y la formación de un arco o atascamiento. Centramos el análisis en el flujo en régimen continuo. Por debajo del tamaño de la apertura ( $D < 4cm$ ), se ha observado la formación de arcos magnéticos en la salida del silo (fig. 3.1c), mismos que son capaces de bloquear el flujo de material granular en el sistema. De igual manera, determinar ¿cómo depende el tamaño mínimo de la apertura con respecto al campo magnético? es una pregunta abierta que deberá investigarse a futuro, variando la intensidad del campo magnético de los imanes. El análisis de la probabilidad de la formación de arcos está también fuera del alcance del presente estudio. Antes de que ocurra una formación de arco magnético, podemos observar un flujo continuo. Además, como con materiales granulares clásicos [20], un arco se puede romper con vibraciones para recuperar un flujo continuo. Por lo tanto, se hace el análisis de los resultados teniendo en cuenta que no se aplicó vibración alguna al sistema.

Las primeras mediciones que se obtuvieron fueron los tiempos de descarga (o vaciado) del silo para cada valor de apertura de salida contemplada. En la fig. 3.2 se observa la evolución de las descargas, es decir, se grafica el número de imanes que prevalecen en la parte superior del silo (denotado como  $N$  en la gráfica) conforme el sistema evoluciona en el tiempo ( $t$  en segundos), datos obtenidos mediante el análisis de los videos con el software ImageJ. Cada color corresponde a un tamaño de apertura (desde  $4 cm$  hasta  $36 cm$ ) y se realizaron 4 repeticiones por cada una de éstas. Es importante observar que cada gráfica comienza en  $N=565$  y termina en 0. La línea punteada se agregó posteriormente para poder visualizar de mejor manera las zonas donde ya no se aprecia un comportamiento lineal del flujo de descarga (zona debajo de la línea punteada) durante la descarga del silo. La aparición de dicho comportamiento no lineal en la descarga se puede deber a que al final del vaciado del silo, quedan partículas rezagadas en zonas cercanas a la unión de las compuertas

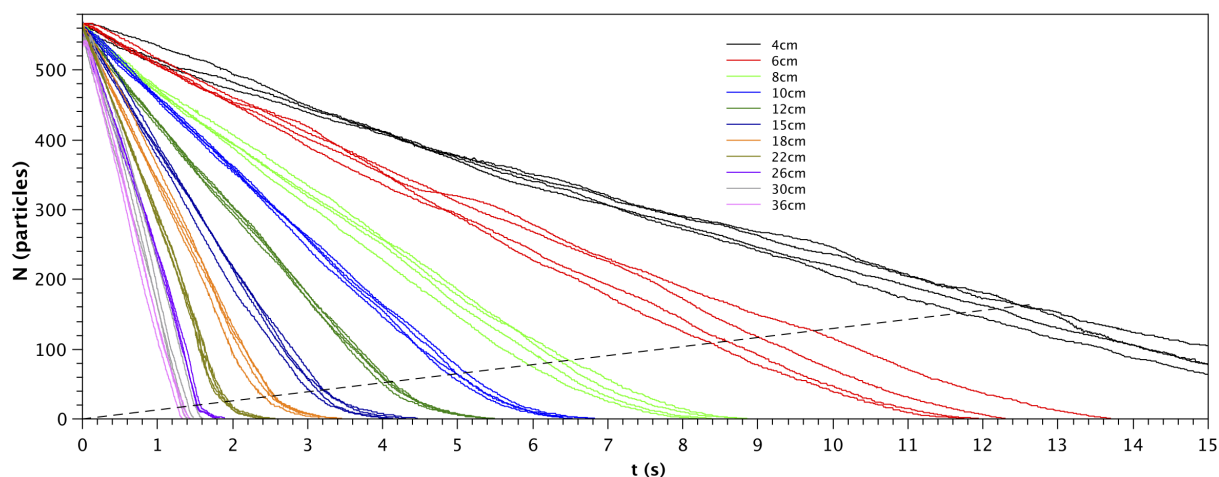


Figura 3.2: Conteo de partículas dentro del silo en función del tiempo para cada experimento realizado.

con las paredes magnéticas, presentando éstas un movimiento más lento que las demás.

La fig. 3.3a muestra la fracción de granos que salieron del silo  $N_{out}/N_{tot}$  como función del tiempo para 4 tamaños representativos de abertura  $D$ . Las curvas presentan un comportamiento lineal, con excepción de la parte final del proceso de vaciado. Por lo tanto, como en el caso en el que los granos tienen contacto, el flujo es predominantemente constante durante la descarga del silo.

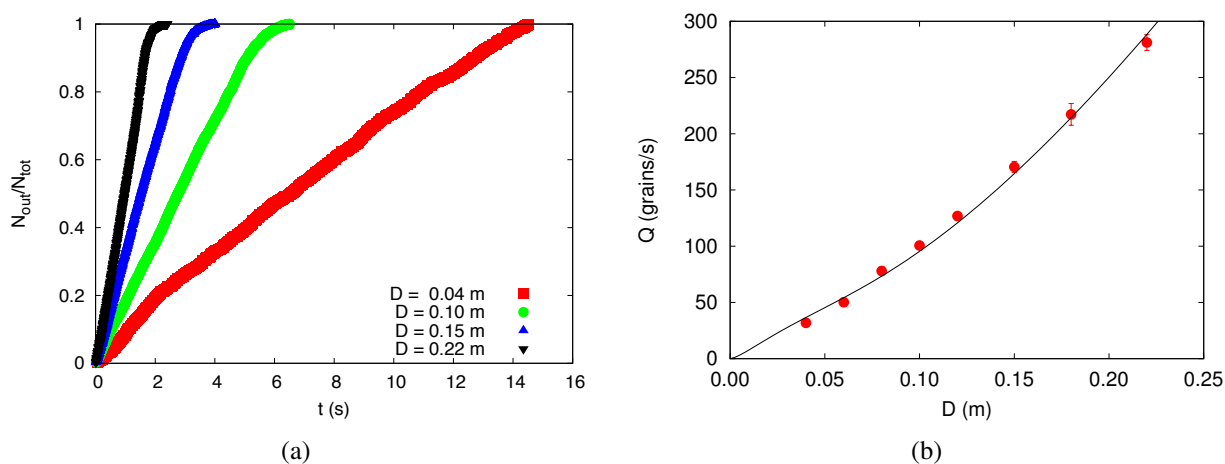


Figura 3.3: (izq.) Fracción de granos que han escapado del silo  $N_{out}/N_{tot}$  como función del tiempo para diferentes tamaños de apertura. (der) Razón de flujo  $Q$  como función del tamaño de la abertura del silo  $D$ . La línea continua corresponde a la relación de Beverloo con un factor exponencial agregado (ec. 3.10). Cada punto se calculó de un promedio de 3 experimentos con las barras de error indicadas (en algunos valores las barras de error son del tamaño del punto).

### 3.2.1. Análisis

Considerando la idea de que el mecanismo de bloqueo en la descarga de un silo con material granular se debe a la formación de arcos semicirculares justo sobre la apertura [20,23], tendríamos que la velocidad promedio de salida de los granos justo al pasar por la apertura es de la forma:

$$\langle v_{out} \rangle = \sqrt{2g\beta D} \quad (3.6)$$

Para el caso de granos con contacto, dicho arco tiene un tamaño proporcional a la apertura, es decir,  $\beta = 0.5$ .

