Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN MATEMÁTICAS.

UNA INTRODUCCIÓN A FIBRACIONES Y CORREFLEXIONES EN TOPOLOGÍA.

TESIS
PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS.

PRESENTA
JESÚS GONZÁLEZ SANDOVAL

DIRECTOR DE TESIS
Dr. JUAN ANGOA AMADOR

PUEBLA, PUEBLA. MAYO 2017

Índice general

Introducción

Este trabajo se desarrolló con la intención de dominar los conceptos básicos de la llamada topología categórica, para posteriormente mostrar tal dominio desarrollando la lectura y comprensión de un artículo de investigación.

El primer capítulo de esta tesis, desarrolla los presupuestos topológicos necesarios para tener herramientas suficientes y lograr comprender la estructura de la categoría $\mathfrak{T}op$. Es también, parte importante de este primer capítulo desarrollar los elementos básicos de la teoría de categorías, con la intención de acercarse a la especificidad de la categoría $\mathfrak{T}op$.

En el Capítulo 2 desarrollamos la necesaria teoría de las fibraciones para desarrollar el Capítulo 3. Resaltamos que además, en tal Capítulo 2, presentamos detalladamente la demostración del clásico resultado:

Teorema 2.21. *Toda función continua es la composición de una equivalencia homotópica y una fibración de Hurewicz.*

El espacio del Capítulo 3, es ocupado en desarrollar el artículo *Fibrations and correflections* [7] de Graciela Salicrup y Roberto Vázquez, es aquí en donde se construyen categorías correflexivas usando las funciones llamadas fibraciones, las 0-clases y las 1-clases. Entre los interesantes teoremas desarrollados en el artículo citado, es de resaltar el siguiente.

Teorema 3.13. *Si M es una $1-$clase, entonces $\mathcal{A}(M)$ es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{T}op$.*

En el enunciado anterior, $\mathcal{A}(M)$ es la subcategoría plena de $\mathfrak{T}op$ que tiene por objetos los espacios topológicos A, tales que cada función $f : X \to A$ que pertenece a M es una identificación.

Dada $\mathbb{E}$ una clase de espacios topológicos mediante una propiedad universal, se define una clase de morfismos en $\mathfrak{T}op$, llamada las $\mathbb{E}$-fibraciones. Dada $\mathbb{E}$ una clase en $Ob(\mathfrak{T}op)$, denotamos por $M_{\mathbb{E}}$ la clase de $\mathbb{E}$-fibraciones sobreyectivas. Presentamos el importante resultado:

Corolario 3.14. *Si $M_{\mathbb{E}}$ la clase de $\mathbb{E}-$fibraciones sobreyectivas, entonces $\mathcal{A}_{\mathbb{E}} := \mathcal{A}(M_{\mathbb{E}})$ es una subcategoría correflexiva de Top.*

Para $\mathbb{E}$ la clase de todos los espacios topológicos, una $\mathbb{E}$-fibración es también conocida como una fibración de Hurewicz. Se expone el siguiente resultado en donde se caracteriza a la subcategoría $\mathcal{A}_H = \mathcal{A}(M_{Ob(\mathfrak{Top})})$.

Lema 3.19. *Un espacio topológico X es un objeto de $\mathcal{A}_H$ si y sólo si toda componente conexa por caminos de X es un conjunto abierto de X.*

En la segunda sección del Capítulo 3, ahora los protagonistas son las equivalencias homotópicas, las cuales de definen de la siguiente manera.

Sean X y Y objetos de $\mathfrak{T}op$, Y tiene el mismo tipo de homotopía de X si existen morfismos $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ tales que $gf \cong 1_X$ y $fg \cong 1_Y$. A f se le llama equivalencia homotópica y a g se le llama inversa homotópica de f.

Ahora, las equivalencias homotópicas definen un nuevo tipo de categoría.

Definición 3.30. *Sea A una subcategoría de $\mathcal{T}op$, A es una H-subcategoría si para todo objeto X de A, todo objeto Y de $\mathcal{T}op$ que tiene el mismo tipo de homotopía de X es tambien un objeto de A.*

Presentamos el siguiente resultado, una condición necesaria y suficiente para ser H-subcategoría en terminos de fibraciones.

Teorema 3.32. *Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{T}op$, entonces $\mathcal{A}$ es una H-subcategoría si y sólo si toda $\mathcal{A}$-correflexión es una fibración de Hurewicz.*

Y luego una caracterización, en subcategorías plenas de $\mathfrak{T}op$ que son invariantes bajo mapeos continuos y subcategorías componente, de la envolvente correflexiva en términos de contener al intervalo unitario I.

Defnición 3.35. *Una subcategoría $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{T}op$ es una subcategoría componente si para cada X objeto de $\mathfrak{T}op$ existe un conjunto $\{X_j\}_{j\in J} \subseteq Ob(\mathcal{A})$ tal que:*

1. $X = \coprod_{j\in J} X_j$;
2. *si* $j \neq i$, *entonces* $X_j \cap X_i = \emptyset$;
3. *si A es un objeto de $\mathcal{A}$ y $A \subseteq X$, entonces existe $j \in J$ tal que $A \subseteq X_j$.*

A cada X_j se le llama $\mathcal{A}$-componente de X.

Teorema 3.38. *Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría plena de $\mathcal{T}op$ que es invariante bajo mapeos continuos y subcategoría componente. La subcategoría $\mathcal{A}^*$ ($\mathcal{A}^*$ la envolvente correflexiva de $\mathcal{A}$) es una H-subcategoría correflexiva de $\mathcal{T}op$ si y* *sólo si I es un objeto de $\mathcal{A}$. En este caso, una $\mathcal{A}^*$-correflexión de un espacio X es el mapeo*

$$\eta := \coprod_{j\in J} i_j : \coprod_{j\in J} Xj \to X$$

dado por la familia de inclusiones $\{i_j : X_j \to X\}$, donde $\{X_j\}_{j\in J}$ es el conjunto de $\mathcal{A}$-componentes de X.

De aquí se pasa a nuevas subcategorías.

Definición 3.33. *Sea $\mathcal{M}_{HB}$ la clase de fibraciones de Hurewicz biyectivas, definiremos $\mathcal{A}_{HB} := \mathcal{A}(\mathcal{M}_{HB})$. Denotaremos por $\mathcal{A}_P$ a la envolvente correflexiva de la categoría de los espacios conexos por caminos, y denotaremos por $\mathcal{A}_C$ a la envolvente correflexiva de la categoría de los espacios conexos.*

Se expone el siguiente teorema.

Teorema 3.39. *Las subcategorías $\mathcal{A}_P$ y $\mathcal{A}_C$ son H-subcategorías correflexivas de $\mathcal{T}op$, además $\mathcal{A}_P$ es la mínima H-subcategoría correflexiva que es envolvente de una subcategoría que cumple con las hipótesis del* **Teorema 3.38** *y tiene al espacio I en su clase de objetos.*

Finalizamos el trabajo, abarcando más conceptos y resultados del artículo citado.

Definición 3.41.*Sean X e Y dos objetos de $\mathfrak{Top}$. Por $X\pi Y$ denotamos que los únicos mapeos de X a Y son funciones constantes. Dado un espacio topológico Y, definimos $\mathcal{A}^-(Y)$ como la subcategoría plena de $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos están definidos por*

$$Ob(\mathcal{A}^-(Y)) := \{X \in \mathcal{T}op : X\pi Y\}.$$

Definición 3.40. *Sea Y un espacio topológico, Y es un H-generador en $\mathfrak{Top}$ si:*

1. Y tiene más de un punto;

2. Y es conexo;

3. Y es totalmente inconexo por trayectorias, esto es, cada componente por caminos de Y consta de un solo punto;

4. Y es T_1.

Y finalmente el resultado:

Teorema 3.43. *Si Y es un H-generador en $\mathfrak{Top}$, entonces $\mathcal{A}(Y)$, la envolvente correflexiva de $\mathcal{A}\breve{}(Y)$, es H-correflexiva en $\mathfrak{Top}$, además $\mathcal{A}_P \subseteq \mathcal{A}(Y) \subseteq \mathcal{A}_C$ y $\mathcal{A}_P \neq \mathcal{A}(Y) \neq \mathcal{A}_C$.*

Sirva este trabajo como un reconocimiento a la labor de investigación de los autores del citado artículo, que iniciaron la escuela de topología categórica en México, esperamos haber creado algún interés en estos temas, con lo cual nos damos por servidos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Funciones y topologías especiales

Daremos inicio a esta sección introduciendo algunos conceptos básicos de la topología que nos serán útiles.

Definición 1.1. *Un* ***pozo de funciones en*** $\mathfrak{set}$ *es una clase de funciones* $\mathfrak{L} = \{f_j : Y_j \to X\}_{j\in J}$*, donde* X *y* Y_j *son conjuntos.*

Lema 1.2. *Si* $\mathfrak{L} = \{f_j : Y_j \to X\}_{j\in J}$ *es un pozo de funciones en* $\mathfrak{set}$ *y* $\{\sigma_j\}_{j\in J}$ *es una familia tal que* (Y_j, σ_j) *es un espacio topológico para cada* $j \in J$*, entonces*

$$\sigma = \left\{W \subseteq X \mid \forall j \in J,\ f_j^{-1}(W) \in \sigma_j\right\}$$

es una topología en X*. A* σ *se le llama topología final de* X *respecto a* $\mathfrak{L}$ *y* $\{\sigma_j\}_{j\in J}$*.*

Para una función $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ entre espacios topológicos diremos que σ es final respecto a f y τ si es final respecto al pozo $\{f : X \to Y\}$ y $\{\tau\}$. Lo anterior se resumirá diciendo que σ es final respecto a (τ, f).

Definición 1.3. *Un pozo de funciones en* $\mathfrak{set}$*,* $\mathfrak{L} = \{f_j : Y_j \to X\}_{i\in J}$ *es un* ***epipozo*** *si, para cualesquiera dos funciones* $g, h : X \to Z$ *tales que:*

$$\forall j \in J,\ h \circ f_j = g \circ f_j$$

se tiene que $g = h$*.*

Las demostraciones del Teorema 1.4 y Proposición 1.7 pueden verse en [8] (Teorema 2 y Proposición 7 de la sección 5 respectivamente).

Teorema 1.4. *Si $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es una función entre espacios topológicos entonces son equivalentes:*

a) σ es final respecto a (τ, f).

b) $C \subseteq Y$ es cerrado en (Y, σ) si y sólo si $f^{-1}(C)$ es cerrado en (X, τ).

c) f es continua y, si $g : (Y, \sigma) \to (Z, \varsigma)$ es tal que $g \circ f$ es continua, entonces g es continua.

d) f es continua y, si conmuta el siguiente diagrama de funciones continuas con h biyectiva,

$$\begin{tikzcd} (X,\tau) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & (Y,\sigma) \\ & (Z,\varsigma) \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

entonces h es homeomorfismo.

Definición 1.5. *Una función suprayectiva $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es una* ***identificación*** *si σ es la topología final de Y respecto a (τ, f).*

Proposición 1.6. *Si $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ y $g : (Z, \rho) \to (X, \tau)$ son identificaciones, entonces $f \circ g : (Z, \rho) \to (Y, \sigma)$ es identificación.*

Demostración. Tenemos que $f \circ g$ es sobreyectiva pues f y g lo son. Sea $h : (Y, \sigma) \to (Z, \varsigma)$ una función tal que $f \circ g \circ h$ es continua, tenemos que $g \circ h$ es continua y así h es continua, esto por la parte (c) del Teorema 1.4, de donde σ es final respecto a $(\rho, f \circ g)$.

□

Proposición 1.7. *Si $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ es continua, suprayectiva y abierta (o cerrada), entonces f es identificación.*

Lema 1.8. *Si $p : (X, \tau_X) \to (Z, \tau_Z)$ es una identificación y $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ es una función continua tal que para toda $x, x' \in X$ si $p(x) = p(x')$, entonces $f(x) = f(x')$. Entonces existe una única función continua $g : (Z, \tau_Z) \to (Y, \tau_Y)$ tal que $g \circ p = f$.*

Demostración. Sea $z \in Z$ tenemos que para cada $x, x' \in p^{-1}(z)$ como $p(x) = p(x')$ tenemos que $f(x) = f(x')$, sea $g : (Z, \tau_Z) \to (Y, \tau_Y)$ definida para cada $z \in Z$ por $g(z) = f(x)$, donde $x \in p^{-1}(z)$. Se tiene que g es función. Por definición de g tenemos que $g \circ p = f$, además si $h : (Z, \tau_Z) \to (Y, \tau_Y)$ es una función continua tal que $h \circ p = f$, tenemos que $h \circ p = g \circ p$ y como p es sobreyectiva entonces $h = p$. Finalmente como p es identificación, tenemos que τ_Z es la topología final de Z con respecto a (τ_X, p), de donde g es continua pues $g \circ p = f$ es continua.

$\square$

Corolario 1.9. *Supongamos que $p : (X, \tau_X) \to (Z, \tau_Z)$ y $q : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ son identificaciones tales que si $p(x) = p(x')$, para $x, x' \in X$, entonces $q(x) = q(x')$. Entonces existe un homeomorfismo $h : (Z, \tau_Z) \to (Y, \tau_Y)$ tal que $q = h \circ p$.*

Demostración. Por el Lema 1.8 tenemos que existen únicas $h : (Z, \tau_Z) \to (Y, \tau_Y)$ y $h' : (Y, \tau_Y) \to (Z, \tau_Z)$ funciones continuas tales que $q = h \circ p$ y $p = h' \circ q$, además por la definición de estas funciones en la demostración del Lema 1.8 tenemos que $h \circ h' = 1_Y$ y $h' \circ h = 1_Z$ de donde $h^{-1} = h'$ es continua y por tanto h es un homeomorfismo tal que $q = h \circ p$. Si $g : (Z, \tau_Z) \to (Y, \tau_Y)$ es un homeomorfismo tal que $q = g \circ p$, entonces por el Lema 1.8 tenemos que $h = g$.

$\square$

Definición 1.10. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en X, llamaremos* ***cociente*** *a la función continua $p : (X, \tau) \to (X/\sim, \sigma)$ tal que $p(x) = [x]_\sim$ para cada $x \in X$ y σ es la topología final respecto a (τ, p). Así mismo llamaremos a $(X/\sim, \sigma)$* ***espacio cociente****.*

Corolario 1.11. *Toda identificación es la composición de un cociente y un homeomorfismo.*

Demostración. Sea $p : (X, \tau_X) \to (Z, \tau_Z)$ una identificación, sea $\sim$ la relación de equivalencia en X definida por $x \sim x'$ si y sólo si $p(x) = p(x')$, para cada $x, x' \in X$ y consideremos el cociente $\varphi : (X, \tau) \to (X/\sim, \tau_\vartheta)$ donde ϑ es la partición de X mediante la relación de equivalencia $\sim$, entonces por el Corolario 1.9 tenemos que existe $h : (X/\sim, \tau_\vartheta) \to (Z, \tau_Z)$ homeomorfismo tal que $p = h \circ \varphi$.

$\square$

Lema 1.12. *Toda función continua y sobreyectiva es composición de un cociente con una función biyectiva y continua.*

Demostración. Sea $p : (X, \tau_X) \to (Z, \tau_Z)$ una función continua y suprayectiva. Sea $\sim$ la relación de equivalencia en X definida por $x \sim x'$ si y sólo si $p(x) = p(x')$, para cada $x, x' \in X$ y consideremos el cociente $\varphi : (X, \tau) \to (X/\sim, \tau_\vartheta)$ donde ϑ es la partición de X mediante la relación de equivalencia $\sim$. Sea $h : (X/\sim, \tau_\vartheta) \to (Z, \tau_Z)$ definida por $h([x]) = p(x)$ tenemos que h es función pues si $[x] = [x']$, entonces $p(x) = p(x')$; es claro que $p = h \circ \varphi$. Veamos que h es continua, sea U un abierto en Z, tenemos que $\varphi^{-1}(h^{-1}(U)) = (h \circ \varphi)^{-1}(U) = p^{-1}(U)$ es abierto en X, como τ_ϑ es la topología final con respecto de φ y τ_X tenemos que $h^{-1}(U)$ es abierto en $X/\sim$, además como p es suprayectiva para cada $z \in Z$, existe $x \in X$ tal que $p(x) = z$, de donde $h([x]) = p(x) = z$, esto es h es sobreyectiva. Finalmente si $[x] \neq [x']$ tenemos que $h([x]) = p(x) \neq p(x') = h([x'])$, de donde h es también inyectiva.

□

Definición 1.13. *Una función continua $r : X \to Y$ se llama **retracción** si existe $s : Y \to X$ función continua tal que $r \circ s = 1_Y$.*

Proposición 1.14. *Sea $r : X \to Y$ una retracción, entonces r es una identificación.*

Demostración. Ya que r es retracción tenemos que existe $s : Y \to X$ continua tal que $r \circ s = 1_Y$, así sea $y \in Y$ tenemos que $s(y) \in X$ y $r(s(y)) = y$ de donde r es sobreyectiva. Además, la topología en Y es la topología final respecto a r y la topología de X. Pues sea $g : Y \to Z$ una función con Z un espacio topológico, si $g \circ r$ es continua tenemos que $g = g \circ 1_Y = g \circ r \circ s$ de donde g es continua, por tanto tenemos que la topología de Y es la topología final respecto a r y la topología de X.

□

Proposición 1.15. *Si $r : X \to Y$ es una retracción inyectiva, entonces r es un homeomorfismo.*

Demostración. Tenemos que $r : X \to Y$ es una biyección continua con inversa continua $s : Y \to X$.

□

Proposición 1.16. *Si $r : X \to Y$ es una retracción y $r = g \circ f$, donde $f : X \to Z$ y $g : Z \to Y$ son funciones continuas, entonces g es una retracción.*

Demostración. Ya que r es retracción tenemos que existe $s : Y \to X$ continua tal que $r \circ s = 1_Y$; puesto que $r = g \circ f$, entonces

$$1_Y = r \circ s = g \circ f \circ s$$

es decir, $f \circ s$ es un inverso derecho continuo de la función g.

□

Definición 1.17. *a) Sea $\{X_j\}_{j \in J}$ una familia de conjuntos, la* ***unión ajena*** *de $\{X_j\}_{j \in J}$ está dada por*

$$\coprod X_j = \bigcup_{j \in J} (X_j \times \{j\}).$$

Para cada $j \in J$ la función $i_j : X_j \to \coprod X_j$, definida por $i_j(x) = (x, j)$ para cada $x \in X_j$, se llama inclusión de X_j en $\coprod X_j$.

b) Si $\{(X_j, \tau_j)\}_{j \in J}$ es una familia de espacios topológicos, $(\coprod X_j, \tau)$ es el ***coproducto*** *de $\{X_j\}_{j \in J}$ donde τ es la topología final de $\coprod X_j$ respecto a $\mathfrak{L} = \{i_j : (X_j, \tau_j) \to \coprod X_j\}_{j \in J}$.*

Es claro que para cada $j \in J$, i_j es una función inyectiva.

La demostración del resultado siguiente puede verse en [8,Teorema 11, Pág. 69].

Teorema 1.18. *Si $(\coprod X_j, \tau)$ es el coproducto de $\{(X_j, \sigma_j)\}_{j \in J}$ con inclusiones $i_j : (X_j, \sigma_j) \to (\coprod X_j, \tau)$, entonces se satisfacen:*

I. $\{i_j\}_{j \in J}$ es epipozo.

II. Para toda $j \in J$, i_j es encaje abierto y cerrado.

III. Si $\{f_j : (X_j, \sigma_j) \to (Y, \sigma)\}$ es un pozo de funciones continuas entonces existe una única función continua $f : (\coprod X_j, \tau) \to (Y, \sigma)$ tal que, para toda $j \in J$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
(X_j, \sigma_j) \arrow[rr, "f_j"'] \arrow[dr, "i_j"'] & & (Y, \sigma) \\
& (\coprod X_j, \tau) \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Además se tiene que $f(x, j) = f_j(x)$, para cada $x \in \coprod X_j$.

Corolario 1.19. *Si $\{f_j : (X_j, \tau_j) \to (Y_j, \sigma_j)\}_{j\in J}$ es una familia de funciones continuas, existe la* ***función coproducto*** *de $\{f_j\}_{j\in J}$, que denotaremos por $\coprod_{j\in J} f_j$, que es la única función continua que para cada $j \in J$ hace conmutativo el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(X_j, \tau_j) \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "i_j"'] & (Y_j, \sigma_j) \arrow[d, "k_j"] \\
(\coprod X_j, \tau) \arrow[r, "\coprod_{j\in A} f_j"'] & (\coprod Y_j, \sigma)
\end{tikzcd}$$

donde k_j es la inclusión de Y_j en $\coprod Y_j$.

