BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“Enseñanza del álgebra a través de la formalización progresiva”

TESIS

Para obtener el título de:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

Presenta:

Alma Vega Cortazar

Director:

Lic. Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez

Puebla, Puebla. Febrero 2016

JURADO:

MC. Julio Erasto Poisot Macías Presidente	MC. Pedro García Ángeles Secretario
Dr. Juan Carlos Macías Romero Vocal	Lic. Pablo Rodrigo Zeleny Vázquez Director

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El desarrollo del pensamiento matemático en los niños es muy interesante, pero a veces también es bastante complejo y desconcertante para el docente. Pero esto es de esperarse, después de todo, los alumnos tienen que lidiar con una gran cantidad de conceptos, símbolos nuevos, aprender cómo y cuándo utilizarlos en diversas situaciones.

El álgebra es conocida por ser un gran obstáculo en las matemáticas escolares. Las investigaciones reportan que los estudiantes no le encuentran sentido, ya que es una rama abstracta y rígida de las matemáticas, además de que tiene poca interacción con el mundo real. Regularmente es planteada ante los estudiantes como un tema matemático predefinido y fijo, con reglas estrictas; no dando oportunidad a ideas o aportaciones de los estudiantes. La enseñanza tradicional empieza con las reglas del álgebra, dándoles un lenguaje simbólico con el cual no se sienten cómodos. Se espera que los estudiantes lleguen a dominar las técnicas de manipulación simbólica antes de comprender el propósito y uso del álgebra.

Tenemos dos ejemplos de la “mala fama” y rencores que generó el álgebra en muchos adultos, uno apareció publicado en el Diario Reforma.

“¡Con cuánta inútil álgebra nos cargaron en la preparatoria! ¡Cuántas abstrusas enseñanzas nos indilgaron que para nada sirven, y que después del obligado examen –pesadilla- quedan en el olvido para siempre!”… (Armando Fuentes Aguirre, 13 agosto 2002)

Y el otro en la Revista Proceso, en el reportaje de “Prieto y sus planes para la sinfónica”

“Desde su primer día de trabajo al frente de la Orquesta Sinfónica Nacional, su nuevo conductor ofrece hacer crecer su público. Al margen de los alegatos políticos, asegura que la música es su trinchera, e insiste en que la enseñanza musical desde la infancia en las escuelas, haría mejores mexicanos, que si estudiaran matemáticas, física o química”. (Judith Amador Tello, 16 de septiembre 2007)

También en los libros se menciona el miedo a las matemáticas y en especial al álgebra, Adrián Paenza, comenta en su libro “Matemáticas… ¿estás ahí? Episodio 100”.

“Miedo. Eso es lo que tiene un alumno cuando empieza una clase de matemáticas. Tiene miedo porque de antemano la sociedad lo prepara para que no entienda. Le advierte de todas las maneras posibles que es un tema difícil. Peor aún: lo condiciona de tal forma que lo induce a creer que él no será capaz de hacer nada con la matemática, porque no pudieron sus padres, no pudieron sus hermanos, no pudieron sus amigos, no pudieron sus abuelos… En definitiva: nadie pudo.

Dígame si esas condiciones (ciertamente exageradas adrede) no predisponen a una persona a tener miedo… Así, sólo los valientes resistirán. Pero no sólo le tienen miedo a la matemática los alumnos. También los padres, familiares y amigos. Y, por último, también los docentes. Quizá no lo exhiban, o quizá lo puedan encubrir, porque en definitiva el docente tiene el control. El docente tiene el poder. El docente decide qué se estudia, desde dónde y hasta dónde. Decide cuáles son los problemas que prepara y enseña. Y decide cuáles son los problemas que los alumnos tienen que resolver, en la clase, en el pizarrón, en la casa y en una prueba. El docente tiene, en algún sentido, la sartén por el mango”.

Y es aquí donde los docentes entran en escena. Cualquier profesor de matemáticas de secundaria y bachillerato sabe que el Álgebra es una fuente de confusión y actitudes negativas entre los alumnos. Así el álgebra resulta un obstáculo difícil de vencer, y por otro lado se reconoce su importancia ya que es indispensable dominar el uso de “incógnitas y literales” para estudios posteriores.

¿Por qué los alumnos no tienen éxito en sus exámenes de matemáticas? Porque no estudian lo suficiente, pero también podemos preguntar y ¿Por qué no estudian? ¡Porque no tienen éxito!, porque sus ideas no son tomadas en cuenta, lo que importa es seguir el procedimiento que enseñó el maestro, porque lo importante en el examen es dar la respuesta correcta, no hay nada más en juego. El álgebra escolar parece un juego con extrañas reglas que solo el profesor sabe, podemos resumir el estado lamentable, en pocas palabras: la enseñanza es rutina y el examen tormento.

El tema central en la Tesis es la enseñanza de la solución de ecuaciones en secundaria. Podemos plantear el problema como una “ecuación”, que debemos resolver: $ENSEÑANZA + X = APRENDIZAJE$. Es decir la enseñanza no es igual al aprendizaje, hace falta algo, un término desconocido: $X =$ métodos, estrategias didácticas, juegos etc. Lo único de lo cual estamos seguros es que no lo lograremos con la *“misma clase de siempre”*.

Para que los niños aprendan a resolver problemas nuestra propuesta es usar problemas “recreativos”, estos tienen un enunciado que invita a jugar con los números, contienen palabras o términos muy comunes. Los niños no tienen miedo, responden aplicando el método de tanteo, pero su respuesta indica que, si entienden de que se habla. Debemos aprovechar que los niños **“generan ideas”** para resolver problemas**.** Este trabajo presenta una propuesta de cómo trabajar en clase las ecuaciones con niños de secundaria (12 – 13 años). Se presentan evidencias de cómo se trabajó con los estudiantes y también algunas conclusiones de profesores que nos apoyaron y que piensan que es útil trabajar con la propuesta.

La importancia de la Tesis es que da un aporte modesto pero concreto, ya que se presentan propuestas para resolver algunos problemas de la enseñanza, se tiene la experiencia y evidencias del trabajo con niños por varios años y un curso de capacitación a docentes organizado por BUAP y SEP (2012-2013). El Álgebra es importante para los estudiantes a largo plazo y no deben de pensar o tener una mala imagen acerca de ella. La mayoría de las personas expresan que es bastante difícil, pero si se enseña con nuevas ideas, se puede dotar a los niños de una herramienta muy útil para la resolución de problemas, y no solo como una herramienta para estudios posteriores.

El contenido del trabajo está organizado con los siguientes capítulos:

En el primer capítulo se hace una revisión de la literatura que habla acerca de las dificultades que se tienen detectadas en el estudio del álgebra. En este caso nos enfocaremos solo en el manejo de la igualdad y resolución de ecuaciones de primer grado. Se da una justificación de la propuesta y los objetivos.

En el segundo capítulo se hace una propuesta de cómo abordar las dificultades en el proceso de enseñanza - aprendizaje de las soluciones de ecuaciones lineales, se comenta sobre el método Singapur para resolver problemas con enunciado.

En el tercer capítulo nos enfocamos en la resolución de sistemas de ecuaciones a partir de problemas, con base en la propuesta de Martin van Reeuwijk. Como ahora son dos incógnitas los enunciados son más largos y poco a poco debemos llevar al alumno a escribir las ecuaciones correspondientes formalizando poco a poco. Se ilustra con ecuaciones visuales (imágenes).

En el cuarto capítulo se dan las evidencias de alumnos, profesores de como desarrollaron nuestras propuestas y conclusiones. Principalmente de la Secundaría Técnica No 1.

CAPITULO I. REVISIÓN DE LITERATURA

Se hace una revisión de diferentes investigaciones las cuales incluyen las dificultades que tienen los estudiantes al iniciar el curso de álgebra como son el uso del signo de igualdad, el manejo de la incógnita y la resolución de ecuaciones lineales. Omitimos mencionar algunos autores que no se relacionan directamente como Usiskin o Kücheman, (aunque si los consultamos), ya que nos enfocamos solo a la solución de ecuaciones.

Con base en el artículo de Karen P. Falkner, Linda Levi y Thomas P. Carpenter (1999) se sabe que los niños tienen problemas para manejar el concepto de igualdad. Los estudiantes deben entender que la igualdad es una relación que expresa la idea de que las dos expresiones matemáticas tienen el mismo valor. Usualmente, el signo de igualdad se utiliza en la primaria al final de una operación, y se espera que el alumno de él resultado. Con expresiones numéricas, tales como $4 + 6 = 10 \;\; o \;\; 67 - 10 - 3 = 54$, los niños están en lo correcto al pensar que el signo de igualdad es como una señal para calcular.

Los estudiantes de primaria y secundaria generalmente piensan que el signo de igualdad significa que deben llevar a cabo el cálculo que lo precede y que el número después del signo igual es la respuesta para el cálculo. En general no ven el signo de igualdad como un símbolo que expresa la relación “Es lo mismo que”.

Resolver una ecuación implica el proceso formal de efectuar la misma operación en ambos lados de la igualdad. De acuerdo a Bárbara A. Van Amerom (2003), muchos estudiantes de secundaria experimentan grandes dificultades al resolver ecuaciones. Aritmética y Álgebra parecen ser dos mundos aparte. El álgebra a comparación de la aritmética requiere otro enfoque en la resolución de problemas.

Van Amerom (2003) Describe la forma de cómo abordar las dificultades que tienen los estudiantes con esta transición. Es comenzar desde las estrategias informales de los estudiantes para luego construir métodos más formales, como cuando se trabaja con sistemas de ecuaciones de 2 x 2.

En aritmética la resolución de problemas, implica cálculos sencillos, con números conocidos mientras que el álgebra requiere razonar sobre cantidades desconocidas y reconocer la diferencia entre situaciones específicas y generales. Existen diferencias con respecto a la interpretación de letras, símbolos, expresiones y el concepto de igualdad.

Para aprender álgebra no se requiere únicamente hacer explícito lo que está implícito en la aritmética. El álgebra requiere un cambio (evolución) en el pensamiento del estudiante de situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones. Lo que Arcavi (1994) llama “sentido del símbolo”. Que el símbolo le ayude a pensar al niño, a resolver problemas. La transición desde lo que puede considerarse como un modo informal de resolver problemas, a uno algebraico resulta ser difícil para muchos estudiantes y esto influye de manera importante en sus estudios posteriores. Usar símbolos para representar “incógnitas” o “números generalizados” es uno de los obstáculos para los estudiantes, por la sencilla razón de que no ven la necesidad de usarlos, como se reportan en varias investigaciones. Una de ellas, es la que propone Arcavi dando un cuadrado mágico que debe completarse, pero luego propone otro cuadrado mágico que debe completarse y que no tiene solución, la forma más sencilla de probarlo es usar una literal y como se tiene la condición de ser mágico nos lleva a una igualdad contradictoria.

Operar con un número desconocido requiere una nueva noción de igualdad. En la transferencia de un problema de palabras (aritmética) a una ecuación (algebraica), el significado del signo igual cambia de enunciar un resultado a indicar una equivalencia. Y cuando el número desconocido aparece en ambos lados de la igualdad en vez de un lado, la ecuación ya no puede resolverse aritméticamente.
Los problemas aritméticos se pueden resolver directamente y si es necesario con respuestas de nivel intermedio. Por otra parte, los problemas algebraicos necesitan traducirse y escribirse primero en representaciones formales, las cuales después pueden ser resueltas. Y los pasos intermedios pueden carecer de sentido en relación al enunciado. Los pasos algebraicos para “despejar” simplemente son vistos como algo extraño, por esta razón los alumnos terminan viendo el proceso de manera mecánica, como algo que hay que hacer, pero sin comprender ¿por qué?

Tomamos de Martín van Reeuwijk (2001) la idea de que la enseñanza y el aprendizaje en las matemáticas debe ser un proceso de **<u>FORMALIZACIÓN PROGRESIVA</u>.** La mayoría de temas algebraicos se introducen con gran rapidez y los estudiantes apenas tienen tiempo para desarrollar la comprensión conceptual.

1.1 DIFICULTADES CON EL SIGNO DE IGUALDAD

En este apartado nos basamos en el artículo de Falkner (1999). Aunque los profesores de primaria utilizan con frecuencia el signo de igualdad con sus alumnos, es interesante explorar lo que los niños entienden sobre la igualdad. Los maestros piden a sus alumnos resolver el siguiente problema: $8 + 4 = [\ \ ] + 5$

Este problema parecía trivial para muchos profesores. Y en el artículo un maestro de sexto grado, dijo, daré este problema a mis alumnos, pero no tengo ni idea de por qué esto será interesante. Este profesor encontró que los veinte y cuatro de sus alumnos pensaron que el 12 era la respuesta que debería ir en la casilla.
¿Por qué los niños tienen tantos problemas con este ejercicio? Evidentemente, los estudiantes tienen una comprensión limitada de la igualdad, si piensan que 12 o 17 es la respuesta que va en la casilla. Parecen tener ideas erróneas sobre la igualdad que no se elimina con uno o dos ejemplos o una simple explicación.

Se detecta una dificultad muy clara en el uso de la igualdad que no se trabaja en ningún libro de secundaria, excepto en fórmulas para áreas y perímetros.

Porcentaje de niños que ofrecieron varias soluciones a $8 + 4 = \square + 5$						
	Respuestas					**Número**
Grado	**7**	**12**	**17**	**12 y 17**	**Otro**	**de niños**
1	0%	79%	7%	0%	14%	42
1 y 2	6%	54%	20%	0%	20%	84
2	6%	55%	10%	14%	15%	174
3	10%	60%	20%	5%	5%	208
4	7%	9%	44%	30%	11%	57
5	7%	48%	45%	0%	0%	42
6	0%	84%	14%	2%	0%	145

Por otro lado notamos que los estudiantes mexicanos de 5° y 6° grado no usan el signo de igualdad, cuando se les pide realizar una actividad que consiste en factorizar los números menores que 100, como se muestra en la tabla de abajo, se observa que cuando llegan al número 20, les hace falta el signo de igualdad. Y no lo usan porque el maestro no lo pide.

2
3
4= 2 x 2
5
6 = 3 x 2
7
8 = 4 x 2
⋮
20   5 x 4

La idea entre los estudiantes que comienzan a estudiar álgebra es que el signo igual es la "señal de hacer algo" antes que un símbolo de equivalencia entre los lados izquierdo y derecho de una ecuación (Kieran 1980). La cual viene indicada por su error al resolver “ecuaciones” como $4+3=\ [\ ]\ +6$.
Ellos piensan que inmediatamente después de la igualdad deben indicar el resultado, esto es $4+3=7$ es decir, no “leen toda la expresión”, para resolver correctamente la ecuación debemos aprender a leerla también de derecha a izquierda. O ponen el signo igual entre dos expresiones que no son equivalentes. Por ejemplo, al resolver el problema: "Si empiezo la semana con 75 pesos, luego gano otros 24 pesos, y luego gasto 37 pesos, ¿cuántos pesos tendré al final de la semana? los estudiantes escriben $75+24=99-37=62$ no respetan las propiedades simétrica y transitiva de la igualdad.

1.2 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Basándonos en el artículo de Kieran, traducción resumida por Vilma María Mesa. Los diferentes métodos para la resolución de ecuaciones se clasifican en los siguientes tipos:

- Usar hechos numéricos
- Usar técnicas de conteo
- “Cover-up” (Cubriendo)
- Resolución hacia atrás
- Sustituciones por prueba y error
- Transposición (cambiar de lado y de cambiar signo)
- Efectuar la misma operación en ambos lados

Los dos primeros métodos son los de aritmética, al resolver $5+n=8$, se recuerda que $5+3\ es\ 8$; o se cuenta, $5{,}6{,}7{,}8$ y se observa que hay tres números para ir de $5\ a\ 8$.

En el método de “Cover up” se resuelve la ecuación $2x+9=5x$ así: como $2x+9$ es $5x$ el 9 **debe ser equivalente a** $3x$ ya que $2x+3x\ es\ 5x$; por lo tanto x debe ser 3. De este ejemplo desarrollamos nuestra propuesta, trabajando niveles de dificultad y solo se le exige al alumno “que se cumpla la igualdad”. (Ver capitulo II para las propuestas). Estudiantes que dominan esta técnica, se desempeñan mejor que los que únicamente conocen las técnicas formales (las dos últimas).

El método de ir hacia atrás es análogo al de resolución en aritmética. Para resolver $2x + 4 = 18$, se empieza por el lado derecho, y yendo de derecha a izquierda, “deshace las operaciones” usando en cada paso operaciones inversas: $18 - 4 = 14$; $\frac{14}{2} = 7$.

El método de prueba y error, es frecuentemente practicado por los alumnos al comienzo, rápidamente se descarta por demandar mucho tiempo. Desafortunadamente los estudiantes también lo descartan para el proceso de verificación de la solución.

Los métodos de resolución de ecuaciones incluyen la trasposición de términos esto es, "cambiar de lado, cambiar de signo" y ejecutar la misma operación en ambos lados de la ecuación (enfoque formal). Aunque la trasposición esté considerada por muchos profesores de álgebra como una versión abreviada del procedimiento de realizar la misma operación en ambos lados, los estudiantes que empiezan con el álgebra parece que perciben de forma bastante diferente esos dos métodos de resolución de ecuaciones (Kieran 1988). El procedimiento de ejecutar la misma operación en los dos lados de una ecuación pone el énfasis en la simetría de una ecuación; simetría que no se tiene cuando se usa la transposición de términos.

El método de cambiar de lado es una simplificación del método de operar en ambos lados. Operar a ambos lados enfatiza en la simetría de la igualdad, simetría que no se tiene cuando se usa la trasposición. Es común que los estudiantes que utilizan el método de cambiar de lado y signo, no estén considerando la ecuación como un objeto matemático. (Kieran, 1988)

Los primeros cinco métodos, llamados intuitivos resultan difíciles de generalizar (cuando la incógnita aparece como "$-x$", ya que no se pude representar con algún objeto creíble para los alumnos) Sin embargo, los estudiantes tienen más éxito cuando dominan los métodos intuitivos y formales, que cuando únicamente dominan sólo un tipo de ellos. (Petitto, 1979 citado por Kieran).

Por todo lo mencionado anteriormente se nota claramente que los estudiantes no comprenden y no interpretan a la igualdad en forma simétrica, es decir, de derecha a izquierda y viceversa, entonces como se espera que puedan resolver ecuaciones de primer grado.

Terezinha Nunes (1997) comenta, el maestro debería tomar como punto de partida para la enseñanza del estudiante: Aprovechar los conocimientos del alumno, no quejarse por lo que el niño no sabe, sino buscar lo que si puede y llevarlo a una zona de éxito, esto rompe el circulo vicioso que tanto afecta la enseñanza de las matemáticas y crea un creciente rechazo hacia su estudio. **“Usar el conocimiento previo como trampolín”. Por ello damos libertad en la resolución de problemas.**

1.3 ÁLGEBRA EN SECUNDARIA SEGÚN EL PROGRAMA 2011 DE LA SEP

Este trabajo, no discute el punto de ¿Qué es el álgebra escolar? Sino que nos basamos en el programa de matemáticas publicado por la Secretaria de Educación Pública (SEP) de 2011 de ahí se extrae lo siguiente:

El Programa se organiza en 3 ejes:

1.- Sentido numérico y pensamiento algebraico
2.- Forma, espacio y medida
3.- Manejo de la información

E incluye:

Competencias Matemáticas

Son cuatro competencias, cuyo desarrollo es importante durante la Educación Básica.

1- Resolver problemas de manera autónoma.
2- Comunicar información matemática
3- Validar procedimientos y resultados.
4- Manejar técnicas eficientemente

De los tres grados solo mencionaremos el Eje 1.- Sentido y pensamiento algebraico. Y los bloques que corresponden a los temas de álgebra.

PRIMER GRADO DE SECUNDARIA

BLOQUE I

- Construcción de sucesiones de números o de figuras a partir de una regla dada en lenguaje común. Formulación en lenguaje común de expresiones generales que definen las reglas de sucesiones con progresión aritmética o geométrica, de números y de figuras.

• Explicación del significado de fórmulas geométricas, al considerar las literales como números generales con los que es posible operar.

BLOQUE III

• Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma $x + a = b$; $ax = b$; $ax + b = c$, utilizando las propiedades de la igualdad, con $a, b\ y\ c$ números naturales, decimales o fraccionarios.

BLOQUE V

• Obtención de la regla general (en lenguaje algebraico) de una sucesión con progresión aritmética.

SEGUNDO GRADO DE SECUNDARIA

BLOQUE II

• Identificación y búsqueda de expresiones algebraicas equivalentes a partir del empleo de modelos geométricos.

BLOQUE III

• Resolución de problemas multiplicativos que impliquen el uso de expresiones algebraicas, a excepción de la división entre polinomios.

BLOQUE IV

• Construcción de sucesiones de números enteros a partir de las reglas algebraicas que las definen. Obtención de la regla general (en lenguaje algebraico) de una sucesión con progresión aritmética de números enteros.

• Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado de la forma: $ax + b = cx + d$ y con paréntesis en uno o en ambos miembros de la ecuación, utilizando coeficientes enteros, fraccionarios o decimales, positivos y negativos.

BLOQUE V

• Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de un sistema de ecuaciones 2 × 2 con coeficientes enteros, utilizando el método más pertinente (suma y resta, igualación o sustitución).

• Representación gráfica de un sistema de ecuaciones 2 × 2 con coeficientes enteros. Reconocimiento del punto de intersección de sus gráficas como la solución del sistema.

TERCER GRADO DE SECUNDARIA

BLOQUE I

• Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

BLOQUE II

• Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización.

BLOQUE III

• Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones

BLOQUE IV

• Obtención de una expresión general cuadrática para definir el enésimo término de una sucesión.

BLOQUE V

• Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada.

1.4 ERRORES DE LOS ALUMNOS

El salón de clases es el sitio de concurrencia de los principales actores de la experiencia de la matemática educativa. Es ahí donde, de manera explícita o implícita, interactúan las costumbres, las creencias del profesor y los alumnos. Es bien conocido que para muchos estudiantes, el álgebra resulta difícil y desde luego irrelevante, algunos llegan a experimentar un rechazo tan intenso que impregna el conjunto de su actitud hacia las matemáticas. El punto de partida de todo aprendizaje son los conocimientos y experiencias previas que tiene el estudiante. Los niños saben por comentarios que el álgebra es **difícil.**

Nadie está satisfecho con los resultados de la enseñanza del álgebra ya que no se logran aprendizajes sólidos. Existen muchos profesores de matemáticas que consideran al álgebra una situación muy abstracta, sin ninguna correspondencia con situaciones concretas. Cuando se introduce la simbolización algebraica, se nota una ruptura en el progreso de ciertos alumnos que hasta entonces, por su habilidad, parecían muy capaces de trabajar con operaciones aritméticas, se resisten a usar símbolos.

Los estudiantes cometen errores y estos comienzan desde las operaciones básicas como la suma, resta, multiplicación, división y raíz cuadrada. Pero de manera sistemática los niños suelen equivocarse en la resta de números, cuando se "pide prestado". Restan con frecuencia el número más pequeño del más grande cuando se expresa la operación verticalmente. Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 123 \\ -\ \ 47 \\ \hline \end{array}$$

El error de los niños es poner $7-3$ en lugar $13-7$, "se pide prestado".

Terezinha comenta que en la escuela no se aprovechan los conocimientos informales de los estudiantes para hacer operaciones, mismas que mucha gente aplica al realizar compras y dar cambio. Un error del docente es no aprovechar los conocimientos de los alumnos, algunos no son correctos, otros no son susceptibles de generalización, pero es importante mantener la participación de los alumnos, de otra manera los errores se convierten en una cadena pesada. Algunos errores también son causados por querer avanzar demasiado rápido para cubrir el programa oficial.

El signo de igualdad lo ven unidireccional, solo lo ven de izquierda a derecha. La enseñanza tradicional promueve el uso unidireccional del signo igual.

Ejemplo 1.

Cuando se le pide al estudiante comparar las fracciones por la regla de los productos cruzados para saber si son equivalentes.

$$\frac{3}{9}\ comparar\ con\ \frac{1}{3}$$

Los estudiantes escriben:

$$\frac{3}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{9}{9}$$

Y ponen que **si son equivalentes**. “Usan mal la regla de los productos cruzados”, la escritura puede interpretarse como producto de fracciones y entonces el resultado es incorrecto. ¡Vaya confusión!

Ejemplo 2.

Se propone lo siguientes: $\frac{2}{4}=\frac{}{10}$ dentro del tema de fracciones equivalentes, para ilustrar que los alumnos tienen dificultades con este concepto, pero hay una dificultad adicional que no mencionan: Una forma de resolverlo es usar la propiedad transitiva de la igualdad, notando que: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{}{10}$ es decir, $\frac{1}{2}=\frac{}{10}$ (más fácil). Por lo tanto el número faltante es 5, entonces $\mathbf{\frac{1}{2}=\frac{5}{10}}$**.** La segunda forma es por la regla de los productos cruzados.

Ejemplo 3.

En la mayoría de las veces se puede notar que el ejercicio que se va a resolver siempre se da de izquierda a derecha. Simplificar $3^2 * 3^3 =$
“El lado derecho está vacío”.

Los estudiantes al usar variables, cometen el error de ignorar las letras (x, y, z) no las toman en cuenta o simplemente les dan un valor que a ellos se les ocurra.

Se da una colección de errores más frecuentes en los estudiantes.

Ejercicio	Errores frecuentes
1. $3^2 * 3^3$	$3^6\ o\ 9^5$

2. $a^2 * \ b^5 =$	$a * b^7$
3. $x \ + \ y - 3(z \ + \ w) \ =$	$x \ + \ y \ - 3z \ + 3w$
4. $\frac{r}{4} - \ \frac{(6-s)}{2} =$	$\frac{r - 12 - 2s}{2}$
5. $3a \ + \ 4b \ =$	$7ab$
6. $3x^{-1} =$	$\frac{1}{3x}$
7. $\sqrt{x^2 + \ y^2} =$	$x + y$
8. $\frac{x+y}{x+z} =$	$\frac{y}{z}$
9. $x\left(\frac{a}{b}\right) =$	$\frac{xa}{xb}$
10. $\frac{xa + xb}{x + xd} =$	$\frac{a+b}{d}$
11. $a^2 * a^5 =$	a^{10}
12. $(3a)^4 =$	$12a^4$
13. $(x+4)^2 =$	$x^2 + 16$
14. $(a^2)^5 =$	No sabían cómo hacerlo

Tabla simplificada tomada de C. Haetinger y M.T. Kettermann.

Son ejercicios con falta de “cierre”, son abiertas ya que no aparece nada a la derecha y es lo que les produce confusión y dificultad a los estudiantes con el uso de la igualdad. Se pide a los alumnos expresiones equivalentes, pero parece que es un misterio. Aunque lo común es que la factura por los errores es trasladada únicamente a los alumnos. ¿Y los métodos de enseñanza? ¿Y la forma de presentar el uso de símbolos?

CAPITULO II. PROPUESTA DE ENSEÑANZA A NIVEL SECUNDARIA

Se trata de una propuesta didáctica, donde las actividades fueran diseñadas por nosotros y puestas a prueba en la Secundaria Técnica No 1 de Puebla, durante los ciclos escolares 2010 - 2011, 2011 - 2012 y 2014 - 2015 por la maestra Laura Ortega con grupos de segundo grado. Y actualmente se siguen aplicando las actividades. Por ello la propuesta derivo en una intervención docente, más adelante se describen los resultados.

Como se mencionó en el capítulo I en Aritmética no se hace uso de la igualdad como una relación simétrica y transitiva, siendo este un obstáculo para entender y manipular las ecuaciones, por lo tanto la propuesta es clara, practicar la igualdad a través de resolver ecuaciones sencillas y poco a poco irlas complicando hasta que quede claro el método para resolverlas: Realizar la operación en ambos lados de la ecuación. Un error que cometen los docentes es suponer que los alumnos puedan resolver con facilidad ecuaciones donde la incógnita aparece más de una vez, o aparece en ambos lados de la igualdad, manipular la “x” es uno de los obstáculos más importantes para los alumnos. (Filloy)

El niño tiene que aprender por primera vez a mover los ojos para leer de derecha a izquierda. Sólo así $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ también puede interpretarse como $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$**.**

2.1 METODO “COVER UP”

Como se mencionó en el capítulo anterior C. Kieran propone resolver ecuaciones por métodos informales, nosotros retomamos el método “Cover up” lo adaptamos y lo ampliamos. Aplicando la técnica “Cover up” resolvemos la ecuación $3x + 9 = 30$, se explica que $3x$ debe ser 21, porque $21 + 9 = 30$, así $x = 7$. También se puede indicar que si “cubrimos el término que contiene a x, la ecuación se ve así [ ] $+9 = 30$ y [ ] debe ser 21, y por lo tanto $x = 3$.
Veamos otro ejemplo un poco más complicado, supongamos que queremos resolver la ecuación $3(x + 2) = 15$, hacemos notar al alumno que se trata de un producto, cubrimos donde aparece la incógnita “entre paréntesis”, pero como al multiplicar por 3 obtenemos 15, $x + 2\, es\, 5$ por lo tanto $x = 3$. De esta manera proponemos trabajar con este tipo de ecuaciones y poco a poco irla complicando, nos fijamos principalmente en satisfacer la igualdad y aislamos mentalmente el término que contiene a x. Las ecuaciones deben poder resolverse “con un golpe de vista” o “mentalmente” para que se sienta que es un juego y no un examen. El

docente plantea una dinámica de juego, no importa si el alumno se equivoca, sus compañeros lo pueden ayudar.