De acuerdo a la mecánica de flúidos, la razón de flujo  $Q$  es proporcional a la velocidad media de los granos  $\langle v_{out} \rangle$  en la salida, a la densidad media de los granos  $\langle \rho \rangle$  en la salida y al tamaño de la abertura  $D$ . Por lo tanto, se puede escribir la relación general para la razón de flujo de material granular en silos de dos dimensiones como:

$$Q = \langle \rho \rangle \langle v_{out} \rangle D \quad (3.7)$$

La densidad de los granos  $\langle \rho \rangle$  se expresa en granos por unidad de superficie. Entonces, la ecuación de Beverloo para silos bidimensionales es:

$$Q = \langle \rho \rangle \sqrt{2g\beta D} (D - kd) \quad (3.8)$$

Se ha demostrado recientemente que la relación del Beverloo falla para pequeños orificios en los que es posible la obstrucción [24], y recientemente [25], se constató que los perfiles de densidad y velocidad son auto-similares en toda la gama de aberturas, donde la razón de flujo  $Q$  debe ser modificada por un factor exponencial relacionada con la menor densidad de material cerca de la salida.

Por otro lado, tenemos que el comienzo (parte lineal) de cada curva ha sido ajustado por una ley lineal para obtener la razón de flujo  $Q$ . La evolución de la razón de flujo  $Q$  (expresado en granos por segundo) en función del tamaño de la abertura  $D$  se presenta en la fig. 3.3b (puntos rojos). Esta razón de flujo puede ser ajustada con la relación clásica de Beverloo (ec. 3.8) para grandes orificios. Sin embargo, el ajuste falla para pequeñas aberturas. Para calcular la velocidad de flujo en todo el rango de tamaños de orificios (línea negra), se ha añadido un factor exponencial a la ec. 3.7, mismo que se aprecia en la ec. 3.10, obteniéndose un buen ajuste en todo el rango. Con el fin de investigar el origen de este factor, se ha analizado la velocidad de los granos y la densidad de los granos en la salida del silo.

A partir del seguimiento de las trayectorias de granos durante la descarga, se ha medido la velocidad de los granos  $v_{out}$  en la salida del silo. La evolución temporal de la velocidad de los granos  $\langle v_{out} \rangle$  en la salida del silo se presenta en la fig. 3.4a. La notación  $\langle \rangle_x$  corresponde a un promedio sobre la abertura. El tiempo se ha normalizado por el tiempo de descarga total del silo  $T$ . Para los tamaños pequeños de abertura ( $D < 0.15m$ ), la velocidad de salida es más o menos constante durante la descarga, a excepción del final del proceso. Sin embargo, para mayores tamaños de la abertura ( $D > 0.15m$ ), la velocidad de salida aumenta con el tiempo. Este aumento es, sin duda,

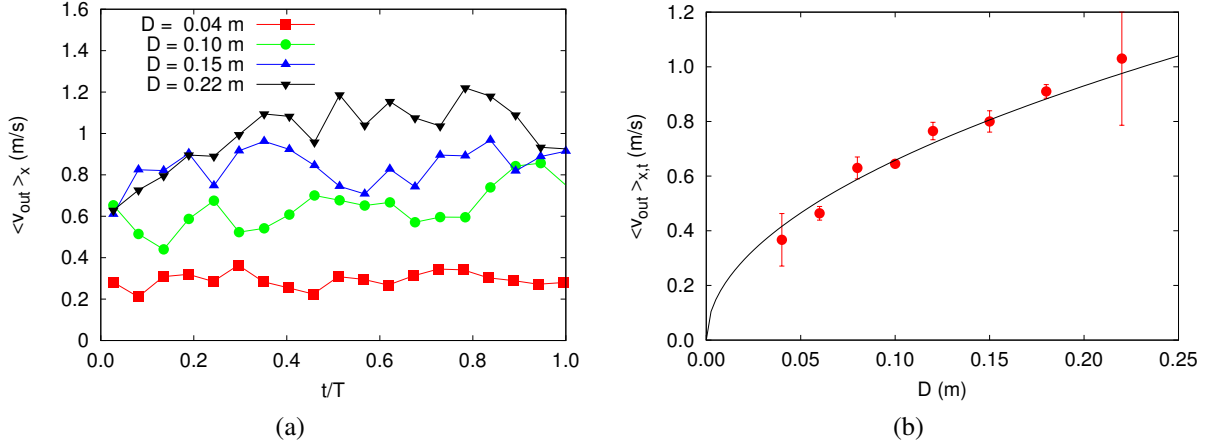


Figura 3.4: (izq.) Evolución temporal de la velocidad de los granos promediada sobre la abertura del silo  $\langle v \rangle_x$  para diferentes tamaños de apertura. El tiempo está normalizado por el tiempo total de descarga  $T$ . (der) Evolución de la velocidad de los granos  $\langle v \rangle_{x,t}$  en la apertura del silo como función del tamaño de apertura  $D$ . La línea continua corresponde a un ajuste de la ecuación 3.6. Cada punto se calculó de un promedio de 3 experimentos con las barras de error indicadas (en algunos valores las barras de error son del tamaño del punto).

debido al tamaño finito del silo puesto que en el régimen de aberturas cada vez más grandes se estaría llegando al límite de caída libre de las partículas al abrir la compuerta, de modo que toda la columna de partículas magnéticas que se encuentra sobre los granos más cercanos a la apertura tendería a moverse como un todo, es decir, en los experimentos con aberturas pequeñas se observa que, mientras los granos situados en el fondo del silo son descargados, los que se encuentran en la parte superior no se ven afectados (la señal de información de descarga viaja más lenta ó “no se enteran”); así mismo, esto da pie a que la misma descarga de los granos rompa los pozos de potencial magnético a los que están sometidas todas las partículas que no se encuentran en la superficie. Experimentalmente esto podría evitarse (efecto de silo finito) utilizando un silo mucho más grande y con un número muchísimo mayor de partículas magnéticas, pero las limitaciones prácticas lo hacen poco viable por el momento.

La evolución de la velocidad de los granos  $\langle v_{out} \rangle_{x,t}$ , en la salida del silo como una función de  $D$  se presenta en la fig. 3.4b. La notación  $\langle \rangle_{x,t}$  corresponde a un promedio sobre la abertura y sobre todo el tiempo de descarga. El aumento de la velocidad con respecto a  $D$  está bien ajustado (factor de ajuste  $R^2 = 0.9971$ ) por una ley de raíz cuadrada de la ec. 3.6, con  $\beta = 0.220 \pm 0.002$ . En los materiales granulares, esta ecuación da a los granos la velocidad correspondiente a una caída libre desde una altura  $\beta D$ , donde  $\beta$  es un factor geométrico igual a 0.5. En el caso de materiales granulares magnéticos, la asociación del flujo de tapón (velocidad de salida de partículas uniforme a lo largo de la abertura) y la caída libre con  $\beta = 0.22$  permite concluir que los granos están experimentando una caída libre en una región rectangular situada por encima de la abertura. La altura de esta región rectangular es  $0.22D$ .

