



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

El método de amplitudes aplicado en el modelo estándar
efectivo y sus extensiones supersimétricas

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

por

M.C. Jonathan Reyes Pérez

Asesorado por

Dr. J. Lorenzo Díaz Cruz

Puebla Pue.
16 de febrero del 2026



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

El método de amplitudes aplicado en el modelo estándar
efectivo y sus extensiones supersimétricas

Tesis presentada al

Posgrado en Física Aplicada

como requisito parcial para la obtención del grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

por

M.C. Jonathan Reyes Pérez

Asesorado por

Dr. J. Lorenzo Díaz Cruz

Puebla Pue.

16 de febrero del 2026

Título: El método de amplitudes aplicado en el modelo estándar efectivo y sus extensiones supersimétricas

Estudiante: M.C. JONATHAN REYES PÉREZ

COMITÉ

Dr. Cupatitzio Ramírez
Romero
Presidente

Dra. Olga Guadalupe Félix
Beltrán
Secretario

Dra. Ana Aurelia Avilés
López
Vocal

Dr. Roger José Hernández
Pinto
Vocal Externo

Dr. Manfred Kraus
Vocal Externo

Dr. Humberto Salazar
Ibargüen
Vocal Suplente

Dr. J. Lorenzo Díaz Cruz
Asesor

Índice general

1. Aspectos básicos de álgebras de Lie en Física de Partículas	11
1.1. Teoría de grupos	12
1.2. Simetrías del espacio tiempo	15
1.2.1. Transformaciones de Lorentz	15
1.2.2. Grupo de Lorentz y Poincaré	16
1.2.3. Algebra de Poincaré	22
1.3. El grupo $SL(2, \mathbb{C})$	24
1.3.1. Conexión entre $SL(2, \mathbb{C})$ y el grupo de Lorentz $L_+^\uparrow$	26
1.4. El grupo pequeño de Wigner	29
1.4.1. El concepto de grupos pequeños o little groups	29
1.4.2. Operadores de Casimir	31
1.4.3. Partículas con masa	33
1.4.4. Partículas sin masa	33
1.5. La contracción del grupo pequeño o little group contraction	35
1.5.1. La contracción de Inonu-Wigner	35
1.5.2. La contracción entre los grupos pequeño $O(3)$ y el $E(2)$	36
1.5.3. Contracción del grupo cilíndrico	37
1.5.4. El grupo pequeño $E(2)$ como el límite de masa cero del grupo pequeño $O(3)$ para partículas masivas	37
1.6. Espinores	39
1.6.1. Dirac, Majorana y de Weyl	39
1.7. La ecuación de Dirac	43
1.7.1. Representaciones	43
1.7.2. Ecuación de Dirac y espinores de Weyl	46
2. Teoría de perturbaciones en Física de Partículas y Gravedad	49
2.1. Amplitudes de dispersión	52
2.1.1. La matriz S	52
2.1.2. Reglas y diagramas de Feynman	56
2.1.3. Calculando amplitudes	59
2.1.4. Pasos para construir una amplitud	62
2.1.5. Procesos de dispersión en el modelo estándar	62
2.2. La contracción del grupo pequeño en las amplitudes	74
2.2.1. $Z^0 \longrightarrow f\bar{f}$	77
3. Métodos modernos en Teoría Cuántica de Campos: El método de Amplitudes	81
3.1. ¿Qué define a una teoría cuántica de campos?	82
3.1.1. ¿Hay una mejor manera para calcular amplitudes de dispersión?	85
3.2. El formalismo de los espinores de helicidad de Weyl, caso sin masa	87
3.2.1. El método de amplitudes en Electrodinámica Cuántica	90

3.3. Supergravedad $N = 1$ en $D = 4$	92
3.3.1. Supersimetría $N = 1$	92
3.3.2. Relatividad general como teoría efectiva	93
3.4. El método de amplitudes en Supergravedad $N = 1$	99
3.4.1. Relaciones de KLT de $N = 1$ SUGRA	99
3.5. El efecto Compton Gravitón-Gravitino	104
3.5.1. El diagram D y el vértice de cuatro puntos	105
3.5.2. Diagram de Feynman A	106
3.5.3. Diagram de Feynman B	107
3.5.4. Diagram de Feynman C	108
3.6. El formalismo de los espín espinores o Nima-Huang-Huang	109
3.6.1. Espinores de helicidad másivos	110
3.6.2. Espín espinores, caso másivo	112
3.6.3. Espín espinores en Electrodinámica Cuántica	116
4. Métodos modernos de amplitudes: reescribiendo la Física de Partículas	119
4.1. Teorías Constructivas para partículas sin masa	119
4.1.1. Teorías constructivas para amplitudes de tres partículas	120
4.1.2. Teorías constructivas para amplitudes de cuatro partículas	124
4.2. Teorías constructivas para partículas con masa	127
4.2.1. El factor x	127
4.2.2. El decaimiento $Z \rightarrow f\bar{f}$	133
4.3. Relaciones de recursión, el caso BCFW.	136
4.3.1. Teorema de Cauchy y desplazamientos complejos	136
4.3.2. Método de recursión Britto-Cachazo-Feng-Witten (BCFW)	138
4.3.3. Argumento general	138
4.3.4. BCFW y la interacción de cuatro puntos en supergravedad $N=1$	139
4.3.5. Desplazamientos de los momentos complejos en BCFW	144
4.3.6. BCFW másivo y el proceso $p\bar{p} \rightarrow t\bar{t}H$	150
5. Conclusiones	157
A. Invarianza de supergravedad $N = 1$ ante difeomorfismos	161
B. Invarianza de S_{SUGRA} ante SUSY global	163
C. Supergravedad $N = 1$ en $D = 4$ en dos componente	167
D. Espacio fase $d^3\text{LIPS}$	175
E. Tecnología de las matrices de Dirac en $D = 4$	181
F. Representación de las matrices de Dirac en $D = 4$	185
G. Soluciones a la ecuación de Dirac, representación de Weyl	191
H. Corte Unitario y BCFW para calcular a ordenes de Lazos	199
Bibliografía	213

Agradecimientos

A mis padres, Simón y Celia Lucía, quienes me han apoyado en todo momento y son mi motor de vida. Si he llegado lejos es porque me he subido a sus hombros de gigantes.

A mis hermanos, Adzaira, Alex y Alexis por darme su cariño, comprensión y paciencia. Saben que los amo mucho.

A mi novia Aly Bubu, gracias por todo tu amor y cariño durante todos estos años, has sido mi gran compañera y cómplice en esta gran aventura. También por tu paciencia y ser mi estrella de la mañana. Te amaré hasta mi último átomo.

A mi asesor y gran amigo, Dr. J. Lorenzo Díaz Cruz por abrirme las puertas de la física de partículas y confiar en mí, gracias por todos esos consejos, discusiones y pláticas inolvidables en el Italian Coffee y Profética, nuestras oficinas. Gracias por estos 13 años de amistad.

A mis sinodales, Dr. Cupatitzio Ramírez Romero, Dra. Olga Felix Beltrán, Dra. Ana Aurelia Avilés López, Dr. Roger J. Hernandez, Dr. Manfred Kraus y Dr. Humberto Salazar, por su guía, sus consejos y su paciencia durante mis avances de tesis y congresos nacionales e internacionales.

A mis amigos y alumnitos, Jorge León Silverio, Pablo Ortega Ruiz, Kevin Plata, Carlos Tellez, Jacobo Hernández, Mario Espinosa, Miguel Angel Estevez, Ivan Pérez, gracias por su amistad e invaluable paciencia en todos estos años, sin ustedes muchas cosas nunca hubieran sido posibles. A Oscar Meza Aldama, Moisés Zeleny, Mario Aldair y Dibya por su apoyo incondicional, les debo mucho.

Agradezco a SECITHI, antes CONACYT, por haberme otorgado la beca de posgrado *Becas Nacional (Tradicional) 2022 - 1*, sin la cual nunca hubiera podido estudiar mi doctorado. También agradezco al CIIEC y la VIEP por haberme apoyado a asistir a las escuelas de Amplitudes en Praga, Republica Checa en 2022 así como a las escuelas Gravitational Waves meet Amplitudes in the Southern Hemisphere y Modern Amplitudes Methods for Gauge and Gravity Theories en 2023, donde aprendí la mayor parte del material sobre el que se basa esta tesis. Además de brindarme nuevas amistades y contactos de todo el mundo.

Agradezco al Dr. Manfred Kraus, al Dr. Leonardo de la Cruz, al Dr. Christian Schubert, al Dr. John Joseph Carrasco, al Dr. Fabian Bautista, al Dr. Luis Ypanaqué, al Dr. Bryan Larios y al Dr. Andres Luna por sus invaluable conversaciones y discusiones, tanto en México como en Brasil, acerca del mundo de las amplitudes en QCD, Gravedad y Supergravedad, así como por sus enriquecedores consejos, que me han ayudado mucho a formar mi pensamiento.

Agradezco al ICTP-SAIFR por su hospitalidad y las comodidades durante mi visita en Sao Paulo, Brasil en 2023. A Sergio Arguedas, Johan Sebastian y al CERN, por su hospitalidad durante mi estadía en Costa Rica en 2025.

Resumen

En esta tesis estudiamos los métodos modernos de teoría cuántica de campos, conocidos como *los métodos de amplitudes*, los cuales son un campo activo mediante el cual se pueden obtener observables físicas de una manera mas eficiente que el análisis tradicional a la Feynman a nivel árbol. Nuestro objetivo general fue entender y mejorar los cálculos en gravedad cuántica perturbativa y sus extensiones supersimétricas conocidas como teorías de supergravedad. Estas teorías predicen una partícula masiva de espín 3/2 nombrada gravitino, cuyo compañero supersimétrico es el gravitón. Específicamente, estudiamos los acoplamientos del supermultiplete gravitacional (gravitón y gravitino) de supergravedad pura $\mathcal{N} = 1$ (SUGRA, por sus siglas en inglés) siguiendo un enfoque de teorías constructivas. Primero, utilizamos la fórmula maestra que se desprende de considerar el comportamiento de escala de las variables de espinor bajo el grupo pequeño. Segundo, derivamos los acoplamientos de 4 puntos mediante las relaciones de recursión de Britto-Cachazo-Feng-Witten (conocidas como BCFW). Luego, verificamos estos resultados para las interacciones generales de 3 puntos que pueden derivarse mediante las relaciones de Kawai-Lewellen-Tye (también conocidas como relaciones de tipo KLT), es decir, pueden escribirse como el cuadrado del acoplamiento de los gluones y gluinos. Además, consideramos el efecto Compton SUGRA gravitón-gravitino. Por otro lado, revisamos el formalismo espín-espinos o Nima-Huang-Huang (NHH formalism, en inglés), el cual describe partículas con masa y cualquier espín, se calculan procesos como $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ de electrodinámica cuántica (QED, por sus siglas en inglés) a nivel árbol usando el método híbrido, es decir, usando reglas de Feynman para construir la amplitud y posteriormente se cambian de variables, pasando de espinos de Dirac a espín-espinos para ilustrar el poder de esta técnica. Finalmente, intentamos construir nuestro propio formalismo masivo con la ayuda del concepto de contracción entre grupos a la Kim (Little Group Contraction) y compararlo con el formalismo NHH en el calculo de amplitudes. Para completar, presentamos en el Apéndice el lagrangiano SUGRA $\mathcal{N} = 1$ en el formalismo de Weyl de 2 componentes, incluyendo pruebas de supersimetría (SUSY, por sus siglas en inglés) e invariancias de norma, así como revisar aspectos básicos de los métodos de corte unitario y BCFW para calcular a orden de lazos (loops, en inglés).

Palabras clave: Supergravedad, Teorías constructivas, Little Group Contraction , espinos de Weyl, espín-espinos, ttH, BCFW, KLT.

Introducción

Si no cometes errores, no estás trabajando
en problemas lo suficientemente difíciles.
Y eso es un gran error.

Frank Wilczek,
Premio Nobel de Física 2004

La Teoría Cuántica de Campos (QFT, por sus siglas en inglés) es el marco teórico que nos ayuda a entender los procesos de interacción entre las partículas llamadas fundamentales. Desde mediados del siglo XX esta teoría se ha ido desarrollando hasta tener su forma actual, la cual los métodos de las reglas y diagramas de Feynman son las técnicas estándar para el cálculo de procesos de decaimiento, dispersión o aniquilación [1, 2, 3]. Sin embargo, el método a la Feynman deja de ser efectivo al considerar un mayor número de partículas en el estado final debido a que el número de diagramas de Feynman crece considerablemente, por lo que se necesita otro enfoque [4, 5]. Por ejemplo, uno de los resultados más importantes ha sido la fórmula de Parke-Taylor, el cual es la amplitud de dispersión de n -gluones no importa si tenemos miles o millones de diagramas de Feynman, lo que refleja que hay más simetrías de las que podemos ver en teorías como cromodinámica cuántica (QCD, por sus siglas en inglés) [6, 7]. A la forma tradicional con los diagramas de Feynman es imposible obtener la fórmula de Parke-Taylor. Los métodos modernos para calcular amplitudes nos dan otro enfoque que va más allá de solo obtener un valor cuantitativo al momento de calcular una observable, también nos dicen qué estructuras matemáticas hay detrás de las amplitudes [7, 8]. Los axiomas que se toman en este enfoque son la localidad, unitariedad, analiticidad y las propiedades del grupo pequeño (little group), lo que construye la forma que deben tener las amplitudes [8, 9, 10, 11]. Además, es ahora más claro que la visión canónica podría ser la fuente de mucha de la in-eficiencia en el cálculo de amplitudes a la Feynman. Nuestro nuevo entendimiento de la física de partículas nos ha llevado al desarrollo de los métodos de amplitudes (on-shell methods, en inglés) y las técnicas de twistores [12, 13, 14, 15, 16]. Ahora hay una nueva esperanza para poder construir teorías cuánticas de campos completamente en términos de las propiedades y la unitariedad de la matriz- S . Se han hecho mayores avances en la extensión de estos métodos al caso masivo con una nueva y diferente forma de entendimiento [17, 18]. Por otro lado, existen otros puntos de vista donde se ven a las amplitudes desde la óptica de las geometrías como la geometría positiva grassmaniana [19, 20]; el más famoso es el caso del Amplituhedron el cual es un tipo de polytop en espacios curvos [21, 22, 20]. En México se han hecho algunos trabajos al respecto, incluidos tesis de posgrado en los métodos de amplitudes [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31]. El método de espín-espinores se ha estado usando para estudiar diferentes teorías como el Modelo Estándar Efectivo (SMEFT, por sus siglas en inglés) [32], la Teoría Electro-Débil [33, 34], neutrinos [35], agujeros negros [36, 37] y Materia Oscura [38].

Por otro lado, uno de los problemas abiertos en la física fundamental es tratar de hacer compatibles la Mecánica Cuántica y la Relatividad General. Casi un siglo de investigación nos ha mostrado lo difícil que es lograrlo, por ello todos los intentos por encontrar algún avance son valiosos. En particular, un caso de una teoría cuántica de la gravedad es supergravedad, que incorpora supersi-

metría, una nueva simetría que intercambia bosones y fermiones. En este trabajo de tesis se propone discutir la teoría mas sencilla de supergravedad, llamada $N = 1$, formulada en el espacio-tiempo $D = 4$. Para ello presentamos primero un breve repaso de relatividad general, Teoría Cuántica de Campos y Supersimetría en la sección 3.3.

En el año 1907, dos años después de haber publicado *On the Electrodynamics of Moving Bodies*, Albert Einstein observó que la teoría de la gravitación newtoniana era incompatible con la relatividad especial, por lo que propone el llamado principio de equivalencia, el cual supone la equivalencia entre un campo gravitacional y un sistema de referencia acelerado. La nueva teoría relativista sería una generalización de la relatividad especial, construida sobre el principio de equivalencia. Fue hasta el año de 1916 que Albert Einstein anunciaría su famosa teoría de la Relatividad General (GR, por sus siglas en inglés), la cual describe el espacio-tiempo mediante una elegante estructura matemática que conecta la curvatura de dicho espacio-tiempo con la gravedad [39, 40, 41]. De forma independiente, D. Hilbert llegaría a las mismas ecuaciones de campo a partir de un único principio variacional un año antes que Einstein, hoy en día a la acción que describe el campo gravitacional se le conoce como la acción de Einstein-Hilbert.

Tiempo después, con el surgimiento de la mecánica cuántica, se propone hacerla compatible con la relatividad especial, entonces nace lo que se conoce como Teoría Cuántica de Campos (QFT, por sus siglas en inglés), como su nombre lo dice es la cuantización de los campos clásicos como el campo electromagnético. En QFT los grados de libertad son operadores y funciones del espacio-tiempo, los cuales actúan en un espacio de Hilbert, mientras que la imagen de las interacciones es que son mediadas por partículas. Así como en electromagnetismo el mediador es el fotón, la partícula mediadora de la fuerza gravitacional se llama *Gravitón*, el cual es un bosón de espín 2 [42].

En 1939, Fierz y Pauli proponen una teoría general para partículas de un espín arbitrario, en esta teoría las partículas de espín entero son descritas por tensores del rango adecuado y las de espín semi-entero son descritas por espinores de orden múltiple [43]. Posteriormente en 1941, J. Schwinger presenta un método alternativo al formalismo de Fierz y Pauli para partículas de espín semi-entero, así se desarrolla la teoría de espín $\frac{3}{2}$, conocida hoy en día como la teoría de Rarita-Schwinger [44].

En la década de los 70's, nuevas simetrías estaban siendo estudiadas en modelos con campos de dos dimensiones conocidas entonces como transformaciones de supernorma, luego en 1974, Julius Wess y Bruno Zumino propusieron un modelo para campos en cuatro dimensiones, que mezclaba fermiones y bosones, hoy en día esta simetría es conocida como *Supersimetría* (SUSY, por sus siglas en inglés) [45].

Supersimetría es un formalismo que une partículas de diferentes espines, con masas iguales, en un multiplete simétrico lo que tiene implicaciones teóricas importantes. Uno de ellos es que provee una solución para el *problema de jerarquías*, el cual se refiere al hecho de que la masa del Higgs recibe correcciones enormes a orden de lazos (loops diagrams, en inglés), a este problema también se le conoce en la literatura como problema de naturalidad o *fine-tuning problem* [46]. En general, SUSY hace que las correcciones bosónicas y fermiónicas a orden de un lazo para las masas de las partículas, se cancelen exactamente. Por lo tanto, se encontró que es posible construir teorías cuánticas de campos con mejor comportamiento en el ultra-violeta (UV): las teorías supersimétricas.

En este punto, surge la idea natural de tratar de combinar teorías supersimétricas con la relatividad general, el resultado fue presentado por Freedman, van Nieuwenhuizen y Ferrara en 1976, quienes introdujeron lo que hoy se conoce como *Supergravedad* (SUGRA, por sus siglas en inglés) [47].

La inclusión de la gravedad a un nivel cuántico ha sido un area activa de estudio por casi un siglo. En el dominio infrarrojo, gravedad cuántica (QG, por sus siglas en inglés) se encuentra en el mismo nivel que las otras tres interacciones en la naturaleza, con la gravedad mediada por la partícula sin masa de espín 2, conocida como gravitón [48, 49, 50, 51, 52]. Los métodos estándar de teoría cuántica de campos, como la cuantificación, la renormalización y la regularización de las teorías de Yang-Mills (YM, por sus siglas en inglés) [53], desarrollados durante los años 60 y

principios de los 70 amplió nuestra comprensión de la gravedad débilmente acoplada. Se observó que la gravedad cuántica pura permanece libre de divergencias a un lazo, pero estas comienzan a aparecer a dos lazos en la gravedad pura. Sin embargo, la adición de materia empeora la situación cuando el nivel de lazos incluye divergencias, lo que lleva a la conclusión de que la gravedad cuántica es no renormalizable [52]. Se ha demostrado que el progreso hacia teorías de campos efectivos (EFT, por sus siglas en inglés) es notable, donde es posible realizar cálculos de lazos incluso para teorías no renormalizables, por ejemplo, la teoría de perturbación quirral [54]. En este paradigma, ahora se pueden realizar cálculos confiables para la gravedad cuántica perturbativa (pQG) a orden de lazos [55, 56, 57].

El programa moderno de amplitudes de helicidad [11, 58, 59] ha demostrado que es otra piedra angular en gravedad cuántica perturbativa. En este formalismo, se utiliza un marco unificado donde tanto las variables cinemáticas como las funciones de onda se expresan en términos de espinores de Weyl. Podemos obtener expresiones más concisas para las amplitudes máximas que violan la helicidad (MHV, por sus siglas en inglés) para los gluones en las teorías Yang-Mills, así como para los gravitones en gravedad perturbativa [60]. No sólo eso, utilizando Parke-Taylor se puede demostrar que algunas amplitudes que involucran gravitones en la relatividad general se pueden escribir como el cuadrado de la amplitud correspondiente para los gluones, esto es $GR = YM \times YM$ [61]. Este resultado se obtuvo por primera vez a nivel de árbol en la teoría de cuerdas [62], conocido como relaciones de KLT. Una extensión de esta relación se conoce como fórmula de doble copia o relación de Bern-Carrasco-Johansson (BCJ) [63, 64] el cual se mantiene a nivel de lazos. Aunque un mayor progreso se ha hecho para teorías sin masa, autores como Arkani-Hamed han hecho un vistazo al caso masivo [17, 30].

La QFT ha evolucionado a lo largo de los años y, en particular, ahora comprendemos mejor el papel de la renormalizabilidad en ella. Tras el éxito de la electrodinámica cuántica a mediados del siglo XX, donde se demostró la posibilidad de abordar los infinitos e mediante el programa de renormalización, se consideró que el siguiente objetivo debía ser desarrollar una teoría cuántica de campos para las interacciones fuertes y débiles. Esto se logró gracias al trabajo de 't Hooft y Veltman, quienes demostraron que la teorías de Yang-Mills con y sin ruptura espontánea de simetría (SSB, por sus siglas en inglés) podía ser renormalizable, siempre que, por ejemplo, se cancelaran las anomalías. Posteriormente, aprendimos, a partir del trabajo de Wilson, Weinberg, entre otros, que una teoría cuántica de campos podía organizarse en términos de operadores relevantes, irrelevantes y marginales. Sin embargo, las teorías renormalizables, largamente buscadas, solo incluyen un conjunto de operadores. Por ejemplo, se podrían agregar operadores de dimensión mayor a cuatro al modelo estándar (SM, por sus siglas en inglés) lagrangiano habitual, pero esos operadores deberían incluir potencias inversas de una escala Λ , de modo que sus efectos se supriman en comparación con los operadores de dimensión cuatro del SM.

Dentro del paradigma de las teorías efectivas, es posible tratar los efectos cuánticos (lazos) para una teoría no renormalizable (en el sentido tradicional), como gravedad cuántica perturbativa. Esto puede hacerse de forma consistente organizando los efectos de corta y larga distancia; sin embargo, corta distancia también implica alta energía, mientras que larga distancia implica baja energía. Las partículas pesadas requieren altas energías para producirse, mientras que las partículas sin masa pueden producir efectos a bajas energías. Entonces, se puede demostrar que los efectos de las partículas masivas (altas energías) aparecen como cambios en los valores de los coeficientes de los operadores del lagrangiano efectivo. Por otro lado, los efectos de las partículas sin masa (bajas energías) pueden ser de naturaleza universal, es decir, están asociados con términos no locales inducidos por lazos y no tienen parámetros. En este caso, la única partícula sin masa que se debe considerar es el gravitón.

Siguiendo la aproximación usual de gravedad cuántica perturbativa, podemos expandir la métrica ($g_{\mu\nu}$) alrededor de ($\eta_{\mu\nu}$), i.e, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$, con las fluctuaciones ($h_{\mu\nu}$) identificado como el gravitón. Luego, para derivar las autointeracciones de los gravitones, se sustituye esta expansión en los términos invariantes de curvatura que conforman la acción de Einstein-Hilbert (EH, por sus siglas en inglés). Nótese que la métrica es adimensional, $[g_{\mu\nu}] = [\kappa h_{\mu\nu}] = 0$, entonces la dimensión

de la masa del campo del gravitón es $[h_{\mu\nu}] = 1$, y $[\kappa] = -1$. Siendo la derivada de la métrica, los símbolos de Christoffel (Γ) tienen dimensión de masa $[\Gamma] = -1$, mientras que el tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci R (siendo la segunda derivada de la métrica), tienen dimensiones de masa de $[R] = 2$, i.e, $\Gamma = O(p)$, mientras $R = O(p^2)$. Por lo tanto, los elementos de matriz de gravedad cuántica perturbativa pueden ser organizados como una expansión en la energía. Además, también presentamos la acción de supergravedad $\mathcal{N} = 1$ en espinores de Weyl de dos componentes. Comenzamos con la acción a continuación y demostramos que es invariante bajo transformaciones globales SUSY y difeomorfismos, como se muestra en el apéndice (C). La acción a continuación se expresa como la suma del término Einstein-Hilbert y el término Rarita-Schwinger (RS) como:

$$S_{\text{SUGRA}} = S_{EH} + S_{RS},$$

$$= -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left((R_{\mu\nu}^L - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^L)h^{\mu\nu} + \kappa\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\tilde{\psi}_\mu\bar{\sigma}_\nu\partial_\rho\psi_\sigma - \chi_\mu\sigma_\nu\partial_\rho\tilde{\chi}_\sigma) \right), \quad (1)$$

donde $\kappa^2 = 8\pi G_N$ y G_N es la constante de Newton gravitacional. Supergravedad (SUGRA) es hermosa pero compleja [65, 66, 67], y el enfoque moderno en teoría cuántica de campos puede ayudar a dilucidar su estructura, tanto sus simetrías como sus interacciones [60]. Otro tema que ha captado mucha atención recientemente es el estudio de la amplitud a nivel de lazos para supergravedad $\mathcal{N} = 1$ y su comportamiento ultravioleta (UV). Sin embargo, el estudio a nivel de lazos queda fuera del alcance de esta tesis; pretendemos retomarlo en trabajos futuros.

Una de las componentes más cruciales de teoría cuántica de campos es la matriz S, que abarca toda la información de dispersión que puede ocurrir en el universo, donde cada elemento de la matriz denota un proceso de dispersión. Mediante métodos perturbativos, es posible derivar diagramas de Feynman a partir de elementos de la matriz [1]. Con el paso de los años, el cálculo de las amplitudes de las interacciones mediante las reglas de Feynman parecía irremplazable, pero este punto de vista puede cambiar debido a los métodos modernos, que incluyen el formalismo de espinor de helicidad para describir partículas sin masa y las relaciones de recursión BCFW, entre otros [19, 68, 69].

Como resultado de este trabajo de tesis, se publicaron 3 artículos en revistas indexadas en el Science Citation index expanded y 4 trabajos por publicarse. Todos estos trabajos en los que esta tesis se basa, han sido ampliamente difundidos tanto en conferencias nacionales como internacionales, se muestra una lista de los eventos:

- Congreso nacional de Física en Zacatecas, póster (2022). **(Mención honorífica)**
- XVIII Mexican Workshop on Particles and Fields, póster , Puebla (2022).
- RPyC CINVESTAV, póster (2023).
- XX Mexican School of Particles and Fields Mérida, Yucatán: plática (2023).
- Seminario de BNFAC, plática (2024).
- RPyC Jardín Botánico UNAM, póster (2024).
- Beyond Elliptic Polylogarithms Oaxaca, plática (2024).
- SILFAE CDMX, plática (2024).
- CLASHEP - Costa Rica, póster (2025).
- Seminario en Morelia, Michoacán, plática (2025).
- RADPyC en Pachuca, Hidalgo. Plática (2025).
- Seminario en CINVESTAV , plática(2025).

- Pheno BR Brasil, plática (2025).

Los trabajos que surgieron como parte de esta tesis son los siguientes:

- Aspectos Básicos de Supergravedad N=1 (D=4):
[Publicado en Rev. Mex. Fis. E 21 \(2024\) 2](#) **En colaboración con Lorenzo Díaz Cruz y Pablo Ortega Ruiz.**
- Aspectos Básicos del método de amplitudes I, Caso sin masa: [Publicado en Rev. Mex. Fis. E 22 \(2025\) 1](#) **Jonathan Reyes Pérez.**
- Symmetries and Interactions of N = 1 SUGRA: From constructive and BCFW to KLT formulations, [arXiv:2406.11001](#): [Publicado en International Journal of Modern Physics A, 40 \(2025\) 04](#) **En colaboración con D. Chakraborty, Lorenzo Díaz Cruz and Pablo Ortega Ruiz.**
- Little group Contraction and the massless limit in QFT: [Trabajo en progreso.](#) **En colaboración con Lorenzo Díaz Cruz, Ivan Pérez Castro y Jorge Leon Silverio.**
- Analytic Tree-Level Scattering Amplitudes for $pp \rightarrow t\bar{t}H$ Production: [Trabajo en progreso.](#) **En colaboración con Dr.Manfred Kraus.**
- Constructive MSSM: [Trabajo en progreso.](#) **En colaboración con Lorenzo Díaz Cruz, Mario Espinosa Martinez y Jorge León Silverio.**
- Aspectos Básicos del método de amplitudes II, Caso masivo: [Trabajo en progreso.](#) **En colaboración con Mario Espinosa Martinez, Jorge León Silverio y Jacobo Hernandez Camacho.**
- Aspectos Básicos del método de amplitudes III, relaciones de recursión (BCFW): [Trabajo en progreso.](#) **En colaboración con Jorge León Silverio**

La organización de esta tesis es la siguiente: En la capítulo 1 hacemos una revisión corta de teoría de grupos mencionando incluso cuales son los grupos más generales que existen; posteriormente discutimos aspectos básicos del grupo de Lorentz y Poincaré con la finalidad de introducir el grupo pequeño (little group, en inglés), lo cual nos va permitir clasificar las propiedades de las partículas concluyendo con el concepto matemáticos de la contracción entre grupos pequeños. En la capítulo 2 hacemos una revisión de la matriz S, teoría de perturbaciones lo que permite definir las condiciones para tener elementos de matriz S o amplitudes de dispersión mediante las conocidas reglas de Feynman; también calculamos algunos procesos de dispersión como, $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, el efecto Compton y $Z \rightarrow f\bar{f}$ usando el análisis tradicional de los diagramas de Feynman para ilustrar de forma didáctica los métodos de cálculo, lo cual nos va ayudar a comparar estos métodos tradicionales con los modernos que se verán en secciones más adelante; por último mostramos algunos resultados parciales de cómo calcular amplitudes de dispersión usando la contracción entre el grupo $E(2)$ y el grupo $SU(2)$. En el capítulo 3, hacemos una revisión de los métodos modernos para calcular amplitudes dispersión empezando por definir los axiomas que se necesitan para definir una teoría cuántica de campos a partir de las propiedades del grupo pequeño, posteriormente revisamos procesos de dispersión usando el método híbrido que consiste en escribir la amplitud con las reglas de Feynman y después cambiar de variables, es decir, pasar de espinores cuatro componentes a espinores de Weyl de dos componentes, el principal cálculo de esta capítulo es el efecto Compton de supergravedad (proceso de dispersión entre un gravitino y un gravitón) usando relaciones de KLT [70]; también revisamos el formalismo de los espín espinores [17]. Finalmente, en el capítulo 4 revisamos lo que son las teorías constructivas y verificamos que hay acuerdo con los resultados obtenidos anteriormente pero ahora usando las relaciones de recursión de BCFW para el efecto Compton de supergravedad. Además, mostramos como calcular una amplitud de 5-puntos para el proceso $p\bar{p} \rightarrow t\bar{t}H$ como ilustración de estos métodos modernos [71]. Por último, se encuentran las conclusiones de esta tesis en el capítulo 5

Capítulo 1

Aspectos básicos de álgebras de Lie en Física de Partículas

Tigre, tigre, que te enciendes en luz por
los bosques de la noche
¿qué mano inmortal, qué ojo pudo idear
tu terrible simetría?
¿En qué profundidades distantes, en qué
cielos ardió el fuego de tus ojos?
¿Con qué alas osó elevarse?
¿Qué mano osó tomar ese fuego?
¿Y qué hombro, y qué arte pudo tejer la
nervadura de tu corazón?
Y al comenzar los latidos de tu corazón,
¿qué mano terrible?
¿Qué terribles pies?
¿Qué martillo?
¿Qué cadena?
¿En qué horno se templó tu cerebro?
¿En qué yunque?
¿Qué tremendas garras osaron sus
mortales terrores dominar?
Cuando las estrellas arrojaron sus lanzas
y bañaron los cielos con sus lágrimas
¿sonrió al ver su obra?
¿Quien hizo al cordero fue quien te hizo?
Tigre, tigre, que te enciendes en luz, por
los bosques de la noche ¿qué mano
inmortal, qué ojo osó idear tu terrible
simetría?

El tigre
William Blake

En este capítulo revisaremos brevemente algunas definiciones de teoría de grupos que son importantes para la física de partículas en general, lo cual nos va permitir aclarar algunos aspectos delicados en el cuerpo de este trabajo. Las siguientes secciones están basados en las siguientes referencias [4, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79]

1.1. Teoría de grupos

La teoría de grupos juega un papel importante de la física de partículas moderna. La razón es por que teoría de grupos está relacionada con simetrías. Por ejemplo, el grupo de rotaciones nos dice que las leyes de la física no cambian si rotamos el sistema de referencia.

En general, se tiene que un conjunto de ecuaciones o leyes de la física que mantienen la misma forma matemática bajo varias transformaciones tiene una simetría. La teoría de grupos está involucrado en este tipo de simetrías. Un grupo G es un conjunto de elementos $\{a, b, c, \dots\}$ el cual incluye una regla de multiplicación:

- si $a \in G$ y $b \in G$, entonces $ab \in G$; propiedad de cerradura.
- si $ab = ba$ entonces decimos que el grupo es abeliano .
- Si $ab \neq ba$ entonces el grupo es No abeliano.

Un grupo G debe satisfacer cuatro axiomas:

- Asociatividad: $(ab)c = a(bc)$
- Elemento identidad: $ae = ea = a$
- Elemento inverso: Para cada $a \in G$, existe el inverso tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = e$
- Orden: el orden del grupo, es el número de elementos que pertenecen al grupo.

En física de partículas, estamos interesados en lo que conocemos como una *representación* del grupo denotado aquí como D . Una representación es un mapeo que toma elementos del grupo $g \in G$ y los lleva a operadores lineales D que preservan la regla de composición del grupo tal que

$$D(a)D(b) = D(ab), \quad (1.1)$$

$$D(e) = 1. \quad (1.2)$$

Así como una función ordinaria que depende de la posición el cual es descrito por una variable x , esto es $y = f(x)$. Análogamente, un grupo puede también ser una función de una o más variables que llamaremos parámetros. Sea G un grupo cuyos elementos g son especificados por un conjunto finito de parámetros n $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$, entonces el elemento del grupo es

$$g = G(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \quad (1.3)$$

$$e = G(0, 0, \dots, 0). \quad (1.4)$$

Mientras hay grupos discretos con un número finito de elementos, la mayoría de los grupos en consideración tienen un número infinito de elementos. Sin embargo, estos tienen un conjunto finito de parámetros continuos que varían. En la ecuación (1.3) los parámetros están etiquetados como ángulos, ya que muchos de los grupos importantes en física son relacionados con rotaciones. Los ángulos varían continuamente en un rango finito $(0, 2\pi)$. El grupo es parametrizado por un número finito de parámetros, los cuales son los ángulos de rotación.

Sí un grupo depende de un conjunto finito de parámetros continuos θ_i y las derivadas de los elementos del grupo con respecto a todos los parámetros existen, entonces al grupo lo llamamos *grupo de Lie*. Si tenemos un grupo con un solo parámetro θ , entonces el elemento identidad es

$$g(\theta)|_{\theta=0} = e, \quad \text{con } \theta = 0 \quad (1.5)$$

si tomamos las derivadas con respecto de los parámetros y evaluamos las derivadas en $\theta = 0$, se obtienen los generadores del grupo:

$$X = \left. \frac{\partial g}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} \quad (1.6)$$

si hay n parámetros del grupo entonces tendremos n generadores

$$X_i = \left. \frac{\partial g}{\partial \theta_i} \right|_{\theta=0_i}, \quad (1.7)$$

si los generadores satisfacen las relaciones de conmutación

$$[X_i, X_j] = if_{ijk} X_k, \quad (1.8)$$

entonces es llamado un álgebra de Lie. Si consideramos una constante real pequeña $\epsilon > 0$ y usando la expansión de Taylor para formar una representación del grupo entonces

$$D(\epsilon\theta) \approx 1 + i\epsilon\theta X. \quad (1.9)$$

Podemos definir la representación del grupo en términos de la exponencial de la siguiente manera

$$D(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + i \frac{\theta \bar{X}}{n} \right)^n = e^{i\theta \bar{X}}. \quad (1.10)$$

Si X es hermitiano, $X = X^\dagger$ y la representación es unitaria entonces

$$D^\dagger(\theta) = (e^{i\theta X})^\dagger = e^{-i\theta X^\dagger} = e^{-i\theta X} \quad (1.11)$$

$$\Rightarrow D^\dagger(\theta)D(\theta) = (e^{-i\theta X})(e^{i\theta X}) = 1. \quad (1.12)$$

Una de las razones por las que los generadores de un grupo son importantes es que estos forman un espacio vectorial, esto significa que podemos cambiar dos generadores del grupo para obtener un tercer generador. Podemos multiplicar generadores por un escalar y todavía tener un generador del grupo. Un espacio vectorial completo puede ser usado como una base para representar otro espacio vectorial, por lo tanto los generadores del grupo pueden ser usados para representar otro espacio vectorial. Por ejemplo, las matrices de Pauli pueden ser usados para describir cualquier matriz 2×2 .

En física de partículas los grupos unitarios juegan un papel importante, ya que los operadores unitarios preservan el producto interno, esto significa que una transformación unitaria deja invariante las probabilidades para diferentes transiciones entre estados. El grupo unitario $U(N)$ consiste de todas las matrices $N \times N$ unitarias. El grupo especial unitario denotado por $SU(N)$ son matrices de $N \times N$ con determinante +1. La dimensión de $SU(N)$ y por lo tanto el número de generadores, es dado por $N^2 - 1$, entonces:

- $SU(2)$ tiene $2^2 - 1 = 3$ generadores,
- $SU(3)$ tiene $3^2 - 1 = 8$ generadores.

El rango de $SU(N)$ es $N - 1$, así que:

- El rango de $SU(2)$ es $2 - 1 = 1$,
- El rango de $SU(3)$ es $3 - 1 = 2$,

el rango da el número de operadores en el álgebra que pueden ser diagonalizados simultáneamente.

El grupo unitario más simple es el grupo $U(1)$ son matrices de 1×1 esto es un número complejo escrito en la representación polar

$$U = e^{-i\theta}, \quad (1.13)$$

donde θ es un parámetro real. $U(1)$ es abeliano, esto es

$$U_1 U_2 = e^{-i\theta_1} e^{-i\theta_2} = e^{-i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{-i(\theta_2 + \theta_1)} = e^{-i\theta_2} e^{-i\theta_1} = U_2 U_1, \quad (1.14)$$

muchos lagrangianos en teoría cuántica de campos son invariantes bajo $U(1)$. Por ejemplo el campo escalar complejo

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi, \quad (1.15)$$

es invariante bajo la transformación $\phi \rightarrow e^{-i\theta} \varphi$ cuando una lagrangiana es invariante bajo una transformación se dice que hay una simetría, en este caso una simetría $U(1)$. Las partículas mediadoras llamadas bosones de norma, están asociadas con simetrías de este tipo. En Electrodinámica Cuántica (QED, por sus siglas en ingles) el bosón de norma asociado con la simetría $U(1)$ es el fotón. El siguiente grupo unitario es $U(2)$, el cual es el conjunto de todas las matrices unitarias de 2×2 , satisfacen

$$UU^+ = U^+U = 1. \quad (1.16)$$

El grupo $SU(2)$ es el conjunto de todas las matrices 2×2 unitarias con determinante $+1$. Los generadores de este grupo son las matrices de Pauli.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

el rango de $SU(2)$ es 1, y solo hay un operador diagonalizado σ_3 . Las matrices de Pauli satisfacen

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}. \quad (1.18)$$

Todas las matrices unitarias de 2×2 son especificadas por dos parámetros, a y b que son números complejos

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Para un elemento de $SU(2)$ con $\det U = +1$ se requiere que $|a|^2 + |b|^2 = 1$. De este modo, el grupo $SU(2)$ es la simetría de importancia en el caso de las interacciones débiles, los bosones de norma correspondientes a esta simetría son el $W^\pm$ y Z^0 . El grupo $SU(3)$ unitario, el cual es de importancia en el estudio de la cromodinámica cuántica $SU(3)$ tiene 8 generadores. Estos son las llamadas matrices de Gell-Mann, las cuales están dadas por

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

El rango de $SU(3)$ es 2, las matrices diagonales son λ_3 y λ_8 . Las matrices de Gell-Mann son de traza cero y satisfacen la siguiente relación de conmutación,

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2i \sum_{k=1}^8 f_{ijk} \lambda_k. \quad (1.23)$$

Esto define la estructura algebraica de $SU(3)$. Las constantes de estructura son

$$f_{123} = 1, \quad (1.24)$$

$$f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2}, \quad (1.25)$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (1.26)$$

El grupo de Lie más general posible en un número arbitrario de dimensiones n es aquel que para cualquier punto p el espacio de dimensión n , el grupo puede continuamente tomarlo donde sea en el espacio. Esto significa que podemos tomar cualquier matriz de $n \times n$ o una transformación lineal tan larga que la matriz es invertible (no singular) [76]. De este modo, en n dimensiones el grupo de Lie más largo y más general es el grupo de todas las matrices de $n \times n$ no singulares. Este grupo es llamado $GL(n)$ o *General Linear Group*. Todas las matrices de $n \times n$ no singulares con elementos complejos se llama $GL(n, \mathbb{C})$, la cantidad preservada es que todos los puntos de $\mathbb{C}^n$ se mantienen en $\mathbb{C}^n$.

De nuestros cursos de cálculo y álgebra lineal hemos visto que en n dimensiones se pueden tomar n vectores en el origen de tal forma que el paralelepípedo definido por estos vectores se puede encontrar tomando el determinante de la matriz formada por estos vectores. Así que, si consideramos el conjunto de todas las transformaciones generales lineales que transforman todos los vectores desde el origen de tal manera que el volumen del paralelepípedo correspondiente es preservado, esto implica que solamente se consideran matrices generales lineales con determinante 1. Además, este conjunto va formar un grupo debido a la regla general

$$\det(AB) = \det A \times \det B, \quad (1.27)$$

entonces, si $\det A = 1$ y $\det B = 1$ se tiene que $\det(AB) = 1$. Este subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$ se le va llamar *Grupo Especial Lineal* o simplemente $SL(n, \mathbb{C})$, el cual no solamente preserva los puntos en el espacio así como lo hace el grupo GL , sino también preserva los volúmenes.

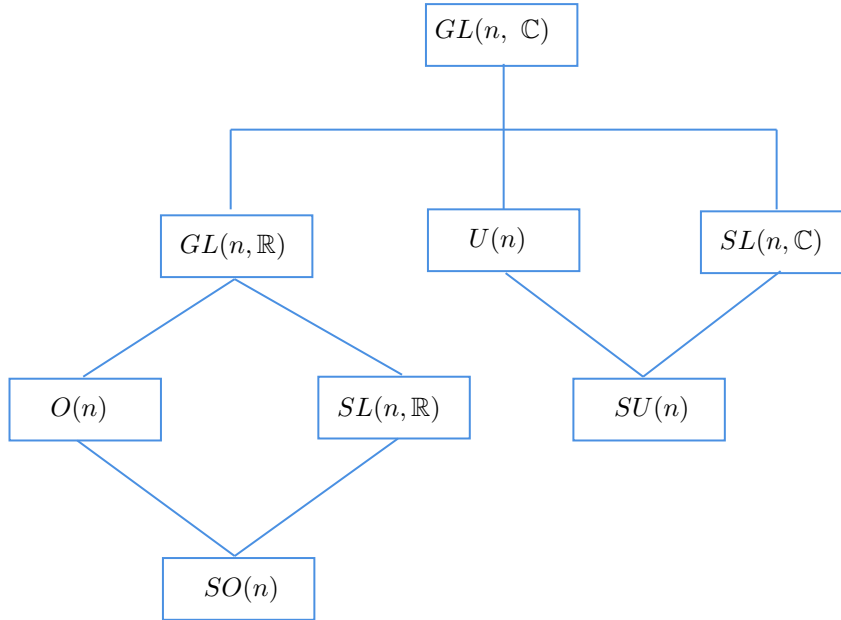


Figura 1.1: Resumen de las jerarquías de los grupos, donde $\mathbb{C}$ es el conjunto de números complejos y $\mathbb{R}$ es el conjunto de los reales.

1.2. Simetrías del espacio tiempo

1.2.1. Transformaciones de Lorentz

Las propiedades geométricas del espacio-tiempo plano surgen de los siguientes postulados:

- *Las leyes de la física lucen igual en todos los marcos de referencia inerciales. Esto significa que las ecuaciones que describen las leyes de la física deben tener una forma covariante,*

es decir, no debe cambiar su forma cuando se pasa de un marco de referencia inercial a otro (boost) o cuando se realiza una rotación en los planos espaciales (rotaciones). Si este tipo de transformaciones deja invariante la acción del sistema entonces tenemos una teoría relativista.

- *Existe una velocidad límite en la naturaleza la cual tiene un valor absoluto c .*

Si x^μ representa las coordenadas en un sistema de referencia (con $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ y $x^0 = t$ la coordenada temporal, la velocidad de la luz igual a la unidad), entonces en cualquier otro sistema inercial las coordenadas x'^μ deben satisfacer la siguiente transformación:

$$\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.28)$$

o de forma equivalente

$$\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = \eta_{\rho\sigma}. \quad (1.29)$$

Utilizaremos el tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$ con signatura $(+, -, -, -)$ en la diagonal. Utilizamos la convención de suma de índices μ, ν repetidos dos veces, una vez arriba, una vez abajo, tomando valores de cero a tres. Estas transformaciones tienen la propiedad de que la velocidad de la luz es la misma (con $c = 1$) en todos los sistemas inerciales. Veamos este enunciado: Una onda de luz viajando a velocidad 1 satisface $|d\vec{x}| = dt$ es decir.

$$\left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| = 1 \Rightarrow \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right|^2 = 1 \Rightarrow d\vec{x} \cdot d\vec{x} - dt^2 = 0 \Rightarrow d\vec{x}^2 - dt^2 = 0 \quad (1.30)$$

$$\Rightarrow dt^2 - d\vec{x}^2 = 0 \Rightarrow \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \quad (1.31)$$

Luego de (1.28) se tiene que

$$\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = 0 \Rightarrow dt'^2 - d\vec{x}'^2 = 0$$

por lo que aplicando el proceso inverso de este razonamiento obtenemos que

$$\left| \frac{d\vec{x}'}{dt'} \right| = 1.$$

1.2.2. Grupo de Lorentz y Poincaré

El grupo de Lorentz L se define como el grupo de transformaciones Λ tal que el cuadrado de un 4-vector en el espacio de Minkowski es invariante bajo L . Se puede hallar que de acuerdo con esta definición [74],

$$x_\mu x^\mu = x'_\mu x'^\mu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma x^\sigma \Lambda^\mu_\rho x^\rho, \quad (1.32)$$

es equivalente a

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \quad (1.33)$$

De manera que el grupo de Lorentz puede definirse también como

$$L \equiv O(1, 3; \mathbb{R}) = \{ \Lambda \in GL(4, \mathbb{R}) | \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \} \quad (1.34)$$

Al considerar la ecuación(1.33), podemos darnos cuenta de que

$$\begin{aligned} \det^2(\Lambda) &= \det(\Lambda^T \Lambda) = 1, \\ \Leftrightarrow \det(\Lambda) &= \pm 1. \end{aligned} \quad (1.35)$$

De manera que dentro del grupo de Lorentz tenemos un conjunto de transformaciones impropias (transformaciones con determinante -1) y otro conjunto de transformaciones propias

(determinante +1) las cuales forman un grupo, a diferencia de las impropias. De hecho, el grupo de Lorentz está dividido en 4 conjuntos desconectados en el espacio de parámetros. Dos de estos conjuntos se diferencian por su determinante, y los otros dos se determinan por el elemento Λ^0_0 , dependiendo si $\Lambda^0_0 \geq 1$ (transformaciones ortócronas) o si $\Lambda^0_0 \leq -1$ (transformaciones no-ortócronas), siendo estos los únicos dos casos posibles. Las transformaciones ortócronas son las que ocurren en el cono de luz donde el tiempo va hacia adelante.

Usualmente, cuando hablamos del grupo de Lorentz nos referimos a un sub-grupo de L , el cual comprende las transformaciones propias y ortócronas. Por lo que cuando nos refiramos al grupo de Lorentz estaremos hablando del grupo $L^\uparrow_+ \equiv \{\Lambda \in O(1, 3; \mathbb{R}) | \det(\Lambda) = 1, \Lambda^0_0 \geq 1\}$, a menos que se especifique de otra forma.

El hecho de que el grupo $L^\uparrow_+$ esté formado por transformaciones propias, permite que $L^\uparrow_+$ sea un grupo de Lie. Al ser un grupo de Lie, las transformaciones pueden escribirse como $\Lambda = e^{tu}$, donde u es un elemento del álgebra de Lie del grupo de Lorentz. Utilizando la forma exponencial de Λ en la ecuación (1.33), derivando tal ecuación respecto al tiempo y evaluando en $t = 0$, se halla la condición que define al álgebra de Lie del grupo de Lorentz, la cual es

$$\mathcal{O}(1, 3; \mathbb{R}) = \{u \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R}) | u^T = -\eta u \eta\} . \quad (1.36)$$

Consideramos

$$u = \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} & u_{03} \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{30} & u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} ,$$

entonces la condición $u^T = -\eta u \eta$ nos permite hallar los generadores del grupo de Lorentz explícitamente:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{00} & u_{10} & u_{20} & u_{30} \\ u_{01} & u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{02} & u_{12} & u_{22} & u_{32} \\ u_{03} & u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} & u_{03} \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{30} & u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -u_{00} & u_{01} & u_{02} & u_{03} \\ u_{10} & -u_{11} & -u_{12} & -u_{13} \\ u_{20} & -u_{21} & -u_{22} & -u_{23} \\ u_{30} & -u_{31} & -u_{32} & -u_{33} \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (1.37)$$

Este resultado nos dice que $u_{0i} = u_{i0}$ y $u_{ij} = -u_{ji}$. Podemos escribir u como

$$u = \begin{pmatrix} 0 & u_{01} & u_{02} & u_{03} \\ u_{01} & 0 & -u_{21} & u_{13} \\ u_{02} & u_{21} & 0 & -u_{23} \\ u_{03} & -u_{13} & u_{23} & 0 \end{pmatrix} , \quad (1.38)$$

y esta matriz se puede escribir como una combinación lineal de 6 matrices, las cuales son los generadores del grupo de Lorentz. Los generadores son

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; & M_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; & M_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \\ N_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; & N_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; & N_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Es fácil darnos cuenta de que las matrices M_i generan las rotaciones en 3 dimensiones, y las matrices N_i generan los boost. Al revisar las reglas de conmutación de estos generadores, uno encuentra que

$$[M_i, M_j] = \epsilon_{ijk} M_k, \quad (1.39)$$

$$[N_i, N_j] = -\epsilon_{ijk} M_k, \quad (1.40)$$

$$[N_i, M_j] = \epsilon_{ijk} N_k, \quad (1.41)$$

y estos resultados nos indican que los boost por sí solos no forman un grupo.

Es conveniente que los generadores hallados se expresen como matrices hermitianas y anti-hermitianas, pues eso nos lleva a tener operadores unitarios y anti-unitarios. Para esto se definen los generadores

$$J_i := iM_i, \quad K_i := iN_i. \quad (1.42)$$

Con estas definiciones y las reglas de conmutación de M_i y N_i se encuentra

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k, \quad (1.43)$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k, \quad (1.44)$$

$$[K_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} K_k. \quad (1.45)$$

Ya tenemos los generadores de $L_+^\uparrow$, sin embargo es deseable obtenerlos en una formulación covariante. Para este fin tomamos una transformación de Lorentz infinitesimal:

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu, \quad (1.46)$$

donde ω^μ_ν es el parámetro infinitesimal y contiene la información de los ángulos de giro y las pseudo-rapidez correspondientes a la transformación infinitesimal. Utilizando la transformación infinitesimal en la ecuación (1.33) se encuentra que $\omega_{\mu\nu} = \eta_{\mu\sigma}\omega^\sigma_\nu$ es antisimétrico. Tomando la ecuación (1.46) consideramos la variación δx^μ :

$$\delta x^\mu \equiv x'^\mu - x^\mu \implies \delta x^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu. \quad (1.47)$$

Ahora usamos la forma exponencial de Λ : $\Lambda^\mu_\nu = [e^{-\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}}]^\mu_\nu$, donde las matrices $M_{\rho\sigma}$ forman una base del álgebra del Lie $\mathcal{O}(1, 3; \mathbb{R})$. Nuevamente realizamos la variación de x , y se tiene

$$\delta x^\mu = [e^{-\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma}}]^\mu_\nu x^\nu - x^\mu,$$

manteniendo la exponencial a primer orden, tenemos

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \left[\mathbb{I} - \frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}M_{\rho\sigma} \right]^\mu_\nu x^\nu - x^\mu, \\ &= -\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}(M_{\rho\sigma})^\mu_\nu x^\nu. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Comparando los resultados al calcular δx^μ , tenemos que

$$\omega^\mu_\nu = -\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}(M_{\rho\sigma})^\mu_\nu. \quad (1.49)$$

Para hallar los generadores $M_{\rho\sigma}$, buscamos obtener ω^μ_ν en términos de $\omega^{\rho\sigma}$, para poder despejar $(M_{\rho\sigma})^\mu_\nu$ de la ecuación (1.49). Veamos que

$$\begin{aligned} \omega^\mu_\nu &= \eta_{\nu\alpha}\omega^{\mu\alpha} = \frac{1}{2}(\eta_{\nu\beta}\omega^{\beta\alpha}\delta^\mu_\beta - \eta_{\nu\alpha}\omega^{\alpha\beta}\delta^\mu_\beta) \\ &= -\frac{i}{2}\omega^{\beta\alpha}i(\eta_{\nu\alpha}\delta^\mu_\beta - \eta_{\nu\beta}\delta^\mu_\alpha) \\ \therefore \omega^\mu_\nu &= -\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}[i(\eta_{\nu\sigma}\delta^\mu_\rho - \eta_{\nu\rho}\delta^\mu_\sigma)]. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Comparando las ecuaciones (1.49) y (1.50), es evidente que

$$(M_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = i(\eta_{\nu\sigma}\delta^\mu{}_\rho - \eta_{\nu\rho}\delta^\mu{}_\sigma) . \quad (1.51)$$

Ahora nos gustaría poder construir un formalismo que conecte ambos tipos de generadores, J_i , K_i con $(M_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu$. Para ello primero se debe partir de la ecuación (1.51):

$$(M_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = i(\eta_{\sigma\nu}\delta^\mu{}_\rho - \eta_{\rho\nu}\delta^\mu{}_\sigma) . \quad (1.52)$$

Veamos que $(M_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu$ es antisimétrica en ρ y σ :

$$(M_{\sigma\rho})^\mu{}_\nu = i(\eta_{\rho\nu}\delta^\mu{}_\sigma - \eta_{\sigma\nu}\delta^\mu{}_\rho) = -i(\eta_{\sigma\nu}\delta^\mu{}_\rho - \eta_{\rho\nu}\delta^\mu{}_\sigma) \quad (1.53)$$

$$= -(M_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu . \quad (1.54)$$

Ahora veamos cómo son las componentes de $(M_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu$, para lo cual revisamos 2 casos que generalizan la totalidad de las componentes de $(M_{\rho\sigma})$. Los casos son: $\rho = 0$, $\sigma = i$ y $\rho = i$, $\sigma = j$.