En las siguientes tablas aparecen varios ejemplos, se dan de acuerdo a su nivel de dificultad (El maestro escoge de acuerdo a sus necesidades, cuantos niveles aplicará, conforme vaya avanzando con el grupo):

NIVEL 1: (Soluciones positivas)

$x+3=10$	$x-1=8$	$y-2=5$	$23=3x+5$
$12+3=3x$	$9+1=2x$	$10+4=2x$	$7(x+1)=56$
$22=3x+1$	$20=4y-4$	$3x-3=30$	$10+3=2x-1$
$8=4x-24$	$9x-5=22$	$44=6x+2$	$60=8x-4$
$5x+3=38$	$26=2x+6$	$4=2z-10$	$7x-3=18$

NIVEL 2: (Se puede proponer primero soluciones positivas y luego soluciones negativas) El maestro previamente debe enseñar los números negativos en la recta numérica.

$90=9\mathrm{z}$	$-77=11\mathrm{x}$	$6\mathrm{x}=-42$
$40=5\mathrm{x}$	$7\mathrm{x}=-28$	$13\mathrm{z}=39$
$17\mathrm{x}=51$	$8\mathrm{z}=-24$	$6\mathrm{z}=-60$
$-7\mathrm{x}=-14$	$10\mathrm{z}=-120$	$10\mathrm{y}=-10$
$15=3\mathrm{x}$	$-4\mathrm{z}=-24$	$-19\mathrm{x}=38$

NIVEL 3:

$24=3(\mathrm{x}+6)$	$70=7(\mathrm{z}+1)$	$45=5(\mathrm{r}+5)$
$2(\mathrm{x}-4)=6$	$-21=3(\mathrm{x}-5)$	$15=3(\mathrm{z}+6)$
$-36=4(\mathrm{x}-2)$	$25=5(\mathrm{y}-8)$	$40=2(10\mathrm{z})$
$9=3(\mathrm{x}-8)$	$30=3(3\mathrm{x}+1)$	$56=7(\mathrm{x}+2)$
$7(\mathrm{x}-8)=-28$	$24=4(5\mathrm{x}+1)$	$3(\mathrm{y}-9)=-12$

Llegando a estos niveles, lo que supone el maestro es que los niños ya saben multiplicar. Si los niños “no se saben las tablas de multiplicar”, el método no funciona.

NIVEL 4: (Soluciones fraccionarias $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{4}$)

$\frac{z}{5} = 2$	$x + \frac{x}{2} = 9$	$\frac{7 - y}{2} = 4$
$\frac{x}{7} = -8$	$\frac{2}{4}(x + 2) = 3$	$z + \frac{z}{3} = 8$
$\frac{3}{x} = 2$	$z + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$\frac{z(z + 4)}{5} = 9$
$\frac{8}{x} = 2$	$\frac{8}{x - 1} = 2$	$\frac{y - 1}{2} = 4$
$\frac{5 - x}{3} = 6$	$x - \frac{x}{2} = 8$	$10 = \frac{(x + 5)}{3}$

NIVEL 5:

$3^x + 1 = 4$	$\frac{1}{2}z + \frac{3}{2}z = 6$	$\frac{a^2 - a}{2} = 10$
$2x + 3^x = 13$	$(a + 2)^2 + a = 2$	$\frac{4}{3}z - \frac{2}{3}z = 4$
$5^y = 125$	$y^2 + 2 = 11$	$\frac{8}{y} = -8$
$2^{-y} + 2^y = \frac{17}{4}$	$x^{2x} + 4 = 20$	$\frac{8}{\sqrt{x}} = 2$
$\frac{2}{3}z = 6$	$\sqrt{x} + x^2 = 18$	$2^{\sqrt{x}-3} = 1$

NIVEL 6:

$(x + 1) = 30 + 5$	$\frac{z}{\sqrt{z}} = 4$	$18 = \sqrt{a} + a^2$
$(z - 2)7 = 14$	$y^3 = \frac{8}{27}$	$1 - y = -1$
$(x + 4)5 = 35$	$\sqrt{\sqrt{a} + 3a} = 2$	$x(x - 3) = 0$
$x^{\sqrt{x}} = 16$	$(x - 1)(x + 2)(x - 5) = 0$	$\sqrt{2r} + r^2 = 6$
$\frac{2}{4}(y + 2) = 3$	$3^{x+1} = 27$	$\frac{\sqrt{\sqrt{a}}}{2} = 1$

<u>NIVEL 7</u>: (Con raíces cuadradas y exponentes)

$\frac{\sqrt{\sqrt{x}+6}}{3}=1$	$\frac{x^x - x}{x}=1$	$2^{\sqrt{y}-3}=1$
$\frac{z^3}{z^2+2z}=1$	$\sqrt{t-2}=5$	$\frac{x^2+x-3}{3}=3$
$12=2^w-w$	$4^{(a-4)}-a=10$	$\frac{\sqrt{9(y+4)}}{\sqrt{3(x-2)}}=3$
$\frac{\sqrt{r}+r}{3}=2$	$3^m+2^m=35$	$3=l+\frac{l}{2}$
$1+x=-1$	$2^{\sqrt{s}}=8$	$x+\sqrt{3}=0$

<u>NIVEL 8</u>: (Uso de lápiz y papel)

$\frac{-3x}{2}=2$	$2(-7a-7)=28$	$21g=10g-11$
$\frac{-2y}{5}=\frac{3}{2}$	$11x+9=-57$	$m-25=3m-5$
$\frac{-3z}{4}=\frac{-7}{2}$	$2(w+2)+w=28$	$12x=9x-33$
$\frac{3(x+3)}{5}=\frac{2}{3}$	$9w+12=57$	$3(16)=15+17+c$
$4(5r+2)=-68$	$10t+21=15-2t$	$2(x+2)=4(x+1)$

De igual manera el docente propone más ejercicios con diferente nivel de dificultad y una vez dominado cada nivel, se pasa a otro y posteriormente se pasa al método formal. Se propone que no se pase al siguiente nivel, si todavía el estudiante no contesta correctamente. Los últimos niveles son de reto mental. Lo importante es saber que, se busca un número que satisfaga la igualdad. Se recomienda que el estudiante domine los tres primeros niveles para que se pueda pasar a lo que es el **<u>“despeje”</u>.**

Panizza, M. Sadovsky, P. Sessa C. en su artículo “Primeros aprendizajes algebraicos. Cuando las letras entran a la clase de matemáticas” reporta que al proponerles a los estudiantes que escribieran una ecuación que tuviera solución número 5, no la pueden realizar y la mayoría de ellos escriben una expresión de la forma $\boldsymbol{ax+b=5}$. Esto indica que la mayoría de los alumnos interpreta que " la solución de una ecuación" alude al "resultado, escrito a la derecha de un signo igual"

Este método lo apliqué en el año 2010 con niños de 5° y 6° de primaria, los días jueves en la FCFM, se les ponía expresiones como $[\ \ ] + 3 = 10$, y las podían resolver sin ningún problema, la sorpresa fue cuando se puso la expresión:

$8 + 4 = [\ \ ] + 5$, la mitad de los niños contestaron que 12 era la respuesta que iba en el recuadro, porque $8 + 4$ es igual a 12 y no tomaban en cuenta el $+5$, unos cuantos niños dieron la respuesta correcta que era 7 y explicaron que $8 + 4 = 12$ y que $7 + 5 = 12$ entonces 7 era la respuesta que iba en el recuadro. Algunos niños no comprendían porque el 7 iba en el recuadro, pero se les explico que lo que está del lado derecho de la igualdad debe ser igual al lado izquierdo de la expresión, por eso la respuesta era 7. Haciendo más ejercicios les fue quedando más claro y "recalcando siempre" que ambos lados de la expresión deben de ser iguales. Después, querían expresiones más difíciles. Las semanas siguientes se empieza a trabajar con las ecuaciones, al iniciar se les recuerda que ambos lados de la ecuación deben ser iguales y así comenzó la clase, los niños iniciaron muy bien resolviendo las ecuaciones, no tuvieron ningún problema, ya están un poco más mentalizados de que ambos lados de la ecuación deben ser iguales, como se hicieron las ecuaciones con números más grandes en esta ocasión sí, usaron lápiz y papel, lo que nos sorprende es que cada niño tiene su propio método para resolver cierta ecuación. Los niños tuvieron mucha participación y fueron rápidos en dar las respuestas.

También se trabajó con estudiantes de secundaria los días sábados del mismo año en el auditorio de la FCFM, con la ayuda de mi compañero Gustavo Meza Pérez (esto se encuentra grabado en video), se pone como juego para agilizar sus mentes y lo que tenían que realizar era resolver ecuaciones sin lápiz, ni papel, a puro ojo, es decir, mentalmente. Al principio los alumnos al escuchar ecuaciones, hicieron expresiones de que no les gustaba "QUE, ¿POR QUÉ?", se hicieron equipos de hombres y mujeres y el primero que contestara tendrían un punto y así comenzó el juego, al principio les costó, pero ya encarrilados fueron más participativos y les fue gustando y agradando la actividad. Cuando encontraban ecuaciones que estaban elevadas al cubo se espantaban y decían "está muy difícil" pero se les motivaba, diciéndoles que observaran bien, ya que las soluciones se podían obtener mentalmente y eran enteras, así perdían un poco el miedo a resolverla y tardaban en contestar pero encontraban la solución correcta, así con más confianza continuaron con las demás ecuaciones. Cuando no lograban encontrar la solución, querían aplicar el procedimiento mecánico, se les sugirió que propusieran un valor a "x" entero y que la idea era que satisfaciera la igualdad. Lo que también se nota en estas clases es que los estudiantes no respetan las propiedades simétrica y transitiva de la igualdad al hacer operaciones, como lo dicen los diferentes artículos que se han estudiado. Por ejemplo: $45 + 10 = 55 - 10 = 45$

En octubre del año 2015, los días sábados se retomó la actividad de trabajar con la resolución de ecuaciones a “puro ojo”, se les enseñaba los cartones con las ecuaciones de nivel uno y tenían que dar su solución sin usar lápiz ni papel, nada más que muchos niños, las anotaban en su libreta y las resolvían despejándolas, se les decía que las realizaran mentalmente que solo se tenía que cumplir la igualdad. Ha habido buena participación.

Estudiantes que vienen los sábados a la facultad.

2.2 MÉTODO DE LA BALANZA

Si recordamos como se explica en los libros de texto la resolución de ecuaciones, comprenderemos que no ayuda mucho a los alumnos, pues en pocos renglones presentan el “proceso de despejar”. ¿Cuál es la dificultad que enfrentan los niños con el concepto de incógnita? habrá que aclarar “ecuación – incógnita” toda vez que en algunos libros actuales se limitan a explicar cómo se “despeja” y no mencionan que trabajamos con ecuaciones equivalentes. Si bien expresar claramente las dificultades no las elimina, pero si nos permite elegir un camino para superarlas poco a poco. Veamos ahora un ejemplo resuelto siguiendo el proceso tradicional de despejar y tratemos de ponernos en el lugar de un alumno.

Encontrar un número que sumado con $\frac{1}{3}$ de sí mismo da 40, es decir $x + \frac{x}{3} = 40$.

Buscamos un número, por el total que da la suma, podemos imaginar que no se trata de un número muy grande (no puede ser mayor a 40) adivinando un poco llegamos a que $x = 30$ es la solución. Pero cuando resolvemos por el método tradicional, aplicando las reglas, sería algo como lo siguiente:
A partir de $x + \frac{x}{3} = 40$ quitamos denominadores multiplicando por 3 ambos lados de la ecuación y obtenemos $3x + x = 120$ luego $4x = 120$ despejando $x = \frac{120}{4}$ entonces $x = 30$.
Pero visto en conjunto, el proceso puede parecer extraño: de donde sale el 120, 120 no es un número que aparezca en el enunciado original. Así, nos percatamos que los libros, aunque intentar motivar, explicando que una ecuación es como una

balanza de brazos, no explican, ni mencionan, que el método consiste en **transformar la ecuación original en otra equivalente**. Esta idea de cambio, pero al mismo tiempo de que algo permanece constante puede ser difícil de manejar para los alumnos. Para el niño, resolver una ecuación es “despejar” como dice la maestra.

Así que la ecuación $\boldsymbol{x + \frac{x}{3} = 40}$ y la ecuación $\boldsymbol{3x + x = 120}$ **son equivalentes** aunque a un golpe de vista sean diferentes, por ello tendría sentido aplicar el modelo de la balanza para insistir en la idea, operaciones iguales en ambos lados del signo de igualdad no altera el valor de lo incógnita.

Resolvemos una ecuación, transformando sucesivamente a otra equivalente. Es conveniente trabajar formalizando progresivamente:

a) Como comenta Kieran, si se enseña primero métodos informales los alumnos comprenderán mejor la propiedad simétrica de la igualdad.

b) Se pueden resolver problemas sencillos del tipo “adivina un número”, solución de problemas con enunciado que los alumnos resolverán utilizando sus propios procedimientos y posteriormente el docente “explica usando algebra” como opción no como obligación.

c) Se explica aunque no se espera que dominen rápidamente el concepto de “ecuaciones equivalentes”, aplicando que una igualdad no se altera si se hace la misma operación en ambos lados” (Método formal).

Otro ejemplo de ecuaciones equivalentes es el siguiente problema que se les puso a los estudiantes del CENCH (2008).

Se les propuso el siguiente problema:

Una familia de conejos tiene en total 72 zanahorias, el hijo se come 12 y el papá se come el doble de zanahorias que la mamá.

La ecuación es:

$$\boldsymbol{pap}\text{á} + \boldsymbol{mam}\text{á} + \boldsymbol{hijo} = \boldsymbol{72}$$

Pero sabemos que el hijo se come 12 zanahorias entonces se tiene:

$$\boldsymbol{pap}\text{á} + \boldsymbol{mam}\text{á} + \boldsymbol{12} = \boldsymbol{72}$$

Ahora tomando como referencia la cantidad de zanahorias que come la mamá tenemos:

$$\boldsymbol{2m + m + 12 = 72}$$

De aquí se resuelve, pero los jóvenes lo resuelven planteando

$\boldsymbol{2m + m = 60}$ Descuentan las 12 “que se comió el hijo”

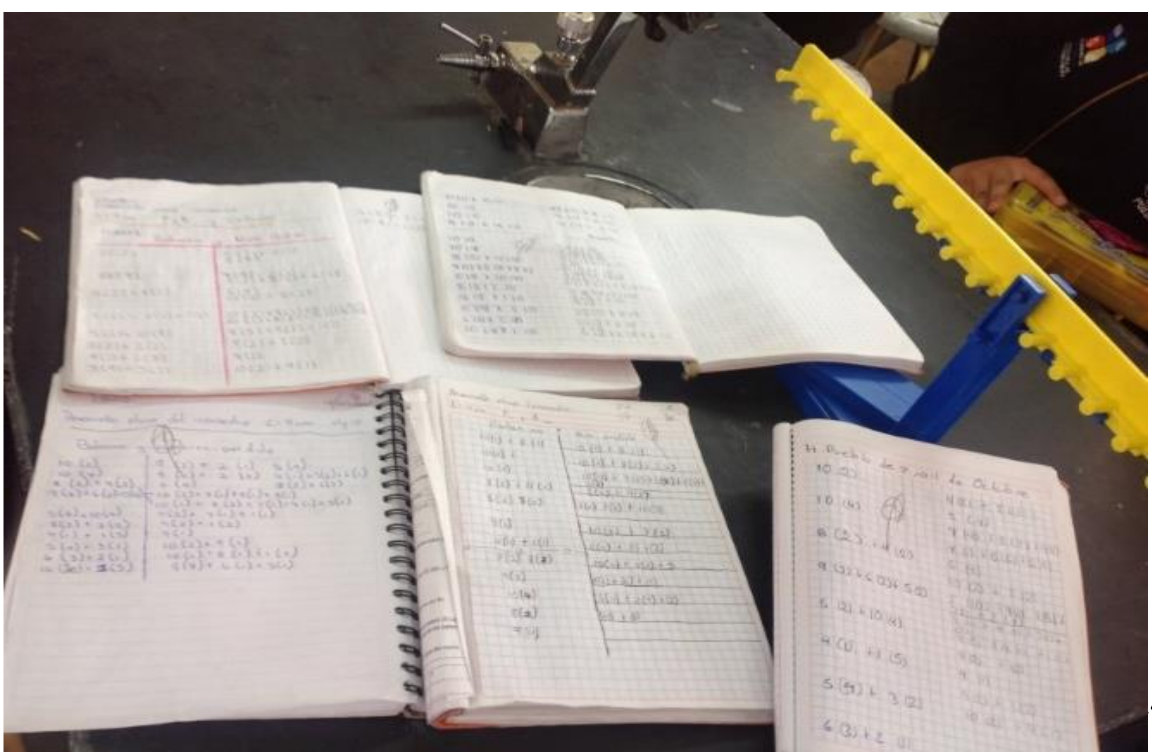
A partir de su solución se les explica que

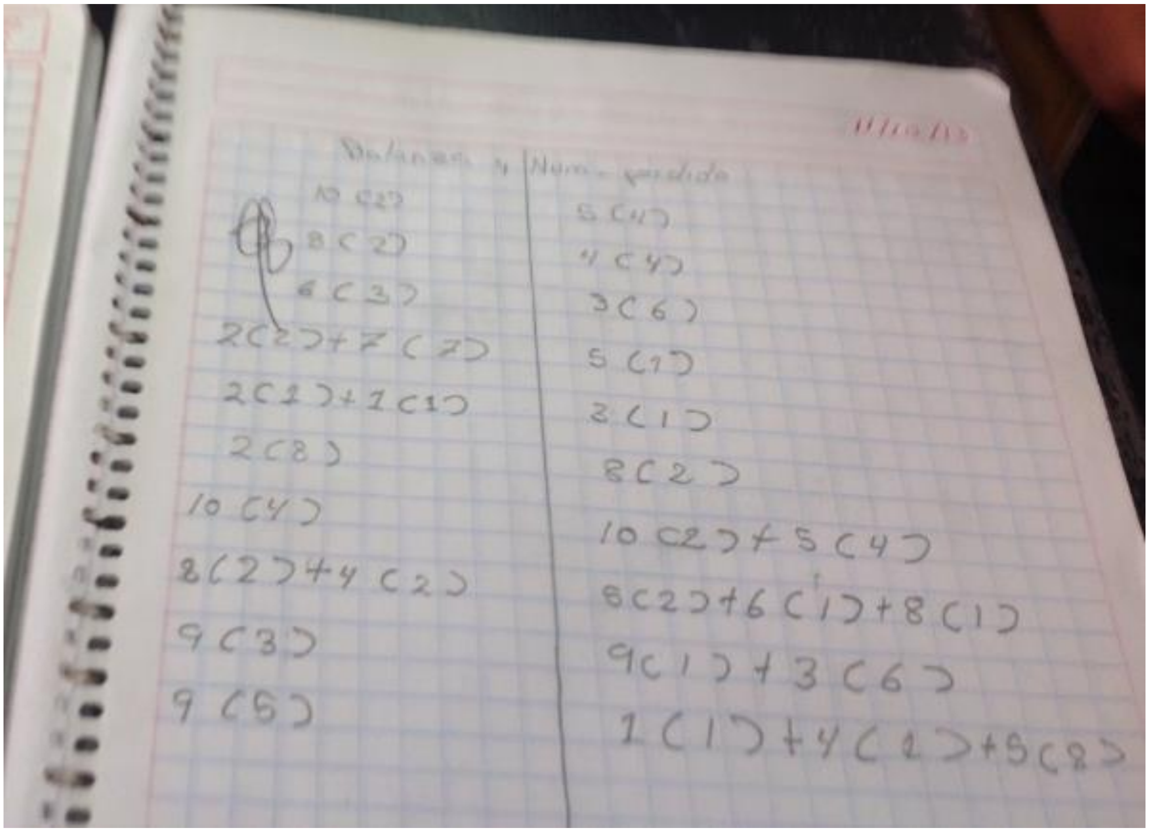
$$\boldsymbol{2m + m = 60 \quad y \quad 2m + m + 12 = 72}$$

Son **ecuaciones equivalentes**, haciéndoles la observación de que como ellos ya saben, de la segunda ecuación se resta 12 en ambos lados, así se les convence que los procedimientos algebraicos corresponden a operaciones que nosotros haríamos al resolver un problema concreto.

Los estudiantes aplicando el modelo de la balanza y esto es muy bueno porque el mismo alumno se da cuenta de que sí, colocó correctamente las pesas. (Técnica No 1).

Alumnos de la Secundaria Técnica No 1 de Puebla.





Esto es una evidencia de que varios niños no usan el signo de igualdad espontaneamente. Se observa que en sus libretas utilizan solo una línea vertical al centro en lugar del signo de igualdad. Posteriormente la maestra pide a los estudiantes que deben usar el signo de igualdad en cada caso.

Se explicó el método de la balanza en un curso de capacitación SEP-BUAP. Misma operación en ambos lados, para que quede entendido, se debe de estar practicando constantemente.

2.3 ACTIVIDADES PARA INTRODUCIR LITERALES

Para el estudiante las incógnitas **No** tienen sentido. Acá tenemos una manera de cómo trabajar para ir introduciendo los símbolos:

USO DE LITERALES:

Se trabajó con 4 niños de secundaria Ray, Emilio, Arely, Daniel

Tomar de un calendario un mes cualquiera y seleccionar un cuadrado de 3 x 3

OCTUBRE						
L	M	M	J	V	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

Por ejemplo:

8	9	10
15	16	17
22	23	24

Se pide a los alumnos, que sumen todos los números, como se puede hacer con muchos otros cuadrados, se les pide que enuncien una “fórmula o regla” para hallar el total, si “X” es el termino central

Los niños la encuentran y se les pide que la expliquen.

8	9	10
15	16	17
22	23	24

Los niños dicen que la regla es nueve veces el número del centro.

Según su explicación, 16 esta al centro, suman por parejas $9 + 23 = 32$, $22 + 10 = 32$, $8 + 24 = 32$, $15 + 17 = 32$ y dicen la mitad es 16. Por lo tanto la suma es 16×9, los niños participan y están contentos por hallar la solución, pero Y luego que más… En este caso el profesor explica que se pueden usar símbolos.

Los niños dieron la pista correcta TOCA AL MAESTRO GENERALIZAR Y VER QUE ES MÁS CÓMODO USAR SIMBOLOS, PARA ESTE EJEMPLO.

Se les enseña a usar la incógnita "X", porque como vimos, jamás se les ocurre usar la "X", no es algo espontáneo. En un contexto más relajado se acepta más fácilmente que de la forma tradicional.

$X-8$	$X-7$	$X-6$
$X-1$	X	$X+1$
$X+6$	$X+7$	$X+8$

Los niños ayudaron a escribir correctamente las $X's$. Se logra escribir y como ellos dijeron sumamos, se tiene confianza en lo que dijeron y en la "X"

$X - 7\ con\ X + 7$
$X - 8\ con\ X + 8$
$X + 6\ con\ X - 6$
$X - 1\ con\ X + 1$

Así el total es $9X$, lo niños lo lograron. Hicieron una simplificación de términos con 9 sumandos, este es el reflejo simbólico de su idea.
Pero ahora ya evitamos un gran obstáculo para los niños, es difícil pasar del enunciado a las ecuaciones.

La propuesta es clara, partir siempre de enunciados e ir enseñando el álgebra. Hay problemas en donde es inevitable manipular la "X".

En el enfoque tradicional nos aquejan todos los males, los niños aprenden algebra de manera mecánica, no pueden resolver problemas con enunciado, entre otras razones por estar practicando de manera mecánica, simplificación de expresiones, productos notables, factorización etc.

2.4 MÉTODO SINGAPUR

Basándonos en el artículo de Beckmann, S. (2004) fue como aprendimos el método Singapur. Donde comenta que el estudio TIMSS de 1999, los niños de Singapur tuvieron el mayor rendimiento en matemáticas y se pregunta ¿Por qué los niños de Singapur trabajan tan bien en matemáticas? Sería difícil explicar el éxito de un país dado que depende de muchos factores socioeconómicos y socioculturales. Pero sí comenta que los libros de texto de Singapur presentan algo muy interesante, incluyen problemas que pueden resolverse por métodos muy accesibles, los cuales ayudan a los niños en formas que son sensibles e intuitivas.

Según los últimos estudios que ha realizado la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE 2015), México se encuentra en el último lugar de 36 países en materia de educación. La comprensión, retención, gusto por la lectura y la aplicación de las matemáticas son problemas muy marcados en las escuelas. Y una de las razones por la que los niños no avanzan en matemáticas se debe a una deficiente lectura que les impide comprender los textos de los problemas.

Por otra parte, se puede observar que el temor de las niñas y los niños hacia los problemas matemáticos, no radica, en la mayoría de los casos, en la falta de conocimientos para resolverlos, sino en una mala actitud ante ellos, en la carencia de habilidades de comprensión lectora para identificar lo que se pide y en la falsa creencia de que con una sola lectura se es ser capaz de resolver cualquier problema.

Una de las condiciones fundamentales del método Singapur, es la disposición gráfica de los datos o el manejo de algunos objetos como apoyo a la comprensión, explicación y respuesta que se da al problema.

El procedimiento comprende ocho pasos para resolver cualquier problema en forma rápida y sencilla.

1.- Leer con atención el problema completo.

2.- Decidir de qué o de quién se habla en el problema.

3.- Dibujar una barra unidad para cada sujeto del problema.

4.- Leer el problema de nuevo; esta vez deteniéndose en cada frase o en cada número, si hay más de uno por frase.

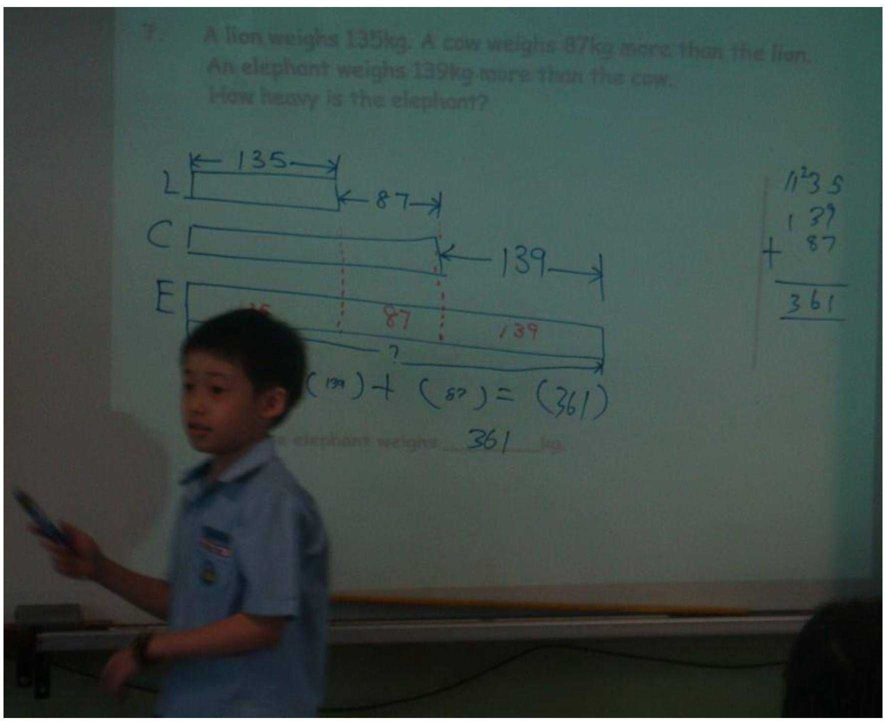
5.- Ilustrar la barra o las barras unidad con la información que proporciona el problema.