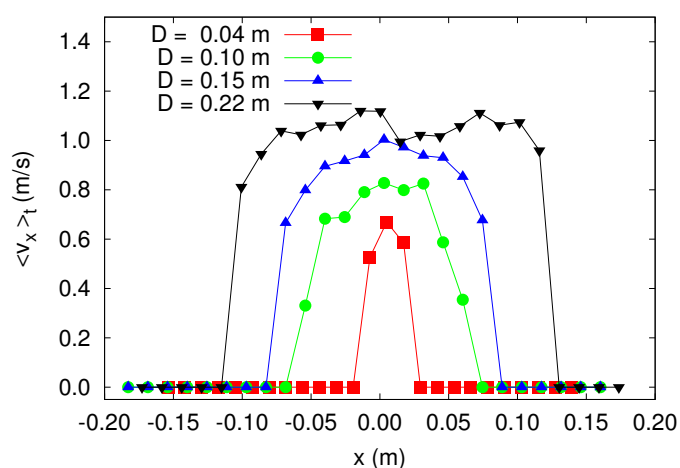


Figura 3.5: Perfil de velocidades de los granos promediado en el tiempo  $\langle v \rangle_t$  a lo largo de la dirección de la apertura del silo para diferentes tamaños de  $D$ .

La fig. 3.5 muestra el perfil de velocidad a lo largo de la abertura del silo. La velocidad se promedió sobre todo el tiempo de descarga  $T$  y se fijó igual a cero para valores mayores a la abertura considerada puesto que no hay salida de partículas en esas zonas. Se puede observar una velocidad promedio de salida de las partículas que se mantiene constante a lo largo de la abertura excepto cuando nos acercamos a los extremos de ésta, puesto que las partículas cercanas a los bordes de la abertura, no fluyen con la misma facilidad que las demás al estar en contacto directo con las compuertas y soportar el peso de las partículas que se encuentran sobre ellas, necesitando romper los pozos de potencial a los que están sometidas. Este flujo con velocidad prácticamente constante constituye una fuerte diferenciación con flujos granulares clásicos [25], donde la velocidad de salida presenta una marcada dependencia respecto a la distancia del centro de la abertura, siendo máxima en la zona central y decayendo rápidamente hacia las compuertas (este comportamiento se le conoce como flujo de campana).

La densidad de los granos  $\langle \rho \rangle_x$  justo encima de la salida es el número de partículas cuyo centro de masa se encuentra dentro de una caja de medición dividido entre la superficie de ésta última. La caja de medición es un rectángulo de anchura  $D$  y altura  $10d$  situada justo detrás de la abertura. La evolución temporal de la densidad se observa en la fig. 3.6a para diferentes valores de  $D$ . Al principio, se observa una disminución rápida de la densidad, luego la densidad alcanza un valor de saturación. Finalmente, cerca de 70% del tiempo total de la descarga, la densidad disminuye hasta el vaciado del silo. La densidad promediada en el tiempo de descarga para cada tamaño de abertura  $\langle \rho \rangle_{x,t}$ , se evalúa durante el régimen constante. La fig. 3.6b muestra la densidad promediada en el tiempo  $\langle \rho \rangle_{x,t}$  sobre la salida como una función del tamaño de la abertura  $D$ . La densidad comienza a disminuir con el tamaño de la abertura. Esta disminución constituye también una diferenciación con flujos granulares clásicos [25].

El decremento de la densidad como función del tamaño de la abertura, se ajusta bien (factor de ajuste  $R^2 = 0.9826$ ) a una ley de exponencial decreciente, con la forma:

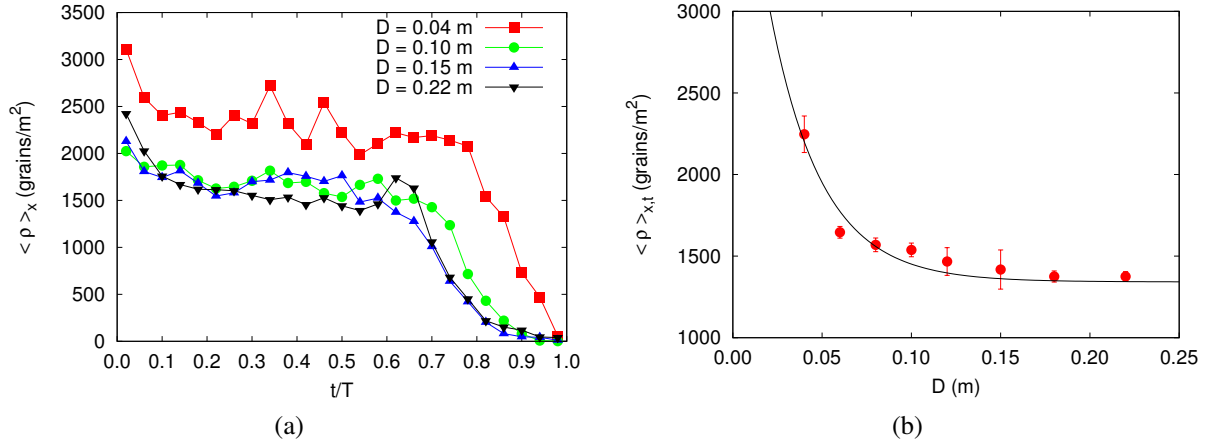


Figura 3.6: (izq.) Evolución de la densidad de los granos  $\langle \rho \rangle_x$  promediada sobre la apertura. La zona de medición es un rectángulo tamaño de largo  $D$  y altura  $10d$ , situada justo detrás de la apertura. (der) Densidad promediada  $\langle \rho \rangle_{x,t}$  sobre la apertura como función de la apertura del silo. La línea continua corresponde a un ajuste de la Ec. 3.9. Cada punto se calculó de un promedio sobre 3 experimentos con las barras de error indicadas (en algunos valores las barras de error son del tamaño del punto).

$$\langle \rho \rangle_{x,t} = \rho_\infty + (\rho_0 - \rho_\infty) e^{-D/\alpha} \quad (3.9)$$

con  $\rho_\infty = 1342 \pm 29$  granos/m<sup>2</sup>,  $\rho_0 = 4737 \pm 716$  granos/m<sup>2</sup> y  $\alpha = 0.029 \pm 0.004$  m. Juntando las ecuaciones 3.6, 3.7 y 3.9 obtenemos una versión modificada de la ley de Beverloo:

$$Q = \left[ \rho_\infty + (\rho_0 - \rho_\infty) e^{-D/\alpha} \right] \sqrt{2g\beta DD} \quad (3.10)$$

Esta relación es graficada en la fig. 3.3b con los parámetros  $\rho_0$ ,  $\rho_{inf}$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  obtenidos previamente del ajuste de la velocidad promedio y de la densidad como función del tamaño de la apertura  $D$ .

### 3.2.2. Simulaciones computacionales

A manera de corroborar los datos experimentales se realizaron simulaciones numéricas utilizando el lenguaje de programación Matlab por estar optimizado para hacer cálculos y manejar matrices de tamaños de variables, de las cuales se obtuvieron los siguientes resultados, después de haber realizado diversas pruebas.