Si $\rho = 0$, $\sigma = i$:

$$(M_{0i})^\mu{}_\nu = i(\eta_{i\nu}\delta^\mu{}_0 - \eta_{0\nu}\delta^\mu{}_i) , \quad (1.55)$$

lo cual solo es distinto de cero si $\mu = 0$ y $\nu = i$, ó $\mu = i$ y $\nu = 0$.

Si $\mu = 0$ y $\nu = i$:

$$(M_{0i})^0{}_i = i(\eta_{ii}\delta^0{}_0) \quad (\text{sin suma sobre índices}) \quad (1.56)$$

$$\Rightarrow (M_{0i})^0{}_i = -i. \quad (1.57)$$

Si $\mu = i$ y $\nu = 0$:

$$(M_{0i})^i{}_0 = i(-\eta_{00}\delta^i{}_i) = -i \quad (1.58)$$

$$\Rightarrow (M_{0i})^0{}_i = (M_{0i})^i{}_0 , \quad (M_{0i}) \text{ es simétrica.} \quad (1.59)$$

Resumimos los resultados hallados:

$$(M_{i0}) = i \begin{pmatrix} 0 & \delta_i^1 & \delta_i^2 & \delta_i^3 \\ \delta_i^1 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_i^2 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_i^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K_i, \quad (1.60)$$

$$(M_{0i}) = -(M_{i0}) ; \quad (M_{0i})^0{}_i = (M_{0i})^i{}_0 = -i ; \quad (M_{0i})^i{}_j = 0 . \quad (1.61)$$

Con estos resultados deducimos la forma de (M_{i0}) :

$$(M_{i0}) = i \begin{pmatrix} 0 & \delta_i^1 & \delta_i^2 & \delta_i^3 \\ \delta_i^1 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_i^2 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_i^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K_i. \quad (1.62)$$

El otro caso de interés es en el cual $\rho = i$, $\sigma = j$:

$$(M_{ij})^\mu{}_\nu = i(\eta_{j\nu}\delta_i^\mu - \eta_{i\nu}\delta_j^\mu) , \quad (1.63)$$

qué sólo es distinto de cero si $\nu = j$ y $\mu = i$, ó $\nu = i$ y $\mu = j$.

Si $\nu = j$ y $\mu = i$:

$$(M_{ij})^i{}_j = i(\eta_{jj}\delta_i^i) = -i. \quad (1.64)$$

Si $\nu = i$ y $\mu = j$:

$$\begin{aligned} (M_{ij})^j{}_i &= i(-\eta_{ii}\delta_j^j) = i \\ \Rightarrow (M_{ij})^i{}_j &= -(M_{ij})^j{}_i, \quad (M_{ij}) \text{ es antisimétrica.} \end{aligned}$$

También observe que dados i y j fijos se cumple que:

$$(M_{ij})^i{}_j = (M_{ji})^j{}_i, \quad (1.65)$$

Resumimos los resultados hallados:

$$(M_{ij})^i{}_j = -(M_{ij})^j{}_i = -i; \quad (M_{ij})^i{}_k = (M_{ij})^i{}_0 = 0. \quad (1.66)$$

Podemos deducir la forma de (M_{ij}) al sumar con ϵ_{kij} :

$$\begin{aligned} \epsilon_{kij}(M_{ij}) &= \delta_k^l \epsilon_{lij}(M_{ij}) \\ &= i\delta_k^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon_{123} + \epsilon_{132} \\ 0 & 0 & -\epsilon_{132} + \epsilon_{123} & 0 \end{pmatrix} + i\delta_k^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon_{213} + \epsilon_{231} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon_{231} + \epsilon_{213} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + i\delta_k^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_{312} + \epsilon_{321} & 0 \\ 0 & -\epsilon_{321} + \epsilon_{312} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &= 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\delta_k^3 & i\delta_k^2 \\ 0 & i\delta_k^3 & 0 & -i\delta_k^1 \\ 0 & i\delta_k^2 & i\delta_k^1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$J_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kij}(M_{ij}). \quad (1.67)$$

Con estos cálculos tenemos las formas explícitas de los generadores del grupo de Lorentz en su forma covariante. Se tienen dos tipos de transformaciones que conforman el grupo de Lorentz: rotaciones y boost. Por un lado, alrededor de cada eje se tiene asociada una rotación, lo denotamos como $R_x(\theta_x)$, $R_y(\theta_y)$ y $R_z(\theta_z)$. Las formas explícitas de los generadores de las rotaciones $\mathbf{J}_i$, con $\mathbf{i} = \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, son las siguientes:

$$\mathbf{J}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

Similarmente, por cada eje se tiene asociado un boost representado por $B_x(\phi_x)$, $B_y(\phi_y)$ y $B_z(\phi_z)$. Las formas explícitas de sus generadores $\mathbf{K}_i$ son:

$$\mathbf{K}_x = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.69)$$

Por otro lado, cualquier transformación de coordenadas $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ que satisface (1.29) es lineal, entonces para la siguiente expresión:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (1.70)$$

con a^μ constantes arbitrarias y $\Lambda^\mu{}_\nu$ una matriz constante que satisface la condición (1.33), estas transformaciones forman un grupo. Si primero realizamos una transformación de Lorentz (1.70), y luego una segunda transformación de Lorentz

$$x'^\mu \longrightarrow x''^\mu \text{ donde } x''^\mu = \bar{\Lambda}^\mu{}_\rho x'^\rho + \bar{a}^\mu = \bar{\Lambda}^\mu{}_\rho (\Lambda^\rho{}_\nu x^\nu + a^\rho) + \bar{a}^\mu.$$

Entonces el efecto es el mismo que el de una transformación de Lorentz $x^\mu \longrightarrow x''^\mu$ con

$$x''^\mu = (\bar{\Lambda}^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu) x^\nu + \bar{\Lambda}^\mu{}_\rho a^\rho + \bar{a}^\mu$$

Nótese que si $\Lambda^\mu{}_\nu$ y $\bar{\Lambda}^\mu{}_\nu$ satisfacen (1.33) también $\bar{\Lambda}^\mu{}_\rho \Lambda^\rho{}_\nu$. Las transformaciones $T(\Lambda, a)$, que son una representación del grupo satisfacen la regla de composición

$$T(\bar{\Lambda}, \bar{a})T(\Lambda, a) = T(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a}). \quad (1.71)$$

Observando el determinante (1.35), podemos entonces concluir que $\Lambda^\mu{}_\nu$ tiene inversa, la cual denotamos por $(\Lambda^{-1})^\nu{}_\rho$. De (1.33) podemos encontrar la forma de la matriz inversa, al multiplicar por $(\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu$ entonces

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\beta} \Lambda^\mu{}_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu \Lambda^\beta{}_\sigma &= \eta_{\rho\sigma} (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu \\ \Rightarrow \eta_{\mu\beta} \delta^\mu{}_\nu \Lambda^\beta{}_\sigma &= \eta_{\rho\sigma} (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu \\ \Rightarrow \eta^{\rho\sigma} \eta_{\nu\beta} \Lambda^\beta{}_\sigma &= (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu, \end{aligned} \quad (1.72)$$

por lo que

$$\Lambda^\rho{}_\nu = (\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu.$$

Se debe cumplir que la inversa de la transformación $T(\Lambda, a)$ a partir de (1.71) sea $T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$, y la transformación identidad $T(\mathbf{1}, \mathbf{0})$. Para comprobar esto, tenemos

$$T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) T(\Lambda, a) = T(\Lambda^{-1}\Lambda, -\Lambda^{-1}a + \Lambda^{-1}a) = T(\mathbf{1}, \mathbf{0})$$

ahora multiplicamos por la inversa propuesta:

$$T(\Lambda, a)T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) = T(\Lambda\Lambda^{-1}, \Lambda(-\Lambda^{-1}a) + a) = T(\mathbf{1}, -a + a) = T(\mathbf{1}, \mathbf{0}).$$

Así concluimos que la transformación propuesta es la inversa. La transformación $T(\Lambda, a)$ induce una transformación lineal unitaria sobre vectores en el espacio de Hilbert de la mecánica cuántica. es decir.

$$|\Psi\rangle \rightarrow U(\Lambda, a)|\Psi\rangle.$$

Los operadores U deben satisfacer la regla de composición siguiente:

$$U(\bar{\Lambda}, \bar{a})U(\Lambda, a) = U(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a})$$

El grupo de transformaciones $T(\Lambda, a)$ es propiamente conocido como el Grupo In-homogéneo de Lorentz ó el Grupo de Poincaré.

La relatividad especial estudia cómo aparecen los objetos a observadores en distintos marcos de referencia. Las transformaciones entre diferentes marcos están descritas por el grupo de Lorentz (en un espacio-tiempo plano y sin considerar traslaciones). Einstein concibió estas transformaciones para objetos puntuales sin ninguna estructura interna

Si queremos saber cómo se transforma una partícula bajo una transformación de Lorentz, no basta únicamente con los momentos de la partícula, necesitamos considerar el espín.

1.2.3. Algebra de Poincaré

Toda la información acerca de cualquier grupo de simetría de Lie está contenida en las propiedades de los elementos del grupo cercanos a la identidad. En el caso del grupo de Lorentz Inhomogéneo, la identidad es la transformación $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu, a^\mu = 0$, entonces nuestro interés se centrará en estudiar aquellas transformaciones con

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \quad a^\mu = \epsilon^\mu, \quad (1.73)$$

donde $\omega^\mu{}_\nu$ y ϵ^μ tomarán valores infinitesimales. Tomando (1.33), es decir, la condición de Lorentz, y sustituyendo la expresión anterior en ella, tenemos:

$$\begin{aligned} \eta_{\rho\sigma} &= \eta_{\mu\nu} (\delta^\mu_\rho + \omega^\mu_\rho) (\delta^\nu_\sigma + \omega^\nu_\sigma) \\ &= \eta_{\mu\nu} \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma + \eta_{\mu\nu} \delta^\mu_\rho \omega^\nu_\sigma + \eta_{\mu\nu} \omega^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma + \eta_{\mu\nu} \omega^\mu_\rho \omega^\nu_\sigma \\ &= \eta_{\rho\sigma} + \omega_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\nu\rho} \omega^\nu_\sigma, \end{aligned} \quad (1.74)$$

de la última línea deducimos que la siguiente relación se debe cumplir

$$-\omega_{\rho\sigma} = \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\nu\rho} \omega^\nu_\sigma. \quad (1.75)$$

Ya que sólo conservaremos términos a primer orden en ω obtenemos la propiedad de antisimetría de $\omega_{\mu\nu}$, esto es:

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}.$$

Un tensor de segundo rango antisimétrico en cuatro dimensiones tiene $(4 \times 3)/2 = 6$ componentes independientes; entonces, incluyendo las 4 componentes de ϵ^μ , cualquier transformación de Lorentz Inhomogénea es descrita por 10 parámetros. Para una transformación de Poincaré infinitesimal, $U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon)$ se puede realizar una expansión de Taylor, de la siguiente manera:

$$U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon) = \mathbf{1} + \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i \epsilon_\rho P^\rho + \dots, \quad (1.76)$$

donde $J^{\rho\sigma}$ y P^ρ son operadores independientes de ω y ϵ , y los puntos suspensivos denotan términos de orden mas alto en ω y/o ϵ . A fin de que $U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon)$ sea unitario bajo esta expansión, los operadores $J^{\rho\sigma}$ y P^ρ deben ser hermitianos, esto es:

$$(J^{\rho\sigma})^\dagger = J^{\rho\sigma}, (P^\rho)^\dagger = P^\rho. \quad (1.77)$$

Como $\omega_{\rho\sigma}$ es antisimétrico, los coeficientes $J^{\rho\sigma}$ también deben ser anti simétricos, es decir, $J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho}$. Por otro lado, P^1, P^2 y P^3 son las componentes del operador de momento, así como J^{23}, J^{31} y J^{12} son las componentes del operador de momento angular, y P^0 es el operador de energía o el Hamiltoniano. Consideremos el producto $U(\Lambda, a)U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a)$, donde $\Lambda^\mu{}_\nu$ y a^μ son los parámetros de una nueva transformación sin relación con ω y ϵ . Recordemos que se demostró que $U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ es el inverso de $U(\Lambda, a)$. Sustituyendo $U(\Lambda, a)U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a)$ en la expresión (2.18) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a)U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon)U^{-1}(\Lambda, a) &= U(\Lambda, a)U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon)U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \\ &= U(\Lambda, a)U((\mathbf{1} + \omega)\Lambda^{-1}, -(\mathbf{1} + \omega)\Lambda^{-1}a + \epsilon) \\ &= U(\Lambda(\mathbf{1} + \omega)\Lambda^{-1}, \Lambda(-(\mathbf{1} + \omega)\Lambda^{-1}a + \epsilon) + a) \\ &= U(\Lambda(\mathbf{1} + \omega)\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a). \end{aligned} \quad (1.78)$$

A continuación, vamos hacer un poco de álgebra y desarrollos explícitos. Entonces, si nos quedamos a primer orden en ω y ϵ , tenemos lo siguiente:

$$U(\Lambda, a) \left[\mathbf{1} + \frac{i}{2} \omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i \epsilon_\rho P^\rho \right] U^{-1}(\Lambda, a) = \mathbf{1} + \frac{i}{2} (\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu} J^{\nu\mu} - i (\Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_\mu P^\mu \quad (1.79)$$

$$\Rightarrow U(\Lambda, a) \left[\frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - \epsilon_\rho P^\rho \right] U^{-1}(\Lambda, a) = \frac{1}{2} (\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu} J^{\nu\mu} - (\Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_\mu P^\mu. \quad (1.80)$$

Notemos que

$$\frac{1}{2} (\Lambda \omega \Lambda^{-1})_{\mu\nu} J^{\nu\mu} - (\Lambda \epsilon - \Lambda \omega \Lambda^{-1})_{\mu} P^{\mu} = \frac{1}{2} \Lambda_{\mu}^{\rho} \omega_{\rho\sigma} (\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\nu} J^{\nu\mu} - \left(\Lambda_{\mu}^{\rho} \epsilon_{\rho} - \Lambda_{\mu}^{\rho} \omega_{\rho\sigma} (\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\nu} a^{\nu} \right) P^{\mu}, \quad (1.81)$$

entonces igualando coeficientes de $\omega_{\rho\sigma}$ y ϵ_{ρ} se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{2} U(\Lambda, a) J^{\rho\sigma} U^{-1}(\Lambda, a) = \frac{1}{2} \Lambda_{\mu}^{\rho} (\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\nu} J^{\nu\mu} + \Lambda_{\mu}^{\rho} (\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\nu} a^{\nu} P^{\mu} \quad (1.82)$$

$$U(\Lambda, a) P^{\rho} U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_{\mu}^{\rho} P^{\mu}. \quad (1.83)$$

Podemos ver que (1.82) se puede reescribir de la siguiente manera

$$\frac{1}{2} U(\Lambda, a) J^{\rho\sigma} U^{-1}(\Lambda, a) = \frac{1}{2} \Lambda_{\mu}^{\rho} (\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\nu} J^{\nu\mu} + \Lambda_{\mu}^{\rho} (\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\nu} a^{\nu} P^{\mu} \quad (1.84)$$

$$\begin{aligned} &= \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} J^{\nu\mu} + 2 \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} a^{\nu} P^{\mu} \\ &= \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} (J^{\nu\mu} - a^{\mu} P^{\nu} + a^{\nu} P^{\mu}). \end{aligned} \quad (1.85)$$

Para transformaciones de Lorentz Homogéneas (con $a^{\mu} = 0$) estas reglas de transformación, muestran que $J^{\mu\nu}$ es un tensor y P^{μ} es un vector. Para traslaciones puras ($\Lambda_{\mu}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$), nos damos cuenta que P^{ρ} es un invariante ante estas traslaciones pero $J^{\rho\sigma}$ no. Ahora apliquemos (1.82) y (1.83) con $\Lambda_{\mu}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} + \omega_{\mu}^{\nu}$ y $a^{\mu} = \epsilon^{\mu}$, recordando que $U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon) = \mathbf{1} + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - i \epsilon_{\mu} P^{\mu}$. Para la relación (1.82), tomando a primer orden se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon) J^{\rho\sigma} U^{-1}(\mathbf{1} + \omega, \epsilon) &= (\delta_{\mu}^{\rho} + \omega_{\mu}^{\rho}) (\delta_{\nu}^{\sigma} + \omega_{\nu}^{\sigma}) (J^{\nu\mu} - a^{\mu} P^{\nu} + a^{\nu} P^{\mu}) \\ &= \delta_{\mu}^{\rho} \delta_{\nu}^{\sigma} (J^{\nu\mu} - a^{\mu} P^{\nu} + a^{\nu} P^{\mu}) + \delta_{\mu}^{\rho} \omega_{\nu}^{\sigma} J^{\mu\nu} + \omega_{\mu}^{\rho} \delta_{\nu}^{\sigma} J^{\mu\nu} \\ &= J^{\rho\sigma} - \epsilon^{\rho} P^{\sigma} + \epsilon^{\sigma} P^{\rho} + \omega_{\nu}^{\sigma} J^{\rho\nu} + \omega_{\mu}^{\rho} J^{\mu\sigma}. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Ahora nos enfocamos en el lado izquierdo, nuevamente a primer orden tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{1} + \omega, \epsilon) J^{\rho\sigma} U^{-1}(\mathbf{1} + \omega, \epsilon) &= \left(\mathbf{1} + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - i \epsilon_{\mu} P^{\mu} \right) J^{\rho\sigma} \left(\mathbf{1} - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} + i \epsilon_{\mu} P^{\mu} \right) \\ &= J^{\rho\sigma} + i \left(\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} J^{\rho\sigma} - \omega_{\mu\nu} J^{\rho\sigma} J^{\mu\nu} \right) + i (\epsilon_{\mu} J^{\rho\sigma} P^{\mu} - \epsilon_{\mu} P^{\mu} J^{\rho\sigma}) \\ &= J^{\rho\sigma} + i \left[\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma} \right] - i [\epsilon_{\mu} P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] \\ &= J^{\rho\sigma} + i \left[\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \epsilon_{\mu} P^{\mu}, J^{\rho\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Por lo que igualando las relaciones obtenidas anteriormente, llegamos a la siguiente regla de conmutación:

$$i \left[\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \epsilon_{\mu} P^{\mu}, J^{\rho\sigma} \right] = \omega_{\mu}^{\rho} J^{\mu\sigma} + \omega_{\nu}^{\sigma} J^{\rho\nu} - \epsilon^{\rho} P^{\sigma} + \epsilon^{\sigma} P^{\rho}. \quad (1.88)$$

Para la ecuación (1.83) usamos el mismo método, obteniendo nuestra segunda regla de conmutación

$$i \left[\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} - \epsilon_{\mu} P^{\mu}, P^{\rho} \right] = \omega_{\mu}^{\rho} P^{\mu}. \quad (1.89)$$

Dicho esto, igualando coeficientes de $\omega_{\mu\nu}$ y ϵ_{μ} en ambos lados de este conjunto de ecuaciones, podemos encontrar las siguientes reglas de conmutación:

$$\begin{aligned} a) \quad & i [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + J^{\rho\mu}, \\ b) \quad & i [P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho} P^{\sigma} - \eta^{\mu\sigma} P^{\rho}, \\ c) \quad & [P^{\mu}, P^{\rho}] = 0. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Estas reglas de conmutación forman el llamado Álgebra de Lie del grupo de Poincaré. En Mecánica Cuántica juegan un rol especial aquellos operadores que se conservan, es decir, que conmutan con el operador de energía $H = P^0$, si revisamos las expresiones (a) y (b) del conjunto (1.90), vemos que aquellas componentes que cumplen con lo anterior son:

$$\bar{P} = \{P^1, P^2, P^3\}, \quad (1.91)$$

$$\bar{J} = \{J^{23}, J^{31}, J^{12}\}, \quad (1.92)$$

donde $\bar{P}$ y $\bar{J}$ representan los 3-vectores de momento y momento angular respectivamente. Claramente, el operador de energía conmuta con el mismo. Los generadores restantes forman al que es llamado el 3-vector de boost,

$$\bar{K} = \{J^{01}, J^{02}, J^{03}\}.$$

Estas componentes no son conservadas, entonces no usamos sus eigenvalores para etiquetar estados físicos. En notación tridimensional, las reglas de conmutación (1.90), pueden ser escritas como:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad (1.93)$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \quad (1.94)$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k, \quad (1.95)$$

$$[J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad (1.96)$$

$$[K_i, P_j] = -iH\delta_{ij}, \quad (1.97)$$

$$[K_i, H] = iP_i, \quad (1.98)$$

$$[J_i, H] = [P_i, H] = [H, H] = 0. \quad (1.99)$$

Las traslaciones puras $T(\mathbf{1}, a)$ forman un subgrupo del grupo inhomogéneo de Lorentz, cuya regla de multiplicación del grupo es:

$$T(\mathbf{1}, \bar{a})T(\mathbf{1}, a) = T(\mathbf{1}, \bar{a} + a). \quad (1.100)$$

Es posible ver que las traslaciones finitas, son representadas en un espacio de Hilbert físico por:

$$U(\mathbf{1}, a) = \exp(-iP^\mu a_\mu). \quad (1.101)$$

De la misma manera, se puede verificar que una rotación $R_{\vec{\theta}}$ por un ángulo $|\vec{\theta}|$ alrededor de la dirección de $\vec{\theta}$ está representada en un espacio de Hilbert físico por

$$U(R_{\vec{\theta}}, 0) = \exp(i\vec{J} \cdot \vec{\theta}). \quad (1.102)$$

1.3. El grupo $SL(2, \mathbb{C})$

En esta sección consideraremos el grupo de Lie lineal especial en dos dimensiones con parámetros complejos:

$$SL(2, \mathbb{C}) = \{M \in GL(2, \mathbb{C}) \mid \det M = +1\}. \quad (1.103)$$

Sabemos que los espinores se transforman mediante operadores lineales. Estos operadores son representaciones de $SL(2, \mathbb{C})$, de forma que D mapea $M \in SL(2, \mathbb{C})$ a un automorfismo $D(M)$. Esto es que $D(M) : F \rightarrow F$, donde F es algún espacio vectorial. En general, $D(M)$ actúa sobre los espinores $\psi \in F$ como

$$\psi' = D(M)\psi = D_n^i(M)\psi_i \hat{e}_n. \quad (1.104)$$

Existen 2 representaciones espinoriales muy importantes.

i) Representación propia

$$D(M) \equiv M, \quad \forall \quad M \in SL(2, \mathbb{C}). \quad (1.105)$$

ii) Complejo conjugado de la representación propia

$$D(M) \equiv M^*, \quad \forall M \in SL(2, \mathbb{C}) . \quad (1.106)$$

Ambas representaciones son de dimensión 2. Para entender por qué estas representaciones son importantes hay que definir las representaciones equivalentes. Se dice que dos representaciones D_1 y D_2 son equivalentes si existe una matriz invertible U , tal que

$$D_1(M) = U D_2(M) U^{-1} ; \quad (1.107)$$

básicamente, esto significa que D_1 y D_2 están relacionadas mediante un cambio de base. Si dos representaciones no son equivalentes entonces no se puede pasar de una a otra mediante un cambio de base. Precisamente, $SL(2, \mathbb{C})$ admite 2 representaciones no equivalentes; M y M^* . Bajo la representación propia, los espinores $\psi \in F$ se transforman como

$$\psi'_A = M_A^B \psi_B . \quad (1.108)$$

A los espinores que se transforman como en la ecuación(1.108) bajo $SL(2, \mathbb{C})$ se les llama espinores de Weyl izquierdos. En el caso del complejo conjugado de la representación propia, su espacio de representación es $\tilde{F}$, y sus elementos se denotan como $\tilde{\psi}$, que bajo $SL(2, \mathbb{C})$ se transforman como

$$\tilde{\psi}'_{\dot{A}} = (M^*)_{\dot{A}}^{\dot{B}} \tilde{\psi}_{\dot{B}} . \quad (1.109)$$

Los espinores $\tilde{\psi} \in \tilde{F}$ son llamados espinores de Weyl derechos. Resulta conveniente buscar una representación equivalente de M y M^* . Se puede demostrar que M^{-1T} y M^{*-1T} son dichas representaciones respectivamente. Probaremos que M y M^{-1T} son representaciones equivalentes. La prueba consiste en hallar $\epsilon \in GL(2, \mathbb{C})$ que cumpla que $M^{-1T} = \epsilon M \epsilon^{-1}$. Sea

$$\epsilon = (\epsilon_{AB}) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \epsilon^{-1} = (\epsilon^{AB}) = \frac{1}{\det(\epsilon)} \begin{pmatrix} \epsilon_{22} & -\epsilon_{12} \\ -\epsilon_{21} & \epsilon_{11} \end{pmatrix} \quad (1.110)$$

$$\text{y } M := \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1T} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{pmatrix}^T \quad (1.111)$$

$$\Rightarrow M^{-1T} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} M_{22} & -M_{21} \\ -M_{12} & M_{11} \end{pmatrix}, \quad (1.112)$$

y como $M \in SL(2, \mathbb{C}) \Rightarrow \det(M) = 1$

$$M^{-1T} = \begin{pmatrix} M_{22} & -M_{21} \\ -M_{12} & M_{11} \end{pmatrix}. \quad (1.113)$$

Hacemos el producto $\epsilon M \epsilon^{-1}$ y proponemos $\epsilon M \epsilon^{-1} = M^{-1T}$:

$$\Rightarrow \epsilon M \epsilon^{-1} \stackrel{!}{=} M^{-1T} \quad (1.114)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\det(\epsilon)} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{22} & -\epsilon_{12} \\ -\epsilon_{21} & \epsilon_{11} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} M_{22} & -M_{21} \\ -M_{12} & M_{11} \end{pmatrix}. \quad (1.115)$$

Al hacer este producto matricial, obtenemos 4 ecuaciones, de las que se halla la estructura de ϵ :

$$M_{22} \det(\epsilon) = M_{11} \epsilon_{11} \epsilon_{22} - M_{12} \epsilon_{11} \epsilon_{21} + M_{21} \epsilon_{12} \epsilon_{22} - M_{22} \epsilon_{22} \epsilon_{21}, \quad (1.116)$$

$$-M_{12} \det(\epsilon) = M_{11} \epsilon_{21} \epsilon_{22} - M_{12} \epsilon_{21}^2 + M_{21} \epsilon_{22}^2 - M_{22} \epsilon_{22} \epsilon_{21}, \quad (1.117)$$

$$-M_{21} \det(\epsilon) = -M_{11} \epsilon_{11} \epsilon_{12} + M_{12} \epsilon_{11} \epsilon_{22} - M_{21} \epsilon_{12}^2 + M_{22} \epsilon_{22} \epsilon_{12}, \quad (1.118)$$

$$M_{11} \det(\epsilon) = -M_{11} \epsilon_{12} \epsilon_{21} + M_{12} \epsilon_{21} \epsilon_{22} - M_{21} \epsilon_{12} \epsilon_{22} + M_{22} \epsilon_{22}^2. \quad (1.119)$$

Es evidente que $\det(\epsilon)$ debe ser independiente de M , entonces si despejamos $\det(\epsilon)$ de las ecuaciones (1.116) - (1.119), vemos que eso sólo es posible si $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$. Usando esta condición en la ecuación (1.117), tenemos

$$\begin{aligned} -M_{12}\epsilon_{21}^2 &= -M_{12}(-\epsilon_{11}\epsilon_{12}) \\ \Rightarrow -\epsilon_{21} &= \epsilon_{12}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, ϵ tiene la siguiente estructura

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{12} \\ -\epsilon_{12} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.120)$$

Si elegimos que $\epsilon_{12} = 1$, entonces

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \epsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon^\top. \quad (1.121)$$

Se considera una convención de índices en la que $\epsilon = (\epsilon^{AB})$, $\epsilon^{-1} = (\epsilon_{AB})$ y $M = (M_A^B)$, de forma que

$$\epsilon^{AB} M_B^C \epsilon_{CD} = (M^{-1T})^A_D, \quad (1.122)$$

con lo cual ya hemos construido ϵ , que cumple

$$M^{-1T} = \epsilon M \epsilon^{-1},$$

y por lo tanto M y M^{-1T} son representaciones equivalentes. Se procede de la misma forma para encontrar que M^* y M^{*-1T} son representaciones equivalentes. De las ecuaciones (1.108) y (1.122) se encuentra que

$$\begin{aligned} \psi'_A &= \epsilon_{AB} (M^{-1T})^B_C \epsilon^{CD} \psi_D, \\ \epsilon^{EA} \psi'_A &= (M^{-1T})^E_C \epsilon^{CD} \psi_D. \end{aligned} \quad (1.123)$$

Definimos $\epsilon^{AB} \psi_B := \psi^A \implies \psi_A = \epsilon_{AB} \psi^B$, de manera que ϵ^{AB} funciona como una métrica. Entonces se llega a

$$\psi'^A = (M^{-1T})^A_B \psi^B. \quad (1.124)$$

Se pueden hallar los mismos resultados para los espinores de Weyl derechos:

$$\psi^{\dot{A}} = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} \psi_{\dot{B}} \implies \psi_{\dot{A}} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} \psi^{\dot{B}}, \quad (1.125)$$

$$\psi'^{\dot{A}} = (M^{*-1T})^{\dot{A}}_{\dot{B}} \psi^{\dot{B}}. \quad (1.126)$$

1.3.1. Conexión entre $SL(2, \mathbb{C})$ y el grupo de Lorentz $L_+^\uparrow$

Lo que buscamos ahora es mostrar que $L_+^\uparrow$ es homomorfo a $SL(2, \mathbb{C})$, es decir, que $\forall M \in SL(2, \mathbb{C}) \quad \exists \Lambda(M) \in L_+^\uparrow$, tal que

$$\begin{aligned} \Lambda(M_1)\Lambda(M_2) &= \Lambda(M_1 M_2) \\ \Lambda^{-1}(M) &= \Lambda(M^{-1}) \end{aligned} \quad (1.127)$$

Para tal fin, comenzamos introduciendo las matrices σ^μ , las cuales corresponden a las matrices de Pauli para los casos $\mu = i$ ($i = 1, 2, 3$), y σ^0 es la matriz identidad 2×2 . En la notación de índices espinoriales, σ^μ se escribe como

$$\sigma^\mu := \begin{pmatrix} \sigma_{AA}^\mu \end{pmatrix},$$

también se define

$$(\bar{\sigma}^\mu)^{A\dot{A}} := \epsilon^{AB} \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} (\sigma^\mu)_{B\dot{B}} ,$$

de donde se obtiene que

$$(\sigma^\mu) = (\sigma^0, \vec{\sigma}) \quad \text{y} \quad (\bar{\sigma}^\mu) = (\sigma^0, -\vec{\sigma}) . \quad (1.128)$$

Para poder construir el grupo de homomorfismo, nos gustaría hallar Λ en función de M ($\Lambda(M)$) y M en función de Λ ($M(\Lambda)$). El primer paso será hallar mapeos de $\mathbb{M}_4$ a $\mathbb{H}(2, \mathbb{C})$ (conjunto de matrices hermitianas de 2×2 , sobre los complejos) y $SL(2, \mathbb{C})$. Se define el mapeo

$$\rho : \mathbb{M}_4 \longrightarrow \mathbb{H}(2, \mathbb{C}),$$

tal que

$$\rho(x^\mu) = x_\mu \sigma^\mu =: X.$$

Note que $x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$, y se puede probar que $\eta^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)$; entonces

$$\begin{aligned} x^\mu &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) x_\nu = \frac{1}{2} \text{Tr}(x_\nu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) , \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(X \bar{\sigma}^\mu) . \end{aligned}$$

Por lo tanto, el mapeo inverso $\rho^{-1} : \mathbb{H}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{M}_4$ es

$$\rho^{-1}(\bar{X}) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\bar{X} \bar{\sigma}^\mu) = x^\mu . \quad (1.129)$$

Ahora veamos como actúa $SL(2, \mathbb{C})$ sobre $\mathbb{H}(2, \mathbb{C})$, mediante lo que se llama, la representación adjunta de $SL(2, \mathbb{C})$ y se define como

$$\text{ad} : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}(2, \mathbb{C})), \quad (1.130)$$

donde

$$\text{ad } M(X) := M' = MXM^\dagger, \quad \text{con } M \in SL(2, \mathbb{C}), \quad (1.131)$$

y $\text{Aut}(\mathbb{H}(2, \mathbb{C}))$ es el grupo automorfismo de $\mathbb{H}(2, \mathbb{C})$, de manera que $M' \in \mathbb{H}(2, \mathbb{C})$, lo que permite que se pueda aplicar de la misma manera el mapeo inverso ρ^{-1} , de forma que

$$\rho^{-1}(MXM^\dagger) = \frac{1}{2} \text{Tr}(MXM^\dagger \bar{\sigma}^\mu) , \quad (1.132)$$

además, al ser $MXM^\dagger$ hermitiana, y σ^μ un conjunto completo, podemos escribir $MXM^\dagger$ como una combinación lineal:

$$MXM^\dagger = x'_\mu \sigma^\mu =: X', \quad (1.133)$$

de manera que

$$\rho^{-1}(X') = \frac{1}{2} \text{Tr}(X' \bar{\sigma}^\mu) = \frac{1}{2} \text{Tr}(x'_\nu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) = x'^\mu . \quad (1.134)$$

En resumen, los pasos seguidos nos llevaron de la siguiente manera

$$x^\mu \longrightarrow \rho(x^\mu) = X \longrightarrow \text{ad } M(X) = X' \longrightarrow \rho^{-1}(X') = x'^\mu . \quad (1.135)$$

A estas alturas, podemos sospechar que el mapeo (1.135) es una transformación de Lorentz, pero habría que confirmar que las transformaciones hechas, dejan $x'_\mu x'^\mu$ invariante. Explícitamente

$$X = x_\mu \sigma^\mu = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + ix^2 \\ -x^1 - ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix}$$

$$\implies \det(X) = (x^0)^2 - \vec{x} \cdot \vec{x} = x_\mu x^\mu.$$

Por otro lado,

$$\det(X') = \det(x'_\mu \sigma^\mu) = x'_\mu x'^\mu$$

y

$$\begin{aligned} \det(X') &= \det(MXM^\dagger) = \det(M) \det(M^\dagger) \det(X) \\ &= \det(X), \end{aligned}$$

entonces

$$x'_\mu x'^\mu = x_\mu x^\mu. \quad (1.136)$$

Ya que es claro que el mapeo (1.135) es una transformación de Lorentz, escribimos x'^μ como

$$x'^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(M \sigma_\nu M^\dagger \bar{\sigma}^\nu) x^\nu,$$

y recordando que $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, se obtiene que

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \text{Tr}(M \sigma_\nu M^\dagger \bar{\sigma}^\mu). \quad (1.137)$$

Ahora que sabemos cual es la transformación de Lorentz $\Lambda \in L_+^\uparrow$ para una $M \in SL(2, \mathbb{C})$ dada, el siguiente paso es encontrar $M(\Lambda)$. Para ello, retomamos la representación adjunta en la ecuación (1.133), escribiendo x' en términos de x :

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \sigma_\mu &= M x^\nu \sigma_\nu M^\dagger \\ \implies \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \sigma_\mu \bar{\sigma}^\nu &= M x^\nu \sigma_\nu M^\dagger \bar{\sigma}^\nu \\ \implies \Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu \bar{\sigma}^\nu &= M \sigma_\nu M^\dagger \bar{\sigma}^\nu. \end{aligned}$$

Se puede demostrar al hacer los cálculos explícitos que para $A \in SL(2, \mathbb{C})$ se cumple que $\sigma_\nu A \bar{\sigma}^\nu = 2 \text{Tr}(A) \cdot \mathbb{I}_2$, entonces

$$\Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu \bar{\sigma}^\nu = M(2 \text{Tr}(M^\dagger) \cdot \mathbb{I}_2) \quad (1.138)$$

$$\implies M(\Lambda) = \frac{1}{2 \text{Tr}(M^\dagger)} \Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu \bar{\sigma}^\nu. \quad (1.139)$$

Retomamos la ecuación(1.138) y sacamos su determinante:

$$\begin{aligned} \det(\Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu \bar{\sigma}^\nu) &= \det(M(2 \text{Tr}(M^\dagger) \cdot \mathbb{I}_2)) = \det(M)(2 \text{Tr}(M^\dagger))^2 \quad \text{con } \det(M) = 1 \\ \implies 2 \text{Tr}(M^\dagger) &= \pm \sqrt{\det(\Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu \bar{\sigma}^\nu)}. \end{aligned} \quad (1.140)$$

Sustituyendo la ecuación(1.140) en la ecuación(1.139), se llega a

$$M(\Lambda) = \pm \frac{1}{\sqrt{\det(\Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu \bar{\sigma}^\nu)}} \Lambda^\mu{}_\nu \sigma_\mu \bar{\sigma}^\nu. \quad (1.141)$$

De la ecuación (1.141), es evidente por el signo $\pm$, que hay 2 matrices en $SL(2, \mathbb{C})$ (M y $-M$) que corresponden a la misma transformación de Lorentz. Esto en realidad es visible desde la ecuación (1.137), al cambiar M por $-M$, lo cual da el mismo resultado. A esto nos referimos cuando se menciona que $SL(2, \mathbb{C})$ cubre 2 veces al grupo de Lorentz restringido. En términos formales, se dice que $SL(2, \mathbb{C})$ es la cubierta universal de $L_+^\uparrow$.

1.4. El grupo pequeño de Wigner

En 1939, Eugene Wigner observó la importancia del cuatrimomento en la construcción de representaciones, se enfocó en los subgrupos del grupo de Lorentz cuyas transformaciones dejan el cuatrimomento de una partícula dada invariante, el máximo subgrupo que hace esto al momento de una partícula se le llama *grupo pequeño* o *little group* en inglés [80]. El punto aquí es que una partícula relativista tiene en su estructura interna una forma covariante así como su cuatrimomento. El grupo de las transformaciones de Lorentz consiste en tres boosts y tres rotaciones. La rotación constituye un subgrupo del grupo de Lorentz, si una partícula masiva está en reposo entonces su cuatrimomento es invariante bajo rotaciones; de este modo el little group para una partícula masiva en reposo es el grupo de las rotaciones tridimensionales $O(3)$, lo que es afectado por la rotación es la orientación del espín de la partícula. Las partículas en reposo se les puede aplicar un boost así como los generadores del little group $O(3)$. El boost va tomar la forma de un operador conjugado; este operador no va cambiar el álgebra de Lie del grupo de las rotaciones y el little group que se obtuvo bajo el boost va dejar invariante el cuatrimomento que se obtuvo bajo el boost, a este nuevo grupo se le llama little group $O(3)$. Por otro lado, no es posible traer una partícula sin masa desde su sistema en reposo, Wigner observó que para obtener el little group de una partícula sin masa a lo largo del eje z es generado por el generador de las rotaciones alrededor del eje z y otros dos generadores, este grupo se le llama little group $E(2)$ [80, 81, 72]. A continuación veremos este análisis más en detalle

1.4.1. El concepto de grupos pequeños o little groups

El *little group* como ya hemos dicho anteriormente es un subgrupo del grupo de Lorentz, veremos en mayor detalle este conjunto de transformaciones de Lorentz L que dejan invariante al momento p^μ de una partícula en la siguiente sección (1.4.2), esto es:

$$\mathbf{L}\mathbf{p} = \mathbf{p}. \quad (1.142)$$

Una transformación general de Lorentz tiene la forma :

$$L = e^{i(\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\theta} + \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\phi})} \quad (1.143)$$

$$\approx 1 + i(\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\theta} + \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\phi}) = 1 + iW, \quad (1.144)$$

con $\mathbf{J} = (J^x, J^y, J^z)$ y $\mathbf{K} = (K^x, K^y, K^z)$, desarrollando la matriz W usando los generadores (1.68) y (1.69) se obtiene la siguiente forma:

$$W = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\theta} + \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\phi} = i \begin{pmatrix} 0 & \phi^x & \phi^y & \phi^z \\ \phi^x & 0 & -\theta^z & \theta^y \\ \phi^y & \theta^z & 0 & -\theta^x \\ \phi^z & -\theta^y & \theta^x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.145)$$

Aquí se toma una transformación de Lorentz infinitesimal $L = 1 + iW$, donde W está dada por (1.145). En el caso de partículas masivas, $m^2 > 0$, al tomar $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$, la transformación de Lorentz L debe dejar invariante el momento p^μ , por lo que la siguiente condición se debe satisfacer:

$$\begin{pmatrix} 0 & \phi^x & \phi^y & \phi^z \\ \phi^x & 0 & -\theta^z & \theta^y \\ \phi^y & \theta^z & 0 & -\theta^x \\ \phi^z & -\theta^y & \theta^x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.146)$$

Esto implica que $\phi^x = \phi^y = \phi^z = 0$ y $\theta^x = \theta^y = \theta^z \neq 0$. Nos queda la parte $\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\theta}$ con J^x, J^y, J^z los generadores de las rotaciones, por lo que para una partícula con masa el *little group* es $SO(3) = SU(2)$, los estados están caracterizados por la masa m y el espín s . Casos conocidos de partículas

con masa son: ($s = 0$, Higgs), ($s = 1/2$, q quarks y l leptones), ($s = 1$, bosones $W^\pm$ y Z^0). Ahora, para partículas sin masa $m^2 = 0$, se toma el momento $p^\mu = (m, 0, 0, m)$ y entonces se debe cumplir que

$$\begin{pmatrix} 0 & \phi^x & \phi^y & \phi^z \\ \phi^x & 0 & -\theta^z & \theta^y \\ \phi^y & \theta^z & 0 & -\theta^x \\ \phi^z & -\theta^y & \theta^x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.147)$$

Esto implica que $\phi^z = 0$, $\phi^x = -\theta^y$, y $\phi^y = \theta^x$, donde θ^z es arbitrario y corresponde a la rotación alrededor del eje z . Desarrollando W dada por (1.145), se obtiene:

$$\begin{aligned} W &= J^x \theta^x + J^y \theta^y + J^z \theta^z + K^x \phi^x + K^y \phi^y \\ &= (J^x + K^y) \theta^x + (J^y - K^x) \theta^y + J^z \theta^z \\ &= E^1 \theta^x + E^2 \theta^y + J^z \theta^z. \end{aligned} \quad (1.148)$$

Resulta que E^1 , E^2 y J^z satisfacen las siguientes relaciones de conmutación, las cuales definen el álgebra de Lie del grupo $E(2)$:

$$[J_z, E_1] = iE_2, \quad [J_z, E_2] = -iE_1, \quad [E_1, E_2] = 0. \quad (1.149)$$

Para las partículas sin masa, el *little group* es el grupo Euclidiano en dos dimensiones $E(2) = U(1) \times T(2)$, este grupo consiste de rotaciones y traslaciones en un plano euclideo dos dimensional. Las transformaciones de coordenadas toman la siguiente forma:

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta + u \quad (1.150)$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta + v, \quad (1.151)$$

estas transformaciones se pueden escribir en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & u \\ \sin \theta & \cos \theta & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.152)$$

también estas transformaciones se pueden exponenciar de la siguiente manera:

$$E(u, v, \alpha) = \exp[-i(uE_1 + vE_2)] \exp(-i\theta J_z), \quad (1.153)$$

donde J_z es el generador de las rotaciones en la dirección z , y E_1 y E_2 son los generadores de las traslaciones. En la sección (1.2.2) deducimos la forma que los generadores del grupo de Lorentz deben tener. Los generadores aquí mencionados tienen la siguiente forma matricial 3×3 :

$$J_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.154)$$

Grupo cilíndrico

Las relaciones de conmutación (1.149) son invariantes bajo el cambio de signo en los generadores E_1 y E_2 , también son invariantes bajo conjugación hermitiana. Ya que J_z es hermitiana podemos reemplazar E_1 y E_2 por

$$Q_1 = -(E_1)^\dagger, \quad Q_2 = -(E_2)^\dagger,$$

su forma matricial es la siguiente

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.155)$$

de este modo obtenemos las siguientes relaciones

$$[Q_1, Q_2] = 0, \quad [J_z, Q_1] = iQ_2, \quad [J_z, Q_2] = -iQ_1. \quad (1.156)$$

Estas relaciones de conmutación son idénticas a las del grupo $E(2)$ dadas en (1.149). Sin embargo, Q_1 y Q_2 no son generadores de las traslaciones euclideas en el espacio de dos dimensiones. Como en el caso de $E(2)$ podemos considerar una transformación matricial

$$C(u, v, \alpha) = C(0, 0, \alpha)C(u, v, 0), \quad (1.157)$$

donde

$$C(0, 0, \theta) = \exp(-i\theta J_z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.158)$$

$$C(u, v, 0) = \exp[-i(uQ_1 + vQ_2)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u & v & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.159)$$

Con $C(0, 0, \alpha)$ es la matriz de rotaciones, la multiplicación de las matrices (1.158) resulta en la forma mas general (1.157). Si aplicamos la matriz (1.157) sobre un vector columna (x, y, z) , tendremos lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ u & v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \\ z + ux + vy \end{pmatrix}. \quad (1.160)$$

Esta transformación deja invariante $(x^2 + y^2)$ mientras que z puede variar de $(-\infty, \infty)$. Por esta razón, es bastante apropiado llamar a este grupo de transformaciones lineales como *grupo cilíndrico*. Este grupo es localmente isomorfo a $E(2)$. Si fijamos por conveniencia que el radio del cilindro sea unitario

$$(x^2 + y^2) = 1, \quad (1.161)$$

entonces x y y pueden ser escritos como

$$x = \cos \phi, \quad y = \sin \phi,$$

y de esta manera las transformaciones de (1.160) toman la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ u & v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi + \theta) \\ \sin(\phi + \theta) \\ z + u \cos \phi + v \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Resulta que este grupo cilíndrico describe las transformaciones de gauge para las partículas sin masa.

1.4.2. Operadores de Casimir

Un estado de partícula se caracteriza por su momento y su respectivo número cuántico (espín para partículas masivas y helicidad para partículas sin masa). Para encontrar cómo actúa el grupo pequeño sobre un estado de partícula, comenzamos definiendo una transformación de Lorentz $L^\mu{}_\nu(p)$ que mapea el momento de referencia k^ν al momento cualquiera p^μ .

$$W(\Lambda, p; k) \equiv L^{-1}(\Lambda p; k) \Lambda L(p; k), \quad W(\Lambda, p; k) k = k. \quad (1.162)$$

El momento de referencia es clasificado según su invariante relativista $p^2 = k^2 = k^\mu k_\mu$. Para partículas masivas es $k^2 = m^2$, para partículas sin masa y el vacío son $k^2 = 0$. Solo consideraremos los casos con energía positiva. Para un espacio tiempo con $D = 4$ tenemos tres momentos de referencia, las cuales puede verse en la siguiente tabla:

Momento	momentos de referencia
$p^2 = m^2$	$k^\mu = (m, 0, 0, 0)$
$p^2 = 0$	$k^\mu = (\omega, 0, 0, \pm\omega)$
$p^2 = 0$	$k^\mu = (0, 0, 0, 0)$

Tabla 1.1: Momento de referencia para partículas con masa, sin masa y el vacío.

Definimos una transformación de Lorentz $W^\mu{}_\nu$, que deja invariante el momento de referencia k^μ ,

$$W^\mu{}_\nu(k) k^\nu = k^\mu. \quad (1.163)$$

El grupo de transformaciones que deja invariante el momento de referencia se denomina grupo pequeño. Nótese que únicamente el momento de referencia k^μ es invariante bajo una transformación del grupo pequeño. Una transformación general del grupo pequeño que actúa sobre k^μ se define por

$$W(\Lambda, p; k) \equiv L^{-1}(\Lambda p; k) \Lambda L(p; k), \quad W(\Lambda, p; k) k = k. \quad (1.164)$$

Los tres casos anteriores tienen asociados tres grupos pequeños diferentes: $SO(3)$ para partículas con masa, $E(2)$ para partículas sin masa y el grupo de Lorentz para el vacío. Nos interesa estudiar el grupo pequeño de las partículas con masa y sin masa. Con el fin de etiquetar sistemáticamente todos los estados de una partícula, comenzamos con un momento de referencia k_μ y los estados $|k, \sigma\rangle$. Para toda transformación de Lorentz Λ existe un operador unitario asociado $U(\Lambda)$ que actúa sobre el espacio de Hilbert, tal que $U(\Lambda_1 \Lambda_2) = U(\Lambda_1) U(\Lambda_2)$. Entonces, definimos los estados de una partícula por su momento y sus respectivos números cuánticos mediante el ket de estado $|p, \sigma\rangle$:

$$|p, \sigma\rangle \equiv U(L(p; k)) |k, \sigma\rangle, \quad (1.165)$$

donde p representa el momento y σ es un número cuántico asociado a una transformación global (espín, helicidad, carga eléctrica, etc.). Habiendo hecho esta definición, podemos preguntarnos cómo se transforma $|p, \sigma\rangle$ bajo una transformación general de Lorentz.

$$U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = U(\Lambda) U(L(p; k)) |k, \sigma\rangle = U(\Lambda L(p; k)) |k, \sigma\rangle \quad (1.166)$$

$$= U(L(\Lambda p; k)) U(L^{-1}(\Lambda p; k) \Lambda L(p; k)) |k, \sigma\rangle \quad (1.167)$$

$$= U(L(\Lambda p; k)) U(W(\Lambda, p; k)) |k, \sigma\rangle. \quad (1.168)$$

Debido a que el momento de referencia k se mantiene invariante, podemos definir la acción del grupo pequeño actuando sobre el estado de una partícula como:

$$U(W(\Lambda, p; k)) |k, \sigma\rangle = D_{\sigma\sigma'}(W(\Lambda, p; k)) |k, \sigma'\rangle. \quad (1.169)$$

Concluimos que una partícula se etiqueta por su momento y se transforma según alguna representación del grupo pequeño. Esto se denomina el método de representaciones inducidas. De manera similar, también podemos encontrar una representación inducida del grupo de Poincaré a partir de la representación del grupo pequeño. Debido a esto, usamos los valores propios de los operadores de Casimir del grupo de Poincaré para etiquetar las representaciones del grupo pequeño. Los operadores de Casimir del grupo de Poincaré son $P^\mu P_\mu$ y el cuadrado del vector de Pauli-Lubanski $W^\mu W_\mu$, donde W^μ es [82]:

$$W^\mu \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\nu\rho} P_\sigma. \quad (1.170)$$

1.4.3. Partículas con masa

Para una partícula masiva, el momento de referencia es el momento asociado con el marco de reposo, dándonos $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$, el cual queda invariante bajo rotaciones. El grupo que deja invariante este momento es $SO(3)$. Ahora, utilizaremos los valores propios de los operadores de Casimir del grupo de Poincaré para etiquetar las representaciones del grupo pequeño. Comenzamos con el operador $P^\mu P_\mu$, que nos da

$$P^\mu P_\mu |k, \sigma\rangle = k^\mu k_\mu |k, \sigma\rangle = m^2 |k, \sigma\rangle. \quad (1.171)$$

A continuación, pasamos al cuadrivector de Pauli-Lubanski W^μ . Dado que $k^\mu = (m, 0, 0, 0)$, solo P_0 dará un valor distinto de cero y por lo tanto tenemos

$$W^\mu |k, \sigma\rangle = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho 0} M_{\nu\rho} P_0 |k, \sigma\rangle, \quad (1.172)$$

donde el tensor de Levi-Civita implica que $W^0 = 0$. Ahora, consideramos el valor propio de P_0 , que es simplemente m , la masa de la partícula, como se observa en la forma de k^μ . Además, consideramos una permutación de los índices del tensor de Levi-Civita, $\varepsilon^{\mu\nu\rho 0} = -\varepsilon^{0\mu\nu\rho} = -\varepsilon^{ijl}$, lo que nos da

$$W^0 |k, \sigma\rangle = 0, \quad W^i |k, \sigma\rangle = -m J_i |k, \sigma\rangle. \quad (1.173)$$

Dado que W_i representa todas las componentes espaciales, se vuelve negativo al bajar el índice según la métrica $\eta_{\mu\nu}$. Finalmente, combinamos los resultados para obtener

$$W^\mu W_\mu |k, \sigma\rangle = -m^2 J^2 |k, \sigma\rangle = -m^2 j(j+1) |k, \sigma\rangle, \quad (1.174)$$

donde J^2 es el operador de momento angular total con el valor propio $j(j+1)$, y aquí j representa el espín de la partícula. Encontramos que $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ debido a la invariancia $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$.