6.- Identificar la pregunta del problema e ilustrarla.

7.- Realizar las operaciones correspondientes y escribir el resultado en el gráfico.

8.- Escribir la respuesta del problema como una oración completa.

El Método Singapur para el aprendizaje de las matemáticas se sustenta en la comprensión del texto que se lee, en llegar a saber con claridad qué se quiere, en disponer los datos gráficamente o representándolos con objetos, a fin de buscar la respuesta adecuada "mirando" o "tocando" los componentes del problema. En el Método Singapur, el maestro es, un orientador, un conductor.



2.4.1 ANTECEDENTES DEL MÉTODO GRAFICO EN LIBROS DE ÁLGEBRA

Hasta hace varios años resultaba extraño pensar en resolver un problema con enunciado mediante un diagrama, en lugar de hacer uso del algebra. En el libro

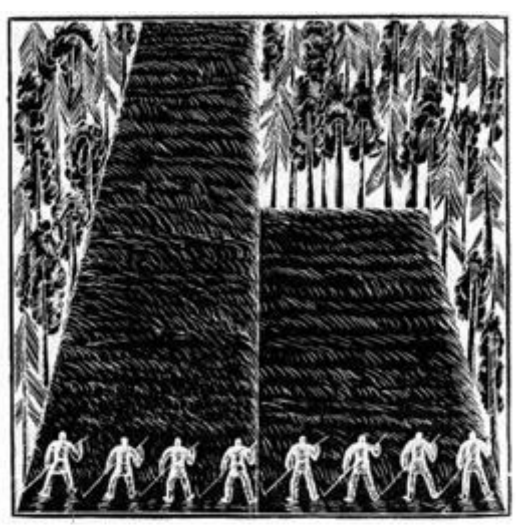
“Algebra Recreativa” de Y. Perelman aparece el siguiente problema y lo más importante, indica claramente que no es necesario usar algebra.

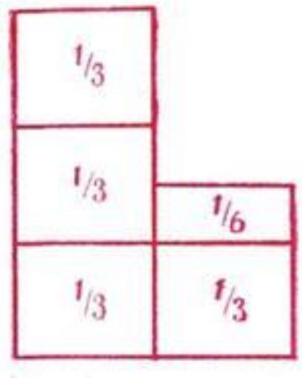
Problema: El artel de segadores

"Un artel de segadores debía segar dos prados, uno tenía doble superficie que otro. Durante medio día trabajó todo el personal del artel en el prado grande; después de la comida, una mitad de la gente quedó en el prado grande; y la otra mitad trabajó en el pequeño. Durante esa tarde fueron terminados los dos tajos, a excepción de un reducido sector del prado pequeño, cuya siega ocupó el día siguiente completo a un solo segador. ¿Con cuántos segadores contaba el artel?".

“*Los maestros con experiencia, claro, podían resolverlo con facilidad mediante ecuaciones, pero no daban con su sencilla resolución aritmética. Sin embargo, el problema es tan fácil que para resolverlo en absoluto* ***<u>no merece la pena servirse del álgebra</u>****. Si el prado mayor fue segado por todo el personal del artel en medio día, y por la mitad de la gente en el resto de la jornada, es natural que medio artel segó en medio día* $\frac{1}{3}$ *del prado. Por consiguiente, en el prado menor quedaba sin segar* $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

Si un trabajador siega en un día $\frac{1}{6}$ del prado, y si fue segado $\frac{6}{6}+\frac{2}{6}=\frac{8}{6}$, esto quiere decir que había 8 segadores, el problema se hace más comprensible si, al resolverlo, se emplea este sencillo diagrama”.

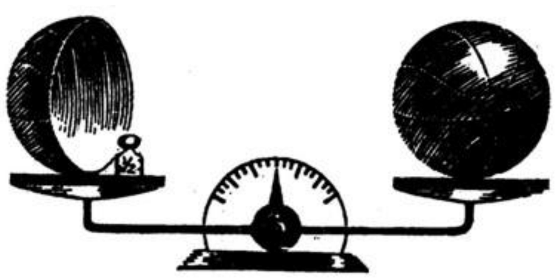




Al hacer un dibujo liberamos la memoria inmediata (corto plazo), pues ahora la información del problema la podemos ver y lo que es más importante podemos visualizar las relaciones entre los datos y encontrar la respuesta. A continuación se dan más ejemplos.

PROBLEMA 1.

Si una pelota de basquetbol pesa $\frac{1}{2}$ kilo, más la mitad de su propio peso. ¿Cuánto pesa? La balanza en equilibrio sinónimo de igualdad (Martin Gardner)



Solución:

Algunos alumnos podrían hacer esto: La pelota de basquetbol pesa $\frac{1}{2}\ kg$. Entonces la mitad de su peso es $\frac{1}{4}\ kg$. Sumamos estos valores y obtenemos que la pelota pesa $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\ kg}$**.**

Pero el problema consiste en descubrir el peso de la pelota, y si resulta ser de tres cuartos, entonces no puede pesar medio kilo como se afirma al principio. Resulta que hay una contradicción en este punto. Se interpretó mal la pregunta.

Hay solamente una interpretación que tiene sentido. El peso de la pelota de basquetbol es igual a la suma de los dos valores: $\frac{1}{2}\ kg$ y un valor desconocido que es la mitad del peso de la pelota de basquetbol. Esto puede representarse en una balanza de platillos tal como se ve en la ilustración.

Si se retira media pelota de basquetbol de cada platillo de la balanza, ésta seguirá en equilibrio.

Habrá un peso de $\frac{1}{2}\ kg$ en un platillo y media pelota de basquetbol en el otro, de modo que media pelota de basquetbol debe pesar $\frac{1}{2}\ kg$ y la pelota entera debe pesar el doble, o sea 1 kg.

Si bien del dibujo de no tiene mucho sentido desde el punto de vista práctico, **quien ha cortado una pelota a la mitad, esto equivale a destruirla, el diagrama ayuda a resolver el problema (es común encontrar este problema con otro objeto, por ejemplo un ladrillo)**

2.5 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La propuesta es que los niños resuelvan los problemas por sus propios métodos. De manera informal ya sea por tanteo, adivinando como ellos puedan, lo importantes es que generen sus propias ideas. Y si lo resuelve significa que entiende de que se está hablando, la labor del maestro es explicarle como se puede resolver usando álgebra y ver que se llega al mismo resultado. Pero la solución algebraica es general, de esta manera partimos de la comprensión general del alumno y el maestro hace ver que el álgebra es razonable, es decir, sus reglas funcionan. El profesor se convierte en un mediador, un facilitador, que **no impone su forma de pensar**, sino que parte de la solución de los alumnos y su objetivo consiste en llevarlo poco a poco a reconocer el poder del álgebra: L**a generalización**.

Se proponen 4 puntos importantes:

1. Repaso de 5 minutos dado por el maestro.
2. Se propone el problema del día.
3. a) Solución de los alumnos
   b) Discusión de la solución, pasan al pizarrón.
4. Se da el cierre por parte del maestro dando la solución algebraica del problema.

A varios niños de 12 a 13 años, en una de muchas sesiones se les propone el siguiente problema:

PROBLEMA 1.

Si Rodrigo compra 5 chocolates para el día de la amistad, le sobran 15 pesos, si quiere comprar 7 chocolates, le faltarían 17 pesos ¿Cuánto cuesta cada chocolate?

Solución:

Varios niños lo resuelven al observar que la diferencia de dos chocolates corresponde a $15 + 17 = 32$ pesos, entonces cada chocolate cuesta 16 pesos, nos quedamos con dudas pues no alcanzan a explicar porque suman $15 + 17$.

Se les explica con algebra, lo cual es un poco más complicado, pero ¡obtenemos la misma respuesta! Los niños tenían razón.

Se les da la siguiente explicación sea:

$D = Dinero\ que\ tiene\ Rodrigo$
$x = El\ precio\ de\ cada\ chocolate$

La primera condición nos dice $D = 5x + 15$

La segunda nos da $D = 7x - 17$ $(El\ signo\ menos\ es\ porque\ nos\ faltan)$

Entonces igualamos y obtenemos

$5x + 15 = 7x - 17$

$15 + 17 = 7x - 5x$

$32 = 2x$

$\frac{32}{2} = x$

$\underline{\mathbf{16 = x}}$

Por lo tanto:
El precio de cada chocolate es de 16 pesos.

Como se ve, la solución algebraica es más elaborada en comparación con la solución aritmética de los niños, ellos entienden la situación, el álgebra resulta una complicación, sobre todo porque se tiene la necesidad de pensar en dos cantidades que no conocemos: el dinero que tiene Rodrigo y el precio de cada chocolate y finalmente escribir la igualdad correspondiente, que es la ecuación que resuelve el problema, es complicado explicar a los niños porque las expresiones con iguales. Si el problema no es muy complicado, los niños de manera natural lo resuelven aritméticamente. Por ejemplo:

PROBLEMA 2.

Pablito le dice a Lupita, tengo el triple de dinero que tú, pero si te doy diez pesos entonces tú tendrás el triple de dinero que yo. ¿Cuánto dinero tiene cada quién?

Solución:

Se intenta con algebra
$x = lo\ que\ tiene\ Lupita$ entonces
$3x = y\ es\ lo\ que\ tiene\ Pablo$

Si Pablo da 10 pesos, Lupita tiene $x + 10$ esto es el triple de lo que tiene Pablo, es complicado seguir con literales el enunciado… Y obtener una respuesta sensata.
Es más fácil con un dibujo (Método Singapur). La clave es tener en mente que 10 pesos cambian de dueño, se dibuja una barra (rectángulo con base amplia usando algún color) y se divide en tres partes iguales. Se ilustra el enunciado:

Pablo tiene el triple

Pablo $	Pablo $	Pablo $
Lupita $		

Se puede iluminar lo que se tiene y dejar en blanco donde no hay (falta o sin colorear) Pero si Pablo da 10 pesos a Lupita, podemos dibujar.

Pablo sin 10 pesos		
Lupita	5	5

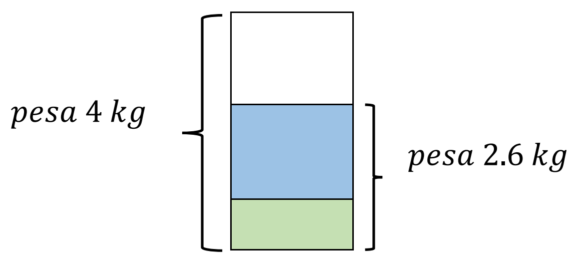
Visualmente obtenemos que un tercio de lo que tiene Pablo es 5 así **tiene 15 y Lupita 5.**

PROBLEMA 3.

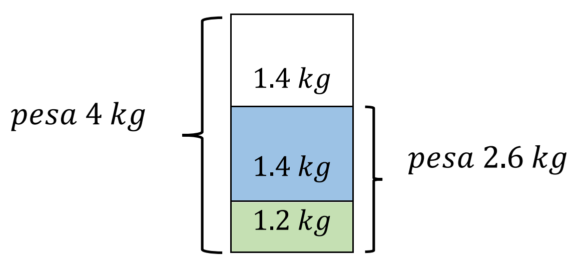
Una jarra de vidrio está llena de agua a la mitad y pesa 2.6 kg. Cuando la jarra está completamente llena pesa 4 kg. ¿Cuánto pesa la jarra de vidrio?

Solución:

Haciendo un dibujo tenemos:



De acuerdo al dibujo lo que tenemos que hacer es restar $4 - 2.6 = 1.4$ para que tengamos el peso de la parte en blanco entonces el rectángulo blanco pesa 1.4 kg.

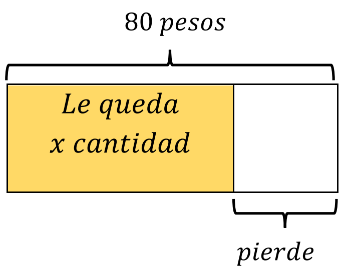


La parte azul también pesa 1.4 kg porque la jarra está a la mitad y ahora restamos $2.6 - 1.4 = 1.2$ entonces la parte verde pesa 1.2 kg.
Por lo tanto **la jarra de vidrio pesa 1.2 kg.**

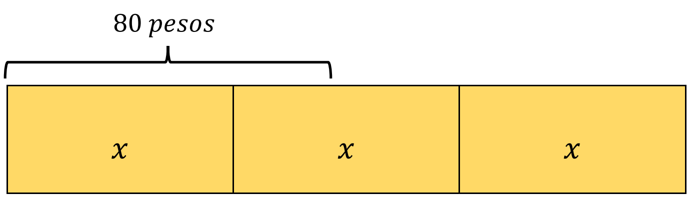
PROBLEMA 4.

Dos personas tienen la misma cantidad de dinero, 80 pesos cada uno. Al jugar, uno pierde cierta cantidad y lo gana el otro entonces este ya tiene el triple que el otro. ¿Cuánto pierde?

Solución:



Como ya perdió cierta cantidad entonces la otra persona ya tiene el triple que él. Es decir tres veces x, y lo dibujamos:



Donde el color indica que ahora tengo cuatro partes iguales.

Entonces tenemos $3x$ mas el que le queda a la otra persona es otra x. Y como sabemos que la cantidad total de dinero es 160. Por lo tanto obtenemos lo siguiente: $4x\ debe\ ser\ igual\ a\ 160$. Entonces cada rectángulo vale 40 pesos ya que 160 entre 4 es igual a 40.

Ahora algebraicamente se puede hacer, pero el estudiante necesita mucho trabajo para llegar a plantear la ecuación.

Llamemos:

$x = Cantidad\ que\ pierde$

El que pierde le queda $80 - x$
El que gana le queda $80 + x$

Y el que pierde tiene el triple que el otro entonces tenemos: $3(x - 80)$
Ahora igualamos las ecuaciones y se obtiene:

$3(80 - x) = (80 + x)$

$240 - 3x = 80 + x$

$160 = 4x$

$\frac{160}{4} = x$

$40 = x$

<u>Por lo tanto la cantidad que pierde la persona es de 40 pesos.</u>

<u>Muchos alumnos cometen el error de poner el triple a la persona que gana y no puede ser. Se le debe colocar a la persona que pierde.</u>

Este error se puede ver en este famoso ejemplo:

Escribe una ecuación usando las variables E y P para la siguiente afirmación: “Hay 6 veces más estudiantes que profesores en esta universidad”. Se usa E para el número de estudiantes y P para el número de profesores (Clement, Lochhead y Monk, 1981).

Los alumnos ponen como respuesta $6E = P$, pero esta incorrecta, hay confusión tal vez porque la afirmación dice “6 veces más estudiantes” y esto induce a escribir $6E$. Y no puede haber más profesores que estudiantes, basta pensar en números concretos… ¡¡¡son muchos profesores!!!
La respuesta correcta es <u>$\boldsymbol{6P = E}$</u>
El método Singapur ayuda a disminuir este tipo de errores.

PROBLEMA 5.

En cinco días cuatro vacas negras y tres vacas cafés dan tanta leche como tres vacas negras y cinco cafés dan en cuatro días. ¿Cuáles vacas dan más leche?

Tanto los maestros como los niños tuvieron problemas al resolver este problema porque aunque lo intentaron por sistema de ecuaciones “no hay suficientes datos” y vemos que la dificultad es que no saben trabajar con los 4 y

5 días por lo que su sistema de ecuaciones es incorrecto, el truco es imaginarse una x y y para representar el número de litros por día para cada vaca.

En general se espera que muy pocos alumnos lo puedan resolver, el maestro debe de mostrarles cómo, señalándoles que los símbolos son para ayudarles a pensar. El problema refleja el "pensamiento simbólico" (algebraico) es decir, usar símbolos (incógnitas) no es fácil. Observemos la solución.

$En\ 5\ DIAS \quad 4N + 3C = 3N + 5C \quad En\ 4\ DIAS$

$X = LITROS\ DE\ LECHE\ POR\ DIA\ DE\ UNA\ VACA\ NEGRA$
$Y = LITROS\ DE\ LECHE\ POR\ DIA\ DE\ UNA\ VACA\ CAFÉ$

$20X + 15Y = 12X + 20Y$ Como una balanza

Misma operación en ambos lados

$20X - 12X + 15Y = 12X - 12X + 20Y$
$8X + 15Y = 20y$

$8X + 15Y - 20Y = 20Y - 20Y$

$8X - 5Y = 0$

$8X = 5Y$

$\boldsymbol{X = \frac{5}{8}Y}$

<u>LAS VACAS CAFES DAN MÁS LECHE, porque X es una fracción de Y</u>.

Este fue un problema difícil de resolver para algunos profesores de secundaria, porque piensan que X, Y deben tener "valores".

CAPITULO III. CONSTRUYENDO ECUACIONES A PARTIR DE ENUNCIADOS: SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES.

Los estudiantes, al iniciar el estudio del álgebra (primero de secundaria) y particularmente cuando resuelven problemas, aplican las nociones y conceptos que usaban con éxito en aritmética. El álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética que los alumnos puedan aprender fácilmente. Un problema puede ser resulto mediante ARITMETICA, con dibujos (métodos informales) o con ALGEBRA. No hay problemas aritméticos o algebraicos, solo hay problemas y se pueden resolver algebraicamente o aritméticamente. Así el docente debe estar preparado, porque puede tomar tiempo que el alumno asimile “las técnicas algebraicas” para resolver problemas.

La enseñanza tradicional invierte la forma natural en que los niños resuelven problemas en el límite Aritmética – Algebra. Primero enseña las leyes del álgebra, se hacen muchos ejercicios de mecanización y después de muchas horas de repetición se pretende que el estudiante sea hábil en la resolución de problemas. Pero de esta manera el niño ha perdido el impulso natural que lo lleva a resolver problemas, deja de intentarlo, se paraliza ante la exigencia de aplicar álgebra.

También es conocido que los niños se acostumbran a trabajar con reglas mecánicamente de tal suerte que pierden habilidad para resolver ecuaciones sencillas. Es decir quieren despejar $x + 12 = 30$, por lo tanto se dan sugerencias para evitar que se fomenten estos malos hábitos. En nuestra propuesta trabajamos con “ecuaciones aritméticas” (Filloy) para posteriormente pasar al método formal.

(Filloy y Rojano 1984) argumentaron que la presentación de problemas con enunciado usando balanza de dos platillos es extremadamente útil para la introducción del álgebra, auxiliando al estudiante a vencer dos obstáculos que interfieren significativamente en la comprensión del álgebra en la escuela:

1) La operación con incógnitas
2) La utilización distinta del concepto de equivalencia sobre el signo de igualdad.

Retomando la idea de buscar un número desconocido (ecuaciones de primer grado) proponemos problemas donde ahora buscamos dos números desconocidos, iniciamos con problemas del tipo estoy pensando en un par de números que sumados dan 32 y que restados dan 4. Dime los números.

(Simbólicamente $A+B=32 \ \ y \ A-B=4$). La dinámica se desarrolla en un ambiente de juego, pues se proponen otros “problemas” semejantes.
Se practica varias veces, cambiando los resultados, se pide a los alumnos si pueden adivinar una regla para resolver este tipo de problemas. Algunos niños indican que el número mayor se obtiene al sumar los números dados (32 y 4) y se divide entre 2. Expresan su solución en forma verbal, no son capaces de hacerlo simbólicamente.

Una vez que han dado esta idea, se les explica que es correcta. Escribimos las ecuaciones:

$A+B=32$
$A-B=4$

Sumando las igualdades obtenemos: $2A=36 \ \ entonces \ A=18$

Después de varios problemas los niños pueden descubrir que el número mayor que se busca es la semisuma de los números dados, cuando esto ocurre es el momento de explicar simbólicamente.

Sean m y n los números que debemos encontrar, del enunciado:
$m+n=32 \ \ y \ \ m-n=4$, si sumamos ambas igualdades (cosa que no altera la igualdad) obtenemos $2m=36$, por lo tanto $m=18$.

Podemos generalizar y obtener la regla que los niños habían descubierto, sean $A \ \ y \, B$ los números dados, $m+n=A \ \ y \, m-n=B$ sumando las igualdades llegamos a $m=\frac{A+B}{2}$.
Esto sirve para introducir la idea de sumar o restar igualdades término a término para resolver el problema.

Se espera que los niños lo resuelvan por tanteo, pero se puede presentar la siguiente solución que llamaremos **“método de compensación o mediación”.** Un niño dice “el problema pide dos números, pensé que fueran iguales $a=\ 16$ y $b=\ 16$ suman 32, pero la segunda condición es que su diferencia sea 4. Si quito 2 a uno y se los doy al otro la diferencia es 4, la suma no se altera. La solución es 18 y 14.

Posteriormente aumentamos las cantidades, ahora ya no tiene caso intentar ensayo y error. Tenemos el siguiente problema es forma visual.

Los estudiantes que no saben álgebra pueden aplicar el método de compensar, lo que le ponen a uno se le quita al otro. Del ejemplo de los abuelitos la suma de sus edades es 150 y la diferencia es 6. Entonces los niños proponen 80 y 70 como edades, la suma es 150 pero la diferencia es 10, usando el método de compensación ponen $80 - 1$ y $70 + 1$, les da como resultado 79 y 71, la suma es 150 pero la diferencia no es 6 aún, siguen aplicando el método y ahora tienen $79 - 1$ y $71 + 1$, les da como resultado 78 y 72, la suma es 150 y la diferencia es 6 por lo tanto llegan al resultado final. **O pueden proponer que las edades sean iguales**, 75 y 75 pero como la diferencia es 6 entonces tienen $75 + 3$ y $75 - 3$ por lo tanto obtienen el resultado 78 y 72.

Posteriormente se trabajan enunciados con 3 condiciones, que los niños resolverán por sus propios medios y el docente escribe las ecuaciones. Aunque se limita a enseñar el método de suma y resta. Más adelante, por cubrir el programa oficial enseñan el método de sustitución e igualación y el método gráfico. Es importante señalar que el método grafico requiere un cambio de enfoque y debe tomarse con calma. Es un error didáctico que después de enseñar los métodos algebraicos para resolver un sistema de ecuaciones de 2×2 se pase sin mayor ceremonia al método gráfico.

$$A_1\,x\ + B_1\,y\ =\ C_1$$
$$A_2\,x\ + C_2\,y\ =\ C_2$$

Pues resulta difícil cambiar de $x,\ y$ números desconocidos a $x,\ y$ variables “soluciones de la expresión lineal en 2 variables.

Pues en problemas con enunciado queda claro que buscamos dos números desconocidos, que se podrían adivinar, pero si las cantidades conocidas no son números pequeños, esta estrategia podría tomar mucho tiempo, porque tengo dos cantidades que debemos combinar para satisfacer el problema y esto produce muchas parejas posibles. En el método grafico ahora hay un cambio importante, cada una de las ecuaciones al ser representadas en el plano cartesiano tiene infinitas soluciones. En otras palabras entre el método algebraico y el método gráfico hay un gran salto, es decir, ahora en una expresión del tipo $ax + by = c$, x, y representan variables.

Trabajamos con problemas de enunciado (Word problems), conocidos de varios años atrás. Martín van Reeuwijk da un problema con dibujo de frutas equilibradas en una balanza. Y los problemas recreativos de Yakov Perelman autor de varios libros recreativos, quien presenta un problema llamado “las gatas y los gatitos”.

PROBLEMA 1. (Frutas equilibradas en una balanza de Martín van Reeuwijk)

En forma verbal podemos escribir:

10 bananas = 2 piñas

1 piña = 2 bananas + 1 manzana

1 manzana = ¿Cuántos bananas?

De manera progresiva vamos simplificando la escritura hasta llegar a la representación simbólica, y a resolver el “sistema de ecuaciones”.

Solución:

Para abreviar ponemos:
$b = bananas,\ p = piñas,\ m = manzanas$, o sea "b" representa el peso de las bananas, "p" representa el peso de las piñas y "m" representa el peso de las piñas.

Las balanzas que se muestran están en equilibrio, es decir:

$10b = 2p$
$1p = 2b + 1m$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera obtenemos:

$10b = 2(2b + 1m) = 4b + 2m$ Sustituyendo nos queda
$6b = 2m$ entonces

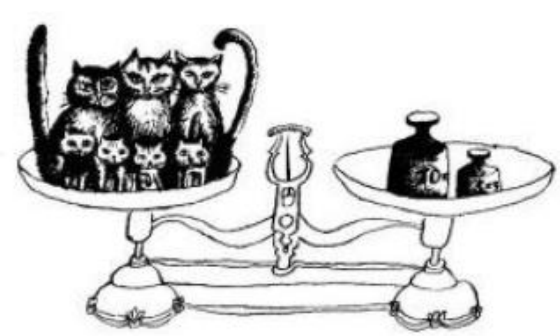
$\underline{\boldsymbol{3b = m}}$ **(Tener presente que son iguales en peso)**

Esta solución la obtiene los niños básicamente por su habilidad, más que por resolver el sistema de ecuaciones algebraicamente (según se enseña habitualmente).

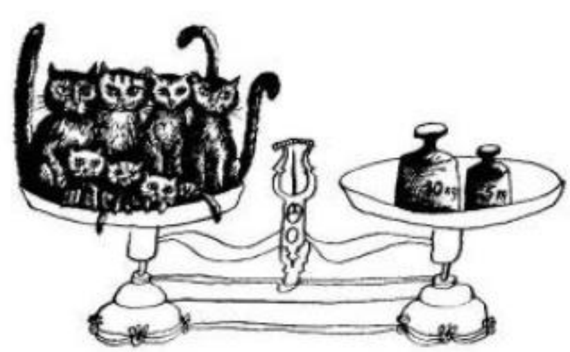
Por tratarse de objetos, los niños si los pueden manipular, pero en una ecuación donde aparecen dos o más veces las "x", los niños ya no pueden manipular intuitivamente los términos.

PROBLEMA 2. (Las gatas y los gatitos de Yakov Perelman)

Cuatro gatas y tres gatitos pesan 15 kg, y tres gatas y cuatro gatitos pesan 13 kg. ¿Cuánto pesa cada gata y cada gatito, por separado?



Plato derecho 13 kg



Plato derecho 15 kg

Solución:

Llamemos:

$G = peso\ una\ gata$
$g = peso\ un\ gatito$

O sea “G” representa lo que pesa una gata en kilogramos y “g” representa lo que pesa un gatito en kilogramos.

De acuerdo al enunciado tenemos:

$3G + 4g = 13$ …….. Ecuación (1)
$4G + 3g = 15$ …….. Ecuación (2)

De la ecuación 1 despejamos G y obtenemos:

$3G = 13 - 4g$

$G = \frac{13-4g}{3}$……… Ecuación (3)

Ahora la ecuación (3) la sustituimos en la ecuación 2 y obtenemos:

$4G + 3g = 15$

$$4\left(\frac{13 - 4g}{3}\right) + 3g = 15$$

$$\frac{52 - 16g}{3} + 3g = 15$$

$$\frac{52 - 16g + 9g}{3} = 15$$

$52 - 7g = (15)(3)$

$52 - 45 = 7g$

$7 = 7g$

$\underline{\mathbf{1 = g}}$

Ahora sustituimos $\underline{\boldsymbol{g} = \mathbf{1}}$ en la ecuación 3 y nos queda:

$$G = \frac{13 - 4g}{3}$$

$$G = \frac{13 - 4(1)}{3}$$

$$G = \frac{13 - 4}{3}$$

$$G = \frac{9}{3}$$

$$\underline{\boldsymbol{G} = \mathbf{3}}$$

Por lo tanto **1 gatito pesa 1 kg y 1 gata pesa 3 kg.**

Pero los alumnos de 12 – 13 años lo resuelven por tanteo o adivinando.

Hemos visto ejemplos de problemas recreativos resueltos con dibujos, Perelman en su libro "álgebra recreativa" propone un problema difícil y se apresura a comentar que es más fácil recurrir a la aritmética y a un dibujo. Se ve en los enunciados, que se ilustran con el equilibrio en una balanza.

PROBLEMA 3.

En un pueblo lejano no hay dinero y en el mercado la gente intercambia sus productos, los animales se cambian de acuerdo a la siguiente lista:

1 guajolote = 5 gallos (valor)

1 pato + 2 gallinas = 3 gallos (valor combinado)

4 gallinas = 1 pato

¿Cuántas gallinas necesitó Pablito, si quiere volver con un pato, un guajolote y un gallo?

Solución:

Lamemos:
$guajolote = x$
$gallo = y$
$pato = z$
$gallina = w$

O sea, "x" representa el valor de los guajolotes, "y" representa el valor de los gallos, "z" representa el valor de los patos y "w" representa el valor de las gallinas.