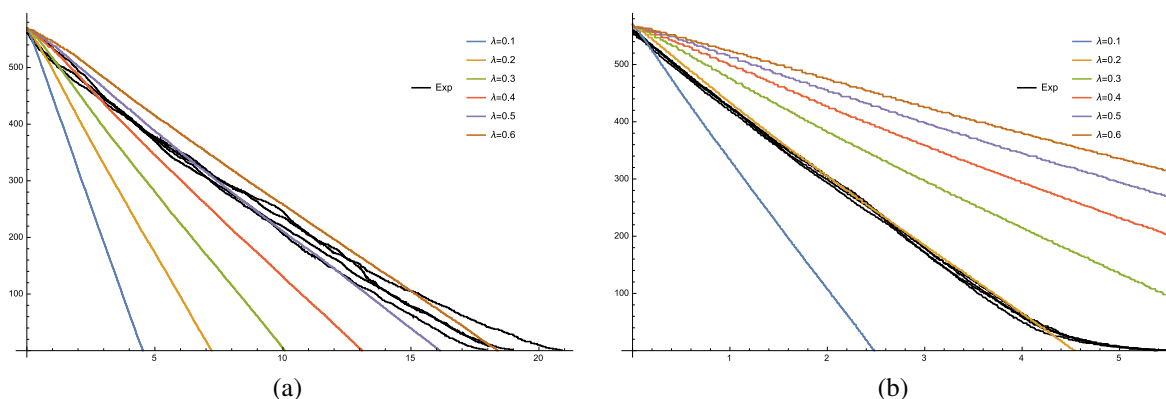


Figura 3.7: Comparación de tiempos de descarga de partículas dentro del silo, experimentalmente y en las simulaciones, para diferentes tamaños de apertura y diferentes valores de  $\lambda$ . Las líneas negras en cada gráfica corresponden a los tiempos de descarga medidos experimentalmente tomadas de la fig. 3.2 (izq.) Tamaño de apertura de 4cm. (der.) Tamaño de apertura de 12 cm.

Se puede apreciar en la fig. 3.7 que el parámetro que regula la fricción de las partículas en las simulaciones (que va como  $\lambda \vec{v}_i$  con  $i$  correspondiente a cada imán) hace que el tiempo de descarga sea menor o mayor aunque el tamaño de la apertura no varíe. Por ello se procedió a obtener los valores de los parámetros del coeficiente de fricción, que daban como resultado el tiempo de descarga más cercano al obtenido en el experimento, para cada valor del tamaño de apertura del silo y los valores que se encontraron están en la fig.3.8.

Graficando los valores del coeficiente de fricción ( $\lambda$ ) en función del tamaño de apertura de la simulación y ajustando la curva que más se asemeje al patrón obtenido, encontramos que siguen una relación tipo inverso ( $x^{-1}$ ) puesto que los parámetros arrojados al hacer el ajuste fueron  $a = 0.0304$  y  $b = 0.8853$  que es muy cercano a 1.

Así mismo, una vez conocidos los valores del coeficiente de fricción necesarios para reproducir los resultados de los tiempos de descarga medidos en los experimentos, se procedió a calcular los parámetros obtenidos en la sección 3.2.1, usando la técnica de perfil de velocidad y perfil de densidad de granos justo en la salida del silo en las simulaciones realizadas.

Para el caso del perfil de velocidades en las simulaciones numéricas, se procedió de la misma manera que en el caso de las mediciones experimentales, promediando el valor de la velocidad de salida de las partículas al momento exacto de pasar por la salida del silo. En contraste con la gráfica 3.4, para  $D > 0.15$  m, la velocidad promedio de salida de los imanes prevalece hasta el final del

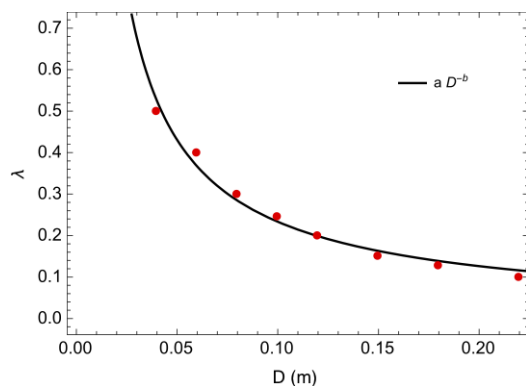


Figura 3.8: Ajuste de los coeficientes de fricción encontrados en la simulación en función del tamaño de la apertura del silo.

tiempo de descarga puesto que los imanes que salen, son regresados a la parte superior del silo, de modo que sigue habiendo un flujo continuo hasta el momento en que la simulación termina. Se puede apreciar que, como en la fig. 3.4, la velocidad promedio de salida de las partículas, aunque menor, tiene un comportamiento aproximadamente constante después del inicio de la simulación.

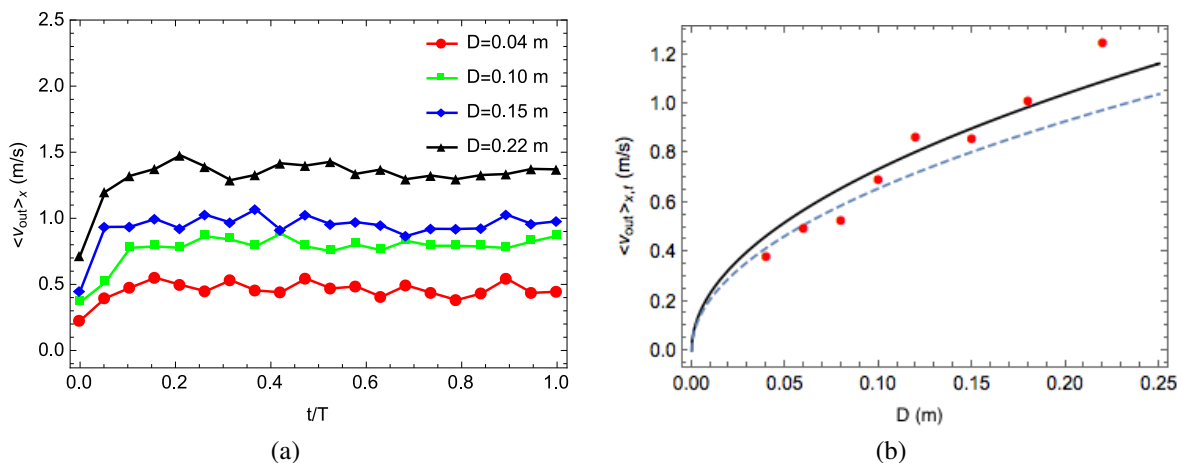


Figura 3.9: (izq.) Evolución temporal de la velocidad de los granos promediada sobre la abertura del silo  $\langle v \rangle_x$  para diferentes tamaños de apertura en las simulaciones numéricas. El tiempo está normalizado por el tiempo total de descarga T. (der) Evolución de la velocidad de los granos  $\langle v \rangle_{x,t}$  en la apertura del silo como función del tamaño de apertura D. La línea continua corresponde a un ajuste de los datos obtenidos de las simulaciones con la ec. 3.6 y la línea punteada corresponde al ajuste de los datos del experimento obtenida en la fig. 3.4.

La fig. 3.10 muestra el perfil de velocidad a lo largo de la abertura del silo en las simulaciones numéricas. Se siguió el mismo procedimiento que en el caso de las mediciones experimentales, donde la velocidad se promedia sobre todo el tiempo de descarga T y es cero para valores mayores

a la abertura considerada; puesto que no hay salida de partículas en esas zonas. Comparando con la fig. 3.5 podemos observar que si bien se mantiene una velocidad uniforme a lo largo de la salida del silo, el gradiente hacia los extremos de la apertura es más pronunciado en las simulaciones numéricas. Sin embargo sigue habiendo diferencia con los flujos clásicos.