Definición 1.20. *Una familia de funciones $\{f_j : X \to Y_j\}_{j\in A}$ es una* ***fuente de funciones****.*

Definición 1.21. *Una fuente de funciones $\{f_j : X \to Y_j\}_{j\in J}$ es una* ***monofuente*** *si, para cualesquiera dos funciones $g, h : Z \to X$ tales que:*

$$\forall j \in J, f_j \circ g = f_j \circ h$$

se tiene que $g = h$.

Lema 1.22. *Si $\mathfrak{L} = \{f_j : X \to Y_j\}_{j\in J}$ es una fuente de funciones y $\{\tau_j\}_{j\in A}$ es una familia tal que (Y_j, τ_j) es un espacio topológico para cada $j \in J$, entonces existe la mínima topología σ en X que para cada $j \in J$, la función $f_j : (X, \sigma) \to (Y_j, \tau_{Y_i})$ es continua. A σ se le llama topología inicial de X respecto a $\mathcal{L}$ y $\{\tau_j\}_{j\in A}$.*

Para $f : (X, \sigma) \to (Y.\tau)$ una función entre espacios topológicos, diremos que σ es inicial respecto a f y σ si es inicial respecto a la fuente $\{f : X \to Y\}$ y $\{\tau\}$. Para resumir lo anterior diremos que σ es inicial respecto a (τ, f).

Definición 1.23. *Una fuente de funciones $\{f_j : (X_j, \tau_j) \to (Y_j, \sigma_j)\}_{j\in A}$ es* ***monofuente*** *si para cualesquiera dos funciones $\sigma_1, \sigma_2 : Z \to X$ tales que $f_j\sigma_1 = f_j\sigma_2$ para cada $j \in A$ se tiene que $\sigma_1 = \sigma_2$.*

Definición 1.24. *Sea $\{X_j\}_{j\in J}$ un familia de conjuntos. El* ***producto cartesiano*** *de $\{X_j\}_{j\in J}$ está dado por*

$$\prod_{j\in J} X_J = \left\{ x : J \to \bigcup_{j\in J} X_j \mid \forall j \in J, x(j) \in X_j \right\}.$$

Para cada $j \in J$ la función $\Pi_j : \prod_{j\in J} X_j \to X_j$ tal que $\Pi_j(x) = x(j)$, se llama la j-ésima proyección del producto $\{X_j\}_{j\in J}$.

Definición 1.25. *Sea $\{(X_j, \tau_j)\}_{j\in J}$ una familia de espacios topológicos, consideremos la fuente de funciones $\mathfrak{L} = \left\{\Pi_j : \prod_{j\in J} X_j \to X_j\right\}_{j\in J}$ y sea τ la topología inicial de $\prod_{j\in J} X_j$ respecto a $\mathfrak{L}$ y $\{\tau_j\}_{j\in J}$. El espacio topológico $(\prod_{j\in J} X_j, \tau)$ es el **producto topológico de** $\{(X_j, \tau_j)\}_{j\in J}$.*

La demostración del siguiente Teorema puede verse en [8, Teorema 15, Pág. 51].

Teorema 1.26. *Sea $(\prod_{j\in J} X_j, \tau)$ el producto topológico de la familia de espacios topológicos $\{(X_j, \tau_j)\}_{j\in J}$. Entonces*

I. La fuente de funciones $\left\{\Pi_j : \prod_{j\in J} X_j \to X_j\right\}_{j\in J}$ es monofuente.

II. Para toda $j \in J$, Π_j es abierta.

III. Si $\{f_j : (Y, \rho) \to (X_j, \tau_j)\}_{j\in J}$ es una fuente de funciones continuas entonces existe una única función continua $f : (Y, \rho) \to (\prod_{j\in J} X_j, \tau)$ tal que, para toda $j \in J$, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(Y,\rho) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_j"'] & & (\prod_{j\in J} X_j, \tau) \arrow[dl, "\Pi_j"] \\
& (X_j, \tau_j) &
\end{tikzcd}$$

Definición 1.27. *Si $\{f_j : (X_j, \tau_j) \to (Y_j, \sigma_j)\}_{j\in J}$ es una familia de funciones continuas, el producto de $\{f_j\}_{j\in J}$ que denotaremos por $\prod_{j\in J} f_j$ es la única función continua que, para todo $j \in J$, hace conmutativo el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
(\prod X_j, \tau) \arrow[r, "\prod_{j\in J} f_j"] \arrow[d, "\Pi_j"'] & (\prod Y_j, \sigma) \arrow[d, "\Pi'_j"] \\
(X_j, \tau_j) \arrow[r, "f_j"'] & (Y_j, \sigma_j)
\end{tikzcd}$$

1.2. Categorías

En la sección anterior se han introducido definiciones y resultados de topología, tales como el producto y coproducto topológico, dichos conceptos y resultados resultan familiares cuando se ponen en paralelo teorías tales como la teoría de conjuntos, la teoría de grupos y la teoría de anillos, por mencionar algunas, donde se definen los productos y coproductos de los conceptos a estudiar, es decir, el producto de conjuntos (grupos, anillos) por un lado y por otro lado la suma directa de conjuntos (grupos, anillos), la cual es el equivalente al coproducto. Al observar el comportamiento de estos conceptos con respecto a las "flechas" entre los objetos de estudio, digamos las funciones continuas en topología, las funciones en la teoría de conjuntos, los homomorfismos de grupos en la teoría de grupos, los homomorfismos de anillos en la teoría de anillos; veremos que los productos y sumas tienen propiedades universales con respecto a estas "flechas" entre los objetos de estudio.

Lo anteriormente expuesto ha sido formalizado al estudiar las estructuras matemáticas mediante la relación entre los objetos de estudio y las "flechas" entre ellos, que es la materia de estudio de la teoría de categorías. Así mismo cuando se formaliza el estudio de las diferentes teorías se puede observar que el producto topológico y el coproducto topológico mantienen una relación de coexistencia. La teoría de categorías define esto como la propiedad de dualidad.

Definición 1.28. *Una **categoría** $\mathcal{A}$ consiste de dos clases O y M, dos funciones dom y cod de M a O y una función $\circ$ de $D = \{(f, g) \mid f, g \in M,\ cod(f) = dom(g)\}$ a M tales que:*

(1) Si $(f, g) \in D$, entonces $dom(g \circ f) = dom(f)$ y $cod(g \circ f) = cod(g)$, donde $g \circ f$ denota a $\circ(f, g)$ y es llamada la composición de f con g.

(2) Si $(f, g), (g, h) \in D$, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(3) Para cada $X \in O$, existe un elemento $e \in M$ tal que $dom(e) = X = cod(e)$, $f \circ e = f$ y $e \circ g = g$, para cualesquiera $f, g \in M$ tales que $dom(f) = X$ y $cod(g) = X$.

(4) Para todo par (X, Y), con $X, Y \in O$, la clase

$$[X, Y] = \{f \mid f \in M,\ dom(f) = X,\ cod(f) = Y\}$$

es un conjunto.

Los elementos de O son llamados objetos de $\mathcal{A}$ o $\mathcal{A}-$objetos y los elementos de M son llamados morfismos de $\mathcal{A}$ o $\mathcal{A}-$morfismos. La clase O es denotada por $Ob(\mathcal{A})$ y la clase M es denotada por $Mor(\mathcal{A})$. Si es necesario usaremos las notaciones $dom_{\mathcal{A}}$, $cod_{\mathcal{A}}$, $\circ_{\mathcal{A}}$, $D_{\mathcal{A}}$ y $[\ ,\ ]_{\mathcal{A}}$. Para un objeto X de $\mathcal{A}$, el morfismo e de (3) está únicamente determinado, es llamado la identidad de X y denotado por 1_X. Para un morfismo f, $dom(f)$ es llamado el dominio de f y $cod(f)$ es llamado el codominio de f. El hecho de que $f \in [X,Y]_A$ es denotado por $f : X \to Y$.

Ejemplo 1.29. *En los siguientes ejemplos de categorías todo morfismo es una función entre conjuntos, así las funciones dom y cod asignan a cada morfismo el conjunto dominio y codominio de dicho morfismo, como función, respectivamente.*

(1) $\mathfrak{set}$ denota la categoría de conjuntos, esto es $Ob(\mathfrak{set})$ es la clase de conjuntos, $Mor(\mathfrak{set})$ es la clase de funciones entre conjuntos.

(2) $\mathfrak{Grp}$ denota la categoría de grupos, esto es $Ob(\mathfrak{Grp})$ es la clase de grupos, $Mor(\mathfrak{Grp})$ es la clase de homomorfismos de grupos.

(3) $\mathcal{A}\mathfrak{b}$ denota la categoría de grupos abelianos, esto es $Ob(\mathcal{A}\mathfrak{b})$ es la clase de grupos abelianos, $Mor(\mathcal{A}\mathfrak{b})$ es la clase de homomorfismos entre grupos abelianos.

(4) $\mathfrak{Top}$ denota la categoría de espacios topológicos, esto es $Ob(\mathfrak{Top})$ es la clase de espacios topológicos, $Mor(\mathfrak{Top})$ es la clase de funciones continuas entre espacios topológicos.

Definición 1.30. *Una categoría $\mathcal{A}$ es una **categoría pequeña** si $Mor(\mathcal{A})$ es un conjunto. $\mathcal{A}$ es **categoría discreta** si todo morfismo de $\mathcal{A}$ es la identidad de un objeto de $\mathcal{A}$.*

Definición 1.31. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías. Se dice que $\mathcal{B}$ es **subcategoría** de $\mathcal{A}$ si:*

(1) $Ob(\mathcal{B})$ es una subclase de $Ob(\mathcal{A})$ con inclusión $i : Ob(\mathcal{B}) \to Ob(\mathcal{A})$.

(2) $Mor(\mathcal{B})$ es una subclase de $Mor(\mathcal{B})$ con inclusión $j : Mor(\mathcal{B}) \to Mor(\mathcal{A})$.

(3) $i \circ dom_{\mathcal{B}} = dom_{\mathcal{A}} \circ j$, $i \circ cod_{\mathcal{B}} = cod_{\mathcal{A}} \circ j$ y $j \circ \circ_{\mathcal{B}} = \circ_{\mathcal{A}} \circ k$, donde $\circ$ representa la composición de funciones y k es una función de $D_{\mathcal{B}}$ a $D_{\mathcal{A}}$ definida por $k(f,g) = (j(f), j(g))$.

(4) Para cada $X \in Ob(\mathcal{B})$, $j(1_X) = 1_{i(X)}$.

*Una subcategoría $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ se dice **plena** si para cualesquiera $X, Y \in Ob(\mathcal{B})$, $j([X,Y]_{\mathcal{B}}) = [X,Y]_{\mathcal{A}}$.*

Definición 1.32. *Un morfismo $f : X \to Y$ de una categoría $\mathcal{A}$ es un* ***isomorfismo*** *en $\mathcal{A}$ si existe un $\mathcal{A}-$morfismo $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$.*

$f : X \to Y$ es una ***sección*** *en $\mathcal{A}$ si existe un $\mathcal{A}$-morfismo $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = 1_X$.*

$f : X \to Y$ es una ***retracción*** *en $\mathcal{A}$ si existe un $\mathcal{A}$-morfismo $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = 1_Y$.*

Si $f : X \to Y$ es un isomorfismo, el morfismo $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$, queda únicamente determinado. Así g es llamado inversa de f y es denotado por f^{-1}. Si f es una retracción y una sección, entonces f es un isomorfismo.

Un objeto X de $\mathcal{A}$ es $\mathcal{A}-$isomorfo con un $\mathcal{A}-$objeto Y si existe un $\mathcal{A}-$isomorfismo $g : Y \to X$, y es denotado por $X \approx Y$. La relación "$\mathcal{A}-$isomorfismo" es una relación de equivalencia sobre $Ob(\mathcal{A})$.

Definición 1.33. *Un morfismo $f : X \to Y$ de $\mathcal{A}$ es un* ***monomorfismo*** *en $\mathcal{A}$ si para cualesquiera dos $\mathcal{A}-$morfismos $u, v : Z \to X$ tales que $f \circ u = f \circ v$ se tiene que $u = v$.*

Un morfismo $f : X \to Y$ de $\mathcal{A}$ es un ***epimorfismo*** *en $\mathcal{A}$ si para cualesquiera dos $\mathcal{A}-$morfismos $u, v : Y \to Z$ tales que $u \circ f = v \circ f$ se tiene que $u = v$.*

Es conocido que:

Proposición 1.34. *Supongamos que $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y $h : X \to Z$ son morfismos en una categoría $\mathcal{A}$ tales que $h = g \circ f$.*

1) Si f y g son monomorfismos en $\mathcal{A}$, entonces h es un monomorfismo en $\mathcal{A}$.

2) Si f y g son epimorfismos en $\mathcal{A}$, entonces h es un epimorfismo en $\mathcal{A}$.

3) Si h es monomorfismo en $\mathcal{A}$, entonces f es un monomorfismo en $\mathcal{A}$.

4) Si h es epimorfismo en $\mathcal{A}$, entonces g es un epimorfismo en $\mathcal{A}$.

Definición 1.35. *Un morfismo en $\mathcal{A}$ es un* ***bimorfismo*** *en $\mathcal{A}$ si es un epimorfismo y un monomorfismo en $\mathcal{A}$.*

En toda categoría, todo isomorfismo es un bimorfismo, pero en general el recíproco no es verdadero. Una categoría se dice balanceada si cada bimorfismo en $\mathcal{A}$ es un isomorfismo en $\mathcal{A}$.

Proposición 1.36. *Para las categorías $\mathfrak{set}$, $\mathfrak{Grp}$ y $\mathcal{A}\mathfrak{b}$ se tiene que:*

(1) Un morfismo $f : X \to Y$ es monomorfismo si y sólo si es inyectivo.

(2) f es un epimorfismo si y sólo si es sobreyectivo.

Proposición 1.37. *En toda subcategoría plena de $\mathfrak{Top}$.*

(1) Un morfismo es un isomorfismo si y sólo si es un homeomorfismo.

(2) Un morfismo es un monomorfismo si y sólo si es inyectivo.

Definición 1.38. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías, $\mathcal{B}$ es la* ***categoría dual o categoría opuesta de*** *$\mathcal{A}$ si:*

1. *$Ob(\mathcal{A}) = Ob(\mathcal{B})$,*
2. *$Mor(\mathcal{A}) = Mor(\mathcal{B})$,*
3. *para la identidad $i : Mor(\mathcal{B}) \to Mor(\mathcal{A})$, se tiene que $dom_{\mathcal{B}} = cod_{\mathcal{A}} \circ i$ y $cod_{\mathcal{B}} = dom_{\mathcal{A}} \circ i$,*
4. *para la función $j : D_{\mathcal{B}} \to D_{\mathcal{A}}$ definida por $j(f, g) = (i(g), i(f))$, se tiene que $i \circ \circ_{\mathcal{B}} = \circ_{\mathcal{A}} \circ j$.*

La categoría dual de $\mathcal{A}$ se le denota por $\mathcal{A}^{op}$.

Sea $\mathcal{A}$ una categoría, denotemos por $i : Mor(\mathcal{A}^{op}) \to Mor(\mathcal{A})$ a la identidad, es sencillo verificar que $f : X \to Y$ es un epimorfismo en $\mathcal{A}^{op}$ si y sólo si $i(f) : Y \to X$ es un monomorfismo en $\mathcal{A}$. De hecho, la definición de epimorfismo puede ser obtenida al invertir todas las flechas en los morfismos de la definición de epimorfismo. En general, para una afirmación S concerniente a objetos y morfismos de $\mathcal{A}$, se puede construir una afirmación S^{op} invirtiendo las flechas en todos los morfismos de la afirmación S. Si una afirmación S define una propiedad P para objetos y morfismos, entonces S^{op} también define una propiedad P^{op} y es llamada propiedad dual de P. La propiedad dual de P es llamada $co - P$, ejemplo epimorfismo como co-monomorfismo. Si una afirmación S es verdadera para toda categoría, entonces S^{op} es verdadera para toda categoría, a este hecho se le llama principio de dualidad para categorías, la demostración del dual de una proposición o un teorema frecuentemente es omitido, pero es usado libremente.

Definición 1.39. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías. Un* ***funtor*** *F de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ es una función F de $Mor(\mathcal{A})$ a $Mor(\mathcal{B})$ que satisface:*

(1) Si $cod_{\mathcal{A}}(f) = dom_{\mathcal{A}}(g)$, entonces $cod_{\mathcal{B}}(F(f)) = dom_{\mathcal{B}}(F(g))$.

(2) $F \circ \circ_{\mathcal{A}} = \circ_{\mathcal{B}} \circ F'$, donde F' es una función de $D_{\mathcal{A}}$ a $D_{\mathcal{B}}$ definida por $F'(f, g) = (F(f), F(g))$.

(3) Si 1_X es la identidad de $X \in Ob(\mathcal{A})$, entonces $F(1_X)$ es la $\mathcal{B}-$identidad de $Y = dom_{\mathcal{B}}(F(1_X))$.

Un funtor de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ es denotado por $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son llamados dominio y codominio de F, respectivamente.

Sea $X \in Ob(\mathcal{A})$, $dom_{\mathcal{B}}(F(1_X))$ es denotado por $F(X)$. Entonces tenemos una función F de $Ob(\mathcal{A})$ a $Ob(\mathcal{B})$. Un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ puede ser definido *como un par de funciones* $F : Mor(\mathcal{A}) \to Mor(\mathcal{B})$ *y* $F : Ob(\mathcal{A}) \to Ob(\mathcal{B})$ *tales que:*

(1) Para $f \in Mor(\mathcal{A})$*, con* $f : X \to Y$*, tenemos que* $F(f) \in Mor(\mathcal{B})$ *y* $F(f) : F(X) \to F(Y)$*.*

(2) Para $f : X \to Y$ *y* $g : Y \to Z$ *elementos de* $Mor(\mathcal{A})$*,* $F(g \circ_{\mathcal{A}} f) = F(g) \circ_{\mathcal{B}} F(f)$ *en* $Mor(\mathcal{B})$*.*

(3) $F(1_X) = 1_{F(X)}$*.*

Para dos funtores $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *y* $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *se define el funtor* $G \circ F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ *por la función* $G \circ F : Mor(\mathcal{A}) \to Mor(\mathcal{C})$*. El funtor* $G \circ F$ *es llamado funtor composición de* F *con* G*.*

Si $\mathcal{B}$ *es una subcategoría de* $\mathcal{A}$*, con la inclusión* $i : Ob(\mathcal{B}) \to Ob(\mathcal{A})$ *y* $j : Mor(\mathcal{B}) \to Mor(\mathcal{A})$*, entonces el funtor* $j : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$*, es llamado funtor inclusión.*

Si $\mathcal{B} = \mathcal{A}$*, el funtor inclusión* $j : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *es llamado funtor identidad y es denotado por* $1_{\mathcal{A}}$*.*

Definición 1.40. *Un funtor* $D : \mathcal{K} \to \mathcal{A}$*, donde* $\mathcal{K}$ *es una categoría pequeña, es llamado* ***diagrama*** D ***en*** $\mathcal{A}$ ***sobre*** $\mathcal{K}$*.*

Definición 1.41. *Sea* $(X, (\alpha_i)_{i \in Ob(\mathcal{K})})$ *un par donde* $X \in Ob(\mathcal{A})$*,* $(\alpha_i)_{i \in Ob(\mathcal{K})} \subset Mor(\mathcal{A})$ *y* $\alpha_i : X \to D(i)$ *para cada* $i \in Ob(\mathcal{K})$*. Se dice que* $(X, (\alpha_i)_{i \in Ob(\mathcal{K})})$ *es una* ***fuente natural para D*** *si para todo* $a \in Mor(\mathcal{K})$ *tal que* $a : i \to j$ *se tiene que* $\alpha_j = D(a) \circ \alpha_i$*.*

Definición 1.42. *Para un diagrama* D *en* $\mathcal{A}$ *sobre* $\mathcal{K}$*, una fuente natural* $(X, (\alpha_i)_{i \in Ob(K)})$ *para* D *es un* ***límite para D*** *si para toda fuente natural* $(Y, (\beta_i)_{i \in Ob(K)})$*, existe un único* $\mathcal{A}$*−morfismo* $\varphi : Y \to X$ *tal que* $\beta_i = \alpha_i \circ \varphi$*.*

Observación 1.43. *Sea* J *un conjunto y* $\{X_j\}_{j \in J}$ *una familia de espacios topológicos, consideremos la categoría discreta* $\mathcal{K}$ *que tiene por clase de objetos a* J*, esto es* $Ob(\mathcal{K}) = J$ *y* $Mor(\mathcal{K}) = \{1_j\}_{j \in J}$*. Definamos el diagrama* D *en* $\mathfrak{Top}$ *sobre* $\mathcal{K}$ *tal que* $D(j) = X_j$ *para cada* $j \in J$*, tenemos que* $(\prod X_j, \{\pi_j\}_{j \in J})$ *es límite para* D*, donde* $\prod X_j$ *es el producto topológico de* $\{X_j\}_{j \in J}$ *y* $\{\pi_j : \prod X_j \to X_j\}_{j \in J}$ *es la fuente de proyecciones. Esto es claro por la parte III del Teorema 1.26.*

1.3. Pullback

Para un par de morfismos con mismo codominio y una categoría pequeña muy específica, definiremos un diagrama y consideraremos un límite para dicho diagrama, a dicho límite se le llama pullback. Esta sección está dedicada a presentar una serie de resultados acerca del comportamiento de los pullbacks en la categoría $\mathfrak{Top}$.