1.4.4. Partículas sin masa

Para una partícula sin masa, el momento de referencia es el momento asociado con una partícula que se mueve a la velocidad de la luz, en la dirección z , dándonos $k^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$ y $k^\mu = (\omega, 0, 0, -\omega)$. El grupo que deja invariante este momento de referencia es el grupo euclidiano bidimensional $E(2)$; los generadores son $N_1 = K_1 - J_2$, $N_2 = J_1 + K_2$ y J_3 . Estos generadores satisfacen el conjunto cerrado de relaciones de conmutación:

$$[J_3, N_1] = iN_2, \quad [J_3, N_2] = -iN_1, \quad [N_1, N_2] = 0. \quad (1.175)$$

Los respectivos elementos del vector de Pauli-Lubanski son:

$$W^0 = \frac{1}{2} \varepsilon^{0\nu\rho 3} M_{\nu\rho} P_3 = \frac{1}{2} (M_{12} - M_{21}) P_3 = J_3 P_3, \quad (1.176)$$

$$\begin{aligned} W^1 &= \frac{1}{2} (\varepsilon^{1\nu\rho 0} M_{\nu\rho} P_0 + \varepsilon^{1\nu\rho 3} M_{\nu\rho} P_3) \\ &= \frac{1}{2} [(M_{32} - M_{23}) P_0 + (M_{20} - M_{02}) P_3] \\ &= -(J_1 P_0 - K_2 P_3), \end{aligned} \quad (1.177)$$

$$\begin{aligned} W^2 &= \frac{1}{2} (\varepsilon^{2\nu\rho 0} M_{\nu\rho} P_0 + \varepsilon^{2\nu\rho 3} M_{\nu\rho} P_3) \\ &= \frac{1}{2} [(M_{13} - M_{31}) P_0 + (M_{01} - M_{10}) P_3] \\ &= -(J_2 P_0 + K_1 P_3), \end{aligned} \quad (1.178)$$

$$W^3 = \frac{1}{2} \varepsilon^{3\nu\rho 0} M_{\nu\rho} P_0 = \frac{1}{2} (M_{21} - M_{12}) P_0 = -J_3 P_0. \quad (1.179)$$

Aplicamos estos operadores sobre el estado $|k, \sigma\rangle$, usando un momento de referencia $k^\mu = (\omega, 0, 0, -\omega)$. Obtenemos lo siguiente:

$$W^0|k, \sigma\rangle = -\omega J_3|k, \sigma\rangle, \quad (1.180)$$

$$W^1|k, \sigma\rangle = -\omega (J_1 + K_2)|k, \sigma\rangle = -\omega N_2|k, \sigma\rangle, \quad (1.181)$$

$$W^2|k, \sigma\rangle = -\omega (J_2 - K_1)|k, \sigma\rangle = -\omega N_1|k, \sigma\rangle, \quad (1.182)$$

$$W^3|k, \sigma\rangle = -\omega J_3|k, \sigma\rangle. \quad (1.183)$$

Combinando todas las componentes, obtenemos una expresión para W^μ , lo que conduce al resultado

$$W^\mu W_\mu|k, \sigma\rangle = -\omega^2 (N_1^2 + N_2^2)|k, \sigma\rangle. \quad (1.184)$$

Dado que N_1 y N_2 conmutan, son diagonalizables simultáneamente, por lo que expresamos sus estados propios comunes con valores propios n_1 y n_2 como

$$N_1|k, n_1, n_2\rangle = n_1|k, n_1, n_2\rangle, \quad N_2|k, n_1, n_2\rangle = n_2|k, n_1, n_2\rangle. \quad (1.185)$$

Al aplicar una rotación de ángulo θ_3 al estado, obtenemos un nuevo estado, que definimos como

$$|k, n_1, n_2, \theta_3\rangle \equiv e^{-i\theta_3 J_3}|k, n_1, n_2\rangle. \quad (1.186)$$

Este nuevo estado es el estado original $|k, \sigma\rangle$. Intentamos encontrar el valor propio correspondiente a N_1 para este estado.

$$N_1|k, n_1, n_2, \theta_3\rangle = N_1 e^{-i\theta_3 J_3}|k, n_1, n_2\rangle = e^{-i\theta_3 J_3} (e^{i\theta_3 J_3} N_1 e^{-i\theta_3 J_3}) |k, n_1, n_2\rangle$$

$$e^{i\theta_3 J_3} N_1 e^{-i\theta_3 J_3} = \left(1 + i\theta_3 J_3 - \frac{1}{2}\theta_3^2 (J_3)^2 + \dots\right) N_1 \left(1 - i\theta_3 J_3 - \frac{1}{2}\theta_3^2 (J_3)^2 + \dots\right) \quad (1.187)$$

$$= N_1 + i\theta_3 J_3 N_1 - i\theta_3 N_1 J_3 - \frac{1}{2}\theta_3^2 (J_3)^2 N_1 - \frac{1}{2}\theta_3^2 N_1 (J_3)^2 + \theta_3^2 J_3 N_1 J_3 + \dots \quad (1.188)$$

$$= N_1 - \theta_3 N_2 - \frac{1}{2}\theta_3^2 N_1 + \frac{1}{3!}\theta_3^3 N_2 + \dots \quad (1.189)$$

$$= N_1 \cos \theta_3 - N_2 \sin \theta_3 \quad (1.190)$$

donde utilizamos las relaciones de conmutación $[J_3, N_1]$ y $[J_3, N_2]$. Realizamos un proceso similar con el operador N_2 , y finalmente obtenemos que

$$N_1|k, n_1, n_2, \theta_3\rangle = (n_1 \cos \theta_3 - n_2 \sin \theta_3)|k, n_1, n_2, \theta_3\rangle, \quad (1.191)$$

$$N_2|k, n_1, n_2, \theta_3\rangle = (n_1 \sin \theta_3 + n_2 \cos \theta_3)|k, n_1, n_2, \theta_3\rangle. \quad (1.192)$$

Dado que θ_3 es arbitrario, esto sugiere que existe un continuo de estados propios. Sin embargo, las partículas sin masa no exhiben tal grado de libertad continuo, y por lo tanto, para cualquier estado físico debemos tener $n_1 = n_2 = 0$. Finalmente, combinamos los resultados para obtener

$$W^\mu W_\mu|k, \sigma\rangle = -\omega^2 (n_1^2 + n_2^2)|k, \sigma\rangle = 0. \quad (1.193)$$

Esto significa que solo podemos usar los valores propios del generador restante J_3 para etiquetar las representaciones de partículas sin masa. El grupo pequeño está dado simplemente por el grupo $SO(2)$, que describe rotaciones en un plano bidimensional. Podemos describir las rotaciones en dos dimensiones,

$$D^h(\theta) = e^{-i\hbar\theta}. \quad (1.194)$$

Este es un elemento del grupo $U(1)$, que es isomorfo al grupo $SO(2)$; etiquetamos las representaciones con h , que es el valor propio del operador J_3 .

$$J_3|k, h\rangle = h|k, h\rangle. \quad (1.195)$$

Esto nos da el momento angular de espín en la dirección del movimiento de la partícula, que es la helicidad. Así, las partículas sin masa tienen dos grados de libertad internos, los cuales se etiquetan mediante las helicidad $\pm h$. Se encuentra que $h = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots$ debido a la invariancia $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$.

1.5. La contracción del grupo pequeño o little group contraction

1.5.1. La contracción de Inonu-Wigner

Nuevas álgebras de Lie pueden ser construidas a partir de viejas álgebras de Lie mediante un proceso llamado *Contracción*. La contracción involucra re-parametrizar el espacio de parámetros del álgebra de Lie en consideración, de tal forma que las propiedades de multiplicación del grupo o las relaciones de conmutación en el álgebra de Lie se mantengan bien definidas incluso en algún límite singular. En general, las propiedades del grupo de Lie original tienen límites bien definidos en el grupo de Lie contraído. Por ejemplo, el espacio de parámetros para el grupo contraído está bien definido y es no compacto. Otras propiedades con límites bien definidos incluyen: Operadores de Casimir, elementos de matriz de operadores, por mencionar algunos [75]. La contracción provee relaciones limitadas entre funciones especiales en física matemática. En esta sección nos enfocaremos en una clase particular de contracciones conocida como *la contracción de Inonu-Wigner* [83].

En este proceso de contracción un nuevo conjunto de bases Y_r es relacionado con el conjunto de bases original X_i mediante un cambio de base el cual depende de un parámetro ϵ , es decir:

$$Y_r = M_r^i(\epsilon) X_i. \quad (1.196)$$

Las constantes de estructura tienen las propiedades de transformación de un tensor siempre y cuando la transformación de cambio de base sea no singular, el álgebra de Lie no cambia

$$C_{rs}^t(\epsilon) = M_r^i(\epsilon) M_s^j(\epsilon) C_{ij}^k(M(\epsilon)^{-1})^t_k. \quad (1.197)$$

Si la transformación es singular, las constantes de estructura $C_{rs}^t(\epsilon)$ aun deberían de converger hacia un límite bien definido.

$$C_{rs}^l(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C_{rs}^l(\epsilon). \quad (1.198)$$

Es común el caso en que las constantes de estructura existan y definan un álgebra de Lie que sea diferente al original. Ahora vamos a meternos con los conceptos matemáticos. Si un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tiene un sub-álgebra $\mathfrak{h}$ y un sub espacio complementario $\mathfrak{p}$ con relaciones de conmutación dados de la siguiente manera $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{p}$:

$$a) \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}, \quad (1.199)$$

$$b) \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}, \quad (1.200)$$

$$c) \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{h} + \mathfrak{p}, \quad (1.201)$$

resulta que $a)$ es una sub-álgebra y el inciso $c)$ siempre se cumple. Entonces la contracción de Inonu-Wigner de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con el álgebra de Lie $\mathfrak{g}'$ involucra las siguiente transformación de cambio de base

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{h}' \\ \mathfrak{p}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{\dim(\mathfrak{h})} & 0 \\ 0 & \epsilon I_{\dim(\mathfrak{p})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{h} \\ \mathfrak{p} \end{pmatrix}, \quad (1.202)$$

Aspectos básicos de álgebras de Lie en Física de Partículas

1.5 La contracción del grupo pequeño o little group contraction

donde $\dim(\mathfrak{h})$ es la dimensión del subálgebra $\mathfrak{h}$. Las relaciones de conmutación de $\mathfrak{g}'$ están bien definidas para cada valor de ϵ , incluso en el límite singular $\epsilon \rightarrow 0$:

$$[\mathfrak{h}', \mathfrak{h}'] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}, \quad (1.203)$$

$$[\mathfrak{h}', \mathfrak{p}'] = [\mathfrak{h}, \epsilon \mathfrak{p}] = \epsilon [\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}', \quad (1.204)$$

$$[\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'] = [\epsilon \mathfrak{p}, \epsilon \mathfrak{p}] = \epsilon^2 [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 (\mathfrak{h} + \mathfrak{p}) \rightarrow 0, \quad (1.205)$$

donde se ha usado las relaciones (1.199). En el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$, el álgebra contraída $\mathfrak{g}'$ es la semi-suma directa del subálgebra original $\mathfrak{h}$ y el subálgebra $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ es conmutativa y $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}'] \subseteq \mathfrak{p}'$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{p} & \quad \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}' = \epsilon \mathfrak{p} & \mathfrak{g}' = \mathfrak{h} + \mathfrak{p}', \\ [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h} & \quad \longrightarrow & [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}, \\ [\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p} & \quad \longrightarrow & [\mathfrak{h}, \mathfrak{p}'] \subseteq \mathfrak{p}', \\ [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{h} + \mathfrak{p} & \quad \longrightarrow & [\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'] = 0. \end{aligned} \quad (1.206)$$

A continuación veremos algunos ejemplos de contracción entre grupos, nos interesan los grupos que vimos en la subsección (1.4.1)

1.5.2. La contracción entre los grupos pequeño $O(3)$ y el $E(2)$

La contracción entre $O(2)$ y $E(2)$ es bien conocida en la literatura [81, 83, 84, 85]. La manera mas fácil de entender este proceso es considerando una esfera de radio muy grande y un área pequeña alrededor del polo norte de ella. Esta área debería parecerse a una superficie plana, donde podemos hacer transformaciones euclideas sobre esta superficie las cuales consisten en traslaciones a lo largo de los ejes x y y y rotaciones alrededor de cualquier punto dentro de esta área. Aunque estrictamente hablando, estas transformaciones euclideas son rotaciones del grupo $SO(3)$ alrededor de los ejes x y y , y alrededor del eje que hace un pequeño ángulo con respecto al eje z . Los generadores del grupo $O(3)$ satisfacen el álgebra de Lie que vimos en (1.93):

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k, \quad (1.207)$$

donde J_z genera rotaciones alrededor el polo norte de la esfera, aquí J_x y J_y son matrices de 3×3 :

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.208)$$

Para nuestro propósito, nos restringimos a una pequeña área cerca del polo norte donde el parámetro z es muy largo y es igual al radio de la esfera R , y x y y son muy pequeños en comparación con el radio. De este modo, escribimos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (1.209)$$

El vector columna de la izquierda corresponde al vector de coordenadas del grupo $E(2)$ y el vector columna de la derecha al del grupo $O(3)$, vamos a denotar a la matriz de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix}. \quad (1.210)$$

En el límite donde el radio R es largo, vamos a tener las siguientes relación de conmutación:

$$J_z = AJ_z A^{-1}, \quad (1.211)$$

$$E_1 = (1/R)AJ_y A^{-1}, \quad (1.212)$$

$$E_2 = -(1/R)AJ_x A^{-1}. \quad (1.213)$$

Este procedimiento deja invariante J_z , pero a J_x y J_y los convierte en E_1 y E_2 , cuyas matrices vemos en (1.154). Por lo que, en términos de E_1 , E_2 y J_z , las relaciones de conmutación para el grupo $O(3)$ dadas en (1.207) se convierten en

$$[J_z, E_1] = iE_2, \quad (1.214)$$

$$[J_z, E_2] = -iE_1, \quad (1.215)$$

$$[E_1, E_2] = -i(1/R)^2 J_z. \quad (1.216)$$

En el límite en el que el radio R es muy largo, el conmutador $[E_1, E_2]$ desaparece y entonces recuperamos el álgebra de Lie del grupo $E(2)$ dadas por (1.149). A esto le llamamos la contracción en el grupo pequeño $O(3)$ y el grupo pequeño $E(2)$.

1.5.3. Contracción del grupo cilíndrico

El grupo cilíndrico lo describimos en la sección (1.4.1) en las relaciones (1.160). En este caso se considera el radio de la esfera R mucho mas largo que el parámetro z , es decir, nos encontramos en el cinturón ecuatorial de la esfera. Alrededor de este cinturón, x y y pueden ser escritos como

$$x = R \cos \phi, \quad y = R \sin \phi. \quad (1.217)$$

En su forma matricial, nos queda

$$\begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/R & 0 & 0 \\ 0 & 1/R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (1.218)$$

para obtener el espacio vectorial para el grupo cilíndrico. La matrices de 3×3 de la expresión (1.218) es proporcional a la inversa de la matriz A dada por (1.210). Entonces en el límite donde R es muy largo se tiene lo siguiente

$$J_z = A^{-1} J_z A, \quad (1.219)$$

$$Q_1 = -(1/R)A^{-1} J_y A, \quad (1.220)$$

$$Q_2 = (1/R)A^{-1} J_x A, \quad (1.221)$$

en términos de J_z , Q_1 y Q_2 , las relaciones de conmutación para el grupo $O(3)$ dadas por (1.207) se convierten en

$$[J_z, Q_1] = iQ_2, \quad (1.222)$$

$$[J_z, Q_2] = -iQ_1, \quad (1.223)$$

$$[Q_1, Q_2] = -i(1/R)^2 J_z, \quad (1.224)$$

el cual se convierte en el álgebra de Lie del grupo $E(2)$ en el límite en el que $R \rightarrow \infty$.

1.5.4. El grupo pequeño $E(2)$ como el límite de masa cero del grupo pequeño $O(3)$ para partículas masivas

Si una partícula masiva está en reposo, la simetría del grupo es generado por los operadores del momento angular J_1 , J_2 y J_3 . Si la partícula se mueve a lo largo de la dirección z , entonces

Aspectos básicos de álgebras de Lie en Física de Partículas

1.5 La contracción del grupo pequeño o little group contraction

J_3 se mantiene invariante y su eigenestado es la helicidad. Como vimos anteriormente en 1.5.2, los generadores del grupo pequeño $E(2)$ pueden reducirse a los generadores del grupo cilíndrico. El grupo cilíndrico puede ser obtenido desde el grupo de las rotaciones en tres dimensiones mediante el límite $R \rightarrow \infty$. Por lo tanto, si los boosts en forma matricial toman una forma diagonal, como en el caso de las matrices (1.209) y (1.218), podemos obtener los operadores N_1 y N_2 simplemente aplicando un boost tanto a J_2 como a J_1 , respectivamente a lo largo de la dirección en z . De hecho, en el sistema de coordenadas del cono de luz, los boost toman la forma matricial siguiente

$$B(R) = \begin{pmatrix} 1/R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{pmatrix}, \quad (1.225)$$

con

$$R = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{1/2}, \quad (1.226)$$

donde β es el parámetro de velocidad de la partícula. Bajo este boost, el operador J_3 se mantiene invariante

$$J'_3 = B J_3 B^{-1} = J_3. \quad (1.227)$$

Aquí, los operadores J_1 y J_2 en el sistema de coordenadas del cono de luz, $((z-t)/\sqrt{2}, x, y, (z+t)/\sqrt{2})$, toman la forma matricial

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.228)$$

$$J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.229)$$

Si hacemos un boost sobre esta partícula masiva a lo largo de la dirección z , los operadores J_1 y J_2 se convierten en

$$J'_1 = B J_1 B^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i/R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ iR & 0 & 0 & -i/R \\ 0 & 0 & iR & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.230)$$

$$J'_2 = B J_2 B^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i/R & 0 & 0 \\ -iR & 0 & 0 & i/R \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -iR & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.231)$$

Debido a la condición de Lorentz

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (A^\mu(x)) = p^\mu A_\mu(x) = 0, \quad (1.232)$$

donde $p^\mu = (\omega, 0, 0, \omega)$ y $A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$, resulta que $A_0 = A_3$. Ya que la primera y cuarta componente son iguales, los términos iR en la primera columna de (1.230) pueden ser despreciados.

Por lo tanto, en el límite $R \rightarrow \infty$, el cual es el límite de un momentum muy largo o grande,

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} = -(1/R)J'_2, \quad (1.233)$$

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} = (1/R)J'_1, \quad (1.234)$$

1.6. Espinores

Los espinores son objetos matemáticos parecidos a los tensores que permiten un tratamiento más general de la noción de invarianza bajo rotaciones y Lorentz boost [77]. Para cada tensor de rango k corresponde un espinor de rango $2k$, y algunos tipos de tensores pueden ser asociados con un espinor del mismo rango. Por ejemplo, un quadri-vector general correspondería a un espinor hermitiano de rango $2k$, el cual puede ser representado por una matriz hermitiana de 2×2 de números complejos. Un vector nulo puede también ser asociado con un espinor de rango 1, el cual puede ser representado por un vector complejo con dos componentes. Los espinores pueden ser usados sin la necesidad de referirnos a la relatividad especial, pero estos aparecen de forma natural cuando hablamos del grupo de Lorentz. Un ingrediente importante en física teórica son los espinores que son objetos matemáticos que se transforman bajo el grupo de Lorentz [77]. Históricamente, los espinores fueron creados por E. Cartan en 1913 [79]. Posteriormente personajes como P. Dirac, W. Pauli y E. Majorana introdujeron los espinores a la física teórica [86, 87], así como H. Weyl y B. L. van der Waerden hicieron contribuciones matemáticas importantes que permitieron el desarrollo del análisis espinorial. Por su parte, B.L. van der Waerden fue el primero en introducir la notación de índices punteados y no punteados para las representaciones irreducibles del grupo de Lorentz. Actualmente a estas representaciones se les conocen como *espinores de Weyl-van der Waerden* [88, 89].

Los espinores encontraron su lugar en la física cuando se descubrió que los electrones y otras partículas tenían un tipo de momento angular intrínseco llamado espín, y el comportamiento de este momento angular es correctamente descrito por las matemáticas descubiertas por Cartán. Pauli formalizó esta conexión en un contexto no relativista, bajas velocidades, modelando el espín del electrón usando un espinor complejo de dos componentes e introduciendo sus matrices de Pauli. Entonces para encontrar una descripción consistente del electrón usando la mecánica cuántica y los requerimientos de la covarianza de Lorentz, Paul Dirac encontró que combinando las matemáticas de los espinores con la mecánica cuántica de las funciones de onda describiría correctamente el comportamiento del electrón, de este modo Dirac introduce un vector complejo de cuatro componentes llamado ahora espinor de Dirac, que físicamente predice la existencia de la antimateria. Los espinores que nos interesan aquí son campos evaluados en el espacio tiempo.

1.6.1. Dirac, Majorana y de Weyl

Los campos que nos interesan se pueden escribir de la siguiente manera

$$\psi_R(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \longrightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad (1.235)$$

$$\psi_L(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right). \quad (1.236)$$

Vamos a escribir una lagrangiana que sea invariante de Lorentz para estos campos con los correctos grados de libertad que son dos. La más simple lagrangiana que cumpla tal fin sería

$$(\psi_R)^\dagger \square \psi_R + m^2 (\psi_R)^\dagger \psi_R.$$

Sin embargo, usando transformaciones infinitesimales vemos que estos términos no son invariantes de Lorentz

$$\begin{aligned} \delta \left(\psi_R^\dagger \psi_R \right) &= \frac{1}{2} \psi_R^\dagger [(i\theta_i + \phi_i) \sigma_i \psi_R] + \frac{1}{2} \left[\psi_R^\dagger (-i\theta_i + \phi_i) \sigma_i \right] \psi_R \\ &= \phi_i \psi_R^\dagger \sigma_i \psi_R \neq 0. \end{aligned}$$

Esta es la manifestación del hecho de que la representación es no unitaria debido a que el generador del boost es anti-hermitiano. Si consideramos dos campos ψ_R y ψ_L , podemos escribir términos como $\psi_L^\dagger \psi_R$. Bajo transformaciones infinitesimales de Lorentz, se tiene

$$\delta \left(\psi_L^\dagger \psi_R \right) = \left[\psi_L^\dagger \frac{1}{2} (-i\theta_i - \phi_i) \sigma_i^\dagger \right] \psi_R + \psi_L^\dagger \left[\frac{1}{2} (i\theta_i + \phi_i) \sigma_i \psi_R \right] = 0,$$

después de esto se necesita agregar la conjugada hermitiana para obtener un término de la lagrangiana real, por lo que se encuentra

$$\mathcal{L}_{\text{masa de Dirac}} = m \left(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L \right),$$

que es real e invariante de lorentz para cualquier masa m . Esta combinación es bilineal en los campos pero carece de derivadas, por lo que este tipo de términos se les conoce como términos de masa, en este caso es el término de masa de Dirac. Una teoría con este tipo de términos en su lagrangiana no tendría dinámica. Un término de cinemática sería

$$\mathcal{L} = \psi_L^\dagger \square \psi_R + \psi_R^\dagger \square \psi_L,$$

el cual es invariante de Lorentz y real, de un par de escalares si usamos las definiciones dadas por (1.235) y (1.236). Sin embargo, no es suficiente para declarar las propiedades de la transformación de Lorentz. De la misma manera en que un campo vectorial A_μ esta compuesto por cuatro escalares hasta que lo contraemos con la parcial ∂^μ en la lagrangiana como en el término $(\partial_\mu A_\mu)^2$ de $F_{\mu\nu}^2$. Para proceder, miremos el término $\psi_R^\dagger \sigma_i \psi_R$ el cual transforma como

$$\begin{aligned} \delta \left(\psi_R^\dagger \sigma_i \psi_R \right) &= \frac{1}{2} \psi_R^\dagger \sigma_i [(i\theta_j + \phi_j) \sigma_j \psi_R] + \frac{1}{2} \left[\psi_R^\dagger (-i\theta_j + \phi_j) \sigma_j \right] \sigma_i \psi_R \\ &= \frac{\phi_j}{2} \psi_R^\dagger (\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i) \psi_R + \frac{i\theta_j}{2} \psi_R^\dagger (\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i) \psi_R \\ &= \phi_i \psi_R^\dagger \psi_R - \theta_j \varepsilon_{ijk} \psi_R^\dagger \sigma_k \psi_R, \end{aligned}$$

hemos encontrado que

$$\delta \left(\psi_R^\dagger \psi_R, \psi_R^\dagger \sigma_i \psi_R \right) = \left(\phi_i \psi_R^\dagger \sigma_i \psi_R, \phi_i \psi_R^\dagger \psi_R - \varepsilon_{ijk} \theta_j \psi_R^\dagger \sigma_k \psi_R \right),$$

el cual tiene la forma exacta de cómo se transforma un vector

$$\delta (V_0, V_i) = (\phi_i V_i, \phi_i V_0 - \varepsilon_{ijk} \theta_j V_k).$$

Entonces, si $V_R^\mu = (\psi_R^\dagger \psi_R, \psi_R^\dagger \vec{\sigma} \psi_R)$ es un cuadri-vector, por lo tanto

$$\psi_R^\dagger \partial_t \psi_R + \psi_R^\dagger \partial_j \sigma_j \psi_R$$

es invariante de Lorentz, la relación $\partial_t [\psi_R^\dagger \psi_R] + \partial_j [\psi_R^\dagger \sigma_j \psi_R]$ también lo es, pero no es un buen candidato para ser un espinor en la lagrangiana, ya que es una derivada total. Similarmente

$$\delta (\psi_L^\dagger \psi_L, -\psi_L^\dagger \sigma_i \psi_L) = (-\phi_i \psi_L^\dagger \sigma_i \psi_L, \phi_i \psi_L^\dagger \psi_L + \varepsilon_{ijk} \theta_j \psi_L^\dagger \sigma_k \psi_L),$$

entonces $(\psi_L^\dagger \psi_L, -\psi_L^\dagger \sigma_i \psi_L)$ transforma como vector y la combinación $\psi_L^\dagger \partial_t \psi_L - \psi_L^\dagger \partial_j \sigma_j \psi_L$ es invariante de Lorentz. Usando las definiciones (1.17) podemos escribir todos los invariantes de Lorentz que hemos visto hasta ahora como

$$\mathcal{L} = i\psi_R^\dagger \sigma_\mu \partial_\mu \psi_R + i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}_\mu \partial_\mu \psi_L - m (\psi_R^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \psi_R),$$

donde se agregó un factor i para hacer la lagrangiana hermitiana:

$$(i\psi_R^\dagger \sigma_\mu \partial_\mu \psi_R)^\dagger = -i (\partial_\mu \psi_R^\dagger) \sigma_\mu \psi_R = i\psi_R^\dagger \sigma_\mu \partial_\mu \psi_R,$$

donde se ha integrado por partes y usado que $\sigma_\mu^\dagger = \sigma_\mu$. De esta manera combinamos los dos espinores ψ_R y ψ_L dentro de un objeto de cuatro componentes conocido como *espinor de Dirac*:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}.$$

Si también definimos

$$\bar{\psi} = (\psi_R^\dagger \quad \psi_L^\dagger), \quad (1.237)$$

y usando las matrices de Dirac o γ -matrices en la representación de Weyl

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.238)$$

del álgebra de Clifford se tiene que

$$\gamma^0 \gamma^i = -\gamma^i \gamma^0 = \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}. \quad (1.239)$$

También existe la representación de Dirac y de Majorana, en el Apéndice (G) mostramos cómo ir de una a otra.

La lagrangiana que se obtiene es

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi, \quad (1.240)$$

el cual se le conoce como lagrangiana de Dirac. Por otro lado, en teorías como electrodinámica cuántica se necesita solamente un electrón el cual es eficientemente descrito por la representación reducible de Dirac $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ del grupo de Lorentz. En otras teorías como el Modelo Estándar o teorías supersimétricas, los espinores que no son de Dirac son frecuentes, estos son los espinores de Majorana y de Dirac los cuales introducen una notación muy eficiente. Hay otras maneras de obtener invariantes de Lorentz fuera de ψ_R y ψ_L . La transformación de Lorentz

$$\delta \psi_R = \frac{1}{2} (i\theta_j + \phi_j) \sigma_j \psi_R, \quad \delta \psi_R^\dagger = \frac{1}{2} (-i\theta_j + \phi_j) \psi_R^\dagger \sigma_j,$$

implica que el candidato natural para ser un término de masa $m\psi_R^\dagger \psi_R$ no es invariante bajo boost:

$$\delta (\psi_R^\dagger \psi_R) = \phi_j \psi_R^\dagger \sigma_j \psi_R \neq 0.$$

Resulta que hay una cantidad bilineal diferente que si es invariante de Lorentz:

$$\mathcal{L}_{\text{Maj}} = \psi_R^T \sigma_2 \psi_R. \quad (1.241)$$

Este término es conocido como la masa de Majorana. Para ver la invarianza de Lorentz veamos que las matrices de Pauli formadas por (1.17), la primera y tercera matriz son reales, mientras que la segunda matriz es imaginaria. Esto implica

$$\begin{aligned} \sigma_1^* &= \sigma_1, & \sigma_2^* &= -\sigma_2, & \sigma_3^* &= \sigma_3, \\ \sigma_1^T &= \sigma_1, & \sigma_2^T &= -\sigma_2, & \sigma_3^T &= \sigma_3, \end{aligned} \quad (1.242)$$

entonces

$$\sigma_1^T \sigma_2 = \sigma_1 \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_1, \quad (1.243)$$

$$\sigma_3^T \sigma_2 = \sigma_3 \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_3, \quad (1.244)$$

$$\sigma_2^T \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_2, \quad (1.245)$$

implica que

$$\sigma_j^T \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_j,$$

y por lo tanto

$$\delta(\psi_R^T \sigma_2) = \frac{1}{2} (i\theta_j + \phi_j) \psi_R^T \sigma_j^T \sigma_2 = \frac{1}{2} (-i\theta_j - \phi_j) (\psi_R^T \sigma_2) \sigma_j.$$

Combinando este término con el de la transformación derecha ψ_R (1.6.1), vemos que (1.241) es invariante de Lorentz. Usando la segunda matriz de Pauli (1.17) el término de masa de Majorana se puede expandir como

$$\psi_R^T \sigma_2 \psi_R = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = -i(\psi_1 \psi_2 - \psi_2 \psi_1). \quad (1.246)$$

Por lo tanto, se ha demostrado que $\psi_1 \psi_2 - \psi_2 \psi_1$ es invariante de Lorentz. Usualmente esta expresión se escribe como

$$\psi_1 \psi_2 - \psi_2 \psi_1 = \psi^a \psi^b \varepsilon_{ab}, \quad (1.247)$$

donde

$$\varepsilon_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.248)$$

Aquí ϵ es el mismo que dedujimos en la sección (1.3), así evitamos poner un σ_2 . Aunque existe un problema: si las componentes del fermión conmutan entonces $\psi_1 \psi_2 - \psi_2 \psi_1 = 0$, para masas de Majorana son no triviales, las componentes fermionicas pueden no ser número regulares, por el contrario deben ser números que anticonmutan. Tales números deben ser *números de Grassmann* que satisfacen un álgebra de Grassmann. Por último pero no menos importante están los espinores de Weyl, estos objetos corresponden a la representación irreducible del grupo de Lorentz, es conveniente tener una notación adecuada para construir productos y contracciones de espinores de Weyl solamente, esta notación es muy útil en muchos contextos tanto en teorías de norma como en supersimetría. También esta relacionado con el formalismo de los espinores de helicidad que veremos en el capítulo 3. Se denota como ψ para el espinor izquierdo y como $\tilde{\psi}$ para el espinor derecho. Se indexan los espinores de Weyl como ψ_a para el espinor izquierdo y para el derecho con índice punteados $\tilde{\psi}_{\dot{a}}$. Un espinor de Dirac se puede escribir cómo

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^\alpha \\ \tilde{\psi}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix}. \quad (1.249)$$

Convencionalmente, los espinores izquierdos y anti-espinores derechos tienen superíndice no punteado y los espinores derechos y anti-espinores izquierdos tienen subíndices punteado. El tensor ϵ dado por (1.121) sirve para los espinores de Weyl como lo hace $g_{\mu\nu}$ para los tensores, siempre podremos contraer espinores para formar combinaciones de invariantes de Lorentz con el tensor ϵ . Sin embargo, tenemos que ser cuidadosos subiendo y bajando índices, ya que

$$\psi^a \chi_a = \epsilon^{ab} \epsilon_{ac} \psi_b \chi^c = -\epsilon^{ba} \epsilon_{ac} \psi_b \chi^c = -\delta_c^b \psi_b \chi^c = -\psi_b \chi^b. \quad (1.250)$$

Parece que la posición de los índices hace las cosas más desordenadas pero en realidad hace las cosas más sencillas ya que los espinores anti-conmutan. Podemos definir el producto interno entre dos espinores izquierdo como

$$\psi\chi \equiv \psi_a \chi^a = \psi_a \epsilon^{ab} \chi_b = -\chi_b \epsilon^{ab} \psi_a = \chi_b \epsilon^{ba} \psi_a = \chi_a \psi^a = \chi\psi,$$

por lo tanto el producto es simétrico. Notar que $\psi\psi \neq 0$ aunque $\psi^\alpha \psi_\alpha = 0$. Para los espinores derechos la historia es similar

$$\tilde{\psi}\tilde{\chi} = \tilde{\psi}^{\dot{a}} \tilde{\chi}_{\dot{a}} = -\tilde{\chi}_{\dot{a}} \tilde{\psi}^{\dot{a}} = \tilde{\chi}^{\dot{a}} \tilde{\psi}_{\dot{a}} = \tilde{\chi}\tilde{\psi}.$$

el cual también es simétrico. Para los espinores de Weyl las matrices de Pauli reemplazan a las matrices γ de Dirac. Dos relaciones muy útiles para hacer álgebra con los espinores son

$$g_{\mu\nu} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu = 2\epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad (1.251)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \sigma^{\mu\beta\dot{\beta}} = \bar{\sigma}^\mu_{\dot{\alpha}\alpha}. \quad (1.252)$$

1.7. La ecuación de Dirac

En Teoría Cuántica de Campos podemos describir matemáticamente partículas con o sin masa mediante espinores, usualmente se ven tres tipos: el espinor de Dirac el cual es un vector renglón o columna de cuatro componentes que se transforma bajo el grupo de Lorentz y satisface la ecuación de Dirac, el espinor de Majorana que también es un vector de cuatro componentes muy utilizado para estudiar neutrinos ligeros en extensiones del Modelo Estándar [78], y los espinores de Weyl que son vectores de dos componentes comúnmente utilizados en teorías supersimétricas [90]. Por ejemplo el espinor de Dirac se puede escribir de la siguiente manera. Se denota en mayúscula Ψ a un espinor de cuatro componentes y en minúscula ψ a un espinor de dos componentes:

$$\Psi_D = \Psi_L + \Psi_R, \quad (1.253)$$

con

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \lambda_a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\chi}^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad (1.254)$$

donde $a = 1, 2$ y $\dot{a} = \dot{1}, \dot{2}$. Estos índices no punteados y punteados se le conoce como *notación de van der Waerden*. Los espinores λ_a y $\tilde{\chi}^{\dot{a}}$ son de dos componentes, y se les conocen como *espinores de Weyl*, los cuales serán los protagonistas en el capítulo 3. En el tema de amplitudes sólo nos interesan los espinores de Weyl, estos también reciben los nombres de espinores izquierdos o derechos, veremos a continuación cómo se transforman bajo el grupo de Lorentz.

1.7.1. Representaciones

Se puede ver en (1.207), bajo la conmutación, las rotaciones tienen un álgebra de Lie cerrada, en el caso de los boost no, ya que nos da una rotación. Para resolver esto, se definen las siguientes combinaciones lineales de generadores:

$$A^i = \frac{1}{2}(J^i + iK^i), \quad B^i = \frac{1}{2}(J^i - iK^i), \quad (1.255)$$

estas expresiones satisfacen las relaciones de conmutación siguientes:

$$[A^i, A^j] = i\epsilon^{ijk} A^k, \quad [B^i, B^j] = i\epsilon^{ijk} B^k, \quad [A^i, B^j] = 0, \quad (1.256)$$

tanto A como B generan un grupo $SU(2)$. El grupo de Lorentz es esencialmente $SU(2) \times SU(2)$. En otras palabras, una representación del grupo $SO(1, 3)$ está caracterizado por el doblete (j, j') , donde j corresponde al $SU(2)$ generado por A y j' al generado por B . La representación dada por $(j, j') = (0, 0)$ es la más pequeña del grupo de Lorentz el cual consiste de matrices de 1×1 que actúan sobre escalares. Esta describe objetos que no cambian bajo las transformaciones de Lorentz. La siguiente representación es la $(\frac{1}{2}, 0)$ conocida como representación *izquierda*, donde sólo se usan los generadores A^i , esto implica en (1.255) que $J^i = iK^i = \frac{1}{2}\sigma^i$. Ya que los generadores A^i son las representaciones $j = \frac{1}{2}$ de $SU(2)$; estos tienen que ser iguales a las matrices de Pauli. Los A^i ahora van a ser matrices de 2×2 . Las transformaciones en esta representación son:

$$R(\theta) = e^{i\theta \cdot J} = e^{i\theta \cdot \frac{\sigma}{2}}, \quad B(\phi) = e^{i\phi \cdot K} = e^{i\phi \cdot \frac{\sigma}{2}}. \quad (1.257)$$

La siguiente es la representación $(0, \frac{1}{2})$ conocida como *derecha*. Ahora solo los generadores B^i son usados, lo que implica en (1.255) que $J^i = \frac{1}{2}\sigma^i$ y $K^i = i\frac{1}{2}\sigma^i$. Las transformaciones en esta representación son:

$$R(\theta) = e^{i\theta \cdot J} = e^{i\theta \cdot \frac{\sigma}{2}}, \quad B(\phi) = e^{i\phi \cdot K} = e^{-\phi \cdot \frac{\sigma}{2}}. \quad (1.258)$$

Se puede ver en las ecuaciones (1.257) y (1.258) que ambas representaciones son idénticas bajo rotaciones pero diferentes bajo boost¹. Debido a esto se tienen dos tipos diferentes de espinores, denominados como espinor izquierdo ($\psi_L = \lambda_a$), y espinor derecho ($\psi_R = \tilde{\chi}^{\dot{a}}$), los cuales son de dos componentes. Este tipo de representaciones se les conoce como *espinoriales*. Las representaciones izquierda y derecha están relacionadas entre sí, resulta que son conjugadas una de la otra, para ver esto se define $\bar{\psi}_L = i\sigma^2 \psi_L^*$, con σ^2 como la segunda matriz de Pauli, entonces bajo las transformaciones de rotación (1.257) se tiene:

$$\bar{\psi}'_L = i\sigma^2 (\psi'_L)^* = i\sigma^2 (e^{i\frac{1}{2}\theta \cdot \sigma} \psi_L)^* \quad (1.259)$$

$$= ie^{i\frac{1}{2}\theta \cdot \sigma} \bar{\psi}_L, \quad (1.260)$$

y bajo las transformaciones de boost (1.257):

$$\bar{\psi}'_L = i\sigma^2 (\psi'_L)^* = i\sigma^2 (e^{i\frac{1}{2}\phi \cdot \sigma} \psi_L)^* \quad (1.261)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\phi \cdot \sigma} \bar{\psi}_L, \quad (1.262)$$

donde se han utilizado las identidades $(i\sigma^2)\sigma^*(-i\sigma^2) = -\sigma$ y $(-i\sigma^2)(i\sigma^2) = 1$. Vemos que $\bar{\psi}_L$ justamente se transforma en la representación derecha. Ahora, sea $\bar{\psi}_R = i\sigma^2 \psi_R^*$, entonces bajo las transformaciones de rotación (1.258) se tiene:

$$\bar{\psi}'_R = i\sigma^2 (\psi'_R)^* = i\sigma^2 (e^{i\frac{1}{2}\theta \cdot \sigma} \psi_R)^* \quad (1.263)$$

$$= e^{i\frac{1}{2}\theta \cdot \sigma} \bar{\psi}_R, \quad (1.264)$$

y bajo las transformaciones de boost (1.258):

$$\bar{\psi}'_R = i\sigma^2 (\psi'_R)^* = i\sigma^2 (e^{-i\frac{1}{2}\phi \cdot \sigma} \psi_R)^* \quad (1.265)$$

$$= e^{\frac{1}{2}\phi \cdot \sigma} \bar{\psi}_R. \quad (1.266)$$

Vemos que $\bar{\psi}_R = i\sigma^2 \psi_R^*$ se transforma en la representación izquierda, esto nos dice que $\psi_L = \bar{\psi}_R$ y $\bar{\psi}_L = \psi_R$. Podemos saber las propiedades que tiene $i\sigma^2$ utilizando la notación de Van der Waerden,

¹Estas representaciones ahora son matrices de 2×2 que actúan sobre un vector de dos componentes llamado *espinor*.

si escogemos superíndices no punteados al hacer rotaciones alrededor del eje x , siendo estas matrices de 2×2 se tiene:

$$(i\sigma^2)'^{ab} = (R_x)_c^a (R_x)_d^b (i\sigma^2)^{cd} = (i\sigma^2)^{ab}, \quad (1.267)$$

y bajo un boost se transforma como:

$$(i\sigma^2)'^{ab} = (B_x)_c^a (B_x)_d^b (i\sigma^2)^{cd} = (i\sigma^2)^{ab}, \quad (1.268)$$

resulta que $(i\sigma^2)^{ab}$ es un invariante bajo las transformaciones de Lorentz en la representación espinorial. Por esta razón $i\sigma^2$ suele llamarse el *espinor métrico*, de este modo podemos usarlos para bajar y subir índices espinoriales que se transforman bajo la representación espinorial de Lorentz. Más adelante usaremos la siguiente notación para:

$$(i\sigma^2)^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon^{ab}. \quad (1.269)$$

Debido a que $i\sigma^2$ es real, este objeto no cambia bajo conjugación compleja, entonces los valores punteados son iguales a los no punteados, por lo que

$$(i\sigma^2)^{ab} = (i\sigma^2)^{\dot{a}\dot{b}} = -(i\sigma^2)_{ab} = -(i\sigma^2)_{\dot{a}\dot{b}}. \quad (1.270)$$

Con toda esta información, resulta que tenemos cuatro tipos diferentes de espinores con superíndices y subíndices, punteados y no punteados, esto es:

$$\psi_L = \psi_a, \psi_L^* = \psi_{\dot{a}}, \psi_R = \psi^{\dot{a}}, \psi_R^* = \psi^a. \quad (1.271)$$

Por último, tenemos la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Debido a que A y B conmutan, el estado tiene dos índices: uno punteado, indicando que se transforma bajo la representación derecha y uno no punteado que se transforma bajo la representación izquierda de $SU(2)$. El estado en esta representación va a estar caracterizado por $P_{\dot{a}b}$, el cual tiene un total de cuatro componentes que se interpreta como una matriz compleja hermitiana de 2×2 , también se puede escribir en términos de las matrices de Pauli de la siguiente manera:

$$P_{\dot{a}b} = p_\mu (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} = \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix}, \quad (1.272)$$

cuyo determinante resulta ser

$$\det(P_{\dot{a}b}) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad (1.273)$$

con $\bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\vec{\sigma}) = (\mathbf{1}, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$ y el vector $p_\mu = (t, x, y, z)$. Más adelante veremos que la expresión (1.272) nos permitirá re-parametrizar el momento de cualquier partícula sin masa como el producto de dos espinores de Weyl, esta descripción es clave en el método de amplitudes. Por otro lado, si tomamos la transpuesta de (1.272), se tiene que $(P_{\dot{a}b})^T = P_{b\dot{a}} = (P_{\dot{a}b})^*$. Vemos que la conjugación compleja tiene el efecto de cambiar índices punteados y no punteados. Considerando una transformación de Lorentz sobre (1.272) a primer orden utilizando (1.258) para las transformaciones derechas (punteadas) y (1.257) para las transformaciones izquierdas (no punteado), lo que da lugar a lo siguiente:

$$\begin{aligned} P'_{\dot{c}d} &= (e^{\frac{i}{2}\theta \cdot \sigma - \frac{1}{2}\phi \cdot \sigma})_{\dot{c}}^{\dot{a}} (e^{\frac{i}{2}\theta \cdot \sigma + \frac{1}{2}\phi \cdot \sigma})_d^b P_{\dot{a}b} \\ &= (\mathbf{1} + \frac{i}{2}\theta \cdot \sigma - \frac{1}{2}\phi \cdot \sigma)_{\dot{c}}^{\dot{a}} (P_{\dot{a}b}) (\mathbf{1} + \frac{i}{2}\theta \cdot \sigma + \frac{1}{2}\phi \cdot \sigma)_d^b. \end{aligned} \quad (1.274)$$

Entonces $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es la representación vectorial fundamental del grupo de Lorentz $SO(1,3)$. Las transformaciones en (1.274) dejan invariante el determinante de $P_{\dot{a}b}$.

²De aquí en adelante usaremos la notación $\mathbf{1}$, para referirnos a la matriz identidad de 2×2 , también tomamos el tensor métrico de Minkowski con signatura -2 , es decir, $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$.

1.7.2. Ecuación de Dirac y espinores de Weyl

En esta sección vamos a ver la relación que hay entre los espinores de helicidad y los espinores de Weyl, lo que nos va a permitir tener propiedades interesantes y hacer cálculos de procesos físicos eficientemente. Empecemos por ver algunos detalles de la ecuación de Dirac, cuando tenemos fermiones sin masa es conveniente usar la representación de Weyl o quiral, donde las matrices de Dirac tienen la forma dada por (1.238). La expresión que vamos a estudiar es:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0, \quad (1.275)$$

la cual se obtiene a partir de (1.240). Donde u es el espinor de Dirac de cuatro componentes en el espacio de momentos que describe a las partículas. El espinor v , también de cuatro componentes, describe a las anti-partículas y satisface una ecuación similar, en el Apéndice (G) mostramos este tipo de soluciones de la ecuación de Dirac. La forma explícita de estos espinores en la representación de Weyl es la siguiente [78]:

$$u(\vec{p}, s = \pm) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \vec{\sigma}} \lambda_\pm \\ \sqrt{p \cdot \vec{\sigma}} \lambda_\pm \end{pmatrix}; \quad (1.276)$$

$$v(\vec{p}, s = \pm) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \vec{\sigma}} \chi_\pm \\ -\sqrt{p \cdot \vec{\sigma}} \chi_\pm \end{pmatrix}. \quad (1.277)$$

En coordenadas esféricas se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix}, & \lambda_- &= \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix}, \\ \chi_+ &= \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, & \chi_- &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.278)$$

En la base de helicidad, los espinores u y v se convierten en espinores de helicidad:

$$u_\pm(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2}} \begin{pmatrix} \kappa_\pm \lambda_\pm \\ \kappa_\mp \lambda_\pm \end{pmatrix}; \quad (1.279)$$

$$v_\pm(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2}} \begin{pmatrix} \kappa_\mp \chi_\pm \\ -\kappa_\pm \chi_\pm \end{pmatrix}, \quad (1.280)$$

donde

$$\kappa_\pm = 1 \mp \frac{p}{E+m}, \quad (1.281)$$

con p la magnitud del tri-momento. Para el espinor $u = (u_L, u_R)^T$, la ecuación de Dirac en forma matricial bajo la representación de Weyl es:

$$\begin{pmatrix} -m\mathbb{I} & (E - \vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \\ (E + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}) & -m\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix} = 0, \quad (1.282)$$

desarrollando (1.282) explícitamente, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones acopladas

$$(E - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})u_R = u_L \times m, \quad (1.283)$$

$$(E + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})u_L = u_R \times m, \quad (1.284)$$

cundo $m = 0$, estas ecuaciones se desacoplan y tenemos las ecuaciones de Weyl. Para descomponer cualquier espinor de Dirac u de cuatro componentes en espinores de Weyl de dos componentes, se definen los operadores de proyección quirales P_L y P_R :

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5), \quad P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5). \quad (1.285)$$

En el Modelo Estándar, la matriz γ^5 está relacionada con el concepto de *quiralidad*, los eigenestados de esta matriz se les conoce como estados de quiralidad. Al considerar el límite ultra-relativista ($E \gg m$), donde las energías de las partículas se consideran mucho más grandes que sus masas, y por lo tanto hacer $m = 0$, los espinores de helicidad $u_{\pm}$ y $v_{\pm}$ serán eigenestados de la matriz γ^5 y los eigenestados de quiralidad tendrán eigenvalor de helicidad. Por lo que podemos describir partículas fermiónicas sin masa y con helicidad mediante los espinores de Weyl. Por otro lado, los operadores de proyección satisfacen que $P_R + P_L = 1$, $P_R P_R = P_R$, $P_L P_L = P_L$ y $P_L P_R = 0$. Los estados de quiralidad bajo los operadores de proyección cumplen que

$$\begin{aligned} P_R u_R &= u_R, P_R u_L = 0, P_R v_R = 0, P_R v_L = v_L, \\ P_L u_R &= 0, P_L u_L = u_L, P_L v_R = v_R, P_L v_L = 0. \end{aligned} \quad (1.286)$$

Ya que los operadores (1.285) proyectan estados quirales, entonces cualquier espinor u se puede descomponer como

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} P_L u \\ P_R u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_L \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_R \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u + \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)u, \end{aligned} \quad (1.287)$$

lo que equivale a escribir $u = u_L + u_R$. Los eigenestados quirales u_L y u_R también son conocidos como *espinores de Weyl* o *campos de Weyl* de dos componentes. La relación que hay entre los espinores de helicidad y los espinores de Weyl se manifiesta cuando se descompone la forma general de los espinores de helicidad en sus componentes quirales. Por ejemplo, tomemos el espinor de helicidad derecho u_+ , se puede reescribir como:

$$u_+(p) = N \begin{pmatrix} \kappa_+ \lambda_+ \\ \kappa_- \lambda_+ \end{pmatrix}, \quad (1.288)$$

donde $N = \sqrt{\frac{E+m}{2}}$, usando el efecto que tienen los operadores (1.285) sobre los espinores, se ve que

$$P_R u_+(p) = P_R u_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)u_R. \quad (1.289)$$

Usando la expresión (1.287) se tiene

$$P_R u_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)N \begin{pmatrix} \kappa_+ \lambda_+ \\ \kappa_- \lambda_+ \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa_- \lambda_+ \end{pmatrix} = u_R. \quad (1.290)$$

Para $P_L u_+(p) = P_L u_R = 0$, entonces solo tenemos componente derecha para el espinor de helicidad positiva. Ya que

$$\kappa_- = 1 + \frac{p}{E + m}, \quad (1.291)$$

al considerar que la masa tiende a cero, entonces $p = E$, por lo tanto $\kappa_- = 2$ y $N = \sqrt{E/2}$, dando como resultado que $N \times \kappa_- = \sqrt{2E}$. Desarrollando las mismas operaciones algebraicas al resto de espinores de helicidad y considerando que la masa tiende a cero, se tiene finalmente

$$\begin{aligned} u_R(p) &= \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_+ \end{pmatrix}, u_L(p) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \lambda_- \\ 0 \end{pmatrix}, \\ v_R(p) &= \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \chi_+ \\ 0 \end{pmatrix}, v_L(p) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ -\chi_- \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.292)$$

Los eigenestados de helicidad van a ser equivalentes a los eigenestados quirales únicamente en el límite ultra-relativista, es decir, cuando la energía de las partículas es mucho mayor a la de sus masas, por lo que las expresiones definidas en (1.278) se les conoce con la etiqueta de espinores de Weyl, los cuales serán los protagonistas en el método de amplitudes que veremos mas adelante en el capítulo 3.

Capítulo 2

Teoría de perturbaciones en Física de Partículas y Gravedad

¿El propósito de la física teórica es simplemente catalogar todo lo que puede ocurrir cuando las partículas interactúan entre sí y se separan?
¿O se trata de una comprensión a un nivel más profundo, donde existen elementos que no son directamente observables (como los campos cuantizados subyacentes), pero en función de los cuales tendremos una comprensión más fundamental?

Julian Schwinger, Premio Nobel de Física
1965
Quantum Mechanics: Symbolism of
Atomic Measurements, p.25, Springer
Science and Business Media

Para describir las leyes de la naturaleza, se necesita introducir el concepto de *campo*, es decir el campo del electrón, el campo del quark, el campo del gluón, el campo del Higgs, los campos de los bosones W y Z , etcétera. Hay un campo asociado a cada tipo de partícula fundamental que aparece en la naturaleza [4, 78, 91, 92, 93]. ¿*Porqué Teoría Cuántica de Campos?*, bueno en física clásica una de las primeras razones para introducir el concepto de campo es para construir leyes de la naturaleza que son *locales*, es decir lagrangianas que dependen de coordenadas espaciales y sus respectivas derivadas. Las leyes de Coulomb y Newton involucran el concepto de acción a distancia, esto significa que la fuerza que siente un electrón o un planeta cambia inmediatamente si un protón o una estrella se mueve. Esta situación resultó filosóficamente insatisfactoria y más importante, estaba equivocada experimentalmente. Maxwell y Einstein remediaron esta situación con todas las interacciones mediadas por un campo local. El requerimiento de *localidad* se mantiene como una fuerte motivación para estudiar teorías de campos en el mundo cuántico. Sin embargo, hay muchas razones para tratar el campo cuántico como fundamental. Una de ellas es que la combinación de la mecánica cuántica y la relatividad especial implica que el número de partículas es no conservado. Las partículas no son objetos indestructibles, ellos sea pueden crear y destruir. Paul Dirac fue el primero en entender cómo la relatividad implica la necesidad de antipartículas. Si consideramos una partícula de masa m atrapado en una caja de tamaño L , entonces el principio de incertidumbre

de Heisenberg nos dice que el momento es $\Delta p \geq \hbar/L$, y para la energía hay una incertidumbre de $\Delta E \geq \hbar c/L$. Sin embargo, cuando la incertidumbre en la energía excede el límite de $\Delta E = 2mc^2$, entonces se cruza la barrera para hacer aparecer partículas y antipartículas desde el vacío. Se sabe que el par partícula antipartícula se vuelve importante cuando una partícula de masa m se localiza dentro de una distancia del orden

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc}. \quad (2.1)$$

La longitud λ es conocida como *la longitud de onda de Compton*, a distancias más pequeñas que la de Compton resulta que hay una gran probabilidad de detectar pares partícula antipartícula del enjambre que rodea la partícula original. Esta longitud siempre es más pequeña que la longitud de onda de de Broglie $\lambda_{dB} = h/|\vec{p}|$. La longitud de onda de de Broglie es la distancia donde la naturaleza de la función de onda se hace evidente mientras que la longitud de Compton es la distancia donde el concepto de partícula puntual solitaria se rompe completamente. Cuando entramos al régimen relativista se necesita un nuevo formalismo que nos permita tratar los estados con un número no especificado de partículas, ese formalismo es teoría cuántica de campos.