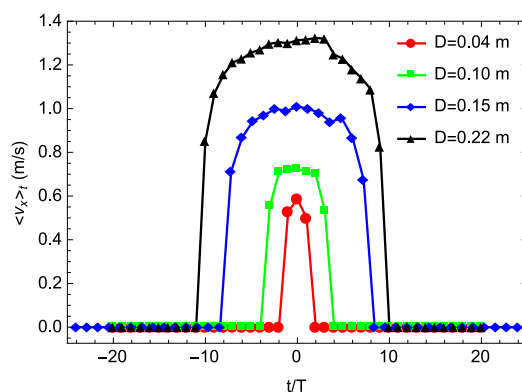


Figura 3.10: Perfil de velocidades de los granos en las simulaciones numéricas promediado en el tiempo  $\langle v \rangle_t$  a lo largo de la dirección de la apertura del silo para diferentes tamaños de  $D$ .

Al realizar el ajuste de los promedios temporales de las velocidades promedio de salida de las partículas en las simulaciones con la ec. 3.6, se obtuvo el valor de  $\beta_{sim} = 0.275546$ .

De igual forma, se procedió a obtener los perfiles de densidad en las simulaciones numéricas a lo largo de una caja rectangular de  $10d$  de alto y  $D$  de ancho centrada justo en la apertura del silo, siguiendo el mismo procedimiento que en el caso de las mediciones experimentales. La evolución de dicha densidad puede observarse en la fig. 3.11. Si se compara con la fig. 3.6, se aprecia que si bien la densidad de granos a la salida del silo no es uniformemente constante, se observa una tendencia estable durante la evolución de la descarga, recordando que los granos que salen son regresados al contenedor y no se produce un vaciado del mismo. Realizando un ajuste de los datos con la ecuación 3.9 se obtiene que los parámetros adquieren los valores  $\rho_{\infty sim} = 1589.26$  granos/ $m^2$ ,  $\rho_{0 sim} = 5049.47$  granos/ $m^2$  y  $\alpha_{sim} = 0.0177$ .

Una vez obtenidos estos parámetros a partir de las simulaciones numéricas, se procedió a hacer el ajuste de las razones de flujo de las descargas de los silos, en función del tamaño de la apertura. Puesto que se partió del hecho de que las descargas por cada valor de  $D$  en las simulaciones requerían un valor de  $\lambda$  diferente a modo de replicar los valores obtenidos en la parte experimental, sólo se realizó un ajuste de la ec. 3.10 utilizando los parámetros hallados, misma que se muestra en la fig. 3.12.

Comparando con la fig. 3.3, se observa que el ajuste encontrado al utilizar los parámetros calculados a partir de la simulación, sólo es bueno para aberturas pequeñas (4, 6 y 8 cm). Sin embargo, dicho ajuste difiere cada vez más con el encontrado experimentalmente y esto puede deberse a muchos factores; pero, principalmente a que el código empleado está en una fase temprana de desarrollo y aún no se modela numéricamente de manera adecuada la descarga de materiales granulares con un potencial repulsivo, es decir, alguna condición no percibida en los experimentos puede estar

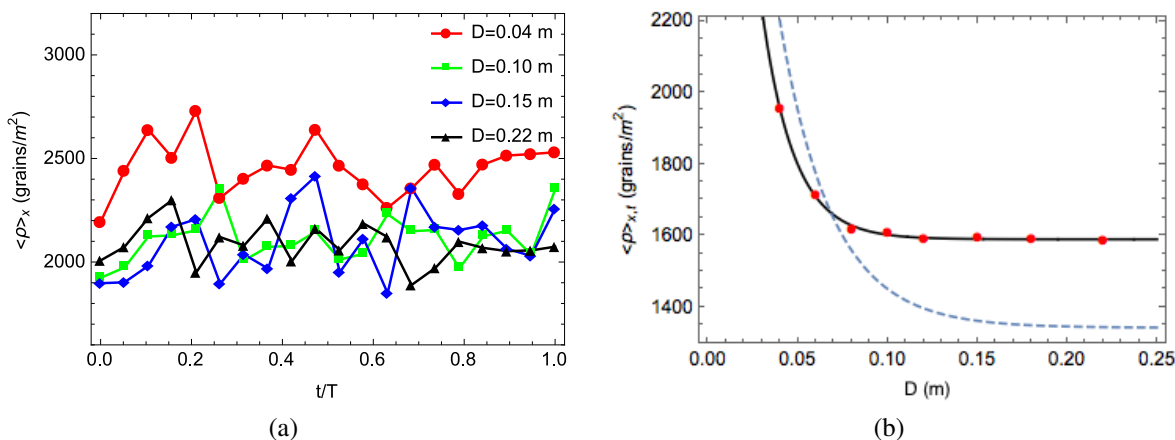


Figura 3.11: (izq.) Evolución de la densidad de los granos  $\langle \rho \rangle_x$  promediada sobre la apertura en las simulaciones numéricas. La zona de medición es un rectángulo tamaño de largo  $D$  y altura  $10d$ , situada justo detrás de la apertura. (der) Densidad promediada sobre la salida y el tiempo  $\langle \rho \rangle_{x,t}$  como función de la apertura del silo en las simulaciones numéricas. La línea continua corresponde a un ajuste de los datos obtenidos con la Ec. 3.9 y la línea punteada corresponde al ajuste de los datos del experimento obtenida en la fig. 3.6.

faltando ser considerada en las simulaciones. No obstante, es importante destacar que cualitativamente tanto las simulaciones como los experimentos describen el mismo comportamiento, entre los que destaca, la aparición de una dependencia de densidad invertida (aumentada) durante la descarga y el flujo tipo tapón. Estos resultados contrastan claramente con los observados durante las descarga de un silo clásico (densidad reducida y dependencia de velocidad tipo campana).

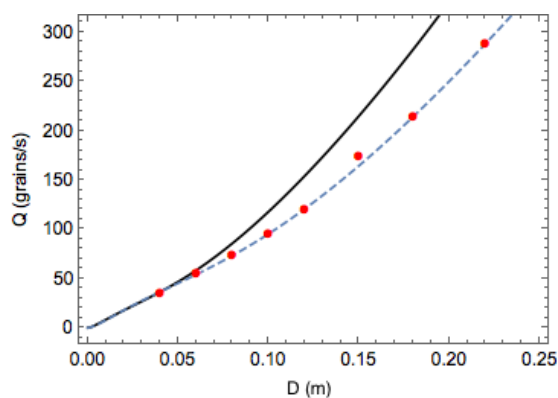


Figura 3.12: Razón de flujo  $Q$  como función del tamaño de la abertura del silo  $D$  para las simulaciones numéricas. La línea continua corresponde a un ajuste de los datos con la ec. 3.10 y la línea punteada corresponde al ajuste de los datos del experimento obtenida en la fig. 3.3.

# 4

## Conclusiones

La razón de flujo de la descarga de los granos magnéticos repulsivos a través de la salida de un silo de dos dimensiones se ha analizado experimentalmente. Un “flujo de tapón” se ha observado en la salida del silo con una velocidad de granos correspondiente a una caída libre en una región rectangular situada justo por encima de la salida. En comparación con el flujo de granos no magnéticos con contacto en la misma geometría, el flujo de tapón observado presenta una diferencia. Sin embargo, como en el caso de granos con contacto, el flujo es constante durante la descarga del silo. Así mismo, se encuentra que la densidad de los granos medidos justo por encima de la salida del silo disminuye exponencialmente con respecto al tamaño de la abertura. Esta disminución de la densidad, constituye una segunda diferencia en comparación con el caso de los granos con contacto. Finalmente, el análisis, tanto de la velocidad como la densidad de granos en la salida del silo, permite proponer una modificación a la ecuación de Beverloo que ajusta a la razón de flujo en función del tamaño de la apertura. Esta relación de Beverloo modificada, es la ley de potencias clásica con un exponente  $3/2$  asociado a una exponencial decreciente.