Definición 1.44. *Sea $\mathcal{K}$ una categoría con $Ob(\mathcal{K}) = \{1, 2, 3\}$ y $Mor(\mathcal{K}) = \{1_1, 1_2, 1_3, a : 1 \to 3, b : 2 \to 3\}$. Para un par de morfismos $f : X \to Z$ y $g : Y \to Z$ en $\mathcal{A}$, sea $D : \mathcal{K} \to \mathcal{A}$ un funtor tal que $D(a) = f$ y $D(b) = g$, $D(1_1) = 1_X$, $D(1_2) = 1_Y$, $D(1_3) = 1_Z$. Entonces el límite $(W, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ para D es* ***pullback de f y g (o cuadrado cartesiano)****. Si $\alpha_1 = g'$, $\alpha_2 = f'$ y $\alpha_3 = d$, denotamos el pullback de f y g por (W, g', f', d). Como $d = f \circ g' = g \circ f'$, d es usualmente omitido. En otras palabras (W, g', f') es un pullback de f y g si y sólo si:*

(1) $f \circ g' = g \circ f'$, esto es conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

(2) para cualquier tripleta (V, α, β) tal que $f \circ \alpha = g \circ \beta$, existe un único morfismo $\varphi : V \to W$ tal que $= g' \circ \varphi$ y $\beta = f' \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "g'"] \arrow[dd, "f'"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\ & V \arrow[ul, dashed, "\varphi"] \arrow[ur, "\alpha"'] \arrow[dl, "\beta"] & \\ Y \arrow[rr, "g"'] & & Z \end{tikzcd}$$

Definición 1.45. *Para una categoría $\mathcal{A}$, una $\mathcal{A}-$**fuente** es un par*

$$(X, \{f_j : X \to X_j\}_{j \in J})$$

*donde X es un objeto de $\mathcal{A}$, J es un conjunto y f_j es un morfismo de $\mathcal{A}$ para cada $j \in J$, una $\mathcal{A}-$fuente $(X, \{f_j : X \to X_j\}_{j \in J})$ es una $\mathcal{A}-$**monofuente** si para cualquier par de morfismos de $\mathcal{A}$, $u, v : Z \to X$ tales que $f_j \circ u = f_j \circ v$, se tiene que $u = v$.*

Lema 1.46. *Si $f, g \in Mor(\mathfrak{Top})$ y el siguiente diagrama es un pullback de f y g*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Entonces $(W, \{f', g'\})$ es $\mathfrak{Top}-$monofuente.

Demostración. Es claro que $(W, \{f', g'\})$ es una $\mathfrak{Top}-$fuente.

Sean $u, v : A \to W$ funciones continuas tales que $f' \circ u = f' \circ v$ y $g' \circ u = g' \circ v$ tenemos que el siguiente cuadro es conmutativo

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "g'"] \arrow[dd, "f'"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\ & A \arrow[ul, shift left, "v"'] \arrow[ul, shift right, "u"] \arrow[ur, "g' \circ u"'] \arrow[dl, "f' \circ v"] & \\ Z \arrow[rr, "g"'] & & Y \end{tikzcd}$$

pues $f \circ g' \circ u = f \circ g' \circ v = g \circ f' \circ v$ de donde $u = v$, por tanto $(W, \{f', g'\})$ es una $\mathfrak{Top}$-monofuente.

□

Lema 1.47. *Si $f : X \to Y$ y $g : Z \to Y$ son funciones continuas, $W = \{(x, y) \in X \times Z | f(x) = g(y)\}$ y f', g' son las restricciones a W, de las proyecciones a Z y X respectivamente, entonces:*

(a) El diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

es un pullback.

(b) Si

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "f''"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

es un pullback, entonces existe un único homeomorfismo $h : W' \to W$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "g'"] \arrow[dd, "f'"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& W' \arrow[ul, "h"'] \arrow[ur, "g''"] \arrow[dl, "f''"] & \\
Z \arrow[rr, "g"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

Demostración. (a) Por la definición de W el cuadro de (a) es conmutativo, sean $\alpha : A \to X$ y $\beta : A \to Z$ funciones continuas tales que $f \circ \alpha = g \circ \beta$, tomemos $\bar{\gamma} : A \to X \times Z$ definida por $\bar{\gamma}(a) = (\alpha(a), \beta(a))$ para cada $a \in A$, por propiedades del producto topológico $\bar{\gamma}$ es la única función continua tal que $\Pi_X \circ \bar{\gamma} = \alpha$ y $\Pi_Z \circ \bar{\gamma} = \beta$. Se tiene que $\bar{\gamma}(A) \subseteq W$, pues si $a \in A$, tenemos que $f \circ \pi_X \circ \bar{\gamma}(a) = f \circ \alpha(a) = g \circ \beta(a) = \pi_Z \circ \bar{\gamma}(a)$, de donde $\gamma = \bar{\gamma}|_A^W$ es tal que $g' \circ \gamma = \alpha$ y $f' \circ \gamma = \beta$. Si $\gamma' : A \to W$ es una función continua tal que $g' \circ \gamma' = \alpha$ y $f' \circ \gamma' = \beta$, como $\{f', g'\}$ es $\mathfrak{Top}$-monofuente, tenemos que $\gamma' = \gamma$. $\{f', g'\}$ es $\mathfrak{Top}$-monofuente pues sean $u, v : Q \to W$ morfismos tales que $f' \circ u = f' \circ v$ y $g' \circ u = g' \circ u$, se tiene que $\pi_X \circ u(q) = \pi_X \circ v(q)$ y $\pi_Z \circ u(q) = \pi_Z \circ v(q)$, de donde $u = v$. Por tanto el cuadrado en (a) es un pullback.

(b) Por la definición de pullback existen únicas $h : W \to W'$ y $h' : W' \to W$ funciones continuas tales que $g'' \circ h = g'$, $f'' \circ h = f'$, $g' \circ h' = g''$ y $f' \circ h' = f''$, de donde $h \circ h' = 1_{W'}$ y $h' \circ h = 1_W$ pues se tienen los diagramas conmutativos

$$
\begin{tikzcd}
W' \arrow[rr, "g''"] \arrow[dd, "f''"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& W' \arrow[ul, "h\circ h'"', "1_{W'}"] \arrow[ur, "g''"'] \arrow[dl, "f''"] & \\
Z \arrow[rr, "g"'] & & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "g'"] \arrow[dd, "f''"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& W \arrow[ul, "h'\circ h"', "1_{W}"] \arrow[ur, "g'"'] \arrow[dl, "f'"] & \\
Z \arrow[rr, "g"'] & & Y
\end{tikzcd}
$$

Así h es homeomorfismo, la unicidad es dada por la propiedad del pullback.

□

Proposición 1.48. *Si el diagrama conmutativo*

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y' \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

es un pullback en $\mathfrak{Top}$. Entonces:

(1) Si f es sobreyectiva, entonces f' es sobreyectiva.

(2) Si f es inyectiva, entonces f' es inyectiva.

(3) si f es homeomorfismo, entonces f' es homeomorfismo.

Demostración.

(1) Sea $y \in Y'$, tenemos que $g(y) \in Y$, así existe $x \in X$ tal que $f(x) = g(y)$ de donde conmuta el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dd, "f'"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& \{x\} \arrow[ul, dashed, "\varphi"'] \arrow[ur, "i"'] \arrow[dl, "C_y"] & \\
Y' \arrow[rr, "g"'] & & Y
\end{tikzcd}
$$

donde C_y es la función constante en y, $i : \{x\} \to X$ es la inclusión y φ está dada por la propiedad del pullback, así $\varphi(x) \in X'$ y $f'(\varphi(x)) = y$, por tanto f' es sobreyectiva.

(2) Sean $x, y \in X'$ con $x \neq y$, supongamos que $f'(x) = f'(y)$, tenemos que $g \circ f'(x) = g \circ f'(y)$, así por la conmutatividad del diagrama tenemos que $f \circ g'(x) = f \circ g'(y)$ de donde $g'(x) = g'(y)$, pues f es inyectiva. Tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dd, "f'"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& \{x,y\} \arrow[ul, "i"'] \arrow[ur, "g'|_{\{x,y\}}"] \arrow[dl, "f'|_{\{x,y\}}"] & \\
Y' \arrow[rr, "g"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, además $C_x : \{x, y\} \to X'$ la función constante en x puede tomar el lugar de i en el diagrama, gracias a que $f'(x) = f'(y)$ y $g'(x) = g'(y)$. Por la propiedad de pullback tenemos que $i = C_x$, así $y = i(y) = C_x(y) = x$ lo cual es una contradicción, de donde $f'(x) \neq f'(y)$.

(3) Por las partes (1) y (2) tenemos que f' es biyectiva, además tenemos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dd, "f'"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& Y' \arrow[ul, dashed, "\varphi"'] \arrow[ur, "f^{-1}\circ g"'] \arrow[dl, "1_{Y'}"'] & \\
Y' \arrow[rr, "g"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

así $f' \circ \varphi = 1_{Y'}$ y ya que f' es biyectiva $f'^{-1} = \varphi$, con φ continua.

□

Proposición 1.49. *Si los diagramas conmutativos*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
U \arrow[r, "l"'] & V
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "k"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[d, "h"] \\
V \arrow[r, "m"'] & W
\end{tikzcd}$$

son pullbacks, entonces el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "k"] & Z \arrow[d, "h"] \\
U \arrow[r, "l"'] & V \arrow[r, "m"'] & W
\end{tikzcd}$$

es pullback.

Demostración. Supongamos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j"] \arrow[dd, "f"'] & Y \arrow[r, "k"] & Z \arrow[dd, "h"] \\
 & Q \arrow[ur, "\alpha"'] \arrow[dl, "\beta"] & \\
U \arrow[r, "l"'] & V \arrow[r, "m"'] & W
\end{tikzcd}$$

tenemos que conmutan los diagramas

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "j"] \arrow[dd, "f"'] & & Y \arrow[dd, "g"] \\
 & Q \arrow[ul, dashed, "\varphi"'] \arrow[ur, "\rho"'] \arrow[dl, "\beta"] & \\
U \arrow[rr, "l"'] & & V
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "k"] \arrow[dd, "g"'] & & Z \arrow[dd, "h"] \\
 & Q \arrow[ul, dashed, "\rho"'] \arrow[ur, "\alpha"'] \arrow[dl, "l\circ\beta"] & \\
V \arrow[rr, "m"'] & & W
\end{tikzcd}$$

donde ρ y φ existen por la propiedad del pullback, así φ es tal que conmuta el diagrama completo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j"] \arrow[dd, "f"'] & Y \arrow[r, "k"] & Z \arrow[dd, "h"] \\
 & Q \arrow[ul, dashed, "\varphi"] \arrow[ur, "\alpha"'] \arrow[dl, "\beta"] & \\
U \arrow[r, "l"'] & V \arrow[r, "m"'] & W
\end{tikzcd}$$

La unicidad de φ se deduce de la unicidad de φ y ρ en los diagramas correspondientes.

$\square$

1.4. Subcategorías correflexivas

Definición 1.50. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $\mathcal{B}$ una subcategoría de $\mathcal{A}$. Se dice que $\mathcal{B}$ es una **subcategoría correflexiva** de $\mathcal{A}$ si para todo objeto X de $\mathcal{A}$ existe un objeto X^* en $\mathcal{B}$, llamado $\mathcal{B}-$correflector de X, y un morfismo $r_X : X^* \to X$ en $\mathcal{A}$, llamado $\mathcal{B}-$correflexión de X, tal que para todo objeto Y de*

$\mathcal{B}$ y todo morfismo $f : Y \to X$ en $\mathcal{A}$, existe un único morfismo $f^\circ : Y \to X^*$ en $\mathcal{B}$ tal que $r_X \circ f^0 = f$. Es decir el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & X^* \arrow[d, "r_x"] \\ Y \arrow[ur, "f^0"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

conmuta.

Definición 1.51. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría y $E \subset Mor(\mathcal{A})$. E es una* ***clase cerrada bajo composición con isomorfismos*** *si para todo elemento de E, $f : X \to Y$, y cualesquiera dos isomorfismos g y h de $\mathcal{A}$, con $Dom(g) = Y$ y $Cod(h) = X$, se tiene que $g \circ f \circ h \in E$.*

Definición 1.52. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $E \subset Mor(\mathcal{A})$ una clase cerrada bajo composición con isomorfismos. Una subcategoría correflexiva $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ se dice* ***E-correflexiva*** *si cada $\mathcal{B}-$correflexión r_X de cada $X \in Ob(A)$ es un elemento de E. Para $E = Bi(\mathcal{A})$, la clase E consiste de los bimorfismos de $\mathcal{A}$, en tal caso, tenemos categorías bi-correflexivas.*

Definición 1.53. *Un objeto S de una $\mathcal{A}$ categoría es llamado* ***separador en*** *$\mathcal{A}$ si para cualesquiera dos $\mathcal{A}-$morfismos diferentes $f, g : X \to Y$ existe un $\mathcal{A}$-morfismo $h : S \to X$ tal que: $f \circ h \neq g \circ h$.*

Proposición 1.54. *Todo espacio topológico no vacío es un separador en $\mathfrak{Top}$.*

Demostración. Sea S un espacio topológico no vacío y sean $f, g : X \to Y$ dos $\mathfrak{Top}$-morfismos diferentes. Existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$, así $h : S \to X$, la función constante en x, es un $\mathfrak{Top}$-morfismos tal que $f \circ h \neq g \circ h$, pues ya que S es no vacío existe $s \in S$ y así $f \circ h(s) \neq g \circ h(s)$.

□

Proposición 1.55. *Si $\mathcal{A}$ es una categoría con un separador S y $\mathcal{B}$ es una subcategoría correflexiva de $\mathcal{A}$ con $S \in Ob(\mathcal{B})$. Entonces $\mathcal{B}$ es bi-correflexiva en $\mathcal{A}$ si y sólo si $\mathcal{B}$ es correflexiva en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{B}$ es correflexiva en $\mathcal{A}$, sea $r_X : X^* \to X$ una $\mathcal{B}-$correflexión de X. Veamos que r_X es epimorfismo, sean $u, v : X \to Y$ morfismos de $\mathcal{A}$ tales que $u \circ r_X = v \circ r_X$, supongamos que $u \neq v$, tenemos que existe $h : S \to X$ un $\mathcal{A}-$morfismo tal que $v \circ h \neq u \circ h$, así existe un único $h^0 : S \to X^*$ morfismo en $\mathcal{A}$ tal que $r_x \circ h^0 = h$, pues $S \in Ob(\mathcal{B})$, de donde $u \circ h = u \circ r_x \circ h^0 = v \circ r_x \circ h^0 = v \circ h$, lo cual es una contradicción y por tanto $u = v$. Además, r_X es monomorfismo pues sean $u, v : Z \to X^*$

morfismos en $\mathcal{A}$ tales que $r_X \circ u = r_X \circ v$, supongamos que $u \neq v$, así existe $h : S \to Z$ morfismo de $\mathcal{A}$ tal que $u \circ h \neq v \circ h$, ya que $S \in Ob(\mathcal{B})$, $u \circ h = (r_X \circ u \circ h)^0 = (r_X \circ v \circ h)^0 = v \circ h$ lo cual es una contradicción, por tanto $u = v$, esto es, r_X es monomorfismo.

□

Definición 1.56. *Sea $\mathcal{C}$ una subcategoría de $\mathfrak{Top}$, $\mathcal{C}$ es una **subcategoría cerrada bajo la formación de coproductos** si para cualquier familia $\{A_j\}_{j \in J} \subseteq Ob(\mathcal{C})$, donde J es un conjunto, el coproducto $(\coprod A_j, \{i_j\})_{j \in J}$ es un objeto de $\mathcal{C}$.*

Definición 1.57. *Sea $\mathcal{C}$ una subcategoría de $\mathfrak{Top}$, $\mathcal{C}$ es una **subcategoría cerrada bajo la formación de identificaciones** si para cualquier identificación $f : A \to X$, con A un objeto de $\mathcal{C}$, se tiene que X es también un objeto de $\mathcal{C}$.*

Definición 1.58. *Sean $f : Y \to X$ y $g : Z \to X$ dos morfismos, **f es isomorfo a g** si existe un isomorfismo $\varphi : Y \to Z$ tal que $f = g \circ \varphi$.*

Definición 1.59. *Sea E una clase de morfismos y R una subclase de E, R es un **conjunto de E-representantes** si R es un conjunto y para cada f elemento de E, existe un elemento g de R tal que g es isomorfo a f.*

Definición 1.60. *Una categoría $\mathcal{A}$ es **E-bien potenciada** si para cada objeto X de $\mathcal{A}$, la clase de todos los morfismos que pertenecen a E y tienen por codominio a X, denotada por E_X, tiene un conjunto de E_X-representantes.*

Definición 1.61. *Una categoría $\mathcal{A}$ es **bien potenciada** si cada objeto X de $\mathcal{A}$ la clase de monomorfismos en $\mathcal{A}$ con codominio X tiene un conjunto de representantes.*

Observación 1.62. *La categoría $\mathfrak{Top}$ es bien potenciada, (ver la Proposición 1.69 de* [2]*).*

Definición 1.63. *Un epimorfismo $f : X \to Y$ de una categoría $\mathcal{A}$ es un **epimorfismo extremal** en $\mathcal{A}$, si siempre que un morfismo $g : X \to Z$ y un monomorfismo $h : Z \to Y$ son tales que $f = hg$, entonces g es un isomorfismo.*

Observación 1.64. *En $\mathfrak{Top}$ un morfismo $f : X \to Y$ es un epimorfismo extremal si y sólo si f es una identificación, (Proposición 1.66 de* [2]*).*

Definición 1.65. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría, sean E y M clases de morfismos cerradas bajo composición con isomorfismos. $\mathcal{A}$ es **(E,M)-factorizable** si* *para cada $\mathcal{A}-$morfismo $f : X \to Y$ existe una tripleta (Z, g, h) que consiste en un objeto Z, un morfismo $g : X \to Z$ elemento de E y un morfismo $h : Z \to Y$ elemento de M tales que $f = h \circ g$. La tripleta (Z, g, h) es llamada (E, M)-factorización de f.*

*Una categoría $\mathcal{A}$ $(E, M)-$factorizable es **singularmente (E,M)- factorizable** si para dos $(E, M)-$factorizaciones (Z, g, h) y (Z', g', h') de cualquier morfismo f, existe un isomorfismo $\varphi : Z \to Z'$ tal que $h = h' \circ \varphi$ y $g' = \varphi \circ g$.*

Una categoría tiene la propiedad de la (E,M)-diagonalización si para todo diagrama conmutativo en $\mathcal{A}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "h"] \arrow[dl, dashed, "d"] \\ Y \arrow[r, "k"'] & Z \end{tikzcd}$$

*existe un morfismo $d : X \to Y$ que hace conmutativo el diagrama completo, d es llamado **morfismo diagonal** del cuadrado (f, g, h, k).*

*Una categoría $\mathcal{A}$ se llama **(E,M)-categoría** si, es $(E, M)-$factorizable y tiene la propiedad de $(E, M)-$diagonalización.*

Observación 1.66. *Sea $Epi - ex$ la clase de epimorfismos extremales en $\mathfrak{Top}$ y $Mono$ la clase de monomorfismos en $\mathfrak{Top}$, tenemos que $\mathfrak{Top}$ es una $(Epi - ex, Mono)-$categoría, (Ejemplo 2.21 de* [2]*).*

Usando el resultado dual al Corolario 2.28 de [2] tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.67. *Si $\mathcal{A}$ es una (E, M)-categoría $M-$bien potenciada con $M \subset Mono(\mathcal{A})$ la cual tiene coproductos. Entonces se cumple lo siguiente.*

(1) La intersección de cualquier clase de subcategorías M-correflexivas de $\mathfrak{Top}$ es M-correflexiva en $\mathcal{A}$.