De acuerdo con lo que nos dice el enunciado tenemos:

$x = 5y$ ………… Ecuación 1

$z + 2w = 3y$ …......Ecuación 2

$4w = z$ …………. Ecuación 3

Lo que nos pide el enunciado es saber ¿Cuántas gallinas necesita Pablito para volver con un pato, un guajolote y un gallo?

Entonces lo que tenemos que encontrar es: $x + y + z = valor\ de\ las\ gallinas$.

La ecuación 3 la sustituimos en la ecuación 2 y tenemos:

$$4w + 2w = 3y$$

$$6w = 3y$$

$$\frac{6w}{3} = y$$

$\underline{\boldsymbol{2w = y}}$ ………..Ecuación 4

Entonces $\underline{\boldsymbol{Lo\ que\ vale\ un\ gallo\ es\ igual\ a\ lo\ que\ valen\ 2\ gallinas}}$

Ahora la ecuación 4 la sustituimos en la ecuación 1 y obtenemos:

$$x = 5y$$

$$x = 5(2w)$$

$$\underline{\boldsymbol{x = 10w}}$$

Entonces $\boldsymbol{Lo\ que\ \ vale\ 1\ guajolote\ es\ igual\ a\ lo\ que\ valen\ 10\ gallinas}$

Ya tenemos x, y, z que es lo que buscamos para saber cuántas gallinas

Por lo tanto tenemos:

$x = 10w$
$y = 2w$
$z = 4w$

$\underline{\boldsymbol{x + y + z = 10w + 2w + 4w = 16w}}$

Así obtenemos que, para que Pablito vuelva con un pato, un guajolote y un gallo necesita <u>16 gallinas.</u>

PROBLEMA 4.

9 kg de guayabas cuestan lo mismo que 6 kg de manzanas. También, 1 kg de guayaba cuesta el doble que 1 kg de cebollas, mientras que 1 kg de manzanas cuesta 8 pesos más que 1 kg de cebollas. Hallar el precio de cada uno de ellos.
Solución:

Para abreviar ponemos:

$g = guayaba,\ m = manzana,\ c = cebolla$, o sea "g" representa el precio por kilo de la guayaba, "m" representa el precio por kilo de la manzana y "c" representa el precio por kilo de la cebolla.

De acuerdo al enunciado tenemos:

$9g = 6m$ ………….. Ecuación 1
$g = 2c$ …………….. Ecuación 2
$m = 8 + c$ ………… Ecuación 3

La ecuación 2 la sustituimos en la ecuación 1 y tenemos:

$9(2c) = 6m$ …………. Ecuación 4

Ahora la ecuación 3 la sustituimos en la ecuación 4 y obtenemos:

$9(2c) = 6(8 + c)$

$18c = 48 + 6c$

$18c - 6c = 48$

$12c = 48$

$c = \frac{48}{12}$

$\underline{\boldsymbol{c = 4}}$

La cebolla cuesta 4 pesos el kilo.

De la ecuación 2 obtenemos el precio de la guayabas

$g = 2c$

$g = 2(4)$

$\underline{\boldsymbol{g = 8}}$

El precio del kilo de guayaba es de 8 pesos.

De la ecuación 3 obtenemos el precio de la manzana

$m = 8 + c$

$m = 8 + 4$

$\underline{\boldsymbol{m = 12}}$

El precio del kilo de la manzana es de 12 pesos.

PROBLEMA 5.

Sabiendo que 3 manzanas y una pera pesan lo mismo que 10 melocotones, y 6 melocotones y una manzana pesan lo mismo que una pera. ¿Cuántos melocotones serán necesarios para equilibrar una pera?

Solución:

Para abreviar ponemos:

$m = manzana,\ p = pera,\ me = melocotones,$ o sea, “m” representa el peso de las manzanas, “p” representa el peso de las peras y “me” representa el peso de los melocotones.

De acuerdo al enunciado tenemos:

$3m + 1p = 10me$ ………. Ecuación 1
$6me + 1m = 1p$ ………… Ecuación 2

La ecuación 2 la sustituimos en la ecuación 1 y obtenemos:

$3m + 6me + 1m = 10me$

$4m + 6me = 10me$

$4m = 10me - 6me$

$4m = 4me$

$\underline{\boldsymbol{m = me}}$ ………. Ecuación 3

De acuerdo a esto tenemos que **lo que pesa 1 manzana = lo que pesa 1 melocotón.**

Sabemos que 6 melocotones + 1 manzana = 1 pera, es decir, $6me + 1m = 1p$

Entonces sustituimos la ecuación 3 en la ecuación 2 y obtenemos:

$6me + 1me = p$

Por lo tanto tenemos:

$\underline{\boldsymbol{7me = 1p}}$

Así que **lo que pesa 1 pera = lo que pesan 7 melocotones**

PROBLEMA 6.

En una granja hay 30 animales entre gallinas y conejos, el total de patas es de 96 ¿Cuántas gallinas hay?

Solución:

Llamemos:

$x = Número\ de\ gallinas$
$y = Número\ de\ conejos$

El enunciado nos dice que hay 30 animales entre gallinas y conejos, de esto obtenemos:

$x + y = 30$ ……….Ecuación 1

También nos dice que hay 96 patas, de esto sabemos que las gallinas tienen dos patas y el conejo tiene cuatro patas. Entonces tenemos:

$2x + 4y = 96$ ……..Ecuación 2

De la ecuación 1 despejamos "x" y obtenemos:

$x = 30 - y$………..Ecuación 3

La ecuación 3 la sustituimos en la ecuación 2 y entonces tenemos:

$$2(30 - y) + 4y = 96$$

$$60 - 2y + 4y = 96$$

$$2y = 96 - 60$$

$$y = \frac{36}{2}$$

$\underline{\boldsymbol{y = 18}}$

Por lo tanto **el número de conejos es de 18**

Ahora para encontrar el número de gallinas, ocupamos la ecuación 3 y el valor de y que ya lo tenemos entonces obtenemos:
$x = 30 - 18$

$\underline{\boldsymbol{x = 12}}$

Así tenemos **el número de gallinas es de 12**

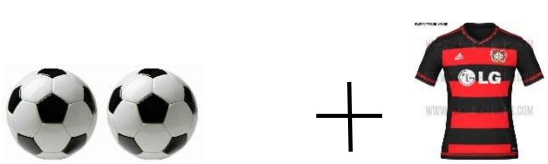
Este tipo de problemas los niños lo resuelven mediante una tabla, algunos estudiantes hacen su tabla y van manteniendo el número de animales que pide el problema y otros cometen el error de no mantener el número de animales lo que no les permite llegar a la solución.

Estos problemas son propuestos a niños de secundaria y son resueltos como se les hace más fácil al estudiante. Martin van Reeuwijk propone poco a poco formalizar la escritura de las ecuaciones correspondientes (él trabaja con niños de 10 años). Nosotros trabajamos con niños de 6° grado y de secundaria. Es claro que los alumnos no lo resolverán usando ecuaciones, la idea es convencerlos de que el álgebra es útil en este tipo de cuestiones.

En el enfoque de competencias se privilegia la solución de problemas por parte de los alumnos, lo que implica que estos no necesariamente deben resolverlos por los métodos formales. Lo típico es que recurran a sus conocimientos previos y utilicen procedimientos informales, hecho muy bien conocido por los docentes. De ahí la importancia de la propuesta de Martin van Reeuwijk de **"formalizar en forma progresiva"** y no brusca como en los libros de texto. "La enseñanza toma tiempo" y debemos trabajar para ayudar a que el alumno "evolucione hacia la abstracción". Las letras dejan de ser etiquetas y se vuelven incógnitas. Como podemos ver, la temprana simbolización algebraica puede ser significativa para los alumnos desde el principio y puede desarrollarse naturalmente con el tiempo. El profesor debe dar cabida a un cambio gradual de una noción informal a una más formal.

En la solución de ecuaciones los estudiantes se enfrentan a los diferentes tipos de símbolos: dibujos, abreviaciones, e incógnitas donde partimos del enunciado verbal, pero en lugar de escribir las ecuaciones "pelonas" escribimos unas "ECUACIONES VISUALES". Este es un ejemplo de ecuaciones visuales que le llama la atención al niño (se buscan dos números):

= 2300pesos



= 1300pesos

¿Cuánto cuesta un balón?

SE PUEDE RESOLVER CON ALGEBRA

$3B + 2C = 2300$
$2B + C = 1300$

El sistema de ecuaciones que se obtiene de esta manera nos permite resolver el problema, con mucha frecuencia esta práctica conduce a los estudiantes a escribir ecuaciones inadecuadas para otros problemas, esto sucede porque se incurre en el error de considerar las letras como representantes de objetos. En este problema la “B” representa al objeto balón, la “C” al objeto camiseta. Pero en álgebra las letras representan números, en este caso, la “B” representa el precio de un balón y la “C” el precio de una camiseta que son números concretos.

Pero lo podemos resolver más fácilmente: **visualmente**

Lo que implica usar sustitución, la segunda “ecuación visual” la sustituyo en la primera “ecuación visual” y nos queda lo siguiente:

1300 +  + 

= 2300 pesos

Es decir:

 + 

= 1000 pesos

Nos regresamos a la primera “ecuación visual”, sustituyo por pares de objetos y me sobra un balón.

1000 + 1000 +  = 2300 pesos

Así que un  =300pesos

Es claro que el enunciado ayuda mucho, pero el objetivo es que los niños vean que es sencillo. Es decir, Palabras → Imágenes → Símbolos. Obviamente debemos incluir que el alumno realiza procesos mentales que involucran conceptos matemáticos, que mucho tiempo después comprenderá plenamente.

Esta forma de resolver las ecuaciones de forma visual, ofrece muchas oportunidades para la simbolización. Porque a pesar de tener a los símbolos como una herramienta disponible en la enseñanza secundaria, éstos no son utilizados, a menos que alguien se los sugiera, además de saber que los símbolos representan números, otro asunto es usarlos para entender situaciones. (Arcavi El desarrollo y uso de los símbolos). No siempre es conveniente usar símbolos para resolver algunos problemas pues resultaría una ecuación muy complicada. También esta forma nos ayuda a desarrollar una habilidad muy importante la flexibilidad del pensamiento. Si cada vez que se plantee un problema se le dijera al estudiante como resolverlo se estaría promoviendo la rigidez del pensamiento. Ahora los pasos algebraicos son fáciles de entender para con los alumnos, porque podemos operar simbólicamente.

El método o estrategia de enseñanza consiste en buscar este tipo de enunciados y poco a poco pasar a la $\boldsymbol{x = incognita}$.

Otro ejemplo que propone Van Amerom es:

Van Amerom comenta: El dibujo representa un sistema de ecuaciones con dos incógnitas: el precio de un paraguas y el precio de una gorra, la representación visual muestra que el planteamiento del problema se encuentra ordenado.
Los dibujos tienen una alusión directa a los objetos que representan: el (precio de una) gorra y el (precio de un) paraguas. En el nivel informal de los alumnos se acepta que digan “2 paraguas y una gorra cuestan 80 pesos”. En este punto no se espera escuchar la expresión formal “la suma de dos veces el precio de un paraguas y el precio de una gorra es de 80 pesos” Las abreviaciones también reflejan un nivel de comprensión en este sistema de ecuaciones:

$2pa + go = 80$
$pa + 2go = 76$

Las letras “*pa”* y “*go”* son utilizadas como etiquetas. La unión entre las abreviaturas y el contexto pueden reconstruirse fácilmente porque las abreviaciones se refieren directamente a los objetos: gorra y paraguas, a un nivel formal, en el sistema:

$2p + g = 80$
$p + 2g = 76$

Las letras dejan de ser etiquetas y se vuelven incógnitas ya que *“p”* es el precio del paraguas y *“g”* es el precio de una gorra. La transición de lo informal a lo formal necesita una considerable atención. A nivel formal este tipo de problemas tienen cierta dificultan y confunden a los estudiantes.

¿Por qué una ecuación del tipo $\boldsymbol{ax + by = c}$ tiene infinitas soluciones?

Es común en los libros de texto de secundaria no presentar ejemplos creíbles para los alumnos de porque una ecuación del tipo $ax + by = c$ **tiene infinitas soluciones, o que en esta ecuación "$\boldsymbol{x}$", "$\boldsymbol{y}$" son variables.** Para los alumnos puede ser causa de confusión que la *“x”* sea “incógnita o variable”. Para nosotros la solución es presentar situaciones creíbles y poco a poco ir introduciendo el lenguaje correspondiente. Para lo cual proponemos a los alumnos el siguiente:

Problema:

En la tienda te dan vuelto de \$64 con 40 monedas, algunas de \$1 y de \$2 ¿Cuántas te dan de cada una?

Algunas respuestas de los alumnos están equivocadas porque solo cumplen con una de las condiciones y se les tiene que hacer la observación de que no cumplen con la otra condición. Este es un comportamiento típico de algunos estudiantes no de todos. Pero esta situación la aprovechamos para hacerles notar que efectivamente si nos fijamos solo en una de las condiciones, hay muchas parejas de números que las satisfacen.

Solución algebraica:

$x = Número\ de\ monedas\ de\ 2\ pesos$
$y = Número\ de\ monedas\ de\ 1\ peso$

$x + y = 40$
$2x + y = 64$

Por suma y resta obtenemos: $x = 24$

Por lo tanto se **tienen 24 monedas de dos pesos.**
Ahora

$y = 40 - 24$
$y = 16$

Entonces se **tienen 16 monedas de un peso.**
El siguiente problema es similar.

Problema:

Tengo 1200 pesos entre billetes de 20 y 50 pesos si en total son 36 billetes. ¿Cuántos billetes de 50 y 20 pesos tengo?

Solución:

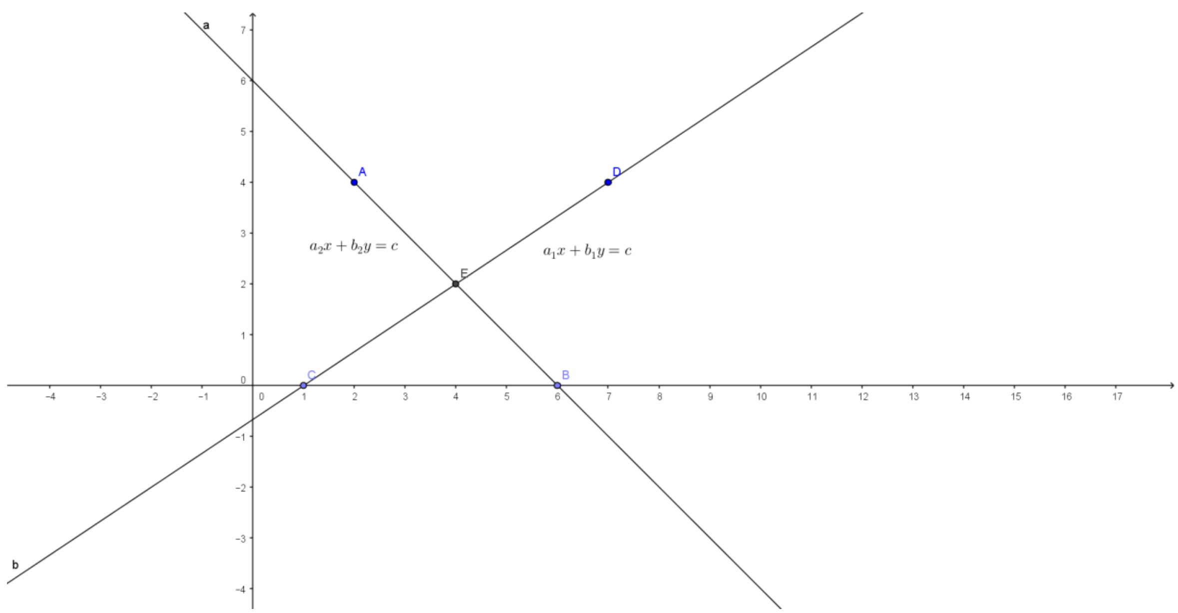
Llamemos:

$x = Número\ de\ billetes\ de\ 50\ pesos$
$y = Número\ de\ billetes\ de\ 20\ pesos$

Para saber cuántos billetes hay se plantean las ecuaciones.

$x + y = 36 \ldots.$ Ecuación 1.
Aquí el alumno tiene razón en pensar que esta ecuación tiene muchas soluciones. Por ejemplo $(x = 10,\ y = 26)$, $(x = 18,\ y = 18)$ etc. Y con esta base se le puede plantear hacer una tabla, o graficar en el plano.

$50x + 20y = 1200 \ldots.$Ecuación 2.
Al considerar la otra condición (Ecuación 2) también pasa lo mismo, es hasta que mentalmente nos posicionamos en que debemos encontrar una solución simultánea, lo que equivale a la intersección de las rectas.



Pero esto no significa que el alumno comprenderá la solución gráfica en un par de clases. En varios artículos se comenta que incluso a algunos alumnos se les dificulta la idea de despejar "y" pues están acostumbrados a despejar a "x" en una ecuación lineal de primer grado $ax + by = c$.

Es importante que haya un tránsito natural de pasar "buscamos dos números" a tener dos expresiones de primer grado (dos condiciones) y si nos fijamos en una de ellas tenemos ahora que puede haber muchas soluciones, por ejemplo:
$x + y = 10$, o el problema anterior de los billetes. Ahora tenemos x, y variables**. No es la solución definitiva, es solo un camino.**

CAPITULO IV. RESULTADOS Y EVIDENCIAS.

Esta es una experiencia y evidencia de la Profesora Laura Ortega de la Secundaría Técnica No 1, que utiliza el método que se propone y piensa que es productivo y funciona.

Jugando con las ecuaciones

“Uno de los retos más difíciles que tienes como maestro de matemáticas en secundaria es la enseñanza del álgebra. Me ha sido difícil enseñarla sin tener reacciones de rechazo con algunos de los adolescentes de cada uno de mis grupos, rechazo que se convierte en obstáculo para su entendimiento y en un gran reto para nosotros de qué hacer. Y la verdad la experiencia de llevarla al aula fue muy gratificante.

La llevé a dos grupos: 2° “B” y luego al 2°”A”. Y he aquí lo que sucedió:
El 2° “B” es un grupo difícil donde los niños son bastante inquietos y hay mucha hiperactividad, además de otros problemas de carácter social.
Les expliqué la actividad: Vamos a jugar con las ecuaciones y todos van a participar. Formé parejas, no necesariamente sentados juntos y uno de los dos tenía que decirme la respuesta y la pareja decir si estaba bien. Al que le preguntaba no podía ver hacia otro lado (para evitar que le “soplaran” sus compañeros) y si alguien más respondía perdía turno la pareja del que sopló y la que estaba jugando. Y los demás debían estar atentos porque a cualquiera le podía preguntar.
Empecé a pasarles por power point las ecuaciones de primer grado sencillas y a preguntar el valor de la incógnita. A los que les preguntaba sabían que era un reto y le entraron. El grupo permaneció en silencio, pero los vi emocionados, al principio me fallaron en las respuestas y preguntaba a otros, lo emocionante y el reto para ellos es que no sabían a quién le iba a preguntar y pues todos estaban atentos. No tuve el cañón así que me tocó cargar la lap top y caminar a lo largo del salón para que todos pudieran ver la pantalla. Casualmente el subdirector llegó a dejarme una circular y le sorprendió el silencio del grupo pero la emoción se percibía, así que se quedó y le entró al juego. Falló en las dos que le tocó.

Qué hacían los niños, veían la ecuación, la anotaban en su libreta y la respondían. Permití que lo hicieran. La siguiente vez tal vez sea sin libreta.

Esta actividad me sirvió para observar varios aspectos:

1) *No causó rechazo alguno en hacer ecuaciones, al contrario ni se sintieron los dos módulos que jugaron y querían más. Todos tuvieron 2 turnos.*
2) *Pude observar quienes ya tienen más dominio de entender y resolver ecuaciones y a quienes no. Algunos que no habían entendido ahí le captaron más el concepto de igualdad. También la escritura matemática de las mismas como que el coeficiente se escribe más grande que el exponente, que el coeficiente lo escribimos a la izquierda de la letra y no a la derecha, que 3W significa 3 veces el valor de W y ya no necesita llevar punto que indique multiplicación, que las variables pueden situarse en el lado derecho o izquierdo y no sólo de derecha a izquierda (que es un error que cometemos los maestros frente a grupo), que el coeficiente y exponente igual a 1 no se escribe. La jerarquía de operaciones, ya que cuando hay paréntesis se resuelve primero lo de adentro: $3(A – 5) = 20 + 4$… Es decir, muchos detalles que damos por hecho que ellos entienden y no es así.*
3) *Pude observar a quienes se les dificultaban algunas operaciones básicas, como la división y fracciones, y no precisamente es que no sepan de ecuaciones.*
4) *Repasamos números con signo, porque incluí algunas. Así como exponentes 2 y 3.*
5) *Unas ecuaciones tenían mayor complejidad que otras pero las difíciles las dejé para los más avanzados y las más sencillas para los que pensaba que no. Algunos niños me protestaron porque querían resolver ecuaciones nivel 2 o 3 y no 1 (así las manejé). Algunos otros vieron que los niños listos también se equivocaron y otros que se consideran menos capaces los corrigieron. Y la sorpresa fue mutua: para ellos y para mí.*
6) *Esta actividad me acerca a los niños, ya que no les provoca rechazo y siento cierta base para seguir trabajando este tema. Entre sus comentarios decían: "ya entendí que es el coeficiente", "así enséñenos álgebra", "si puedo resolver ecuaciones y yo pensaba que no", "pude más que fulanito que es más inteligente"*
7) *Al final me preguntaron cuándo lo volvíamos a hacer. Yo les dije que primero me hicieran en power ponit sus ecuaciones, que ellos crearan. Y los que lo hicieran pues lo tomaría en cuenta y además me servirían para seguir jugando.*

Varios estudiantes las hicieron y ahí también veo que 2 niñas todavía no captan el concepto de ecuación. Pero ya sé cómo ayudarlas. No lo hubiera detectado sin esta actividad.

Con el otro grupo, el 2° A, la experiencia fue similar, sólo que fue un módulo y no participaron todos. Y ahí si varios niños no me respetaban las reglas ya que *todos querían responder y hubo más gritos. Pero salió muy bien y también quedamos en repetirla.*

Para reflexionar

Este tipo de actividades funciona para entender el concepto de ecuaciones y cómo resolverlas. O sea que la tesis sí tiene evidencia: veo que hay aprendizaje porque la actividad fomenta la comprensión, el descubrimiento que te ayuda a avanzar más que si le pides haz 50 ecuaciones para que las entiendas. Me parece una actividad didáctica muy buena, ya que en ninguno de los 104 niños que participaron observé rechazo, por el contrario promueve confianza en ellos mismos de que sí pueden con las ecuaciones.
Varios de los niños que me entregaron sus ecuaciones en power point lograron entender el concepto al hacer esta actividad y así me lo comentaron en sus correos. Se va a ver porque las ecuaciones que me hacen son sencillas, a lo que ellos entienden pero son suyas y como les dije con eso me están demostrando que si pueden si se lo proponen. ***Esta actividad es muy buena evidencia de cómo hacer de las matemáticas un aprendizaje emocionante.***

Las siguientes ecuaciones fueron realizadas por estudiantes de la **Escuela Secundaria Técnica No 1,** en power point, con la Profa. Laura Lidia Ortega Xochicali en el Ciclo Escolar: 2010 - 2011 y 2011- 2012.

ANGEL FRANCISCO ABURTO CHÁVEZ

$4n-12=8$ $\boldsymbol{n}=10$ **Error en la solución**	$n-3=17$ $\boldsymbol{n}=14$ **Error en la solución**	$2w+14=42$ $\boldsymbol{w}=14$	$t-4=9$ $\boldsymbol{t}=13$	$3n-2=16$ $\boldsymbol{n}=6$	$3n+5=23$ $\boldsymbol{n}=6$
$50-n=46$ $\boldsymbol{n}=4$	$x+8=18$ $\boldsymbol{x}=10$	$n+12=17$ $\boldsymbol{n}=5$	$6+p=11$ $\boldsymbol{p}=5$	$3w+6=15$ $\boldsymbol{w}=3$	$n-20=6$ $\boldsymbol{n}=26$
$n+2=12$ $\boldsymbol{n}=10$	$n-49=7$ $\boldsymbol{n}=56$	$3n-15=21$ $\boldsymbol{n}=12$	$m+2=8$ $\boldsymbol{m}=6$	$c-5=6$ $\boldsymbol{c}=11$	$a+4=9$ $\boldsymbol{a}=5$
$d-60=10$ $\boldsymbol{d}=70$	$2a+1=19$ $\boldsymbol{a}=9$				

LISSET GASPARIANO

$7 = x - 2$ $\boldsymbol{x} = 5$ **Error en la solución**	$21 = 8 + L$ $\boldsymbol{L} = 13$	$4(15) = 11 + 14 + n$ $\boldsymbol{n} = 35$	$5(12) = 26 + 16 + h$ $\boldsymbol{h} = 18$
$26 = w + 15$ $\boldsymbol{w} = 11$	$36 = R - 19$ $\boldsymbol{R} = 17$ **Error en la solución**	$V = 8 - 6$ $\boldsymbol{V} = 2$ **No es ecuación**	$6(11) = 21 + 19 + u$ $\boldsymbol{u} = 26$
$96 = 5w + 6$ $\boldsymbol{w} = 18$	$26 = 3F + 5$ $\boldsymbol{F} = 7$	$231 = 9t + 6$ $\boldsymbol{t} = 25$	$8(19) = 65 + 84 + s$ $\boldsymbol{s} = 3$
$55 = m + 32$ $\boldsymbol{m} = 23$	$44 = 7p + 2$ $\boldsymbol{p} = 6$	$29 = 4j + 1$ $\boldsymbol{j} = 7$	$3(16) = 15 + 17 + c$ $\boldsymbol{c} = 16$
$5 = a - 6$ $\boldsymbol{a} = 11$	$9 + q = 68$ $\boldsymbol{q} = 59$	$K - 12 = 25$ $\boldsymbol{K} = 37$	

José Luis Mora Espinosa 2°"B"

$80 - 12 = x - 2$ $\boldsymbol{x} = 70$	$50 - 2 = E - 50$ $\boldsymbol{E} = 98$	$84 - 52 = 90 - k$ $\boldsymbol{k} = 28$ **Error en la solución**	$6(w - 5) = 55$ $\boldsymbol{w} = 15$ **Error en la solución**
$20x = 200 - 20$ $\boldsymbol{x} = 9$	$23 - 4 = x - 20$ $\boldsymbol{x} = 39$	$2(x - 2) = 80$ $\boldsymbol{x} = 42$	$42 - 25 = p - 15$ $\boldsymbol{p} = 32$
$\frac{x}{5} = 25$ $\boldsymbol{x} = 125$	$\frac{5x}{10} = 500$ $\boldsymbol{x} = 1000$	$\frac{w}{5} = 95$ $\boldsymbol{w} = 475$	$\frac{y}{10} = 20$ $\boldsymbol{y} = 200$

$50 - 2 = 5x + 3$ $\boldsymbol{x} = 45$ **Error en la Solución**	$2x + 25 = 70$ $\boldsymbol{x} = 10$ **Error en la solución**	$5(n - 5) = 24$ $\boldsymbol{n} = 10$ **Error en la solución**	$8(z - 5) = 67$ $\boldsymbol{z} = 10$ **Error en la solución**
$\frac{25}{x} = 4250$ $\boldsymbol{x} = 170$ **Error en la Solución**	$45 + 50 = 500 - w$ $\boldsymbol{w} = 405$	$5(w - 3) = 200$ $\boldsymbol{w} = 43$	$89 - 50 = x + 19$ $\boldsymbol{x} = 30$ **Error en la solución**

Luis Ángel Juárez 2°"A"