El enfoque utilizado en las últimas décadas para comprender mejor el complejo comportamiento de un material granular, es una fuente de inspiración para los científicos que estudian la dinámica de multitudes, los atascos, la etología, etc. La descarga del conjunto de granos magnéticos repulsivos considerados en el presente estudio, podría ser también un modelo de sistema interesante para comparar con las multitudes, coches y animales.

Por su parte, con la finalidad de corroborar los resultados experimentales, se realizaron simulaciones numéricas; las cuáles, si bien llegan a replicar los resultados experimentales, es necesario trabajar con varios valores de parámetros de control, tal como el coeficiente de fricción propuesto, lo que nos hace pensar que la dinámica utilizada en el código tiene que ser refinada para poder ser considerada como una buena versión ideal de lo que sucede en el caso de materiales granulares con potencial de repulsión.

El trabajo desarrollado en la presente tesis, dio paso para la redacción de un artículo en extenso sobre el tema, con arbitraje científico publicado en la revista *Papers in Physics*. De igual manera, se realizó un póster sobre el mismo, para presentarse en el Congreso Internacional "MarchCOMeeting'15 Complex matter Physics", realizado en La Habana, Cuba; así como, en el evento "2015 Hands On Research in Complex systems school" at the ICTP (Trieste, Italy); ganando el premio "Jury's Choise Poster" en éste último (ver en los anexos, la portada del artículo y el diploma al mejor póster).

---

# Apéndices





## Código de dinámica molecular

Se adjunta el código escrito para realizar la simulación de la dinámica molecular en este trabajo. Parte del código fue inspirado en el trabajo del Dr. Mark D. Shattuck sobre un gas con esferas duras y sin interacción repulsiva. El código fue modificado para incluir la interacción repulsiva y las paredes magnéticas.

```
%% Parametros de repeticion de simulaciones
aberturas =[0.3 ,0.36];
Bes =[0.079 ,0.077];
for repeticiones =1:numel(Bes)
    aber=aberturas(repeticiones)
    B=Bes(repeticiones)
    %% Parametros iniciales
    N=570;           % Numero de particulas
    D=0.005;        % Diametro de particulas
    r=D/2;          % Radio de particulas
    h=0.003;        % Altura de particulas
    M=0.004;        % Masa de particulas
    KM=(3*pi*(4*pi*10^-7)/2)*((1.2/(4*pi*10^-7))^2)*(r^4)*(h^2)
        *10; % Constante magnetica
    KS=10000;
    poten=-5;      % Potencia a la que se eleva la distancia
    %B=0.2;        % Coeficiente de friccion
```

```

%aber=0.04;           % Tamano de abertura
tetha=deg2rad(22.0);  % Angulo de inclinacion de paredes de
                       % silos
posrelincli=0.5;      % Posicion relativa de las compuertas
                       % del silo
g=-9.81;              % Aceleracion de la Gravedad
Lx=0.5;               % Ancho de silo
Ly=1.5;               % Alto de silo
cres=1.0;              % Coefficiente de restitution entre
                       % paredes
descom=8;              %

%% Parametros de la dinamica de la simulacion
dt=1e-4;              % Paso de tiempo
tmax=10000;           % Numero maximo de iteraciones en el ciclo de la
                       % dinamica
Nplotskip=10;         % Numero de pasos de tiempo antes de graficar

%% Creacion de paredes con imanes
anchoincli=(Lx-aber)/2;
altoincli=tan(tetha)*anchoincli;
plax=0;                % Cordenadas de puntos de
                       % lineas de silos
p1bx=anchoincli;      %
play=posrelincli*Ly+altoincli/2; %
p1by=posrelincli*Ly-altoincli/2; %
p2ax=anchoincli+aber; %
p2bx=Lx;               %
p2ay=posrelincli*Ly-altoincli/2; %
p2by=posrelincli*Ly+altoincli/2; %
pendiente1=(p1by-play)/(p1bx-plax); % Calculo de pendiente de
                       % pared izquierda de silo
pendiente2=(p2by-p2ay)/(p2bx-p2ax); % Calculo de pendiente de
                       % pared derecha de silo
ordenada1=-pendiente1*plax+play; % Calculo de ordenada de
                       % pared izquierda de silo
ordenada2=-pendiente2*p2ax+p2ay; % Calculo de ordenada de
                       % pared derecha de silo

Ncomp=ceil(anchoincli/r);
Nparedvert=ceil((Ly-play-D)/D);

```

```

Ntotal=N+2*(Ncomp+Nparedvert);

%% Posiciones y velocidades iniciales
[x,y]=ndgrid(10*r:10*r:Lx-10*r, posrelincli*Ly+altoincli/2+5*r
:7*r:Ly-D); % Crea un array de espaciamentos en x y y
ACTUALIZACION: Se quitaron los /D en los extremos y se
restringio y para que aparezcan sobre las paredes
inclinadas

xmax=x(:,1);
ymax=y(1,:);

x=zeros(1,N);
y=zeros(1,N);
xparedesmag=zeros(1,2*Nparedvert);
yparedesmag=zeros(1,2*Nparedvert);
xcompuertas=zeros(1,2*Ncomp);
ycompuertas=zeros(1,2*Ncomp);

for k=1:N
    y(k)=ymax(ceil(k/numel(xmax)));
    x(k)=xmax((mod(k-1,numel(xmax))+1));
end

for k=1:Nparedvert
    yparedesmag(k)=play+k*D;
    yparedesmag(k+Nparedvert)=play+k*D;
    xparedesmag(k)=0;
    xparedesmag(k+Nparedvert)=Lx;
end

for k=1:Ncomp
    xcompuertas(k)=(p1bx-r*cos(tetha)-(k-1)*r);
    ycompuertas(k)=pendiente1*(p1bx-r*cos(tetha)-(k-1)*r)+
ordenada1;
    xcompuertas(k+Ncomp)=(p2ax+r*cos(tetha)+(k-1)*r);
    ycompuertas(k+Ncomp)=pendiente2*(p2ax+r*cos(tetha)+(k-1)*
r)+ordenada2;
end

vx=zeros(1,N); % Crea matriz de 1XLengt[N] de ceros

```

```

vy=zeros(1,N); %

ax_old=0; % Aceleraciones iniciales
ay_old=g; %

%% Iniciacion y parametros salida de datos
filename=['silosp065prueba_aber_d' num2str(aber) '_cf'
          num2str(B) '_cr' num2str(cres) '.txt'];
fileID = fopen(filename, 'w');
t=1;
tdes=1;
promvel=mean(sqrt(vx.^2+vy.^2));
bandcomp=0;

%% Parametros de graficacion
%      clf; % Limpia la ventana actual
%      circulos=zeros(1,N);
%      circulosparedm=zeros(1,Nparedvert); % Matriz de ceros
de 1XN
%      circuloscompuerta=zeros(1,Ncomp);
%      for np=1:N % Ciclo que crea circulos y les asigna
posiciones iniciales
%          circulos(np)=rectangle('Position',[x(np)-.5*D y(np)
-.5*D D D], 'Curvature',[1 1], 'edgecolor','b'); % Circulos con
posiciones iniciales
%      end
%      for np=1:2*Nparedvert % Ciclo que crea circulos y
les asigna posiciones iniciales
%          circulosparedm(np)=rectangle('Position',[
xparedesmag(np)-.5*D yparedesmag(np)-.5*D D D], 'Curvature',[1
1], 'edgecolor','black'); % Circulos con posiciones iniciales
%      end
%      for np=1:2*Ncomp % Ciclo que crea circulos y les
asigna posiciones iniciales
%          circuloscompuerta(np)=rectangle('Position',[
xcompuertas(np)-.5*D ycompuertas(np)-.5*D D D], 'Curvature',[1
1], 'edgecolor','red'); % Circulos con posiciones iniciales
%      end
%      axis('equal'); % Hace que el aspecto de las
unidades en "x" y "y" sean iguales
%      axis([0-0.1 Lx+0.1 plby-0.1 Ly+0.1]); % Establece los