(2) Para cualquier subcategoría $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{Top}$, existe una subcategoría M-correflexiva $\mathcal{B}^*$ de $\mathcal{A}$, llamada envolvente M-correflexiva de $\mathcal{B}$, tal que:

(a) $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$.

(b) Si $\mathcal{B}'$ es subcategoría M-correflexiva de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$, entonces $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}'$.

(3) Un objeto X de $\mathcal{B}$ es un objeto de $\mathcal{B}^*$ si y sólo si existe un conjunto $\{X_i\}_{i \in J}$ de objetos de $\mathcal{B}$ y un morfismo $f : \coprod_{i \in J} X_i \to X$ elemento de E.

Teorema 1.68. *Sea $\mathcal{A}$ cualquier subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$. Entonces:*

(a) $\mathcal{A}$ es cerrada bajo la formación de identificaciones.

(b) $\mathcal{A}$ es cerrada bajo la formación de coproductos.

Demostración. (a) Sea $f : A \to X$ una identificación, con A un objeto de $\mathcal{A}$. Sea $r_X : X^* \to X$ una $\mathcal{A}$-bicorreflexión de X, entonces existe $f^0 : A \to X^*$ función continua tal que $r_X \circ f^0 = f$. Además r_X^{-1} es continua porque lo es $r_X^{-1} \circ f = f^0$ y f es una identificación. Por tanto, r_X es un homeomorfismo y X es un objeto de $\mathcal{A}$.

(b) Sea $(X = \coprod A_j, \{i_j\}_{j \in J})$ el coproducto de la familia $\{A_j\}_{j \in J}$ donde cada A_j es un objeto de $\mathcal{A}$, tomemos $r_X : X^* \to X$ una $\mathcal{A}$-correflexión de X, para cada $j \in J$ existe $i_j^0 : A_j \to X^*$ función continua tal que $r_X \circ i_j^0 = i_j$, como $\coprod A_j$ es coproducto existe una única función continua $f : \coprod A_j \to X^*$ tal que $f \circ i_j = i_j^0$. Tenemos que $r_X \circ f : \coprod A_j \to \coprod A_j$ es función continua y es tal que $r_X \circ f \circ i_j = r_X \circ i_j^0 = i_j$ para cada $j \in J$, de donde $r_X \circ f = 1_{\coprod A_j}$, pues $1_{\coprod A_j}$ es la única función continua tal que $1_{\coprod A_j} \circ i_j = i_j$, por tanto tenemos que $r_X^{-1} = f$ es continua, de donde r_X es homemomorfismo y así X es un objeto de $\mathcal{A}$.

$\square$

Notación 1.69. *Consideremos a $E := Epi - ex$ la clase de epimorfismos extremales de $\mathfrak{Top}$ y M la clase de monomorfismos en $\mathfrak{Top}$, tenemos que $\mathfrak{Top}$ es $(E, , M)$-categoría, M-bien potenciada con $M \subset Mono(\mathfrak{Top})$. Para una subcategoría $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{Top}$, $\mathcal{A}^*$ denotará la envolvente $M-$correflexiva de $\mathcal{A}$. Para este caso nos referiremos a $\mathcal{A}^*$ como la envolvente correflexiva de $\mathcal{A}$.*

Teorema 1.70. *Si $\mathcal{A}$ es una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ con al menos un objeto no vacío, entonces son equivalentes:*

(a) $\mathcal{A}$ es bicorreflexiva.

(b) $\mathcal{A}$ es cerrada bajo identificaciones y coproductos.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$: Teorema 1.68.

$(b) \Rightarrow (a)$: Consideremos $\mathcal{A}*$, la envolvente correflexiva de $\mathcal{A}$, y sea X un objeto de $\mathcal{A}*$, tenemos que por la Proposición 1.67 existe un conjunto $\{A_i\}_{i \in J}$ de objetos de $\mathcal{A}$ y un morfismo extremal $f : \coprod_{i \in J} A_i \to X$, por la Observación 1.64 tenemos que f es identificación y así X es un objeto de $\mathcal{A}$, esto es $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, además por la Proposición 1.55 y la Proposición 1.54, tenemos que $\mathcal{A}^*$ es bicorreflexiva pues contiene al menos un elemento no vacío.

$\square$

Capítulo 2

Fibraciones

2.1. Fibraciones

En este capítulo comenzaremos por introducir el concepto de $\mathbb{E}-$fibración. Sea $\mathbb{E}$ una clase de espacios topológicos no vacía, una $\mathbb{E}-$fibración es una función continua que cumple una propiedad de levantamiento de homotopías con respecto a todo elemento de $\mathbb{E}$. Presentaremos resultados generales del comportamiento de las $\mathbb{E}-$fibraciones, aunque en el trabajo desarrollado ponemos mayor interés en las fibraciones de Hurewicz (es decir, se considera a $\mathbb{E}$ como la clase de todos los espacios topológicos).

Definición 2.1. *Sea $\mathbb{E}$ una clase de espacios topológicos no vacía. Una* ***$\mathbb{E}$-fibración*** *es una función continua $f : Y \to B$ tal que para cada diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

donde $X \in \mathbb{E}$ e $i_0(x) := (x, 0)$ para cada $x \in X$, existe una función continua $\tilde{H}$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ X \times I \arrow[ur, "\tilde{H}"] \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

Para $\mathbb{E}$ la clase de todos los espacios topológicos, una $\mathbb{E}-$fibración es también conocida como una ***fibración de Hurewicz****.*

Proposición 2.2. *Si $f : Y \to B$ y $g : X \to Y$ son $\mathbb{E}-$fibraciones, entonces $f \circ g$ es $\mathbb{E}-$fibración.*

Demostración. Sea Z un elemento de $\mathbb{E}$, supongamos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] \arrow[dd, "i_0"'] & X \arrow[d, "g"] \\ & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \times I \arrow[r, "H"'] & B \end{tikzcd}$$

tenemos que conmutan los diagramas

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[r, "g"] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \times I \arrow[urr, "H'"] \arrow[rr, "H"'] & & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "g"] \\ Z \times I \arrow[ur, "\tilde{H}"] \arrow[r, "H'"'] & Y \end{tikzcd}$$

donde H' y $\tilde{H}$ existen pues f y g son $\mathbb{E}-$fibraciones, así $\tilde{H}$ es tal que

(1) $\tilde{H} i_0 = h$,

(2) $fg\tilde{H} = fH' = H$,

esto es $f \circ g$ es $\mathbb{E}-$fibración.

$\square$

Proposición 2.3. *Si* $\{f_i : Y_i \to B_i\}_{i\in J}$ *es un conjunto de* $\mathbb{E}-$*fibraciones, entonces* $\prod_{i\in J} f_i : \prod_{i\in J} Y_i \to \prod_{i\in J} B_i$ *es una* $\mathbb{E}-$*fibración, donde* $\prod_{i\in J} f_i$ *es dada por la Definición 1.27 .*

Demostración. Sea $Z \in \mathbb{E}$, supongamos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & \prod_{i\in J} Y_i \arrow[d, "\prod_{i\in J} f_i"] \\ Z\times I \arrow[r, "H"'] & \prod_{i\in J} B_i \end{tikzcd}$$

tenemos que para cada $i \in J$ conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & \prod_{i\in J} Y_i \arrow[r, "\Pi_i"] & Y_i \arrow[d, "f_i"] \\ Z\times I \arrow[r, "H"'] \arrow[urr, "\tilde{H}_i"'] & \prod_{i\in J} B_i \arrow[r, "\Pi_i"'] & B_i \end{tikzcd}$$

donde $\tilde{H}_i$ existe ya que f_i es $\mathbb{E}-$fibración. Por la propiedad del producto existe una única $\tilde{H} : Z \times I \to \prod_{i\in J} Y_i$ tal que para cada $i \in J$ se tiene que $\Pi_i \circ \tilde{H} = \tilde{H}_i$, tenemos que $\tilde{H}$ es tal que:

(1) $\tilde{H}i_0 = h$, pues para cada $i \in J$, $\Pi_i \circ \tilde{H}i_0 = \tilde{H}_i \circ i_0 = \Pi_i \circ h$,

(2) $\prod_{i\in J} f_i\tilde{H} = H$, pues para cada $i \in J$ tenemos que:

$$\Pi_i \circ \prod_{i\in J} f_i \circ \tilde{H} = f_i \circ \Pi_i \circ \tilde{H} = f_i \circ \tilde{H}_i = \Pi_i \circ H.$$

Esto es $\prod_{i\in J} f_i$ es $\mathbb{E}-$fibración.

□

Lema 2.4. *Si* $f : Y \to B$ *es una* $\mathbb{E}-$*fibración y el diagrama*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

es un pullback, entonces f' *es* $\mathbb{E}-$*fibración.*

Demostración. Supongamos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & W \arrow[d, "f'"] \\
X \times I \arrow[r, "H"'] & Z
\end{tikzcd}$$

con $X \in E$; tenemos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & W \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
X \times I \arrow[r, "H"'] & Z \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

de donde existen $\tilde{H}$ función continua y única $\tilde{G}$ función continua tales que los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g' \circ h"] \arrow[d, "i_0"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
X \times I \arrow[r, "g \circ H"'] \arrow[ur, "\tilde{H}"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "g'"] \arrow[dd, "f'"'] & & Y \arrow[dd, "f"] \\
& X \times I \arrow[ul, "\tilde{G}"'] \arrow[ur, "\tilde{H}"] \arrow[dl, "H"] & \\
Z \arrow[rr, "g"'] & & B
\end{tikzcd}$$

de donde $g' \circ \tilde{G} \circ i_0 = \tilde{H} \circ i_0 = g' \circ h$ y $f' \circ \tilde{G} \circ i_0 = H \circ i_0 = f' \circ h$, como $\{f', g'\}$ es monofuente tenemos que $\tilde{G} \circ i_0 = h$, esto es, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i_0"'] & W \arrow[d, "f'"] \\
X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\tilde{H}"] & Z
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, por tanto f' es fibración.

$\square$

Definición 2.5. *Sean* (X, τ_X) *y* (Y, τ_Y) *espacios topológicos. Definimos* $C(X, Y)$ *como el conjunto de funciones continuas de* (X, τ_X) *a* (Y, τ_Y)*. Para* $A \subseteq X$ *y* $B \subseteq Y$ *definimos* $(A, B) \subseteq C(X, Y)$ *de la siguiente forma*

$$(A, B) := \{f \in C(X, Y) \mid f(A) \subseteq B\}.$$

Lema 2.6. *Existe una topología* $\mathfrak{K}$ *en* $C(X, Y)$*, que tiene por sub-base a*

$$\bar{\mathfrak{K}} := \{(A, B) \mid A \subseteq X \text{ es compacto y } B \subseteq Y \text{ es abierto}\}.$$

A dicha topología $\mathfrak{K}$ *se le llama* ***topología compacto abierta****.*

Definición 2.7. *Para* $X \in \mathfrak{Top}$*, el espacio topológico* $(C(I, X), \mathfrak{K})$ *es llamado* ***espacio de caminos en X****, y es denotado por* X^I*.*

Definición 2.8. *Sean* Y *un espacio topológico e* $y \in Y$*. Definimos el espacio topológico* $(P(Y, y), \mathfrak{K}')$*, donde* $P(Y, y) = \{f \in C(I, Y) \mid f(0) = y\}$ *y* $\mathfrak{K}'$ *es la topología de* $P(Y, y)$ *como subespacio de* $(C(I, Y), \mathfrak{K})$*. El espacio topológico* $(P(Y, y), \mathfrak{K}')$ *es llamado* ***espacio de caminos en Y con inicio y****. Definimos la función* $\varepsilon : P(Y, y) \to Y$ *de forma que* $\varepsilon(f) = f(1)$ *para cada* $f \in P(Y, y)$*.*

Observación 2.9. *La función* ε *es continua pues, para cada* $U \subseteq Y$ *abierto, tenemos que* $\varepsilon^{-1}(U) = (\{1\}, U)$ *es un abierto en* $P(Y, y_0)$*.*

Definición 2.10. *Sean* X *y* Y *conjuntos,* $F(X, Y)$ *denotará el conjunto de funciones de* X *a* Y*.*

Para X*,* Y*,* Z *conjuntos, definiremos la función* $\Theta : F(X \times Z, Y) \to F(Z, F(X, Y))$ *de forma que para cada* $f \in F(X \times Z, Y)$*:*

$$\begin{aligned} \Theta(f) : Z &\to F(X, Y) \\ z &\mapsto \Theta(f)(z) : X \to Y \\ &\qquad\qquad x \mapsto f(x, z) \end{aligned}$$

Definimos la función $\Gamma : F(Z, F(X, Y)) \to F(X \times Z, Y)$ *de forma que para cada* $g \in F(Z, F(X, Y))$*:*

$$\begin{aligned} \Gamma(g) : X \times Z &\to Y \\ (x, z) &\mapsto g(z)(x). \end{aligned}$$

Para $F(X, Y)$ *definimos la* ***función evaluación*** $\omega : F(X, Y) \times X \to Y$ *por* $\omega(f, x) := f(x)$*.*

Los siguientes resultados (Observación 2.11, Proposición 2.12, Observación 2.13 y Proposición 2.14) nos proveen de información acerca de las funciones Θ y Γ, las demostraciones de dichos resultados pueden revisarse en la sección 29 de [8], Proposición 17, Proposición 18, Observación 19 y Corolario 21 respectivamente.

Observación 2.11.

(a) $\Theta \circ \Gamma = Id$.

(b) $\Gamma \circ \Theta = Id$.

(c) Para cada $f \in F(X \times Z, Y)$ *y para toda* $z \in Z$,$\Theta(f)(z) = f \circ h_z$*, donde* $h_z : X \to X \times Z$ *está definida por* $h_z(x) = (x, z)$ *para toda* $x \in X$.

(d) Para cada $g \in F(Z, F(X, Y))$, $\Gamma(g) = \omega \circ g \times 1_X \circ h$*, donde* $h : X \times Z \to Z \times X$ *está definida por* $h((x, z)) = (z, x)$ *y* $\omega : F(X, Y) \times X \to Y$ *es la función evaluación.*

Proposición 2.12. *Si* (X, τ), (Y, σ), (Z, α) *y* $(C(X, Y), \mathfrak{K})$ *son espacios topológicos, entonces* $\Theta(C(X \times Z, Y)) \subset C(Z, C(X, Y))$.

Observación 2.13. *Si* (X, τ), (Y, σ), (Z, α) *y* $(C(X, Y), \mathfrak{K})$ *son espacios topológicos, entonces son equivalentes:*

(a) $\Theta : C(X \times Z, Y)) \to C(Z, C(X, Y))$ *es biyectiva.*

(b) $\Theta : C(X \times Z, Y)) \to C(Z, C(X, Y))$ *es sobreyectiva.*

(c) $\Gamma(C(Z, C(X, Y))) \subset C(X \times Z, Y)$.

Proposición 2.14. *Si* (X, τ) *es localmente compacto y regular, entonces para cualesquiera* (Y, σ), (Z, α) *espacios topológicos,* $\Theta : C(X \times Z, Y)) \to C(Z, C(X, Y))$ *es biyectiva.*

Definición 2.15. *Para* $f : E \to B$ *una función continua,* $f^* : E^I \to B^I$ *se define por* $f(\alpha) = f \circ \alpha$ *para cada* $\alpha \in E^I$.

Proposición 2.16. *Para toda función continua* $f : E \to B$ *se tiene que* $f^* : E^I \to B^I$ *es una función continua.*

Demostración. Sean $\alpha \in E^I$ y $U = (A, K)$ un básico en $(B^I, \mathcal{K}_B)$ con $f^*(\alpha) \in U$, se tiene que $(A, f^{-1}(K))$ es un básico en $(E^I, \mathcal{K}_E)$ que contiene a α y $f^*((A, f^{-1}(K))) \subset U$.

$\square$

Proposición 2.17. *Si* $f : E \to B$ *es una función continua son equivalentes:*

(a) f *es* $\mathbb{E}$*−fibración.*

(b) Si en $\mathfrak{Top}$ *conmuta el diagrama*

$$\begin{tikzcd} E^I \arrow[r, "p_0"] \arrow[dd, "f^*"'] & & E \arrow[dd, "f"] \\ & Y \arrow[ur, "g"] \arrow[dl, "G"] & \\ B^I \arrow[r, "p_0"'] & & B \end{tikzcd} \quad (1)$$

con $Y \in \mathbb{E}$ *y* $p_0(\alpha) = \alpha(0)$*, entonces existe* $\tilde{G} : Y \to E^I$ *función continua tal que hace conmutar el diagrama completo:*

$$\begin{tikzcd} E^I \arrow[r, "p_0"] \arrow[dd, "f^*"'] & & E \arrow[dd, "f"] \\ & Y \arrow[ul, "\tilde{G}"] \arrow[ur, "g"] \arrow[dl, "G"] & \\ B^I \arrow[r, "p_0"'] & & B \end{tikzcd} \quad (1)$$

Demostración. Consideremos las funciones $\Theta : C(I \times Y, B) \to C(Y, C(I, B))$ y $\Theta' : C(I \times Y, E) \to C(Y, C(I, E))$, por la Proposición 2.14 tenemos que Θ y Θ' son biyectivas, además por la Observación 2.13 tenemos que

$$\Gamma(C(Y, C(I, B))) \subset C(I \times Y, B) \text{ y } \Gamma'(C(Y, C(I, E))) \subset C(I \times Y, E).$$

Supongamos que f es $\mathbb{E}$−fibración y que el diagrama (1) es conmutativo con $Y \in \mathbb{E}$. Tomando $H := \Gamma(G) \circ l : Y \times I \to B$, donde $l : Y \times I \to I \times Y$ es definida por $l((y, t)) = (t, y)$ para todo $(y, t) \in Y \times I$, tenemos que H es continua y hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "f"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & B \end{tikzcd} \quad (2)$$

pues para cada $y \in Y$

$$H \circ i_0(y) = \Gamma(G)((0,y)) = G(y)(0) = p_0(G(y)) = f \circ g(y)$$

ya que f es $\mathbb{E}-$fibración, existe $\tilde{H}$ continua que hace conmutativo el diagrama completo (2). Definiendo $\tilde{G} := \Theta'(\tilde{H} \circ l^{-1})$, tenemos que $\tilde{G}$ es continua y hace conmutar el diagrama (1) completo, pues para cada $y \in Y$ y para cada $t \in I$:

$$(f^* \circ \tilde{G}(y))(t) = f^*(\tilde{G}(y)(t)) = f \circ \Theta(\tilde{H} \circ l^{-1})(y)(t)$$

$$= f \circ \tilde{H}(y,t) = H(y,t) = \Gamma(G) \circ l(y,t) = G(y)(t).$$

Ahora supongamos que para todo diagrama de la forma (1) en $\mathfrak{Top}$ con $Y \in \mathbb{E}$ existe $\tilde{G}$ que hace conmutativo el diagrama completo. Consideremos el diagrama conmutativo (2) con $Y \in \mathbb{E}$, definiendo $G := \Theta(Hl^{-1})$ tenemos que G es tal que hace conmutativo el diagrama (1) pues para cada $y \in Y$

$$p_0 \circ G(y) = p_0 \circ \Theta(H \circ l^{-1})(y) = \Theta(H \circ l^{-1})(y)(0) = H(y,0) = f \circ g(y)$$

así existe $\tilde{G}$ continua que hace conmutar el diagrama completo (1). Finalmente sea $\tilde{H} := \Gamma'(\tilde{G})l$ tenemos que:

1. $\tilde{H}i_0(y) = \tilde{H}(y,0) = \Gamma'(\tilde{G})(0,y) = \tilde{G}(y)(0) = p_0\tilde{G}(y) = g(y)$.
2. $f\tilde{H}(y,t) = f\tilde{G}(y)(t) = f^*\tilde{G}(y)(t) = G(y)(t) = \Theta(hl^{-1})(y)(t) = H(y,t)$. Esto es $\tilde{H}$ es tal que conmuta el diagrama completo (2), así que f es $\mathbb{E}-$fibración.