¿Qué es la Teoría Cuántica de Campos? Como el nombre lo dice, es la cuantización de los campos clásicos tal como el campo electromagnético. Los grados de libertad básicos en teoría cuántica de campos son operadores que son funciones del espacio tiempo, esto significa que estamos manejando un número infinito de grados de libertad, al menos uno por cada punto en el espacio. Resulta que las posibles interacciones en teoría cuántica de campos son gobernados por un puñado de principios básicos, estos son: localidad, simetrías y el grupo de renormalización haciendo que la teoría sea un marco robusto para describir leyes de la naturaleza en cualquier sistema relativista. Teoría cuántica de campos tiene un mayor impacto en materia condensada, física de altas energías, cosmología, gravedad cuántica y matemáticas puras. En la naturaleza hay tres constantes fundamentales; la velocidad de la luz c , la constante de Planck (divido por 2π) $\hbar$ y la constante de Newton G . Las cuales tienen dimensiones de

$$[c] = LT^{-1}, \quad [\hbar] = L^2 MT^{-1}, \quad [G] = L^3 M^{-1} T^{-2}. \quad (2.2)$$

Por convención se escoge $c = \hbar = 1$, lo que permite expresar todas las cantidades en términos de una simple escala, la masa m o equivalentemente, la energía E , ya que $E = mc^2$ se convierte en $E = m$. La elección usual para las unidades de energía es el eV (electrón-voltio) o más seguido es el 1 GeV = 10^9 eV y el 1 TeV = 10^{12} eV. La dimensión de una cantidad se define en términos de masa, si la cantidad X tiene dimensiones de $(masa)^d$ entonces escribimos $[X] = d$, en particular la constante de Newton G tiene dimensiones $[G] = -2$ y define una escala de masa

$$G = \frac{\hbar c}{M_p^2} = \frac{1}{M_p^2}, \quad (2.3)$$

donde $M_p \approx 10^{19}$ GeV es la escala de Planck, el cual corresponde a una longitud de $l_p \approx 10^{-33}$ cm, se cree que la escala de Planck es la longitud más pequeña donde la física hace sentido, más allá de este límite los efectos de gravedad cuántica se vuelven importantes y no está claro si el concepto de espacio tiempo sigue siendo válido. La longitud más larga de la que podemos hablar es el tamaño del horizonte cosmológico, aproximadamente $10^{60} l_p$.

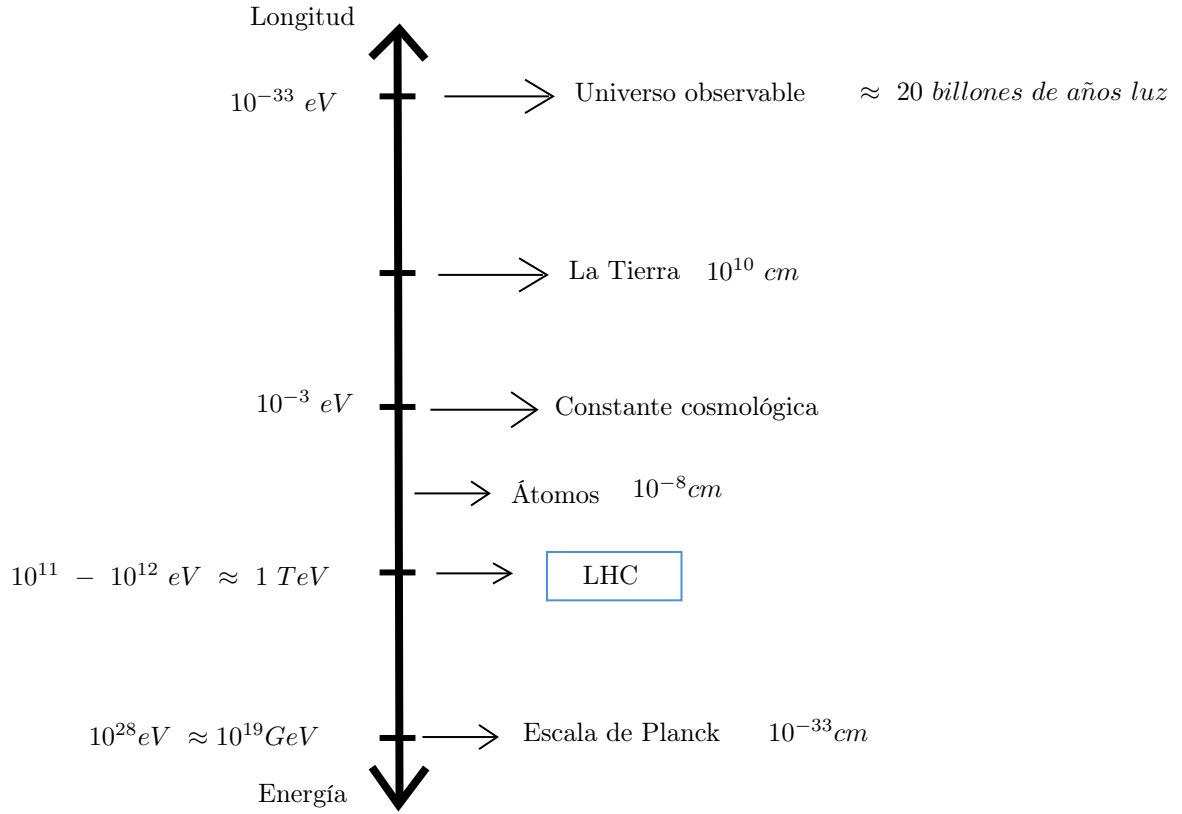


Figura 2.1: Escalas de energía en el universo.

Algunas escalas útiles en el universo se muestran en la Figura 2.1. Se espera que el modelo estándar de las partículas elementales es válido hasta la escala de energía $\mathcal{O}(\text{TeV})$. Este es precisamente el régimen de energías que se está probando actualmente en el Gran Colisionador de Hadrones (LHC, por sus siglas en inglés) en el CERN. Se cree que el marco de la teoría cuántica de campos continuará siendo válido hasta escalas de energía ligeramente por abajo de la escala de Planck. Se muestran algunas de las masas aproximadas de partículas elementales y no elementales en la Tabla 2.1

Partículas	masas
Neutrinos	$\sim 10^{-2} \text{ eV}$
Electrón	0.5 MeV
Muon	100 MeV
Piones	140 MeV
Protón, Neutrón	1 GeV
Tau	2 GeV
Bosones W, Z	80 – 90 GeV
Bosón de Higgs	125 GeV

Tabla 2.1: Tabla de masas

2.1. Amplitudes de dispersión

La teoría cuántica de campos se ha destilado en una serie de operaciones conocidas en la comunidad como *reglas de Feynman*. Estas reglas pueden ser pensadas como una receta para describir de todas las maneras posibles procesos de dispersión en teoría cuántica de campos y están incorporados dentro de una forma pictórica conocidos hoy en día como los *diagramas de Feynman*. El propósito de estas secciones es desarrollar las reglas de Feynman y mostrar cómo construir diagramas de Feynman y luego calcular amplitudes de dispersión con estas reglas.

2.1.1. La matriz S

En mecánica cuántica se hacen predicciones experimentales mediante el calculo de la amplitud de probabilidad de que un proceso puede ocurrir. Este hecho se mantiene verdadero en teoría cuántica de campos, donde se calculan amplitudes para la interacción de partículas tales como decaimiento o procesos de dispersión. La principal herramienta para hacer posible estos cálculos es conocido como la *matriz S* . Cualquier proceso físico puede ser considerado como una transición de un estado inicial $|i\rangle = |\alpha(t_0)\rangle$ hacia un estado final denotado por $|f\rangle = |\alpha(t)\rangle$, esto es

$$|i\rangle \rightarrow |f\rangle, \quad (2.4)$$

esta transición ocurre vía la acción de un operador unitario, la matriz S , donde S se refiere *scattering* que en español se traduce a *dispersión*, entonces,

$$|f\rangle = S|i\rangle, \quad (2.5)$$

ya que S es unitario, entonces el operador satisface

$$S^\dagger S = S S^\dagger = 1. \quad (2.6)$$

De la mecánica cuántica, sabemos que la evolución temporal de los estados es descrito por el operador unitario de evolución temporal $U(t, t_0)$. Entonces la amplitud que evoluciona de un estado inicial $|\alpha_I(t_0)\rangle$ a un tiempo t_0 hacia un estado final $|\alpha_F(t)\rangle$ a un tiempo posterior t es descrito por

$$\langle \alpha_F(t) | U(t, t_0) | \alpha_I(t_0) \rangle. \quad (2.7)$$

Los estados iniciales y finales involucran partículas libres que vienen desde $t = -\infty$, interactúan, luego se alejan entre si para volver a formar partículas libres al tiempo $t = +\infty$. Un elemento de la matriz S es el límite de la ecuación (2.7) donde

$$S_{FI} = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} \langle \alpha_F(t) | U(t, t_0) | \alpha_I(t_0) \rangle. \quad (2.8)$$

En el espacio de momentos, la matriz S es proporcional a la amplitud $\mathcal{M}_{FI}$ para un proceso dado el cual está por ocurrir:

$$S_{FI} \propto -i(2\pi)^4 \delta^4(p_F - p_I) \mathcal{M}_{FI}, \quad (2.9)$$

donde p_F es el cuadrimomento total de los estados salientes y similarmente para los momentos entrantes. La delta de Dirac garantiza la conservación de momento en el proceso. Si expandimos la amplitud de probabilidad en una serie de potencias resulta que hay un diagrama de Feynman que corresponde a cada término de la expansión perturbativa y al sumarlas todas juntas tenemos la amplitud total. Si $\mathcal{M}$ es la amplitud de algún proceso dado. Los estados de la partícula inicial y final surgen desde un conjunto de procesos cada uno con una amplitud $\mathcal{M}_i$. La amplitud total es

$$\mathcal{M}_{\text{total}} = \sum_{i=0}^n g^{k_i} \mathcal{M}_i, \quad (2.10)$$

donde g^{k_i} son constantes de acoplamiento para cada $\mathcal{M}_i$. Habrá un diagrama de Feynman para cada término $\mathcal{M}_i$ en la suma. Cada amplitud escala mediante su constante de acoplamiento g el cual describe la fuerza de la interacción y k_i describe el orden de la interacción. Para primer orden, $k = 1$, para segundo orden es $k = 2$ y así sucesivamente. Entre mayores ordenes en (2.10) más factores g vamos a tener. Por lo tanto, si g es muy pequeña en la medida que k_i se hace más grande, los términos de mayor orden se van a volar despreciables y de esta manera podemos cortar en algún punto razonable la serie para tener una buena estimación de la amplitud. Por ejemplo, en electrodinámica cuántica (QED, en ingles) la constante de acoplamiento es proporcional a $\alpha = 1/137 \approx 0,0073$ el cual es un número muy pequeño. A segundo orden la probabilidad es proporcional a $\alpha^2 \approx 0,0000053$. Por lo tanto, en la medida que los factores de la constante de acoplamiento aparecen como productos, los términos de la serie se van a convertir en contribuciones cada vez más pequeñas de modo que podemos ignorarlas en nuestros cálculos. En teoría cuántica de campos, es muy útil examinar la evolución de un sistema usando la imagen de las interacciones vamos a obtener las amplitudes como tal.

La imagen de las interacciones

En teoría cuántica, el hamiltoniano en la imagen de las interacciones se divide en dos partes, un hamiltoniano libre H_0 el cual es independiente del tiempo y el hamiltoniano de Interacción H_I que es dependiente del tiempo,

$$H = H_0 + H_I,$$

los estados y los operadores en la imagen de Schrödinger tendrán un subíndice S . Por ejemplo, en la imagen de Schrödinger un vector de estado se escribe como $|\alpha\rangle_S$ y un operador se va denotar como A_S . En esta imagen, los operadores están fijos mientras que los estados evolucionan en el tiempo de acuerdo a

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\alpha(t)\rangle_S = H |\alpha(t)\rangle_S, \quad (2.11)$$

donde H es el hamiltoniano completo. Un estado en la imagen de interacciones $|\alpha(t)\rangle_I$ es relacionado con un estado en la imagen de Schrödinger mediante la acción de la parte libre del hamiltoniano.

$$|\alpha(t)\rangle_I = e^{iH_0 t} |\alpha(t)\rangle_S. \quad (2.12)$$

Ahora, usando la imagen de interacciones podemos tomar una visión intermedia en la imagen de Schrödinger y la de Heisenberg, el cual mueve la evolución temporal de los estados hacia los operadores. Esto es, en la imagen de las interacciones los operadores también evolucionan en el tiempo. Un operador en la imagen de interacciones A_I está relacionado con un operador A_S en la imagen de Schrödinger de la siguiente manera

$$A_I = e^{iH_0 t} A_S e^{-iH_0 t}, \quad (2.13)$$

luego, derivando la ecuación (2.12) y usando ecuación (2.11) para obtener una ecuación dinámica para los estados, esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\alpha(t)\rangle_I &= \frac{\partial}{\partial t} (e^{iH_0 t} |\alpha(t)\rangle_S) \\ &= iH_0 e^{iH_0 t} |\alpha(t)\rangle_S + e^{iH_0 t} \frac{\partial}{\partial t} |\alpha(t)\rangle_S \\ &= iH_0 e^{iH_0 t} |\alpha(t)\rangle_S + e^{iH_0 t} (-iH |\alpha(t)\rangle_S) \\ &= iH_0 e^{iH_0 t} |\alpha(t)\rangle_S + e^{iH_0 t} (-iH_0 - iH_I) |\alpha(t)\rangle_S \\ &= -ie^{iH_0 t} H_I |\alpha(t)\rangle_S \\ &= -iH_I |\alpha(t)\rangle_I. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Por lo tanto, concluimos que la evolución temporal de los estados en la imagen de las interacciones es

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\alpha(t)\rangle_I = H_I |\alpha(t)\rangle_I. \quad (2.15)$$

Esto nos dice que la evolución temporal de los estados es determinado por el término de interacción del hamiltoniano. Para ver como evolucionan los operadores en la imagen de interacciones en el tiempo, tomamos la derivada temporal en (2.13), esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_I &= \frac{\partial}{\partial t} (e^{iH_0 t} A_S e^{-iH_0 t}) \\ &= iH_0 e^{iH_0 t} A_S e^{-iH_0 t} + e^{iH_0 t} \left(\frac{\partial A_S}{\partial t} \right) e^{-iH_0 t} - i e^{iH_0 t} A_S H_0 e^{-iH_0 t} \\ &= iH_0 e^{iH_0 t} A_S e^{-iH_0 t} - i e^{iH_0 t} A_S H_0 e^{-iH_0 t} \\ &= iH_0 A_I - iA_I H_0 \\ &= i[H_0, A_I]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Esto es, la evolución temporal de los operadores en la imagen de las interacciones es determinado por el término libre del hamiltoniano:

$$\frac{\partial}{\partial t} A_I = i[H_0, A_I] \quad (2.17)$$

Teoría de perturbaciones

Sabemos que la evolución temporal en mecánica cuántica puede ser descrito por un operador unitario $U(t, t_0)$:

$$|\alpha(t)\rangle_I = U(t, t_0) |\alpha(t_0)\rangle_I, \quad (2.18)$$

derivando ambos lados de esta ecuación. Por la izquierda tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} |\alpha(t)\rangle_I = -iH_I |\alpha(t)\rangle_I = -iH_I U(t, t_0) |\alpha(t_0)\rangle_I. \quad (2.19)$$

Por la derecha tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) |\alpha(t_0)\rangle_I.$$

Por consiguiente, la evolución temporal de $U(t, t_0)$ es descrita por

$$i \frac{\partial U}{\partial t} = H_I U. \quad (2.20)$$

Ahora si tomamos $t = t_0$ en la ecuación(2.18) esperamos ver un cambio en el sistema. Vamos a calcular la forma del operador U en este tiempo. Tenemos

$$|\alpha(t_0)\rangle_I = U(t_0, t_0) |\alpha(t_0)\rangle_I, \quad (2.21)$$

entonces

$$U(t_0, t_0) = 1. \quad (2.22)$$

Este resultado nos dice que no habrá cambios en el sistema a ese tiempo. Tomamos esto como condición inicial en (2.20) e integramos, entonces

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t') U(t', t_0) dt',$$

esta integral describe como el operador U cambian cuando vamos del tiempo t_0 a t . Esto sugiere un patrón iterativo donde vamos mejorando el cálculo del operador U en una serie de pequeños

pasos. Como ejemplo vamos a tomar el operador U_0 , el siguiente paso es tomar U_1 , el cual es dado por

$$U_1(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t H_I(\tau) U_0(\tau, t_0) d\tau. \quad (2.23)$$

Sin embargo, vemos que hubo un gran cambio al ir de U_0 a U_1 , por lo que necesitamos ir al siguiente nivel. De este modo tomamos el resultado de U_1 para calcular U_2

$$U_2(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t H_I(\tau) U_1(\tau, t_0) d\tau, \quad (2.24)$$

y si seguimos calculando sucesivamente, vamos a obtener una gran expresión:

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t H_I(t') \left(1 - i \int_{t_0}^{t'} H_I(t'') U(t'', t_0) dt'' \right) dt' \quad (2.25)$$

$$= 1 - i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_I(t') H_I(t'') + \dots \quad (2.26)$$

$$+ (-i)^n \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \dots \int_{t_0}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} H_I(t') H_I(t'') \dots H_I(t^{(n)}). \quad (2.27)$$

Asumiendo que el tiempo satisface un ordenamiento temporal $t > t' > t'' > \dots > t^{(n)}$ podemos escribir el término n ésimo como

$$U_n(t, t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \dots \int_{t_0}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} T \left\{ H_I(t') H_I(t'') \dots H_I(t^{(n)}) \right\} \quad (2.28)$$

$$= \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \dots \int_{t_0}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} T \left\{ H_I(t') H_I(t'') \dots H_I(t^{(n)}) \right\}, \quad (2.29)$$

donde T significa el operador de ordenamiento temporal. Sumando todos estos términos vamos a obtener lo que se conoce como *serie de Dyson*. Podemos encontrar una aproximación apropiada cortando la expansión en algún número de términos apropiado.

Para estudiar los estados se necesita resolver

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\alpha(t)\rangle = H_I |\alpha(t)\rangle, \quad (2.30)$$

donde el hamiltoniano H_I es dependiente del tiempo. Si la interacción H_I va a cero, entonces los estados son constantes en el tiempo sugiriendo que cada transición en los estados es debido a la interacciones. Para simplificar notación se toma el estado inicial del sistema al tiempo t_0 como

$$|\alpha(t_0)\rangle = |i\rangle, \quad (2.31)$$

el estado inicial del sistema $|i\rangle$ es el estado del sistema antes del evento de dispersión o decaimiento, o el estado del sistema al tiempo $t = -\infty$. Este es el estado de la partícula donde no interacciona, mucho antes del evento de dispersión. El estado final es tomado como $\lim_{t \rightarrow \infty} |\alpha(t)\rangle = S|i\rangle$ mucho tiempo después de que ocurrió el proceso de dispersión. Se quiere calcular la amplitud de probabilidad del sistema cuando esta en un estado inicial y evoluciona a algún estado final $|f\rangle$

$$\langle f | S | i \rangle = S_{fi}, \quad (2.32)$$

el cual es una componente de la matriz S . Por lo tanto la probabilidad $\mathbf{P}_{fi}$ para un sistema que empieza en el estado $|i\rangle$ y termina en el estado final $|f\rangle$ después de experimentar una interacción es descrita por el operador S como

$$\mathbf{P}_{fi} = |\langle f | S | i \rangle|^2 = S_{fi} S_{fi}^* \quad (2.33)$$

$$|\langle f | S | i \rangle|^2. \quad (2.34)$$

El estado del sistema a un tiempo t puede ser descrito mediante una expansión iterativa similar a la que se uso para la serie de Dyson. Dado un estado inicial $|i\rangle$, sus primeros dos términos van a ser

$$|\alpha(t)\rangle = |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t H_I(t') |\alpha(t')\rangle dt', \quad (2.35)$$

ya que

$$S_{FI} = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} \langle \alpha_F(t) | U(t, t_0) | \alpha_I(t_0) \rangle, \quad (2.36)$$

podemos escribir U en términos de una serie de Dyson, y por lo tanto escribir la matriz S como una serie:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \cdots \int_{-\infty}^{t^{(n-1)}} dt^n H_I(t_1) H_I(t_2) \cdots H_I(t_n).$$

2.1.2. Reglas y diagramas de Feynman

El punto de la expansión perturbativa es que refina los cálculos usando correcciones que son cada vez más y más pequeñas. La reducción es cuantificada por el poder de los parámetros de la perturbación, en este caso son las constantes de acoplamiento. En dicha expansión perturbativa, la amplitud $\mathcal{M}$ para un proceso dado puede ser calculado usando una expansión del tipo (2.10). Cada amplitud individualmente $\mathcal{M}_i$ es un proceso en específico ya sea de dispersión o decaimiento que puede ser dibujado como un diagrama de Feynman. Mientras el orden del término en la amplitud sea más alto, menos probable es que el proceso ocurra y por lo tanto menos contribuye en la amplitud total. Los términos $\mathcal{M}_n$ tienen las mismas partículas entrantes que salientes pero representan diferentes estados intermedios. Los estados intermedios corresponden a términos en la serie de Dyson. Ya que cada término $\mathcal{M}_n$ es escalado por una constante de acoplamiento g , el cual representa la fuerza de la interacción, cuando la fuerza de la interacción es relativamente pequeña entonces podemos usar la teoría de perturbaciones. Un diagrama de Feynman consiste de uno o más líneas externas que representan las partículas entrantes y salientes, conectados por un vértice. Tomar esta convención nos va llevar a tener las siguientes relaciones en el momento

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= p_3 + p_4, \\ p_1 - p_4 &= p_3 - p_2, \\ p_1 - p_3 &= p_4 - p_2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

El tiempo puede ser tomado como fluyendo del fondo del diagrama hacia arriba, o de izquierda a derecha del diagrama. Esto es una convención pero más adelante veremos que en el método de amplitudes la convención va cambiar, vamos a tomar ya sea o todas las partículas entrantes o todas las partículas salientes por lo que vamos a tener que la suma de todos los momentos debe dar cero:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 0. \quad (2.38)$$

Como ejemplo vamos a tomar un decaimiento que involucra a las partículas A , B y C , esto es

$$A \rightarrow B + C, \quad (2.39)$$

si dibujamos el tiempo yendo de arriba hacia abajo vamos a tener el diagrama de Feynman:

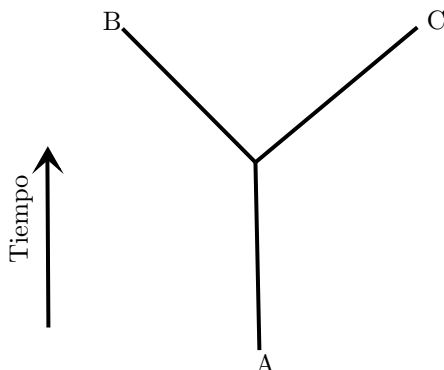


Figura 2.2: Digrama de Feynman para el proceso de decaimiento con el tiempo yendo de abajo hacia arriba

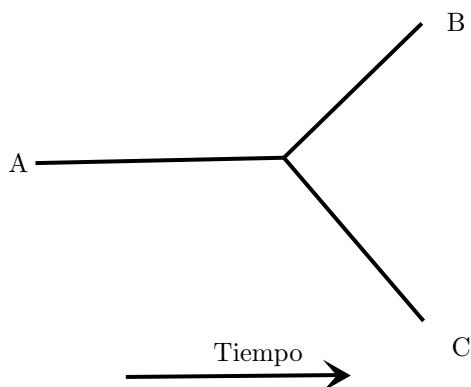


Figura 2.3: Diagrama de Feynman del decaimiento $A \rightarrow B+C$, con el tiempo yendo de izquierda a derecha.

Los diagramas de Feynman con representaciones cualitativas, simbólicas de la interacción de las partículas. Aquí el flujo del tiempo no se toma como un eje t . Normalmente la dirección del flujo del tiempo no se indica explícitamente en el diagrama, más bien se sobreentiende que está ahí. Los procesos de dispersión involucran un estado intermedio o partícula que es dibujado en el diagrama como una línea interna. Si las partículas A y B colisionan con las partículas C y D dejando el proceso. Este proceso involucra una partícula intermedia I ; esto es

$$A + B \rightarrow C + D, \tag{2.40}$$

este proceso está representado diagramáticamente en la Figura (2.4)

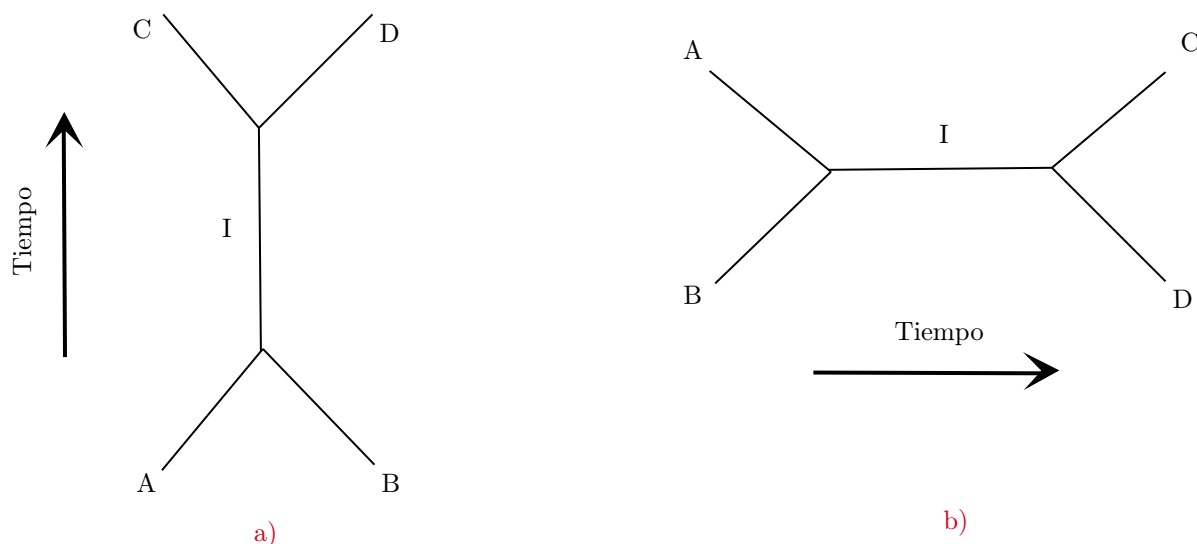


Figura 2.4: a) Diagramas de Feynman para el proceso $A+B \rightarrow C+D$, donde el tiempo fluye de abajo hacia arriba. b) Diagramas de Feynman para el proceso $A+B \rightarrow D+C$, con el flujo del tiempo yendo de izquierda a derecha. Las partículas A y B se aniquilan, produciendo el estado I el cual decae tiempo después en las partículas C y D.

La manera correcta de interpretar el estado intermedio es pensando que la partícula mediadora transmite la fuerza dada entre las partículas A y B. Por ejemplo, si la fuerza es la interacción electromagnética, entonces la línea interna en el proceso de dispersión entre un electrón y un positrón debe ser un fotón. Las partículas pueden dispersarse mediante el intercambio de un bosón, la partícula mediadora, este proceso se representa de la siguiente manera

$$C + D \rightarrow C + D, \quad (2.41)$$

donde las partículas C y D intercambian un bosón durante el proceso de dispersión, este proceso se muestra en la Figura (2.5)

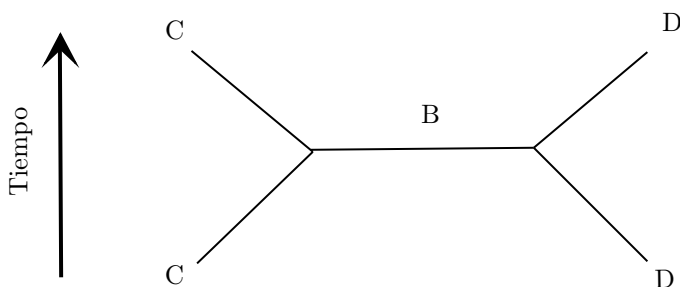


Figura 2.5: Las partículas C y D se mueven hacia adelante, interactúan mediante el intercambio de un bosón B y luego se dispersan. El tiempo fluye de abajo hacia arriba.

Sabemos que en teoría cuántica de campos las partículas y antipartículas forman parte de muchos procesos. Por pura ilustración vamos a denotar a las partículas como A y a las antipartículas como A' . Las líneas para las partículas en un diagrama de Feynman son indicadas por una flecha que fluye con la dirección del tiempo y las líneas para las antipartículas en el diagrama de Feynman son indicadas por una flecha que fluye en dirección opuesta a la dirección del tiempo tal y como se muestra en la Figura 2.6, donde se considera el proceso de aniquilación entre A y A' , primero se

conocen y luego se aniquilan produciendo un bosón B el cual después decae en las partículas A y A'.

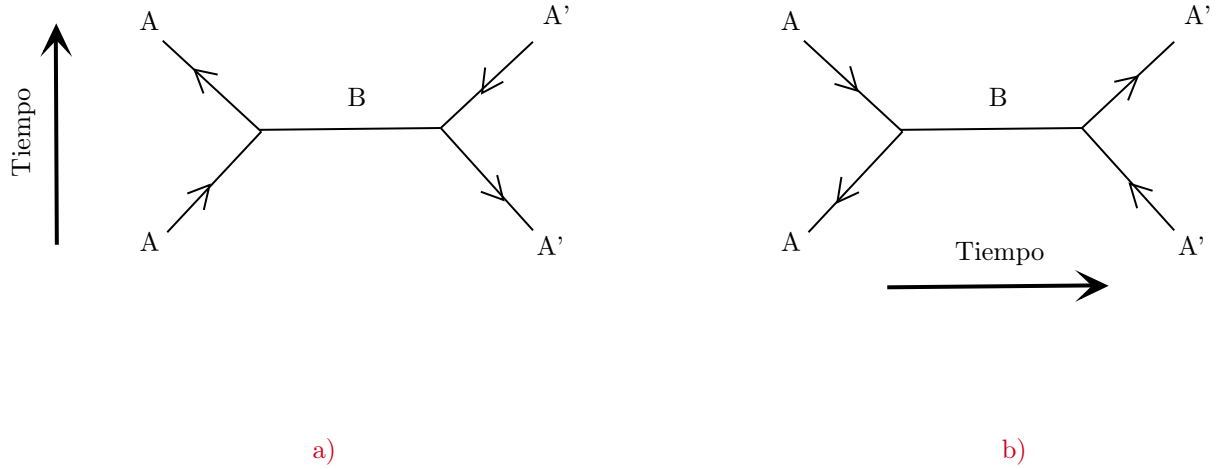


Figura 2.6: El proceso de dispersión $A + A' \rightarrow A + A'$, usando las flechas que fluyen con el tiempo indicando que son partículas y las flechas que fluyen en dirección opuesta al tiempo indican antipartículas.

Una de las observaciones más importantes de Feynman es que una partícula viajando hacia adelante en el tiempo es equivalente a una antipartícula viajando hacia atrás en el tiempo, las flechas indican eso. Cada línea en un diagrama de Feynman está caracterizado por un cuadrimomento, por ejemplo tomando el proceso $A + A' \rightarrow A + A'$ ocurre con el intercambio de un bosón B como se muestra en la Figura 2.6, los momentos de cada partícula entrante y saliente o partículas externas se indican con una letra p . El momento interno se indica con una q , esto se muestra en la Figura 2.7.

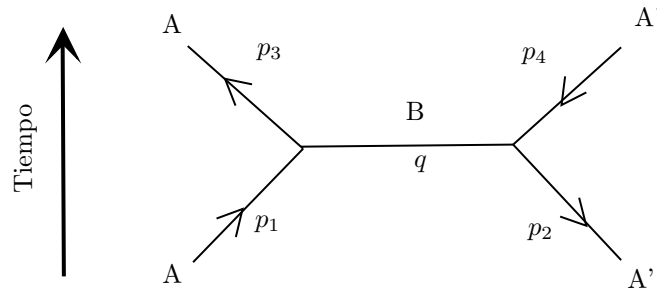


Figura 2.7: La configuración de momentos en un diagrama de Feynman.

2.1.3. Calculando amplitudes

Para calcular amplitudes $\mathcal{M}$ de un proceso entre partículas se integra sobre todos los momentos internos, afortunadamente todas las integrales involucran deltas de Dirac los cuales pueden ser hechos por inspección. Esto es gracias a las propiedades de la función delta

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x') dx = f(x'), \quad (2.42)$$

las razón es por que las funciones delta garantizan la conservación de la energía y el momento en las amplitudes. En cada vértice, se asigna un signo positivo para la partícula que esta entrando al

vértice y un signo negativo para el momento que esta saliendo del vértice. Por ejemplo, consideremos el vértice de un decaimiento tal y como se muestra en la Figura 2.8, el momento y la energía son conservados y no cambian debido a la interacción. Esta conservación se escribe como $p_1 = p_2 + p_3$, y esta información se incluye dentro de la delta de Dirac, esto es

$$(2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2 - p_3), \quad (2.43)$$

el valor de la función delta es 1 cuando $p_1 = p_2 + p_3$ y 0 cualquier otro valor.

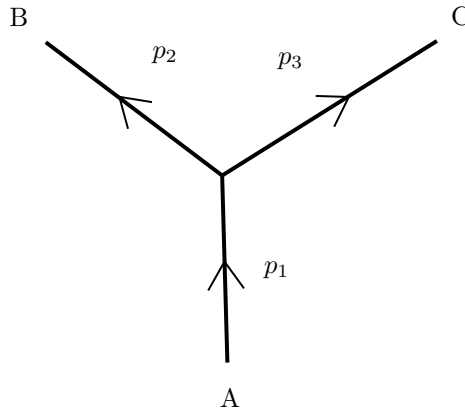


Figura 2.8: Un decaimiento mostrando los momentos entrantes y salientes del vértice.

La dirección de las flechas indican si la línea dada es para una partícula o para una antipartícula. Si la línea va hacia dentro del vértice entonces el momento esta entrando hacia el vértice. Siguiendo la dirección del tiempo, el cual puede ser hacia arriba o hacia la derecha para un vértice, las líneas dejando el vértice deben tener su momento con un signo menos. Conservación de la energía y momento se impone en cada vértice el cual involucra una línea interna. Considerando el vértice de la Figura 2.9, donde el bosón B tiene momento q , la función delta garantiza la conservación de momento, esto es

$$(2\pi)^4 \delta(p_1 - p_3 - q) \quad (2.44)$$

Si asignamos la dirección del momento de la línea interna q como se muestra en el inciso *b*) de la Figura 2.9, entonces la función delta se convierten en

$$\delta \left(\sum \text{momento entrante} - \sum \text{momento saliente} \right), \quad (2.45)$$

es escrito como

$$(2\pi)^4 \delta(p_2 - p_4 + q). \quad (2.46)$$

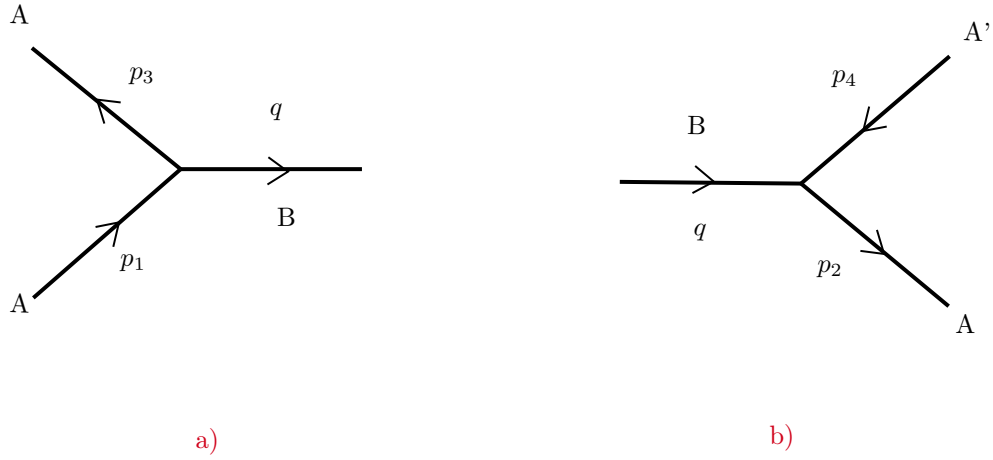


Figura 2.9: Conservación de energía y momento se impone en cada vértice con una línea interna usando una función delta.

Como ejemplo dejamos las reglas de Feynman para la electrodinámica cuántica que se muestran en la Figura 2.10. más adelante usaremos estas reglas para construir amplitudes para una mejor ilustración de los procesos.

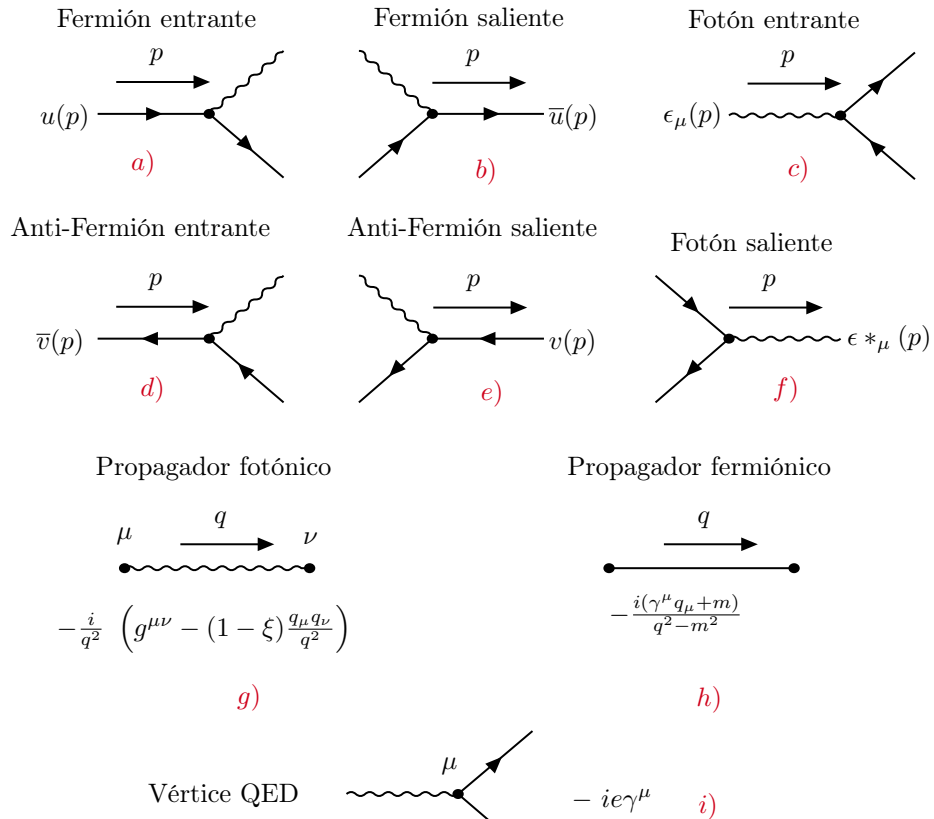


Figura 2.10: Reglas de Feynman para electrodinámica cuántica.

2.1.4. Pasos para construir una amplitud

Construir una amplitud mediante los diagramas de Feynman involucra los siguientes pasos [94]:

- Escribir la función delta para conservar la energía y momento en cada vértice. Luego se multiplican estos términos juntos.
- Escribir la constante de acoplamiento en cada vértice.
- Escribir el propagador de cada línea interna.
- Multiplicar todos los factores juntos.
- Integrar sobre los momentos internos,

En la práctica todos estos pasos ya vienen incluidos en la receta que da Peskín para calcular observables como la sección eficaz, que se obtienen calculando la siguiente fórmula:

$$d\sigma = \frac{1}{2E_A 2E_B |v_A - v_B|} \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow p_f)|^2 \times (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum p_f). \quad (2.47)$$

Entonces la receta que usamos para calcular amplitudes es [1]:

- Dibujar el diagrama del proceso deseado.
- Usar las reglas de Feynman para obtener la amplitud $\mathcal{M}$.
- Cuadrar la amplitud, luego promediar o sumar sobre espines usando relaciones de completeness: $\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m; \dots$.
- Evaluar las trazas usando los teoremas de las trazas (E), reordenar términos y simplificar tanto como sea posible.
- Escoger un sistema de referencia particular. Expresar todos los productos de cuádrimomentos en términos de energías y ángulos.
- Luego se calcula su $\mathcal{M}^\dagger$ para obtener la $|\mathcal{M}|^2$ y usar la fórmula para la sección eficaz.
- Finalmente, integrar sobre el espacio fase.

2.1.5. Procesos de dispersión en el modelo estándar

En esta sección vamos a calcular algunos procesos de dispersión detalladamente que son de interés para este trabajo de tesis, usando el método tradicional de los diagramas de Feynman.

El decaimiento Z^0 a $f\bar{f}$

El diagrama de Feynman para este proceso se puede ver en la Figura 2.11.

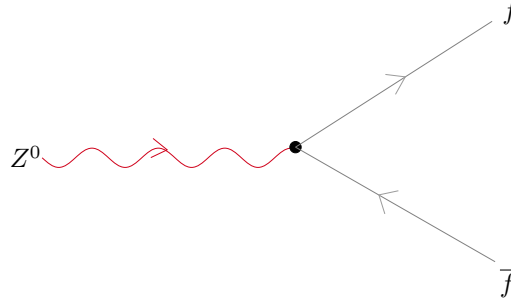


Figura 2.11: El decaimiento $Z^0(p_3) \rightarrow f(p_1)\bar{f}(p_2)$.

La amplitud para este proceso usando reglas de Feynman es

$$\mathcal{M}(Z^0 \rightarrow f\bar{f}) = \bar{u}(p_1, s_1) \left(\frac{ig}{2 \cos \theta_w} \gamma_\mu (g_\nu^f - g_A^f \gamma_5) \right) v(p_2, s_2) \epsilon^\mu(p_3, \lambda), \quad (2.48)$$

donde

$$g_\nu^f = T_{3,fL} - (2 \sin^2 \theta_w \times Q_f), \quad (2.49)$$

$$g_A^f = T_{3,fL}. \quad (2.50)$$

La cinemática del proceso es

$$p_3 = p_1 + p_2 \Rightarrow p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2}(m_z^2 - 2m_f^2), \quad (2.51)$$

también se necesita la condición de capa de masa

$$(p_3)_\mu \epsilon^\mu = 0, \quad (2.52)$$

El adjunto de la amplitud, $\mathcal{M}^\dagger$, es

$$\mathcal{M}^\dagger = -\frac{ig}{2 \cos \theta_w} \bar{v}\gamma_\nu (g_\nu^\lambda - g_A^\lambda r_s) u \times (\varepsilon^\nu)^*. \quad (2.53)$$

El siguiente paso aquí es calcular $|\bar{\mathcal{M}}|^2$, lo que significa multiplicar $\mathcal{M}$ con su transpuesta conjugada $\mathcal{M}^\dagger$, y posteriormente promediar sobre espines y polarizaciones, esto es,

$$\begin{aligned} |\bar{\mathcal{M}}|^2 &= \left(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sum_{S_1} \cdot \sum_{s=2} \right) \mathcal{M} \mathcal{M}^\dagger \\ &= \frac{g^2}{4 \cos^2 \theta_w} \left(\frac{1}{3} \sum_{\lambda=1}^3 \varepsilon^\mu \varepsilon^{\nu*} \right) \times \sum_{s_1} \sum_{s_2} [\bar{u} \gamma_\mu (g_\nu^l - g_A^l \gamma_5) v \times \bar{v} \gamma_\nu (g_\nu^l - g_A^l \gamma_5) u] \\ &= \frac{g^2}{12 \cos^2 \theta_w} \times P^{\mu\nu} \times \sum_{s_1} \sum_{s_2} \bar{u}_\alpha [\gamma_\mu (g_\nu^l - g_A^l \gamma_5)]_{\alpha\beta} v_\beta \times \bar{v}_\lambda [\gamma_\nu (g_\nu^l - g_A^l \gamma_5)]_{\lambda\rho} u_\rho \\ &= \frac{g^2}{12 \cos^2 \theta_w} P^{\mu\nu} \left(\sum_{s_1} u_\rho \bar{u}_\alpha \right) \left(\sum_{s_2} v_\beta \bar{v}_\lambda \right) [\gamma_\mu (g_\nu^l - g_A^l \gamma_5)]_{\alpha\beta} [\gamma_\nu (g_\nu^l - g_A^l \gamma_5)]_{\lambda\rho} \\ &= \frac{g^2}{12 \cos^2 \theta_w} P^{\mu\nu} \cdot (\not{p}_1 + m_l)_{\rho\alpha} [\gamma_\mu (g_\nu^l - g_A^l \gamma_5)]_{\alpha\beta} (\not{p}_2 - m_l)_{\beta\lambda} [\gamma_\nu (g_\nu^l - g_A^l \gamma_5)]_{\lambda\rho} \\ &= \frac{g^2}{12 \cos^2 \theta_w} P^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde

$$P^{\mu\nu} = \frac{1}{3} \sum_{\lambda=1}^3 \varepsilon^\mu \times \varepsilon^{\nu*} = \sum_{\lambda=1}^3 \varepsilon^\mu(p_3, \lambda) \varepsilon^{\nu*}(p_3, \lambda) = -g^{\mu\nu} + \frac{p_3^\mu p_3^\nu}{m_z^2}. \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \text{Tr} [(\not{p}_1 + m_l) \gamma_\mu (g_\nu^l - g_A^l \gamma_5) (\not{p}_2 - m_l) \gamma_\nu (g_\nu^l - g_A^l \gamma_5)] \\ &= \text{Tr} [(g_\nu^l - g_A^l \gamma_5) (\not{p}_1 + m_l) \gamma_\mu (g_\nu^l - g_A^l \gamma_5) (\not{p}_2 - m_l) \gamma_\nu]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Lo que viene ahora es calcular la traza (2.56) con la tecnología de trazas del Apéndice E, desarrollando explícitamente todos los términos, nos queda

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \text{Tr} \left\{ [(g_\nu^l - g_A^l \gamma_5) \not{p}_1 \gamma_\mu (g_\nu^l - g_A^l \gamma_5) + m_l (g_\nu^l - g_A^l \gamma_5) \gamma_\mu (g_\nu^l - g_A^l \gamma_5)] [(\not{p}_2 \gamma_\nu - m_l \gamma_\nu)] \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ [(g_\nu^l)^2 \not{p}_1 \gamma_\mu - g_\nu^l g_A^l \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_5 - g_A^l g_\nu^l \gamma_5 \not{p}_1 \gamma_\mu + (g_A^l)^2 \gamma_5 \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_5 + m_l (g_\nu^l)^2 \gamma_\mu - m_l g_\nu^l g_A^l \gamma_\mu \gamma_5 \right. \\ &\quad \left. - m_l g_A^l g_\nu^l \gamma_5 \gamma_\mu + m_l (g_A^l)^2 \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_5] [\not{p}_2 \gamma_\nu - m_l \gamma_\nu] \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ (g_\nu^l)^2 \not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu - g_\nu^l g_A^l \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_5 \not{p}_2 \gamma_\nu - g_A^l g_\nu^l \gamma_5 \not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu + (g_A^l)^2 \gamma_5 \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_5 \not{p}_2 \gamma_\nu \right. \\ &\quad \left. + m_l (g_\nu^l)^2 \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu - m_l (g_A^l)^2 \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu - m_l (g_\nu^l)^2 \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_\nu + 2m_l g_\nu^l g_A^l \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\nu - m_l^2 (g_\nu^l)^2 \gamma_\mu \gamma_\nu \right. \\ &\quad \left. - m_l (g_A^l)^2 \gamma_5 \not{p}_1 \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\nu - m_l^2 (g_A^l)^2 \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \right\}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

se cancelan términos entre sí, mientras que otros desaparecen ya que la traza de una matriz impar siempre es cero, en este cálculo aparecen trazas que contienen tres matrices de Dirac, después hacer el álgebra y reagrupando, de esto nos queda

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \left\{ [(g_\nu^l)^2 + (g_A^l)^2] \not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu - [2g_\nu^l g_A^l] \gamma_5 \not{p}_1 \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu + m_l^2 [(g_\nu^l)^2 - (g_A^l)^2] \gamma_\mu \gamma_\nu \right\} \\ &= [(g_\nu^l)^2 + (g_A^l)^2] \times 4(p_{1\mu} p_{2\nu} - p_1 \cdot p_2 g_{\mu\nu} + p_{2\mu} p_{1\nu}) - 2g_\nu^l g_A^l (-i4\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_1^\alpha p_2^\beta) + m_l^2 [(g_\nu^l)^2 - (g_A^l)^2] 4g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Ya que $P_{\mu\nu} = P_{\nu\mu}$ es simétrico y $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ es anti-simétrico, entonces

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_1^\alpha p_2^\beta P^{\mu\nu} = 0. \quad (2.58)$$

Por otro lado,

$$P^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{p_3^\mu p_3^\nu}{m_z^2} \right) = \left(-4 + \frac{(p_3 \cdot p_3)}{m_z^2} \right) = \left(-4 + \frac{m_z^2}{m_z^2} \right) = -4 + 1 = -3. \quad (2.59)$$

Por último,

$$\begin{aligned}
 P^{\mu\nu} \times 4(p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu} - p_1 \cdot p_2 g_{\mu\nu}) &= \left(-g^{\mu\nu} + \frac{p_3^\mu p_3^\nu}{m_z^2}\right) 4(p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu} - p_1 \cdot p_2 g_{\mu\nu}) \\
 &= 4\left(-p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_2 \cdot 4 + \frac{(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_3)}{m_z^2}\right. \\
 &\quad \left.+ \frac{(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_3)}{m_z^2} - \frac{(p_1 \cdot p_2)p_3^2}{m_z^2}\right) \\
 &= 4\left(2p_1 \cdot p_2 + 2\frac{(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_3)}{m_z^2} - (p_1 \cdot p_2)\right) \\
 &= 4\left(p_1 \cdot p_2 + 2\frac{(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_3)}{m_z^2}\right) \\
 &= 4\left[(p_1 \cdot p_2) + 2\frac{\left(\frac{m_z^2}{2}\right)^2}{m_z^2}\right] \\
 &= 2\left[2(p_1 \cdot p_2) + \frac{m_z^4}{m_z^2}\right] \\
 &= 2[2(p_1 \cdot p_2) + m_z^2] \\
 &= 2[2m_z^2 - 2m_l^2]
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

donde $p_1 \cdot p_3 = \frac{m_z^2}{2} = p_2 \cdot p_3$. La amplitud cuadrada es

$$\begin{aligned}
 |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{g^2}{12 \cos^2 \theta_w} \left[\left[(g_\nu^l)^2 + (g_A^l)^2 \right] \cdot 2[2(p_1 \cdot p_2) + m_z^2] - 12m_l^2 \left[(g_A^l)^2 - (g_\nu^l)^2 \right] \right] \\
 &= \frac{g^2}{12 \cos^2 \theta_w} \left[4 \left[(g_\nu^l)^2 + (g_A^l)^2 \right] (m_z^2 - m_l^2) - 12m_l^2 \left[(g_A^l)^2 - (g_\nu^l)^2 \right] \right] \\
 &= \frac{g^2}{12 \cos^2 \theta_w} \left[4 \left((g_\nu^l)^2 + (g_A^l)^2 \right) m_z^2 - 16 (g_A^l)^2 m_l^2 + 8 (g_\nu^l)^2 m_l^2 \right] \\
 &= \frac{g^2}{12 \cos^2 \theta_w} 4 \left[\left((g_\nu^l)^2 + (g_A^l)^2 \right) m_z^2 + 2m_l^2 \left[(g_\nu^l)^2 - 2(g_A^l)^2 \right] \right].
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Si tomamos el límite cuando $m_z \gg m_l$ en (2.61), es decir cuando la masa de los leptones es $m_l = 0$, entonces

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 \approx \frac{g^2}{3 \cos^2 \theta_w} m_z^2 = g_{zf\bar{f}} \times m_z^2, \tag{2.62}$$

donde hemos definido $g_{zf\bar{f}} = \frac{g^2}{3 \cos^2 \theta_w}$. La anchura de decaimiento *y/o* la razón de ramificación (BB, por sus siglas en inglés) se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z \rightarrow l^+ l^-) &= \frac{1}{8\pi} |\vec{m}|^2 \frac{|\vec{p}_1|}{m_z^2 z} \\
 &= \frac{1}{8\pi} \frac{g^2}{3 \cos^2 \theta_w} m_z^2 \frac{m_z}{2m_z^2} \\
 &= \frac{g^2}{2(4\pi)} \frac{m_z}{3 \cos^2 \theta_w \cdot 2}
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

con $|\vec{p}_1| = \frac{m_z}{2} e = g \sin \theta_w$, con θ_w el ángulo de Weinberg y la constante de acoplamiento $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$. Finalmente

$$\Gamma(z \rightarrow l^+ l^-) = \frac{\alpha}{2} \times \frac{m_z}{3 \sin^2 \theta_w \cos^2 \theta_w} = \frac{\alpha m_z}{3 \sin^2 2\theta_w}. \tag{2.64}$$

Así, el resultado final es

$$BR(z \rightarrow l^+ l^-) = \frac{\Gamma(z \rightarrow l^+ l^-)}{\Gamma_z} = \frac{\alpha}{3 \sin^2 2\theta_w} \left(\frac{m_z}{\Gamma_z} \right). \quad (2.65)$$

El efecto Compton

La dispersión de fotones por partículas cargadas, se llama dispersión de Compton, en honor a Arthur Compton, quien fue el primero en medir la dispersión fotón-electrón en 1922. Cuando el fotón entrante da parte de su energía al electrón, entonces el fotón dispersado tiene una energía más baja y de acuerdo con la formula de Planck $E = h\nu$, energía cuántica de un fotón, tiene una frecuencia más baja y mayor longitud de onda. El cambio de longitud de onda en tal dispersión para una partícula objetivo dada, sólo depende del ángulo de dispersión. En este proceso de dispersión se involucra al electrón como propagador y a la polarización del fotón. Calcularemos la sección eficaz sin polarizar a ordenes bajos en α , la constante de estructura y se incluirán Las variables de Mandelstam. La dispersión Compton es un proceso que involucra dos diagramas de Feynman, los cuales se muestran en la Figura 2.12. Las Reglas de Feynman para electrodinámica cuántica dadas por la Figura 2.10 nos dicen exactamente como escribir la expresión para $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ [1].

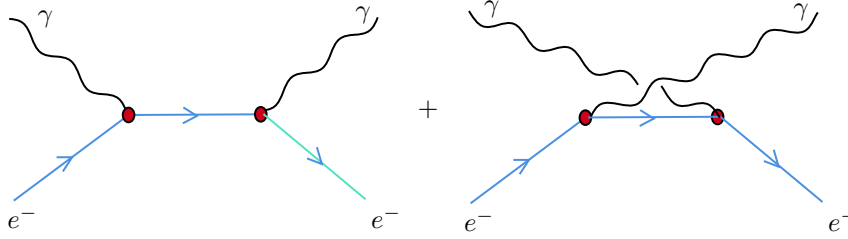


Figura 2.12: Diagramas de Feynman para el efecto Compton en QED. El fotón se representa con una línea curvada negra y el electrón con una flecha de color azul. Los puntos rojos son los vértices, lugares donde ocurren las interacciones.