$20a = 100$ $\boldsymbol{a} = 5$	$2a + 1 = 7$ $\boldsymbol{a} = 3$	$-4y = 20$ $\boldsymbol{y} = 5$ **Error en la solución**	$2 + w = -4$ $\boldsymbol{w} = -6$	$p + 6 = 10$ $\boldsymbol{p} = 4$
$2a + b = 5$ $\boldsymbol{a} = 2\ \boldsymbol{b} = 1$ **No es ecuación**	$4x + 7 = 27$ $\boldsymbol{x} = 5$	$x - 3 = 7$ $\boldsymbol{x} = 10$	$-w + 2 = 0$ $\boldsymbol{w} = 2$	$24 = 5 + y$ $\boldsymbol{y} = 19$
$-7 + 12 = w$ $\boldsymbol{w} = 19$ **Error en la solución**	$3 = 2x + 11$ $\boldsymbol{x} = 4$ **Error en la solución**	$3w + 3 = 30$ $\boldsymbol{w} = 9$	$W + 15 = 0$ $\boldsymbol{w} = -15$	$T - 300 = 700$ $\boldsymbol{T} = 1000$
$2x + 4 = 12$ $\boldsymbol{x} = 4$	$\frac{w}{6} + 10 = 21$ $\boldsymbol{w} = 66$	$7b + 10 = -11$ $\boldsymbol{b} = 3$	$8 = \frac{y}{7} + 5$ $\boldsymbol{y} = 21$	$r - 28 = 152$ $\boldsymbol{r} = 180$
$25 = 3y + 7$ $\boldsymbol{y} = 6$	$n + 25 = 100$ $\boldsymbol{n} = 75$	$5x - 15 = 50$ $\boldsymbol{x} = 13$	$N + 7 = 12$ $\boldsymbol{N} = 4$ **Error en la solución**	$b + 18 = 29$ $\boldsymbol{b} = 47$ **Error en la solución**
$b - 56 = 12$ $\boldsymbol{b} = 68$	$5m + 4 - 2m = 28$ $\boldsymbol{m} = 8$	$86 = n + 53$ $\boldsymbol{n} = 36$	$x - 31 = 19$ $\boldsymbol{x} = 50$	$r - 152 = 28$ $\boldsymbol{r} = 180$

Yessica Guadalupe

$3x = 12$ $\boldsymbol{x} = 4$	$3x + 3x - 7 = 41$ $\boldsymbol{x} = 8$	$22 = 5x + 4 - 2x$ $\boldsymbol{x} = 6$	$2m + 11 = -7$ $\boldsymbol{m} = 9$ **Error en la solución**
$2y = 6$ $\boldsymbol{y} = 6$ **Error en la solución**	$2(2x - 3) = 6 + x$ $x = 4$	$6 + 4w + w = 46$ $\boldsymbol{w} = 8$	$-8 + 2x - 4x = 18$ $\boldsymbol{x} = 5$ **Error en la solución**
$4x + 7 = 35$ $\boldsymbol{x} = 7$	$A + 113A = 29$ $\boldsymbol{A} = 7$ **Error en la solución**	$Y + 8 - 4y = -25$ $\boldsymbol{y} = 11$	$111 = -6w4w + 11$ $\boldsymbol{w} = 12.2$ **Es *una ecuación cuadrática y no tiene solución***
$3y + 7 = 37$ $\boldsymbol{y} = 10$	$2c - 3 = 6 + x$ $\boldsymbol{c} = 9$ **No es ecuación**	$m - 6m + 10 = -15$ $\boldsymbol{m} = 5$	$-p + 4 + 5p = 32$ $\boldsymbol{p} = 7$
$2a + 11 = 111$ $\boldsymbol{a} = 50$	$5m + 4 - 2m = 28$ $\boldsymbol{m} = 8$	$-2 + w - 4w = -29$ $\boldsymbol{w} = 9$	

Víctor Olvera

$3x + 7 = 19$ $\boldsymbol{x} = 4$	$-5m + 5 + 5 = -15$ $\boldsymbol{m} = 5$	$58 + 39x + 11x + 33 + 24 = 265$ $\boldsymbol{x} = 3$
$5X + 40 = 50$ $\boldsymbol{X} = 2$	$10m + 5m + 40 = 70$ $\boldsymbol{m} = 2$	$16x + 3 + 24x + 3x + 30x + 3 = 698$ $\boldsymbol{x} = 4$ **Error en la solución**
$8 + 3y = 17$ $\boldsymbol{y} = 3$	$150 + 200 - 50w = 200$ $\boldsymbol{w} = 3$	$45y + 15y + 5y + 5 = 1955$ $\boldsymbol{y} = 30$

$2m + 11 = 29$ $\boldsymbol{m} = 8$ **Error en la solución**	$40z + 15z - 40 = 310$ $\boldsymbol{z} = 5$ **Error en la solución**	$4y + 26 + 8y + 26y + 15 + 26 = 363$ $\boldsymbol{y} = 8$ **Error en la solución, la indicación era usar números pequeños**
$3(x + 120) = 150$ $\boldsymbol{x} = 3$ **Error en la solución**	$40x + 15x - 50 = 335$ $\boldsymbol{x} = 7$	$45x + 15x + 4x + 86 = 214$ $\boldsymbol{x} = 2$
$24x - 289 = -241$ $\boldsymbol{x} = 2$	$150 = -50 + 50y$ $\boldsymbol{y} = 4$	$150w + 15w - 150 = 180$ $\boldsymbol{w} = 2$
$6 - 7y = -43$ $\boldsymbol{y} = 7$	$15y + 107 = 137$ $\boldsymbol{y} = 2$	$5(2x + 4x) + 45 = 135$ $\boldsymbol{x} = 3$

Estas ecuaciones son correctas pero se pide que la solución sea rápida de contestar o sea que se resuelvan mentalmente, solo sería reducir el número de términos y cifras más pequeñas para que se resuelvan con facilidad.

JUAN MANUEL DURANA RECHY   2 º “A”

$2X + 15 = 80$ $\boldsymbol{X} = 32.5$	$X * 14 = 32$ $\boldsymbol{X} = 2.28$ **Error en la solución**	$3X = 15$ $\boldsymbol{X} = 5$	$\frac{X}{0.5} = 4.4$ $\boldsymbol{X} = 2.2$	$X - 2.5 = 3.2$ $\boldsymbol{X} = 5.7$
$\frac{1}{3X} + 30 = 40$ $\boldsymbol{X} = 30$ **Error en la solución**	$X * 8 = 16$ $\boldsymbol{X} = 2$	$5X = -5$ $\boldsymbol{X} = -25$ **Error en la solución**	$\frac{2X}{5} = -4$ $\boldsymbol{X} = -10$	$20 - X = 6$ $\boldsymbol{X} = 14$
$8X + 24 = 14$ $\boldsymbol{X} = -80$ **Error en la solución**	$\frac{X}{10} = 8$ $\boldsymbol{X} = 80$	$2X = 7$ $\boldsymbol{X} = 3.5$	$14X - 8 = 32$ $\boldsymbol{X} = 2.7$ **Error en la solución**	$X + 4 = -1$ $\boldsymbol{X} = -5$
$X + 3 = 4$ $\boldsymbol{X} = 1$	$3X + 8 = 20$ $\boldsymbol{X} = 4$	$2.5X = 10$ $\boldsymbol{X} = 4$	$\frac{25}{X} = 5$ $\boldsymbol{X} = 5$	$4X = 8$ $\boldsymbol{X} = 2$

$6X - 20 = 30$ $\boldsymbol{X} = 8.3$ **Error en la solución**	$\frac{X}{3} = 4$ $\boldsymbol{X} = 12$	$\frac{X}{2} = 5$ $\boldsymbol{X} = 10$	$X - 5 = 4$ $\boldsymbol{X} = 9$	$3X + 4 = 10$ $\boldsymbol{X} = 2$
$4X - 7 = 5$ $\boldsymbol{X} = 12$	$2X + 3 = 7$ $\boldsymbol{X} = 2$	$X + 8 = 15$ $\boldsymbol{X} = 7$	$3X + 5 = 28$ $\boldsymbol{X} = 7.6$	$X - 8 = 27$ $\boldsymbol{X} = 35$
$34 - X = -1$ $\boldsymbol{X} = 33$	$-X + 4 = 0$ $\boldsymbol{X} = -4$	$X - 3 = 5$ $\boldsymbol{X} = 8$	$8 - X = -2$ $\boldsymbol{X} = 10$	$8X - 15 = 50$ $\boldsymbol{X} = 8.1$ **Error en la solución**
$\frac{X}{6} = 8$ $\boldsymbol{X} = 6 \times 8$	$15X = 345$ $\boldsymbol{X} = 23$	$\frac{X}{0.5} = 4$ $\boldsymbol{X} = 2$	$34 - X = -32$ $\boldsymbol{X} = -66$ **Error en el signo**	$\frac{X}{6} = 28$ $\boldsymbol{X} = 168$
$40 - 3X = 15$ $\boldsymbol{X} = 8.3$ **Error en la solución**	$-X + 8 = -3$ $\boldsymbol{X} = -11$ **Error en la solución**	$2.2 - X = -1$ $\boldsymbol{X} = 3.2$	$33 + X = 40$ $\boldsymbol{X} = 7$	$X \times 15 = 35$ $\boldsymbol{X} = 2.3$
$\frac{X}{8} = 7$ $\boldsymbol{X} = 56$	$7 + X = 11$ $\boldsymbol{X} = 3$ **Error en la solución**	$48 - X = -2$ $\boldsymbol{X} = 50$	$\frac{X}{80} = 4$ $\boldsymbol{X} = 320$	

De preferencia deben ser soluciones enteras, en unos casos redondea, otras confunden la igualdad de la ecuación con el valor de “X”.

Alumno

$11 + X = 20$ $\boldsymbol{X} = 9$	$-M + 3 + 1 = -6$ $M = -10$ **Error en la solución**	$2B + B = 9$ $\boldsymbol{B} = 3$	$S - 8 + 2 = 0$ $\boldsymbol{S} = 6$

$A+9=17$ $\boldsymbol{A}=8$	$9-3+H=11$ $\boldsymbol{H}=5$	$8+M-2M=0$ $\boldsymbol{M}=8$	$5H+3H-20=5$ $\boldsymbol{H}=2$ **Error en la solución**
$-8-m=-9$ $-\boldsymbol{m}=-1$ **La incógnita debe ser positiva**	$12-23-Y=-16$ $\boldsymbol{Y}=-5$ **Error en la solución**	$3(M-5)=3$ $\boldsymbol{M}=6$	$6(X+10)=66$ $\boldsymbol{X}=1$
$13Z-\frac{1}{2}=13$ $\boldsymbol{Z}=\frac{1}{2}$ **Error en la solución**	$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-Y=0$ $\boldsymbol{Y}=\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}+Y=\frac{3}{2}$ $\boldsymbol{Y}=\frac{3}{4}$	$F+2F+\frac{F}{3}=\frac{20}{3}$ $\mathbf{F}=2$
$4+5=C$ $\boldsymbol{C}=9$ **No es ecuación**	$14-Z=1$ $\boldsymbol{Z}=13$	$8X+X-13=32$ $\boldsymbol{X}=5$	$-E-4E+2=-13$ $\boldsymbol{E}=3$
$I+6I=14$ $\boldsymbol{I}=2$	$-9-7=Z$ $\boldsymbol{Z}=16$ **No es ecuación**	$R+4=14$ $\boldsymbol{R}=10$	$Z+Z+3Z=25$ $\boldsymbol{Z}=5$
$\frac{5}{4}+\frac{19}{8}=M$ $\boldsymbol{M}=13$ **No es ecuación**	$-8+9-X=0$ $\boldsymbol{X}=1$	$D+6D=42$ $\boldsymbol{D}=6$	$X^2+X^3=36$ $\boldsymbol{X}=3$ **Parece ser una ecuación dificil de resolver pero se puede llegar mentalmente a la solución.**
$-b-5=-6$ $-\boldsymbol{b}=1$ **La incógnita no debe tener signo menos.**	$\frac{X}{2}+\frac{X}{4}=\frac{18}{8}$ $\boldsymbol{X}=3$	$\frac{1}{8Y}-\frac{2}{16}=0$ $\boldsymbol{Y}=1$	

Rosalía Flores Díaz   2° "B" matutino

$3x+3=60$ $3x=60-3$ $3x=57$ $x=\frac{57}{3}$ $\boldsymbol{x}=19$	$x+x+1+x+2=18$ $3x+3=18$ $3x=18-3$ $3x=15$ $x=\frac{15}{3}$ $\boldsymbol{x}=5$	$80+z+2z=230$ $80-3z=230$ $\underline{\mathbf{3z=230-80}}$ $3z=150$ $z=\frac{150}{3}$ $\boldsymbol{z}=50$ **Error en el signo de 3z**	$2y+30=130$ $2y=130-30$ $2y=100$ $y=\frac{100}{2}$ $\boldsymbol{y}=50$
$6x\ =312$ $x=\frac{312}{6}$ $\boldsymbol{x}=52$	$4x+3x+3x=150$ $10x=150$ $x=\frac{150}{10}$ $\boldsymbol{x}=15$	$6z+2z=56$ $8z=56$ $z=\frac{56}{8}$ $\boldsymbol{z}=7$	$5y-y=400$ $4y=400$ $y=\frac{400}{4}$ $\boldsymbol{y}=100$
$x+x+12=78$ $2x+12=78$ $2x=78-12$ $2x=66$ $\boldsymbol{x}=33$	$5y+4y+y=300$ $10y=300$ $y=\frac{300}{10}$ $\boldsymbol{y}=30$	$60z\ (3)=\ 180$ $60z=\frac{180}{3}$ $60z=60$ $z=\frac{60}{60}$ $\boldsymbol{z}=1$	$(3z)\ (3)=18$ $9z=18$ $z=\frac{18}{9}$ $\boldsymbol{z}=2$
$\frac{z}{2}=450$ $z=450\ (2)$ $\boldsymbol{z}=900$	$10y-5y=200$ $5y=200$ $y=\frac{200}{5}$ $\boldsymbol{y}=40$	$90-z=50$ $90-50=z$ $\boldsymbol{z}=40$	$\frac{x}{20}=100$ $x=\ 100\ (20)$ $\boldsymbol{x}=2000$
$70x+30x=2900$ $100x=2900$	$100y+100y-50y=600$ $150y=600$	$(9z)\ (10z)=900$ $90z=900$	$Y-50=1050$ $Y=1000+50$

$x = \frac{2900}{100}$ $\boldsymbol{x} = 29$	$y = \frac{600}{150}$ $\boldsymbol{y} = 4$	$z = \frac{900}{90}$ $\boldsymbol{z} = 10$	$\boldsymbol{Y} = 1050$

Son ecuaciones correctas, pero se pidió que se llegara a la solución mentalmente, sin hacerlo mecánicamente.

Un error sistemático es usar números grandes, no respeta las indicaciones ya que se piden números pequeños. (Por ello se plantea los diferentes niveles).

ALUMNO

$3(4x - 8) =$ $\mathbf{12}\boldsymbol{x} + \mathbf{24}$	$4x + 7 = 35$ $\mathbf{7}$	$7(-6x + 12) =$ $\mathbf{-42}\boldsymbol{x} + \mathbf{84}$	$7(-5x + 7) =$ $\mathbf{-35}\boldsymbol{x} + \mathbf{49}$
$11(2x - 6) =$ $\mathbf{-22}\boldsymbol{x} - \mathbf{66}$	$-2(18w + 23) =$ $\mathbf{-36}\boldsymbol{w} + \mathbf{46}$	$6(-6m - 12) =$ $\mathbf{-36 - 72}$	$-15(3w + 2) =$ $\mathbf{45}\boldsymbol{w} + \mathbf{50}$
$2(6x + 2) + 4\,(6x + 9) =$ $\mathbf{12}\boldsymbol{x} + \mathbf{4}\ +\ \mathbf{24}\boldsymbol{x} + \mathbf{36}$	$5(3w + 3) =$ $\mathbf{-15}\boldsymbol{w} + \mathbf{15}$	$-4(-5y - 9) =$ $\mathbf{+20}\boldsymbol{y} + \mathbf{36}$	$-3(-6x - 7) =$ $\mathbf{18}\boldsymbol{x} + \mathbf{21}$
$7(-x - 5) =$ $\mathbf{-7}\boldsymbol{x} - \mathbf{35}$	$-10(12x + 5) =$ $\mathbf{120}\boldsymbol{x} + \mathbf{50}$	$25(4u - 10) =$ $\mathbf{100}\boldsymbol{u} - \mathbf{250}$	$5(13w - 25) =$ $\mathbf{65}\boldsymbol{w} - \mathbf{125}$
$-2(18w + 23) =$ $\mathbf{36}\boldsymbol{w} + \mathbf{46}$	$5(2y + 9) =$ $\mathbf{10}\boldsymbol{y} + \mathbf{45}$	$-3(-9x + 11) =$ $\mathbf{+27}\boldsymbol{x} + \mathbf{33}$	$9(-7x + 17) =$ $\mathbf{63}\boldsymbol{x} + \mathbf{153}$

NO SON ECUACIONES, SON PRODUCTOS INDICADOS Y SOLO DISTRIBUYE.

Bruno Montaño Salgado

$5x + 8 = 23$	$17 - x = 8$	$(8 + 3x) + 14 = 28$	$7xy = 14$ **No es ecuación**
$(x + 2) + x^3 = 70$	$3x + 5 = 26$	$2x + y = 12$ **No es ecuación**	$2xy = 40$ **No es ecuación**
$x + 16 = 13$	$9 + x = 10$	$(7 + 2x) + 2 = 15$	$8xy = 64$ **No es ecuación**
$85 - x = 63$	$11 + 2x = 14$	$(5 + x) + 8 = 43$	$3 + x = 27$
$(x^2)(3) = 48$	$2 + x = 4$	$10 + x + 9 = 32$	$8 - 2x = 7$
$8 - x = 3$	$35 - x = 27$	$(8xy) + 3 = 35$ **No es ecuación**	$9 + x = 93$
$(3)(x + 4)\,24$ **No es ecuación**	$13 - x = 6$	$7\,x(8 + x) = 63$	$2 - x = 1.5$
$8 + x = 45$	$3 - x = 2.5$		

No da sus respectivas soluciones.

Mario Trejo Sánchez ***2° "A"*** **CICLO ESCOLAR: 2011-2012**

$8 = Y - 2$	$30 = 3(2X - 4)$	$54 = 11Y + 32$	$4X - 2 = 14$
$X + 5 = 27$	$21 = 3(X - 1)$	$2X + 1 = 19$	$X - 49 = 7$
$3X + 3 = 15$	$17 - 2 = X + 5$	$3X + 5 = 23$	$X + 8 = 18$
$8X - 10 = 14$	$42 = 3Z + 12$	$40 = 2(5X = 20)$ **Error en el signo de igualdad**	$22 - X = 11$
$2W - 13 = 13$	$9 = 5X - 21$	$35 = 3(4X = 12)$ **Error en el signo de igualdad**	$2X + 6 = 20$
$2X = 28$	$3X + 5 = 23$	$46 = 2(6X * 2 - 1)$	$3X - 2 = 10$

$20 - X = 6$	$50 - X = 46$	$X + 2 + 2 = 12$	$2 + X = 7$
$0.008 = \frac{x}{25}$	$\frac{108}{x} = 12$	$X = 2 + 2 = 30$ **Error en el signo de igualdad**	$\frac{12}{(X+3)} = 1$
$X - 3 = 2 + X$	$X = 80 - 14 + 1$	$2(X + 10) = 80$	$3(X - 5) = 30$
$X = 2(3 * 2 + 1)$	$2(X + 4) = 14$	$\frac{X}{12} = 1 - X + \frac{3X}{2}$	$2X + 5 = X - 12$
$3X + 1 = X - 2$	$\frac{3}{4}Y = \frac{5}{6}$	$4(X + 4) = 2(X + 2)$	$X = 9 - 5$ **No es ecuación**
$45X = 45$	$200 - 2n = 88$	$4X - 12 = 8$	
$X^2 + 1 = X + 4$	$3X + 5 = 14$	$7X + 8 = 5(X - 2)$	

No da sus respectivas soluciones.

SAMANTHA

$73 = 51 + 11w$	$14 = 2(15 - 2^3)$ **No es ecuación**	$20 = 5(2^2)$ **No es ecuación**	$18 = 2 + 4^2$ **No es ecuación**	$10 = 4 + 3F$
$-69 = 78 - 49m$	$2x + 10 = 26$	$32 = 23 + 3c$	$79 = 50 - 128 + K$	$23 = J^2 - 13$
$60 = 2h + 10h$	$128 = 31x - 89$	$40 = 5(2m * 2)$	$37 = A^2 + D^2$ **No es ecuación**	$2 = -1 + v$
$81 = 17 + n^3$	$89 = 37 + 26Y$	$5 = 3 + d$	$902 = 30^2 + R$	$15 = 3Ñ + 6$
$19 = 7 + 4h$	$7 = -13n - 19$	$56 = 32 + 6G$	$162 = 102 + 30P$	$17 = 5Q + 7$
$124 = 60S + 2^2$	$21 = 3(11 - Z)$	$-4 = 8 - 12$ **No es ecuación**	$28 = 5^2 + V$	$3x - 6 = 30$

No da sus respectivas soluciones.

Con estos ejercicios se detectan las dificultades de los estudiantes que tienen con el signo de igualdad y eso da pie a que no puedan crear sus propias ecuaciones con su respectiva solución. LO CUAL PROVOCA MALAS EXPERIENCIAS EN SUS EXAMENES.

Todos los errores que se encuentran son de los estudiantes, 100% auténticos, así lo entienden y por lo tanto así lo escribe.

Algunos errores que se detectan son:

- ✓ Las soluciones que dan no satisfacen la igualdad.
- ✓ Confunde las ecuaciones con las operaciones.
- ✓ Ponen ecuaciones con dos incógnitas y solo se trabaja con una incógnita.
- ✓ En la solución de la ecuación colocan a la incógnita negativa.
- ✓ Algunos alumnos hace todo el desarrollo de la ecuación y lo que se busca evitar que se haga mecánicamente, por lo mismo cometen errores en el despeje.
- ✓ Otros alumnos cometen el error de poner productos indicados como ecuaciones y solo distribuyen.
- ✓ En unas ecuaciones, no se respeta la transitividad y la simetría de la igualdad.
- ✓ Algunos estudiantes confunde la incógnita con la “R” de resultado, ya que ven la ecuación como un algoritmo que tiene que ser resuelto.
- ✓ Algunos estudiantes solo dan el número pero no ponen que es el valor de la incógnita.

PERO EN GENERAL SE VE UN BUEN TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES.

También se puede rescatar que algunos estudiantes manejan varias letras para las incógnitas.

4.1 EVALUACIÓN EN UN CURSO NORMAL

La Profesora Laura Ortega Xochicale da las siguientes ecuaciones a sus estudiantes de 1° y 2° grado, de la Técnica No 1 de la Ciudad de Puebla. Y se obtienen los siguientes resultados. (Ciclo escolar: 2014 – 2015, a finales del mes de Mayo)

1° "D"

1.- $2x - 2 = 0$	4.- $3x - 2 = 4$	7.- $2x + 4 = 0$
2.- $x - 3 = 7$	5.- $x - 2 = 2$	8.- $7x = 35$
3.- $x - 1 = 9$	6.- $2x + 5 = 19$	9.- $10 - 9 = x$
	10.- $\frac{20}{4} = x$	

2° "B" y 2° "E"

1.- $2x - 2 = 0$	4.- $5(x + 2) = 15$	7.- $2x + 4 = 0$
2.- $x - 3 = 7$	5.- $x - 2 = 2$	8.- $5x + 5 = 20$
3.- $x - 1 = 9$	6.- $2x + 5 = 19$	9.- $10 - 9 = 2x$
	10.- $8x + 3 = 35$	

2° "C" y 2° "D"

1.- $3x - 3 = 12$	4.- $5(x + 2) = 15$	7.- $2x + 10 = 0$
2.- $8x - 8 = 40$	5.- $18 = 3x + 2$	8.- $5x + 5 = 20$
3.- $2x = 16$	6.- $2x + 5 = 19$	9.- $10 - 9 = 4x$
	10.- $7x + 2 = 9$	

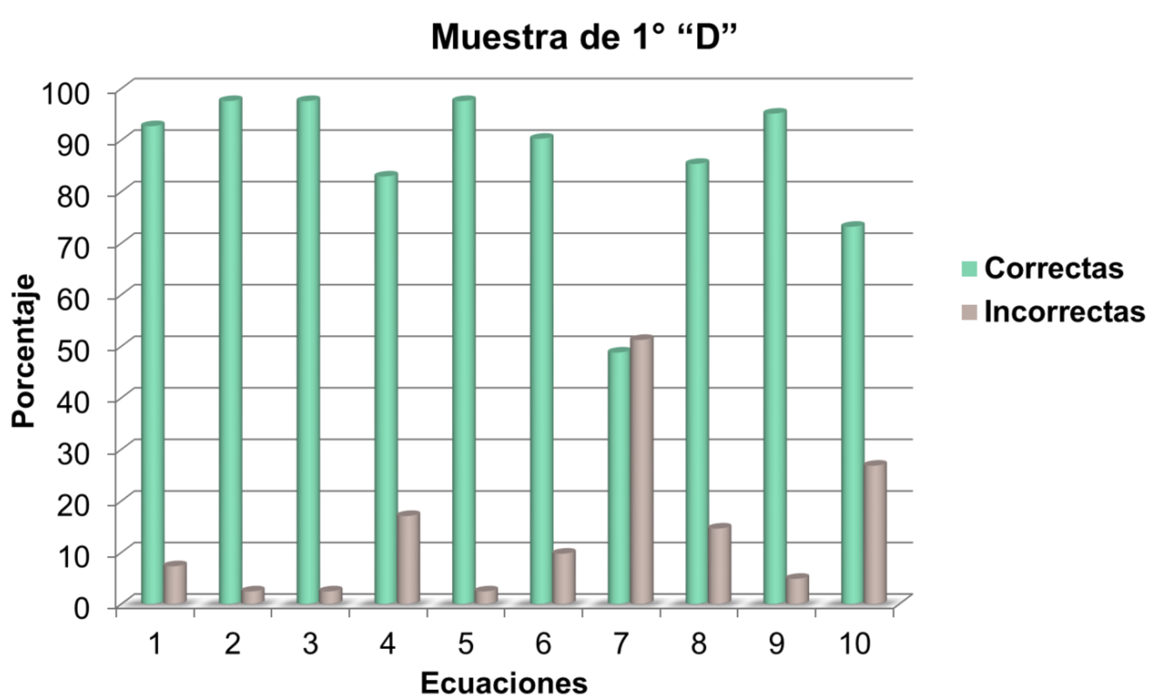
Esto fueron los errores que encontró la profesora:

PRIMER GRADO	SEGUNDO GRADO
▪ Desglosaron las ecuaciones de modo intuitivo usando aritmética. ▪ No expresan el resultado de la forma $x = 4$, solo colocan el número. ▪ No hay formalización del procedimiento.	• Errores al trasponer operaciones. • Justificación de respuestas correctas. • Formalización del procedimiento en al menos 30% de la muestra.

A continuación se dan las muestras de como respondieron los estudiantes:

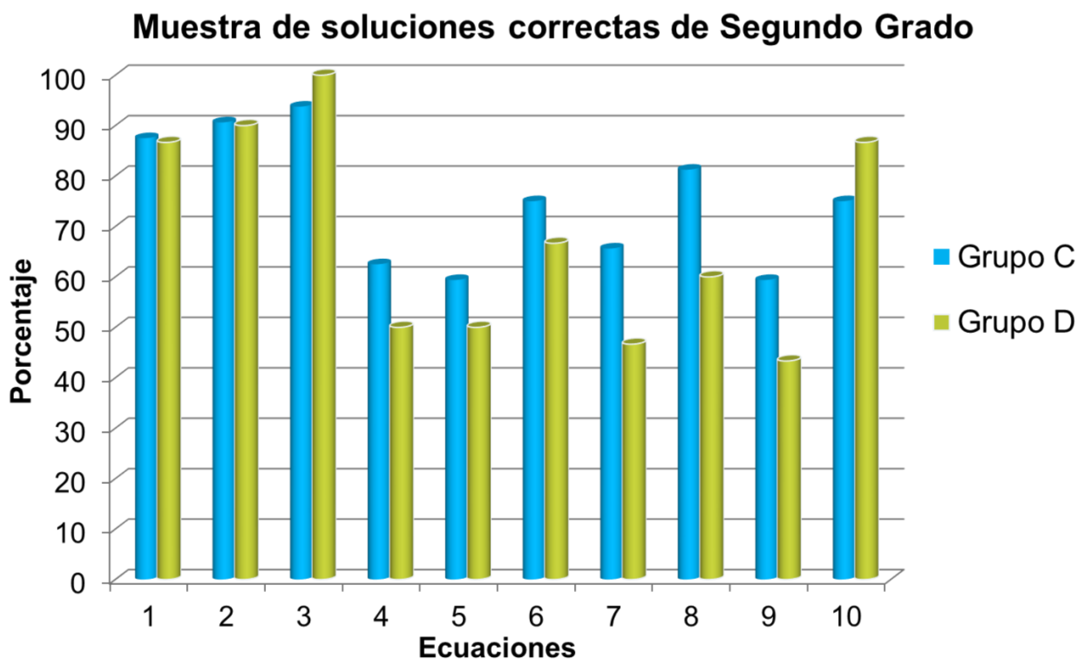
PRIMER AÑO:

El 1° "D" consta de 57 alumnos.