```

```

limites de los ejes
%
%           pause; % Pausa la ejecucion del codigo hasta presionar
%           cualquier tecla

%% Ciclo de la dinamica del sistema
Ndischarged=0; % Inicia contador de particlas descargadas

while (N-Ndischarged)>=0 % Ciclo de tiempo de animacion

    Ndischarged=Ndischarged+sum(y<p1by-D/2);
    y(y<p1by-D/2)=1.5; % Hace que las particulas que caen
    %           regresen al silo por arriba

    if promvel>5
        y(y<=(p1by+D/2.0))=p1by+D/2.0; % Hace que la
        %           particula no se quede atorada en la pared inferior
        Fy=Fy+K*(abs(y-(p1by)).^poten).*abs(y-(p1by)); %
        %           Bottom wall
    else
        bandcomp=1;
        if (rem(t , Nplotskip )==0)
            [ymax , inymax ]=max(y);
            data=[ tdes*dt , N-Ndischarged ];
            fprintf( fileID , '%12.8f \_ %12.8f \n' , data);
        end
        tdes=tdes+1;
    end

%           if(rem(t-1,Nplotskip)==0)
%           for np=1:N % Ciclo que asigna las nuevas
%           posiciones a los circulos (elementos de circulos)
%           set(circulos(np), 'Position', [x(np)-.5*D y(
%           np)-.5*D D D]);
%           end
%           for np=1:2*Nparedvert % Ciclo que asigna las
%           nuevas posiciones a los circulos (elementos de circulos)
%           set(circulosparedm(np), 'Position', [
%           xparedesmag(np)-.5*D yparedesmag(np)-.5*D D D]);
%           end
%           for np=1:2*Ncomp % Ciclo que asigna las

```

```

nuevas posiciones a los circulos (elementos de circulos)
%          set(circuloscompuerta(np), 'Position',[
xcompuertas(np) -.5*D ycompuertas(np) -.5*D D D]);
%          end
%          drawnow; % Actualiza el fotograma de la
animacion
%          end

x=x+vx*dt+ax_old.*(dt.^2)/2; % Primer actualizacion en
el algoritmo de Verlet
y=y+vy*dt+ay_old.*(dt.^2)/2; %

% Deteccion de colisiones y fuerza de interaccion PAREDES
VERTICALES
catxpared=cat(2,x,xparedsmag);
catypared=cat(2,y,yparedsmag);
dx=repmat(catxpared,N+2*Nparedvert,1); % Creacion de
matriz de Ntotal renglones de las posiciones en "x"
dx=dx-dx'; % Resta a dx la conjugada
transpuesta de dx. Crea la diferencia de posiciones
entre todas las particulas
dy=repmat(catypared,N+2*Nparedvert,1); % Creacion
de matriz de Ntotal renglones de las posiciones en "y"
dy=dy-dy'; % Resta a dx la conjugada
transpuesta de dx. Crea la diferencia de posiciones
entre todas las particulas

dnm=sqrt(dx.^2+dy.^2); % Distancia entre todas las
particulas
dnm(1:N+2*Nparedvert+1:end)=D; % Al parecer coloca el
valor de D en la diagonal

dnm(dnm<=D)=D; % Evita que las particulas se traslapen

invdnm=dnm.^poten;

Fxpv=KM*sum(invdnm.*dx); % Colision entre particulas
Fypv=KM*sum(invdnm.*dy); %

% Deteccion de colisiones y fuerza de interaccion
COMPUERTAS

```

```

catxcomp=cat(2,x,xcompuestas);
catycomp=cat(2,y,ycompuestas);
dx= repmat(catxcomp,N+2*Ncomp,1);
dx=dx-dx';
dy= repmat(catycomp,N+2*Ncomp,1);
dy=dy-dy';

dnm=sqrt(dx.^2+dy.^2); % Distance between all particles
dnm(1:N+2*Ncomp+1:end)=D; % set diagonal to D

% dnm(dnm<=D)=D; % Evita que las particulas se
traslapan

Fxc=KS*sum(-(1-D./dnm).*dx.*(dnm<D)); % particle -
particle Force Law
Fyc=KS*sum(-(1-D./dnm).*dy.*(dnm<D));

Fx=Fxp(1:N)+Fxc(1:N);
Fy=Fyp(1:N)+Fyc(1:N);

% Colision entre pared superior
vy=vy.*(y<(Ly-D/2))+(-cres)*vy.*(y>=Ly-D/2); %
y(y>=Ly-D/2)=Ly-D/2.0; % Hace que la particula no se
quede atorada en la pared superior

% Fuerza de friccion del aire
Fx=Fx-B*(vx); %
Fy=Fy-B*(vy); %

% Calculo de aceleraciones
ax=Fx./M; %
ay=(Fy./M)+g; %

% Segunda actualizacion en el algoritmo de Verlet
vx=vx+(ax_old+ax).*dt/2; %
vy=vy+(ay_old+ay).*dt/2; %

% Actualizacion de aceleraciones
ax_old=ax; %
ay_old=ay; %

```

```
        t=t+1;
        if bandcomp==0
            promvel=mean(sqrt(vx.^2+vy.^2));
        end
    end
    fclose(fileID);
end
```

---

# B

## Documentos adjuntos

Se adjunta la portada del artículo que se publicó a partir de la investigación realizada para esta tesis [31] y copia del diploma “Jury’s Choise Poster” obtenido en el evento “2015 Hands-On Research in Complex Systems” realizado en Trieste, Italia, del día 29 de junio al 10 de julio del 2015.

Received: 10 July 2015, Accepted: 7 August 2015

Edited by: L. A. Pugnaloni

Reviewed by: J. R. Darias, Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela.

Licence: Creative Commons Attribution 3.0

DOI: <http://dx.doi.org/10.4279/PIP.07.0013>

ISSN 1852-4249

## Flow of magnetic repelling grains in a two-dimensional silo

G. Lumay,<sup>1\*</sup> J. Schockmel,<sup>1</sup> D. Henández-Enríquez,<sup>2</sup> S. Dorbolo,<sup>1</sup>  
N. Vandewalle,<sup>1</sup> F. Pacheco-Vázquez<sup>2†</sup>

During a typical silo discharge, the material flow rate is determined by the contact forces between the grains. Here, we report an original study concerning the discharge of a two-dimensional silo filled with repelling magnetic grains. This non-contact interaction leads to a different dynamics from the one observed with conventional granular materials. We found that, although the flow rate dependence on the aperture size follows roughly the power-law with an exponent 3/2 found in non-repulsive systems, the density and velocity profiles during the discharge are totally different. New phenomena must be taken into account. Despite the absence of contacts, clogging and intermittence were also observed for apertures smaller than a critical size determined by the effective radius of the repulsive grains.