$\square$

Definición 2.18. *Para una función continua $f : X \to Y$, definimos el espacio N_f de la siguiente forma*

$$N_f := \{(x,\alpha) \mid f(x) = \alpha(0)\} \subseteq X \times Y^I.$$

Observación 2.19. *Para $f : X \to Y$ una función continua, el cuadrado conmutativo*

$$\begin{tikzcd} N_f \arrow[r, "\Pi_X|_{N_f}"] \arrow[d, "\Pi_{Y^I}|_{N_f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y^I \arrow[r, "p_0"'] & Y \end{tikzcd}$$

donde $\Pi_X|_{N_f}$ y $\Pi_{Y^I}|_{N_f}$ son las respectivas proyecciones a X y Y^I restringidas a N_f, y $p_0(\alpha) = \alpha(0)$ para cada $\in Y^I$, es un pullback, esto por el Lema 1.47.

Proposición 2.20. *Sean Y un espacio topológico, L un subespacio de Y^I y $\theta : I \times I \to I$ una función continua. La función*

$$\begin{aligned} \bar{\theta} : L \times I &\to Y^I \\ (\alpha, t) &\mapsto \alpha_t : I \to Y \\ &\qquad\qquad s \mapsto \alpha(\theta((t, s))) \end{aligned}$$

es una función continua.

Demostración. Sean $(\alpha, t) \in L \times I$ y (K, A) un básico de la topología en Y^I tal que $\bar{\theta}(\alpha, t) = \alpha_t \in (K, A)$. Tomemos

$$V = \{v \in I \mid \forall w \in K, \alpha(\theta(v, w)) \in A\}.$$

Tenemos que $t \in V$, esto ya que $\alpha_t \in (K, A)$. Veamos que V es un abierto en I. Sea $v \in V$, para cada $w \in K$ tenemos que $\alpha(\theta(v, w)) \in A$, donde A es un abierto en I, así por la continuidad de $\alpha \circ \theta$ tenemos que existen O_w y Q_w abiertos en I tales que $v \in O_w$, $w \in Q_w$ y $O_w \times Q_w \subset \theta^{-1}(\alpha^{-1}(A))$, de donde tenemos que $\{Q_w\}_{w \in K}$ es una cubierta abierta de K, el cual es compacto, así existe $\{Q_{w_i}\}_{i=1}^n$ subcubierta finita de $\{Q_w\}_{w \in K}$. Tenemos que $\cap_{i=1}^n O_{w_i}$ es un abierto en I que contiene a v, además $\cap_{i=1}^n O_{w_i} \subset V$. En efecto, sea $u \in \cap_{i=1}^n O_{w_i}$ y $w \in K$, existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $w \in Q_{w_i}$ y así $\alpha(\theta(u, w)) \in \alpha(\theta(O_{w_i} \times Q_{w_i})) \subset A$.

Ya que I es localmente compacto y T_2, como $t \in V$, existe una vecindad W de t tal que $\overline{W}$, la cerradura de W, es compacta en I y $\overline{W} \subset V$. Sea

$$C = \bigcup_{s \in \overline{W}, w \in K} \theta(s, w) = \theta(\overline{W} \times K)$$

tenemos que C es compacto en I, esto debido a que $\overline{W} \times K$ es compacto en $I \times I$ y θ es continua. Consideremos $O = (C, A) \cap L \times W$, tenemos que O es un abierto en $L \times I$, además $\alpha \in (C, A)$ pues para cada $c \in C$, $c = \theta((s, w))$ para algún $s \in \overline{W}$ y $w \in K$, de donde

$$\alpha(c) = \alpha(\theta((s, w))) \in \alpha(\theta(\overline{W} \times K)) \subset \alpha(\theta(V \times K)) \subset A$$

así $(\alpha, t) \in O$. Finalmente $\bar{\theta}(O) \subset (K, A)$, pues sea $(\beta, s) \in O$, para $w \in K$ tenemos que

$$\beta_s(w) = \beta(\theta((s, w))) \subset \beta(\theta(\overline{W} \times K)) = \beta(C) \subset A.$$

$\square$

Teorema 2.21. *Toda función continua es la composición de una equivalencia homotópica y una fibración de Hurewicz.*

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función continua, f coincide con la composición

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \\ & N_f \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

donde $h : X \to N_f$ está definida por $h(x) = (x, C_{f(x)})$ para cada $x \in X$, y $p(x, \alpha) = \alpha(1)$. Consideremos $\pi_{Y^I} \circ h : X \to Y^I$, y sean $x \in X$ y (K, A) un básico en la topología de Y^I tal que $\pi_{Y^I} \circ h(x) = C_{f(x)} \in (K, A)$, tenemos que $x \in f^{-1}(A)$ y para cada $y \in f^{-1}(A)$, se sigue que:

$$C_{f(y)}(K) = \{f(y)\} \subset A$$

de donde $\pi_{Y^I} \circ h(y) = C_{f(y)} \in (K, A)$, esto es, $\pi_{Y^I} \circ h$ es continua, además $\pi_X \circ h = 1_X$, de donde h es continua.

Sea $\varepsilon : Y^I \to Y$ definida por $\varepsilon(\alpha) = \alpha(1)$, tenemos que para cada V abierto en Y, $\varepsilon^{-1}(V) = (\{1\}, V)$, esto es ε es continua, y así $p : N_f \to Y$ es continua pues $p = \varepsilon \circ \pi_{Y^I}$.

Veamos que h es una equivalencia homotópica, claramente $\pi_X \circ h = 1_X$. Sea $H : N_f \times I \to N_f$ definida por $H(x, \alpha, t) = (x, \alpha_t)$, donde $\alpha_t : I \to Y$ está definida por $\alpha_t(s) = \alpha(st)$ para cada $s \in I$, notar que $\alpha_t(0) = \alpha(0) = f(x)$, esto es H está bien definida, además H es tal que:

1. H es continua. Ya que $\Pi_X \circ H = 1_X$ y $\Pi_{Y^I} \circ H$ es continua. En efecto, considerando $L = \pi_{Y^I}(N_f)$ y $\theta : I \times I \to I$ definida por $\theta(s, t) = st$, por la Proposición 2.20 tenemos que la función $\bar{\theta}$ es continua, de donde

   $$\pi_{Y^I} H = \bar{\theta} \circ (\pi_{Y^I} \times 1_I)$$

   es continua.

2. $H((x, \alpha), 0) = (x, \alpha_0) = (x, C_{f(x)}) = h \circ \Pi_X(x)$.

3. $H((x, \alpha), 1) = (x.\alpha_1) = (x, \alpha) = 1_{N_f}(x, \alpha)$.

Esto es $H : h\pi_X \simeq 1_{N_f}$.

Veamos que p es una fibración de Hurewicz. Supongamos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & N_f \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "G"'] & Y \end{tikzcd}$$

Sea $z \in Z$, consideremos $g(z) = (g_1(z), g_2(z))$ donde $g_1 : Z \to X$, $g_2 : Z \to Y^I$ son funciones continuas y $g_2(z)(0) = f(g_1(z))$, tenemos que por la conmutatividad del diagrama $g_2(z)(1) = G(z, 0)$ pues

$$G(z, 0) = G(i_0(z)) = p(g(z)) = p(g_1(z), g_2(z)) = g_2(z)(1).$$

Consideremos $\tilde{G}_1 : Z \times I \to X$, definida por $\tilde{G}_1(z, s) = g_1(z)$, tenemos que $\tilde{G}_1$ es continua pues g_1 lo es, y consideremos $\tilde{G}_2 : Z \times I \to Y^I$ definida por

$$\tilde{G}_2(z, s)(t) = \begin{cases} g_2(z)((1+s)t) \ si \ 0 \le t \le \frac{1}{1+s} \\ \\ G(z, (1+s)t - 1) \ si \ \frac{1}{1+s} \le t \le 1 \end{cases}$$

$\tilde{G}_2$ está bien definida pues para $t = 1/(1+s)$ tenemos que

$$g_2(z)((1+s)t) = g_2(z)(1) = G(z, 0) = G(z, (1+s)t - 1).$$

Así definimos $\tilde{G} : Z \times I \to N_f$ como $\tilde{G}(z, t) = (\tilde{G}_1(z, t), \tilde{G}_2(z, t))$, $\tilde{G}$ está bien definida pues

$$f \circ \tilde{G}_1(z, s) = f \circ g_1(z) = g_2(z)(0) = \tilde{G}_2(z, s)(0).$$

Tenemos que $\tilde{G}$ es continua pues $\Pi_X \tilde{G} = \tilde{G}_1$ y $\Pi_{Y^I} \tilde{G} = \tilde{G}_2$ que por la Proposición 2.22 es continua y así $\tilde{G}$ es continua, además $\tilde{G}$ es tal que:

1. $\tilde{G}(z, 0) = (\tilde{G}_1(z, 0), \tilde{G}_2(z, 0)) = (g_1(z), (g_2(z))$.

2. $p\tilde{G}(z, s) = p(\tilde{G}_1(z, s), \tilde{G}_2(z, s)) = \tilde{G}_2(z, s)(1) = G(z, s)$

esto es, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & N_f \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, "\tilde{G}"] & Y \end{tikzcd}$$

$\square$

Proposición 2.22. *La función $\tilde{G}_2$ definida en la prueba del Teorema 2.21 es continua.*

Demostración. Sea $z \in Z$, definimos $G(z, \_) : I \to Y$ por $G(z, \_)(s) = G((z, s))$ para cada $s \in I$ y $\alpha_z = g_2(z) * G(z, \_) \in Y^I$, esto es

$$\alpha_z(l) = g_2(z) * G(z, \_)(l) = \begin{cases} g_2(z)(2l), \ si \ 0 \leq l \leq \frac{1}{2} \\ \\ G((z, (2l-1))), \ si \ \frac{1}{2} \leq l \leq 1 \end{cases}$$

tenemos que α_z está bien definido pues $g_2(z)(1) = p \circ g_2(z) = G \circ i_0(z) = G(z, 0)$. Consideremos $L = \{\alpha_z \mid z \in Z\} \subset Y^I$ y $\theta : I \times I \to I$ definida por $\theta((t, s)) = (s+ts)/2$ para cada $(t, s) \in I \times I$. Por la Propocición 2.20 tenemos que la función $\bar{\theta} : L \times I \to Y^I$, definida por:

$$\bar{\theta}(\alpha_z, t)(s) = \alpha_z((s + ts)/2)) = \begin{cases} g_2(z)(s + ts), \ si \ 0 \leq t \leq \frac{1}{1+s} \\ \\ G((z, s + ts - 1)), \ si \ \frac{1}{1+s} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es continua.

Sea $\phi : Z \to L$ la función definida por $\phi(z) = \alpha_z$, tenemos que ϕ es continua. En efecto, sea $z \in Z$, supongamos que $\phi(z) \in (K, A) \cap L$, con (K, A) un básico de la topología de Y^I, definimos $K_1 = K \cap [0, 1/2]$ y $K_2 = K \cap [1/2, 1]$, tenemos que tanto K_1 como K_2 son compactos en I. Para cada $\omega \in K_1$, $g_2(z)(2\omega) = \alpha_z(\omega) \in A$, esto es, $g_2(z) \in (2K_1, A)$, donde $2K_1 := \{2\omega | \omega \in K_1\}$, así existe U abierto en Z tal que $z \in U$ y $g_2(U) \subset (2K_1, A)$, esto pues g_2 es continua, por otro lado para cada $\omega \in K_2$ tenemos que $\alpha_z(\omega) = G((z, 2\omega - 1)) \in A$, como G es continua, existen O_ω abierto en Z y Q_ω abierto en I tales que $z \in O_\omega$, $\omega \in Q_\omega$ y $G((y, 2s - 1)) \in A$ para todo $(y, s) \in O_\omega \times Q_\omega$. Como $\{Q_\omega\}_{\omega \in K_2}$ es una cubierta abierta de K_2 que es compacto, existe una subcubierta finita $\{Q_{\omega i}\}_{i=1,\ldots,n}$ de $\{Q_\omega\}_{\omega \in K_2}$, así tomemos $O = \cap_{i=1}^n O_{\omega_i}$ que es un abierto en Z que contiene a z. Tenemos que $W = U \cap O$ es un abierto en Z tal que contiene a z, además $\phi(W) \subset (K, A)$ pues sean $y \in W$ y $w \in K$ tenemos que si $\omega \in K_1$, $\alpha_y(\omega) = g_2(y)(2\omega) \in A$, pues $y \in U$. Si $\omega \in K_2$, tenemos que $\alpha_y(\omega) = G((y, 2\omega - 1))$, además existe $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tal que $\omega \in Q_{\omega_{i_0}}$, así $y \in O_{\omega_{i_0}}$ de donde $G((y, 2\omega - 1)) \in A$.

Finalmente tenemos que $\tilde{G}_2 = \bar{\theta} \circ (\phi \times 1_I)$, de donde $\tilde{G}_2$ es continua.

□

La demostración de la Proposición 2.23 puede verse en [8,Proposición 9, Pág. 269].

Proposición 2.23. *Sean $X \in \mathfrak{Top}$, X^I el espacio de caminos en X con la topología compacto abierta, entonces son fibraciones de Hurewicz:*

(a) $p : X^I \to X \times X$ tal que para cada $\omega \in X^I$, $p(\omega) := (\omega(0), \omega(1))$.

(b) Para $i = 0, 1$, $p_i : X^I \to X$ tal que para cada $\omega \in X^I$, $p_i(\omega) := \omega(i)$.

(c) Para cada $x_0 \in X$, $p : P(X, x_0) \to X$ tal que para cada $\omega \in P(X, x_0)$, $p(\omega) := \omega(1)$ y $P(X, x_0) = \{\alpha \in Y^I \mid \alpha(0) = x_0\}$, con la topología de subespacio de Y^I.

En el capítulo siguiente serán utilizados los resultados referentes a $\mathbb{E}$-fibraciones, una importante observación es que hay un gran número de resultados que involucran las $\mathbb{E}$-fibraciones y su comportamiento con levantamientos de funciones y los grupos fundamentales, material de la topología algebraica, dichos resultados pueden expresarse también en términos de funtores, pero además de esto, otra idea interesante que se genera de estudiar las $\mathbb{E}$- fibraciones con conceptos categóricos es poder aplicar el principio de dualidad, con lo que se genera el concepto de $\mathbb{E}$-cofibraciones.

Definición 2.24. *Sea $\mathbb{E}$ una clase de espacios topológicos no vacía. Una función continua $i : A \to X$ es una $\mathbb{E}-$**cofibración** si para todo $Y \in \mathbb{E}$ y para todo diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, "i"'] & & A \times I \arrow[dl, "H"] \arrow[dd, "i \times 1_I"] \\
& Y & \\
X \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "i_0"'] & & X \times I
\end{tikzcd}$$

existe una función continua $\tilde{H} : X \times I \to Y$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, "i"'] & & A \times I \arrow[dl, "H"] \arrow[dd, "i \times 1_I"] \\
& Y & \\
X \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "i_0"'] & & X \times I \arrow[ul, "\tilde{H}"']
\end{tikzcd}$$

Sólo mencionaremos los resultados duales para cofibraciones, estos dados por el principio de dualidad. Es importante mencionar que el proceso de dualización del concepto de fibración hace uso de la equivalencia dada por la Proposición 2.17, esta observación es importante si se quiere comparar como duales los diagramas dados en la Definición 2.1 y la Definición 2.24

Proposición 2.25. *Si* $i : A \to X$ *y* $k : X \to Y$ *son* $\mathbb{E}-$*cofibraciones, entonces* $k \circ i$ *es* $\mathbb{E}-$*cofibración.*

Proposición 2.26. *Si* $\{i_j : A_j \to X_j\}_{j \in J}$ *es un conjunto de* $\mathbb{E}-$*cofibraciones, entonces* $\coprod_{j \in J} i_j : \coprod_{j \in J} A_i \to \coprod_{j \in J} X_i$ *es una* $\mathbb{E}-$*cofibración.*

Lema 2.27. *Si* $i : A \to X$ *es una* $\mathbb{E}-$*cofibración y el diagrama*

$$\begin{tikzcd} W & Y \arrow[l, "k'"'] \\ X \arrow[u, "i'"] & A \arrow[l, "k"] \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

es un pushout, entonces i' *es* $\mathbb{E}-$*cofibración.*

Así mismo se define el mapeo cilíndrico M_i de una función continua i (ver Capítulo 6 de [5]), el cual es el dual del espacio N_f para una función continua f, con estos conceptos se llega al resultado dual del Teorema 2.21, el cual es el Teorema que sigue:

Teorema 2.28. *Toda función continua es la composición de una cofibración y una equivalencia homotópica.*

Capítulo 3

Fibraciones y correflexiones

En el Capítulo 2, el Lema 2.4 nos muestra que las $\mathbb{E}$-fibraciones son una clase de funciones continuas cerrada bajo pullbacks, además por la parte (1) de la Proposición 1.48 tenemos que la sobreyectividad es preservada bajo la formación de pullbacks. Por lo anterior tenemos que las $\mathbb{E}$-fibraciones sobreyectivas son una $1-$clase (Definición 3.1), en esta sección veremos que podemos asignar a cada $1-$clase una subcategoría plena de $\mathfrak{Top}$ que resulta ser una subcategoría correflexiva (Teorema 3.13), además se presentará una caracterización para saber si un espacio topológico pertenece a la categoría correflexiva asociada a la $1-$clase formada por las fibraciones de Hurewicz sobreyectivas (Lema 3.19) y más aún se mostrará que morfismos hace de correflexiones para dicha categoría (Corolario 3.20).

En todo este capítulo se consideraran subcategorías de $\mathfrak{Top}$ cerradas bajo homeomorfismos, esto es, si X es un objeto de una subcategoría $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{Top}$ y Y es homeomorfo a X, entonces Y es un objeto de $\mathcal{A}$.

3.1. Categorías asociadas a una clase de mapeos

Definición 3.1. *Diremos que M es una **0-clase** si M es una clase de funciones continuas y sobreyectivas. Una $0-$clase M es una **1-clase** si M es cerrada bajo pullbacks, esto es, si el diagrama*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

es un pullback en $\mathfrak{Top}$ *y* f *es un elemento de* M*, entonces* f' *también es un elemento de* M*.*

Definición 3.2. *Sea* M *una* 0*-clase, denotaremos por* $\mathcal{A}(M)$ *la subcategoría plena de* $\mathfrak{Top}$ *que tiene por objetos los espacios topológicos* $\mathcal{A}$ *tales que:*

Cada función $f : X \to A$ *que pertenece a* M *es una identificación.*

Ejemplo 3.3. *Si* M *es la clase de todos los homeomorfismos, entonces* $\mathcal{A}(M) = \mathfrak{Top}$*.*

Ejemplo 3.4. *Si* M *es la clase de todas las retracciones, entonces* M *es una* 0*-clase. Además para todo espacio topológico* A*, cualquier retracción* $r : X \to A$ *es una identificación, Proposición 1.14, es decir* $\mathcal{A}(M) = \mathfrak{Top}$*.*

Ejemplo 3.5. *Si* H *es una subcategoría bicorreflexiva de* $\mathfrak{Top}$ *y* M *es la clase de* H*-correflexiones, entonces* $\mathcal{A}(M) = H$*. En efecto, sea* $A \in \mathcal{A}(M)$ *y sea* $r_A : A^* \to A$ *una* H*-correflexión de* A *tenemos que* r_A *es identificación pues* $A \in \mathcal{A}(M)$*, además* r_A *es biyectiva pues* H *es bicorreflexiva, además* $r_A^{-1} \circ r_A = 1_{A^*}$ *y así por la parte (c) del Teorema 1.4 tenemos que* r_A^{-1} *es continua, de donde* $A \in H$ *pues* $A \cong A^* \in H$*. Supongamos que* $A \in H$*; si* $r_A : A^* \to A$ *es una* H*-correflexión de* A*, existe una única función continua* $\alpha : A^* \to A^*$ *tal que* $r_A \circ \alpha = 1_{A^*}$*, así* r_A *es una función continua, sobreyectiva tal que* $r_A\alpha = 1_{A^*}$ *con* α *función continua, de donde* r_A *es una retracción y por la Proposición 1.14,* r_A *es identificación, por tanto* $A \in \mathcal{A}(M)$*.*

Ejemplo 3.6. *Si* $M = \emptyset$*, entonces* $\mathcal{A}(M) = \mathfrak{Top}$*. Sea* $A \in \mathfrak{Top}$ *y supongamos que* $A \notin \mathcal{A}(M)$*, esto es existe* $f : X \to A$ *función que pertenece a* M *que no es una identificación, pero* $M = \emptyset$*, por tanto* $A \in \mathcal{A}(M)$*.*

Lema 3.7. *Sea* $\{M_j\}_{j\in J}$ *una familia de* 0*-clases, entonces* $\mathcal{A}(\bigcup_j M_j) = \bigcap_{j\in J} \mathcal{A}(M_j)$*.*

Demostración. Es claro que la unión de 0-clases es una 0-clase, además si $M \subseteq M'$ tenemos que $\mathcal{A}(M) \supseteq \mathcal{A}(M')$, pues si $A \in \mathcal{A}(M')$ y $f : X \to A$ es un elemento de M, tenemos que $f \in M \subseteq M'$ y así f es identificación pues $A \in \mathcal{A}(M')$, de donde $A \in \mathcal{A}(M)$. Así $\mathcal{A}(\bigcup_j M_j) \subseteq \bigcap_{j\in J} \mathcal{A}(M_j)$. Sea A un objeto de $\bigcap_{j\in J} \mathcal{A}(M_j)$ y $f : X \to A$ un elemento de $\bigcup_{j\in J} M_j$; como existe un $j_0 \in J$ tal que $f \in M_{j_0}$ y $A \in \mathcal{A}(M_{j_0})$, f es una identificación, de donde A es un objeto de $\mathcal{A}(\bigcup_j M_j)$.