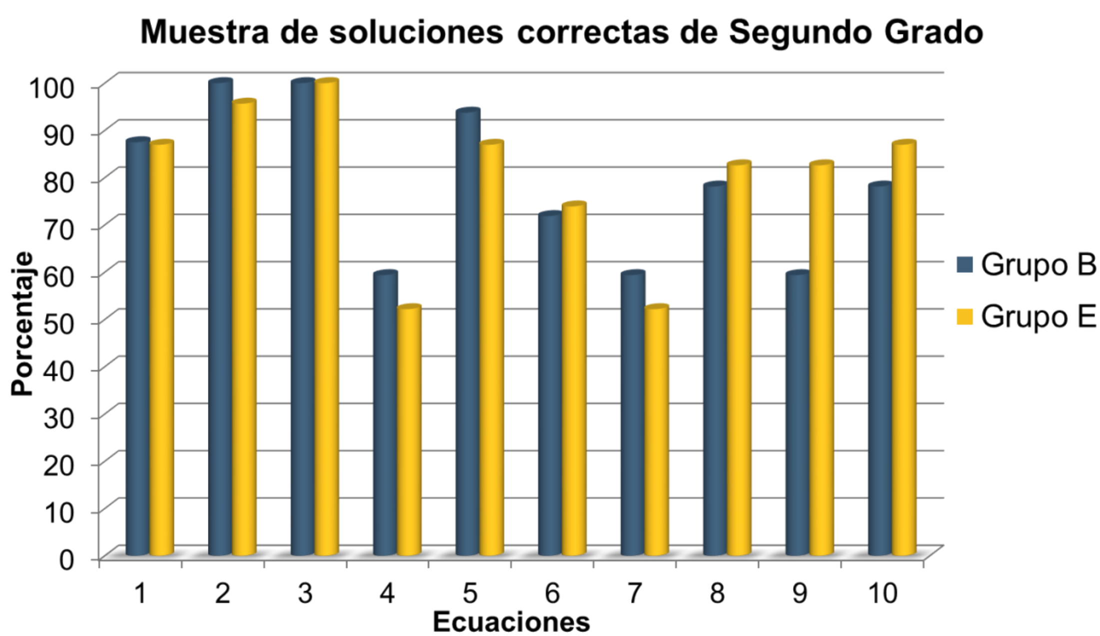


SEGUNDO AÑO:

El 2° “C” consta de 32 alumnos y el 2° “D” consta de 30 alumnos, las edades de estos son de 13 y 14 años. A continuación se presenta su muestra.

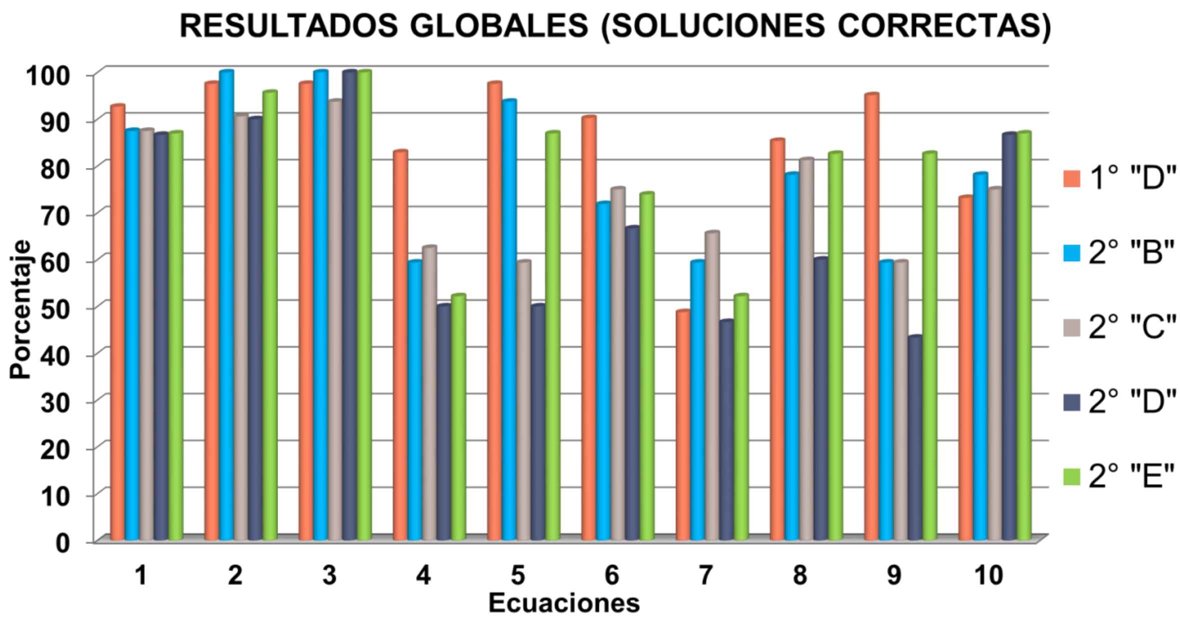


El 2° “B” consta de 32 alumnos y el 2° “E” consta de 23 alumnos, las edades de estos son de 13 y 14 años. A continuación se presenta sus resultados.



Dado que las ecuaciones son sencillas y la incógnita solo aparece una vez no tiene mucho sentido complicar las ecuaciones, conviene ir complicando poco a poco las ecuaciones.

Se dan los resultados globales de las soluciones correctas:



Gráficas tomadas de la ponencia presentada en el Congreso de Matemáticas, Octubre 2015 por la compañera Martha Patricia Velasco Romero.

Conclusiones de la evaluación:

De acuerdo a los resultados, nos percatamos que el primer año por alguna extraña razón los alumnos trabajan mejor. Por lo tanto hay que trabajar e insistir en este tema en este grado.
El porcentaje de aciertos en general es bueno ya que es mayor al 50%. El primer año está cercano al 90% que es muy bueno. Esta actividad se debe realizar 2 a 3 veces al año.

4.2 LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y EL MÉTODO SINGAPUR

Esto nos comenta la profesora Laura Ortega Xochicale:

"Algo que he aprendido, es que la enseñanza de las matemáticas es más efectiva, interesante y más dinámica a través de la resolución de problemas variados.

Así empecé el curso 2009-2010. Sin conocer el método percibí que los niños elaboraban dibujos para resolver problemas. Al principio pensé que era un "retroceso" a la primaria, o algo así, como que los niños todavía no asimilaban su tránsito a la secundaria. Pero mantuve tolerancia a esta "desviación" por dos razones: 1) tomar en cuenta los procedimientos de los niños en la resolución de problemas y 2) ser tolerante y paciente a que estos pequeños asimilaran el cambio de dejar la primaria y entrar a la complicada etapa adolescente en la secundaria.

Conforme avanzábamos en las clases y resolvíamos problemas, observaba las soluciones de los niños, una gran dificultad que se tiene en primer grado es que los niños no saben explicar su respuesta, la obtienen y te la muestran. Me esforzaba por entenderles y ellos por explicarme aunque en varias ocasiones ellos o yo desistíamos. Buscaba motivarlos a que resolvieran los planteamientos como ellos pudieran, (así los obligas a poner en acción todos los recursos matemáticos con los que ellos cuentan, además de que permite ver otras habilidades y también deficiencias que hay que superar). La motivación consiste en hacerles preguntas que los lleven a una respuesta correcta. Los estudiantes a veces se traban en conceptos matemáticos como no recordar cómo se saca el área o perímetro de figuras básicas o bien en operaciones aritméticas básicas (sobre todo con fracciones), o bien en malentender o de plano NO entender el planteamiento del problema y por eso no saben qué hacer. Si cometen errores ayudarles a que vean donde está y que ellos mismos lleguen a una respuesta correcta.

Con la confianza ganada de los niños y enfatizando que se valía hacer de todo con tal de resolverlos, me di cuenta que algunos de ellos "dibujaban" el problema y así era más entendible para ellos, me lo podían explicar de una manera más fácil y también resultaba más fácil explicarlo a sus compañeros. Así que retomé sus "dibujos" para dar la explicación en otros grupos. Ellos me preguntaban si esto era válido, porque en la primaria como eran los mayores ya no se veía muy bien que hicieran dibujos. Yo les dije que sí, porque así lo entendían mejor. Pero tenía mis dudas al respecto. Quiero aclarar que cuando hablo de dibujos me refiero a una representación con bloques rectangulares, cuadrados, tal vez circulares. No a dibujos propiamente de animales, lugares etc.

Me di cuenta que la manera como estaban trabajando varios de mis niños era el Método Singapur, para mí desconocido hasta entonces. Y que era una alternativa

muy buena para desarrollar diversas habilidades. Así que más consciente del método, lo utilicé tanto como fue posible.
Al principio, algunos de los niños no se sentían cómodos en hacer sus dibujos porque seguían viendo como que hacían trampa. Alenté a que los hicieran, a que desataran su creatividad y a que vieran que era un muy buen método e insistí en que lo utilizaran. Y poco a poco más niños lo intentaban utilizar porque lo entendían a través de sus compañeros".
Así que a través de esta experiencia puedo decir que el Método Singapur tiene ventajas muy valiosas.

Para los estudiantes:

1) El dibujo permite ver si el adolescente ha entendido o no el planteamiento del problema. Ya que logra una abstracción al depurar la información y quedarse sólo con la información necesaria.

2) Al tener un dibujo, el adolescente puede explicar mejor su procedimiento. Y esto es muy valioso porque se fortalece una confianza en sí mismo de que si puede con las matemáticas.

3) Al explicarlo al grupo se logra una comprensión más amplia de todos porque es un adolescente explicando a otros y entre ellos se entienden mejor.

Como maestra frente a grupo puedo decir que:

1) El Método Singapur logra que niños con dificultad para aprender o comprender situaciones problema vean que no es tan difícil y entonces se motivan y se animan a seguir intentándolo.

2) Algunos problemas son mucho más entendibles por el método gráfico que por otros, como una solución algebraica o sólo aritmética. Padres de familia me han enviado recados que tal o cual problema es muy difícil y que ellos mismos no lo pudieron resolver, cuando sus hijos se los explican por este método, me mandan comentarios de que estaba muy sencillo y no se les ocurrió esa idea. O como el caso de una niña que explicó el problema de las llaves de agua que llenan un tanque a su hermana de preparatoria y a ambas les quedó claro.

3) Hay soluciones gráficas muy ingeniosas y veo belleza en sus respuestas. Así fomentas su creatividad y elevas su autoestima. Una respuesta

ingeniosa la promuevo entre mis otros grupos y entre ellos mismos se felicitan.

4) Funciona con grupos numerosos, ya que el problema en las escuelas públicas es que tenemos arriba de 50 niños y prestarles atención a cada uno es difícil. Pero este método te da la ventaja de una explicación para todos.

5) Este método permite que el niño desarrolle de una manera más natural y no forzada su argumentación. Le da más seguridad en expresar sus ideas y de una manera más ordenada y clara. Lo haces PENSAR, si se equivoca, como ha pasado, el niño comienza de nuevo su explicación partiendo de ver su gráfico y seguro de sí mismo porque él fue el autor intelectual de esa respuesta y nadie más. Y si aun así se traba, a veces algunos de sus compañeros salen al rescate porque trabajan en pareja o tríos y ya captaron la solución. Ahora que los tengo en segundo a varios de ellos no se les olvida como resolvieron X o Y problema y tienen presente su solución gráfica.

6) El método gráfico es muy bueno para entender el concepto de fracciones, fracciones equivalentes, fracciones como porcentaje y acciones de reparto, y de reparto del resto. Tema muy importante y talón de Aquiles en las matemáticas de educación básica.

7) Las soluciones ingeniosas no siempre provienen de quien tú esperas. Me he llevado sorpresas muy gratas con niñas que hasta ese momento habían pasado desapercibidos para mí en el salón de clase. Hay riqueza de pensamiento, creatividad y habilidad en el salón que a veces pasamos desapercibida, porque no sabemos cómo buscarla y como potenciarla. EL Método Singapur te ayuda en esta parte.

8) Es un recurso didáctico muy bueno para pasar al siguiente nivel que es el manejo de símbolos (álgebra).

9) Logras a fin de cuentas desarrollar habilidad, creatividad, enriquecimiento del lenguaje y mejor comunicación.

Limitaciones:

a) Hay que saber elegir problemas que se puedan resolver por este método. Problemas variados y con vocabulario diverso para que el niño amplíe su vocabulario (en matemáticas y en el idioma). Generalmente ligados a las ciencias exactas, pero también para fomentar su conocimiento respecto a su entorno cultural, social y del mundo en que vivimos.

b) No todos los problemas se pueden resolver por este método.

c) Persuadir a los niños de pasar al siguiente nivel que es el álgebra es un proceso de mucha paciencia y ya que este método es muy visual y sencillo y menos complicado para ellos que el álgebra. Me dicen “para que me complico con el álgebra si con dibujo ya entendí”

d) Si no te ganas su confianza, y no generas un ambiente de respeto en el grupo difícilmente vas a lograr una actitud de trabajar

EN GENERAL ES UN METODO QUE RECOMIENDO AMPLIAMENTE.

4.3 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (ESTUDIANTES)

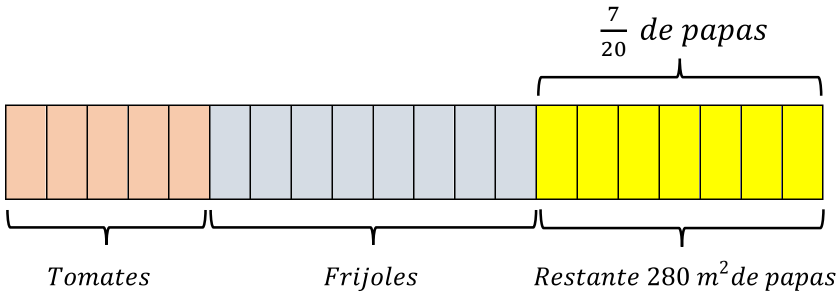
Piaget nos ha enseñado que podemos aprender mucho sobre cómo piensan los niños, escuchándolos con cuidado, poniendo atención en la forma como resuelven sus problemas. Si entendemos cómo piensan, estaremos más aptos para adecuar la enseñanza a sus capacidades.

Los maestros deben proponer que los alumnos logren concebir el álgebra como una valiosa herramienta que sirve para resolver problemas. Para alcanzar este propósito en la clase, se pone a prueba una y otra vez, hasta que los alumnos empiecen a manifestar confianza en ella. Partimos de la solución que dan los niños, después se explica la solución con álgebra, poco a poco deben descubrir el poder del algebra. Utilizo los conocimientos y habilidades de los niños para mostrarles que el álgebra si nos sirve, no fue inventada para molestarlos. Los niños comprenden más de lo que son capaces de explicar y escribir.

Se debe permitir a los estudiantes usar sus propias estrategias informales en la resolución de problemas, al menos inicialmente, y luego guiarlos en su pensamiento matemático hacia estrategias más efectivas y entendimiento avanzado.

A continuación se muestran problemas resueltos por los estudiantes:

1.- Un campesino planta $\frac{1}{4}$ de su huerta de tomates, $\frac{2}{5}$ de frijoles y el resto que son de 280 m^2 de papas. ¿Qué fracción ha plantado de papas? ¿Cuál es la superficie de la huerta?



$$\frac{1}{4} = \frac{5}{20}\ tomates$$

$$\frac{2}{5} = \frac{8}{20}\ frijoles$$

$$\boldsymbol{\frac{7}{20}\ ha\ plantado\ de\ papas}$$

Si 7 rectángulos representan los 280 m^2 entonces 1 rectángulo representa 40 m^2 y si quiero la superficie de los tomates y frijoles sería $40 * 13 = 520\ m^2$. Por lo tanto la superficie total de la huerta es 520 + 280 = **800 m^2**

Ya que los niños encontraron su respuesta, el maestro les tiene que enseñar otro camino que es el del álgebra, que es de gran ayuda para resolver problemas.

Llamamos:

$x = la\ superficie\ total\ de\ la\ huerta.$

Y el campesino planta $\frac{1}{4}$ de su huerta de tomates, $\frac{2}{5}$ de frijoles y el resto que son 280 m^2 de papas. Entonces

$$\frac{1}{4}x + \frac{2}{5}x + 280 = x$$

$$\frac{5}{20}x + \frac{8}{20}x - \frac{20}{20}x = -280$$

$$-\frac{7}{20}x = -280$$

$$x = \frac{(-280)(20)}{-7}$$

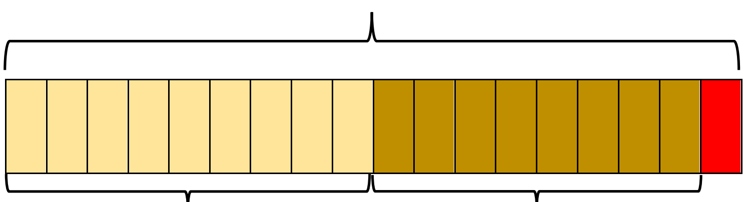
$$x = \frac{-5600}{-7}$$

$$x = 800$$

Por lo tanto la superficie total de la huerta es **<u>800 m²</u>**.

2.- En una botella hay $\frac{3}{4}$ de litro de aceite y agregamos $\frac{2}{3}$ de litro más. Si la botella es de un litro y medio. ¿Cuánto le falta para llenarse?

$$1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{18}{12}\ litros$$



$Hay\ \frac{3}{4} = \frac{9}{12}\ litros\ de\ aceite$ $Se\ agregan\ \frac{2}{3} = \frac{8}{12}\ litros\ de\ aceite$

El recipiente tiene:

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}\ litros\ de\ aceite$$

Y se le agregan

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}\ litros\ de\ aceite$$

Por lo tanto, como se ve en el dibujo para llenarse le hace falta $\boldsymbol{\frac{1}{12}\ de\ litro.}$

Ahora algebraicamente se hace de la siguiente manera:

Lamamos a:

$x = La\ cantidad\ que\ nos\ hace\ falta\ para\ llenarse.$

Entonces:

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+x=1\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+x=\frac{3}{2}$$

$$\frac{9}{12}+\frac{8}{12}+x=\frac{18}{12}$$

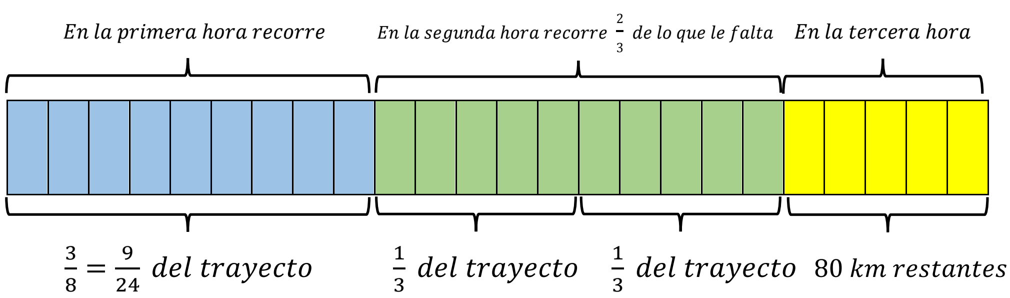
$$\frac{17}{12}+x=\frac{18}{12}$$

$$x=\frac{18}{12}-\frac{17}{12}$$

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{12}}$$

Por lo tanto la cantidad que nos hace falta para que el recipiente se llene es de $\boldsymbol{\frac{1}{12}\ de\ litro}$.

3.- Un camión cubre la distancia entre dos ciudades en tres horas. En la primera hora hacen $\frac{3}{8}$ del trayecto, en la segunda los $\frac{2}{3}$ de lo que queda por recorrer y en la tercera los 80 km restantes. ¿Cuál es la distancia total recorrida?



Como se observa en el dibujo la parte amarilla representa los 80 km, entonces cada rectangulito representa 16 km. Por lo tanto $16 * 24 = 384$.
Entonces la distancia total recorrida es de **384 km**.

Ahora lo plateamos algebraicamente:

Llamamos
$x = la\ distancia\ total\ recorrida.$

De acuerdo al enunciado:

La primera hora hacen $\frac{3}{8}$ del trayecto entonces queda $\frac{3}{8}x$.
La segunda hora hace $\frac{2}{3}$ de lo que queda por recorrer entonces nos queda $\frac{2}{3}\left(\frac{5}{8}x\right)$.
Y en la tercera hora los 80 km restantes. Entonces solo sumamos e igualamos a x.

Por lo tanto obtenemos nuestra ecuación:

$$\frac{3}{8}x + \frac{2}{3}\left(\frac{5}{8}x\right) + 80 = x$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{10}{24}x + 80 = x$$

$$\frac{9}{24}x + \frac{10}{24}x - x = -80$$

$$-\frac{5}{24}x = -80$$

$$-5x = (-80)(24)$$

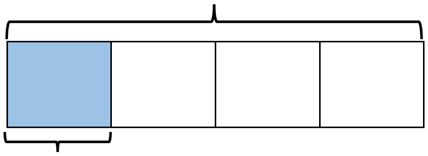
$$x = \frac{-1920}{-5}$$

$$\underline{\boldsymbol{x = 384}}$$

Así obtenemos que la distancia total recorrida es de **384 km.**

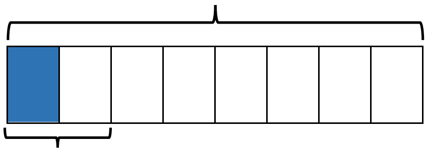
4.- Un tanque de agua es alimentado por dos llaves, una la llena en 4 horas y la otra en 8. Si se abren las dos llaves al mismo tiempo y el tanque está vacío. ¿En cuánto tiempo se llena?

$La\ primera\ llave\ se\ llena\ en\ 4\ horas$



$En\ una\ hora\ se\ llena\ \frac{1}{4}\ de\ su\ capacidad$

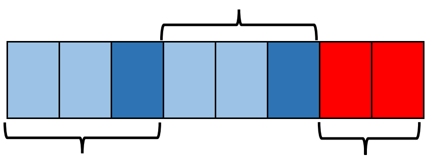
$La\ segunda\ llave\ se\ llena\ en\ 8\ horas$



$En\ una\ hora\ se\ llena\ \frac{1}{8}\ de\ su\ capacidad$

Entonces

$se\ llena\ en\ 1\ hora$



$\frac{3}{8}\ se\ llenan\ en\ 1\ hora$ $\quad$ $Se\ llena\ en\ 40\ minutos$

Como se observa en el dibujo:

$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ entonces

$\frac{3}{8}\ se\ llenan\ en\ 60\ minutos\ osea\ una\ hora.$

Por lo tanto

$\frac{2}{8}\ se\ llenan\ en\ 40\ minutos.$

Así el tanque se llena completamente en **<u>2 horas 40 minutos.</u>**

Ahora algebraicamente:

	TIEMPO TOTAL DE LLENADO	EN UNA HORA EL TANQUE ESTARA LLENO EN:
PRIMERA LLAVE	$4\ HORAS$	$\frac{1}{4}\ de\ su\ capacidad$
SEGUNDA LLAVE	$8\ HORAS$	$\frac{1}{8}\ de\ su\ capacidad$

LAS DOS LLAVES	$x\ HORAS$	$\frac{1}{x}$ $de\ su\ capacidad$

En una hora las dos llaves llenarán $\frac{1}{x}$ de la capacidad del estanque, entonces:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{3}{8}=\frac{1}{x}$$

$$3x=8$$

$$x=\frac{8}{3}$$

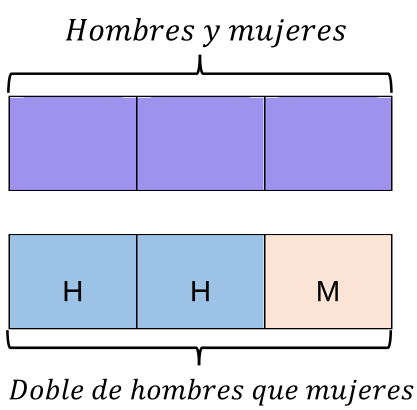
$$x=2.666666667$$

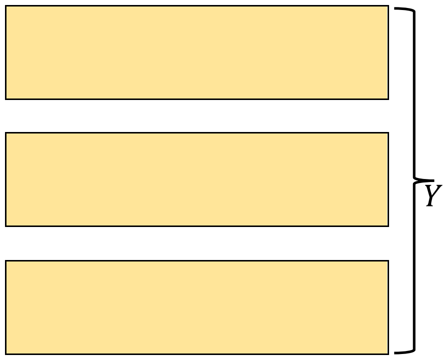
Entonces 2.666666667 horas equivalen a 2 horas (.666666667)(60) = 40.00 minutos

Por lo tanto las dos llaves tardaran <u>***2 horas 40 minutos en llenar el tanque.***</u>

Resuelto por: Alejandra Barrientos Arce 1° "B". Abril 2010

5.- En una reunión hay el doble de hombres que de mujeres y el triple de niños que de hombres y mujeres juntos. Si en total hay 156 personas. ¿Cuántos hay de cada uno?





$Y\ el\ triple\ de\ niños\ que\ de\ hombres\ y\ mujeres\ juntos$

Si hay 156 personas se divide

$$\frac{156}{4} = 39\ personas\ hay\ en\ cada\ rectangulo$$

Como es el triple de niños: $39 * 3 = 117\ niños$

Entonces hay **<u>117 niños.</u>**

Ahora para saber cuántas mujeres hay hacemos $\frac{39}{3} = 13\ \ entonces\ \boldsymbol{hay\ 13\ mujeres}$

Y por lo tanto $13 * 2 = 26\ entonces\ \boldsymbol{hay\ 26\ hombres}$

Ahora algebraicamente:

Llamamos

$$x = Total\ de\ mujeres$$
$$2x = Total\ de\ hombres$$

Y el triple de niños que de hombres y mujeres juntos es: $3(x + 2x) = 3x + 6x = \boldsymbol{9x}$

Como sabemos que hay 156 personas en total sumamos:

$$x + 2x + 9x = 156$$

$$12x = 156$$

$$x = \frac{156}{2}$$

$x = 13$

Entonces hay **13 mujeres.**

Sustituimos en $2x = 2(13) = 26$

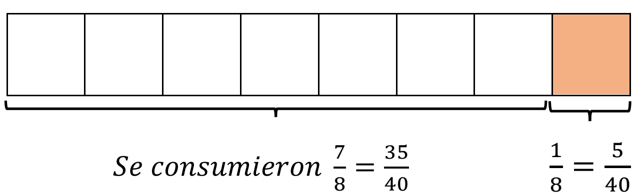
Por lo tanto hay **26 hombres.**

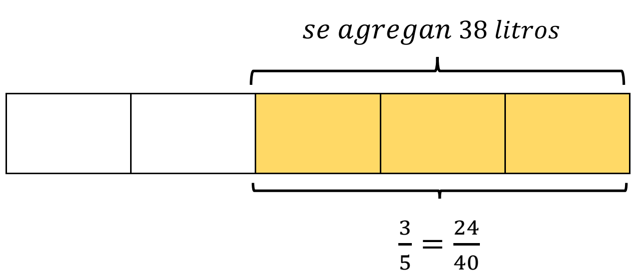
Ahora sustituimos en $9x = 9(13) = 117$

El total de niños es de 117.

Resuelto por: Luis Ángel Conde Mendoza 1°"B". Abril 2010

6.- Se consumieron siete octavas partes de un bidón de aceite. Reponiendo 38 litros ha quedado lleno en sus tres quintas partes. Calcula la capacidad del bidón





El alumno Oscar llegó hasta aquí. Su problema fueron las fracciones equivalentes. Al entender la equivalencia lo pudo terminar, pero le costó un poco.