Usando las reglas de Feynman, la amplitud se puede escribir de la siguiente manera:

$$i\mathcal{M} = -ie^2 \epsilon_\nu^*(p_4, \lambda_4) \epsilon_\mu(p_2, \lambda_2) \bar{u}(p_3, s_3) \Gamma^{\nu\mu} u(p_1, s_1) \quad (2.66)$$

Donde

$$\Gamma^{\mu\nu} = \gamma^\nu \frac{(\not{p}_1 + \not{p}_2 + m)}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{(\not{p}_1 - \not{p}_4 + m)}{(p_1 - p_4)^2 - m^2} \gamma^\nu. \quad (2.67)$$

$\Gamma^{\mu\nu}$ es la función vértice. Podemos hacer algunas simplificaciones antes de obtener la transpuesta conjugada. Recordemos que para cualquier cuadrimomento tenemos que:

$$p_1 = (E, \vec{p}_1) = E^2 = |\vec{p}_1|^2 + m^2 \Rightarrow p_1^2 = (p_1)^\mu (p_1)_\mu = E^2 - |\vec{p}_1|^2 = m^2. \quad (2.68)$$

Ahora bien, ya que $p_1^2 = m_e^2$, $p_2^2 = p_4^2 = 0$ (por ser fotones), los denominadores de los propagadores son:

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2)^2 &= p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \\ &= m_e^2 + 2p_1 \cdot p_2, \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} (p_1 - p_4)^2 &= p_1^2 + p_4^2 - 2p_1 \cdot p_4 \\ &= m_e^2 - 2p_1 \cdot p_4. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Para simplificar los numeradores, usaremos un poco de álgebra de Clifford.

$$\begin{aligned}
 (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu u(p_1) &= (p_{1\mu} \gamma^\mu \gamma^\nu + m_e \gamma^\nu) u(p_1), \\
 &= (p_{1\mu} (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) + m_e \gamma^\nu) u(p_1) \\
 &= (2p_1^\nu - \gamma^\nu \not{p}_1 + m_e \gamma^\nu) u(p_1) \\
 &= 2p_1^\nu u(p_1) - \gamma^\nu (\not{p}_1 - m_e) u(p_1),
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

donde se ha usado $\gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu$ y la ecuación de Dirac en la última línea $(\not{p}_1 - m_e)u(p_1) = 0$. Entonces este término nos queda

$$(\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu u(p_1) = 2p_1^\nu u(p_1), \tag{2.72}$$

con todo esto, la amplitud simplificada nos queda como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= e^2 \epsilon_\mu^*(p_4) \epsilon_\nu(p_2) \bar{u}(p_3) \left[\frac{2\gamma^\mu p_1^\nu + \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu}{2p_1 \cdot p_2} + \frac{2\gamma^\nu p_1^\mu - \gamma^\nu \not{p}_4 \gamma^\mu}{-2p_1 \cdot p_4} \right] u(p_1) \\
 &= e^2 \epsilon_\mu^*(p_4) \epsilon_\nu(p_2) \bar{u}(p_3) \left[\frac{2\gamma^\mu p_1^\nu + \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu}{2p_1 \cdot p_2} + \frac{\gamma^\nu \not{p}_4 \cdot \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p_1^\mu}{2p_1 \cdot p_4} \right] u(p_1).
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

Así, la compleja conjugada de $\mathcal{M}$ resulta de la ecuación (2.73):

$$\mathcal{M}^* = \left\{ e^2 \epsilon_\mu^*(p_4) \epsilon_\nu(p_2) \bar{u}(p_3) \left[\frac{2\gamma^\mu p_1^\nu + \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu}{2p_1 \cdot p_2} + \frac{\gamma^\nu \not{p}_4 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p_1^\mu}{2p_1 \cdot p_4} \right] u(p_1) \right\}^*, \quad \mathcal{M}^\dagger = \mathcal{M}^*. \tag{2.74}$$

Antes de continuar, recordemos que es necesario cambiar de índices para evitar futuras confusiones a la hora de calcular $\mathcal{M}^2$, por lo que cambiamos $\mu \rightarrow \rho$ y $\nu \rightarrow \sigma$. Además, mencionaremos lo que se conoce como truco de Casimir:

$$\begin{aligned}
 (\bar{u}(p_3) \gamma^\rho \not{k} \gamma^\sigma u(p_1))^* &= (u^\dagger(p_3) \gamma^0 \gamma^\rho \not{p}_2 \gamma^\sigma u(p_1))^\dagger \\
 &= u^\dagger(p_1) \gamma^\sigma \not{p}_2 \gamma^\rho \gamma^0 u(p_3) \\
 &= u^\dagger(p_1) \gamma^0 \gamma^0 \gamma^\sigma \not{p}_2 \gamma^\rho \gamma^0 u(p_3) \\
 &= \bar{u}(p_1) \gamma^0 \gamma^\sigma \not{p}_2 \gamma^\rho \gamma^0 u(p_3), \\
 &= \bar{u}(p_1) \gamma^\sigma \not{p}_2 \gamma^\rho u(p_3)
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

donde $(ABCD)^\dagger = D^\dagger C^\dagger B^\dagger A^\dagger$ y $(\epsilon_\mu^*(p_4))^* = \epsilon_\mu(p_4)$. Con las consideraciones anteriores tenemos que la compleja conjugada de $\mathcal{M}$ es

$$\mathcal{M}^* = e^2 \epsilon_\rho(p_4) \epsilon_\sigma^*(p_2) \bar{u}(p_1) \left[\frac{2\gamma^\rho p_1^\sigma + \gamma^\sigma \not{p}_2 \gamma^\rho}{2p_1 \cdot p_2} + \frac{\gamma^\rho \not{p}_4 \gamma^\sigma - 2\gamma^\sigma p_1^\rho}{2p_1 \cdot p_4} \right] u(p_3),$$

Por lo tanto la amplitud al cuadrado resulta ser:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}|^2 &= \mathcal{M} \mathcal{M}^* \\
 &= e^4 \epsilon_\mu^*(p_4) \epsilon_\rho(p_4) \epsilon_\sigma^*(p_2) \epsilon_\nu(p_2) \bar{u}(p_3) \left[\frac{2\gamma^\mu p_1^\nu + \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu}{2p_1 \cdot p_2} + \frac{\gamma^\nu \not{p}_4 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p_1^\mu}{2p_1 \cdot p_4} \right] u(p_1) \\
 &\quad \times \bar{u}(p_1) \left[\frac{2\gamma^\rho p_1^\sigma + \gamma^\sigma \not{p}_2 \gamma^\rho}{2p_1 \cdot p_2} + \frac{\gamma^\rho \not{p}_4 \gamma^\sigma - 2\gamma^\sigma p_1^\rho}{2p_1 \cdot p_4} \right] u(p_3).
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

El siguiente paso es tomar en cuenta el promedio de todas las configuraciones de los espines iniciales (s_1, s_1') , y la suma sobre todas las configuraciones de los espines finales (r_3, r_3') . Para ello, debemos

tener presente la identidad de Ward para QED, que en resumen nos dice a que podemos sumar sobre las polarizaciones de los fotones externos reemplazando:

$$\sum \epsilon_\mu^* \epsilon_\rho \rightarrow -g_{\mu\rho}. \quad (2.77)$$

También debemos recordar la relación de completez:

$$\sum_s u(p) \bar{u}(p) = \not{p} + m. \quad (2.78)$$

Por lo anterior, la amplitud al cuadrado promediada con respecto a las espines es:

$$\begin{aligned} |\bar{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{s, p} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{e^4}{4} \sum_{\text{polarizaciones}} \epsilon_\mu^*(p_4) \epsilon_g(p_4) \sum_{\text{polarizaciones}} \epsilon_\sigma^*(p_2) \epsilon_\gamma(p_2) \\ &\quad \times \sum_{s_1, s'_1} \bar{u}_a(p_3) \left[\frac{2\gamma^\mu p_1^\nu + \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu}{2p_1 \cdot p_2} + \frac{\gamma^\nu \not{p}_4 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p_1^\mu}{2p_1 \cdot p_4} \right]_{ab} u_b(p_1) \\ &\quad \times \bar{u}_c(p_1) \left[\frac{2\gamma^\rho p_3 + \gamma^\sigma \not{p}_2 \gamma^\rho}{2p_1 \cdot p_2} + \frac{\gamma^\rho \not{p}_4 \gamma^\sigma - 2\gamma^\sigma p_1^\rho}{2p_1 \cdot p_4} \right]_{cd} u_d(p_3) \\ &= \frac{e^4}{4} (-g_{\mu\rho}) (-g_{\sigma\nu}) \\ &\quad \times (\not{p}_3 + m_e)_{da} \left[\frac{2\gamma^\mu p_1^\nu + \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu}{2p_1 \cdot p_2} + \frac{\gamma^\nu \not{p}_4 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p_1^\mu}{2p_1 \cdot p_4} \right]_{ab} (\not{p}_1 + m_e)_{bc} \\ &\quad \times \left[\frac{2\gamma^\rho p_1^\sigma + \gamma^\sigma \not{p}_2 \gamma^\rho}{2p_1 \cdot p_2} + \frac{\gamma^\rho \not{p}_4 \gamma^\sigma - 2\gamma^\sigma p_1^\rho}{2p_1 \cdot p_4} \right]_{cd} \\ &= \frac{e^4}{4} \text{Tr} \left[(\not{p}_3 + m_e) \left[\frac{2\gamma^\mu p_1^\nu + \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu}{2p_1 \cdot p_2} + \frac{\gamma^\nu \not{p}_4 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p_1^\mu}{2p_1 \cdot p_4} \right] (\not{p}_1 + m_e) \left[\frac{2\gamma_\mu p_{1\nu} + \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma_\nu}{2p_1 \cdot p_2} + \frac{\gamma_\nu \not{p}_4 \gamma_\mu - 2\gamma_\nu p_{1\mu}}{2p_1 \cdot p_4} \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Desarrollando el producto de términos obtenemos

$$\begin{aligned} |\bar{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{e^4}{4} \text{Tr} \left[\frac{1}{(2p_1 \cdot p_2)^2} (\not{p}_3 + m_e) [2\gamma^\mu p_1^\nu + \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu] (\not{p}_1 + m_e) [2\gamma_\mu p_{1\nu} + \gamma_\nu \not{p}_2 \gamma_\mu] \right. \\ &\quad + \frac{1}{(2p_1 \cdot p_2)(2p_1 \cdot p_4)} (\not{p}_3 + m_e) [2\gamma^\mu p_1^\nu + \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu] (\not{p}_1 + m_e) [\gamma_\mu \not{p}_3 \gamma_\nu - 2\gamma_\nu p_{1\mu}] \\ &\quad + \frac{1}{(2p_1 \cdot p_4)(2p_1 \cdot p_2)} (\not{p}_3 + m_e) [\gamma^\nu \not{p}_4 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p_1^\mu] (\not{p}_1 + m_e) [2\gamma_\mu p_{1\nu} + \gamma_\nu \not{p}_2 \gamma_\mu] \\ &\quad \left. + \frac{1}{(2p_1 \cdot p_4)^2} (\not{p}_3 + m_e) [\gamma^\nu \not{p}_4 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p_1^\mu] (\not{p}_1 + m_e) [\gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu - 2\gamma_\nu p_{1\mu}] \right] \end{aligned} \quad (2.81)$$

Lo que se resume en

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = \frac{e^4}{4} \left[\frac{I}{(2p_1 \cdot p_2)^2} + \frac{II}{(2p_1 \cdot p_2)(2p_1 \cdot p_4)} + \frac{III}{(2p_1 \cdot p_4)(2p_1 \cdot p_2)} + \frac{IV}{(2p_1 \cdot p_4)^2} \right], \quad (2.82)$$

donde

$$I = \text{Tr} \left[(\not{p}_3 + m_e) [2\gamma^\mu \not{p}_1^\nu + \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu] (\not{p}_1 + m_e) [2\gamma_\mu p_{1\nu} + \gamma_\nu \not{p}_2 \gamma_\mu] \right], \quad (2.83)$$

$$II = \text{Tr} \left[(\not{p}_3 + m_e) [2\gamma^\mu \not{p}_1^\nu + \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu] (\not{p}_1 + m_e) [\gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu - 2\gamma_\nu p_{1\mu}] \right], \quad (2.84)$$

$$III = \text{Tr} \left[(\not{p}_3 + m_e) [\gamma^\nu \not{p}_4 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p_1^\mu] (\not{p}_1 + m_e) [2\gamma_\mu p_{1\nu} + \gamma_\nu \not{p}_2 \gamma_\mu] \right], \quad (2.85)$$

$$IV = \text{Tr} \left[(\not{p}_3 + m_e) [\gamma^\nu \not{p}_4 \gamma^\mu - 2\gamma^\nu p_1^\mu] (\not{p}_1 + m_e) [\gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu - 2\gamma_\nu p_{1\mu}] \right]. \quad (2.86)$$

Nótese, que IV es la misma traza que I si nosotros remplazamos p_2 por $-p_4$; además, ya que nosotros podemos invertir el orden de las matrices γ dentro de una traza, debido a que $\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma, \dots) = \text{tr}(\dots \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu)$, nosotros podemos, ver que $II = III$. Así que solo debemos calcular I y II . El resultado de la traza I después de usar toda la tecnología de trazas del Apéndice E es

$$I = 16 \left[4m_e^4 + 4m_e^2(p_1 \cdot p_2) - 2m_e^2(p_3 \cdot p_1) - 2m_e^2(p_3 \cdot p_2) + 2(p_3 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_2) \right]. \quad (2.87)$$

Remplazando p_2 por $-p_4$ obtenemos la traza IV , la cual es:

$$IV = 16 \left[4m_e^4 + 4m_e^2(p_1 \cdot p_4) - 2m_e^2(p_3 \cdot p_1) + 2m_e^2(p_3 \cdot p_4) + 2(p_3 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_4) \right]. \quad (2.88)$$

Haciendo un trabajo análogo a los anteriores, para la traza II se tiene que

$$II = 32m_e^2(p_3 \cdot p_4) + 16m_e^2(p_3 \cdot p_1) - 32(p_2 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_1) + 16 \left[2(p_3 \cdot p_1)(p_2 \cdot p_1) - m_e^2(p_3 \cdot p_2) \right] \\ + 32m_e^2(p_4 \cdot p_1) - 16m_e^4 + 16m_e^2(p_4 \cdot p_2) - 32m_e^2(p_1 \cdot p_2),$$

el cual resulta ser igual a la traza III

$$III = 16 \left[-m_e^4 + m_e^2(p_4 \cdot p_2) - 2m_e^2(p_1 \cdot p_2) + 2m_e^2(p_3 \cdot p_4) + (p_3 \cdot p_1) \left[m_e^2 - 2(p_4 \cdot p_2) + 2p_2 \cdot p_1 \right] \right. \\ \left. - m_e^2(p_3 \cdot p_2) \right]. \quad (2.89)$$

Los resultados obtenidos para las trazas dadas por I , II , III y IV , pueden simplificarse aun más introduciendo lo que se conoce como variables de Mandelstam [95]:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 2p_1 \cdot p_2 + m_e^2 = 2p_3 \cdot p_4 + m_e^2; \\ t = (p_3 - p_1)^2 = -2p_1 \cdot p_3 + 2m_e^2 = -2p_2 \cdot p_4; \\ u = (p_4 - p_1)^2 = -2p_4 \cdot p_1 + m_e^2 = -2p_2 \cdot p_3 + m_e^2, \quad (2.90)$$

recordemos que en la expresión (2.37) vimos algunas relaciones entre los momentos, entonces la variable s se interpreta como el cuadrado de la energía del centro de masa, la variable t es el cuadrado del cuádrimomento transferido en el canal directo y la variable u es el cuadrado del cuádrimomento transferido en el canal intercambiado,

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2 = 2m_e^2. \quad (2.91)$$

De esta manera, la traza I se convierte en

$$I = 16 \left[2m_e^4 + m_e^2(s - m_e^2) - \frac{1}{2}(u - m_e^2)(s - m_e^2) \right], \quad (2.92)$$

con un trabajo análogo se obtiene

$$II = 16 \left[2m_e^4 + m_e^2(u - m_e^2) - \frac{1}{2}(u - m_e^2)(s - m_e^2) \right], \quad (2.93)$$

y para las trazas *III* y *IV* el resultado es

$$II = III = -8 \left(4m_e^4 + m_e^2 (s - m_e^2) + m_e^2 (u - m_e^2) \right). \quad (2.94)$$

Sustituyendo estos resultados en la relación (2.82), entonces

$$\begin{aligned} |\bar{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{e^4}{4} \left[32m_e^4 \left(\frac{1}{(s - m_e^2)^2} + \frac{1}{(u - m_e^2)^2} + \frac{2}{(s - m_e^2)(u - m_e^2)} \right) \right. \\ &\quad \left. + 32m_e^2 \left(\frac{1}{(s - m_e^2)} + \frac{1}{(u - m_e^2)} \right) - 8 \left(\frac{u - m_e^2}{s - m_e^2} + \frac{s - m_e^2}{u - m_e^2} \right) \right] \\ &= \frac{e^4}{4} \left[32m_e^4 \left(\frac{1}{(s - m_e^2)} + \frac{1}{(u - m_e^2)} \right)^2 + 32m_e^2 \left(\frac{1}{(s - m_e^2)} + \frac{1}{(u - m_e^2)} \right) - 8 \left(\frac{u - m_e^2}{s - m_e^2} + \frac{s - m_e^2}{u - m_e^2} \right) \right] \\ &= \frac{e^4}{4} \left[32m_e^4 \left(\frac{1}{2p_1 \cdot p_2} + \frac{1}{-2p_1 \cdot p_4} \right)^2 + 32m_e^2 \left(\frac{1}{2p_1 \cdot p_2} + \frac{1}{-2p_1 \cdot p_4} \right) - 8 \left(\frac{-2p_1 \cdot p_4}{2p_1 \cdot p_2} + \frac{2p_1 \cdot p_2}{-2p_1 \cdot p_4} \right) \right] \\ &= \frac{e^4}{4} \left[\frac{32m_e^4}{4} \left(\frac{1}{p_1 \cdot p_2} - \frac{1}{p_1 \cdot p_4} \right)^2 + \frac{32m_e^2}{2} \left(\frac{1}{p_1 \cdot p_2} - \frac{1}{p_1 \cdot p_4} \right) + 8 \left(\frac{p_1 \cdot p_4}{p_1 \cdot p_2} + \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot p_4} \right) \right] \\ &= \frac{e^4}{4} \left[8m_e^4 \left(\frac{1}{p_1 \cdot p_2} - \frac{1}{p_1 \cdot p_4} \right)^2 + 16m_e^2 \left(\frac{1}{p_1 \cdot p_2} - \frac{1}{p_1 \cdot p_4} \right) + 8 \left(\frac{p_1 \cdot p_4}{p_1 \cdot p_2} + \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot p_4} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.95)$$

Por lo tanto,

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \left[m_e^4 \left(\frac{1}{p_1 \cdot p_2} - \frac{1}{p_1 \cdot p_4} \right)^2 + 2m_e^2 \left(\frac{1}{p_1 \cdot p_2} - \frac{1}{p_1 \cdot p_4} \right) + \frac{p_1 \cdot p_4}{p_1 \cdot p_2} + \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot p_4} \right]. \quad (2.96)$$

Vemos que si la masa se hace cero, entonces tenemos que

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \left(\frac{p_1 \cdot p_4}{p_1 \cdot p_2} + \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot p_4} \right). \quad (2.97)$$

El siguiente paso es escribir p_1, p_2 y p_4 en términos de las variables básicas: energía y ángulos. Esto es, introducir la cinemática a la amplitud cuadrada promediada (2.96). Para hablar de la sección eficaz nosotros debemos decidir qué marco de referencia vamos a elegir, y dibujar una imagen de la cinemática. El más común es el marco de laboratorio. Las relaciones que se establecen en este marco, debido a la conservación de la energía y momento son: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_4 + \vec{p}_3$, cómo el electrón está en reposo $\vec{p}_2 = \vec{p}_4 + \vec{p}_3$ entonces $\vec{p}_3 = \vec{p}_2 - \vec{p}_4$. La energía es $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$ con $E_i = \sqrt{\vec{p}_i^2 + m_i^2}$. Luego, como $\vec{p}_1 = 0$ entonces $E_1 = m_e$. Además, la masa del fotón es cero $m_\gamma = 0$ entonces $E_2 = \vec{p}_2 = \omega_2$ y $E_3 = \vec{p}_4 = \omega_4$, entonces $E_4 = \sqrt{\vec{p}_3^2}$. Por lo tanto, la conservación de la energía puede escribirse de la siguiente manera:

$$m_e + \omega_2 = \omega_4 + \sqrt{\vec{p}_3^2 + m_e^2}, \quad (2.98)$$

o bien

$$m_e + \omega_2 = \omega_4 + E_4. \quad (2.99)$$

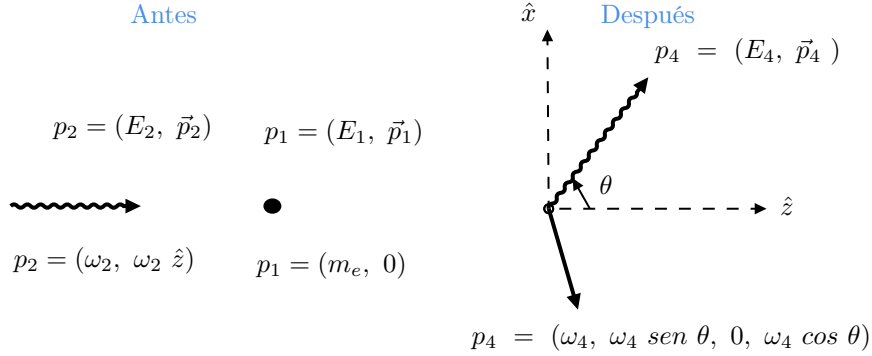


Figura 2.13: Cinemática del proceso

Revisando la cinemática en el marco de referencia de laboratorio, podemos escribir los productos punto de los cuadrimomentos que aparecen en (2.96), entonces,

$$p_1 \cdot p_2 = (m_e, 0) \cdot (\omega_2, \omega_2 \hat{z}) = m_e \omega_2, \quad (2.100)$$

$$p_1 \cdot p_4 = (m_e, 0) \cdot (\omega_4, \omega_4 \sin \theta, 0, \omega_4 \cos \theta) = m_e \omega_4. \quad (2.101)$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= 2e^4 \left[\frac{m_e \omega_4}{m_e \omega_2} + \frac{m_e \omega_2}{m_e \omega_4} + 2m_e^2 \left(\frac{1}{m_e \omega_2} - \frac{1}{m_e \omega_4} \right) + m_e^4 \left(\frac{1}{m_e \omega_2} - \frac{1}{m_e \omega_4} \right)^2 \right] \\ &= 2e^4 \left[\frac{\omega_4}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_4} + 2m_e \left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_4} \right) + m_e^2 \left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_4} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.102)$$

O bien, podemos escribir la amplitud cuadrada promediada en términos de las variables cinemáticas θ explícitamente, para ello encontremos que ω_4 que es la energía final del fotón, usando lo siguiente:

$$\begin{aligned} m_e^2 &= (p_3)^2 = (p_1 + (p_2 - p_4))^2 = p_1^2 + 2p_1 \cdot (p_2 - p_4) + (p_2 - p_4)^2 \\ &= m_e^2 + 2(p_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_4) + p_2^2 - 2p_2 \cdot p_4 + p_4^2 \\ &= m_e^2 + 2(m_e \omega_2 - m_e \omega_4) - 2(\omega_2 \omega_4 - \omega_2 \omega_4 \cos \theta) \\ &= m_e^2 + 2m_e(\omega_2 - \omega_4) - 2\omega_2 \omega_4(1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (2.103)$$

Lo que implica que

$$2m_e(\omega_2 - \omega_4) = 2\omega_2 \omega_4(1 - \cos \theta), \quad (2.104)$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{\omega_4} - \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{m_e}(1 - \cos \theta) \Rightarrow \frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_4} = -\frac{1}{m_e}(1 - \cos \theta). \quad (2.105)$$

Sustituyendo este resultado, nos va a quedar que

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= 2e^4 \left[\frac{\omega_4}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_4} - 2m_e \frac{1}{m_e}(1 - \cos \theta) + m_e^2 \left(\frac{1}{m_e}(1 - \cos \theta) \right)^2 \right] \\ &= 2e^4 \left[\frac{\omega_4}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_4} - 2(1 - \cos \theta) + (1 - \cos \theta)^2 \right] \\ &= 2e^4 \left[\frac{\omega_4}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_4} - 2 + 2 \cos \theta + 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta \right] \\ &= 2e^4 \left[\frac{\omega_4}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_4} - (1 - \cos^2 \theta) \right] \end{aligned} \quad (2.106)$$

Por lo tanto

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 2e^4 \left[\frac{\omega_4}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_4} - \sin^2 \theta \right]. \quad (2.107)$$

Proceso de dispersión $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Las Reglas de Feynman nos dicen que la amplitud para este proceso es

$$i\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \bar{v}^{s'}(p_2)(-ie\gamma^\mu)u^s(p_1) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \bar{u}^r(p_3)(-ie\gamma^\nu)v^{r'}(p_4), \quad (2.108)$$

donde $\bar{v}^{s'}(p_2)$ y $u^s(p_1)$ corresponden a espinores de antipartícula y partícula entrante respectivamente, $-ie\gamma^\mu$ es el factor de vértice, $\bar{u}^r(p_3)$ y $v^{r'}(p_4)$ corresponden a espinores de partícula y antipartícula salientes, por último el factor

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}, \quad (2.109)$$

es el propagador. Omitiendo los superíndices del espín por simplicidad pero permaneciendo implícitos, la amplitud se puede reescribir como:

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4), \quad (2.110)$$

donde se ha bajado el índice mediante $g_{\mu\nu}\gamma^\nu = \gamma_\mu$. Para obtener la sección eficaz diferencial se necesita calcular la expresión $|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}\mathcal{M}^*$, por lo que debemos encontrar la traspuesta conjugada de $\mathcal{M}$, la cual tiene la siguiente forma:

$$\mathcal{M}^* = \frac{e^2}{q^2} \bar{v}(p_4) \gamma_\nu u(p_3) \bar{u}(p_1) \gamma^\nu v(p_2). \quad (2.111)$$

Por lo tanto, la amplitud cuadrada es:

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_1) \gamma^\nu v(p_2)] [\bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4) \bar{v}(p_4) \gamma_\nu u(p_3)], \quad (2.112)$$

promediando sobre los espines iniciales y sumando sobre los espines finales, se tiene que

$$\overline{\mathcal{M}^2} = \frac{1}{4} \sum_{\text{espines}} \mathcal{M}^* \mathcal{M} = \frac{1}{4} \sum_{\text{espines}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{2} \sum_{s'} \sum_r \sum_{r'} |\mathcal{M}(s, s' \rightarrow r, r')|^2, \quad (2.113)$$

esta expresión se simplifica considerablemente utilizando las relaciones de completez dadas por

$$\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m, \quad (2.114)$$

$$\sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m, \quad (2.115)$$

la ecuación (2.114) es para partículas y la ecuación (2.115) para antipartículas. El primer término de la ecuación (2.112) se convierte en

$$\sum_{s, s'} \bar{v}_a^{s'}(p_2) \gamma_{ab}^\mu u_b^s(p_1) \bar{u}_c^s(p_1) \gamma_{cd}^\nu v_d^{s'}(p_2) = \text{tr}[(\not{p}_2 - m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu], \quad (2.116)$$

donde se escriben los índices espinoriales para mover libremente v con $\bar{v}$ y u con $\bar{u}$, luego contrayendo los índices con $A_{dd} = \text{traza}(A) = \text{Tr } A$. Para el segundo término se tiene

$$\sum_{r,r'} \bar{u}_a^r(p_3) \gamma_{\mu(ab)} v_b^{r'}(p_4) \bar{v}_c^{r'}(p_4) \gamma_{\nu(cd)} u_d^r(p_3) = \text{tr}[(p_3 + m_\mu) \gamma_\mu (p_4 - m_\mu) \gamma_\nu], \quad (2.117)$$

por lo tanto se tiene

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{espines}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}[(\not{p}_2 - m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu] \text{Tr}[(p_3 + m_\mu) \gamma_\mu (p_4 - m_\mu) \gamma_\nu] \quad (2.118)$$

entonces calculando las traza para el electrón, se tiene lo siguiente

$$\text{Tr}[(\not{p}_2 - m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu] = 4 [p_2^\mu p_1^\nu + p_2^\nu p_1^\mu - g^{\mu\nu} (p_2 \cdot p_1 + m_e^2)] \quad (2.119)$$

y para el muón es

$$\text{Tr}[(p_3 + m_\mu) \gamma_\mu (p_4 - m_\mu) \gamma_\nu] = 4 [p_{3\mu} p_{4\nu} + p_{3\nu} p_{4\mu} - g_{\mu\nu} (p_3 \cdot p_4 + m_\mu^2)]. \quad (2.120)$$

Sustituyendo en (2.118) finalmente se tiene

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{espines}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} [(p_2 \cdot p_3) (p_1 \cdot p_4) + (p_2 \cdot p_4) (p_1 \cdot p_3) - m_\mu^2 (p_2 \cdot p_1) - m_e^2 (p_3 \cdot p_4) + 2m_e^2 m_\mu^2]. \quad (2.121)$$

Para obtener una fórmula más explícita, se debe seleccionar un marco de referencia y expresar los vectores p_1, p_3, p_2, p_4 y q en términos de energías y ángulos. En este caso elegimos el marco del centro de masa. Los cuadrimomentos de acuerdo con el esquema son de la siguiente manera:

$$p_1 = (E_1, \vec{p}_1) = (E, |\vec{p}_1| \hat{z}), \quad (2.122)$$

$$p_2 = (E_2, \vec{p}_2) = (E, -|\vec{p}_2| \hat{z}), \quad (2.123)$$

$$p_3 = (E_3, \vec{p}_3) = (E, \vec{p}_3), \quad (2.124)$$

$$p_4 = (E_4, \vec{p}_4) = (E, -\vec{p}_3), \quad (2.125)$$

el producto punto de cuadrimomentos se define como:

$$A \cdot B = A^\mu B_\mu = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}. \quad (2.126)$$

por ejemplo

$$p^2 = p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2 = m, \quad (2.127)$$

lo que implica que

$$p^0 = E = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} \quad \text{o} \quad |\vec{p}| = \sqrt{E^2 - m^2}. \quad (2.128)$$

Por otro lado, la conservación de momento del proceso es

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4, \quad (2.129)$$

pero en el centro de masa tenemos que antes de la colisión

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_1 = -\vec{p}_2, \quad (2.130)$$

entonces, después de la colisión también debe ocurrir que

$$\vec{p}_3 + \vec{p}_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_3 = -\vec{p}_4. \quad (2.131)$$

Lo anterior nos dice que

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| \quad \text{y} \quad |\vec{p}_3| = |\vec{p}_4|. \quad (2.132)$$

En el centro de masa ocurre que la masas del electrón y el positrón son iguales y se denota como m_e , sus energías son

$$E_1 = E_2 = \sqrt{|\vec{p}_1|^2 + m_e^2} = E, \quad (2.133)$$

las masas de los muones también son iguales y se denota como m_μ , sus energías son

$$E_3 = E_4 = \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_\mu^2} = E', \quad (2.134)$$

como $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$ implica que $2E = 2E'$, por lo que $E = E'$. Con esto podemos calcular los productos punto de los cuadrimomentos que aparecen en la ecuación (2.121), entonces se tiene que

$$p_2 \cdot p_3 = E^2 - \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_3 = E^2 + |\vec{p}_1| |\vec{p}_3| \cos \theta, \quad (2.135)$$

donde se ha usado (2.130) con (2.122) y la definición de producto punto. El siguiente es

$$p_1 \cdot p_4 = E^2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_4 = E^2 + |\vec{p}_1| |\vec{p}_3| \cos \theta, \quad (2.136)$$

donde se ha usado (2.125) con (2.131) y nuevamente definición de producto punto. El resto son

$$p_2 \cdot p_4 = E^2 - \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_4 = E^2 - |\vec{p}_1| |\vec{p}_3| \cos \theta, \quad (2.137)$$

$$p_1 \cdot p_3 = E^2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 = E^2 - |\vec{p}_1| |\vec{p}_3| \cos \theta, \quad (2.138)$$

donde $\vec{p}_2$ y $\vec{p}_4$ se escribieron en términos de $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_3$ respectivamente. Por último,

$$p_2 \cdot p_1 = E^2 + |\vec{p}_1|^2 = 2E^2 - m_e^2, \quad (2.139)$$

$$p_3 \cdot p_4 = E^2 + |\vec{p}_3|^2 = 2E^2 - m_\mu^2, \quad (2.140)$$

donde se uso la ecuación (2.128). Con estos resultados, la amplitud dada por (2.121) se transforma en

$$\overline{\mathcal{M}}^2 = \frac{8e^4}{q^4} \left[(E^2 + |\vec{p}_1| |\vec{p}_3| \cos \theta)^2 + (E^2 - |\vec{p}_1| |\vec{p}_3| \cos \theta)^2 + m_\mu^2 (2E^2 - m_e^2) + m_e^2 (2E^2 - m_\mu^2) + 2m_e^2 m_\mu^2 \right], \quad (2.141)$$

sabemos que $q^2 \equiv s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2, \vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = (E_1 + E_2, 0)^2 = (E_1 + E_2)^2 = (2E)^2$, usando $|\vec{p}_1| = \sqrt{E^2 - m_e^2}$ y $|\vec{p}_3| = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}$ en la amplitud, desarrollando los binomios y simplificando, finalmente se tiene

$$\overline{\mathcal{M}}^2 = \frac{e^4}{E^4} \left[E^4 + (E^2 - m_e^2) (E^2 - m_\mu^2) \cos^2 \theta + E^2 (m_e^2 + m_\mu^2) \right]. \quad (2.142)$$

Si tomamos aquí el límite de altas energías, esto es haciendo las masas de los fermiones $m_e = m_\mu = 0$. Entonces vamos a tener de resultado

$$\overline{\mathcal{M}}^2 = e^4 (1 + \cos^2 \theta). \quad (2.143)$$

2.2. La contracción del grupo pequeño en las amplitudes

El objetivo de este trabajo fue encontrar el mecanismo de Higgs desde otro punto de vista, en este caso el de amplitudes, utilizamos el concepto de la contracción entre los pequeños grupos que vimos en la sección 1.5, y aplicarlo a amplitudes conocidas del modelo estándar para estudiar su estructura matemática, aquí presentamos el avance que tuvimos hasta ahora, y que posteriormente publicaremos [96].

Vectores de polarización con correcciones en la masa a segundo orden

En esta parte del trabajo, vamos a estudiar amplitudes pero utilizando la información de la contracción en grupos pequeños que se verá reflejado en la forma que adquieren los espinores de Dirac y los vectores de polarización. Para describir bosones másivos, usamos el vector de polarización longitudinal. En el caso de partículas sin masa los vectores de polarización son los transversales:

$$\epsilon_+^\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0), \quad (2.144)$$

$$\epsilon_-^\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0), \quad (2.145)$$

tomando $k = (k, 0, 0, k)$ entonces $\epsilon_+(k) \cdot k = 0$ y $\epsilon_-(k) \cdot k = 0$. Para el caso másivo, escogemos $P = (E_p, 0, 0, p_z)$ entonces las relaciones de momento de Einstein son $E_p^2 - p^2 = m^2$. La polarización se toma como $\epsilon_L^\mu(p) = (\frac{p_z}{m}, 0, 0, \frac{E_p}{m})$ entonces

$$\epsilon_L \cdot P = (\frac{p_z}{m} E_p - \frac{E_p}{m} p_z) = 0. \quad (2.146)$$

Además,

$$\sigma^\mu \epsilon_\mu^L = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} p_z - E_p & 0 \\ 0 & p_z + E_p \end{pmatrix}, \quad (2.147)$$

por lo tanto, el determinante de esta matriz es

$$\det(\sigma \cdot \epsilon^L) = -\frac{1}{m}(E_p^2 - p_z^2) = -m. \quad (2.148)$$

Vamos a calcularlo a segundo orden en la corrección de la masa. Cuando tomamos el límite $p_x = p_y = 0$, entonces $p_z^2 = E^2 - m^2$. La expresión que consideramos es :

$$\epsilon_L^\mu(p) = (\frac{p_z}{m}, 0, 0, \frac{E}{m}). \quad (2.149)$$

Cuando , tenemos $E \gg m$, a segundo orden, lo que ocurre es

$$\sqrt{E+m} = \sqrt{E} + \frac{m}{2\sqrt{E}} - \frac{m^2}{8E^{3/2}} \quad (2.150)$$

$$\sqrt{E-m} = \sqrt{E} - \frac{m}{2\sqrt{E}} - \frac{m^2}{8E^{3/2}}.$$

Además,

$$\sqrt{E+m}\sqrt{E-m} = E - \frac{m^2}{2E} + \frac{m^4}{64E^3} \quad (2.151)$$

Cuando, $m \gg E$, entonces

$$\sqrt{E+m} = \sqrt{m} + \frac{E}{2\sqrt{m}} - \frac{E^2}{8m^{3/2}}, \quad (2.152)$$

$$\sqrt{E-m} = i \left(\sqrt{m} - \frac{E}{2\sqrt{m}} - \frac{E^2}{8m^{3/2}} \right),$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{E+m}\sqrt{E-m} = i \left(m - \frac{E^2}{2m} + \frac{E^4}{64m^3} \right). \quad (2.153)$$

De esta manera obtenemos un vector de polarización perturbativa, primero cuando $E \gg m$ entonces

$$\begin{aligned}\epsilon_L^\mu(p) &= \left(\frac{(E+m)^{1/2}(E-m)^{1/2}}{m}, 0, 0, \frac{E}{m} \right) \\ &= \left(\frac{E}{m} - \frac{m}{2E} + \frac{m^3}{64E^3}, 0, 0, \frac{E}{m} \right),\end{aligned}\tag{2.154}$$

podemos observar que cuando la energía es $E = m$ entonces

$$\epsilon_L^\mu = (1 - \frac{31}{64}, 0, 0, 1).\tag{2.155}$$

Por otro lado, si $m \gg E$, entonces tenemos

$$\epsilon_L^\mu(p) = \left(i \left(1 - \frac{E^2}{2m^2} + \frac{E^4}{64m^4} \right), 0, 0, \frac{E}{m} \right).\tag{2.156}$$

Espinores de Dirac con corrección en la masa a segundo orden

Si tenemos $m \neq 0$, entonces $p^2 = E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2$, esto implica que $|\vec{p}| = (E^2 - m^2)^{\frac{1}{2}} = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{1}{2}}$. Por el contrario, si $m = 0$, entonces $E^2 = |\vec{p}|^2$. Vamos a tomar el siguiente límite: $p_x = p_y = 0$. Entonces, los espinores de Dirac para describir partículas relativistas se convierten en [92]:

$$u_+(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_-(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix},\tag{2.157}$$

para las antipartículas son:

$$v_+(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_-(p) = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\tag{2.158}$$

Haciendo un poco de álgebra encontramos que

$$\frac{p_z \sqrt{E+m}}{E+m} = \sqrt{E-m}.\tag{2.159}$$

Considerando todos estos resultados vamos a estudiar dos casos. El primer caso es: $E \gg m$, entonces los espinores de Dirac se convierten en

$$u_+(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E} \\ 0 \\ \sqrt{E} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{m}{2\sqrt{E}} - \frac{m^2}{8E^{3/2}} \\ 0 \\ -\frac{m}{2\sqrt{E}} - \frac{m^2}{8E^{3/2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_-(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E} \\ 0 \\ -\sqrt{E} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{m}{2\sqrt{E}} - \frac{m^2}{8E^{3/2}} \\ 0 \\ \frac{m}{2\sqrt{E}} + \frac{m^2}{8E^{3/2}} \end{pmatrix},\tag{2.160}$$

$$v_+(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{E} \\ 0 \\ \sqrt{E} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{m}{2\sqrt{E}} + \frac{m^2}{8E^{3/2}} \\ 0 \\ \frac{m}{2\sqrt{E}} - \frac{m^2}{8E^{3/2}} \end{pmatrix}, \quad v_-(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{E} \\ 0 \\ \sqrt{E} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{m}{2\sqrt{E}} - \frac{m^2}{8E^{3/2}} \\ 0 \\ \frac{m}{2\sqrt{E}} - \frac{m^2}{8E^{3/2}} \\ 0 \end{pmatrix}.\tag{2.161}$$

Aquí podemos ver que si $m = 0$, solamente sobreviven los primeros términos de cada espinor que depende exclusivamente del cuadrado de la energía. El segundo caso es cuando $m \gg E$, entonces los espinores de Dirac spinors son:

$$u_+(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{m} \\ 0 \\ i\sqrt{m} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{E}{2\sqrt{m}} - \frac{E^2}{8m^{3/2}} \\ 0 \\ -\frac{E}{2\sqrt{m}} - \frac{E^2}{8m^{3/2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_-(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{m} \\ 0 \\ -i\sqrt{m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{2\sqrt{m}} - \frac{E^2}{8m^{3/2}} \\ 0 \\ \frac{E}{2\sqrt{m}} + \frac{E^2}{8m^{3/2}} \end{pmatrix}, \quad (2.162)$$

$$v_+(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ -i\sqrt{m} \\ 0 \\ \sqrt{m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{2\sqrt{m}} + \frac{E^2}{8m^{3/2}} \\ 0 \\ \frac{E}{2\sqrt{m}} - \frac{E^2}{8m^{3/2}} \end{pmatrix}, \quad v_-(p) = \begin{pmatrix} i\sqrt{m} \\ 0 \\ \sqrt{m} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{E}{2\sqrt{m}} - \frac{E^2}{8m^{3/2}} \\ 0 \\ \frac{E}{2\sqrt{m}} - \frac{E^2}{8m^{3/2}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.163)$$

De nuevo, si tomamos $E = 0$, entonces solamente los primeros términos sobreviven los cuales dependen de una masa compleja.

2.2.1. $Z^0 \rightarrow f\bar{f}$

En la sección 2.1.5, vimos este proceso usando el formalismo de los diagramas de Feynman, desde calcular su amplitud hasta su radio de decaimiento. El diagrama de Feynman para este proceso los podemos ver la Figura 2.11. En esta sección nos interesa estudiar su amplitud usando los espinores (2.160) y (2.162), los cuales contienen la información de la contracción de los grupos de la cual emerge la cinemática. Como vimos anteriormente, la amplitud de este proceso esta dada por:

$$\mathcal{M}(Z^0 \rightarrow f\bar{f}) = \bar{u}(p_1, s_1) \left(\frac{ig}{2\cos\theta_w} \gamma_\mu (g_\nu^f - g_A^f \gamma_5) \right) v(p_2, s_2) \epsilon^\mu(P, \lambda), \quad (2.164)$$

donde

$$g_\nu^f = T_{3,fL} - (2\sin^2\theta_w \times Q_f), \quad (2.165)$$

$$g_A^f = T_{3,fL}. \quad (2.166)$$

Necesitamos calcular los siguientes términos:

$$\bar{u}(p_1, s_1) \gamma_\mu \epsilon^\mu(p_3, \lambda) v(p_2, s_2), \quad \bar{u}(p_1, s_1) \gamma_\mu \epsilon^\mu(p_3, \lambda) \gamma_5 v(p_2, s_2). \quad (2.167)$$

Caso una partícula sin masa - Dos másivas

En este caso vamos a tomar al bosón Z^0 como una partícula sin masa y los dos fermiones másivos. Cuando Z^0 tiene masa cero, entonces se necesita los vectores de polarización transversales, $\epsilon_+^\mu(p_3)$ y $\epsilon_-^\mu(p_3)$. Las únicas configuraciones de helicidades que son diferentes de cero son:

$$\bar{u}_-(p_1, s_1) \gamma_\mu \epsilon_-^\mu(p_3, \lambda) v_-(p_2, s_2), \quad \bar{u}_+(p_1, s_1) \gamma_\mu \epsilon_+^\mu(p_3, \lambda) \gamma_5 v_+(p_2, s_2). \quad (2.168)$$

En el caso de $E \gg m_f$, vamos a usar (2.144), (2.145) y los cuatro términos de (2.160), el segundo término de (2.168) que involucran γ_5 van a desaparecer, entonces

$$\bar{u}_-(p_1, s_1) \gamma_\mu \epsilon_-^\mu(p_3, \lambda) v_-(p_2, s_2) = (-2\sqrt{2})m_f + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{m_f^3}{E^2}, \quad (2.169)$$

$$\bar{u}_+(p_1, s_1) \gamma_\mu \epsilon_+^\mu(p_3, \lambda) v_+(p_2, s_2) = (-2\sqrt{2})m_f + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{m_f^3}{E^2}. \quad (2.170)$$

Finalmente, las amplitudes para un bosón sin masa con dos fermiones masivos con correcciones en la masa son:

$$\mathcal{M}(z_+^0 \rightarrow f_+ \bar{f}_+) = \mathcal{M}(z_-^0 \rightarrow f_- \bar{f}_-) = i \frac{gg_v^f}{2 \cos \theta_w} \left((-2\sqrt{2})m_f + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{m_f^3}{E^2} \right). \quad (2.171)$$

Además, si $E = m_f$ entonces

$$\mathcal{M}(z_+^0 \rightarrow f_+ \bar{f}_+) = \mathcal{M}(z_-^0 \rightarrow f_- \bar{f}_-) = -i \frac{7gg_v^f}{4\sqrt{2} \cos \theta_w} m_f. \quad (2.172)$$

Por supuesto, si los fermiones llegan a ser sin masa, vamos a tener una amplitud de tres partículas sin masa, entonces $\mathcal{M}(z_+^0 \rightarrow f_+ \bar{f}_+) = \mathcal{M}(z_-^0 \rightarrow f_- \bar{f}_-) = 0$. Ahora, en el caso de $m_f \gg E$, usamos (2.144), (2.145) y (2.162), de nuevo el segundo término de (2.168) desaparece, entonces

$$\bar{u}_-(p_1, s_1) \gamma_\mu \epsilon_-^\mu(p_3, \lambda) v_-(p_2, s_2) = (-2\sqrt{2})m_f - \frac{(4+i4)}{2\sqrt{2}} E + \frac{(1-i)}{2\sqrt{2}} \frac{E^2}{m_f} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{E^3}{m_f^2}, \quad (2.173)$$

$$\bar{u}_+(p_1, s_1) \gamma_\mu \epsilon_+^\mu(p_3, \lambda) v_+(p_2, s_2) = (-2\sqrt{2})m_f - \frac{(4+i4)}{2\sqrt{2}} E + \frac{(1-i)}{2\sqrt{2}} \frac{E^2}{m_f} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{E^3}{m_f^2}. \quad (2.174)$$

Por lo tanto

$$\mathcal{M}(z_+^0 \rightarrow f_+ \bar{f}_+) = \mathcal{M}(z_-^0 \rightarrow f_- \bar{f}_-) = i \frac{gg_v^f}{2 \cos \theta_w} \left((-2\sqrt{2})m_f - \frac{(4+i4)}{2\sqrt{2}} E + \frac{(1-i)}{2\sqrt{2}} \frac{E^2}{m_f} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{E^3}{m_f^2} \right). \quad (2.175)$$

Además, si $E = m_f$, entonces

$$\mathcal{M}(z_+^0 \rightarrow f_+ \bar{f}_+) = \mathcal{M}(z_-^0 \rightarrow f_- \bar{f}_-) = -i \frac{5gg_v^f}{2\sqrt{2} \cos \theta_w} \left(1 + \frac{i}{2} \right) m_f, \quad (2.176)$$

Finalmente, si $E = 0$ entonces tenemos

$$\mathcal{M}(z_+^0 \rightarrow f_+ \bar{f}_+) = \mathcal{M}(z_-^0 \rightarrow f_- \bar{f}_-) = -i \frac{\sqrt{2}gg_v^f}{\cos \theta_w} m_f. \quad (2.177)$$

Esta expresión luce como (2.172). Nuevamente si $m_f = 0$, las amplitudes desaparecen.

Caso con tres partículas másivas

Si Z^0 es másivo entonces necesitamos $\epsilon_L^\mu(p_3)$. Procedemos a calcular los siguientes términos de las amplitudes

$$\bar{u}_\pm(p_1, s_1) \gamma_\mu \epsilon_L^\mu(p_3, \lambda) v_\pm(p_2, s_2), \quad \bar{u}_\pm(p_1, s_1) \gamma_\mu \epsilon_L^\mu(p_3, \lambda) \gamma_5 v_\pm(p_2, s_2). \quad (2.178)$$

En el caso $E \sim m_f$, usando las ecuaciones (2.154) y (2.160) las únicas amplitudes diferentes de cero son:

$$\mathcal{M}(Z_L^0 \rightarrow f_+ \bar{f}_-) = \frac{ig}{2 \cos \theta_w} \left(- \frac{(g_v^f - g_A^f)m_z (32E^2 - m_z^2)}{32E^2} + \frac{m_f^4 (g_v^f - g_A^f)m_z (m_z^2 - 32E^2)}{2048E^6} - \frac{m_f^2 (64E^6 (g_v^f + g_A^f) - 32E^4 g_v^f m_z^2 + E^2 g_v^f m_z^4)}{64E^6 m_z} \right), \quad (2.179)$$

$$\mathcal{M}(Z_L^0 \rightarrow f_- \bar{f}_+) = \frac{ig}{2 \cos \theta_w} \left(\frac{(g_v^f + g_A^f) m_z (32E^2 - m_z^2)}{32E^2} - \frac{m_f^4 (g_v^f + g_A^f) m_z (m_z^2 - 32E^2)}{2048E^6} + \frac{m_f^2 (64E^6 (g_v^f - g_A^f) - 32E^4 g_v^f m_z^2 + E^2 g_v^f m_z^4)}{64E^6 m_z} \right). \quad (2.180)$$

Cuando $E = m_z$, entonces tenemos

$$\mathcal{M}(Z_L^0 \rightarrow f_+ \bar{f}_-) = \frac{ig}{2 \cos \theta_w} \left(-\frac{31}{32} (g_v^f - g_A^f) m_z - \frac{(33g_v^f + 64g_A^f) m_f^2}{64} \frac{m_z^2}{m_z} - \frac{31}{2048} (g_v^f - g_A^f) \frac{m_f^4}{m_z^3} \right) \quad (2.181)$$

$$\mathcal{M}(Z_L^0 \rightarrow f_- \bar{f}_+) = \frac{ig}{2 \cos \theta_w} \left(-\frac{31}{32} (g_v^f + g_A^f) m_z + \frac{(33g_v^f - 64g_A^f) m_f^2}{64} \frac{m_z^2}{m_z} + \frac{31}{2048} (g_v^f + g_A^f) \frac{m_f^4}{m_z^3} \right) \quad (2.182)$$

Proceso $t \rightarrow bW$, tres partículas másiva

La amplitud que vamos a trabajar aquí es $t \rightarrow bW$

$$\mathcal{M} = \frac{g_w}{\sqrt{2}} \varepsilon_\mu^*(p_3) \bar{u}(p_1) \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) u(p_2), \quad (2.183)$$

$u(p_1)$ está relacionada con el quark bottom y $\varepsilon_\mu^*(p_3)$ es el vector de polarización del bosón W . Tenemos que calcular dos términos a segundo orden en la masa:

$$\bar{u}(p_1) \varepsilon_\mu^*(p_3) \gamma^\mu u(p_2), \quad \bar{u}(p_1) \varepsilon_\mu^*(p_3) \gamma^\mu \gamma^5 u(p_2). \quad (2.184)$$

Las tres partículas son masivas, para el bosón W necesitamos el vector de polarización longitudinal. Los espinores y el vector de polarización son aquellos que calculamos en (2.160) y (2.154) cuando $E \gg m$. Encontramos que los únicos dos términos que no desaparecen en (2.184), son cuando los quarks top y bottom ambos tienen o espín positivo o espín negativo. Tomando en cuenta que el quark top es muy másivo en comparación con el quark bottom y el bosón W , entonces las amplitudes que sobreviven cuando $E \gg m_b$, son

$$\mathcal{M}(t_+ \rightarrow b_+ W_L) = \frac{g_w}{2\sqrt{2}} \left[\frac{m_b m_t (128E^4 - 32E^2 m_w^2 + m_w^4)}{64E^4 m_w} \right] \quad (2.185)$$

$$\mathcal{M}(t_- \rightarrow b_- W_L) = -\frac{g_w}{2\sqrt{2}} \left[\frac{(m_b^2 - 8E^2) (8E^2 - m_t^2) (32E^2 m_w^2 + m_w^4)}{1024E^6 m_w} \right]. \quad (2.186)$$

Notemos que cuando despreciamos la masa del quark bottom ($m_b \rightarrow 0$), entonces la amplitud de espines positivos (2.185) desaparece. Por otro lado, si consideramos $m_b = 0$ y $E = m_w$, entonces (2.186) llega ser

$$\mathcal{M}(t_- \rightarrow b_- W_L) = \frac{33g_w}{256\sqrt{2}} \left[8m_w - \frac{m_t^2}{m_w} \right]. \quad (2.187)$$

Capítulo 3

Métodos modernos en Teoría Cuántica de Campos: El método de Amplitudes

Quienes exploran un mundo desconocido son viajeros sin mapa: el mapa es el resultado de la exploración. Desconocen la posición de su destino, y el camino directo que conduce a él aún no está trazado.