□

Lema 3.8. *La intersección de* 1*-clases es una* 1*-clase.*

Demostración. Sea $\{M_j\}_{j\in J}$ una familia de 1-clases, consideremos el siguiente pullback en $\mathfrak{Top}$:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

con f un elemento de $\bigcap_{j\in J} M_j$, como f es un elemento de cada M_j tenemos que f' es un elemento de cada M_j, así $f' \in \bigcap_{j\in J} M_j$. $\square$

Observación 3.9. *La clase de todas las funciones sobreyectivas y continuas es una* 1*-clase que contiene a cualquier otra* 0*-clase.*

Definición 3.10. *Si M es una* 0*-clase, denotaremos por $\widehat{M}$ a la intersección de todas las* 1*-clases que contienen a M y llamaremos a $\widehat{M}$ la **1-clase generada por M**.*

Definición 3.11. *Si M es una* 0*-clase, denotaremos por $\tilde{M}$ a la clase de funciones f' tales que existe un pullback en $\mathfrak{Top}$:*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

con $f \in M$.

Lema 3.12. *Si M es una* 0*-clase, entonces $\widehat{M} = \tilde{M}$.*

Demostración. Veamos que $\tilde{M}$ es una 1-clase. Sea $f \in \tilde{M}$, existe un pullback en $\mathfrak{Top}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] & W \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "\beta'"'] & Z \end{tikzcd}$$

con $g \in M$, de donde f es continua por la definición de pullback. Veamos que f es sobreyectiva pues sea $y \in Y$ tenemos que existe $w \in W$ tal que $g(w) = \beta'(y)$, pues g es sobreyectiva, así $\beta' i = gC_w$ donde $i : \{y\} \to Y$ es inclusión y $C_w : \{y\} \to W$ es la función constante en w, así existe $\varphi : \{y\} \to X$ única función continua tal que $f\varphi = i$, de donde $\varphi(y) \in X$ y $f(\varphi(y)) = y$. Sea f' una función continua y un pullback de la forma

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y' \arrow[r, "\alpha'"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

tenemos que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\beta\circ\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & W \arrow[d, "g"] \\
Y' \arrow[r, "\beta'\circ\alpha'"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

es un pullback, esto por la Proposición 1.49, de donde $f' \in \tilde{M}$, así $\tilde{M}$ es una 1-clase.

Es claro que $M \subseteq \tilde{M}$ pues para cada $f : X \to Y$ en M tenemos que

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "I_X"] \arrow[dd, "f"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& Z \arrow[ul, dashed, "\alpha"] \arrow[ur, "\alpha"'] \arrow[dl, "\beta"] & \\
Y \arrow[rr, "1_Y"'] & & Y
\end{tikzcd}
$$

es un cuadrado cartesiano. En efecto sean $\alpha : Z \to X$ y $\beta : Z \to Y$ funciones continuas tales que $1_Y \circ \beta = f \circ \alpha$, tenemos que α es una función continua tal que $1_X \circ \alpha = \alpha$ y $f \circ \alpha = 1_X \circ \beta = \beta$, si $\varphi : Z \to X$ es una función continua tal que $1_X \circ \varphi = \alpha$ y $f\varphi = \beta$ tenemos que $1_X \circ \varphi = \alpha$, de donde $\varphi = \alpha$. Por tanto $\widehat{M} \subseteq \tilde{M}$. Sea $f \in \tilde{M}$ y M_0 una 1-clase tal que $M \subseteq M_0$, existe un pullback

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] & W \arrow[d, "g"] \\
Y \arrow[r, "\beta'"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

donde $g \in M \subseteq M_0$, así $f \in M_0$ ya que M_0 es una 1-clase. Por tanto $\widehat{M} \supseteq \tilde{M}$. $\square$

Teorema 3.13. *Si M es una 1-clase, entonces $\mathcal{A}(M)$ es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$.*

Demostración. Si $\mathcal{A}(M) = \emptyset$ entonces $\mathcal{A}(M)$ es una subcategoría correflexiva, pues de lo contrario existe $A \in \mathcal{A}(M) = \mathfrak{Top}$ tal que para todo $A^* \in \emptyset$, para toda función continua $r_A : A^* \to A$ existen $B \in \mathcal{A}(M) = \emptyset$ y $f : B \to A$ función continua tales que para todo $\alpha_f : B \to A^*$ se tiene que $r_A \circ \alpha_f \neq f$, lo cual no es posible. Supongamos que $\mathcal{A}(M) = \{\emptyset\}$ y que $\mathcal{A}(M)$ no es una subcategoría correflexiva, tenemos que existe $A \in \mathfrak{Top}$ tal que para todo $A^* \in \mathcal{A}(M) = \{\emptyset\}$ y para toda función continua $r_A : A^* \to A$ existe $B \in \mathcal{A}(M) = \{\emptyset\}$ y $f : B \to X$ función continua tales que para toda $\alpha_f : B \to A^*$ se tiene que $r_A \circ \alpha_f \neq f$, esto es existe $b \in B = \emptyset$ tal que $r_A \circ \alpha_f(b) \neq f(b)$; por tanto $\mathcal{A}(M)$ es subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$.

Veamos ahora que si $\mathcal{A}(M)$ tiene un objeto no vacío, entonces $\mathcal{A}(M)$ es cerrada bajo la formación de identificaciones y coproductos, así por el Teorema 1.70 tendremos que $\mathcal{A}(M)$ es una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$.

Supongamos que $\mathcal{A}(M)$ tiene al menos un elemento no vacío. Sean $\{A_j\}_{j \in J}$ una familia arbitraria de objetos no vacíos de $\mathcal{A}(M)$ y $f : X \to \coprod A_j$ un elemento de M; definamos para cada $j \in J$ el espacio topológico $X_j = f^{-1}(i_j(A_j))$ y $f_j = \pi_j f|_{X_j}^{i_j(A_j)} : X_j \to A_j$, donde $\pi_j : A_j \times \{j\} \to A_j$ es la proyección a A_j y $i_j : A_j \to A_j \times \{j\}$ está definida por $j(a) = (a, j)$ para cada $a \in A_j$, tenemos que $X = \bigcup_{j \in J} X_j$ pues sea $x \in X$, $f(x) \in \coprod A_j$ si y sólo si existe $j_0 \in J$ tal que $f(x) \in A_{j_0} \times \{j_0\}$ sii $x \in \bigcup_{j \in J} X_j$, además cada X_j es abierto en X pues f es continua y i_j es abierta para cada $j \in J$.

Veamos que para cada $j \in J$ el siguiente diagrama es un pullback,

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[r, "i'_j"] \arrow[d, "f_j"'] & X \arrow[d, "f"] \\ A_j \arrow[r, "i_j"'] & \coprod A_j \end{tikzcd}$$

donde $i'_j : X_j \to X$ es la inclusión. En efecto, tenemos que las funciones del diagrama son continuas pues tanto i_j como i'_j son inclusiones y f_j es composición de una restricción de f y una proyección; por las definiciones de X_j y f_j el diagrama es conmutativo. Supongamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_j \arrow[rr, "i'_j"] \arrow[dd, "f_j"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& Z \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dl, "\beta"] & \\
A_j \arrow[rr, "i_j"'] & & \coprod A_j
\end{tikzcd}$$

es conmutativo con α y β funciones continuas, tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_j \arrow[rr, "i'_j"] \arrow[dd, "f_j"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& Z \arrow[ul, "\alpha|^{X_j}"'] \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dl, "\beta"] & \\
A_j \arrow[rr, "i_j"'] & & \coprod A_j
\end{tikzcd}$$

es conmutativo pues

i. Sea $z \in Z$, $f\alpha(z) = i_j\beta(z) \in A_j \times \{j\}$ de donde $\alpha(z) \in f^{-1}(A_j \times \{j\}) = X_j$; por tanto $\alpha|^{X_j}$ está bien definida y es continua por ser restricción.

ii. Sea $z \in Z$, tenemos que $i_j f_j \alpha|^{X_j}(z) = i_j \pi_j f_{X_j}^{i_j(A_j)} \alpha|^{X_j}(z) = f\alpha(z) = i_j\beta(z)$, como i_j es inyectiva tenemos que $f_j\alpha|^{X_j}(z) = \beta(z)$, de donde $f_j\alpha|^{X_j} = \beta$.

iii. Sea $z \in Z$, $i'_j\alpha|_Z^{X_j}(z) = \alpha(z)$, de donde $i'_j\alpha|_Z^{X_j} = \alpha$.

Ahora, si h es función continua, tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_j \arrow[rr, "i'_j"] \arrow[dd, "f_j"'] & & X \arrow[dd, "f"] \\
& Z \arrow[ul, "h"'] \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dl, "\beta"] & \\
A_j \arrow[rr, "i_j"'] & & \coprod A_j
\end{tikzcd}$$

Tenemos que para toda $z \in Z$, $i'_j h(z) = i'_j\alpha|^{X_j}(z)$, como $h(z) \in X_j$ y i'_j es inyectiva, $h(z) = \alpha|^{X_j}(z)$ y por tanto $h = \alpha|^{X_j}$.

Así $f_j \in M$ para cada $j \in J$, como $f_j : X_j \to A_j$ con $A_j \in \mathcal{A}(M)$ tenemos que f_j es una identificación. Sea $g : \coprod A_j \to Y$ una función tal que gf es continua, tenemos que para cada $j \in J$, $g \circ i_j \circ f_j = g \circ f \circ i'_j$ es continua, de donde la función $g \circ i_j : A_j \to Y$ es continua pues f_j es identificación, como g está definida por $g(a,k) = g \circ i_k(a)$ para cada $(a,k) \in \coprod A_j$, por el Teorema 1.26 tenemos que g es la única función continua tal que $g \circ i_j = g \circ i_j$ para cada $j \in J$, de donde g es continua y así la topología de $\coprod A_j$ es la topología final respecto a f, así f es identificación y por tanto $\coprod A_j \in \mathcal{A}(M)$.

Ahora, veamos que $\mathcal{A}(M)$ es cerrado bajo identificaciones. En efecto sea $q : A \to X$ una identificación con $A \in \mathcal{A}(M)$ y supongamos que $f : Y \to X$ pertenece a M, consideremos el cuadrado cartesiano generado a partir del Lema 1.47

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "q"'] & X \end{tikzcd}$$

Por ser M 1-clase, $f' \in M$ y como $f' : W \to A$ con $A \in \mathcal{A}(M)$ tenemos que f' es identificación, así por la Proposición 1.6 qf' es identificación. Sea $g : X \to Z$ función tal que gf es continua. Tenemos que $g \circ p \circ f' = g \circ f \circ p'$ es continua, como $p \circ f'$ es identificación tenemos que g es continua de donde f es identificación y así $X \in \mathcal{A}(M)$. Finalmente por el Teorema 1.70 tenemos que $\mathcal{A}(M)$ es bicorreflexiva.

□

Notar que para M_E la la clase de $E-$fibraciones sobreyectivas es una $1-$clase, esto por el Lema 2.4 y la parte (3) de la Proposición 1.48.

Corolario 3.14. *Si M_E la clase de $E-$fibraciones sobreyectivas, entonces $\mathcal{A}_E := \mathcal{A}(M_E)$ es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$.*

Ejemplo 3.15. *$\mathcal{A}_S$, donde S es la categoría de espacios topológicos tales que son homeomorfos a un cubo I^n para algún n finito. En este caso, las $S-$fibraciones son llamadas fibraciones de Serre. $\mathcal{A}_S$ es la categoría formada por los espacios $B \in \mathfrak{Top}$ tales que toda fibración de Serre sobreyectiva $f : Y \to B$ es una identificación.*

Ejemplo 3.16. *$\mathcal{A}_H := \mathcal{A}_{\mathfrak{Top}}$, corresponde a la categoría formada por los espacios $B \in \mathfrak{Top}$ tales que toda fibración de Hurewicz sobreyectiva $f : Y \to B$ es una identificación.*

Ejemplo 3.17. *$\mathcal{A}_{C'}$, donde C' corresponde a la categoría de los espacios contractibles.*

Proposición 3.18. *Todo espacio contractible es un objeto de $\mathcal{A}_H$.*

Demostración. Sean B un espacio contractible y $f : Y \to B$ una fibración de Hurewicz sobreyectiva. Supongamos que $h : Y \to Z$ es una función tal que $h \circ f : X \to Z$ es continua, tenemos que existe $y_0 \in Y$ y $H : Y \times I \to Y$ una función continua tal que $H : C_{y_0} \simeq 1_Y$, además como f es sobre, tenemos que existe $x_0 \in f^{-1}(y_0)$, así conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "C_{x_0}"] \arrow[d, "i_0"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\tilde{H}"'] & B \end{tikzcd}$$

además tenemos que $h = hf\tilde{H}(\_, 1)$, pues para cada $y \in Y$, $h(y) = h(1_Y(y)) = hH(y, 1) = hf\tilde{H}(y, 1)$, de donde h es continua, así por el Teorema1.4 tenemos que f es identificación. □

Lema 3.19. *Un espacio topológico X es un objeto de $\mathcal{A}_H$ si y sólo si toda componente conexa por caminos de X es un conjunto abierto de X.*

Demostración. Sea $\{X_j\}_{j\in J}$ la familia de componentes conexas por caminos de X. Para cada $j \in J$ tomemos un punto x_j de X_j y sea $p_j : P(X, x_j) \to X_j$ la función definida por $p_j(\omega) = \omega(1)$ para cada camino ω en X_j con comienzo en x_j. Denotemos por $\mathcal{P} : \coprod P(X_j, x_j) \to X$ el morfismo definido por el pozo de funciones continuas $\{p_j\}_{j\in J}$, (ver Teorema 1.26). Tenemos que $\mathcal{P}$ es una fibración de Hurewicz, en efecto si conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & \coprod P(X_j, x_j) \arrow[d, "\mathcal{P}"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] & X \end{tikzcd}$$

tenemos que $Y = \coprod g^{-1}(P(X_j, x_j)$ y $Y \times I = \coprod (g^{-1}(P(X_j, x_j)) \times I)$. Si $y \in g^{-1}(P(X_j, x_j))$, entonces $H(y, 0) = H(i_0(y)) = \mathcal{P} \circ g(y)$ con $g(y) \in P(X_j, x_j)$ y $\mathcal{P}(P(X_j, x_j)) = X_j$ componente por caminos de X, así $H(\{y\} \times I) \subset \mathcal{P}(P(X_j, x_j)) = X_j$. Por lo anterior, para toda $j \in J$ tenemos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} g^{-1}(P(X_j,x_j)) \arrow[r, "g|"] \arrow[d, "i_0"'] & P(X_j,x_j) \arrow[d, "p_j"] \\ g^{-1}(P(X_j,x_j)) \times I \arrow[r, "H|"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}_j"] & X_j \end{tikzcd}$$

y por la parte (c) de la Proposición 2.23, tenemos que para cada $j \in J$ existe un morfismo $\tilde{H}_j$ que hace conmutar el diagrama completo. Si

$$\tilde{H} : Y \times I \to \coprod P(X_j, x_j)$$

es el morfismo coproducto definido por $\{\tilde{H}_j\}_{j\in J}$, tenemos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & \coprod P(X_j,x_j) \arrow[d, "\mathcal{P}"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\tilde{H}"] & X_j \end{tikzcd}$$

de donde $\mathcal{P}$ es fibración de Hurewicz.

Si X es un objeto de $\mathcal{A}_H$, entonces $\mathcal{P}$ es una identificación de donde cada X_j es abierto en X pues $\mathcal{P}^{-1}(X_j) = P(X_j, x_j)$ es abierto en el coproducto.

Si toda componente por caminos de X es un conjunto abierto en X, entonces $X \cong \coprod_{j\in J} X_j$ donde cada X_j es un objeto de $\mathcal{A}_H$.

$\square$

Consideremos el morfismo $\mathcal{P} : \coprod P(X_j, x_j) \to X$ definido en la prueba del Lema 3.19, y el espacio de identificación $C_H(X)$ que corresponde a la partición $\{\mathcal{P}^{-1}(x)\}_{x\in X}$, esto es, definimos la relación de equivalencia $\sim$ en $\coprod P(X_j, x_j)$ de forma que

$$\omega_1 \sim \omega_2 \Leftrightarrow \mathcal{P}(\omega_1) = \mathcal{P}(\omega_2) \Leftrightarrow \omega_1(1) = \omega_2(1)$$

y sea $q : \coprod P(X_j, x_j) \to C_H(X)$ la función cociente $q(\omega) := [\omega]_\sim$ y $C_H(X)$ el espacio cociente $\coprod P(X_j, x_j)/\sim$.

Existe un morfismo biyectivo $c : C_H(X) \to X$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \coprod P(X_j, x_j) \arrow[dl, "q"'] \arrow[d, "\mathcal{P}"] \\ C_H(X) \arrow[r, "c"'] & X \end{tikzcd}$$

Dicho morfismo c está definido de la siguiente manera

$$c([\omega]) := \omega(1).$$

c es inyectivo pues si $[\omega_1] \neq [\omega_2]$, entonces $c([\omega_1]) = \omega_1(1) \neq \omega_2(1) = c([\omega_2])$. Para $x \in X$, tenemos que existe $j_0 \in J$ tal que $x \in X_{j_0}$, de donde existe un camino ω de x_{j_0} a x y así $q(\omega) = x$, esto es, q es sobreyectiva. Finalmente c es continua pues $\mathcal{P} = c \circ q$ es continua y $C_H(X)$ tiene la topología final respecto a q.

Corolario 3.20. *Para todo espacio topológico X, el morfismo $c : C_H(X) \to X$ es una $\mathcal{A}_H-$correflexión de X.*

Demostración. Tenemos que $C_H(X)$ es cociente del coproducto $\coprod P(X_j, x_j)$ donde $P(X_j, x_j)$ es contractible para cada $j \in J$, así por la parte (3) de la Proposición 1.67 tenemos que $C_H(X) \in \mathcal{A}_H$, pues $\mathcal{A}_H$ coincide con su envolvente correflexiva (ya que $\mathcal{A}_H$ ya es una subcategoría correflexiva).