### I. Introduction

The flow of discrete objects through an aperture in bottlenecks is an important subject in many scientific fields and for industrial applications. The objects could be animals [1], pedestrians [2, 3], insects [4], red blood cells [5], bacteria [6], cars or grains [7]. An important feature of these flows is clogging [8–10], which is observed during emergency escape, in traffic flows and during silo discharging. Two different flowing modes are observed: flow of contacting objects like in granular materials and flow of non contacting objects like in road traffic. Transitions between a non contacting to a contacting flowing mode could be observed.

In the granular materials community, the flow of

contacting grains through the output of a silo has been the subject of numerous studies [8–18] since the seminal work of Beverloo *et al.* [19]. Contrary to liquid flows, the flow of granular material at the output of a silo is constant during the discharge. Moreover, for small apertures, the probability to observe cloggings is significative. Beverloo proposed a semi-empirical relation for the granular flow rate  $Q$  (number of grains per unit time) at the output of a silo as a function of the silo aperture size  $D$ . This relation is deduced from the conjunction of two premises: (i) the flow  $Q$  is blocked when the aperture is below a threshold given by  $kd$ , where  $k$  is a free parameter and  $d$  the bead diameter, (ii) the grains experience a free fall before passing through the aperture. Then, for the average grains speed at the silo output, one has

$$\langle v_{out} \rangle = \sqrt{2g\beta D}. \quad (1)$$

This relation comes from the idea that the jamming mechanism is due to the formation of a semi-circular arch before the aperture [12, 15]. In the case of contacting grains, this arch has a typical

\*E-mail: [geoffroy.lumay@ulg.ac.be](mailto:geoffroy.lumay@ulg.ac.be)

†E-mail: [fpacheco@ifuap.buap.mx](mailto:fpacheco@ifuap.buap.mx)

<sup>1</sup> GRASP, Physics Department B5, Université de Liège, B4000-Liège, Belgium.

<sup>2</sup> Instituto de Física, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Apartado Postal J-48, Puebla 72570, Mexico.





# Referencias

- [1] Duran, J. 2000 “*Sand, powders, and grains. “An introduction to the physics of granular materials”*”, Ed. Springer – Verlag, New York, ISBN 0-387-98656-1.
- [2] C. A. Coulomb, *Acad. Roy. Sci. Mem. Phys. Divers Savants*, **7** (1773), 343.
- [3] A.J. Langley, P.H. Taylor, *Chladni patterns in random vibration*, International Journal of Engineering Science, *17*, (1979), 9
- [4] M. Faraday, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, **52** (1831), 299.
- [5] W. J. W. Rankine, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, **147** (1857), 9.
- [6] I. Roberts, *Proc. Roy. Soc.*, **36** (1884), 226.
- [7] H. A. Janssen, *Z. Vereins Deutsch Ing.* **39**, 1045 (1895).
- [8] Lord Rayleigh, *Phil. Mag. Ser. 6*, **11** (61) (1906), 129.
- [9] Lord Rayleigh, *Phil. Mag. Ser. 5*, **50** (1885), 469.
- [10] A. Garcimartín, J.M. Pastor, L.M. Ferrer, J.J. Ramos, C. Martín-Gómez, and I. Zuriguel, Flow and clogging of a sheep herd passing through a bottleneck, *Phys. Rev. E* **91**, 022808 (2015)
- [11] D. Helbing, I.J. Farkas, P. Molnar, and T. Vicsek, Simulation of pedestrian crowds in normal and evacuation situations, *Pedestrian and evacuation dynamics* **21**, 21-58 (2002).
- [12] D.R. Parisi, and C.O. Dorso. Microscopic dynamics of pedestrian evacuation. *Physica A* **354**, 606 (2005).
- [13] S.A. Soria, R. Josens, and D.R. Parisi, Experimental evidence of the Faster is Slower effect in the evacuation of ants, *Safety Science* **50**, 1584 (2012)
- [14] M. Brust, O. Aouane, M. Thibaud, D. Flormann, C. Verdier, L. Kaestner, M.W. Laschke, H. Selmi, A. Benyoussef, T. Podgorski, G. Coupier, C. Misbah, and C. Wagner, The plasma protein fibrinogen stabilizes clusters of red blood cells in microcapillary flows, *Scientific Reports* **2**, 4348 (2014)

- 
- [15] E. Altshuler, G. Mino, C. Perez-Penichet, L. del Rio, A. Lindner, A. Rousselet, and E. Clement, Flow controlled densification and anomalous dispersion of E. coli through a constriction, *Soft Matter* **9**, 1864 (2013).
- [16] P. G. de Gennes, Granular matter: a tentative view, *Rev. of Mod. Phys.* **71** (1999)
- [17] I Zuriguel, Clogging of granular materials in bottlenecks, *Papers in Physics* **6**, 060014 (2014)
- [18] J. Tang, R.P. Behringer, How granular materials jam in a hopper, *Chaos* **21**, 041107 (2011)
- [19] K. To, P.-Y. Lai, H.K. Pak, Jamming of granular flow in a two-dimensional hopper, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 71 (2001)
- [20] C. Lozano, G. Lumay, I. Zuriguel, R.C. Hidalgo, A. Garcimartn, Breaking arches with vibrations: The role of defects, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 068001 (2012)
- [21] M.J. Cordero, L.A. Pagnaloni, Dynamic transition in conveyor belt driven granular flow, *Powder Tech.* **272**, 290 (2015)
- [22] S. Dorbolo, L. Maquet, M. Brandenbourger, F. Ludewig, G. Lumay, H. Caps, N. Vandewalle, S. Rondia, M. Mélard, J. van Loon, A. Dowson, and S. Vincent-Bonnieu, Influence of the gravity on the discharge of a silo. *Granular Matter* **15**, 263-273 (2013)
- [23] A. Garcimartín, I. Zuriguel, L.A. Pagnaloni and A. Janda, Shape of jamming arches in two-dimensional deposits of granular materials, *Phys. Rev. E* **82**, 031306 (2010).
- [24] C. Mankoc, A. Janda, R. Arevalo, J.M. Pastor, I. Zuriguel, A. Garcimartín, and D. Maza, The flow rate of granular materials through an orifice, *Granular Matter* **9**, 407, (2007)
- [25] A. Janda, I. Zuriguel, and D. Maza, Flow Rate of Particles through Apertures Obtained from Self-Similar Density and Velocity Profiles, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 248001 (2012)
- [26] W A Beverloo, H A Leniger, J van de Velde, The flow of granular solids through orifices, *Chem. Eng. Sci.* **15**, 260 (1961).
- [27] Brown, R.L., Richards, J.C.: Principles of Powder Mechanics. Pergamon Press, Oxford (1970)
- [28] A. A. Mills, S. Day and S. Parkers, *Eur. J. Phys.* **17**, 16 (1996).
- [29] G. Lumay and N. Vandewalle, Controlled flow of smart powders, *Phys. Rev. E* **78**, 061302 (2008)
- [30] Videos: <https://youtu.be/Th5FaJuR7gw> para  $D = 0.03m$ , <https://youtu.be/VCWdVEUGbLw> para  $D = 0.08m$ , <https://youtu.be/qVQVAjcvQtc> para  $D = 0.18m$
- [31] G Lumay, J Schockmel, D Henández-Enríquez, S Dorbolo, N Vandewalle, F Pacheco-Vázquez, *Papers in Physics* **7**, 070013 (2015)
-