Hideki Yukawa

La teoría cuántica de campos (QFT, por sus siglas en inglés) es el lenguaje matemático que nos permite describir las partículas elementales y sus interacciones [2]. Un ingrediente importante de este lenguaje son los espinores que son objetos matemáticos que se transforman bajo el grupo de Lorentz [77]. Históricamente, los espinores fueron creados por E. Cartan en 1913 [79]. Posteriormente personajes como P. Dirac y E. Majorana introdujeron los espinores a la física teórica [86, 87], así como H. Weyl y B. L. van der Waerden hicieron contribuciones matemáticas importantes que permitieron el desarrollo del análisis espinorial. Por su parte, B.L. van der Waerden fue el primero en introducir la notación de índices punteados y no punteados para las representaciones irreducibles del grupo de Lorentz. Actualmente a estas representaciones se les conocen como *espinores de Weyl-van der Waerden* [88, 89]. Otro ingrediente importante en teoría cuántica de campos es la matriz S , el cual es el objeto definido en el espacio de momentos que contiene toda la información física de un proceso de colisión o decaimiento. En un experimento de dispersión de partículas el observable a medir es la sección eficaz σ , el cual está en términos de energías y momentos de las partículas involucradas [1]. Teorías como el modelo estándar fueron desarrolladas de esta manera cuyos descubrimientos como el bosón de Higgs están en la literatura [97]. A nivel árbol, un proceso de dos partículas en el estado inicial y dos partículas en el final ($p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$), el método estándar para calcular su sección eficaz requiere del uso de los diagramas de Feynman que involucra calcular el elemento de matriz S o amplitud mediante las reglas de Feynman, posteriormente elevar al cuadrado el elemento de matriz, promediar sobre los estados de espín y después hacer el desarrollo de las trazas de productos de matrices γ^μ de cuatro componentes [92]. Sin embargo, si agregamos más partículas en el estado final, implica un incremento en el número de diagramas de Feynman, por ejemplo, para un proceso donde tenemos dos gluones en el estado inicial y ocho gluones en el estado final, se requieren aproximadamente un millón de diagramas de Feynman, por lo que la técnica se vuelve impracticable. Una manera de

hacer posible esto es mediante el formalismo de los espinores de helicidad o *método de amplitudes*, el cual es una técnica moderna que se aplica a nivel de árbol, la clave de este método se encuentra en el *little group* o grupo de Wigner el cual caracteriza los estados de las partículas, por ejemplo para partículas sin masa asociados a espinores de Weyl, el *little group* nos dice que solo se necesita conocer la helicidad para estudiar sus procesos de dispersión [9]. Los primeros desarrollos del método de amplitudes provienen de la década de 1980, cuando se encontró que se podían calcular de manera eficiente amplitudes de dispersión que involucraban partículas sin masa al re-parametrizar los cuádrimomentos en espinores, de este modo las amplitudes se reescriben en términos de contracciones de espinores los cuales son invariantes de Lorentz [98, 99]. En 1986, K. Hagiwara y D. Zeppenfeld presentaron un método para calcular las amplitudes de procesos que involucran fermiones externos y bosones vectoriales a nivel árbol en la base espinorial de Weyl [100]. En el mismo año, estas técnicas fueron extendidas por S. Parker y T. Taylor para calcular de manera más eficiente amplitudes de multi-jets a nivel árbol en Cromodinámica Cuántica (QCD, por sus siglas en inglés), ellos derivaron una fórmula general para describir el proceso de dispersión de dos gluones en el estado inicial a $n - 2$ gluones en el estado final, conocida hoy en día como *fórmula de Parker-Taylor* [6]. Los libros de texto modernos en QFT incluyen capítulos sobre el método de amplitudes estudiando teorías como QED en el caso de M. Thomson [92] o QCD por M. D. Schwartz [4] y S. Weinzierl [101]. Una introducción pedagógica más extensa del método de amplitudes es dada por H. Elvang y Y. T. Huang donde se estudian teorías supersimétricas como $N = 4$ SYM o Supergravedad $N = 8$ [9]. El trabajo de H. K. Dreiner, H. E. Haber y S. P. Martín es una gran referencia donde se puede encontrar una discusión completa de los espinores de helicidad y un conjunto de reglas de Feynman en términos de espinores de dos componentes para calcular secciones eficaces, correcciones radiativas de teorías como el modelo estándar, así como supersimetría [102]. Si bien el método de amplitudes funciona de manera excelente a nivel árbol y considerando partículas sin masa, en la última década se han visto grandes avances por extender este formalismo a partículas de cualquier masa y espín [17], así como técnicas para calcular a orden de lazos mediante el método del corte unitario o Next-to-Leading Order (NLO) [103, 104], brindando así un abanico de nuevos métodos más poderosos en teoría cuántica de campos. En este capítulo nos enfocamos en revisar las bases del método de amplitudes e ilustrar de manera detallada cómo se hace el cálculo de una amplitud a nivel árbol en estos formalismos.

3.1. ¿Qué define a una teoría cuántica de campos?

En el capítulo 2 hablamos un poco de qué es y por qué la teoría cuántica de campos. Este marco teórico es una herramienta muy poderosa y tiene muchas aplicaciones desde física de partículas hasta materia condensada, pasando por economía. Pero ¿Qué define a una teoría cuántica de campos? La respuesta la encontramos en la acción [1]. Sin embargo, la acción viene con un costo, el cual se conoce como *redundancias*. Por ejemplo, en electromagnetismo, la redundancia aparece en la invarianza de la acción bajo transformaciones de norma del fotón

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \theta.$$

La acción que describe la interacción de los gravitones es similarmente invariante bajo difeomorfismos, el cual toma la siguiente forma a orden lineal

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \theta_\nu + \partial_\nu \theta_\mu,$$

aquí los parámetros θ y θ_μ son funciones arbitrarias del espacio-tiempo. Invarianza de norma y difeomorfismos son redundancias creadas convenientemente por físicos para describir ciertas teorías. Por otro lado, Eugene Wigner al encontrar como enumerar todas las posibles representaciones unitarias irreducibles del grupo de Poincaré nos estaba diciendo que tipo de cosas, en principio,

pueden ocurrir en el universo. En cuatro dimensiones, estos argumentos implican que una partícula sin masa con espín intrínseco tiene exactamente dos polarizaciones. Desafortunadamente, la preferencia de que la invarianza de Lorentz se manifieste obliga a describir el fotón y el gravitón con los campos cuánticos $A_\mu(x)$ y $h_{\mu\nu}(x)$, los cuales tienen muchos índices de Lorentz y nos indican que se tienen cuatro y diez grados de libertad, respectivamente. Veamos de donde vienen estas redundancias, consideremos una teoría de campos escalar con la siguiente lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} K(\phi) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \quad (3.1)$$

donde el término cinemático es

$$K(\phi) = 1 + \lambda_1 \phi + \frac{1}{2!} \lambda_2 \phi^2 + \frac{1}{3!} \lambda_3 \phi^3 + \frac{1}{4!} \lambda_4 \phi^4 + \dots \quad (3.2)$$

La lagrangiana (3.1) da una complicada y arbitraria torre de interacciones, a partir de esto, uno deduciría que su matriz S sería igual de compleja. Para ver esto, veamos la observable física más simple, esta es la amplitud de dispersión de cuatro partículas a nivel árbol, un simple cálculo nos lleva:

$$\mathcal{M}_4 \propto \sum_{i \neq j} p_i p_j \propto s + t + u = 0,$$

donde las variables de Mandelstam son:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \quad (3.3)$$

$$t = (p_1 + p_4)^2 = (p_2 + p_3)^2, \quad (3.4)$$

$$u = (p_1 + p_3)^2 = (p_2 + p_4)^2. \quad (3.5)$$

Es importante imponer la conservación de momento de las partículas externas para demostrar que esta amplitud desaparece, las cuales también satisfacen condiciones de capa de masa

$$\sum_i p_i = 0 \quad (3.6)$$

$$p_i^2 = 0. \quad (3.7)$$

Este efecto de que una amplitud no contribuye o desaparece persiste incluso para la amplitud que involucra catorce partículas los cuales producen cinco trillones de diagramas de Feynman. El origen de esto es por que la acción en (3.1) es en el fondo un escalar libre. En particular, la matriz S, es invariante bajo cualquier re-definición de campos de la forma [105, 106]

$$\phi \rightarrow f(\phi), \quad (3.8)$$

sujeto a la condición $f'(0) = 1$ de modo que en el límite de campo débil se interpola en un campo normalizado canónico. Para la función $f(\phi)$, entonces se puede transformar la acción del campo escalar libre en (3.1), de esta manera la matriz S es invariante bajo una no-simetría de la acción. Esto no es una sorpresa ya que la formulación por integral de trayectoria de la teoría cuántica de campos trata a los campos como una variable de integración y cualquier integral es invariante bajo un cambio de variables apropiado. Por lo que, teoría cuántica de campos está plagado de redundancias que socavan cualquier significado fundamental del contenido de la acción. Si aplicamos cualquier re-definición de campos, se puede mapear una acción en un conjunto infinito de acciones diferentes que describen la misma física. Este mapeo tiene sus desventajas, por ejemplo, las redundancias producen un conjunto de representaciones redundantes de diagramas de Feynman para la misma matriz S. Para teorías con invarianza de norma y difeomorfismos, la equivalencia entre estas representaciones se manifiesta por las identidades de Ward [107]. Para satisfacer estas identidades, las expresiones que resultan de los diagramas de Feynman deben ser inmensamente

complicadas incluso para un proceso físico simple. Otra desventaja es que si se escoge una mala base para los campos, esto podría oscurecer ciertas estructuras fundamentales de la teoría.

Para campos escalares, sus diagramas de Feynman son fáciles de calcular. Sin embargo, sin ninguna información adicional, sus interacciones pueden ser diversas:

$$\mathcal{L}_{\text{scalar}} = \frac{1}{2} \sum_a \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a + \frac{1}{3!} \sum_{abc} \omega_{abc} \phi_a \phi_b \phi_c + \frac{1}{4!} \sum_{abcd} \lambda_{abcd} \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d, \quad (3.9)$$

de esta manera se necesitan especificar todas las constantes de acoplamiento ω_{abc} y λ_{abcd} para definir la acción. En otras palabras, la teoría puede ser simple respecto a sus diagramas de Feynman pero se vuelve no predictiva en lo más mínimo. Por otro lado, si los campos son vectores, entonces no hay otra opción; la única teoría permitida es la teoría de Yang-Mills [108], ya que no hay teorías renormalizables de partículas vectoriales sin masa que interactúan más allá de la de Yang-Mills

$$\mathcal{L}_{\text{vector}} = -\frac{1}{4g^2} \sum_a F_{a\mu\nu} F_a^{\mu\nu}. \quad (3.10)$$

El hecho de que las constantes de estructura f_{abc} del grupo de norma son anti-simétricos y satisfacen la identidad de Jacobi es producto de la teoría. Una lógica similar implica que no hay interacciones renormalizables auto-consistentes para una partícula tensorial sin masa. En lugar de eso, las interacciones permitidas son no-renormalizables y coinciden precisamente con la acción de Einstein-Hilbert

$$\mathcal{L}_{\text{tensor}} = -\frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g} R, \quad (3.11)$$

aquí la dinámica de una partícula tensorial sin masa a bajas energías esta controlada por un solo parámetro el cual es la constante de Newton.

Similarmente sucede para los fermiones, por ejemplo, los campos de espín $\frac{1}{2}$ tienen menos restricciones en sus interacciones mientras que los campos espín $\frac{3}{2}$ solamente pueden interactuar consistentemente mediante supergravedad [109]. La conclusión que podemos sacar de esto es que la simplicidad de una teoría depende de lo poco que debe ser especificado para deducir su matriz S. En general, se puede decir que una teoría cuántica de campos esta tan constreñida a tal punto que hacerlo más constreñida la teoría dejaría de existir o tener sentido. Entre la comunidad de amplitudes se dice que la teoría más simple que existe es la conocida como la teoría supersimétrica Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$, simple en el sentido de que su matriz S perturbativa completa esta fijada por las simetrías y no por la complejidad de su oscilador armónico cuántico el cual está lleno de polinomios de Hermite y son complicados de manipular[110]. El hecho de que su acción luzca muy complicada, quiere decir que hay otras maneras mejores de calcular.

En el capítulo (2) vimos cómo calcular amplitudes de dispersión mediante una receta que involucra los diagramas de Feynman. El método moderno de amplitudes propone una aproximación más práctica el cual consiste en construir un ansatz general para la matriz S y esculpir la respuesta correcta desde criterios físicos simples:

- **Análisis dimensional:** Las amplitudes de dispersión deben tener dimensión de masa consistente con la dimensión de la constante de acoplamiento en la teoría.
- **Invarianza de Lorentz:** Las amplitudes de dispersión deben ser invariantes de Lorentz. Por ejemplo, una amplitud de escalares es una función de s, t, u . Cuando hay partículas con espín, la amplitud también debe ser invariante bajo el grupo pequeño o little group.
- **Localidad:** Las amplitudes de dispersión deben tener singularidades que sean consistentes con la factorización y unitariedad. Estas singularidades codifican la localidad fundamental de la teoría. Por ejemplo, una amplitud de cuatro partículas debe tener polos simples $\frac{1}{s}$ y no $\frac{1}{s^2}$

3.1.1. ¿Hay una mejor manera para calcular amplitudes de dispersión?

A continuación, vamos a considerar el proceso de dispersión $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, electrón positrón a muón anti-muón, a nivel árbol cuyo elemento de matriz se va denotar de la siguiente manera:

$$i\mathcal{M}_{\bar{e}e \rightarrow \bar{\mu}\mu} = -i\frac{e^2}{s}\bar{u}(p_3)\gamma^\mu v(p_4) \cdot \bar{v}(p_2)\gamma_\mu u(p_1). \quad (3.12)$$

Para calcular la sección eficaz o razón de decaimiento de cualquier proceso es necesario obtener primero lo que es el elemento de matriz cuadrado o amplitud cuadrada, en este trabajo nos enfocamos en como obtener $|\mathcal{M}|^2$. Para evaluar el elemento de matriz (3.12) se necesita tener en cuenta todos los posibles estados de espín de las cuatro partículas. Cada una de ellas puede estar en alguna de las dos posibles helicidades que hay, entonces para el estado inicial que esta compuesto por el electrón (e) y el positrón ($\bar{e}$), vamos a tener cuatro posibles configuraciones de helicidades, esto es,

$$\bar{e}_R e_L, \bar{e}_L e_L, \bar{e}_R e_R, \bar{e}_L e_R, \quad (3.13)$$

donde los subíndices R y L se refieren al estado de helicidad que se encuentran R para la helicidad derecha y L para la helicidad izquierda. Del mismo modo tenemos cuatro posibles configuraciones para el estado final compuesto por el muón (μ) y el anti-muón ($\bar{\mu}$). Por ejemplo, si en el estado inicial escogemos la configuración $\bar{e}_R e_R$ entonces los elementos de matriz que tendremos son

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\bar{e}_R e_R \rightarrow \bar{\mu}_R \mu_R}, \quad \mathcal{M}_{\bar{e}_R e_R \rightarrow \bar{\mu}_R \mu_L}, \\ \mathcal{M}_{\bar{e}_R e_R \rightarrow \bar{\mu}_L \mu_R}, \quad \mathcal{M}_{\bar{e}_R e_R \rightarrow \bar{\mu}_L \mu_L}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Similarmente, tendremos cuatro elementos de matriz para otra configuración diferente de helicidades en el estado inicial. Entonces el proceso de dispersión como tal, consiste en 16 posibles estados de combinaciones de helicidades que son ortogonales y por lo tanto independientes entre sí. En general, el elemento de matriz de espín promediado o amplitud cuadrada promediada es dada por

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(|\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_R}|^2 + |\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L}|^2 + |\mathcal{M}_{\bar{e}_L e_R}|^2 + |\mathcal{M}_{\bar{e}_L e_L}|^2 \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde el factor de $\frac{1}{4}$ representa el promedio sobre las cuatro posibles configuraciones de helicidades en el estado inicial. La primera configuración de helicidades en el estado inicial que vamos a calcular es $\bar{e}_R e_L$, por lo que tenemos dos amplitudes diferentes que van a contribuir, una es $\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \rightarrow \bar{\mu}_R \mu_L}$. Desarrollando la amplitud se tiene:

$$i\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \rightarrow \bar{\mu}_R \mu_L} = -\frac{ie^2}{s} u_L^\dagger(p_3) \gamma^0 \gamma^\mu v_R(p_4) \times v_R^\dagger(p_2) \gamma^0 \gamma_\mu u_L(p_1), \quad (3.16)$$

donde se va a usar la forma explícita de las matrices (1.238) y las expresiones (1.292), entonces,

$$i\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \rightarrow \bar{\mu}_R \mu_L} = -\frac{ie^2 4E^2}{s} \left(\lambda_-^\dagger(3) \chi_+(4) \chi_+^\dagger(2) \lambda_-(1) + \lambda_-^\dagger(3) \sigma^i \chi_+(4) \chi_+^\dagger(2) \sigma^i \lambda_-(1) \right). \quad (3.17)$$

Notar que los momentos de las partículas p_1, p_2, p_3, p_4 se han cambiado por números 1, 2, 3, 4 respectivamente, que están asociados a los espinores de Weyl. En el segundo término de (3.17) se aplica la identidad de Fierz:

$$(\chi^\dagger(4) \sigma^i \chi(3)) (\chi^\dagger(2) \sigma^i \chi(1)) = 2(\chi^\dagger(4) \chi(1)) (\chi^\dagger(2) \chi(3)) - (\chi^\dagger(4) \chi(3)) (\chi^\dagger(2) \chi(1)). \quad (3.18)$$

Por lo que la amplitud tiene la siguiente forma:

$$i\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \rightarrow \bar{\mu}_R \mu_L} = -\frac{ie^2 4E^2}{s} \times 2\lambda_-^\dagger(3) \lambda_-(1) \chi_+^\dagger(2) \chi_+(4). \quad (3.19)$$

En este punto debemos hacer uso de la cinemática, en el límite cuando la masa tiende a cero se tiene que

$$\begin{aligned} p_1 &= (E, 0, 0, E), p_3 = (E, E \sin \theta, 0, E \cos \theta), \\ p_2 &= (E, 0, 0, -E), p_4 = (E, -E \sin \theta, 0, -E \cos \theta). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos escoger los ángulos $\theta_1 = \pi, \phi_1 = \pi$ para el estado inicial del electrón; para el estado inicial del positrón se escogen los ángulos $\theta_2 = 0, \phi_2 = 0$, para μ los ángulos son $\theta_3 = \pi - \theta, \phi_3 = \pi$ y para $\bar{\mu}$ se tiene $\theta_4 = \theta, \phi_4 = 0$. Las siguientes identidades trigonométricas son muy útiles $\sin(\frac{\pi-\theta}{2}) = \cos \frac{\theta}{2}$, $\cos(\frac{\pi-\theta}{2}) = \sin \frac{\theta}{2}$, $e^{i\pi} = 1$. Con esta información, los espinores de Weyl (1.278) se convierten en

$$\begin{aligned} \lambda_-(1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_-(3) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ \chi_+(2) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_+(4) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Sustituyendo estos espinores en (3.19), sin olvidar que en este caso $s = 4E^2$, el resultado final es

$$i\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \rightarrow \bar{\mu}_R \mu_L} = -ie^2(1 + \cos \theta). \quad (3.22)$$

Ahora, la otra configuración de helicidad que contribuye es $\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \rightarrow \bar{\mu}_L \mu_R}$, el elemento de matriz tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \rightarrow \bar{\mu}_L \mu_R} &= -i \frac{e^2}{s} \bar{u}_R(p_3) \gamma^\mu v_L(p_4) \cdot \bar{v}_R(p_2) \gamma_\mu u_L(p_1) \\ &= -ie^2(1 - \cos \theta). \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde los espinores de Weyl correspondientes son:

$$\begin{aligned} \lambda_-(1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_+(3) = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ \chi_+(2) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_-(4) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

En resumen, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \rightarrow \bar{\mu}_R \mu_L} &= -e^2(1 + \cos \theta) = \mathcal{M}_{\bar{e}_L e_R \rightarrow \bar{\mu}_L \mu_R}, \\ \mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \rightarrow \bar{\mu}_L \mu_R} &= -e^2(1 - \cos \theta) = \mathcal{M}_{\bar{e}_L e_R \rightarrow \bar{\mu}_R \mu_L}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por otro lado, si consideramos en el estado inicial las siguientes configuraciones, $\bar{e}_L e_L$ y $\bar{e}_R e_R$, se tienen dos diferentes términos correspondiente al elemento de matriz (3.12), uno es $\bar{v}_L(p_2) \gamma_\mu u_L(p_1)$, el cual desarrollando explícitamente se tiene

$$\bar{v}_L \gamma_\mu u_L = 2E(0, \chi_-(2)) \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_-(1) \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.26)$$

Del mismo modo se concluye que el otro término es $\bar{v}_R(p_2) \gamma_\mu u_R(p_1) = 0$. Por lo tanto, las configuraciones de helicidad donde los elementos de matriz que tienen todas las partículas de helicidad izquierda o todas las partículas de helicidad derecha:

$$\mathcal{M}_{\bar{e}_L e_L \rightarrow \bar{\mu}_L \mu_L}, \quad \mathcal{M}_{\bar{e}_R e_R \rightarrow \bar{\mu}_R \mu_R}, \quad (3.27)$$

van a ser nulas. También van a ser nulas aquellas donde hay tres partículas, ya sea de helicidad izquierda o helicidad derecha, por ejemplo

$$\mathcal{M}_{\bar{e}_L e_R \rightarrow \bar{\mu}_L \mu_L}, \quad \mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \rightarrow \bar{\mu}_L \mu_R}. \quad (3.28)$$

Debido a esta naturaleza que poseen los elementos de matriz, de las 16 posibles configuraciones de helicidades solamente sobreviven 4 de estas. Las cuatro amplitudes que quedan son las que se muestran en (3.25). Entonces la amplitud cuadrada promediada total es

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{4} \left\{ |\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \rightarrow \bar{\mu}_R \mu_L}|^2 + |\mathcal{M}_{\bar{e}_L e_R \rightarrow \bar{\mu}_L \mu_R}|^2 + |\mathcal{M}_{\bar{e}_R e_L \rightarrow \bar{\mu}_L \mu_R}|^2 + |\mathcal{M}_{\bar{e}_L e_R \rightarrow \bar{\mu}_R \mu_L}|^2 \right\} \quad (3.29) \\ &= \left(\frac{1}{4} \right) \times 2e^4 \{ (1 + \cos \theta)^2 + (1 - \cos \theta)^2 \} \\ &= e^4 (1 + \cos^2 \theta). \end{aligned}$$

vemos que obtenemos el mismo resultado que en la ecuación (2.143) pero con menos pasos.

3.2. El formalismo de los espinores de helicidad de Weyl, caso sin masa

Este método moderno se utiliza para calcular amplitudes de procesos de dispersión o decaimientos a nivel árbol en el límite de altas energías y para modelos que involucran partículas sin masa. El objeto matemático que se definen son los *espinores de Weyl o de helicidad* en la notación de van der Waerden, en la sección (1.7.1) se mostró que hay cuatro tipos de espinores (1.271), los cuales se van a denotar aquí como *ket* angulado $|\lambda\rangle$ para el que se transforma bajo la representación izquierda y un *ket* cuadrado $|\chi\rangle$ para el que se transforma en la representación derecha. También vimos las propiedades del espinor métrico (1.269), y como nos relaciona los espinores de Weyl izquierdos y derechos con sus conjugados, el espinor ϵ^{ab} nos permite subir y bajar índices espinoriales, en notación de amplitudes vamos a tener por ejemplo:

$$|p\rangle^a = \epsilon^{ab} \langle p|_b, \quad |p|^{\dot{a}} = \epsilon^{\dot{a}b} |p]_b. \quad (3.30)$$

La contracción entre dos espinores se define de la siguiente manera:

$$\langle \lambda \chi \rangle = \epsilon^{ab} \lambda_a \chi_b = -\langle \chi \lambda \rangle, \quad [\lambda \chi] = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \tilde{\lambda}^{\dot{a}} \tilde{\chi}^{\dot{b}} = -[\chi \lambda]. \quad (3.31)$$

En particular, $\langle \lambda \lambda \rangle = [\lambda \lambda] = 0$, y el conjugado es $\langle \lambda \chi \rangle = [\chi \lambda]^*$. Por otro lado, hemos visto que los espinores de Dirac pueden ser izquierdo o derechos, así que un estado físico puede ser uno de los dos, en términos de espinores de Weyl se definen como:

$$\begin{aligned} v_+(p) &= u_-(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ |p]_{\dot{a}} \end{pmatrix} \equiv |p], \\ v_-(p) &= u_+(p) = \begin{pmatrix} |p\rangle^a \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |p\rangle, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_-(p) &= \bar{v}_+(p) = \langle p|_a, 0 \rangle \equiv \langle p|, \\ \bar{u}_+(p) &= \bar{v}_-(p) = (0, [p]^{\dot{a}}) \equiv [p]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

En el caso en el que los fermiones no tengan masa, las partículas y antipartículas son representadas por los mismos estados de espín. Como regla nemotecnía se tiene que para una partícula derecha $|p\rangle$ esta asociada con una helicidad $h = +\frac{1}{2}$ y una partícula izquierda $|p\rangle$ es asociada con una helicidad $h = -\frac{1}{2}$. Observar que tienen cierta similitud con (1.292). En la práctica los espinores se van a escribir con números para representar sus momentos, por ejemplo: $|p_1\rangle \rightarrow |1\rangle$, $\langle p_3| \rightarrow \langle 3|$. Podemos re-parametrizar el momento p_μ de cualquier partícula como un bi-espinor usando las matrices de Pauli, esto es posible ya que cualquier matriz de 2×2 con determinante nulo puede ser escrita como el producto externo de dos vectores de dos componentes, denotado como $p_{\dot{a}b} = \tilde{\lambda}_{\dot{a}} \otimes \lambda_b \equiv \tilde{\lambda}_{\dot{a}} \lambda_b$. Se

trabaja con una notación de *brackets* de Dirac: $\tilde{\lambda}_{\dot{a}} \rightarrow |p]_{\dot{a}}$ y $\lambda_b \rightarrow \langle p|_b$. Si escribimos el momento en coordenadas esféricas, $p_\mu = (E, E \sin \theta \cos \phi, E \sin \theta \sin \phi, E \cos \theta)$, tendremos soluciones explícitas para $|p]_{\dot{a}}$ y $\langle p|_b$ usando la matriz presentada en (1.272), se tiene:

$$p_{\dot{a}b} = \begin{pmatrix} 2E \cos^2 \frac{\theta}{2} & 2E \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ 2E \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} & 2E \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Para el caso sin masa, el $\det(p_{\dot{a}b}) = 0$ (rango = 1), entonces se tiene que $p_{\dot{a}b} = |p]_{\dot{a}} \langle p|_b$, donde

$$\begin{aligned} |p]_{\dot{a}} &= \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \lambda_+, \\ \langle p|_b &= \sqrt{2E} (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Del mismo modo para $p^{a\dot{b}} = |p\rangle^a [p]^{\dot{b}}$ donde:

$$\begin{aligned} |p\rangle^a &= \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \lambda_-, \\ [p]^{\dot{b}} &= \sqrt{2E} (\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Notar las similitudes con las expresiones presentadas en la sección anterior dadas por (1.292) y (1.278). Las expresiones (3.35) y (3.36) satisfacen las ecuaciones de Weyl sin masa:

$$p^{a\dot{b}} |p]_{\dot{b}} = 0, \quad p_{\dot{a}b} |p]_{\dot{a}} = 0, \quad [p]^{\dot{b}} p_{\dot{b}a} = 0, \quad \langle p|_b p^{b\dot{a}} = 0, \quad (3.37)$$

este conjunto de ecuaciones equivalen a (1.283) y (1.284) cuando $m = 0$. Por otro lado, los espinores de helicidad tienen las siguientes propiedades y definiciones:

$$[p|\gamma^\mu|q] = \langle p|\gamma^\mu|q] = [p|\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho|q] = \langle p|\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho|q] = 0, \quad (3.38)$$

$$\langle p|\gamma^\mu|q] = [q|\gamma^\mu|p], \quad (3.39)$$

$$\langle p|\gamma_\mu|q] \langle r|\gamma^\mu|s] = 2\langle pr\rangle[sq], \quad (3.40)$$

$$\langle pq\rangle\langle rs\rangle + \langle pr\rangle\langle sq\rangle + \langle ps\rangle\langle qr\rangle = 0, \quad (3.41)$$

$$\langle p|k|q] = \langle pk\rangle[kq]. \quad (3.42)$$

La expresión (3.38) equivale al resultado que vimos en (3.26), nos dice que cualquier número impar de γ^μ ensandwichado por espinores cuadrados o angulados resulta ser nula. La ecuación (3.41) se le conoce como identidad de Schouten el cual nos ayuda simplificar y compactar la respuesta para nuestra amplitud, también existe para espinores cuadrados. La expresión (3.40) se le conoce como la identidad de Fierz. A continuación, vamos a demostrar la identidad de Fierz utilizando la notación de amplitudes, partimos del lado derecho de la ecuación (3.40):

$$\begin{aligned} \langle p|\gamma_\mu|q] \langle r|\gamma^\mu|s] &= (\bar{u}_-(p)\gamma_\mu v_+(q)) \times (\bar{u}_-(r)\gamma^\mu v_+(s)) \\ &= \langle p|_a (\sigma_\mu)^{a\dot{b}} |q]_{\dot{b}} \times \langle r|_c (\sigma^\mu)^{c\dot{d}} |s]_{\dot{d}} \\ &= \langle p|_a |q]_{\dot{b}} (\sigma_\mu)^{a\dot{b}} (\sigma^\mu)^{c\dot{d}} \langle r|_c |s]_{\dot{d}} \\ &= \langle p|_a |q]_{\dot{b}} (2\epsilon^{ac}\epsilon^{\dot{b}\dot{d}}) \langle r|_c |s]_{\dot{d}} \\ &= 2\langle p|_a \epsilon^{ac} \langle r|_c \epsilon^{\dot{b}\dot{d}} |s]_{\dot{d}} |q]_{\dot{b}} \\ &= 2\langle p|_a |r\rangle^a [s]^{\dot{b}} |q]_{\dot{b}} \\ &= 2\langle pr\rangle[sq], \end{aligned} \quad (3.43)$$

en la primera igualdad hemos usados las definiciones (3.32),(3.33) y la matriz de Dirac (1.238), las etiquetas q, p, r, s representan los momentos de las partículas. Posteriormente usamos la identidad

$$(\sigma_\mu)^{a\dot{a}}(\sigma^\mu)^{b\dot{b}} = 2\epsilon^{ab}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}, \quad (3.44)$$

luego subimos índices como en (3.30) con $|r\rangle^a = \epsilon^{ac}\langle r|_c$ y $|s|^{\dot{b}} = \epsilon^{\dot{b}\dot{d}}|s]_{\dot{d}}$. Las relaciones de completeness y conservación de momento se escriben como:

$$\not{p} = |p\rangle[p] + |p]\langle p|, \quad (3.45)$$

$$\sum_j^n \langle ij\rangle[jk] = 0, \quad (3.46)$$

con todos los momentos entrantes:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0. \quad (3.47)$$

La contracción entre dos vectores de momento se define de la siguiente manera:

$$q \cdot p = q^\mu p_\mu = \frac{1}{2} q_{a\dot{a}} p^{a\dot{a}} \equiv \frac{1}{2} Tr(|q\rangle\langle qp|p|) = \frac{1}{2} \langle qp\rangle[pq], \quad (3.48)$$

lo que da lugar a re-definir las variables de Mandelstam como:

$$s_{ij} = (p_i + p_j)^2, \quad s_{ijk} = (p_i + p_j + p_k)^2, \quad etc. \quad (3.49)$$

En particular, se tiene que $s = s_{12}, t = s_{13}, u = s_{14}$ son las variables de Mandelstam estándar para procesos de dos a dos partículas. En términos de espinores cuadrados y angulados estos son:

$$s = \langle 12\rangle[21] = \langle 34\rangle[43], \quad (3.50)$$

$$u = \langle 14\rangle[41] = \langle 23\rangle[32],$$

$$t = \langle 13\rangle[31] = \langle 24\rangle[42].$$

Para los vectores de polarización vamos a tener [4, 111]:

$$\epsilon^-(p_i, r) = \frac{\sqrt{2}}{[ri]} (|i\rangle[r] + |r]\langle i|), \quad (3.51)$$

$$\epsilon^+(p_i, r) = \frac{\sqrt{2}}{\langle ri\rangle} (|i]\langle r| + |r\rangle[i]), \quad (3.52)$$

$$\epsilon^+(p_i, r) \cdot p_j = \frac{[ij]\langle jr\rangle}{\sqrt{2}\langle ri\rangle}, \quad (3.53)$$

$$\epsilon^-(p_i, r) \cdot p_j = \frac{\langle ij\rangle[jr]}{\sqrt{2}[ri]}, \quad (3.54)$$

$$\epsilon^-(p_i, r) \cdot \epsilon^+(p_j, q) = \frac{\langle iq\rangle[jr]}{[ir]\langle qj\rangle}, \quad (3.55)$$

aquí i y j son los momentos de las partículas vectoriales sin masa tal como los gluones, r y q son sus momentos de referencia los cuales son arbitrarios y $p_i \neq r$. Los vectores de polarización deben satisfacer las siguientes condiciones de capa de masa [112],

$$\epsilon^\pm(p_i, r) \cdot p_i = 0, \quad \epsilon^\pm(p_i, r) \cdot \epsilon^\pm(p_j, q) = 0. \quad (3.56)$$

Más adelante veremos sus propiedades tanto de los espinores de helicidad como de las polarizaciones bajo el pequeño grupo. En una teoría de supergravedad, hay unas relaciones de equivalencia entre

tensores de polarización y vectores de polarización conocido como relaciones de Kawai, Lewellen y Tye o relaciones de KLT [62], el cual veremos en detalle en el capítulo (3.4). La consecuencia de las relaciones de KLT es que los tensores de polarizaciones para el campo del gravitino pueden escribirse en términos de los campos de los gluones y gluinos [113]:

$$\tilde{\epsilon}_h^{+\mu}(p, q) = \tilde{\epsilon}_g^+(p) \times \epsilon_g^{+\mu}(p, q) = [p] \times \epsilon_g^{+\mu}(p, q), \quad (3.57)$$

$$\tilde{\epsilon}_h^{-\mu}(p, q) = \tilde{\epsilon}_g^-(p) \times \epsilon_g^{-\mu}(p, q) = \langle p | \times \epsilon_g^{-\mu}(p, q), \quad (3.58)$$

$$\epsilon_h^{+\mu}(p, q) = \epsilon_g^+(p) \times \epsilon_g^{+\mu}(p, q) = |p] \times \epsilon_g^{+\mu}(p, q), \quad (3.59)$$

$$\epsilon_h^{-\mu}(p, q) = \epsilon_g^-(p) \times \epsilon_g^{-\mu}(p, q) = |p\rangle \times \epsilon_g^{-\mu}(p, q). \quad (3.60)$$

Lo mismo es aplicable para los tensores de polarización del campo del gravitón el cual se puede expresar en términos de los campos gluónicos como:

$$(\epsilon_h^{++})^{\mu\nu}(p, q) = \epsilon_g^{+\mu}(p, q) \times \epsilon_g^{+\nu}(p, q), \quad (3.61)$$

$$(\epsilon_h^{--})^{\mu\nu}(p, q) = \epsilon_g^{-\mu}(p, q) \times \epsilon_g^{-\nu}(p, q), \quad (3.62)$$

donde q se refiere al momento de referencia.

Notación para espinores de Weyl

$$\star \quad v_+(p_1) = u_-(p_1) \equiv |p_1] \longrightarrow |1] \quad ; \quad \bar{u}_-(p_2) = \bar{v}_+(p_2) \equiv \langle p_2 | \longrightarrow \langle 2 |$$

$$\star \quad \frac{\langle p_1 p_2 \rangle}{\langle p_2 p_3 \rangle \langle p_3 p_1 \rangle} \longrightarrow \frac{\langle 12 \rangle}{\langle 23 \rangle \langle 31 \rangle} ; \quad \frac{[p_3 p_4]}{[p_2 p_3] [p_3 p_1]} \longrightarrow \frac{[34]}{[23] [31]}$$

$$\star \quad \mathcal{M}(e^-, \gamma, e^-, \gamma) \longrightarrow \mathcal{M}(p_1^{h_1}, p_2^{h_2}, p_3^{h_3}, p_4^{h_4}) \longrightarrow \mathcal{M}(1^+, 2^-, 3^+, 4^-)$$

$$\star \quad \langle 12 \rangle^* = [21] ; \quad \mathcal{M} \approx \frac{\langle \rangle}{\langle \rangle \langle \rangle} ; \quad \mathcal{M}^\dagger \approx \frac{[]}{[] []} \longrightarrow |\overline{\mathcal{M}}|^2 \approx F(s, t, u)$$

Figura 3.1: Notación amplitudes

3.2.1. El método de amplitudes en Electrodinámica Cuántica

Un elemento de matriz o amplitud ahora se va a denotar como $\mathcal{M}(1^{h_1}, 2^{h_2}, 3^{h_3}, 4^{h_4})$, donde h_i representa las helicidades de las partículas involucradas, por simplicidad las helicidades aparecerán como superíndices $\pm$. Los números 1 y 2 se refieren a las partículas en el estado inicial, 3 y 4 las partículas en el estado final. Retomando el proceso $e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-$ se procede a calcular sus amplitudes con este formalismo.

Proceso de dispersión: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Se escoge el electrón como derecho o helicidad $h_1 = +$, denotado por $|1]$, el positrón debe ser izquierdo o helicidad $h_2 = -$, debido a la propiedad (3.38), el muón se toma como $\langle 3|$ por lo que el anti-muón es $|4]$. Entonces la amplitud (3.12) se convierte en

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}(1^+, 2^-, 3^-, 4^+) &= \frac{i^2 e^2}{s} \langle 2 | \gamma^\mu | 1 \rangle (-ig^{\mu\nu}) \langle 3 | \gamma_\nu | 4 \rangle \\ &= 2 \frac{ie^2}{s} \langle 23 \rangle [41], \end{aligned} \quad (3.63)$$

en la segunda igualdad se utilizó la identidad de Fierz (3.40) y que $\langle \lambda \chi \rangle = [\chi \lambda]^*$. Se toma el cuadrado de esta amplitud dando como resultado

$$|\mathcal{M}(1^+, 2^-, 3^-, 4^+)|^2 = \frac{4e^4}{s^2} \langle 23 \rangle [41] [32] \langle 14 \rangle = \frac{4e^4}{s^2} u^2. \quad (3.64)$$

En la última igualdad se han usado las variables (3.50). Las amplitudes son invariantes bajo paridad, al cambiar el signo de la helicidad $h_i \rightarrow -h_i$ se obtiene el mismo resultado para la amplitud $\mathcal{M}(1^-, 2^+, 3^+, 4^-)$ que en (3.64). Las otras amplitudes que contribuyen son

$$|\mathcal{M}(1^+, 2^-, 3^+, 4^-)|^2 = |\mathcal{M}(1^-, 2^+, 3^-, 4^+)|^2 = \frac{4e^4}{s^2} t^2. \quad (3.65)$$

Entonces, la amplitud cuadrada promediada dada por (3.29) es

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \left(\frac{t^2 + u^2}{s^2} \right) = e^4 (1 + \cos^2 \theta), \quad (3.66)$$

donde se han usado las variables s, u, t con respecto al centro de masa, para procesos donde las masas son despreciables [97]:

$$s = 4E, \quad t = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta), \quad u = -\frac{s}{2}(1 + \cos \theta). \quad (3.67)$$

3.3. Supergravedad $N = 1$ en $D = 4$

En la literatura científica se habla de la supergravedad como la unión de la relatividad general con la supersimetría [114, 115, 116, 117]. Se propone que la supersimetría debe ser una simetría local (simetría de norma) ya que la mayoría de las simetrías en física de partículas se manifiestan como simetrías de norma, en este sentido se dice que supergravedad es una teoría de supersimetría local. Para construir la lagrangiana de SUGRA localmente supersimétrica, el primer paso es empezar por construir la lagrangiana de supergravedad libre globalmente supersimétrica cuyo multiplete contiene al *Gravitón* y su compañero supersimétrico el *Gravitino*, el cual es un fermión de espín $\frac{3}{2}$.

La referencia clásica sobre temas de SUSY y SUGRA es el texto de Wess and Bagger [116]. Sin embargo, hay libros de texto accesibles para aprender supersimetría, por ejemplo: Muller-Kirsten [74] presenta muchos desarrollos algebraicos en gran detalle. Otra de muy fácil lectura es de la serie DeMystified [118]. La principal referencia para temas de supergravedad en general es el texto de Freedman and van Proeyen [117]. Este capítulo está organizado de la siguiente manera: la sección 3.3.1 trata un breve repaso de los conceptos básicos de supersimetría, la sección 3.3.2 incluye las definiciones principales de la teoría de la relatividad general. La sección 3.4 esta basada en las referencias [115, 119], y se presentan los desarrollos algebraicos explícitos de la invariancia de la lagrangiana de supergravedad $N = 1$ bajo las transformaciones de norma y de supersimetría global en los Apéndices A y B.

3.3.1. Supersimetría $N = 1$

Supersimetría es una simetría hipotética que relaciona fermiones (partículas constituyentes de la materia) con bosones (partículas mediadoras de las fuerzas), en otras palabras, existe un operador Q que lleva de un estado fermiónico $|F\rangle$ a un estado bosónico $|B\rangle$ y viceversa [120],

$$Q|F\rangle = |B\rangle, \quad Q|B\rangle = |F\rangle. \quad (3.68)$$

Esta simetría implica que todas las partículas de una teoría de campo supersimétrica posean compañeros supersimétricos (sparticles) los cuales son denotados por una tilde $\tilde{s}$; los multipletes supersimétricos consisten de partículas con masas iguales cuyos espines difieren por un factor de $\frac{1}{2}$. Las teorías supersimétricas satisfacen un álgebra de Lie gradada, lo cual se refiere a que involucra tanto a relaciones de conmutación cuando ambos argumentos son bosónicos, como de anticonmutación en el caso de argumentos fermiónicos (Grassmann). Esta álgebra de Lie se le conoce como álgebra de super-Poincaré, la cual es la extensión supersimétrica más simple del grupo de Poincaré. Como punto de partida, vamos a discutir los aspectos del álgebra de Poincaré. Una transformación de Poincaré P es una transformación de Lorentz propia Λ seguido de una traslación a . Las coordenadas del espacio tiempo se denotan por x^μ con $\mu = 0, 1, 2, 3$. Entonces una transformación de Poincaré sobre las coordenadas está dada por

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (3.69)$$

donde Λ está restringido por $\det(\Lambda) = +1$ y $\Lambda^0_0 > 1$, estas transformaciones están continuamente conectadas a la identidad y denotamos dichas transformaciones de Poincaré por $P = \Lambda, a$. Los generadores del grupo de Poincaré son los seis generadores $M^{\mu\nu}$ del grupo de Lorentz el cual es el tensor de momento angular, más los cuatro generadores P^μ del grupo de las traslaciones el cual es el operador de energía momento. Dichos generadores están dados por

$$(P^\mu)_\nu = i\delta^\mu_\nu, \quad (3.70)$$

$$(M^{\mu\nu})_{\rho\sigma} = i(\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho), \quad (3.71)$$

los cuales satisfacen el álgebra de Poincaré

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad (3.72)$$

$$[M^{\mu\nu}, P^\lambda] = i(\eta^{\nu\lambda} P^\mu - \eta^{\mu\lambda} P^\nu), \quad (3.73)$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}), \quad (3.74)$$

donde $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Por otra parte, el álgebra de Lie para una teoría supersimétrica incluye al operador de supercarga Q . Para la teoría supersimétrica más simple, *supersimetría* $N=1$ [115, 116], donde $N = 1$ se refiere al número de operadores de supercarga Q que contiene la teoría (los cuales pueden ser hasta $N = 8$), el álgebra de super-Poincaré está dada por

$$\begin{aligned} [Q, P^\mu] &= 0, & [Q, M^{\mu\nu}] &= \frac{i}{4} \epsilon(\sigma^\mu \sigma^\nu - \sigma^\nu \sigma^\mu) Q, \\ [Q, Q] &= 0, & [Q, Q^\dagger] &= 2\sigma^\mu P_\mu, \end{aligned} \quad (3.75)$$

donde [...] es el paréntesis gradado, ϵ es un espinor de Weyl constante, el cuál es un parámetro supersimétrico análogo al ángulo θ de una transformación de rotación, P^μ es el operador de energía momento y generador de las traslaciones, y $M^{\mu\nu}$ corresponde a los generadores del grupo de Lorentz. El álgebra supersimétrica $N = 1$ tiene representaciones del grupo de Lorentz que involucran partículas sin masa de espines $(s, s - \frac{1}{2})$ con $s = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$, de este modo, supersimetría mezcla bosones de espín entero con fermiones de espín semi-entero.

En teoría cuántica de campos supersimétrica, resulta conveniente trabajar con supercampos (o supermultipletes), estos son objetos matemáticos que transforman bajo SUSY de manera bien definida. Para la construcción de modelos de partículas, como la extensión mínima supersimétrica del modelo estándar, el llamado MSSM, es suficiente considerar dos tipos de supercampos: quirales y vectoriales. Los supercampos quirales incluyen un campo escalar y un campo espinorial, esto es incluyen un campo de espín 0 y otro de espín 1/2. En el caso de los supercampos vectoriales se incluye un campo espinorial (espín 1/2) y un campo vectorial (espín 1). Para construir los lagrangianos correspondientes puede ser conveniente trabajar en superespacios; los puntos del superespacio incluyen las coordenadas espacio-temporales (x^μ) , así como variables de Grassmann $(\theta, \bar{\theta})$ las cuales son espinores que anticonmutan, es decir, $z^\mu = (x^\mu, \theta_a, \bar{\theta}_{\dot{a}})$.

3.3.2. Relatividad general como teoría efectiva

En los textos básicos se avanza de forma gradual para estudiar las ecuaciones de campo de Einstein; sin embargo, una forma sencilla y práctica es utilizar métodos variacionales para deducirlas, es decir, partir de la acción y utilizar el principio de hamilton para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange [115]. La acción para el campo gravitacional es la acción de Einstein-Hilbert,

$$\mathcal{S}_{EH} = \int_{\mathcal{R}} R \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.76)$$

mientras que las ecuaciones de campo en el vacío que corresponden a la acción de Einstein-Hilbert están dadas por

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (3.77)$$

esta ecuación nos indica que no hay materia ni campo gravitacional presente en el espacio-tiempo; las soluciones a esta ecuación se conocen como soluciones en el vacío, que son un caso especial de las soluciones más generales en relatividad general. La acción (3.76) es invariante ante transformaciones locales de coordenadas, sin embargo, nuestro enfoque es presentar supergravedad global, y esto requiere en principio, que el lagrangiano en la acción de Einstein-Hilbert sea cuadrático en $g_{\mu\nu}$, para obtener este termino usamos la acción de Einstein-Hilbert linealizada, considerando una fluctuación alrededor de la métrica de Minkowski, esto es, tomamos una pequeña perturbación $h_{\mu\nu}$ en la métrica,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (3.78)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski, $\kappa^2 = 8\pi G_N$, G_N es la constante gravitacional de Newton, y $h_{\mu\nu}$ se interpreta como el gravitón, mediador de las interacciones gravitacionales. En la literatura se encuentra que realizando una expansión en la acción (3.76) hasta un orden lineal en $h_{\mu\nu}$, se obtiene la acción de Einstein-Hilbert linealizada

$$\mathcal{S}_{EH} = -\frac{1}{2} \int d^4x (R_{\mu\nu}^L - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^L) h^{\mu\nu}, \quad (3.79)$$

y

$$R_{\mu\nu}^L = 0, \quad (3.80)$$

que corresponde a las ecuaciones de campo de Einstein linealizadas en el vacío [121], donde

$$R_{\mu\nu}^L = \frac{1}{2} (\partial^\lambda \partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial^\lambda \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h), \quad (3.81)$$

y

$$R^L \equiv \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^L = \partial^\mu \partial_\gamma h^\gamma_\mu - \square h, \quad (3.82)$$

siendo $R_{\mu\nu}^L$ el tensor de Ricci y R^L el escalar de Ricci linealizados. Por otro lado, para entender la física a diferentes escalas se necesita introducir las teorías de campo efectivas (EFTs, por sus siglas en ingles). Las teorías efectivas han sido uno de los desarrollos más importantes en física durante las últimas décadas, pero en los años más recientes se ha visto su poder debido a que provee una manera sistemática para organizar nuestro entendimiento de la naturaleza a diferentes energías, es decir, desde bajas energías hacia altas energías. En realidad, el mundo lo experimentamos siempre como una descripción efectiva a bajas energías. Incluso si descubrimos un formalismo más fundamental, solamente necesitamos tomar en cuenta el comportamiento de los grados de libertad accesibles a la escala de energía de nuestro experimento cuando describimos fenómenos a bajas energías. Por ejemplo, para estudiar las propiedades del agua en la vida diaria, no necesitamos empezar desde la lagrangiana de la cromodinámica cuántica (QCD) o entender gravedad cuántica. Otro ejemplo sería la electrodinámica cuántica donde solo nos enfocamos en trabajar con fotones o electrones mientras despreciamos todas las otras partículas más pesadas, ya que esta aproximación es válida las energías de $E < 2m_e$ donde $m_e = 511$ keV. En este caso sabemos la teoría a altas energías, al menos usando el formalismo de la integral de camino (path integral description). Si estamos interesados solamente en la física a bajas energías, entonces se integran los estados pesados para obtener una teoría para estados a bajas energías definiendo la correspondiente teoría efectiva. Mejor aún, incluso si no conocemos la teoría a altas energías, podemos identificar los estados de la teoría a bajas energías y escribir una teoría efectiva. Esta descripción efectiva es capaz de describir adecuadamente fenómenos físicos a bajas energías. Mientras que estos tipos de cálculos pueden ser explícitamente realizados en teoría de perturbaciones, en el caso del modelo estándar, no se sabe exactamente sobre que grados de libertad agregar a altas energías. En otras palabras, no necesitamos saber sobre gravedad cuántica para describir una taza de café. En la práctica, cuando describimos una teoría cuántica de campos que debería ser predictiva a energías de $E \ll \Lambda$ por debajo de la escala de corte Λ , esto es, a bajas energías nuestra teoría debería ser representada por la siguiente lagrangiana efectiva

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} [\Phi_a, \partial\Phi_a] = \sum_i c_i \mathcal{O}_i (\Phi_a, \partial\Phi_a), \quad (3.83)$$

aquí c_i son algunos coeficientes constantes, mientras que $\mathcal{O}_i$ son operadores y Φ_a representa todos los campos en nuestra teoría. Para saber que tipos de operadores $\mathcal{O}_i$ debemos incluir en nuestra teoría (3.83) existen criterios para saberlo, ya que estos dependen de la dimensión y las energías en las que estemos interesados. Ya que la acción S no tienen dimensiones, podemos determinar la dimensión de la masa de la lagrangiana efectiva $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ como

$$S_{\text{eff}} [\Phi_a, \partial\Phi_a] = \int \mathcal{L}_{\text{eff}} [\Phi_a, \partial\Phi_a] d^4x \implies [\mathcal{L}_{\text{eff}}] = 4. \quad (3.84)$$

Los operadores $\mathcal{O}_i$ de dimensión $d_i = [\mathcal{O}_i]$ recaen en tres categorías:

- a) Irrelevantes: c_i llegan a ser pequeños a bajas energías: $d_i > 4, [c_i] < 0$;
- b) Relevantes: c_i aumentan a energías bajas: $d_i < 4, [c_i] > 0$;
- c) Marginales: c_i no cambian con ninguna escala de energía : $d_i = 4, [c_i] = 0$.

Los coeficientes con dimensión negativa naturalmente son suprimidos por las potencias de la escala ultra-violeta (UV) de Λ , y son menos relevantes si estamos interesados en la física que esta a la escala de $E \ll \Lambda$. De este modo, llamamos a una teoría de la siguiente manera:

- *Renormalizables*: si

$$[c_i] \geq 0 \quad \forall \quad i.$$

Esta categoría es bastante restrictiva debido a que

$$d_i = [\mathcal{O}_i] = 4 - [c_i] \geq 0. \quad (3.85)$$

Esto implica que en una teoría renormalizable solamente algunas c_i son no cero, por lo tanto la teoría es inmensamente predictiva, solamente estos coeficientes deben ser relacionados con el experimento a energías de $E \ll \Lambda$.

- *No renormalizables*: si

$$[c_i] \leq 0 \quad \text{para algún } i \quad (3.86)$$

Entonces, los coeficientes c_i escala de la siguiente manera

$$c_i \sim \Lambda^{4-d_i}. \quad (3.87)$$

Se distinguen algunos escenarios donde la energía E es una energía típica de la teoría:

- Si la energía $E \ll \Lambda$, es suficiente para mantener algunos operadores $\mathcal{O}_i$ entonces la teoría efectiva se vuelve predictiva.
- Si la energía $E \sim \Lambda$, entonces tenemos que incluir muchos operadores $\mathcal{O}$ por lo que perdemos predicción en la teoría. Así necesitamos una teoría ultra-violeta.

Claramente pueden haber, en principio, muchos coeficientes debido a que

$$d_i = [\mathcal{O}_i] = 4 - [c_i] \geq 0, \quad (3.88)$$

siempre se satisface. Para una teoría que es no-renormalizable, la escala de la nueva física Λ podría ser muy grande y por lo tanto la teoría podría ser predictiva para un rango enorme de energías E así como $E \ll \Lambda$. Un ejemplo típico que ilustra teorías renormalizables y no-renormalizables es considerando la siguiente lagrangiana para una teoría escalar

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \underbrace{\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2 - g \phi^3 - \lambda \phi^4}_{\text{Renormalizable}} + \underbrace{\frac{a}{\Lambda} \phi^5 + \frac{b}{\Lambda^2} \phi^6 + \dots}_{\text{No-renormalizable}} \quad (3.89)$$

Los primeros cuatro términos definen una teoría renormalizable el cual es predictiva debido a que tiene solamente 3 constantes de acoplamiento m, g, λ . Más allá de eso, agregando operadores de dimensión mayor, la teoría se vuelve no-renormalizable, manteniendo pocos términos en la lagrangiana, esto define la teoría efectiva si es válida a energías de $E \ll \Lambda$. De lo contrario la teoría se quiebra a energías cercanas a Λ y se necesitaría sustituirla por otra nueva teoría efectiva válida a altas energías o por una teoría completa ultra-violeta. La relatividad general es un ejemplo de una teoría que necesita ser completada a la escala UV. La gravedad de Einstein puede ser

tratada cuánticamente siempre y cuando se trate como una teoría efectiva a escalas de energía $E \ll M_P \simeq 10^{18}$ GeV [48, 49, 50, 51, 54, 55, 56, 93].