Sea $r_X : X^* \to X$ una $\mathcal{A}_H-$correflexión de X tenemos que existe un único morfismo $\mathcal{P}^0$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X^* \arrow[d, "r_x"] \\ \coprod P(X_j, x_j) \arrow[ur, "\mathcal{P}^0"] \arrow[r, "\mathcal{P}"'] & X \end{tikzcd}$$

Ya que r_X es correflexión tenemos que es inyectiva, pues $\mathcal{A}_H$ es bicorreflexiva en $\mathfrak{Top}$, además P^0 es fibación de Hurewicz. En efecto, supongamos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & P(X_j, x_j) \arrow[d, "\mathcal{P}^0"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] & X^* \end{tikzcd}$$

entonces tenemos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & P(X_j, x_j) \arrow[d, "\mathcal{P}"] \\ Y \times I \arrow[ur, "\tilde{G}"] \arrow[r, "G = r_X \circ H"'] & X \end{tikzcd}$$

de donde $\tilde{G}$ es morfismo tal que $\mathcal{P}^0\tilde{G} = H$, pues $r_X\mathcal{P}^0\tilde{G} = r_X H$ y r_X es inyectiva. Así $\mathcal{P}^0$ es fibración de Hurewicz, además tenemos que $\mathcal{P}^0$ es sobreyectiva pues sea $x \in X^*$, $r_X(x) \in X_j$ para algún $j \in J$ de donde existe ω camino de x_j a $r_X(x)$, así $r_X(\mathcal{P}^0(\omega)) = r_X(x)$ de donde $\mathcal{P}^0(\omega) = x$.

Como $X^* \in \mathcal{A}_H$ y $\mathcal{P}^0$ es fibración de Hurewicz sobreyectiva con dominio X^* tenemos que $\mathcal{P}^0$ es identificación. Tomando $h : C_H(X) \to X^*$ definida por $h([\omega]) := \mathcal{P}^0(\omega)$ es una función biyetiva tal que $hq = \mathcal{P}^0$, por la parte (e) del Teorema 1.4 tenemos que h es homeomorfismo. Finalmente tenemos que $r_X h = C$ y así C es $\mathcal{A}_H-$correflexión de X. □

Lema 3.21. *Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ y $\mathbb{E}$ una clase de espacios topológicos tal que:*

(1) $\mathbb{E}$ tiene al menos un elemento distinto del vacío,

(2) Si $Y \in \mathbb{E}$, entonces $Y \times I$ es un objeto de $\mathcal{A}$.

Si cada elemento de $\mathbb{E}$ es un objeto de la subcategoría $\mathcal{A}$, entonces toda $\mathcal{A}-$correflexión es una $\mathbb{E}-$fibración.

Demostración. Sea $r_X : X^* \to X$ una $\mathcal{A}-$correflexión de X; sea $Y \in \mathbb{E}$ y un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X^* \arrow[d, "r_X"] \\ Y \times I \arrow[r, "F"'] & X \end{tikzcd}$$

tenemos que $Y \times I \in A$, así existe una única función continua $F^0 : Y \times I \to X^*$ tal que $r_x \circ F^0 = F$. Ya que $\mathbb{E}$ es una subclase de objetos de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ tiene un objeto distinto del vacío, así r_X es biyectiva, Proposición 1.55, además $r_X \circ F^0 \circ i_0 = F \circ i_0 = r_X \circ f$, de donde $F^0 \circ i_0 = f$, esto es $\tilde{F} := F^0$ es tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X^* \arrow[d, "r_X"] \\
Y \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & X
\end{tikzcd}$$

.

□

Proposición 3.22. *Si $\mathcal{A}$ es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ y $\mathcal{M}$ es la $1-$clase generada por la clase de $\mathcal{A}-$correflexiones (Definición 3.10), entonces $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{M})$.*

Demostración. Sea $\mathcal{M}'$ la clase de $\mathcal{A}-$correflexiones y sea $\mathcal{M}$ la $1-$clase generada por $\mathcal{M}'$, tenemos que $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{M}')$, esto por el Ejemplo 3.5.

Veamos ahora que $\mathcal{A}(\mathcal{M}) = \mathcal{A}(\mathcal{M}')$. Ya que $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ tenemos que $\mathcal{A}(\mathcal{M}') \supseteq \mathcal{A}(\mathcal{M})$. Sea Y un objeto de $\mathcal{A}(\mathcal{M}')$ y $f : X \to Y$ un elemento de $\mathcal{M}$, por el Lema 3.12, existe un pullback de la forma

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f"'] & Z^* \arrow[d, "r_Z"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & Z
\end{tikzcd}$$

con r_Z una $\mathcal{A}-$correflexión de Z, como Y es un objeto de $\mathcal{A}(\mathcal{M}') = \mathcal{A}$ tenemos que existe un único morfismo $g^0 : Y \to Z^*$ tal que $r_Z g^0 = g$, esto es, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "g'"] \arrow[dd, "f"'] & & Z^* \arrow[dd, "r_Z"] \\
& Y \arrow[ul, dashed, "\varphi"] \arrow[ur, "g^0"'] \arrow[dl, "1_Y"] & \\
Y \arrow[rr, "g"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

así por la propiedad del pullback existe $\varphi : Y \to X$ tal que $f\varphi = 1_Y$, esto es f es retracción y así f es identificación (Proposición 1.14), con lo que Y es un objeto de $\mathcal{A}(\mathcal{M})$. □

Corolario 3.23. *Sean $\mathcal{M}$ una $1-$clase tal que $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{M})$. Si $\mathcal{M}'$ la clase de $\mathcal{A}-$correflexiones, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{M} \cup \mathcal{M}')$.*

Demostración. Tenemos que

$$\mathcal{A}(\mathcal{M} \cup \mathcal{M}') = \mathcal{A}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{M}') = \mathcal{A} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}.$$

□

Definición 3.24. *Una subcategoría $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{Top}$ es invariante bajo funciones continuas si para todo X objeto de $\mathcal{A}$ y para todo morfismo $f : X \to Y$ de $\mathfrak{Top}$ se tiene que $f(X)$, como sub-espacio topológico de Y, es un objeto de $\mathcal{A}$.*

Definición 3.25. *Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ invariante bajo funciones continuas y $\mathcal{M}$ una $1-$clase tal que cada uno de sus elementos es una función inyectiva, y así todos sus elementos son funciones biyectivas, definimos $\mathcal{M}_h$ una subclase de $\mathcal{M}$ tal que $f \in \mathcal{M}$ es un elemento de $\mathcal{M}_h$ si y sólo si:*

$$\forall A \subseteq cod(f) : A \in Ob(\mathcal{A}), f|_{f^{-1}(A)} : f^{-1}(A) \to A \text{ es homeomorfismo.}$$

Proposición 3.26. *Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ invariante bajo funciones continuas y $\mathcal{M}$ una $1-$clase tal que todos sus elementos son funciones inyectivas. La subclase $\mathcal{M}_h$ de la Definición 3.25 es una $1-$clase y $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{M}_h)$ (donde $\mathcal{A}^*$ es la envolvente correflexiva de $\mathcal{A}$).*

Demostración. Veamos que $\mathcal{M}_h$ es una $1-$clase. Consideremos un pullback de la forma

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y' \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

con $f \in \mathcal{M}_h$, tenemos que $f' \in \mathcal{M}$, pues $\mathcal{M}$ es una $1-$clase y $f \in \mathcal{M}$. Sea $A' \subseteq Y'$ un objeto de $\mathcal{A}$, tenemos que $A := g(A')$ es un objeto de $\mathcal{A}$, pues $\mathcal{A}$ es invariante bajo funciones continuas. Sean $f_1 := f|_{f^{-1}(A)}$ y $f_1' := (f')|_{(f')^{-1}(A')}$, consideremos el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(f')^{-1}(A') \arrow[r, "g'|_{(f')^{-1}(A')}"] \arrow[d, "f_1'"'] & f^{-1}(A) \arrow[d, "f_1"] \\
A' \arrow[r, "g|_{A'}"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad (2)
$$

primeramente para cada $x \in (f')^{-1}(A')$ tenemos que $fg'(x) = gf'(x) \in A$ de donde $g'(x) \in f^{-1}(A)$, esto es cada morfismo del diagrama anterior está bien definido. La conmutatividad del diagrama (2) está dada por la conmutatividad del diagrama (1). Supongamos que conmuta el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
f^{-1}(A') \arrow[rr, "g'|_{f^{-1}(A')}"] \arrow[dd, "f_1'"'] & & f(A) \arrow[dd, "f_1"] \\
& Q \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dl, "\beta"'] & \\
A' \arrow[rr, "g|_{A'}"'] & & A
\end{tikzcd}
\qquad (3)
$$

tenemos que conmuta el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[rrrr, "g'"] \arrow[dddd, "f'"'] & & & & X \arrow[dddd, "f"] \\
& & & f^{-1}(A) \arrow[ur, "i"] & \\
& & Q \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[uull, dashed, "\varphi'"] & & \\
& A' \arrow[dl, "i"'] & & & \\
Y' \arrow[rrrr, "g"'] & & & & Y
\end{tikzcd}
\qquad (4)
$$

donde φ' existe por la propiedad de pullback del diagrama (1), además sea $q \in Q$, tenemos que $f' \circ \varphi'(q) = i \circ \beta(q) = \beta(q) \in A'$, de donde $\varphi'(q) \in f'^{-1}(A')$. Definimos $\varphi := \varphi'|^{f^{-1}(A')} : Q \to f^{-1}(A')$, se tiene que φ hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(A') \arrow[rr, "g'|_{f^{-1}(A')}"] \arrow[dd, "f_1'"'] & & f(A) \arrow[dd, "f_1"] \\
& Q \arrow[ul, "\varphi"'] \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dl, "\beta"] & \\
A' \arrow[rr, "g|_{A'}"'] & & A
\end{tikzcd} \quad (5)$$

Además si $\theta : Q \to f^{-1}(A')$ es tal que hace conmutativo el diagrama (5) en el lugar de φ, tenemos que $i\theta : Q \to X'$ es tal que conmuta el diagrama (4) en lugar de φ', así $\theta(q) = \varphi(q)$ para todo $q \in Q$.

Lo anterior indica que el diagrama (2) es un pullback; como $f \in \mathcal{M}_h$ y A es objeto de $\mathcal{A}$ se tiene que f_1 es un homeomorfismo. Finalmente por el punto (3) de la Proposición 1.48 obtenemos que f_1' es homeomorfismo, de donde $f' \in \mathcal{M}_h$.

Sea A un objeto de $\mathcal{A}$ y $f : X \to A$ un elemento de $\mathcal{M}_h$, tenemos que f es homeomorfismo y por tanto f es identificación, así A es un objeto de $\mathcal{A}(\mathcal{M}_h)$, de donde $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{M}_h)$ y así $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{M}_h)$, pues $\mathcal{A}^*$ es la mínima subcategoría correflexiva que contiene a $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}(\mathcal{M}_h)$ es una subcategoría correflexiva, esto por el Teorema 3.13.

$\square$

Para finalizar esta sección presentamos un resultado que permite recuperar la envolvente correflexiva de una subcategoría por medio de la correspondiente $1-$clase generada por las correflexiones.

Corolario 3.27. *Si $\mathcal{M}$ es la clase de $\mathcal{A}^*-$correflexiones y $\tilde{\mathcal{M}}$ es la $1-$clase generada por $\mathcal{M}$, entonces $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{M}}_h)$.*

Demostración. Si $\mathcal{M}$ es la clase de $\mathcal{A}^*-$correflexiones tenemos que cada $f \in \mathcal{M}$ es biyectivo, por el Lema 3.12 y la Proposición 1.48 tenemos que $\tilde{\mathcal{M}}$ la $1-$clase generada por $\mathcal{M}$ es una clase de funciones biyectivas, así $\tilde{\mathcal{M}}_h$ está bien definida.

Sea $r_X : X^* \to X$ una $\mathcal{A}^*-$correflexión y sea $A \subseteq X$ un objeto de $\mathcal{A}$ veamos que $r_X|_{r_X^{-1}(A)} : r_X^{-1}(A) \to A$ es homeomorfismo. Tenemos que existe un único $i^0 : A \to X^*$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& X^* \arrow[d, "r_X"] \\
A \arrow[ur, "i^0"] \arrow[r, "i"'] & X
\end{tikzcd}$$

además $r_X(i^0(a)) = i(a) = a \in A$, así $i^0|^{r_X^{-1}(A)} : A \to r_X^{-1}(A)$ está bien definida y es tal que $r_X|_{r_X^{-1}(A)} \circ i^0|^{r_X^{-1}(A)} = 1_A$, además tenemos que $r_X|$ es biyectiva de donde $(r_X|_{r_X^{-1}(A)})^{-1} = i^0|^{r_X^{-1}(A)}$, con lo cual $r_X|_{r_X^{-1}(A)}$ es homeomorfismo. Por lo anterior tenemos que $\mathcal{M} \subseteq \tilde{\mathcal{M}}_h$, en consecuencia tenemos que $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{M}}_h) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{M}) = \mathcal{A}^*$, la última igualdad es por el Ejemplo 3.5, por otro lado, por la Proposición 3.26 tenemos que $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{M}}_h)$. Esto es $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}(\tilde{\mathcal{M}}_h)$. □

3.2. $H-$subcategorías correflexivas de Top

En esta sección se trabajará con subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$ pero a diferencia de la sección anterior, en ésta nos interesarán las subcategorías correflexivas que tienen una propiedad relacionada con las equivalencias homotópicas a las cuales llamamos H-subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$ (Definición 3.30), veremos la relación de estas subcategorías con las fibraciones de Hurewicz (Teorema 3.32). Veremos que la subcategoría correflexiva asociada a la $1-$clase de fibraciones de Hurewicz biyectivas es la mínima H-subcategoría correflexivas de $\mathfrak{Top}$ (Teorema 3.34).

Definición 3.28. *Sean X y Y objetos de $\mathfrak{Top}$, Y tiene el mismo tipo de homotopía de X si existen morfismos $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$. A f se le llama equivalencia homotópica y a g se le llama inversa homotópica de f.*

Definición 3.29. *Sean X un espacio topológico, un subespacio Y de X e $i : Y \to X$ la inclusión. Decimos que Y es un **retracto fuerte por deformación** de X si existen $r : X \to A$ y $H : Y \times I \to Y$ funciones continuas tales que:*

(1) $ri = 1_A$.

(2) $H : ir \simeq 1_X$

(3) Para toda $y \in Y$ y toda $t \in I$, $H(y,t) = y$.

Definición 3.30. *Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría de $\mathfrak{Top}$, $\mathcal{A}$ es una $H-$subcategoría si para todo objeto X de $\mathcal{A}$, todo objeto Y de $\mathfrak{Top}$ que tiene el mismo tipo de homotopía de X es también un objeto de $\mathcal{A}$.*

Lema 3.31. *Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ tal que toda $\mathcal{A}$-correflexión es una fibración de Hurewicz. Si X es un retracto fuerte por deformación de Y, entonces Y es un objeto de $\mathcal{A}$.*

Demostración. Si X es un retracto fuerte por deformación de Y, considerando $i : X \to Y$ la inclusión, tenemos que $X \subseteq Y$ y que existen funciones continuas $r : Y \to X$ y $H : Y \times I \to Y$ tales que $H : i \circ r \simeq 1_Y$, $r \circ i = 1_X$ y $H(y,t) = y$ para cada $t \in I$ y $y \in Y$. Sea $r_Y : Y^* \to Y$ una $\mathcal{A}-$correflexión de Y, tenemos que existe un único morfismo i^0 tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} & Y^* \arrow[d, "r_Y"] \\ X \arrow[ur, "i^0"] \arrow[r, "i"'] & Y \end{tikzcd}$$

así tenemos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i^0 \circ r"] \arrow[d, "i_0"'] & Y^* \arrow[d, "r_Y"] \\ Y \times I \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"'] \arrow[r, "H"'] & Y \end{tikzcd}$$

donde $\tilde{H}$ existe pues r_Y es fibración de Hurewicz. Definiendo $s \equiv \tilde{H}(\_,1) : Y \to Y^*$ tenemos que

$$r_Y s = r_Y \tilde{H}(\_,1) = H(\_,1) = 1_Y$$

esto es, r_Y es retracción. Finalmente por la Proposición 1.15 tenemos que r_Y es homeomorfismo, de donde $Y \cong Y^*$ es un objeto de $\mathcal{A}$, pues $\mathcal{A}$ es cerrada bajo isomorfismos.

$\square$

Teorema 3.32. *Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$, entonces $\mathcal{A}$ es una $H-$subcategoría si y sólo si toda $\mathcal{A}-$correflexión es una fibración de Hurewicz.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A}$ es una $H-$subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$, sea $r_X : X^* \to X$ una $\mathcal{A}-$correflexión de X, consideremos la factorización de r_X dada por el Teorema 2.21

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[rr, "\nu"] \arrow[dr, "r_X"'] & & N_{r_X} \arrow[dl, "\rho"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

donde ν es equivalencia homotópica y ρ es fibración de Hurewicz, tenemos así que N_{r_X} es un objeto de $\mathcal{A}$, de donde existe un único morfismo ρ^0 tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X^* \arrow[d, "r_X"] \\ N_{r_X} \arrow[ur, "\rho^0"] \arrow[r, "\rho"'] & X \end{tikzcd}$$

Ya que $r_X \circ \rho^0 \circ \nu = \rho \circ \nu = r_X$ y que r_X es biyectiva, tenemos que $\rho^0 \circ \nu = 1_X$, esto es ρ^0 es retracción. Supongamos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & X^* \arrow[d, "r_X"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] & X \end{tikzcd} \quad (1)$$

tenemos entonces que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\nu g"] \arrow[d, "i_0"'] & N_{r_X} \arrow[d, "\rho"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}'"] & X \end{tikzcd}$$

donde $\tilde{H}'$ existe pues ρ es fibración de Hurewicz, así definiendo $\tilde{H} := \rho^0 \circ \tilde{H}' : Y \times I \to X^*$ tenemos que

1. $\tilde{H} \circ i_0 = \rho^0 \circ \tilde{H}' \circ i_0 = \rho^0 \circ \nu \circ g = 1_X \circ g = g$;
2. $r_X \circ \tilde{H} = r_X \circ \rho^0 \circ \tilde{H}' = \rho \circ \tilde{H}' = H$.

Esto es, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & X^* \arrow[d, "r_X"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "\tilde{H}"] & X \end{tikzcd} \quad (1)$$

Así r_X es una fibración de Hurewicz.

□

Definición 3.33. *Sea $\mathcal{M}_{HB}$ la clase de fibraciones de Hurewicz biyectivas, definimos $\mathcal{A}_{HB} := \mathcal{A}(\mathcal{M}_{HB})$. Denotamos por $\mathcal{A}_P$ a la envolvente correflexiva de la categoría de los espacios conexos por caminos, y denotaremos por $\mathcal{A}_C$ a la envolvente correflexiva de la categoría de los espacios conexos.*

Teorema 3.34. *Se tiene que $\mathcal{A}_{HB}$ es la mínima $H-$subcategoría correflexiva no vacía de $\mathfrak{Top}$.*

Demostración. Sea X un objeto de $\mathcal{A}_{HB}$ y sea Y un espacio topológico con mismo tipo de homotopía de X, consideremos $f : X \to Y$ equivalencia homotópica con inversa homotópica g y sea $p : E \to X$ una fibración de Hurewicz biyectiva, consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} E'' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p''"'] & E' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

donde ambos cuadros son pullbacks, dados por el Lema 1.47, tenemos que por la Proposición 1.48 tanto p' como p'' son biyectivas, además por el Lema 2.4 tenemos que tanto p' como p'' son fibraciones de Hurewicz, así p'' es homeomorfismo, pues X es un objeto de $\mathcal{A}_{HB}$, y que también p' es homeomorfismo, por Proposición 1.48. Además tenemos que $g \circ f \simeq 1_X$, así existe un morfismo $h : E'' \to E'$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} E'' \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p''"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

de donde podemos tomar $p^{-1} := h \circ p'^{-1}$, así p es homeomorfismo y X es un objeto de $\mathcal{A}_{HB}$.

Finalmente sea $\mathcal{A}$ una $H-$subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ y sea X un objeto de $\mathcal{A}_{HB}$, sea $r_X : X^* \to X$ una $\mathcal{A}-$correflexión, tenemos que por el Teorema 3.32 r_X es fibración de Hurewicz, como r_X es correflexión tenemos que r_X es biyectiva, así r_X es isomorfismo, de donde X es un objeto de $\mathcal{A}$, esto es $\mathcal{A}_{HB}$ es una subcategoría de $\mathcal{A}$. $\square$

Definición 3.35. *Una subcategoría $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{Top}$ es una subcategoría componente si para cada X objeto de $\mathfrak{Top}$ existe un conjunto $\{X_j\}_{j\in J} \subset Ob(\mathcal{A})$ tal que:*

(1) $X = \coprod_{j\in J} X_j$;

(2) Si $j \neq i$, entonces $X_j \cap X_i = \emptyset$;

(3) Si A es un objeto de $\mathcal{A}$ y $A \subset X$, entonces existe $j \in J$ tal que $A \subset X_j$.

Cada X_j se le llama $\mathcal{A}-$componente de X.