Llegó a establecer:

$$\frac{3}{5} = 38\ litros + \frac{1}{8}$$

$$\frac{24}{40} = 38\ litros + \frac{5}{40}$$

$$\frac{24}{40} - \frac{5}{40} = 38\ litros$$

$$\frac{19}{40} = 38\ litros$$

Entonces $\frac{1}{40} = 2\ litros$

Por lo tanto (40) (2 litros) = 80 litros

<u>**La capacidad del bidón es de 80 litros.**</u>

Ahora resolviendo con algebra, tenemos

Llamamos:

$x = capacidad\ del\ bidon\ en\ litros.$

Tras consumirse la parte del aceite nos queda

$$x - \frac{7}{8}x = \frac{1}{8}x\ litros$$

Pero luego se agrega

$$\frac{1}{8}x + 38 = \frac{3}{5}x$$

$$38 = \frac{3}{5}x - \frac{1}{8}x$$

$$38 = \frac{19}{40}x$$

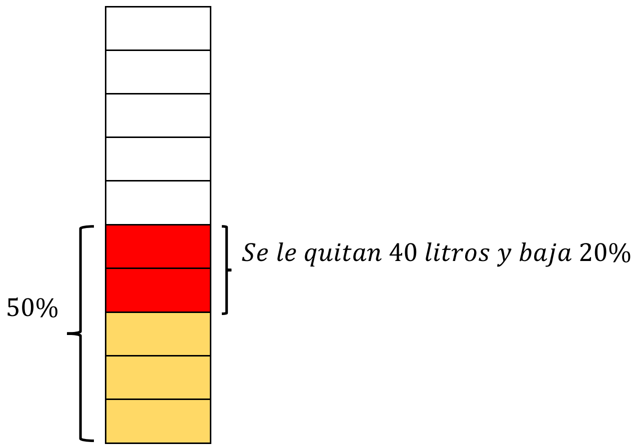
$$x = \frac{1520}{19}$$

$$x = 80$$

Por lo tanto <u>**la capacidad del bidón es de 80 litros.**</u>

Resuelto por: Oscar Díaz Romero 1° “A”. Junio 2010

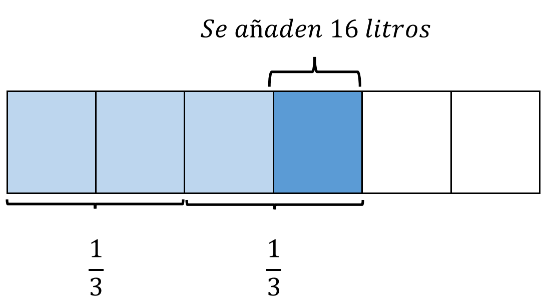
7.- En un barril de forma cilíndrica está depositada una cantidad de vino que ocupa el 50% de su capacidad. Si quitamos 40 litros del contenido, la altura del nivel del vino baja 20%. ¿Podrías deducir con estos datos la capacidad del barril?



De acuerdo al dibujo 40 litros = 20%
Entonces 20 litros = 10%
Así (20 litros) (10) = 200 litros.
La capacidad del barril es de 200 litros.

Resuelto por: Alejandra Mancilla Granados 1° “A”. Enero 2010

8.- Si se añaden 16 litros a un tanque que está lleno a la mitad el tanque está lleno a $\frac{2}{3}$. La capacidad del tanque de gasolina es de:



Como se ve en el dibujo $(16\ litros)(6) = \ 96\ litros$

La capacidad del tanque de gasolina es de 96 litros

Ahora resolviéndolo con álgebra

Llamemos

$x = Capacidad\ del\ tanque\ de\ gasolina\ en\ litros.$

Entonces tenemos:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + 16 = x$$

$$16 = x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x$$

$$16 = \frac{6}{6}x - \frac{3}{6}x - \frac{2}{6}x$$

$$16 = \frac{1}{6}x$$

$$16 * 6 = x$$

$$x = 96$$

Por lo tanto **<u>la capacidad del tanque de gasolina es de 96 litros.</u>**

Resuelto por: Julissa Aburto Gutiérrez 1° “B”. Enero 2010

9.- Un padre reparte entre sus hijos \$1800. Al mayor le da $\frac{4}{9}$ de esa cantidad, al mediano $\frac{1}{3}$ y al menor el resto. ¿Qué cantidad recibió cada uno? ¿Qué fracción del dinero recibió el tercero?

Mayor $\frac{1}{9}$	Mayor $\frac{1}{9}$	Mediano $\frac{1}{9}$
Mayor $\frac{1}{9}$	Menor	Mediano $\frac{1}{9}$
Mayor $\frac{1}{9}$	Menor	Mediano $\frac{1}{9}$

$Hijo\ mediano\ \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ $\quad$ $Hijo\ menor\ el\ resto, es\ decir,\ \frac{2}{9}$

Como se ve en el dibujo dividimos $\frac{1800}{9} = 200\ pesos$

$\underline{\boldsymbol{El\ hijo\ mayor\ recibe\ 4 * 200 = 800\ pesos}}$

$\underline{\boldsymbol{El\ hijo\ mediano\ recibe\ 3 * 200 = 600\ pesos}}$

$\boldsymbol{El\ hijo\ menor\ recibe\ 2 * 200 = 400\ pesos\ y\ recibio\ \frac{2}{9}}$

Resuelto por: Homero Jaffet Sánchez Castillo 1° “C”. Noviembre 2009

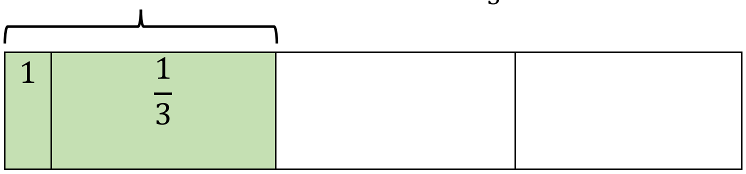
10.- Se tienen tres recipientes de jugo de 16, 11 y 6 litros cada uno. Se desea medir 8 litros con ellos. De qué manera hacerlo utilizando únicamente estos 3 recipientes y sólo está lleno el de 16?

Recipiente 16 litros	Recipiente 11 litros	Recipiente 6 litros
16	0	0
10	0	6
10	6	0
4	6	6
4	11	1
15	0	1
15	1	0
9	1	6
9	7	0
3	7	6
3	11	2
14	0	2
14	2	0
8	2	6
8	8	0

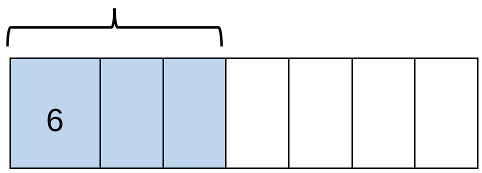
Resuelto por: Daniel Zamora 1° “A”. Noviembre 2009.
Es muy interesante cómo ordena la información para hallar la solución.

11.- Se reparte una cantidad de dinero entre tres personas. La primera recibe un peso más un tercio del resto, la segunda 6 pesos más un tercio del resto y la última recibe el resto que son 40 pesos. ¿Qué cantidad había al principio y cuánto recibió cada una?

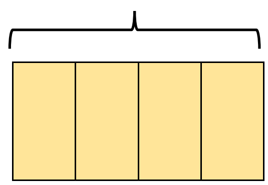
$La\ primera\ persona\ recibe\ un\ peso\ más\ \frac{1}{3}\ del\ resto$



$La\ segunda\ persona\ recibe\ 6\ pesos\ más\ \frac{1}{3}\ del\ resto$



$La\ última\ persona\ recibe\ el\ resto\ que\ son\ 40\ pesos$



De acuerdo a nuestros dibujos **la última persona recibe 40 pesos**, entonces cada rectángulo equivale a 10 pesos, por lo tanto en el rectángulo anterior o el dinero que le toca a la segunda persona es $2 * 10 = 20.$ Más los 6 pesos, **la segunda persona recibe 26 pesos.**

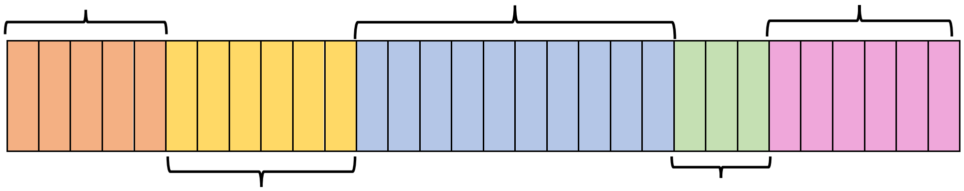
Así que la primera persona recibe $\frac{1}{3}$ que equivalen a 33 pesos, más 1 peso, entonces **la primera persona recibe 34 pesos**. Por lo tanto tenemos $34 + 26 + 40 = 100.$ Así **la cantidad que había al principio son 100 pesos.**

Resolverlo por álgebra, resulta muy laborioso ya que la ecuación es difícil de plantear. Por eso, este método que se utiliza es muy útil, porque de igual manera se llega a la solución del problema.

Resuelto por: Antonio Prado Amaya 1° "B" y Fernando Rojas Argüello 1° "F". Mayo 2010.

12.- Un collar de perlas se rompió. Un $\frac{1}{6}$ cayó al suelo, un $\frac{1}{5}$ en el lecho quedó, $\frac{1}{3}$ por la joven se salvó, $\frac{1}{10}$ el novio recogió y 6 perlas en el cordón quedó. ¿Cuántas perlas tenía el collar?

$\frac{1}{6} = \frac{5}{30}\ cayó\ al\ suelo$ $\frac{1}{3} = \frac{10}{30}\ por\ la\ joven\ se\ salvó$ $6\ perlas\ quedarón\ en\ el\ cordón$



$\frac{1}{5} = \frac{6}{30}\ en\ el\ lecho\ quedó$ $\frac{1}{10} = \frac{3}{30}\ el\ novio\ recogió$

De acuerdo a nuestro dibujo <u>el collar tenía 30 perlas.</u>
Ahora lo resolvemos algebraicamente

Lamemos:
$x = \ Número\ de\ perlas\ que\ tenía\ el\ collar.$

Entonces tenemos:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{10}x + 6 = x$$

$$\frac{5}{30}x + \frac{6}{30}x + \frac{10}{30}x + \frac{3}{30}x + 6 = x$$

$$\frac{24}{30}x + 6 = x$$

$$6 = x - \frac{24}{30}x$$

$$6 = \frac{6}{30}x$$

$$180 = 6x$$

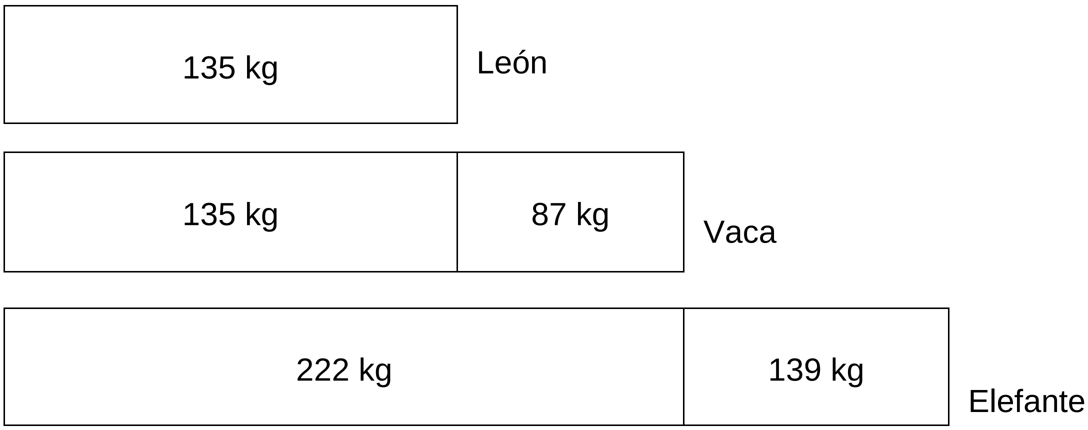
$$\frac{180}{6} = x$$

$$\underline{\mathbf{30 = x}}$$

Por lo tanto **<u>30 perlas tenía el collar.</u>**

Resuelto por: Julissa Aburto Gutiérrez 1° “B”. Enero 2010.

13.- Un león pesa 135 kg, una vaca pesa 87 kg más que el león, un elefante pesa 139 kg más que la vaca. ¿Cuánto pesa el elefante?

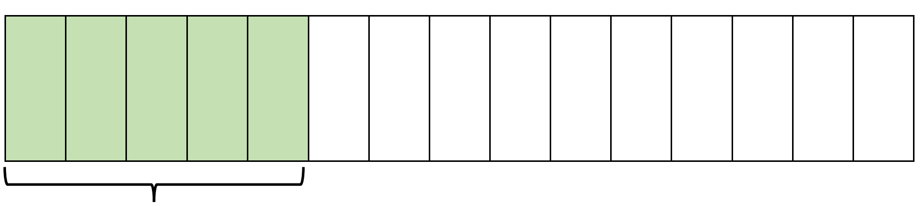


Entonces el Elefante pesa $222 + 139 = 361\ kg$.

<u>El Elefante pesa 361 kg</u>

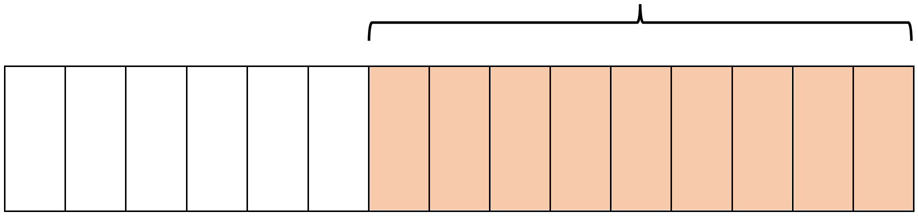
Resuelto por: Carla Monserrat Blanco Álvarez 1° “F”. Junio 2010.

14.- Ricardo participó en el triatlón de Mazatlán. Corrió $\frac{1}{3}$ de la distancia total, nadó 2 km y recorrió en bicicleta $\frac{3}{5}$ de la distancia total. ¿Cuántos kilómetros recorrió por todo?



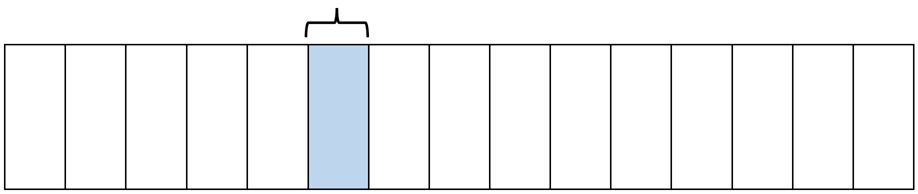
$Corrió\ \frac{1}{3} = \frac{5}{15} km\ de\ la\ distancia\ total$

$Recorrió\ en\ bicicleta\ \frac{3}{5} = \frac{9}{15}\ de\ la\ distancia\ total$



Y

$Nado\ 2\ km$



De acuerdo al dibujo tenemos que $\frac{1}{15} = 2\ km$.
Entonces $15 * 2\ km = 30\ km$
Por lo tanto **<u>Ricardo recorrió 30 km.</u>**

Ahora algebraicamente, llamemos:

$x = Total\ del\ recorrido\ en\ km.$

$$\frac{1}{3}x + 2 + \frac{3}{5} = x$$

$$\frac{5}{15}x + 2 + \frac{9}{15} = x$$

$$\frac{14}{15}x + 2 = x$$

$$2 = \frac{15}{15}x - \frac{14}{15}x$$

$$2 = \frac{1}{15}x$$

$$2 * 15 = x$$

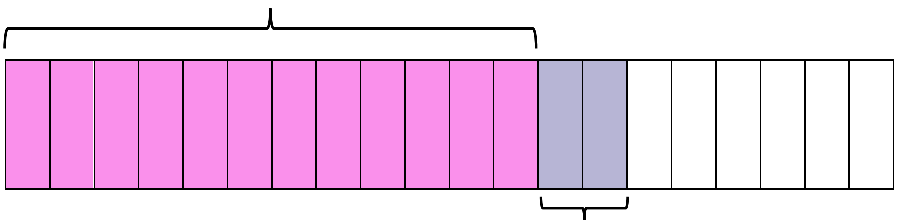
$$\mathbf{30 = x}$$

Así tenemos que **Ricardo recorrió una distancia de 30 km.**

Resuelto por: Xochiquetzalli Álvarez De Luciano 1° "A". Junio 2010.

15.- Ya completé las $\frac{3}{5}$ partes de un álbum de fotos de jugadores del mundial de futbol 2014. Para llenar $\frac{1}{4}$ de lo que me falta, necesito 36 estampas. ¿Con cuántas estampas se llena en total el álbum?

$$Estan\ completas\ \frac{3}{5}=\frac{12}{20}\ del\ \acute{a}lbum$$



$$Para\ llenar\ \frac{1}{4}=\frac{2}{8}\ necesito\ 36\ estampas$$

De acuerdo al dibujo $\frac{1}{4}=18\ estampas$

Es decir un rectángulo es igual a 18 estampas.

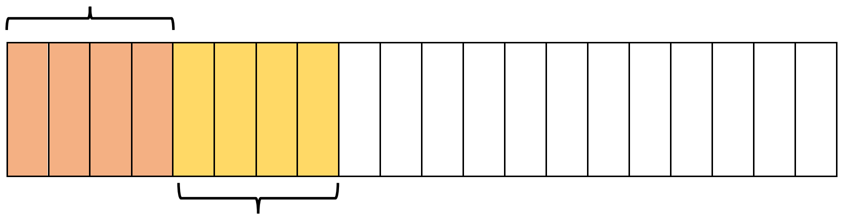
Entonces $20*18\ estampas=360\ estampas.$

Por lo tanto con **360 estampas se llena el álbum.**

Resuelto por: Dulce García Acuña 1° "F". Febrero 2010.

16.- Una camioneta al salir de viaje lleva de gasolina una cierta cantidad en su depósito. El viaje lo hace en 2 etapas: En la primera etapa consume $\frac{1}{5}$ de gasolina. En la segunda, $\frac{1}{4}$ de lo que quedaba. Al final del trayecto acaba con 30 litros. ¿Con cuántos litros emprendió el viaje?

$Primera\ etapa\ consume\ \frac{1}{5} = \frac{4}{20}\ de\ gasolina$



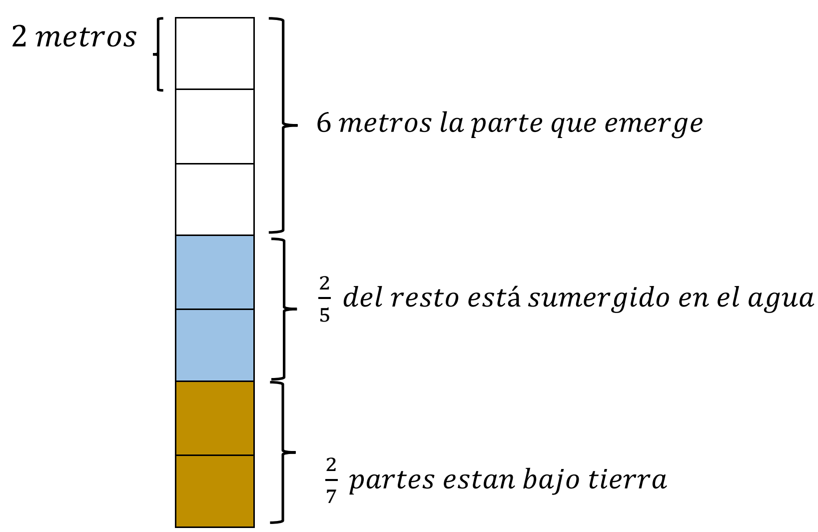
$En\ la\ segunda\ etapa\ consume\ \frac{1}{4} = \frac{4}{16}\ de\ lo\ que\ queda$

De acuerdo al dibujo tenemos que 12 rectángulos blancos son los 30 litros que nos sobran, entonces cada rectángulo vale $\frac{30}{12} = \frac{5}{2}$.
Por lo tanto $\frac{5}{2}\ litros * 20 = 50\ litros$.

<u>Así que el viaje lo emprendió con 50 litros de gasolina.</u>

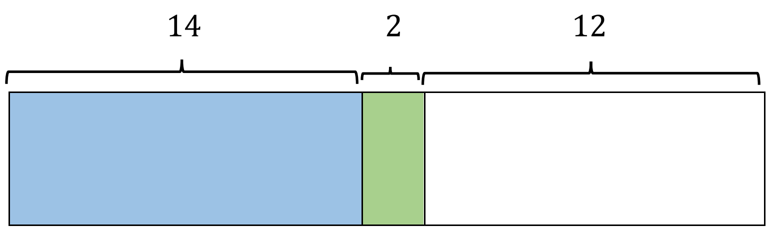
Resuelto por: Perla Mariana Robles Cuevas 1° "A". Noviembre 2010.

17.- Un poste tiene bajo tierra $\frac{2}{7}$ partes de su longitud, $\frac{2}{5}$ del resto está sumergido en el agua y la parte emergente mide 6 metros. ¿Cuánto mide el poste?

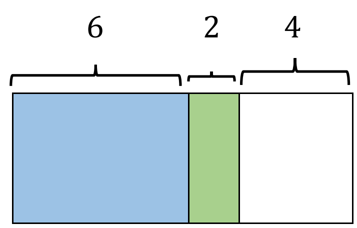


De acuerdo al dibujo cada cuadrado equivale a dos metros, entonces $2\,m * 7 = 14\,m$
Por lo tanto **<u>el poste mide 14 metros.</u>**

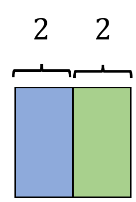
18.- Una señora reparte a sus 3 hijos caramelos. Al primero le da la mitad de ellos más dos, al segundo la mitad del resto más dos y al tercero la mitad del resto más dos. Así la señora reparte todos los caramelos. ¿Cuántos caramelos repartió? y ¿Cuántos a cada uno?



<u>El primer hermano recibe 16 caramelos</u>



<u>El segundo hermano recibe 8 caramelos</u>



<u>El tercer hermano recibe 4 caramelos</u>

<u>Y el total de caramelos es de 28.</u>

Resuelto por: Daniel Zamora 1° “A”. Noviembre 2010.

<u>Resolverlo por álgebra, resulta muy laborioso ya que la ecuación es difícil de plantear. Por eso, este método que se utiliza es muy útil, porque de igual manera se llega a la solución del problema.</u>

El siguiente problema es un buen ejemplo del método de resolución de ecuaciones por inversión, que algunos atribuyen a Aryabhata y otros a Bhaskara:

“Bella niña de ojos chispeantes, tú que conoces el verdadero método de inversión, dime cuál es el número que multiplicado por 3, aumentado en las tres cuartas partes del producto, dividido por 7, disminuido en la tercera parte del cociente, multiplicado por sí mismo, disminuido en 52, extraída la raíz cuadrada del resultado, sumado 8 y dividido por 10, da 2 finalmente.”

Tomamos entonces el final del problema y comenzamos a realizar las operaciones inversas a las dadas en el enunciado:

El resultado es 2, Si la última operación antes de llegar a 2 es dividir por 10, multiplicamos 2 por 10: $2\,x\,10 = 20$. La penúltima operación consistió en sumar 8, entonces restamos 8: $20 - 8 = 12$. La antepenúltima consistió en una raíz cuadrada, luego calculamos el cuadrado de lo que tenemos: $12^2 = 144$. Antes de hacer la raíz se restó 52, que es lo que se ha de sumar ahora: $144 + 52 = 196$. Antes de restar 52 se hizo un cuadrado, entonces se ha de hacer ahora una raíz cuadrada: $\sqrt{196} = 14$ Previamente a la raíz, se había sustraído de una cantidad su tercera parte, lo cual equivale a multiplicarla por dos tercios, entonces multiplicamos por tres medios:$14 * \frac{3}{2} = 21$. La cantidad multiplicada por tres medios era el resultado de dividir algo entre 7, por consiguiente se ha de multiplicar el último resultado por 7: $21\,x\,7 = 147$. Lo que se había dividido entre 7 es el triple del número buscado al cual se le había sumado sus tres cuartas partes, lo cual equivale a multiplicar por siete cuartos, entonces hay que multiplicar ahora por cuatro séptimos y dividir por 3:

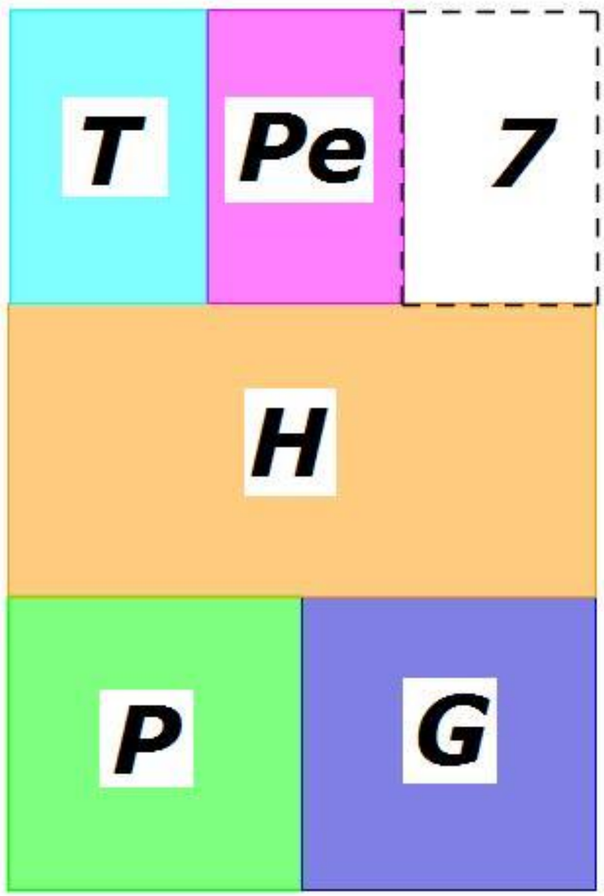
$$147 * \left(\frac{\frac{4}{7}}{3}\right) = 28$$

Por lo tanto **<u>el número que se busca es 28.</u>**

Solución de Roy: Maestra Laura

Pablo tiene 39 mascotas entre perros, gatos, hámsters, tortugas y periquitos. Tiene tantos perros como gatos, el doble de perros son hámsters, la tercera parte de hámsters son tortugas y 7 periquitos más que tortugas. ¿Cuántos periquitos tiene?

Roy tomó como referencia a los perros (P) e hizo el dibujo gráficamente:



Cada letra simboliza los animales que hay, luego entonces a 39 quita 7 y le quedan 32.

Este 32 lo divide entre 8 partes, ya que al quitar el 7 quedan 8 partes iguales a T o Pe. Entonces:

P + G = 12, P= 6, G = 6

H = 12

T = 4

Pe = 4 + 7 (los que se quitaron)

Así que hay 11 Periquitos

La mayoría del grupo lo hizo por prueba y error. Roy es un niño que no participa mucho, y por eso me sorprendió. Al grupo también le gustó su explicación.

La retomé para explicarla algebraicamente y como ya lo habían resuelto y Roy ya lo había explicado, no se les dificultó la parte de álgebra:

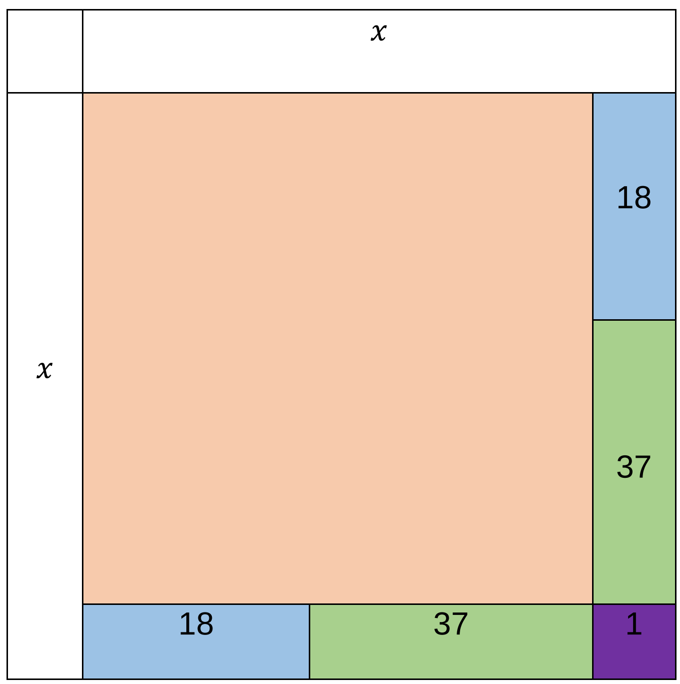
$P + P + 2P + \frac{1}{3}P + \frac{1}{3}P + 7 = 39$

PROBLEMA RESUELTO POR ALUMNO UNIVERSITARIO METODO GRÁFICO

PROBLEMA DEL COMANDANTE (Solución, alumno de licenciatura, Roberto, otoño 2015)

Un comandante dispone su tropa formando un cuadrado y ve que le quedan 36 hombres por acomodar. Decide poner una fila y una columna más de hombres en dos lados consecutivos del cuadrado y se da cuenta que le faltan 75 hombres para completar el cuadrado. ¿Cuántos hombres hay en la tropa?