La teoría general de la relatividad de Einstein (GR) es descrito por la expresión (3.76) de donde surge el término de Einstein-Hilbert (EH)

$$\mathcal{L}_{EH} = M_P^2 R \sqrt{-g}, \quad M_P^2 = \frac{\hbar c}{G_N}, \quad (3.90)$$

en términos del escalar de Ricci R . La constante de acoplamiento G_N tiene dimensiones de masa negativa y por lo tanto es no-renormalizable. La alternativa que tenemos es expandir el escalar de Ricci R en términos de la fluctuación de la métrica alrededor de una constante de Minkowski, esto es:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{M_P} h_{\mu\nu} \Rightarrow M_P^2 R^{(4)} = (\partial h)^2 + \frac{h}{M_P} (\partial h)^2 + \frac{h^2}{M_P^2} (\partial h)^2 + \dots \quad (3.91)$$

De esta manera, un número infinito de contra-términos serían necesarios en teoría de perturbaciones. Por este motivo, la teoría no admite un límite continuo, pero tiene un conjunto de corte intrínsecamente definido por la escala de Planck M_P . Dicho esto, la no renormalizabilidad de la teoría no constituye una obstrucción para hacer cálculos cuánticos perturbativos en gravedad así como limitamos nuestras consideraciones a las energías μ muy por debajo de M_P ,

$$\mu \ll M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} \sim 10^{19} \text{ GeV}. \quad (3.92)$$

En este régimen, podemos tratar a la gravedad como una teoría efectiva el cual es extraordinariamente predictiva. De hecho, gravedad pura es finita a un lazo [52].

Estados de helicidad de la gravedad

La gravedad está relacionada con una partícula hipotética llamada gravitón el cual es una partícula sin masa de helicidad $h = \pm 2$ descrito por un campo simétrico $h_{\mu\nu}$ escrito en términos del vector de polarización $\epsilon_{\mu\nu}$ que también tiene solamente dos grados de libertad o estados de polarización:

$$h_{\mu\nu}(x) = \sum_{\lambda} \int dp [\epsilon_{\mu\nu} a(p^\nu, \lambda) e^{ipx} + \epsilon_{\mu\nu}^* a^\dagger(p^\nu, \lambda) e^{-ipx}]. \quad (3.93)$$

La constricción $q^\mu \epsilon_{\mu\nu} = 0$ deja invariante la norma

$$\epsilon_{\mu\nu} \rightarrow \epsilon_{\mu\nu} + \hat{a}_\mu(q) q_\nu + \hat{a}_\nu(q) q_\mu, \quad (3.94)$$

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu a_\nu(x) + \partial_\nu a_\mu(x), \quad (3.95)$$

los cuales pueden ser identificados con la versión local de una transformación de coordenadas general, esta es la simetría fundamental que define la relatividad general. Por completos, también necesitamos imponer $\epsilon^\mu{}_\mu = 0$ y $q^\mu \epsilon_{\mu\nu} = 0$. En total un tensor simétrico tiene diez grados de libertad, las constricciones lo reducen por 5 grados de libertad en el caso másivo, y en el caso sin masa lo reduce a ocho grados de libertad. La constricción $\epsilon^\mu{}_\mu = 0$ requiere que $p^\mu \hat{a}_\mu = 0$ resultando en una constricción adicional de las componentes $\hat{a}_\mu$ lo que nos lleva que el número de grados de libertad solamente se reduce a 3 para una partícula sin masa con espín 2. Por lo tanto, llegamos a que una partícula de helicidad 2, tiene solamente $10 - 8 = 2$ grados de libertad independientes. De este modo, el gravitón va tener dos estados de helicidad ± 2 . El diagrama de Feynman de un vértice con tres gravitones es el que se muestra en la Figura 3.2.

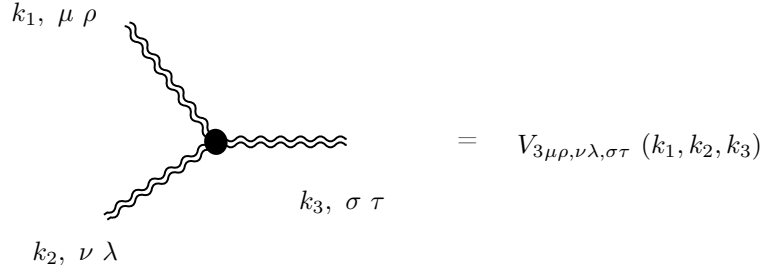


Figura 3.2: Vértice de tres gravitones.

Explícitamente, el vértice que se muestra en la Figura 3.2 sería de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 V_{3\mu\rho,\nu\lambda,\sigma\tau}(k_1, k_2, k_3) = & i \text{Sym} \left[-\frac{1}{2} P_3 (k_1 \cdot k_2 \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\lambda} \eta_{\sigma\tau}) - \frac{1}{2} P_6 (k_{1\nu} k_{1\lambda} \eta_{\mu\rho} \eta_{\sigma\tau}) \right. \\
 & + \frac{1}{2} P_3 (k_1 \cdot k_2 \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\lambda} \eta_{\sigma\tau}) + P_6 (k_1 \cdot k_2 \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} \eta_{\lambda\tau}) + 2P_3 (k_{1\nu} k_{1\tau} \eta_{\mu\rho} \eta_{\lambda\sigma}) \\
 & - P_3 (k_{1\lambda} k_{2\mu} \eta_{\rho\nu} \eta_{\sigma\tau}) + P_3 (k_{1\sigma} k_{2\tau} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\lambda}) + P_6 (k_{1\sigma} k_{1\tau} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\lambda}) + 2P_6 (k_{1\nu} k_{2\tau} \eta_{\lambda\mu} \eta_{\rho\sigma}) \\
 & \left. + 2P_3 (k_{1\nu} k_{2\mu} \eta_{\lambda\sigma} \eta_{\tau\rho}) - 2P_3 (k_1 \cdot k_2 \eta_{\rho\nu} \eta_{\lambda\sigma} \eta_{\tau\mu}) \right], \quad (3.96)
 \end{aligned}$$

donde P_i se refiere a sus respectivas permutaciones. Yendo más allá, desarrollando permutación por permutación, esta regla de Feynman nos quedaría como:

$$\begin{aligned}
 V_{3\mu\rho,\nu\lambda,\sigma\tau}(k_1, k_2, k_3) = & 2\eta^{\mu\tau} \eta^{\nu\sigma}{}_{k_1} \lambda_{k_1} \rho + 2\eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\tau}{}_{k_1} \lambda_{k_1} \rho - 2\eta^{\mu\nu} \eta^{\sigma\tau}{}_{k_1} \lambda_{k_1} \rho \\
 & + 2\eta^{\lambda\tau} \eta^{\mu\nu}{}_{k_1}{}^{\sigma}{}_{k_1} \rho + 2\eta^{\lambda\sigma} \eta^{\mu\nu}{}_{k_1}{}^{\tau}{}_{k_1} \rho + \eta^{\mu\tau} \eta^{\nu\sigma}{}_{k_2}{}^{\lambda}{}_{k_1} \rho \\
 & + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\tau}{}_{k_2}{}^{\lambda}{}_{k_1}{}^{\rho} + \eta^{\lambda\tau} \eta^{\nu\sigma}{}_{k_2}{}^{\mu}{}_{k_1}{}^{\rho} + \eta^{\lambda\sigma} \eta^{\nu\tau}{}_{k_2}{}^{\mu}{}_{k_1}{}^{\rho} + \eta^{\lambda\tau} \eta^{\mu\sigma}{}_{k_2}{}^{\nu}{}_{k_1}{}^{\rho} \\
 & + \eta^{\lambda\sigma} \eta^{\mu\tau}{}_{k_2}{}^{\nu}{}_{k_1}{}^{\rho} + \eta^{\lambda\tau} \eta^{\nu\sigma}{}_{k_3}{}^{\mu}{}_{k_1}{}^{\rho} + \eta^{\lambda\sigma} \eta^{\nu\tau}{}_{k_3}{}^{\mu}{}_{k_1}{}^{\rho} - \eta^{\lambda\nu} \eta^{\sigma\tau}{}_{k_3}{}^{\mu}{}_{k_1}{}^{\rho} \\
 & + \eta^{\lambda\tau} \eta^{\mu\sigma}{}_{k_3}{}^{\nu}{}_{k_1}{}^{\rho} + \eta^{\lambda\sigma} \eta^{\mu\tau}{}_{k_3}{}^{\nu}{}_{k_1}{}^{\rho} - \eta^{\lambda\mu} \eta^{\sigma\tau}{}_{k_3}{}^{\nu}{}_{k_1}{}^{\rho} + \eta^{\lambda\nu} \eta^{\mu\tau}{}_{k_3}{}^{\sigma}{}_{k_1}{}^{\rho} \\
 & + \eta^{\lambda\mu} \eta^{\nu\tau}{}_{k_3}{}^{\sigma}{}_{k_1}{}^{\rho} + \eta^{\lambda\nu} \eta^{\mu\sigma}{}_{k_3}{}^{\tau}{}_{k_1}{}^{\rho} + \eta^{\lambda\mu} \eta^{\nu\sigma}{}_{k_3}{}^{\tau}{}_{k_1}{}^{\rho} + 2\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\tau}{}_{k_1}{}^{\lambda}{}_{k_1}{}^{\sigma} \\
 & + 2\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma}{}_{k_1}{}^{\lambda}{}_{k_1}{}^{\tau} - 2\eta^{\lambda\rho} \eta^{\mu\nu}{}_{k_1}{}^{\sigma}{}_{k_1}{}^{\tau} + 2\eta^{\lambda\nu} \eta^{\mu\rho}{}_{k_1}{}^{\sigma}{}_{k_1}{}^{\tau} + 2\eta^{\lambda\mu} \eta^{\nu\rho}{}_{k_1}{}^{\sigma}{}_{k_1}{}^{\tau} \\
 & + \eta^{\mu\tau} \eta^{\nu\rho}{}_{k_1}{}^{\sigma}{}_{k_2}{}^{\lambda} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\tau}{}_{k_1}{}^{\sigma}{}_{k_2}{}^{\lambda} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}{}_{k_1}{}^{\tau}{}_{k_2}{}^{\lambda} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma}{}_{k_1}{}^{\tau}{}_{k_2}{}^{\lambda} \\
 & + \eta^{\nu\tau} \eta^{\rho\sigma}{}_{k_1}{}^{\lambda}{}_{k_2}{}^{\mu} + \eta^{\nu\sigma} \eta^{\rho\tau}{}_{k_1}{}^{\lambda}{}_{k_2}{}^{\mu} + \eta^{\lambda\tau} \eta^{\nu\rho}{}_{k_1}{}^{\sigma}{}_{k_2}{}^{\mu} - \eta^{\lambda\rho} \eta^{\nu\tau}{}_{k_1}{}^{\sigma}{}_{k_2}{}^{\mu} \\
 & + \eta^{\lambda\nu} \eta^{\rho\tau}{}_{k_1}{}^{\sigma}{}_{k_2}{}^{\mu} + \eta^{\lambda\sigma} \eta^{\nu\rho}{}_{k_1}{}^{\tau}{}_{k_2}{}^{\mu} - \eta^{\lambda\rho} \eta^{\nu\sigma}{}_{k_1}{}^{\tau}{}_{k_2}{}^{\mu} + \eta^{\lambda\nu} \eta^{\rho\sigma}{}_{k_1}{}^{\tau}{}_{k_2}{}^{\mu}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2\eta^{\nu\rho}\eta^{\sigma\tau}k_2^\lambda k_2^\mu + \eta^{\mu\tau}\eta^{\rho\sigma}k_1^\lambda k_2^\nu + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho\tau}k_1^\lambda k_2^\nu + \eta^{\lambda\tau}\eta^{\mu\rho}k_1^\sigma k_2^\nu - \eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\tau}k_1^\sigma k_2^\nu \\
 & + \eta^{\lambda\mu}\eta^{\rho\tau}k_1^\sigma k_2^\nu + \eta^{\lambda\sigma}\eta^{\mu\rho}k_1^\tau k_2^\nu - \eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\sigma}k_1^\tau k_2^\nu + \eta^{\lambda\mu}\eta^{\rho\sigma}k_1^\tau k_2^\nu \\
 & + 2\eta^{\mu\rho}\eta^{\sigma\tau}k_2^\lambda k_2^\nu + 2\eta^{\lambda\tau}\eta^{\rho\sigma}k_2^\mu k_2^\nu + 2\eta^{\lambda\sigma}\eta^{\rho\tau}k_2^\mu k_2^\nu - 2\eta^{\lambda\rho}\eta^{\sigma\tau}k_2^\mu k_2^\nu \\
 & + \eta^{\mu\tau}\eta^{\nu\sigma}k_1^\lambda k_2^\rho + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\tau}k_1^\lambda k_2^\rho + \eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\tau}k_1^\sigma k_2^\rho + \eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\tau}k_1^\sigma k_2^\rho \\
 & + \eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\sigma}k_1^\tau k_2^\rho + \eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\sigma}k_1^\tau k_2^\rho + 2\eta^{\mu\tau}\eta^{\nu\sigma}k_2^\lambda k_2^\rho + 2\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\tau}k_2^\lambda k_2^\rho \\
 & - 2\eta^{\mu\nu}\eta^{\sigma\tau}k_2^\lambda k_2^\rho + 2\eta^{\lambda\nu}\eta^{\sigma\tau}k_2^\mu k_2^\rho + 2\eta^{\lambda\mu}\eta^{\sigma\tau}k_2^\nu k_2^\rho + \eta^{\nu\tau}\eta^{\rho\sigma}k_1^\lambda k_3^\mu \\
 & + \eta^{\nu\sigma}\eta^{\rho\tau}k_1^\lambda k_3^\mu - \eta^{\nu\rho}\eta^{\sigma\tau}k_1^\lambda k_3^\mu + \eta^{\lambda\tau}\eta^{\nu\rho}k_1^\sigma k_3^\mu + \eta^{\lambda\nu}\eta^{\rho\tau}k_1^\sigma k_3^\mu \\
 & + \eta^{\lambda\sigma}\eta^{\nu\rho}k_1^\tau k_3^\mu + \eta^{\lambda\nu}\eta^{\rho\sigma}k_1^\tau k_3^\mu + \eta^{\nu\tau}\eta^{\rho\sigma}k_2^\lambda k_3^\mu + \eta^{\nu\sigma}\eta^{\rho\tau}k_2^\lambda k_3^\mu \\
 & + \eta^{\lambda\tau}\eta^{\rho\sigma}k_2^\nu k_3^\mu + \eta^{\lambda\sigma}\eta^{\rho\tau}k_2^\nu k_3^\mu + \eta^{\lambda\tau}\eta^{\nu\sigma}k_2^\rho k_3^\mu + \eta^{\lambda\sigma}\eta^{\nu\tau}k_2^\rho k_3^\mu \\
 & + \eta^{\mu\tau}\eta^{\rho\sigma}k_1^\lambda k_3^\nu + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho\tau}k_1^\lambda k_3^\nu - \eta^{\mu\rho}\eta^{\sigma\tau}k_1^\lambda k_3^\nu + \eta^{\lambda\tau}\eta^{\mu\rho}k_1^\sigma k_3^\nu \\
 & + \eta^{\lambda\mu}\eta^{\rho\tau}k_1^\sigma k_3^\nu + \eta^{\lambda\sigma}\eta^{\mu\rho}k_1^\tau k_3^\nu + \eta^{\lambda\mu}\eta^{\rho\sigma}k_1^\tau k_3^\nu + \eta^{\mu\tau}\eta^{\rho\sigma}k_2^\lambda k_3^\nu \\
 & + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho\tau}k_2^\lambda k_3^\nu + \eta^{\lambda\tau}\eta^{\rho\sigma}k_2^\mu k_3^\nu + \eta^{\lambda\sigma}\eta^{\rho\tau}k_2^\mu k_3^\nu + \eta^{\lambda\tau}\eta^{\mu\sigma}k_2^\rho k_3^\nu \\
 & + \eta^{\lambda\sigma}\eta^{\mu\tau}k_2^\rho k_3^\nu + 2\eta^{\lambda\tau}\eta^{\rho\sigma}k_3^\mu k_3^\nu - 2\eta^{\lambda\rho}\eta^{\sigma\tau}k_3^\mu k_3^\nu \\
 & + \eta^{\mu\tau}\eta^{\nu\rho}k_1^\lambda k_3^\sigma + \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\tau}k_1^\lambda k_3^\sigma + \eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\rho}k_1^\tau k_3^\sigma + \eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\rho}k_1^\tau k_3^\sigma \\
 & + \eta^{\mu\tau}\eta^{\nu\rho}k_2^\lambda k_3^\sigma + \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\tau}k_2^\lambda k_3^\sigma - \eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\tau}k_2^\lambda k_3^\sigma + \eta^{\lambda\tau}\eta^{\nu\rho}k_2^\mu k_3^\sigma \\
 & + \eta^{\lambda\nu}\eta^{\rho\tau}k_2^\mu k_3^\sigma + \eta^{\lambda\tau}\eta^{\mu\rho}k_2^\nu k_3^\sigma + \eta^{\lambda\mu}\eta^{\rho\tau}k_2^\nu k_3^\sigma - \eta^{\lambda\tau}\eta^{\mu\nu}k_2^\rho k_3^\sigma \\
 & + \eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\tau}k_2^\rho k_3^\sigma + \eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\tau}k_2^\rho k_3^\sigma + 2\eta^{\lambda\rho}\eta^{\nu\tau}k_3^\mu k_3^\sigma + 2\eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\tau}k_3^\nu k_3^\sigma \\
 & + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}k_1^\lambda k_3^\tau + \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}k_1^\lambda k_3^\tau + \eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\rho}k_1^\sigma k_3^\tau + \eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\rho}k_1^\sigma k_3^\tau \\
 & + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}k_2^\lambda k_3^\tau + \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}k_2^\lambda k_3^\tau - \eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}k_2^\lambda k_3^\tau + \eta^{\lambda\sigma}\eta^{\nu\rho}k_2^\mu k_3^\tau \\
 & + \eta^{\lambda\nu}\eta^{\rho\sigma}k_2^\mu k_3^\tau + \eta^{\lambda\sigma}\eta^{\mu\rho}k_2^\nu k_3^\tau + \eta^{\lambda\mu}\eta^{\rho\sigma}k_2^\nu k_3^\tau - \eta^{\lambda\sigma}\eta^{\mu\nu}k_2^\rho k_3^\tau \\
 & + \eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\sigma}k_2^\rho k_3^\tau + \eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\sigma}k_2^\rho k_3^\tau + 2\eta^{\lambda\rho}\eta^{\nu\sigma}k_3^\mu k_3^\tau + 2\eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\sigma}k_3^\nu k_3^\tau \\
 & - 2\eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\nu}k_3^\sigma k_3^\tau + 2\eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\rho}k_3^\sigma k_3^\tau + 2\eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\rho}k_3^\sigma k_3^\tau - \eta^{\lambda\tau}\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}k_1 \cdot k_2 \\
 & - \eta^{\lambda\sigma}\eta^{\mu\tau}\eta^{\nu\rho}k_1 \cdot k_2 - \eta^{\lambda\tau}\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}k_1 \cdot k_2 + \eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\tau}\eta^{\nu\sigma}k_1 \cdot k_2 - \eta^{\lambda\sigma}\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\tau}k_1 \cdot k_2 \\
 & + \eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\tau}k_1 \cdot k_2 + 2\eta^{\lambda\tau}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}k_1 \cdot k_2 - \eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\tau}\eta^{\rho\sigma}k_1 \cdot k_2 - \eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\tau}\eta^{\rho\sigma}k_1 \cdot k_2 \\
 & + 2\eta^{\lambda\sigma}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\tau}k_1 \cdot k_2 - \eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho\tau}k_1 \cdot k_2 - \eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\sigma}\eta^{\rho\tau}k_1 \cdot k_2 - 2\eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\nu}\eta^{\sigma\tau}k_1 \cdot k_2 \\
 & + 2\eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\rho}\eta^{\sigma\tau}k_1 \cdot k_2 + 2\eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\rho}\eta^{\sigma\tau}k_1 \cdot k_2 - \eta^{\lambda\tau}\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}k_1 \cdot k_3 - \eta^{\lambda\sigma}\eta^{\mu\tau}\eta^{\nu\rho}k_1 \cdot k_3 \\
 & - \eta^{\lambda\tau}\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}k_1 \cdot k_3 + 2\eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\tau}\eta^{\nu\sigma}k_1 \cdot k_3 - \eta^{\lambda\sigma}\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\tau}k_1 \cdot k_3 + 2\eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\tau}k_1 \cdot k_3 \\
 & + 2\eta^{\lambda\tau}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}k_1 \cdot k_3 - \eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\tau}\eta^{\rho\sigma}k_1 \cdot k_3 - \eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\tau}\eta^{\rho\sigma}k_1 \cdot k_3 + 2\eta^{\lambda\sigma}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\tau}k_1 \cdot k_3 \\
 & - \eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho\tau}k_1 \cdot k_3 - \eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\sigma}\eta^{\rho\tau}k_1 \cdot k_3 - 2\eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\nu}\eta^{\sigma\tau}k_1 \cdot k_3 + \eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\rho}\eta^{\sigma\tau}k_1 \cdot k_3 \\
 & + \eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\rho}\eta^{\sigma\tau}k_1 \cdot k_3 - \eta^{\lambda\tau}\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}k_2 \cdot k_3 - \eta^{\lambda\sigma}\eta^{\mu\tau}\eta^{\nu\rho}k_2 \cdot k_3 - \eta^{\lambda\tau}\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}k_2 \cdot k_3 \\
 & + 2\eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\tau}\eta^{\nu\sigma}k_2 \cdot k_3 - \eta^{\lambda\sigma}\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\tau}k_2 \cdot k_3 + 2\eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\tau}k_2 \cdot k_3 + \eta^{\lambda\tau}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}k_2 \cdot k_3 \\
 & - \eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\tau}\eta^{\rho\sigma}k_2 \cdot k_3 - \eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\tau}\eta^{\rho\sigma}k_2 \cdot k_3 + \eta^{\lambda\sigma}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\tau}k_2 \cdot k_3 - \eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho\tau}k_2 \cdot k_3 \\
 & - \eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\sigma}\eta^{\rho\tau}k_2 \cdot k_3 - 2\eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\nu}\eta^{\sigma\tau}k_2 \cdot k_3 + 2\eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\rho}\eta^{\sigma\tau}k_2 \cdot k_3 + 2\eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\rho}\eta^{\sigma\tau}k_2 \cdot k_3, \quad (3.97)
 \end{aligned}$$

donde vemos que hay alrededor de 171 términos para el vértice de interacción entre 3 gravitones [112], por lo que nos preguntamos que si el gravitón tiene 2 estados de helicidades, ¿Existirá una mejor descripción para este tipo de interacciones? Además, para describir un proceso de dispersión con este se necesita contraer término por término con sus respectivos vectores de polarización. Hacer este tipo de cálculos es muy complicado incluso utilizando programas computacionales como FeynCalc a nivel árbol.

3.4. El método de amplitudes en Supergravedad $N = 1$

La acción de una teoría de supergravedad pura incluiría un término cinético cuadrático para el gravitino, el cual es convenientemente descrito por un vector espinorial sin masa Ψ^μ , y un término cinético cuadrático para el gravitón de espín-2 descrito por un tensor simétrico $g_{\mu\nu}$. Así, el supermultiplete del gravitón contiene los dos grados de libertad bosónicos y los dos grados de libertad fermiónicos de un vector espinorial de Weyl sin masa o equivalentemente un vector espinorial de Majorana sin masa. Por tanto, el supermultiplete de supergravedad, $(2, \frac{3}{2})$, estaría compuesto por el Gravitón h (bosón de espín 2) descrito por la acción de Einstein-Hilbert (C.24), y su compañero supersimétrico el gravitino $\tilde{h}$ (fermión de espín $\frac{3}{2}$) descrito por la acción de Rarita-Schwinger

$$\mathcal{S}_{RS} = -\frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\Psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho \Psi_\sigma, \quad (3.98)$$

cuya ecuación de movimiento es

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho \Psi_\sigma = 0. \quad (3.99)$$

Por consiguiente, la acción supersimétrica global on-shell para el supermultiplete de supergravedad en $N = 1$ estaría dada de la siguiente forma

$$\mathcal{S}_{SUGRA} = \mathcal{S}_{RS} + \mathcal{S}_{EH}, \quad (3.100)$$

donde $\mathcal{S}_{RS}$ y $\mathcal{S}_{EH}$ incluyen a Ψ^μ y $h_{\mu\nu}$, respectivamente. Se dice que la formulación es *on-shell* porque toma en cuenta ecuaciones de movimiento asociadas a la acción de SUGRA. Por otro lado, un campo espinorial con índice vectorial extra pertenece a la representación del grupo homogéneo de Lorentz $[(\frac{1}{2}, 0) + (0, \frac{1}{2})] \times (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Para aislar la parte $(1, \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}, 1)$ del campo libre, se deben imponer las siguientes condiciones de irreducibilidad [119]:

$$\gamma_\mu \Psi^\mu = 0, \quad (3.101)$$

$$\partial_\mu \Psi^\mu = 0, \quad (3.102)$$

y una ecuación de Dirac

$$\not{\partial} \Psi^\mu = \gamma^\nu \partial_\nu \Psi^\mu = 0. \quad (3.103)$$

Estas condiciones pueden derivarse de consideraciones del "little group", en particular, de construir los operadores de Pauli-Lubanski y momento, y a partir de ellos construir los proyectores en los diferentes sub espacios con espín 3/2 y espín 1/2 [122].

3.4.1. Relaciones de KLT de $N = 1$ SUGRA

En esta sección vamos a derivar la forma para las relaciones de KLT de tal manera que podamos comparar estos resultados con aquellos resultados obtenidos usando la fórmula maestra siguiendo la aproximación de las teorías constructivas 4.1. Vamos a tomar (3.104) y (3.105) que vienen de [113], entonces contrayendolos con los tensores de polarización (3.57)-(3.62) para derivar expresiones para las interacciones de tres puntos hhh y $h\tilde{h}\tilde{h}$ en términos de las interacciones de la cromodinámica cuántica supersimétrica (SUSY-QCD, por sus siglas en inglés) ggg y $g\tilde{g}\tilde{g}$. Detalles de la lagrangiana de $\mathcal{N} = 1$ SUGRA en términos de los espinores de Weyl son presentados en el apéndice C, incluyendo la invarianza bajo transformaciones supersimétricas globales y de norma. El vértice de tres puntos con dos gravitinos y un gravitón, el cual es el producto de un vértice Super-Yang Mills que involucra dos gluinos y un gluon con el vértice Yang Mills que involucra puros gluones [113]:

$$\begin{aligned} V_{h\tilde{h}\tilde{h}}^{\mu,ab,\nu}(p_1, p_2, p_3) &= -V_{g\tilde{g}\tilde{g}}^a(p_1, p_2, p_3) \times V_{ggg}^{\mu b\nu}(p_1, p_2, p_3) \\ &= -i \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \gamma^a \right) \times \left(\frac{i}{\sqrt{2}} [(p_1 - p_2)^\nu \eta^{b\mu} + (p_2 - p_3)^\mu \eta^{b\nu} + (p_3 - p_1)^b \eta^{\mu\nu}] \right). \end{aligned} \quad (3.104)$$

Para el vértice de tres gravitones, el cual es el producto de dos vértices de Yang-Mills que involucra puros gluones, tenemos:

$$V_{hhh}^{\mu\nu,ab,\rho\sigma}(p_1, p_2, p_3) = -i \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \right)^2 \left((p_1 - p_2)^\rho \eta^{\mu a} + (p_2 - p_3)^\mu \eta^{a\rho} + (p_3 - p_1)^a \eta^{\rho\mu} \right) \times \quad (3.105)$$

$$\left((p_1 - p_2)^\sigma \eta^{b\nu} + (p_2 - p_3)^\nu \eta^{\sigma b} + (p_3 - p_1)^b \eta^{\nu\sigma} \right).$$

La constricción $p_1 + p_2 + p_3 = 0$ implica:

$$p_1 - p_2 = 2p_1 + p_3, \quad p_2 - p_3 = 2p_2 + p_1, \quad p_3 - p_1 = 2p_3 + p_2, \quad (3.106)$$

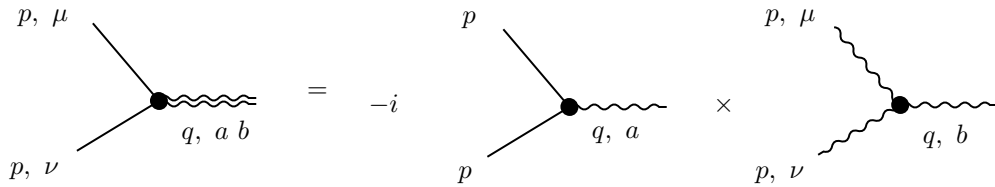
las relaciones (3.106) nos ayudan a reescribir convenientemente los vértices arriba mencionados de la siguiente manera:

$$V_{hhh}^{\mu,ab,\nu}(p_1, p_2, p_3) = -i \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \gamma^a \right) \times \left(\frac{i}{\sqrt{2}} [(2p_1 + p_3)^\nu \eta^{b\mu} + (2p_2 + p_1)^\mu \eta^{b\nu} + (2p_3 + p_2)^b \eta^{\mu\nu}] \right), \quad (3.107)$$

$$V_{hhh}^{\mu\nu,ab,\rho\sigma}(p_1, p_2, p_3) = -i \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \right)^2 \times \left((2p_1 + p_3)^\rho \eta^{\mu a} + (2p_2 + p_1)^\mu \eta^{a\rho} + (2p_3 + p_2)^a \eta^{\rho\mu} \right) \times$$

$$\left((2p_1 + p_3)^\sigma \eta^{b\nu} + (2p_2 + p_1)^\nu \eta^{\sigma b} + (2p_3 + p_2)^b \eta^{\nu\sigma} \right). \quad (3.108)$$

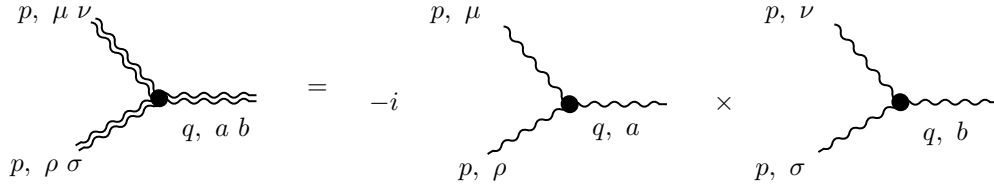
En forma diagramática se ven de la siguiente manera:



$$V_{hhh}^{\mu, ab, \nu}(p, q, p) = -i V_{gg\bar{g}}^a(p, q, p) \times V_{ggg}^{\mu, b, \nu}(p, q, p)$$

$$= -i \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \gamma^a \right) \times \left[\frac{i}{\sqrt{2}} \left((p - q)^\nu \eta^{b\mu} + (q - p)^\mu \eta^{b\nu} + (p - p)^b \eta^{\mu\nu} \right) \right]$$

Figura 3.3: Factorización del vértice del gravitino.



$$\begin{aligned}
 V_{hhh}^{\mu\nu, ab, \rho\sigma}(p, q, p) &= -i V_{ggg}^{\mu, a, \rho}(p, q, p) \times V_{ggg}^{\nu, b, \sigma}(p, q, p) \\
 &= -i \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \right)^2 \\
 &\quad \times \left[\frac{i}{\sqrt{2}} \left((p-q)^\rho \eta^{\mu a} + (q-p)^\mu \eta^{a\rho} + (p-p)^a \eta^{\rho\mu} \right) \right] \\
 &\quad \times \left[\frac{i}{\sqrt{2}} \left((p-q)^\sigma \eta^{b\nu} + (q-p)^\nu \eta^{\sigma b} + (p-p)^b \eta^{\nu\sigma} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Figura 3.4: Factorización del gravitón.

Ahora, vamos a calcular las interacciones de tres puntos para $\tilde{h}h \rightarrow \tilde{h}h$. Ya sabemos los vértices de tres puntos necesarios para calcular las amplitudes para hhh y $\tilde{h}h\tilde{h}$. Tenemos dos posibles configuraciones de helicidades que no desaparecen como lo vamos a mostrar a continuación. La amplitud de tres gravitones hhh con la configuración de helicidades $h_1 = +2, h_2 = +2$ y $h_3 = -2$ es

$$\widetilde{\mathcal{M}}(1^{+2}, 2^{+2}, 3^{-2}) = V_{hhh}^{\mu\nu, ab, \rho\sigma}(p_1, p_2, p_3) \times \epsilon_{h, \mu\nu}^{++}(p_1, q) \epsilon_{h, ab}^{++}(p_2, l) \epsilon_{h, \rho\sigma}^{--}(p_3, r), \quad (3.109)$$

con q, l, r siendo los momentos de referencias respectivos de p_1, p_2, p_3 . Aquí estamos contrayendo el vértice de tres gravitones (3.108) con los tensores de polarización (3.61), (3.62) y usando las condiciones de capa de masa (3.56), entonces tenemos nuestra amplitud de tres gravitones en términos de los vectores de polarización como

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\mathcal{M}}(1^{+2}, 2^{+2}, 3^{-2}) &= -4i \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \right)^2 \left((\epsilon_g^+(p_1, q) \cdot p_2) \times (\epsilon_g^+(p_2, l) \cdot \epsilon_g^-(p_3, r)) \right. \\
 &\quad \left. + (\epsilon_g^+(p_2, l) \cdot p_3) \times (\epsilon_g^-(p_3, r) \cdot \epsilon_g^+(p_1, q)) \right)^2, \quad (3.110)
 \end{aligned}$$

reescribiendo todas las contracciones de esta ecuación explícitamente en términos de los espinores de helicidad de Weyl usando (3.53) y (3.55), obtenemos

$$\begin{aligned}
 &(\epsilon_g^+(p_1, q) \cdot p_2) \times (\epsilon_g^+(p_2, l) \cdot \epsilon_g^-(p_3, r)) + (\epsilon_g^+(p_2, l) \cdot p_3) \times (\epsilon_g^-(p_3, r) \cdot \epsilon_g^+(p_1, q)) \\
 &= \frac{[12]\langle 2q \rangle}{\sqrt{2}\langle q1 \rangle} \times \frac{\langle 3l \rangle [2r]}{[3r]\langle l2 \rangle} + \frac{[23]\langle 3l \rangle}{\sqrt{2}\langle l2 \rangle} \times \frac{\langle 3q \rangle [1r]}{[3r]\langle q1 \rangle} \\
 &= \frac{\langle 3l \rangle \langle 3q \rangle}{\sqrt{2}\langle q1 \rangle \langle l2 \rangle [3r]} \times ([31][2r] + [23][1r]) \\
 &= \frac{\langle 3l \rangle \langle 3q \rangle}{\sqrt{2}\langle q1 \rangle \langle l2 \rangle [3r]} \times (-[3r][12]) \\
 &= -\frac{\langle l3 \rangle \langle q3 \rangle [12]}{\sqrt{2}\langle l2 \rangle \langle q1 \rangle} \\
 &= -\frac{[12]^3}{\sqrt{2}[23][31]}, \quad (3.111)
 \end{aligned}$$

donde hemos aplicado las siguientes relaciones: $[12]\langle 2q \rangle = [1]\langle 2|q \rangle = [1](-\langle 1| - \langle 3|)q \rangle = -[1]\langle 3|q \rangle = -[13]\langle 3q \rangle = [31]\langle 3q \rangle$ para llegar a (3.111). Hemos usado la identidad de Schouten (3.41) para los corchetes cuadrados. Finalmente, aplicamos conservación de momento (3.46) para $n = 4$, entonces tenemos las siguientes relaciones:

$$\langle l2 \rangle [21] + \langle l3 \rangle [31] = 0, \quad (3.112)$$

el cual implica

$$\frac{\langle l3 \rangle}{\langle l2 \rangle} = \frac{[12]}{[31]}. \quad (3.113)$$

Haciendo el mismo procedimiento para

$$\langle q1 \rangle [12] + \langle q3 \rangle [32] = 0, \quad (3.114)$$

entonces

$$\frac{\langle q3 \rangle}{\langle q1 \rangle} = \frac{[12]}{[23]}. \quad (3.115)$$

El resultado final es

$$\widetilde{\mathcal{M}}(1^{+2}, 2^{+2}, 3^{-2}) = -4i \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \right)^2 \left(-\frac{[12]^3}{\sqrt{2}[23][31]} \right)^2 = i \frac{[12]^6}{[23]^2[31]^2}. \quad (3.116)$$

Podemos observar que las amplitudes de tres puntos no dependen de la elección del momento de referencia. Las otras amplitudes en consideración son $\mathcal{M}(1^{-2}, 2^{-2}, 3^{+2})$, en este caso tenemos

$$\widetilde{\mathcal{M}}(1^{-2}, 2^{-2}, 3^{+2}) = V_{hhh}^{\mu\nu, ab, \rho\sigma}(p_1, p_2, p_3) \times \epsilon_{h, \mu\nu}^{--}(p_1, q) \epsilon_{h, ab}^{--}(p_2, l) \epsilon_{h, \rho\sigma}^{++}(p_3, r), \quad (3.117)$$

haciendo el mismo procedimiento que arriba, llegamos a que

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}(1^{-2}, 2^{-2}, 3^{+2}) &= -4i \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \right)^2 \times \left\{ (\epsilon_g^-(p_1, q) \cdot p_2) \times (\epsilon_g^-(p_2, l) \cdot \epsilon_g^+(p_3, r)) \right. \\ &\quad \left. + (\epsilon_g^-(p_2, l) \cdot p_3) \times (\epsilon_g^+(p_3, r) \cdot \epsilon_g^-(p_1, q)) \right\}^2 \\ &= -4i \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \right)^2 \times \left(-\frac{\langle 12 \rangle^3}{\sqrt{2}\langle 23 \rangle \langle 31 \rangle} \right)^2 \\ &= i \frac{\langle 12 \rangle^6}{\langle 23 \rangle^2 \langle 31 \rangle^2}. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Donde de nuevo hemos aplicado la identidad de Schouten (3.41) y conservación de momento (3.46). Por otro lado, la amplitud de dos gravitinos y un gravitón $\widetilde{h}h\widetilde{h}$ con helicidades $h_1 = +\frac{3}{2}, h_2 = +2, h_3 = -\frac{3}{2}$ es

$$\widetilde{\mathcal{M}}(1^{+\frac{3}{2}}, 2^{+2}, 3^{-\frac{3}{2}}) = V_{hh\widetilde{h}}^{\mu, ab, \nu}(p_1, p_2, p_3) \times \widetilde{\epsilon}_{h, \mu}^{+}(p_1, q) \epsilon_{h, ab}^{++}(p_2, l) \epsilon_{h, \nu}^{--}(p_3, r), \quad (3.119)$$

En las anteriores expresiones, vamos a usar el vértice (3.107) contrayendo con los campos tensoriales dados por (3.57), (3.60), (3.61). Usando las condiciones de capa de masa para simplificar aun más, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}(1^{+\frac{3}{2}}, 2^{+2}, 3^{-\frac{3}{2}}) &= i[\widetilde{\epsilon}_g^{+}(p_1) \cdot \epsilon_g^{+}(p_2, l) \epsilon_g^{--}(p_3) \times [(\epsilon_g^{+}(p_1, q) \cdot p_2)(\epsilon_g^{--}(p_3, r) \cdot \epsilon_g^{+}(p_2, l)) \\ &\quad + (\epsilon_g^{+}(p_2, l) \cdot p_3)(\epsilon_g^{--}(p_3, r) \cdot \epsilon_g^{+}(p_1, q))]], \end{aligned} \quad (3.120)$$

donde $\tilde{\epsilon}_g^+(p_1)$ y $\tilde{\epsilon}_g^-(p_3)$ son gluinos asociados a gravitinos mediante las relaciones de KLT. El siguiente paso es reescribir todo en términos de espinores de helicidad de Weyl, usando definiciones dados por (3.52) y (3.53, 3.55),

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}(1^{+\frac{3}{2}}, 2^{+2}, 3^{-\frac{3}{2}}) &= i \left([1] \left(\frac{\sqrt{2}}{\langle l2 \rangle} (|2\rangle \langle l| + |l\rangle \langle 2|) \right) |3\rangle \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{[12]\langle 2q \rangle}{\sqrt{2}\langle q1 \rangle} \times \frac{\langle 3l \rangle [2r]}{[3r]\langle l2 \rangle} + \frac{[23]\langle 3l \rangle}{\sqrt{2}\langle l2 \rangle} \times \frac{\langle 3q \rangle [1r]}{[3r]\langle q1 \rangle} \right) \right), \end{aligned} \quad (3.121)$$

después de hacer algunas simplificaciones usando $[12]\langle 2q \rangle = [31]\langle 3q \rangle$ y la identidad de Schouten para espinores cuadrados, obtenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}(1^{+\frac{3}{2}}, 2^{+2}, 3^{-\frac{3}{2}}) &= i \frac{[12]\langle l3 \rangle \langle 3q \rangle \langle 3l \rangle}{\langle l2 \rangle^2 [3r]\langle q1 \rangle} \times (-[3r][12]) \\ &= -i \frac{[12]^2 \langle l3 \rangle^2 \langle q3 \rangle}{\langle l2 \rangle^2 \langle q1 \rangle}. \end{aligned} \quad (3.122)$$

El último paso es aplicar conservación de momento,

$$\langle l2 \rangle [21] + \langle l3 \rangle [31] = 0, \quad (3.123)$$

y esto implica

$$\frac{\langle l3 \rangle}{\langle l2 \rangle} = \frac{[12]}{[31]}, \quad (3.124)$$

y

$$\langle q1 \rangle [12] + \langle q3 \rangle [32] = 0, \quad (3.125)$$

$$\frac{\langle q3 \rangle}{\langle q1 \rangle} = \frac{[12]}{[23]}, \quad (3.126)$$

por lo tanto, la forma final de la amplitud es

$$\widetilde{\mathcal{M}}(1^{+\frac{3}{2}}, 2^{+2}, 3^{-\frac{3}{2}}) = i \frac{[12]^5}{[23][31]^2}. \quad (3.127)$$

La siguiente configuración de helicidades es $\widetilde{\mathcal{M}}(1^{-\frac{3}{2}}, 2^{-2}, 3^{+\frac{3}{2}})$, y la amplitud correspondiente es

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}(1^{-\frac{3}{2}}, 2^{-2}, 3^{+\frac{3}{2}}) &= i [\tilde{\epsilon}_g^-(p_1) \not{\epsilon}_g^-(p_2, l) \epsilon_g^+(p_3) \times [(\epsilon_g^-(p_1, q) \cdot p_2)(\epsilon_g^-(p_2, l) \cdot \epsilon_g^+(p_3, r)) \\ &\quad + (\epsilon_g^-(p_2, l) \cdot p_3)(\epsilon_g^-(p_1, q) \cdot \epsilon_g^+(p_3, r))], \end{aligned} \quad (3.128)$$

aquí usamos (3.51) y escribiendo todo en términos de espinores de Weyl tenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}(1^{-\frac{3}{2}}, 2^{-2}, 3^{+\frac{3}{2}}) &= i \left(\langle 1 | \left(\frac{\sqrt{2}}{[l2]} (|2\rangle [l] + |l\rangle \langle 2|) \right) |3\rangle \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{\langle 12 \rangle [2q]}{\sqrt{2}[1q]} \times \frac{\langle 2r \rangle [3l]}{[2l]\langle r3 \rangle} + \frac{\langle 23 \rangle [3l]}{\sqrt{2}[2l]} \times \frac{\langle 1r \rangle [3q]}{[1q]\langle r3 \rangle} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.129)$$

Ahora, aplicamos $\langle 12 \rangle [2q] = \langle 31 \rangle [3q]$ y la identidad de Schouten nos lleva a

$$\widetilde{\mathcal{M}}(1^{-\frac{3}{2}}, 2^{-2}, 3^{+\frac{3}{2}}) = i \frac{\langle 12 \rangle^2 [l3]^2 [q3]}{[l2]^2 [q1]}. \quad (3.130)$$

De acuerdo a la conservación de momento (3.46),

$$[l2]\langle 21 \rangle + [l3]\langle 31 \rangle = 0, \quad (3.131)$$

así

$$\frac{[l3]}{[l2]} = \frac{\langle 12 \rangle}{\langle 31 \rangle}, \quad (3.132)$$

y $[q1]\langle 12 \rangle + [q3]\langle 32 \rangle = 0$, implica

$$\frac{[q3]}{[q1]} = \frac{\langle 12 \rangle}{\langle 23 \rangle}. \quad (3.133)$$

Finalmente, llegamos a

$$\widetilde{\mathcal{M}}(1^{-\frac{3}{2}}, 2^{-2}, 3^{+\frac{3}{2}}) = i \frac{\langle 12 \rangle^5}{\langle 23 \rangle \langle 31 \rangle^2}. \quad (3.134)$$

Podemos observar que el proceso para calcular estas tres amplitudes de tres puntos parciales no depende de la elección de los momentos de referencia q, l o r . Suprimiendo todas las constantes de estructura, notamos que los resultados (3.116), (3.118), (3.127) y (3.134) van a coincidir con los resultados que se van a presentar más adelante en la tabla (4.1) en sus estructura espinorial ya sea en términos de $\langle ij \rangle$ o $[ij]$.

3.5. El efecto Compton Gravitón-Gravitino

La interacción del Gravitón con la materia ha sido estudiado extensivamente desde diferentes puntos de vista sobre los años. Por ejemplo, la sección eficaz del efecto Compton del gravitón ha sido calculado usando métodos de helicidades en [123] y física de gravitinos ha sido estudiado en diferentes escenarios por [124, 125]. En esta sección, estamos interesados en calcular la amplitud total del efecto Compton de supergravedad (SUGRA Compton), el cual es un proceso de dispersión entre gravitones y gravitinos. Vamos a mostrar que nuestros resultados de esta sección construidos de la forma tradicional a la Feynman, con las reglas de Feynman derivadas por Bjerrum-Bohr y Englund [113], van a coincidir con las amplitudes parciales $\widetilde{\mathcal{M}}$ de la sección 4.3.4 usando los métodos de recursión de BCFW. Para obtener la amplitud total para el efecto Compton de supergravedad, necesitamos las siguientes diagramas de Feynman:

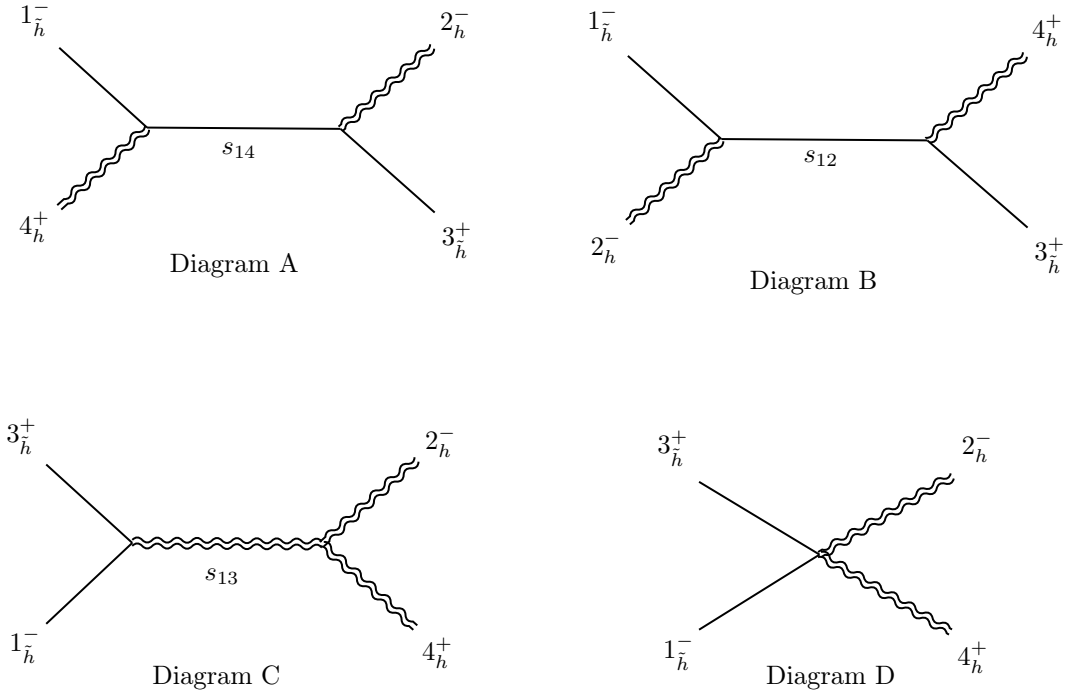


Figura 3.5: Feynman Diagrams

donde se han fijado la configuración de helicidades estándar para cada diagrama, $\tilde{\mathcal{M}}(1_h^-, 2_h^-, 3_h^+, 4_h^+)$. También necesitamos dos propagadores, uno para el gravitino y otro para el gravitón. El propagador para el gravitino se escoge como:

$$P_{\tilde{h}\tilde{h},\mu\nu}(p) = \frac{-i \not{p} \eta_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}, \quad (3.135)$$

y para el gravitón:

$$P_{hh,\mu a, \nu b}(p) = \frac{i \eta_{\mu\nu} \eta_{ab}}{p^2 + i\epsilon}. \quad (3.136)$$

Estos son iguales a [113, 126].

3.5.1. El diagrama D y el vértice de cuatro puntos

Empezamos por calcular la amplitud del diagrama D con el vértice de cuatro puntos. De acuerdo a Bjerrum-Bohr y Engelund [113], el vértice de cuatro puntos para dos gravitinos y dos gravitones es

$$\begin{aligned} V_{hhhh}^{\mu,\nu,ab,\kappa\lambda}(p_1, p_3, p_2, p_4) = \frac{i}{8} \Big\{ & 3(\eta^{\mu b} \eta^{\nu \lambda} - \eta^{\mu \lambda} \eta^{\nu b})[(\not{p}_2 - \not{p}_4) \eta^{a\kappa} + \gamma^a (-2p_2 - p_4)^\kappa \\ & + \gamma^\kappa (2p_4 + p_2)^a] - (\gamma^\kappa (\not{p}_4 + \not{p}_1) \gamma^a + \gamma^a (\not{p}_1 + \not{p}_2) \gamma^\kappa) \\ & (2\eta^{\mu\nu} \eta^{b\lambda} - \eta^{\mu b} \eta^{\nu \lambda} - \eta^{\mu \lambda} \eta^{\nu b}) \Big\}. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Contrayendo este vértices con los tensores de polarización (3.58, 3.59, 3.62, 3.61), lo que nos lleva a la siguiente amplitud parcial

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{M}}_D(1^{-\frac{3}{2}}, 2^{-2}, 3^{+\frac{3}{2}}, 4^{-2}) &= V_{\widetilde{h}hh}^{\mu,\nu,ab,\kappa\lambda}(p_1, p_3, p_2, p_4) \times \widetilde{\epsilon}_{h,\mu}^-(p_1, q) \epsilon_{h,\nu}^+(p_3, r) \epsilon_{h,ab}^{--}(p_2, l) \epsilon_{h,\kappa\lambda}^{++}(p_4, j) \\
&= \frac{i}{8} \left\{ -3(\epsilon_g^-(p_1, q) \cdot \epsilon_g^+(p_4, j))(\epsilon_g^+(p_3, r) \cdot \epsilon_g^-(p_2, l)) \times \widetilde{\epsilon}_g^-(p_1, q) \epsilon_g^+(p_3, r) \right. \\
&\quad \times [(\not{p}_2 - \not{p}_4)(\epsilon_g^-(p_2, l) \cdot \epsilon_g^+(p_4, j)) + \not{\epsilon}_g^-(p_2, l) \times (-2\epsilon_g^+(p_4, j) \cdot p_2) \\
&\quad + \not{\epsilon}_g^+(p_4, j) \times (2\epsilon_g^-(p_2, l) \cdot p_4)] \\
&\quad - [\not{\epsilon}_g^+(p_4, j)(\not{p}_4 + \not{p}_1) \not{\epsilon}_g^-(p_2, l) + \not{\epsilon}_g^-(p_2, l)(\not{p}_1 + \not{p}_2) \not{\epsilon}_g^+(p_4, j)] \\
&\quad \times [2(\epsilon_g^-(p_1, q) \cdot \epsilon_g^+(p_3, r)) - (\epsilon_g^-(p_1, q) \cdot \epsilon_g^+(p_4, j))(\epsilon_g^+(p_3, r) \cdot \epsilon_g^-(p_2, l))] \\
&\quad \left. \times \widetilde{\epsilon}_g^-(p_1, q) \epsilon_g^+(p_3, r) \right\}. \tag{3.138}
\end{aligned}$$

Donde hemos reescrito los tensores de polarización de gravitones y gravitinos en términos de los vectores de polarización de los gluones y gluinos debido a las relaciones de KLT para gravedad y teorías de norma. Aquí $\widetilde{\epsilon}_g^-(p_1) = \langle 1 |$ and $\epsilon_g^+(p_3) = |3\rangle$. Escogemos los momentos de referencia de las partículas en el estado inicial con momento p_1 y p_2 como $q = l = 4$, y las partículas del estado final con momento p_3 y p_4 como $r = j = 1$ ¹, usando esta información en las ecuaciones (3.51 - 3.55), todas las contracciones desaparecen, excepto las siguientes:

$$\epsilon_g^-(p_2, l) \cdot \epsilon_g^+(p_3, r) = \frac{\langle 21 \rangle [34]}{[24] \langle 13 \rangle}, \tag{3.139}$$

$$\epsilon_g^+(p_2, l) \cdot p_1 = \frac{[42] \langle 21 \rangle}{\sqrt{2} \langle 14 \rangle}. \tag{3.140}$$

Los términos en la amplitud (3.138) que llegan a ser cero, son las siguientes:

$$\epsilon_g^-(p_1, q) \cdot \epsilon_g^+(p_4, j) = \epsilon_g^-(p_2, l) \cdot \epsilon_g^+(p_4, j) = \epsilon_g^-(p_1, q) \cdot \epsilon_g^+(p_3, r) = \epsilon_g^-(p_2, l) \cdot p_4 = 0, \tag{3.141}$$

por lo tanto

$$\widetilde{\mathcal{M}}_D(1^{-\frac{3}{2}}, 2^{-2}, 3^{+\frac{3}{2}}, 4^{-2}) = 0. \tag{3.142}$$

3.5.2. Diagram de Feynman A

La amplitud parcial para el canal s_{14} de acuerdo a los diagramas de Feynman, donde contraemos los tensores de polarización con el vértice de tres puntos y el propagador es dado por

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{M}}_A(1^{-\frac{3}{2}}, 2^{-2}, 3^{+\frac{3}{2}}, 4^{-2}) &= \widetilde{\epsilon}_{h,\kappa}^-(p_1, q) V_{\widetilde{h}hh}^{\kappa,ab,\mu}(p_1, p_4, p) \epsilon_{h,ab}^{++}(p_4, j) \times P_{\widetilde{h}h,\mu\nu}(p) \\
&\quad \times \epsilon_{h,\tau}^+(p_3, r) V_{\widetilde{h}hh}^{\tau,\rho\sigma,\nu}(p_3, p_2, p) \epsilon_{h,\rho\sigma}^{--}(p_2, l) \\
&= \widetilde{\epsilon}_g^-(p_1) \left\{ \frac{i}{2} \not{\epsilon}_g^+(p_4, j) [(2p_1 + p)_\nu (\epsilon_g^-(p_1, q) \cdot \epsilon_g^+(p_4, j))] \right. \\
&\quad \left. + 2(\epsilon_g^-(p_1, q) \cdot p_4) \epsilon_{g,\nu}^+(p_4, j) + 2(\epsilon_g^+(p_4, j) \cdot p) \epsilon_{g,\nu}^-(p_1, q) \right\} \\
&\quad \times \left(\frac{-i \not{p}}{s_{14}} \right) \times \epsilon_g^+(p_3) \left\{ \frac{i}{2} \not{\epsilon}_g^-(p_2, l) [(2p_3 + p)^\nu (\epsilon_g^-(p_2, l) \cdot \epsilon_g^+(p_3, r))] \right. \\
&\quad \left. + 2(\epsilon_g^+(p_3, r) \cdot p_2) \epsilon_{g,\nu}^-(p_2, l) + 2(\epsilon_g^-(p_2, l) \cdot p) \epsilon_{g,\nu}^{+,\nu}(p_3, r) \right\}. \tag{3.143}
\end{aligned}$$

¹Vamos a usar estos momentos de referencia para todos los diagramas de Feynman

En la primera igualdad todo es escrito en términos del gravitón-gravitino, donde el propagador del gravitino es dado por (3.135), la segunda igualdad es escrito en términos de gluones y gluinos debido a la relaciones de KLT para gravedad y teorías de Yang-Mills. Ahora, debido a la presencia de estas condiciones de capa de masa $\epsilon_g^-(p_1, q) \cdot \epsilon_g^+(p_4, j) = \epsilon_g^-(p_1, q) \cdot p_4 = \epsilon_g^+(p_4, j) \cdot p = 0$, con $p = p_1 + p_4$, la amplitud desaparece

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{4A}(1^{-\frac{3}{2}}, 2^{-2}, 3^{+\frac{3}{2}}, 4^{-2}) = 0. \quad (3.144)$$

Estos resultados van a coincidir con las que se van a calcular en (4.142). Además, de acuerdo a las ecuaciones:

$$s_{12} : \quad A_4(1_g^-, 2_g^-, 3_g^+, 4_g^+) = \frac{\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle}, \quad (3.145)$$

$$s_{13} : \quad A_4(1_g^-, 3_g^+, 2_g^-, 4_g^+) = \frac{\langle 21 \rangle^4}{\langle 14 \rangle \langle 42 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle}, \quad (3.146)$$

$$s_{14} : \quad A_4(1_g^-, 4_g^+, 2_g^-, 3_g^+) = 0, \quad (3.147)$$

$$s_{12} : \quad A_4(1_g^-, 2_g^-, 3_g^+, 4_g^+) = \frac{\langle 12 \rangle^3}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle}, \quad (3.148)$$

$$s_{13} : \quad A_4(1_g^-, 3_g^+, 2_g^-, 4_g^+) = \frac{\langle 21 \rangle^3}{\langle 14 \rangle \langle 42 \rangle \langle 31 \rangle}, \quad (3.149)$$

$$s_{14} : \quad A_4(1_g^-, 4_g^+, 2_g^-, 3_g^+) = 0, \quad (3.150)$$

las relaciones de KLT nos dicen que para dos gravitinos y dos gravitones se obtiene

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{As_{14}}(1_h^-, 2_h^-, 3_h^+, 4_h^+) = -is_{14} \mathcal{A}_4(1_g^-, 4_g^+, 2_g^-, 3_g^+) \times \mathcal{A}_4(1_g^-, 2_g^-, 3_g^+, 4_g^+) = 0. \quad (3.151)$$

Por lo tanto, este canal no contribuye del todo al proceso completo.