El resultado siguiente, Proposición 3.36, está descrito en [3, Method 2, Pág. 204].

Proposición 3.36. *Una subcategoría $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{Top}$ es una subcategoría componente si y sólo si la unión de toda familia centrada de objetos de $\mathcal{A}$, esto es, para toda familia de objetos de $\mathcal{A}$, si la intersección de la familia es no vacía, entonces la unión de tal familia es un objeto de $\mathcal{A}$.*

Proposición 3.37. *El espacio I es un objeto de $\mathcal{A}_{HB}$.*

Demostración. Tenemos que I es un espacio contractible, así por la Proposición 3.18, I es un objeto de $\mathcal{A}_H$, así si $f : Y \to I$ es una fibración de Hurewicz biyectiva tenemos que f es identificación, de donde I es un objeto de $\mathcal{A}_{HB}$. □

Remarcamos el resultado siguiente, que exhibirá una caracterización de cuando la envolvente correflexiva de una subcategoría componente e invariante bajo mapeos continuos es una $H-$subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$, y aún más, nos proporcionará en cada caso las correflexiones de cualquier objeto de $\mathfrak{Top}$.

Teorema 3.38. *Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría componente y plena de $\mathfrak{Top}$, que es invariante bajo mapeos continuos. La subcategoría $\mathcal{A}^*$ es una $H-$subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ si y sólo si I es un objeto de $\mathcal{A}$. En este caso, una $\mathcal{A}^*-$correflexión de un espacio X es el mapeo*

$$\eta := \coprod_{j\in J} i_j : \coprod_{j\in J} X_j \to X$$

dado por la familia de inclusiones $\{i_j : X_j \to X\}_{j\in J}$ donde $\{X_j\}_{j\in J}$ es el conjunto de $\mathcal{A}-$componentes de X.

Demostración. Supongamos que la subcategoría $\mathcal{A}^*$ es una $H-$subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$, por el Teorema 3.34 tenemos que $\mathcal{A}_{HB} \subseteq \mathcal{A}^*$, y así por la Proposición 3.37 tenemos que I es un objeto de $\mathcal{A}^*$ y por el Teorema 21.2.6 de [4] tenemos que $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}_{sum}$ y todo espacio conexo que es objeto de $\mathcal{A}_{sum}$ es un objeto de $\mathcal{A}$, de donde I es un objeto de $\mathcal{A}$.

Sea $\mathcal{M}_{HB}$ la familia de todas las fibraciones de Hurewicz biyectivas y sea $M_h \subset \mathcal{M}_{HB}$ la subclase formada por los morfismos $f : X \to Y$ en $\mathcal{M}_{HB}$ tales que:

$$\forall A \subseteq Y, A \in Ob(\mathcal{A}), f| : f^{-1}(A) \to A \text{ es homeomorfismo}$$

Sea X un objeto de $\mathfrak{Top}$, sea $\{X_j\}_{j\in J}$ el conjunto de $\mathcal{A}-$componentes de X y $\{i_j : X_j \to X\}_{j\in J}$ la familia de inclusiones.

Cada i_j es una fibración de Hurewicz inyectiva pues supongamos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & X_j \arrow[d, "i_j"] \\ Z \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & X \end{tikzcd}$$

sea $z \in Z$ tenemos que $H((z,0)) \in X_J$ además $H(z, \_) : I \to X$ es un morfismo y así $H(z, \_)(I)$ es un objeto de $\mathcal{A}$, pues I es un objeto de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es invariante bajo funciones continuas, y ya que $H(z, \_)(I) \cap X_j \neq \emptyset$, tenemos que $H(z, \_)(I) \subset X_j$, así $\tilde{H} := H| : Z \times I \to X_j$ está bien definida y hace conmutar el diagrama completo.

Sea $\eta := \coprod_{j \in J} i_j : \coprod_{j \in J} X_j \to X$, veamos que η es fibración de Hurewicz. Supongamos que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & \coprod_{j \in J} X_j \arrow[d, "\eta"] \\ Z \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & X \end{tikzcd} \quad (1)$$

tenemos entonces que $Z = \coprod_{j \in J} g^{-1}(X_j)$ y $Z \times I = \coprod_{j \in J} (g^{-1}(X_j) \times I)$. Si $z \in g^{-1}(X_j)$ entonces $F((z,0)) = i_j \circ g(z) \in X_j$, así $F(z, \_)(I) \subset X_j$, de donde para cada $j \in J$ tenemos un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} g^{-1}(X_j) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & X_j \arrow[d, "i_j"] \\ g^{-1}(X_j) \times I \arrow[r, "F|"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}_j"] & i_j(X_j) \end{tikzcd}$$

donde $\tilde{F}_j$ existe pues cada i_j es fibración de Hurewicz, así $\tilde{F} := \coprod_{j \in J} \tilde{F}_j$ es tal que conmuta el diagrama completo (1).

Por lo anterior tenemos que η es una fibración de Hurewicz biyectiva.

Sea $r_X : X^* \to X$ una $\mathcal{A}-$correflexión de X. Notar que $\coprod_{j \in J} X_j$ es un objeto de $\mathcal{A}^*$, esto por la Proposición 1.67, así tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & X^* \arrow[d, "r_X"] \\ \coprod_{j \in J} X_j \arrow[r, "\eta"'] \arrow[ur, dashed, "\eta^0"] & X \end{tikzcd}$$

donde η^0 viene dada por la reflexión r_X. Tenemos que η^0 es biyectiva pues tanto r_X como η lo son, además η^0 es fibración de Hurewicz.

Si conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & \coprod_{j\in J} X_j \arrow[d, "\eta^0"] \\ Z\times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & X^* \end{tikzcd} \qquad (2)$$

entonces conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & \coprod_{j\in J} X_j \arrow[d, "\eta"] \\ Z\times I \arrow[r, "r_X F"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{G}"] & X \end{tikzcd}$$

donde $\tilde{G}$ existe pues η es fibración de Hurewicz, además

$$r_X \circ F = \eta \circ \tilde{G} = r_X \circ \eta^0 \circ \tilde{G}$$

de donde $\eta^0 \circ \tilde{G} = F$, así $\tilde{F} := \tilde{G}$ es tal que hace conmutativo el diagrama completo (2).

Además $\eta^0 \in \mathcal{M}_h$, así por la Proposición 3.26 tenemos que $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{M}_h)$ de donde $\eta^0 : \coprod_{j\in J} X_j \to X^*$ es identificación biyectiva y así η^0 es un homeomorfismo, esto hace a η una $\mathcal{A}-$correflexión y a r_X una fibración de Hurewicz. Finalmente por el Teorema 3.32 tenemos que $\mathcal{A}^*$ es una H-subcategoría.

$\square$

Teorema 3.39. *Las subcategorías $\mathcal{A}_P$ y $\mathcal{A}_C$ son $H-$subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$, además $\mathcal{A}_P$ es la mínima $H-$subcategoría correflexiva que es envolvente de una subcategoría que cumple con las hipótesis del Teorema 3.38 y tiene al espacio I en la clase de objetos.*

Demostración. Sean $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ las categorías plenas de $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos son los espacios topológicos conexos por caminos y conexos, respectivamente, tenemos que tanto $\mathcal{A}_1$ como $\mathcal{A}_2$ son invariantes bajo mapeos continuos y subcategorías componentes, y ambas tienen al espacio I en la clase de objetos; así por el Teorema 3.38 tenemos que $\mathcal{A}_P = \mathcal{A}_1^*$ y $\mathcal{A}_C = \mathcal{A}_2^*$ son $H-$subcategorías correflexivas de $\mathfrak{Top}$.

Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría plena de $\mathfrak{Top}$ que es invariante bajo mapeos continuos, subcategoría componente y que tiene al espacio I en la clase de objetos. Sea X un objeto de $\mathcal{A}_1$, tomemos $x_0 \in X$ fijo, así $X = \bigcup_{x\in X} T_x$ donde T_x es la imagen en X de un camino de x_0 a x, además $\{T_x\}_{x\in X}$ es una familia centrada, así X es un objeto de $\mathcal{A}$.

$\square$

Para finalizar esta sección daremos una técnica para generar, a partir de un espacio topológico particular, subcategorías componentes e invariantes bajo mapeos continuos, así podemos obtener $H-$subcategorías correflexivas, las $H-$subcategorías correflexivas obtenidas se compararán con las H- subcategorías correflexivas $\mathcal{A}_P$ y $\mathcal{A}_C$.

Definición 3.40. *Sea Y un espacio topológico, Y es un $H-$generador en $\mathfrak{Top}$ si:*

(1) Y tiene más de un punto;

(2) Y es conexo;

(3) Y es totalmente inconexo por trayectorias, esto es, cada componente por caminos de Y consta de un solo punto;

(4) Y es T_1.

Definición 3.41. *Sean X y Y dos objetos de $\mathfrak{Top}$. Por $X\pi Y$ denotamos que los únicos mapeos de X a Y son las funciones constantes. Dado un espacio topológico Y, definimos $\mathcal{A}^-(Y)$ como la subcategoría plena de $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos están definidos por*

$$Ob(\mathcal{A}^-(Y)) := \{X \in \mathfrak{Top} \mid X\pi Y\}.$$

Proposición 3.42. *Para todo Y objeto de $\mathfrak{Top}$, $\mathcal{A}^-(Y)$ es una subcategoría componente e invariante bajo mapeos continuos.*

Demostración. $\mathcal{A}^-(Y)$ es una subcategoría invariante bajo mapeos continuos. Sea X un objeto de $\mathcal{A}^-(Y)$ y $f : X \to Z$ una función continua. Sea $g : f(X) \to Y$ una función continua, supongamos que g no es constante, tenemos entonces que $g \circ f : X \to Y$ es un morfismo y ya que $X\pi Y$, gf es constante, de esta forma existen $s, t \in f(X)$ tales que $g(s) \neq g(t)$, de donde existen $x, y \in X$ tales que $s = f(x)$ y $t = f(y)$ así $g \circ f(x) \neq g \circ f(y)$ lo cual es una contradicción, por tanto $f(X)\pi Y$, esto es, $f(X)$ es un objeto de $\mathcal{A}^-(Y)$.

Veamos que $\mathcal{A}^-(Y)$ es una subcategoría componente. Sea $\{A_j\}_{j\in J}$ una familia centrada de objetos de $\mathcal{A}^-(Y)$ y sea $f : \bigcup_{j\in J} A_j \to Y$ una función continua, tenemos que $f_j := f| : A_j \to Y$ es constante para toda $j \in J$, sea $x_0 \in \bigcap_{j\in J} A_j$ tenemos que $f_j = C_{f(x_0)}$ para todo $j \in J$, así $f = C_{f(x_0)}$, esto es f es constante; de donde $\bigcup_{j\in J} A_j$ es un objeto de $\mathcal{A}^-(Y)$.

□

Teorema 3.43. *Si Y es un $H-$generador en $\mathfrak{Top}$, entonces $\mathcal{A}(Y)$, la envolvente correflexiva de $\mathcal{A}^-(Y)$, es $H-$correflexiva en $\mathfrak{Top}$, además $\mathcal{A}_P \subset \mathcal{A}(Y) \subset \mathcal{A}_C$ y $\mathcal{A}_P \neq \mathcal{A}(Y) \neq \mathcal{A}_C$.*

Demostración. Sea Y un $H-$generador, sean X un espacio conexo por caminos y $f : X \to Y$ un morfismo, tenemos que $f(X)$ es conexo por caminos y así existe $y_0 \in Y$ tal que $f(X) \subset \{y_0\}$ de donde f es constante, por tanto X es un objeto de $\mathcal{A}^-(Y)$. Por lo anterior tenemos que $\mathcal{A}_p \subset \mathcal{A}(Y)$. Ya que I es conexo por caminos tenemos que I es un objeto de $\mathcal{A}^-(Y)$, así por la Proposición 3.42 y el Teorema 3.38 tenemos que $\mathcal{A}(Y)$ es H-correflexiva en $\mathfrak{Top}$.

Veamos que $\mathcal{A}(Y) \subset \mathcal{A}_C$. Sea W un espacio disconexo, $W \notin \mathcal{A}^-(Y)$ pues sean U y V una disconexión de W tenemos que $f : W = U \cup V \to Y$ definida por $f(U) = \{y_1\}$ y $f(V) = \{y_2\}$, con y_1, $y_2 \in Y$ distintos, es un morfismo no constante de W a Y. Esto es, todo objeto de $\mathcal{A}^-(Y)$ es conexo y así $\mathcal{A}(Y) \subset \mathcal{A}_C$.

Para mostrar que $\mathcal{A}_P \neq \mathcal{A}(Y)$, consideremos $X = X_1 \cup X_2 \subset \mathbb{R}^2$, donde

$$X_1 := \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\} \quad \text{y} \quad X_2 := \{(x, sen(1/x)) \mid 0 < x \leq 1\}.$$

Tenemos que X no es el coproducto de X_1 y X_2, que son las componentes conexas por caminos. Tenemos que por el Teorema 3.38, el mapeo $\eta : X_1 \coprod X_2 \to X$, definido por las inclusiones $i : X_1 \to X$ y $j : X_2 \to X$, es una $\mathcal{A}_P$-correflexión de X, si X es un objeto de $\mathcal{A}_P$, tenemos que $1_X : X \to X$ la identidad es una $\mathcal{A}_P$-correflexión de X y así existe un isomorfismo h que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} X_1 \coprod X_2 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\eta"'] & & X_1 \cup X_2 \arrow[dl, "1_X"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

esto es $X_1 \coprod X_2$ es isomorfo a $X_1 \cup X_2$ pero esto es una contradicción ya que uno es espacio disconexo y el otro espacio es conexo. Por lo anterior X no es un objeto de $\mathcal{A}_P$. Veamos que X es un objeto de $\mathcal{A}(Y)$, de hecho X es un objeto de $\mathcal{A}^-(Y)$, Sea $f : X \to Y$ un morfismo, tenemos que existe $y_1 \in Y$ tal que $f(X_2) = \{y_1\}$, pues Y es totalmente inconexo por trayectorias, además $f^{-1}(\{y_1\})$ es cerrado en X, pues Y es T_1 y f es continua, de donde $X = \overline{X_2} \subset f^{-1}(y_1)$, esto es f es constante y así X es un objeto de $\mathcal{A}^-(Y)$.

Veamos que $\mathcal{A}(Y) \neq \mathcal{A}_C$. Sea C una $\mathcal{A}^-(Y)-$componente de Y, supongamos que y_1, $y_2 \in C$ con $y_1 \neq y_2$, tenemos que $i : C \to Y$ la inclusión es continua pero no es constante, pues $i(y_1) \neq i(y_2)$, lo cual es una contradicción, por tanto las $\mathcal{A}^-(Y)-$componentes de Y son espacios con un solo punto. Tenemos que por el Teorema 3.38, el mapeo $\eta : \coprod_{y \in Y} \{y\} \to Y$, definido por las inclusiones $\{i_y : \{y\} \to Y\}_{y \in Y}$, es una $\mathcal{A}(Y)-$correflexión, si Y

es un objeto de $\mathcal{A}(Y)$ tenemos que el morfismo identidad $1_Y : Y \to Y$ es también una $\mathcal{A}(Y)-$correflexión y así Y es isomorfo a $\coprod_{y\in Y}\{y\}$ lo cual es una contradicción pues Y es conexo y $\coprod_{y\in Y}\{y\}$ no es conexo. Esto es Y no es un objeto de $\mathcal{A}(Y)$ y Y es un objeto de $\mathcal{A}_C$. $\square$

3.3. $H-$reflexividad en $\mathfrak{Top}$

Es posible analizar el concepto dual a la H-correflexividad en $\mathfrak{Top}$ en un resultado en particular; hasta esta sección se puede ilustrar cómo los conceptos duales generan dos enriquecidas líneas de conceptos y resultados, pero en particular la H-reflexividad en $\mathfrak{Top}$ se puede resumir en el Teorema 3.46.

Definición 3.44. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría y $\mathcal{B}$ una subcategoría de $\mathcal{A}$. Se dice que $\mathcal{B}$ es una subcategoría reflexiva de $\mathcal{A}$ si para todo objeto X de $\mathcal{A}$ existe un objeto X^* en $\mathcal{B}$, llamado $\mathcal{B}-$reflector de X, y un morfismo $S_X : X \to X^*$ en $\mathcal{A}$, llamado $\mathcal{B}-$reflexión de X, tal que para todo objeto Y de $\mathcal{B}$ y todo morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{A}$, existe un único morfismo $f^0 : X^* \to Y$ en $\mathcal{B}$ tal que $f^0 \circ s_X = f$.*

$$\begin{tikzcd} & X^* \arrow[dl, "f^0"'] \\ Y & X \arrow[l, "f"] \arrow[u, "s_X"'] \end{tikzcd}$$

Definición 3.45. *Una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ es $H-$reflexiva de $\mathfrak{Top}$ si es reflexiva en $\mathfrak{Top}$ y es una $H-$subcategoría.*

La demostración de este último teorema se puede ver en [6, Teorema 3.3, Pág. 33] y es generada a partir de la factorización de un morfismo en una cofibración y una equivalencia homotópica (Lema 2.28).

Teorema 3.46. *Si $\mathcal{A}$ es una subcategoría $H-$reflexiva de $\mathfrak{Top}$, entonces $\mathcal{A} = \mathfrak{Top}$.*

Conclusiones

1. Es de suma importancia entender que la teoría de subcategorías correflexivas en $\mathfrak{Top}$ se puede desarrollar gracias a la especificidad de la categoría $\mathfrak{Top}$, esto es, gracias a que $\mathfrak{Top}$ es una $(Epi{-}ex, Mono){-}$categoría es posible hacer uso del Teorema de caracterización de subcategorías correflexivas, así como es importante observar que en el desarrollo de la teoría de subcategorías correflexivas en $\mathfrak{Top}$ se han utilizado conceptos y propiedades topológicas que no han sido expuestas en términos categóricos, tales como la topología compacto-abierta y de manera imperceptible el papel que juega el espacio topológico I tanto para las fibraciones como para las $H{-}$subcategorías correflexivas.

2. Es crucial para el desarrollo de las pruebas el conocer de forma concreta los espacios y morfismos que se generan a través de las definiciones de los límites de los diagramas; en algunos casos no es suficiente con saber de la existencia de dichos límites. Este trabajo es un intento por clarificar cada paso en la teoría aquí presentada para construir escalones solidos entre la teoría básica y la teoría expuesta en los textos aquí referenciados.

3. Con el objetivo de realizar una expoción que desarrollara el artículo *Fibrations and correflections* [7] de Graciela Salicrup y Roberto Vázquez, se hizo lo posible por exponer lo justo y necesario para dar avance hasta los resultados con más protagonismo, pero cabe mencionar que en el proceso se descartaron conceptos interesantes en $\mathfrak{Top}$ como los funtores adjuntos, la teoría de cofibraciones y la relación de las fibraciones con levantamiento de homotopías.

Bibliografía

[1] *Bazúa E. G.* (2013) *Fibraciones y Correflexiones*, Revista Electrónica de Contenido Matemático, U.N.A.M., Foro Red-Mat Volumen 30.

[2] *Campos E.* (2016) *Topología categórica una introducción,* Tesis M.C., Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

[3] *Herrlich H.* (1969) *Limit-operators and topological coreflections.* Berlín: Transactions of the American Mathematical Society, Volumen 146.

[4] *Herrlich H.* (1968) *Topologische Reflexionen und Coreflexionen.* Berlín: Springer Verlag.

[5] *May J.P.* (1999) *A Concise Course in Algebraic Topology,* Chicago Lectures in Mathematics.

[6] *Nakagawa R.*(1989), *Categorical topology.* En: *Topics in General Topology (pp. 563-623).* Editores K. Morita y K. Nagata. Osaka, Japón: North-Holland.

[7] *Salicrup, G. y Vázquez R.* (1988) *Fibrations and coreflections I.* En: *Categorical Topology the complete work of Graciela Salicrup (pp. 19-37).* Editores H. Herrlich y C. Prieto. México: Aportaciones Matemáticas, Serie: Notas de investigación 2, Sociedad Matemática Mexicana.

[8] *Salicrup, G.* Editores J. Rosenblueth y C. Prieto (1997) *Introducción a la Topología.* México: Aportaciones Matemáticas, Serie: Textos Nivel medio 1, Sociedad Matemática Mexicana.

[9] *Spanier, E. H.* (1966) *Algebraic Topology* Higher Mathematics, McGraw-Hill.