Lo que hay que hacer es buscar el número de hombres que están bajo el mando del comandante y podemos hacerlo de una manera gráfica para poder ver qué es lo que necesitamos:



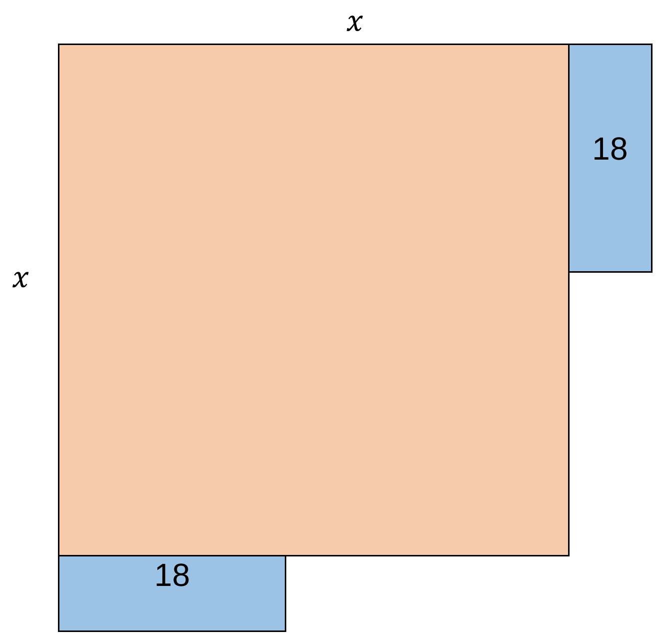
Sabemos que tenemos un cuadrado de lado "x" y que tenemos 36 hombres que han de repartirse en 2 partes en fila y columna respectivamente y que faltan 75 hombres que contaremos repartidos la mitad en fila y la otra en columna y el que falta a la orilla.

Entonces sabiendo los lados del nuevo cuadrado podemos sacar sus medidas que serían:

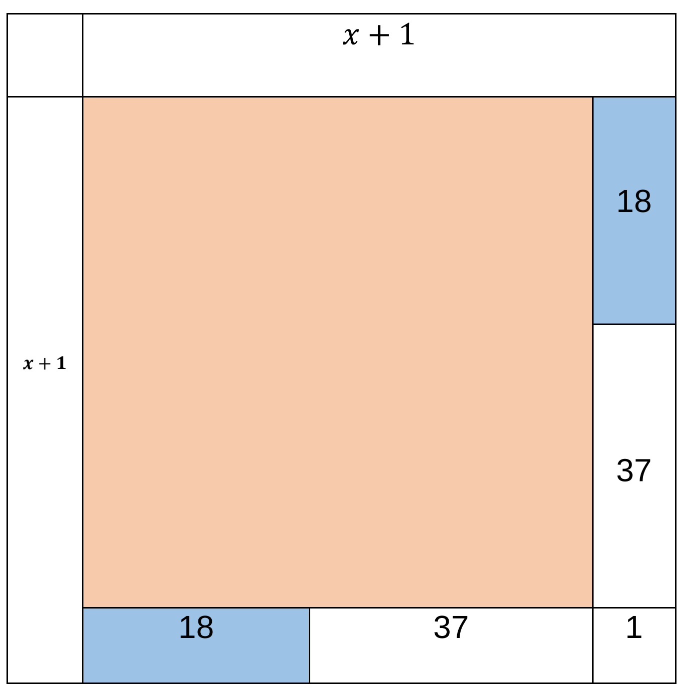
$56 * 56 = 3136$

$3136 - 75 = 3061$
Hay 3061 hombres en la tropa.

Ahora resolviendo algebraicamente tenemos:



Este dibujo nos indica que tenemos $x^2 + 36$



Este cuadro nos dice que tenemos $(x+1)^2-75$

Tenemos el total de hombres expresado de dos maneras, entonces podemos igualarlos.

$$x^2+36=(x+1)^2-75$$

$$x^2+36=x^2+2x+1-75$$

$$36=2x-74$$

$$2x=110$$

$$x=\frac{110}{2}$$

$$x=55$$

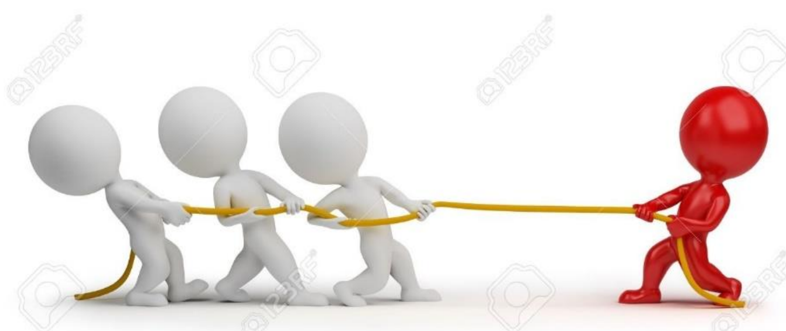
Sustituyéndolo en $x^2+36=(55)^2+36=3025+36=\mathbf{3061}$

Por lo tanto **<u>hay 3061 hombres en la tropa.</u>**

ANEXO A. NÚMEROS NEGATIVOS

Al igual que en el método de la balanza es importante experimentar con nuestro cuerpo los conceptos matemáticos (equilibrio). Es un juego pero se experimenta claramente la sensación y sobre todo se convierte en una experiencia que ayuda a la lógica, 3 niños de un lado y 3 del otro se mantiene el equilibrio… O sea los niños que van hacia la izquierda son negativos y los que van a la derecha son positivos.

En el ejemplo anterior cuando son 3 y 3 niños se mantiene el equilibrio y es 0.



Ahora si hubiera 3 niños del lado izquierdo y 1 del lado derecho, ganaran donde hay más…., es decir nos quedan 2 del lado izquierdo por lo tanto es **– 2.**

Si tuviéramos 3 niños del lado izquierdo y 2 del lado derecho, ganan los del lado izquierdo por lo tanto es **– 1.**

También los números negativos los podemos ocupar en el futbol, cuando hacemos la diferencia de goles de un equipo (goles a favor y goles en contra).

Primera División de México

Posición	Equipo	PJ	G	E	P	**GF**	**GC**	**DG**	PTS
1	Atlas	1	1	0	0	3	1	2	3
2	León	1	1	0	0	2	0	2	3
3	Chiapas	1	1	0	0	1	0	1	3
4	Monterrey	1	1	0	0	1	0	1	3
5	Toluca	1	1	0	0	1	0	1	3
6	Cruz Azul	1	0	1	0	2	2	0	1
7	Guadalajara	1	0	1	0	2	2	0	1
8	Morelia	1	0	1	0	2	2	0	1
9	Veracruz	1	0	1	0	2	2	0	1
10	Pachuca	1	0	1	0	1	1	0	1

11	Tijuana	1	0	1	0	1	1	0	1
12	América	1	0	1	0	0	0	0	1
13	Puebla	1	0	1	0	0	0	0	1
14	Dorados	1	0	0	1	0	1	-1	0
15	Tigres	1	0	0	1	0	1	-1	0
16	Pumas	1	0	0	1	0	1	-1	0
17	Querétaro	1	0	0	1	1	3	-2	0
18	Santos	1	0	0	1	0	2	-2	0

GF= Goles a favor
GC= Goles en contra
DG= Diferencia de goles

$\boldsymbol{DG = GF - GC}$

Veamos al equipo de Querétaro, tiene 1 gol a favor y 3 goles en contra por lo tanto su diferencia de goles es negativa:

$\boldsymbol{DG = 1 - 3}$
$\underline{\boldsymbol{DG = -2}}$

ANEXO B. FACTORIZACIÓN Y ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

La idea de porque usar factorización es que en algunos problemas la estrategia es factorizar el entero que nos dan como dato:

Ejemplo 1:

Los números 226 y 318 tienen la propiedad que el producto de sus cifras es 24. ¿Cuántos números de tres dígitos tiene esa propiedad?

Ejemplo 2:

Una pareja tiene 3 hijos, el producto de sus edades es 1664, el menor de ellos tiene la mitad del mayor ¿Cuál es la suma de las edades de los 3 hijos?

Factorizar $1664 = 16 * 13 * 8 = 13 * 2^7 = 13 * 2^4 * 2^3$

Por lo tanto <u>**la suma de las edades es de 37**</u>

El alumno debe estar consciente de que hay una diferencia importante entre los problemas aditivos y los multiplicativos, no solo se trata de la operación, sino que es común que los problemas multiplicativos conduzcan primero a un sistema de ecuaciones y luego a una ecuación de segundo grado.

PROBLEMA DE LAS VACACIONES

(Solución alumna de licenciatura, Regina Zapata Páez, otoño 2015)

Ana se fue de vacaciones y se gastó 4200 dólares. Al regreso de su viaje se dio cuenta de que si hubiera gastado 70 dólares menos por día hubiera podido quedarse 5 días más. ¿Cuántos días estuvo de viaje?

Solución:

1 día → 280
15 días → 4200 (Nota: los encuentra por ensayo y error y después comprueba)

Si hubiera gastado 70 dólares menos por día, entonces hubiera gastado $280 - 70 = 210$ dólares diarios, por los 15 días que estuvo, hubiese gastado $210 * 15 = 3150$ dólares.
De esta forma sobran 1050 dólares y dividiéndolos entre el gasto diario de 210 dólares es: $\frac{1050}{210} = 5$

Por lo tanto **<u>Ana estuvo de viaje 15 días.</u>**

Resolviéndolo Algebraicamente:

Sea:

$G = \ Gasto\ en\ dólares\ por\ día$
$N = \ Número\ de\ días.$

Del enunciado tenemos dos ecuaciones:

$G * N = 4200$ … Ecuación 1
$(G - 70)(N + 5) = 4200$ … Ecuación 2

Una forma de resolverlo es:

Factorizando 4200 y encontramos que el número de días que estuvo de vacaciones fueron 15 días y el gasto en dólares por día es de 280.

Otra forma es algebraicamente:

De la ecuación 1 despejamos G y obtenemos:

$$G = \frac{4200}{N}$$

$$\left(\frac{4200}{N} - 70\right)(N + 5) = 4200$$

$$\frac{4200N + 21000 - 70N^2 - 350N}{N} = 4200$$

$4200N + 21000 - 70N^2 - 350N = 4200N$

$70N^2 + 350N - 21000 = 0$

$N = 15$

Por lo tanto **<u>Ana estuvo de viaje 15 días.</u>**

Esto nos lleva a los problemas multiplicativos con vía de acceso a los problemas que conducen a una ecuación de segundo grado. Es importante mostrar que se trata de otro tipo de problemas, diferente al problema de los abuelos.

La solución aritmética es buena, pero hay que ver a la solución algebraica, como una solución nueva, como material nuevo y vamos justificando que el álgebra sirve. Los chicos comentan ¿entonces para que uso el álgebra? Permite generalizar y resolver problemas que por no “tener datos numéricos a modo” (soluciones enteras) la solución aritmética ya no funciona (soluciones no enteras).

Ejemplo:

Un grupo de amigos deciden organizarse para una fiesta, juntan 700 pesos y van a comprar botellas de jugo. Pero al llegar a la tienda el vendedor les dice que ahora las botellas cuestan 15 pesos más, por lo que compran 6 botellas menos de las que pensaban. ¿Cuánto costaban inicialmente las botellas?

Solución:

Sea:

$P = \ Precio\ de\ las\ botellas$
$N = Número\ de\ botellas$

Del enunciado tenemos dos ecuaciones:

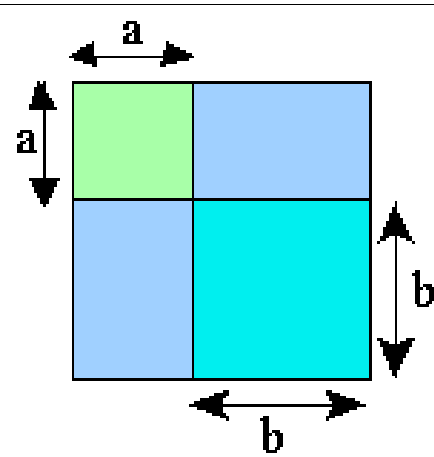
$P * N = 700$ … Ecuación 1
$(P + 15)(N - 6) = 700$ … Ecuación 2

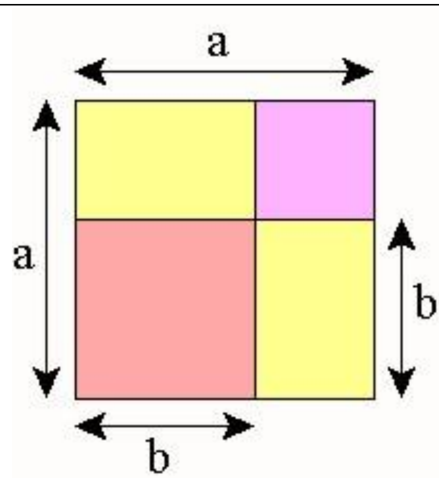
Factorizando 700 encontramos que el precio inicial es de 35 y compraban 20 botellas. Si el precio aumento en 15 ahora cuestan 50 pesos.

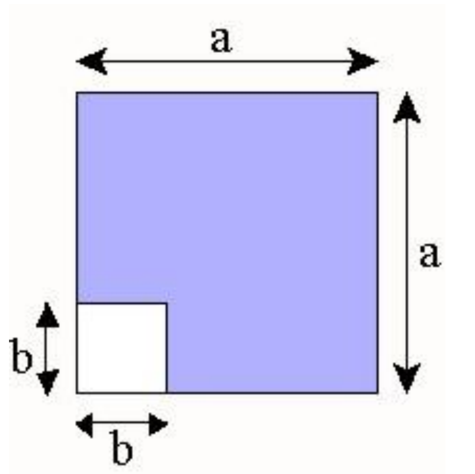
Recordar que uno de los métodos para resolver ecuaciones de segundo grado que se enseña en la escuela es el de FACTORIZACIÓN. En estas condiciones creemos que no es necesario explicar.

PRODUCTOS NOTABLES

También existen problemas basados en áreas, pero afortunadamente los productos notables se pueden explicar con áreas. Obviamente debemos trabajar el modelo de áreas, que también permite ilustrar los productos notables.

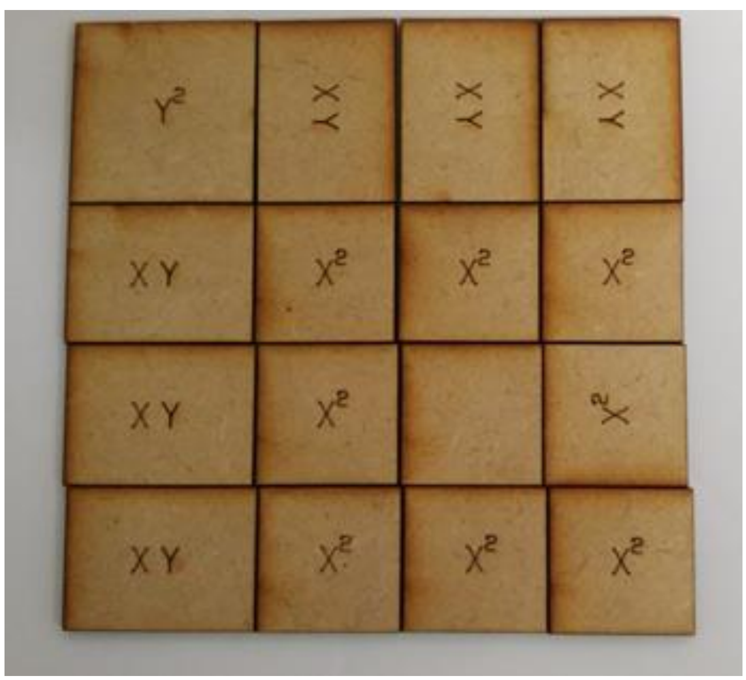
Binomio al cuadrado $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 =$	

Binomio de una diferencia $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 \ =$	

Diferencia de cuadrados $a^2 - b^2 \ =$	

El producto hace que aparezca x^2 y esto debe llevar al alumno a considerar estos problemas diferentes a los que se resuelven con ecuaciones de primer grado.

Se ilustra $(3x + y)^2 = 9x^2 + 6xy + y^2$



Veamos algunos enunciados:

1.- Lupita tiene un grupo de amigos, que para festejar su cumpleaños deciden cooperar para comprar un pastel de 126 dólares. Para reunir esa cantidad cada uno aporto un dólar por cada integrante del grupo y quince dólares más. ¿Cuántos amigos tiene Lupita?

Si hay x amigos, el enunciado dice que cada uno aporta $x + 15$
Así como hay x amigos y cada uno aporta $x + 15$ tenemos $x(x + 15) = 126$
Entonces tenemos la siguiente ecuación de segundo grado: $x^2 + 15x - 126 = 0$
Resolviéndola tenemos $(x - 6)(x + 21) = 0$
Por lo tanto $\underline{\boldsymbol{x = 6}}$

Entonces **lupita tiene 6 amigos**

2.- Un ciclista recorre 280 km/h a cierta velocidad, si la velocidad se hubiese incrementado en 5 km/h el viaje lo podría haber hecho en una hora menos, hallar la velocidad.

3.- Un grupo de turistas rentan una lancha para dar un paseo por 2400 pesos. Si dos de ellos no quisieron subirse, esto hizo que cada uno de los demás tuviera que pagar 100 pesos más ¿Cuántos turistas había en el grupo?

4.- Una persona compró cierto número de libros por 180 pesos. Si hubiera comprado 6 libros menos por el mismo dinero, cada libro le habría costado u peso más. ¿Cuántos libros compró y cuanto le costó cado uno?

5.- Un tren ha recorrido 200 km en cierto tiempo. Si el maquinista quiere hacer el mismo viaje de regreso y quiere ahorrar una hora de viaje, debe de aumentar la velocidad en 10 km/h más. Hallar la velocidad inicial.

Solución:

$v * t = d$ (misma distancia) hay dos incógnitas "d" y "t"

$v * t = 200$ ….. Ecuación 1
$(v + 10)(t - 1) = 200$…. Ecuación 2

Son problemas parecidos a los resueltos anteriormente.

Problemas de velocidad (d = v*t)

Debemos tener experiencia (enunciados, modelo situacional)

1.- Un tren va a una velocidad de 60 km por hora, le toma 3 segundos entrar en un túnel y 30 segundos atravesar por completo el túnel ¿Cuál es la longitud del tren? ¿Cuál es la longitud del túnel?

2.- Un tren cruza un puente de 450 m en 45 segundos y pasa un poste de telégrafos en 15 segundos ¿cuál es la longitud del tren y cuál es su velocidad?

3.- Un tren sale de Veracruz hacia México con una velocidad de 80 Km/h a la misma hora sale otro tren de Veracruz a México con una velocidad de 60 km/h ¿Cuándo los dos trenes se encuentren? ¿Cuál de ellos estará más cerca de México?

4.- Dos trenes viajan en sentidos opuestos, uno a 70 Km/h y el otro a 90 km/h. Un pasajero sentado en el tren más rápido se da cuenta que el otro tren tarda en pasar 3 segundos en pasar frente a él. ¿Qué longitud tiene el más pequeño?

5.- Pepito ve a su novia a 50 metros, camina a su encuentro a 1.5 m/s su novia hacia Pepito a 1 m/s ¿A qué distancia se encuentran?

6.- Un tren de 1000 m de longitud viaja a 60 km/h, un auto viaja a 80 km/h ¿Qué distancia recorre el automóvil para pasar a al tren?
a) si se mueven en el mismo sentido.
b) si mueven en sentido contrario. La vía y la carretera son paralelas.

ANEXO C. PROBLEMAS

El profesor debe de elegir con mucho cuidado los problemas que pondrá a los estudiantes ya que no se puede iniciar, a enseñar un tema sino se tienen enunciados interesantes o sencillos para los niños, a veces hay muchos enunciados muy enredados que no ayudan al planteamiento o entendimiento de los estudiantes y hace más complicado lo que ya es difícil para ellos.

1.- Juan tiene que llegar a una cita a la 10 horas en Tepeaca, él vive a 60 km de distancia, suponiendo que viaja a una velocidad de 80 Km/h, y llega 20 minutos tarde a su cita ¿A qué hora salió de su casa?

2.- El lunes José perdió 40 canicas jugando con sus amigos, el martes gano 125, el miércoles gano el doble de lo que tenía el martes, el jueves después de perder la mitad de lo que tenía le quedaron 465 canicas ¿Cuantas tenía antes de empezar a jugar el lunes? Sugerencia para resolverlo es (trabajando hacia atrás).

3.- Me falta 1 euro para comprar mi revista de informática preferida. Si tuviera el doble de lo que tengo ahora, me sobrarían 2 euros ¿Cuánto tengo? ¿Cuánto cuesta la revista? Sugerencia (Método Singapur).

4.- Se tiene un triángulo equilátero de lado 10, se quiere dividir en dos partes iguales, mediante un corte paralelo a uno de los lados, ¿cuál es la longitud del corte?

Podemos enseñar a resolver ciertos problemas de ecuaciones de segundo grado, sin necesidad de usar la fórmula general, ¿Cómo? Por ejemplo:

Como los siguientes enunciados:

Si multiplicamos la edad de un niño por la edad que tendrá dentro de 7 años obtenemos 294 ¿Cuántos años tiene el niño?

Para resolverlo tenemos:
$x = la\ edad\ del\ niño$

Entonces se escribe de la siguiente forma: $(x + 7)x = 294$

La idea es resolverlo fácilmente teniendo en cuenta que la solución es un número entero.

Proponga otro problema más fácil:

$(x + 7)x = 170$

Factorizamos $170 = 10 * 17$

Así el primer problema requiere factorizar 294 después de algunos ensayos tenemos $14 * 21 = 294$

Como hablamos de números enteros, se puede ilustrar geométricamente (con un rectángulo) $(x + 4)(x + 3) = 110$
Como $11 * 10 = 110$ entonces $\boldsymbol{x = 7}$

Los siguientes problemas que los alumnos lo resuelvan como puedan:

1.- Se compra un pastel de 40 cm de diámetro, para repartir se hace un corte en forma circular, ¿cuál debe ser el radio para que los dos partes tengan áreas iguales?

2.- ¿Cuánto debe medir el diámetro de una pizza para que tenga la misma área que dos pizzas de 30 cm de diámetro? ¿Se utiliza mayor cantidad de pasta para una pizza de 45 cm de diámetro o para 2 de 30?

3.- Hay un grupo 180 de alumnos que se prepara para el cinco de mayo, si el número de alumnos de cada fila es 8 unidades mayor que el número de filas ¿cuántas filas y cuántos alumnos tiene cada fila?

4.- De un libro hindú del siglo XI: la cuarta parte de un hato de camellos fue vista en un oasis, el doble de la raíz cuadrada de los camellos del hato estaba en las laderas de la montaña y 15 camellos descansaban a la orilla del río ¿Cuántos camellos hay en el hato?

5.- Uno de los lados de un terreno rectangular mide 12 metros. Si el otro lado se reduce en 4 metros, la diagonal del lote se reduce en 2 metros, calcula el área y el perímetro del terreno inicial

6.- Se quiere cercar un terreno rectangular de 10 000 m^2 que colinda con un río, por lo que este lado no necesita cerca. ¿Cuánto mide el terreno si para cercar 3 lados son necesarios 300 de tela de alambre?

CONCLUSIÓN

El álgebra es importante porque ayuda al pensamiento abstracto y no debe de verse como un muro o impedimento que detenga el avance y el aprendizaje de los estudiantes. La incógnita “x” asusta a los niños mexicanos ya que realmente no saben qué hacer con las letras o literales, lo que provoca que ni resuelvan ecuaciones (despeje), ni que sean hábiles en la resolución de problemas, lo común en todo esto es el **“error”.** Por este motivo llega la desmotivación y el desinterés en los estudiantes. Por eso creemos firmemente que la propuesta que se da es recomendable y productiva ya que se deja una muy buena base en los estudiantes, se le da la suficiente importancia al tema de la igualdad que es lo primordial para llegar a las ecuaciones de primer grado seguido por la resolución de problemas y sistemas de ecuaciones, con esto comprendido podemos continuar con las ecuaciones de segundo grado y seguir avanzando de manera firme en el programa.

El uso de métodos informales (personales) por parte de los estudiantes en la secundaria, les permite resolver problemas sin tener que preocuparse por usar algebra, alumnos universitarios todavía usan soluciones aritméticas.

Como vimos las situaciones problemáticas recreativas (problema de los gatos y piñas) despiertan el interés de los alumnos y encuentran diferentes formas de resolverlos, posteriormente el docente los conduce al método que quiere enseñar, por ello el aprendizaje del álgebra es menos traumático.

El método Singapur que se utiliza ayuda mucho a los estudiantes a generar sus propias ideas para dar solución a los problemas y facilita el entendimiento, ya que entendieron y ellos mismos lo resolvieron con sus propios dibujos, se les va llevando poco a poco hacia el álgebra. Aunque sabemos que el método tiene algunas limitantes, ya que no todos los problemas se pueden resolver de esta forma, pero lo vemos como una gran oportunidad para que los estudiantes se desestresen y trabajen con más entusiasmo.

Finalmente creemos que el enfoque más acertado es partir de los conocimientos previos de los niños, no de lo que deberían de saber sino lo que hacen al resolver el problema. Por eso **rescatamos las soluciones aritméticas** tanto de los niños como la de los jóvenes ya que con esto manifiestan el entendimiento del problema.

Se sugiere adelantar la introducción del álgebra o dedicarle más tiempo, como una generalización de la aritmética, poniendo énfasis en actividades que provoquen el desarrollo de interpretaciones procedimentales; así evitaremos saltos, rupturas o cortes didácticos entre el álgebra y la aritmética. Se sabe que los niños de primero de secundaria tienen mejor rendimiento en México.

En la Escuela Secundaria Técnica No.1 donde se implementaron varias actividades propuestas mostraron buena disposición, hay pocos alumnos renuentes a trabajar. Se puede ver que los resultados son positivos aunque son grupos numerosos, que es lo normal en escuelas mexicanas. En términos generales son buenos y está es la base para pasar al método formal y lograr los aprendizajes esperados que marca el programa oficial.

Teniendo el control de número de clases dedicadas y exámenes aplicados se puede obtener una mejor evaluación del método propuesto.

BIBLIOGRAFÍA

Arcavi, A. (1994). "*Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics*". *For the Learning of Mathematics*. 14(3), pp. 24-35.

Beckmann, S. (2004). "*Solving algebra and other story problems with simple diagrams: a Method demonstrated in grade 4 – 6 texts used in Singapore*" The mathematics Educator (Vol. 14, No. 1, 42-46).

Booth, L.R. (1984). *Algebra: Children Strategies and Errors*. Windsor, Inglaterra. NFER-Nelson.

Carraher, T. Carraher, D. Schliemann, A. (2004) "*En la vida diez, en la escuela cero*". México: Siglo XXI Editores.

Chamorro, M. C. (2003) "Didáctica de las matemáticas para primaria" Madrid, España: Pearson Educación.

Falkner, Karen P., Levi, Linda., y Carpenter, Thomas P. (1999) *Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. Teaching Children Mathematics*, (Vol. 6, pp. 232-236).

Hirsch, L. Goodman A (2006) "*Understanding Elementary Algebra with Geometry"* Canada: Thomson.

Katz, Victor (2007) "Algebra gateway to a technological future." The Mathematical Association of America.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan (this chapter has been translated into Spanish, French, and Japanese). Traducción resumida hecha por Vilma María Mesa 4/19/95. Páginas 1-24. Universidad de los Andes.

Kieran, C., y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del algebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las Ciencias, 7(3), pp 229-240.

Nunes, T. Bryant, P. (1997) *"Las Matemáticas y su aplicación. La perspectiva del niño".* Pág. 272 – 275. México: Siglo XXI Editores.

Piaget, J. (1977). “*Lógica y psicología*” Argentina: Solphin. Versión original. (1953) “*Logic and psychology*”. New York. Manchester University Press.

Secretaria de Educación Pública. (2011) Programas de estudio 2011 guía para el maestro. Educación básica. Secundaria. Matemáticas. Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.

Van Amerom, B.A. (2002). *Reinvention of Early Algebra. Developmental research on the transition from arithmetic to algebra.* Centre for science and mathematics education. *Cap. 2 Learning and teaching of school algebra* pp 3-32.

Van Amerom, B.A. (2003). *Focusing on Informal Strategies When Linking Arithmetic to Early Algebra.* Educational Studies in Mathematics, Vol. 54, No. 1, Realistic Mathematics Education. pp. 63-75 Published by: Springer.

Van Reeuwijk, M. (2001). *“From informal to formal, progressive formalization an example on "solving systems of equations.*” in H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.) Proceedings of the 12th international commission on mathematical instruction (ICMI) study conference “The Future of the Teaching and Learning of Algebra”. Vol. 2 Melbourne: University of Melbourne, pp 613-620. Recuperado Agosto de 2015. http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/4465.pdf