3.5.3. Diagram de Feynman B

La amplitud parcial para el canal s_{12} usando las reglas de Feynman se tiene

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_B(1^{-\frac{3}{2}}, 2^{-2}, 3^{+\frac{3}{2}}, 4^{-2}) &= \widetilde{\epsilon}_{h,\kappa}^-(p_1, q) V_{hh\tilde{h}}^{\kappa,ab,\mu}(p_1, p_2, p) \epsilon_{h,ab}^-(p_2, l) \times P_{h\tilde{h},\mu\nu}(p) \\ &\quad \times \epsilon_{h,\tau}^+(p_3, r) V_{hh\tilde{h}}^{\tau,\rho\sigma,\nu}(p_3, p_4, p) \epsilon_{h,\rho\sigma}^{++}(p_4, j) \\ &= \widetilde{\epsilon}_g^-(p_1) \not{\epsilon}_g^-(p_2, l) \times \not{p} \times \not{\epsilon}_g^+(p_4, j) \epsilon_g^+(p_3) \\ &\quad \times \left(\frac{i}{s_{12}} (\epsilon_g^-(p_1, q) \cdot p_2) (\epsilon_g^+(p_4, j) \cdot p_3) (\epsilon_g^-(p_2, l) \cdot \epsilon_g^+(p_3, r)) \right). \end{aligned} \quad (3.152)$$

De nuevo, en la primera igualdad todo es escrito en términos de gravitones y gravitinos, la segunda igualdad está en términos de gluones y gluinos donde $s_{12} = \langle 34 \rangle [43]$, $\widetilde{\epsilon}_g^-(p_1) = \langle 1|$, $\epsilon_g^+(p_3) = |3\rangle$ y el propagador que usamos es (3.135). De acuerdo a las expresiones (3.51 - 3.55), tenemos las siguientes relaciones:

$$\not{\epsilon}_g^-(p_2, l) = \frac{\sqrt{2}}{[42]} (|2\rangle [4| + |4\rangle \langle 2|), \quad (3.153)$$

$$\not{\epsilon}_g^+(p_4, j) = \frac{\sqrt{2}}{\langle 14 \rangle} (|4\rangle \langle 1| + |1\rangle [4|), \quad (3.154)$$

$$\not{p} = \not{p}_1 + \not{p}_2 = |1\rangle [1| + |1\rangle \langle 1| + |2\rangle [2| + |2\rangle \langle 2|, \quad (3.155)$$

$$(\epsilon_g^-(p_1, q) \cdot p_2) = \frac{\langle 12 \rangle [24]}{\sqrt{2} [14]}, \quad (\epsilon_g^+(p_4, j) \cdot p_3) = \frac{[43] \langle 31 \rangle}{\sqrt{2} \langle 14 \rangle}, \quad (\epsilon_g^-(p_2, l) \cdot \epsilon_g^+(p_3, r)) = \frac{\langle 21 \rangle [34]}{[24] \langle 13 \rangle}. \quad (3.156)$$

recordemos que nuestros momentos de referencia son $q = l = 4$ y $r = j = 1$. Entonces sustituyendo todo esto en (3.152), la respuesta final es

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_B(1^{-\frac{3}{2}}, 2^{-2}, 3^{+\frac{3}{2}}, 4^{-2}) &= i \frac{\langle 12 \rangle^2 [43] \langle 12 \rangle^2 [43]^2}{\langle 34 \rangle [43] \langle 14 \rangle^2 [14]} \\ &= i \frac{\langle 12 \rangle^6 [34]}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle^2}. \end{aligned} \quad (3.157)$$

Donde

$$\frac{[34]}{[14]} = -\frac{\langle 21 \rangle}{\langle 23 \rangle}.$$

Podemos ver que los resultados de (3.157) coinciden con los obtenidos en (4.151) usando las relaciones de BFCW. Además, usando las relaciones de KLT para dos gravitinos y dos gravitones para este diagrama D, obtenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_{Bs_{13}}(1_h^-, 2_h^-, 3_h^+, 4_h^+) &= -is_{13} \mathcal{A}_4(1_g^-, 3_g^+, 2_g^-, 4_g^+) \times \mathcal{A}_4(1_g^-, 2_g^-, 3_g^+, 4_g^+) \\ &= -is_{13} \frac{\langle 21 \rangle^3}{\langle 14 \rangle \langle 42 \rangle \langle 31 \rangle} \times \frac{\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle} \\ &= -i \frac{\langle 12 \rangle^6 [34]}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle^2}, \end{aligned} \quad (3.158)$$

donde $s_{13} = \langle 13 \rangle [31]$ y $\langle 21 \rangle [13] = \langle 42 \rangle [43]$.

3.5.4. Diagram de Feynman C

Siguiendo el mismo procedimiento que anteriormente, las amplitudes parciales para el canal s_{13} es

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_C(1^{-\frac{3}{2}}, 2^{-2}, 3^{+\frac{3}{2}}, 4^{-2}) &= \widetilde{\epsilon}_{h,\kappa}^-(p_1, q) V_{hh}^{\kappa, \mu\theta, \tau}(p_1, p, p_3) \epsilon_{h,\tau}^+(p_3, r) \times P_{hh, \mu\theta, \nu\gamma}(p) \\ &\quad \times \epsilon_{h,\rho\sigma}^{--}(p_2, l) V_{hh}^{\rho\sigma, \nu\gamma, ab}(p_2, p, p_4) \epsilon_{h,ab}^{++}(p_4, j) \\ &= \frac{-i}{4s_{13}} \widetilde{\epsilon}_g^-(p_1) \times \\ &\quad \left\{ 8(\epsilon_g^-(p_1, q) \cdot p_3)(\epsilon_g^-(p_2, l) \cdot \epsilon_g^+(p_3, r))(\epsilon_g^+(p_4, j) \cdot p_2)^2 \not{\epsilon}_g^-(p_2, l) \right\} \\ &\quad \times \epsilon_g^+(p_3), \end{aligned} \quad (3.159)$$

De nuevo, debido a las relaciones de KLT, reescribimos la amplitud en términos de gluones y gluinos, donde $s_{13} = \langle 24 \rangle [42]$ y usando los siguientes resultados:

$$(\epsilon_g^-(p_1) \cdot p_3) = \frac{\langle 13 \rangle [34]}{\sqrt{2} [14]}, \quad (\epsilon_g^-(p_2) \cdot \epsilon_g^+(p_3)) = \frac{\langle 21 \rangle [34]}{[24] \langle 13 \rangle}, \quad (\epsilon_g^+(p_4) \cdot p_2) = \frac{[42] \langle 21 \rangle}{\sqrt{2} \langle 14 \rangle}, \quad (3.160)$$

$$\widetilde{\epsilon}_g^-(p_1) \not{\epsilon}_g^-(p_2) \epsilon_g^+(p_3) = \frac{\sqrt{2} \langle 12 \rangle [43]}{[42]}, \quad (3.161)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_C(1^{-\frac{3}{2}}, 2^{-2}, 3^{+\frac{3}{2}}, 4^{-2}) &= -i \frac{\langle 12 \rangle^4 [34]^3 [42]^2}{\langle 24 \rangle [42] [14] [42] \langle 14 \rangle^2 [42]} \\ &= i \frac{\langle 12 \rangle^6 [34]}{\langle 13 \rangle \langle 32 \rangle \langle 24 \rangle \langle 41 \rangle^2}. \end{aligned} \quad (3.162)$$

Además, aplicando relaciones de KLT en el diagrama C, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\mathcal{M}}_{Cs_{12}}(1_h^-, 2_h^-, 3_h^+, 4_h^+) &= -is_{12}\mathcal{A}_4(1_g^-, 2_g^-, 3_g^+, 4_g^+) \times \mathcal{A}_4(1_g^-, 3_g^+, 2_g^-, 4_g^+) \\
 &= -is_{12} \frac{\langle 12 \rangle^3}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle} \times \frac{\langle 21 \rangle^4}{\langle 14 \rangle \langle 42 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle} \\
 &= i \frac{\langle 12 \rangle^6 [34]}{\langle 13 \rangle \langle 32 \rangle \langle 24 \rangle \langle 41 \rangle^2}, \tag{3.163}
 \end{aligned}$$

con $s_{12} = \langle 34 \rangle [43]$. Notamos que, la expresión (3.162) coincide con las obtenidas con el procedimiento BCFW (4.167). Finalmente, la amplitud total para el efecto Compton de supergravedad llega ser

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{Total} &= \widetilde{g}_{123}g_{123}\widetilde{\mathcal{M}}_B + g_{123}\widetilde{G}_{123}\widetilde{\mathcal{M}}_C \\
 &= \widetilde{g}_{123}g_{123} \left(-i \frac{\langle 12 \rangle^6 [34]}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle^2} \right) + g_{123}\widetilde{G}_{123} \left(i \frac{\langle 12 \rangle^6 [34]}{\langle 13 \rangle \langle 32 \rangle \langle 24 \rangle \langle 41 \rangle^2} \right) \\
 &= i\langle 12 \rangle [34] \left(g_{123}\widetilde{G}_{123} \frac{\langle 12 \rangle^5}{\langle 13 \rangle \langle 32 \rangle \langle 24 \rangle \langle 41 \rangle^2} - \widetilde{g}_{123}g_{123} \frac{\langle 12 \rangle^5}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle^2} \right) \tag{3.164}
 \end{aligned}$$

3.6. El formalismo de los espín espinores o Nima-Huang-Huang

En los últimos años se ha visto un gran progreso en cuanto a la comprensión de las amplitudes de dispersión tanto en teorías de norma como en gravedad. Una torre de amplitudes pueden ser calculadas ahora incluso con lápiz y papel, los cuales hace 10 años se creían imposibles, ahora usando la tecnología moderna llamada por algunos como métodos de capa de masa (On-shell methods) o simplemente métodos de amplitudes son posibles calcularlos[8, 11, 127, 128]. Mientras nuestros colisionadores de partículas llegan a ser más poderosos, el modelo estándar también lo ha hecho y la necesidad de calcular procesos de dispersión con un gran número de partículas en el estado final se ha incrementado a tal punto que los diagramas de Feynman se han vuelto poco prácticos incluso usando computadoras modernas. Calcular amplitudes de dispersión de mayor orden actualmente requiere el uso de teoría de perturbaciones, el cual requiere de introducir algunas complicaciones como fijar la norma, fantasmás (ghosts), integrales de Feynman, coeficientes de renormalización, por mencionar algunos. Por otro lado, la lagrangiana esta aun presente pero permanece oculta detrás de todas las herramientas computacionales que se usan. Por ejemplo, en el caso de la dispersión de gluones el número de diagramas de Feynman vaya aumentando conforme se incrementan el número de partículas en el estado final, para el proceso de dos gluones en el estado inicial y dos gluones en el estado final se requieren 4 diagramas de Feynman, pero para el proceso de dos gluones en el estado inicial y ocho gluones en el estado final se requieren alrededor de un millón de diagramas de Feynman; y no solo es la cantidad de diagramas que se necesitan sino también su complejidad para cada diagrama individual. Hay programas especializados que nos permiten calcular estos procesos, tal es el caso de CalcHEP [129], el cual puede calcular solamente uno de los diagramas cuadrados para el proceso de dos gluones a cinco gluones ($n = 7$), para este proceso se requieren 3 500 líneas de código, solamente para un diagrama de los 2 485 diagramas que se requieren para este proceso. Además, cada diagrama individual de gluones no es invariante de norma, por lo que no se puede representar una trayectoria física de la partícula, así que su interpretación no es clara del todo. De este modo fue que la fórmula de Parke-Taylor conmociono a la comunidad científica en su momento [6]. Esto ha llevado a buscar otros formalismos más simples para obtener amplitudes de dispersión. Tomó tiempo para generalizar estas técnicas hasta obtener una forma recursiva para calcular estas amplitudes, las cuales veremos más adelante en (4.3). Nima Arkani Hammed, Huang y Huang extendieron el formalismo de los espinores de helicidad para partículas sin masa, el cual vimos en la sección 3.2, en una manera natural cuando ellos introducen los

espín espinos [17]. Como ya hemos visto las amplitudes de dispersión transforman bajo boost y rotaciones bajo el grupo pequeño que es sub grupo del grupo de Lorentz. Es más, el pequeño grupo para partículas sin masa es el grupo de las helicidades y equivale a un cambio de fase bajo rotaciones mientras que el grupo pequeño para las partículas masivas es el grupo de espín $SU(2)$. La amplitud, entonces, transforma como un producto directo del pequeño grupo para cada partícula externa de la amplitud. La razón del porque los espinos de helicidad $|p\rangle$ y $[p]$ son tan útiles para las amplitudes de partículas sin masa es que cada uno de ellos transforma bajo un producto directo del grupo de las helicidades y el grupo de Lorentz $SL(2, \mathbb{C})$. Cuando un producto interno se toma ya sea $\langle pq \rangle$ o $[pq]$, las transformaciones del $SL(2, \mathbb{C})$ se cancelan entre si exactamente resultando en un producto invariante de Lorentz mientras que las transformaciones de las helicidades no lo hace. Es decir, estos productos transforman bajo un producto directo de las transformaciones de las helicidades para las partículas p_i y p_j . Esto es exactamente la mínima manera que se necesita para escribir una amplitud que involucre estas partículas.

3.6.1. Espinors de helicidad másivos

Como de costumbre, utilizaremos las matrices $\sigma_{a\dot{a}}^\mu$ para convertir entre cuatro momentos p^μ y la matriz 2×2 $p_{a\dot{a}} = p_\mu \sigma_{a\dot{a}}^\mu$. Nótese que $\det p_{a\dot{a}} = m^2$, por lo que existe una diferencia obvia entre partículas sin masa y partículas con masa. Para partículas sin masa, tenemos $\det p_{a\dot{a}} = 0$ y, por lo tanto, la matriz $p_{a\dot{a}}$ tiene rango 1. Por lo tanto, podemos escribirla como el producto directo de dos 2-vectores $\lambda, \tilde{\lambda}$ como

$$p_{a\dot{a}} = \lambda_a \tilde{\lambda}_{\dot{a}}.$$

Para momentos complejos generales, $\lambda_a, \tilde{\lambda}_{\dot{a}}$ son vectores complejos bidimensionales independientes. Para momentos reales en el espacio de Minkowski, $p_{a\dot{a}}$ es hermítico, por lo que tenemos $\tilde{\lambda}_{\dot{a}} = \pm (\lambda_a)^*$ (el signo depende de si la energía se considera positiva o negativa). A menudo, la introducción de estas variables de *espinor-helicidad* está motivada por el deseo de representar explícitamente el cuaternario $p_{a\dot{a}}$ (con restricciones en la capa de masa) mediante $\lambda_a, \tilde{\lambda}_{\dot{a}}$ sin restricciones. Pero las variables de espinor-helicidad también desempeñan otro papel conceptualmente importante: son los objetos que se transforman con precisión bajo los grupos de Lorentz y del grupo pequeño. Por lo tanto, si bien las amplitudes de las partículas sin masa no son funciones de los momentos ni de los vectores de polarización (o mejor aún, solo se representan de forma redundante), sí son funciones directas de las variables de espinor-helicidad. La relación con el pequeño grupo está claramente sugerida por el hecho de que es imposible asociar de forma única un par $\lambda_a, \tilde{\lambda}_{\dot{a}}$ con algún $p_{a\dot{a}}$, ya que siempre podemos reescalar $\lambda_a \rightarrow w^{-1} \lambda_a, \tilde{\lambda}_{\dot{a}} \rightarrow w \tilde{\lambda}_{\dot{a}}$ manteniendo $p_{a\dot{a}}$ invariante. La conexión se puede hacer completamente explícita al intentar dar alguna prescripción específica para elegir $\lambda_a^{(p)}, \tilde{\lambda}_{\dot{a}}^{(p)}$, lo que nos lleva a través de un ejercicio completamente paralelo a nuestra discusión del pequeño grupo. Primero elegimos un momento sin masa de referencia $k_{a\dot{a}}$ y también elegimos un $\lambda_a^{(k)}, \tilde{\lambda}_{\dot{a}}^{(k)}$ fijo de modo que $k_{a\dot{a}} = \lambda_a^{(k)} \tilde{\lambda}_{\dot{a}}^{(k)}$. Para cualquier otro momento nulo, elegimos una transformación de Lorentz $\mathcal{L}(p; k)_a^b, \tilde{\mathcal{L}}(p; k)_{\dot{a}}^{\dot{b}}$ tal que $p_{a\dot{a}} = \mathcal{L}(p; k)_a^b \tilde{\mathcal{L}}(p; k)_{\dot{a}}^{\dot{b}} k_{b\dot{b}}$, y luego definimos $\lambda_a^{(p)} \equiv \mathcal{L}(p; k)_a^b \lambda_b^{(k)}, \tilde{\lambda}_{\dot{a}}^{(p)} \equiv \tilde{\mathcal{L}}(p; k)_{\dot{a}}^{\dot{b}} \tilde{\lambda}_{\dot{b}}^{(k)}$. Habiendo elegido una forma de asociar $\lambda_a^{(p)}, \tilde{\lambda}_{\dot{a}}^{(p)}$ con $p_{a\dot{a}}$, podemos preguntarnos por la relación entre, por ejemplo, $\lambda_a^{(\Lambda p)}$ y $\lambda_a^{(p)}$ para alguna transformación de Lorentz Λ ; lo que se encuentra es

$$\lambda_a^{(\Lambda p)} = w^{-1} (\Lambda, p, k) \Lambda_a^b \lambda_b^{(p)}.$$

Para momentos complejos generales, w es simplemente un número complejo y tenemos la acción de $GL(1)$. Para momentos lorentzianos reales, debemos tener $w^{-1} = \pm (w)^*$, por lo que $w = e^{i\theta}$ es una fase que representa el pequeño grupo $U(1)$. Obviamente, podemos realizar una transformación de Lorentz W para la cual $Wk = k$; simplemente encontramos $\lambda \rightarrow w^{-1} \lambda$. Para ser más explícitos,

sea

$$k_{a\dot{a}} = \begin{pmatrix} 2E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_a = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda}_{\dot{a}} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.165)$$

representan un momento sin masa en la dirección z . Entonces, una rotación alrededor del eje z (que deja a k invariante) es

$$\Lambda_a^b = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Lambda}_{\dot{a}}^{\dot{b}} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad (3.166)$$

bajo el cual obviamente $\lambda_a \rightarrow e^{i\phi/2} \lambda_a$, $\tilde{\lambda}_{\dot{a}} \rightarrow e^{-i\phi/2} \tilde{\lambda}_{\dot{a}}$. Para resumir, las amplitudes para partículas sin masa son funciones invariantes de Lorentz de $\lambda_a, \tilde{\lambda}_{\dot{a}}$ con las funciones peso de helicidad del grupo pequeño correctos,

$$M(w^{-1}\lambda, w\tilde{\lambda}) = w^{2h} M(\lambda, \tilde{\lambda}), \quad (3.167)$$

Ahora nos centraremos en el caso de partículas masivas. No existe una diferencia esencial con el caso sin masa; simplemente, $p_{a\dot{a}}$ tiene rango dos en lugar de rango uno, por lo que puede escribirse como la suma de dos matrices de rango uno como

$$p_{a\dot{a}} = \lambda_a^I \tilde{\lambda}_{\dot{a}I}, \quad (3.168)$$

donde $I = 1, 2$. Nótese que

$$p^2 = m^2 \rightarrow \det \lambda \times \det \tilde{\lambda} = m^2. \quad (3.169)$$

Podemos usar esto para establecer $\det \lambda = M, \det \tilde{\lambda} = \tilde{M}$ con $M\tilde{M} = m^2$. A veces es útil mantener la distinción entre $M, \tilde{M}$, pero para nuestros propósitos en este documento simplemente tomaremos $M = \tilde{M} = m$. Por supuesto, $\lambda^I, \tilde{\lambda}_I$ no se puede asociar de forma única con un momento p dado, podemos realizar una transformación $SL(2)$ $\lambda^I \rightarrow W^I_J \lambda^J, \tilde{\lambda}_I \rightarrow (W^{-1})^J_I \tilde{\lambda}_J$. Nótese que podríamos extender este $SL(2)$ a un $GL(2)$ si también permitiéramos reformulaciones (opuestas) de los parámetros de masa $M, \tilde{M}$, pero al elegir $M = \tilde{M} = m$ no lo permitimos. Esto no es una desventaja para nuestros propósitos, ya que el objeto $M/\tilde{M}$ se transforma solo bajo la parte $GL(1)$ de $GL(2)$ y puede usarse para elevar cualquier invariante $SL(2)$ a un invariante $GL(2)$ si se desea. Para momentos lorentzianos reales, tenemos que W debería estar en el subgrupo $SU(2)$ de $SL(2)$, lo que nos da la acción del grupo pequeño. Podemos hacer explícita la conexión, tal como lo hicimos para el caso sin masa, definiendo $\lambda_a^I, \tilde{\lambda}_{\dot{a}I}$ para un momento de referencia $k_{a\dot{a}}$ y aumentando su definición para todos los momentos. Concluimos que las amplitudes para partículas masivas son funciones invariantes de Lorentz para $\lambda^I, \tilde{\lambda}_I$, que son tensores simétricos de rango $2S$ $\{I_1, \dots, I_{2S}\}$ para partículas de espín S . Nótese que, podemos usar $\epsilon^{IJ}, \epsilon_{IJ}$ para aumentar y disminuir los índices, de modo que, por ejemplo, podemos escribir $p_{a\dot{a}} = \lambda_a^I \tilde{\lambda}_{\dot{a}}^J \epsilon_{IJ}$. Claramente

$$p_{a\dot{a}} \tilde{\lambda}^{\dot{a}I} = m \lambda_a^I, p_{a\dot{a}} \lambda^{aI} = -m \tilde{\lambda}_{\dot{a}}^I. \quad (3.170)$$

Si combinamos $(\lambda_a^I, \tilde{\lambda}_{\dot{a}}^I)$ en un espinor de Dirac Ψ_A^I , esta es, por supuesto, la ecuación de Dirac $(\Gamma^\mu p_\mu - m)_A^B \Psi_B^I = 0$. Pero no hay ninguna razón particular para hacer esto en nuestro formalismo: incluso la razón habitual (buena) para introducir espinores de Dirac, hacer que la paridad se manifieste en teorías con simetría de paridad, puede lograrse más fácilmente sin usar espinores de Dirac en nuestro enfoque. Por lo tanto, no encontraremos ninguna matriz Γ en nuestra discusión. Tenga en cuenta también que el uso de $(p_{a\dot{a}}/m)$ permite convertir libremente entre las variables λ_a^I y $\tilde{\lambda}_{\dot{a}}^I$. En ocasiones, resultará útil, especialmente en el contexto de la clasificación sistemática de estructuras de amplitud, por ejemplo, usar solo λ_a^I para describir una partícula masiva dada. Entonces, podemos escribir el tensor simétrico como

$$M^{\{I_1 \dots I_{2S}\}} = \lambda_{a_1}^{I_1} \dots \lambda_{a_{2S}}^{I_{2S}} M^{\{a_1 \dots a_{2S}\}}, \quad (3.171)$$

donde $M^{\{a_1 \dots a_{2S}\}}$ es totalmente simétrico en los índices a . En el límite de altas energías vamos a tener lo siguiente:

$$\begin{aligned}\lambda_a^I &= \lambda_a \zeta^{-I} + \eta_a \zeta^{+I}, \\ \tilde{\lambda}_a^I &= \tilde{\lambda}_a \zeta^{+I} + \tilde{\eta}_a \zeta^{-I},\end{aligned}$$

donde

$$\epsilon_{IJ} \zeta^{+I} \zeta^{-J} = 1, \quad \langle \lambda \eta \rangle = m, \quad [\tilde{\lambda} \tilde{\eta}] = m. \quad (3.172)$$

En un marco dado, naturalmente tenemos $\zeta^{\pm I}$ como los estados propios del espín 1/2 en la dirección del momento espacial $\vec{p}$, y podemos identificar

$$\lambda_a = \sqrt{E + p} \zeta_a^+, \quad \eta_a = \sqrt{E - p} \zeta_a^-, \quad (3.173)$$

y similarmente para los espinores con tilde

$$\tilde{\lambda}_a = \sqrt{E + p} \tilde{\zeta}_a^-, \quad \tilde{\eta}_a = \sqrt{E - p} \tilde{\zeta}_a^+. \quad (3.174)$$

Claramente, en el límite de alta energía $\sqrt{E + p} \rightarrow \sqrt{2E}$ mientras que $\sqrt{E - p} \rightarrow m/\sqrt{2E}$, de modo que tanto $\eta, \tilde{\eta}$ son proporcionales a m y se anulan con respecto a $\lambda, \tilde{\lambda}$. Dicho de otra manera, para tomar el límite de alta energía tomamos

$$\eta_a = m \hat{\eta}_a, \quad \tilde{\eta}_a = m \hat{\tilde{\eta}}_a; \quad \text{con} \quad \langle \lambda \hat{\eta} \rangle = [\tilde{\lambda} \hat{\tilde{\eta}}] = 1, \quad (3.175)$$

con todas las proporciones adimensionales de la forma:

$$\frac{m}{\langle \lambda_a \lambda_b \rangle}, \frac{m}{[\tilde{\lambda}_a \tilde{\lambda}_b]} \rightarrow 0.$$

Nótese que cualquier amplitud de dispersión se descompone naturalmente en diferentes estados de espín en la dirección espacial del movimiento, a través de

$$M^{I_1 \dots I_{2S}} = \sum_h \left((\zeta^+)^{S+h} (\zeta^-)^{S-h} \right)^{I_1 \dots I_{2S}} M_h(\lambda, \tilde{\lambda}; \eta, \tilde{\eta}), \quad (3.176)$$

donde trivialmente

$$M_h \left(w^{-1} \lambda, w \tilde{\lambda}; w \eta, w^{-1} \tilde{\eta} \right) = w^{2h} M_h(\lambda, \tilde{\lambda}; \eta, \tilde{\eta}). \quad (3.177)$$

3.6.2. Espín espinores, caso másivo

La clave de Arkani, Huang y Huang fue generalizar los espinores de helicidad a un tensor donde cada renglón separadamente se transforma bajo una transformación de Lorentz $SL(2, \mathbb{C})$, pero cada columna se transforma bajo el grupo de espín $SU(2)$. Es decir, ellos introducen los *espín espinores* $|p^I\rangle$ y $|\tilde{p}^I\rangle$, los cuales transforman bajo el producto directo del espín y las transformaciones de Lorentz $SL(2, \mathbb{C})$.

$$|p^I\rangle_a = \underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{E-p} & s^* & \sqrt{E+p} & c \\ \sqrt{E-p} & c & \sqrt{E+p} & s \end{pmatrix}}_{\text{Indice de espín } I, SU(2)} \underbrace{\Bigg\}}_{\text{Indice de Lorentz } a, SL(2, \mathbb{C})}.$$

Figura 3.6: Estructura de un espín espinor. La notación del momento en negritas $|p\rangle$ (Bold, en ingles), se refiere a que el momento de la partícula es másiva

Donde $c = \cos(\frac{\theta}{2})$, $s = \sin(\frac{\theta}{2}) \exp(i\phi)$, $s^* = \cos(\frac{\theta}{2}) \exp(-i\phi)$. De igual modo que los espinores de helicidad, los productos de espín espinores tales como $\langle \mathbf{p}^I \mathbf{q}^J \rangle$ o $[\mathbf{p}^I \mathbf{q}^J]$ son invariantes de Lorentz pero aun se transforma bajo el grupo de espín $SU(2)$. Lo cual es excelente ya que estos productos espinoriales van a servir para construir amplitudes de dispersión para partículas masivas ya que transforman bajo los mismos pequeños grupos. Además, la mezcla entre espinores de helicidad y espín espinores como $\langle p \mathbf{q}^J \rangle$ son objetos que transforman bajo un producto de helicidad para la partícula p y de espín para la partícula q . Por lo tanto, con el formalismo de los espinores de helicidad de Weyl y los espín espinores podemos escribir cualquier amplitud de dispersión de cualquier proceso al menos en principio. Vamos a revisar un poco de las propiedades de los espín espinores en esta sección [130, 131]. Al considerar partículas con masa, m , tenemos $E^2 - p^2 = m^2$. Ahora, al considerar un cuadvivector en coordenadas esféricas

$$p^\mu = (E, P \sin \theta \cos \phi, P \sin \theta \sin \phi, P \cos \theta), \quad (3.178)$$

y usando la representación de Weyl para las matrices gamma de Dirac (1.238), encontramos que ,

$$p^{\dot{a}b} = \begin{pmatrix} c^2(E-p) + ss^*(E+p) & -2cs^*p \\ -2csp & ss^*(E-p) + c^2(E+p) \end{pmatrix}, \quad (3.179)$$

$$p_{a\dot{b}} = \begin{pmatrix} c^2(E+p) + ss^*(E-p) & 2cs^*p \\ 2csp & ss^*(E+p) + c^2(E-p) \end{pmatrix}. \quad (3.180)$$

Podemos expresar las componentes del tensor $|\mathbf{p}\rangle_a^I$ y $[\mathbf{p}_I]_{\dot{a}}$. Donde I corre sobre dos valores 1 y 2. Para $I = 1$, tenemos

$$\lambda_a^I = |\mathbf{p}^I\rangle_a = \sqrt{E-p} \begin{pmatrix} -s^* \\ c \end{pmatrix} = \sqrt{E-p} \times \zeta_a^-, \quad (3.181)$$

$$\tilde{\lambda}_{I\dot{a}} = [\mathbf{p}_I]_{\dot{a}} = \sqrt{E-p} \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix} = \sqrt{E-p} \times \tilde{\zeta}_{\dot{a}}^+, \quad (3.182)$$

para $I = 2$

$$\lambda_a^I = |\mathbf{p}^I\rangle_a = \sqrt{E+p} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \sqrt{E+p} \times \zeta_a^+, \quad (3.183)$$

$$\tilde{\lambda}_{\dot{a}I} = [\mathbf{p}_I]_{\dot{a}} = \sqrt{E+p} \begin{pmatrix} c \\ s^* \end{pmatrix} = \sqrt{E+p} \times \tilde{\zeta}_{\dot{a}}^-, \quad (3.184)$$

asi que,

$$\sum_{I=\mp 1} |\mathbf{p}^I\rangle_a [\mathbf{p}_I]_{\dot{b}} = (E-p) \begin{pmatrix} ss^* & -cs^* \\ -cs & c^2 \end{pmatrix} + (E+p) \begin{pmatrix} c^2 & cs^* \\ cs & ss^* \end{pmatrix} = p_{ab}, \quad (3.185)$$

usando la expresión p_{ab} en ecuación(3.179), vamos a tener,

$$-\sum_{I=\pm} |\mathbf{p}^I]_{\dot{a}} \langle \mathbf{p}_I|^b = (E-p) \begin{pmatrix} c^2 & cs^* \\ cs & ss^* \end{pmatrix} + (E+p) \begin{pmatrix} ss^* & -cs^* \\ -cs & c^2 \end{pmatrix} = p^{\dot{a}b}. \quad (3.186)$$

Podemos escribir las ecuaciones (3.181),(3.183) y (3.182), (3.184) equivalentemente como [17]:

$$\lambda_a^I = |\mathbf{p}^I\rangle_a = \sqrt{E+p} \times \zeta_a^+(p) \otimes \delta_1^I \zeta^- + \sqrt{E-p} \times \zeta_a^-(p) \otimes \delta_2^I \zeta^+ \quad (3.187)$$

$$\tilde{\lambda}_{I\dot{a}} = [\mathbf{p}_I]_{\dot{a}} = \sqrt{E+p} \times \tilde{\zeta}_{\dot{a}}^-(p) \otimes \delta_1^I \zeta^- + \sqrt{E-p} \times \tilde{\zeta}_{\dot{a}}^+(p) \otimes \delta_2^I \zeta^+. \quad (3.188)$$

Donde I corre sobre los valores 1 y 2. Aquí hemos escogido una representación del álgebra de $SU(2)$ en el cual la matriz σ_z es diagonal con eigenestados:

$$\zeta^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.189)$$

y las expresiones para los espinores de Weyl con índices de Lorentz $SL(2, \mathbb{C})$ son

$$\zeta_a^+ = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \equiv +\tilde{\zeta}^{+\dot{a}}, \quad \zeta_a^- = \begin{pmatrix} -s^* \\ c \end{pmatrix} \equiv -\tilde{\zeta}^{-\dot{a}} \quad (3.190)$$

$$\tilde{\zeta}_{\dot{a}}^- = \begin{pmatrix} c \\ s^* \end{pmatrix} \equiv +\zeta^{-a}, \quad \tilde{\zeta}_{\dot{a}}^+ = \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix} \equiv -\zeta^{+a}. \quad (3.191)$$

Entonces las formás explícitas de los espín espinores son:

$$|\mathbf{p}^I\rangle_a = \begin{pmatrix} -\sqrt{E-p} & s^* & \sqrt{E+p} & c \\ \sqrt{E-p} & c & \sqrt{E+p} & s \end{pmatrix}, \quad (3.192)$$

$$[\mathbf{p}_I]_{\dot{a}} = \begin{pmatrix} -\sqrt{E-p} & s & -\sqrt{E+p} & c \\ \sqrt{E-p} & c & \sqrt{E+p} & s^* \end{pmatrix}. \quad (3.193)$$

En términos de los espinores de Weyl (3.190) se tienen las siguientes relaciones

$$p^{\dot{a}b}\zeta_b^+ = (E-p)\tilde{\zeta}^{+\dot{a}}, \quad (3.194)$$

$$p^{\dot{a}b}\zeta_b^- = -(E+p)\tilde{\zeta}^{-\dot{a}}, \quad (3.195)$$

$$p_{ab}\tilde{\zeta}^{+\dot{b}} = (E+p)\zeta_a^+, \quad (3.196)$$

$$p_{ab}\tilde{\zeta}^{-\dot{b}} = -(E-p)\zeta_a^-, \quad (3.197)$$

$$\zeta^{+a}p_{ab} = -(E-p)\tilde{\zeta}_{\dot{b}}^+, \quad (3.198)$$

$$\zeta^{-a}p_{ab} = (E+p)\tilde{\zeta}_{\dot{b}}^-, \quad (3.199)$$

$$\tilde{\zeta}_{\dot{a}}^+p^{\dot{a}b} = -(E+p)\zeta^{+b}, \quad (3.200)$$

$$\tilde{\zeta}_{\dot{a}}^-p^{\dot{a}b} = (E-p)\zeta^{+b}. \quad (3.201)$$

Para subir y bajar los índices del $SU(2)$ basta con multiplicar el tensor anti-simétrico de dos dimensiones ϵ por la derecha $|\mathbf{p}_I\rangle_a = |\mathbf{p}^J\rangle_a \epsilon_{JI}$ y $[\mathbf{p}^I]_{\dot{a}} = [\mathbf{p}_J]_{\dot{a}} \epsilon^{JI}$. El conjunto completo de espín espinores es

$$|\mathbf{p}^I\rangle_a = \sqrt{E+p} \times \zeta_a^+(p) \otimes \delta_1^I \zeta^- + \sqrt{E-p} \times \zeta_a^-(p) \otimes \delta_2^I \zeta^+, \quad (3.202)$$

$$|\mathbf{p}^I\rangle^{\dot{a}} = -\sqrt{E-p} \times \tilde{\zeta}^{+\dot{a}}(p) \otimes \delta_1^I \zeta^- + \sqrt{E+p} \times \tilde{\zeta}^{-\dot{a}}(p) \otimes \delta_2^I \zeta^+, \quad (3.203)$$

$$\langle \mathbf{p}^I |^a = \sqrt{E+p} \times \zeta^{+a}(p) \otimes \delta_1^I \zeta^- + \sqrt{E-p} \times \zeta^{-a}(p) \otimes \delta_2^I \zeta^+, \quad (3.204)$$

$$[\mathbf{p}^I]_{\dot{a}} = -\sqrt{E-p} \times \tilde{\zeta}_{\dot{a}}^+(p) \otimes \delta_1^I \zeta^- + \sqrt{E+p} \times \tilde{\zeta}_{\dot{a}}^-(p) \otimes \delta_2^I \zeta^+, \quad (3.205)$$

$$|\mathbf{p}_I\rangle_a = \sqrt{E-p} \times \zeta_a^-(p) \otimes \delta_1^I \zeta^- - \sqrt{E+p} \times \zeta_a^+(p) \otimes \delta_2^I \zeta^+, \quad (3.206)$$

$$|\mathbf{p}_I\rangle^{\dot{a}} = \sqrt{E+p} \times \tilde{\zeta}^{-\dot{a}}(p) \otimes \delta_1^I \zeta^- + \sqrt{E-p} \times \tilde{\zeta}^{+\dot{a}}(p) \otimes \delta_2^I \zeta^+, \quad (3.207)$$

$$\langle \mathbf{p}_I |^a = \sqrt{E-p} \times \zeta^{-a}(p) \otimes \delta_1^I \zeta^- - \sqrt{E+p} \times \zeta^{+a}(p) \otimes \delta_2^I \zeta^+, \quad (3.208)$$

$$[\mathbf{p}_I]_{\dot{a}} = \sqrt{E+p} \times \tilde{\zeta}_{\dot{a}}^-(p) \otimes \delta_1^I \zeta^- + \sqrt{E-p} \times \tilde{\zeta}_{\dot{a}}^+(p) \otimes \delta_2^I \zeta^+. \quad (3.209)$$

En nuestra notación I y J toman los valores de 1 y 2. Los índices del grupo pequeño $SU(2)$ son bajados y subidos multiplicando por la derecha por ϵ^{IJ} y ϵ_{IJ} similar al de (1.269), esto es

$$\epsilon_{IJ} = -\epsilon^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.210)$$

Podemos ver que para los espinores la conjugada compleja afecta de la siguiente manera

$$\left(\langle \mathbf{p}^I |^a \right)^* = |\mathbf{p}_I\rangle^{\dot{a}} \quad \left(|\mathbf{p}^I\rangle_a \right)^* = [\mathbf{p}_I]_{\dot{a}}, \quad (3.211)$$

$$(\langle \mathbf{p}_I |^a)^* = - | \mathbf{p}^I]^{\dot{a}}, \quad (| \mathbf{p}_I \rangle_a)^* = - [\mathbf{p}^I |_{\dot{a}}. \quad (3.212)$$

En otras palabras, si tomamos la compleja conjugada de un espinor angulado con índice de espín I abajo, o un espinor cuadrado con un índice de espín arriba, la conjugada introduce un signo menos adicional. Esto significa que si definimos el espinor de un fermión y antifermión salientes como

$$\bar{u}(p) = ([\mathbf{p}^I |_{\dot{a}}, \quad \langle \mathbf{p}^I |^a), \quad v(p) = \begin{pmatrix} | \mathbf{p}_I]^{\dot{a}} \\ | \mathbf{p}_I \rangle_a \end{pmatrix}, \quad (3.213)$$

$$u(p) = \begin{pmatrix} | \mathbf{p}_I]^{\dot{a}} \\ - | \mathbf{p}_I \rangle_a \end{pmatrix}, \quad \bar{v}(p) = (- [\mathbf{p}^I |_{\dot{a}}, \quad \langle \mathbf{p}^I |^a). \quad (3.214)$$

Estos espinores másivos punteados y no punteados están relacionados mediante la ecuación de movimiento para los campos de Weyl. En términos de este conjunto de tensores, usando las relaciones (3.194) obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$p^{\dot{a}b} | \mathbf{p}^I]_b = -m | \mathbf{p}^I]^{\dot{a}}, \quad (3.215)$$

$$p_{a\dot{b}} | \mathbf{p}^I]^{\dot{b}} = -m | \mathbf{p}^I]_a, \quad (3.216)$$

$$\langle \mathbf{p}^I |^a p_{a\dot{b}} = m [\mathbf{p}^I |_{\dot{b}}, \quad (3.217)$$

$$[\mathbf{p}^I |_{\dot{a}} p^{\dot{a}b} = m \langle \mathbf{p}^I |^b. \quad (3.218)$$

Por lo tanto, una amplitud de dispersión que involucre partículas masivas pueden ser expresadas en términos de $| \mathbf{p}_I]^a$ o $| \mathbf{p}_I]_{\dot{b}}$. Además, tenemos las siguientes identidades

$$| \mathbf{p}^I]_a \langle \mathbf{p}_I |^b = m \delta_a^b, \quad (3.219)$$

$$| \mathbf{p}_I]_a \langle \mathbf{p}^I |^b = -m \delta_a^b, \quad (3.220)$$

$$| \mathbf{p}_I]^{\dot{a}} [\mathbf{p}^I |_{\dot{b}} = m \delta_{\dot{b}}^{\dot{a}}, \quad (3.221)$$

$$| \mathbf{p}^I]^{\dot{a}} [\mathbf{p}_I]_{\dot{b}} = -m \delta_{\dot{b}}^{\dot{a}}, \quad (3.222)$$

$$(3.223)$$

$$p_{a\dot{b}} = | \mathbf{p}^I]_a [\mathbf{p}_I]_{\dot{b}}, \quad (3.224)$$

$$-p^{\dot{a}b} = | \mathbf{p}^I]^{\dot{a}} \langle \mathbf{p}_I |^b, \quad (3.225)$$

$$-p_{ab} = | \mathbf{p}_I]_a [\mathbf{p}^I |_{\dot{b}}, \quad (3.226)$$

$$p^{\dot{a}b} = | \mathbf{p}_I]^{\dot{a}} \langle \mathbf{p}^I |^b. \quad (3.227)$$

El propagador fermiónico es reconstruido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu p^\mu + m &= \begin{pmatrix} m \delta_{\dot{b}}^{\dot{a}} & p^{\dot{a}b} \\ p_{a\dot{b}} & m \delta_a^b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | \mathbf{p}_I]^{\dot{a}} [\mathbf{p}^I |_{\dot{b}} & | \mathbf{p}_I]^{\dot{a}} \langle \mathbf{p}^I |^b \\ - | \mathbf{p}_I]_a [\mathbf{p}^I |_{\dot{b}} & - | \mathbf{p}_I]_a \langle \mathbf{p}^I |^b \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.228)$$

$$= \begin{pmatrix} | \mathbf{p}_I]^{\dot{a}} \\ - | \mathbf{p}_I]_a \end{pmatrix} \otimes ([\mathbf{p}^I |_{\dot{b}} \quad \langle \mathbf{p}^I |^b). \quad (3.229)$$

Adoptando la convención

$$| -p \rangle = -| p \rangle, \quad | -p] = | p], \quad (3.230)$$

entonces tenemos que el propagador es:

$$\gamma_\mu p^\mu + m = \begin{pmatrix} | -\mathbf{p}_I]^{\dot{a}} \\ | -\mathbf{p}_I]_a \end{pmatrix} \otimes ([[\mathbf{p}^I |_{\dot{b}} \quad \langle \mathbf{p}^I |^b) = v(-p) \otimes \bar{u}(p). \quad (3.231)$$

3.6.3. Espín espinores en Electrodinámica Cuántica

El proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ usando espín espinores

En la sección 2.1.5 vimos cómo calcular este proceso usando las reglas de Feynman de la electrodinámica cuántica. La amplitud de este proceso esta expresada en la ecuación (2.108), en esta sección usaremos los espinores de Dirac en términos de los espín espinores dados por (3.213) y (3.214), junto con la matriz de Dirac en la representación de Weyl (1.238) para obtener una expresión para la amplitud, usaremos el método híbrido que consiste en usar las reglas de Feynman para obtener una expresión para la amplitud y posteriormente cambiamos de variables, es decir, pasamos de espinores de cuatro componentes a los espín espinores cuyas columnas son de dos componentes [28], para cada partícula de espín s vamos a necesitar $2s$ índices de espín $SU(2)$; entonces para los electrones y muones que son de espín $1/2$ vamos a necesitar $2(1/2) = 1$ índices de espín I . Para el positrón e^+ le asignamos el índice de espín L , para el electrón e^- le asignamos el índice K , para el muón μ^+ le asignamos el índice I y para el muón μ^- se tiene J . Empezamos por hacer la multiplicación matricial con el término de la amplitud:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(p_3)\gamma^\mu v(p_4) &= ([p_3^I|_a, \langle p_3^I|^a] \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)^{\dot{a}b} \\ (\bar{\sigma}^\mu)_{a\dot{b}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |p_{4J}]^{\dot{b}} \\ [p_{4J}]_b \end{pmatrix}) \\
 &= ([p_3^I|_a, \langle p_3^I|^a] \begin{pmatrix} (\sigma^\mu)^{\dot{a}b} |p_{4J}]_b \\ (\bar{\sigma}^\mu)_{a\dot{b}} [p_{4J}]^{\dot{b}} \end{pmatrix}) \\
 &= [p_3^I|_a (\sigma^\mu)^{\dot{a}b} |p_{4J}]_b + \langle p_3^I|^a (\bar{\sigma}^\mu)_{a\dot{b}} [p_{4J}]^{\dot{b}} \\
 &= [\mathbf{3}^I | \sigma^\mu | \mathbf{4}_J] + \langle \mathbf{3}^I | \bar{\sigma}^\mu | \mathbf{4}_J] \\
 &= [\mathbf{3} | \sigma^\mu | \mathbf{4}] + \langle \mathbf{3} | \bar{\sigma}^\mu | \mathbf{4}].
 \end{aligned} \tag{3.232}$$

En la práctica se pueden suprimir los índices de espín $SU(2)$ sin afectar los cálculos. Del mismo modo para

$$\bar{v}(p_2)\gamma_\mu u(p_1) = [\mathbf{2}^K | \sigma_\mu | \mathbf{1}_L] + \langle \mathbf{2}^K | \bar{\sigma}_\mu | \mathbf{1}_L] = [\mathbf{2} | \sigma_\mu | \mathbf{1}] + \langle \mathbf{2} | \bar{\sigma}_\mu | \mathbf{1}]. \tag{3.233}$$

Además de las propiedades (1.251) y (1.252), se necesitan las siguientes identidades [102]:

$$\sigma_{a\dot{a}}^\mu \bar{\sigma}_\mu^{\dot{b}b} = 2\delta_a^b \delta_{\dot{a}}^{\dot{b}}, \tag{3.234}$$

$$\sigma_{a\dot{a}}^\mu \sigma_{\mu b\dot{b}} = 2\epsilon_{ab} \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}, \tag{3.235}$$

$$(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a} (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{b}b} = 2\epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}}, \tag{3.236}$$

$$\epsilon_{ab} \epsilon^{bc} = \epsilon^{cb} \epsilon_{ba} = \delta_a^c \tag{3.237}$$

$$\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \epsilon^{\dot{b}\dot{c}} = \epsilon^{\dot{c}\dot{b}} \epsilon_{\dot{b}\dot{a}} = \delta_{\dot{a}}^{\dot{c}}. \tag{3.238}$$

Suprimiendo factores o constantes de acoplamiento, nuestra amplitud parcial es

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{M}} &= \left([3|\sigma^\mu|4] + \langle 3|\bar{\sigma}^\mu|4 \rangle \right) \times \left([2|\sigma_\mu|1] + \langle 2|\bar{\sigma}_\mu|1 \rangle \right) \\
&= [3^I|_{\dot{a}}(\sigma^\mu)^{\dot{a}b}|4_J\rangle_b [2^K|_{\dot{c}}(\sigma_\mu)^{\dot{c}d}|1_L\rangle_d + [3^I|_{\dot{a}}(\sigma^\mu)^{\dot{a}b}|4_J\rangle_b \langle 2^K|_{\dot{c}}(\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{c}\dot{d}}|1_L\rangle^{\dot{d}} \\
&+ \langle 3^I|_{\dot{a}}(\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{a}\dot{b}}|4_J\rangle^{\dot{b}} [2^K|_{\dot{c}}(\sigma_\mu)^{\dot{c}d}|1_L\rangle_d + [3^I|_{\dot{a}}(\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{a}\dot{b}}|4_J\rangle^{\dot{b}} \langle 2^K|_{\dot{c}}(\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{c}\dot{d}}|1_L\rangle^{\dot{d}} \\
&= [3^I|_{\dot{a}}|4_J\rangle_b (\sigma^\mu)^{\dot{a}b} (\sigma_\mu)^{\dot{c}d} [2^K|_{\dot{c}}|1_L\rangle_d + [3^I|_{\dot{a}}|4_J\rangle_b (\sigma^\mu)^{\dot{a}b} (\bar{\sigma}_\mu)_{\dot{c}\dot{d}} \langle 2^K|_{\dot{c}}|1_L\rangle^{\dot{d}} \\
&+ \langle 3^I|_{\dot{a}}|4_J\rangle^{\dot{b}} (\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{a}\dot{b}} (\sigma_\mu)^{\dot{c}d} [2^K|_{\dot{c}}|1_L\rangle_d + \langle 3^I|_{\dot{a}}|4_J\rangle^{\dot{b}} (\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{a}\dot{b}} (\bar{\sigma}_\mu)_{\dot{c}\dot{d}} \langle 2^K|_{\dot{c}}|1_L\rangle^{\dot{d}} \\
&= [3^I|_{\dot{a}}|4_J\rangle_b (2\epsilon^{\dot{a}\dot{c}}\epsilon^{bd}) [2^K|_{\dot{c}}|1_L\rangle_d + [3^I|_{\dot{a}}|4_J\rangle_b (2\delta_{\dot{a}}^{\dot{c}}\delta_c^b) \langle 2^K|_{\dot{c}}|1_L\rangle^{\dot{d}} \\
&+ \langle 3^I|_{\dot{a}}|4_J\rangle^{\dot{b}} (2\delta_a^{\dot{d}}\delta_{\dot{b}}^{\dot{c}}) [2^K|_{\dot{c}}|1_L\rangle_d + \langle 3^I|_{\dot{a}}|4_J\rangle^{\dot{b}} (2\epsilon_{ac}\epsilon_{\dot{b}\dot{d}}) \langle 2^K|_{\dot{c}}|1_L\rangle^{\dot{d}} \\
&= 2 \left([3^I|_{\dot{a}}|2^K|_{\dot{c}}\rangle^{\dot{a}} \langle 4_J|_{\dot{d}}|1_L\rangle_d + [3^I|_{\dot{a}}|1_L\rangle^{\dot{a}} \langle 2^K|_{\dot{c}}|4_J\rangle_c + \langle 3^I|_{\dot{a}}|1_L\rangle_a [2^K|_{\dot{c}}|4_J\rangle^{\dot{c}} + \langle 3^I|_{\dot{a}}|2^K\rangle_a [4_J|_{\dot{d}}|1_L\rangle^{\dot{d}} \right) \\
&= 2 \left([3^I 2^K] \langle 4_J 1_L \rangle + [3^I 1_L] \langle 2^K 4_J \rangle + \langle 3^I 1_L \rangle [2^K 4_J] + \langle 3^I 2^K \rangle [4_J 1_L] \right). \tag{3.239}
\end{aligned}$$

Entonces la amplitud con todo y las constantes de acoplamiento es

$$i\mathcal{M} = -i \frac{2e^2}{s} \left([32] \langle 41 \rangle + [31] \langle 24 \rangle + \langle 31 \rangle [24] + \langle 32 \rangle [41] \right). \tag{3.240}$$

Para calcular la amplitud conjugada se necesita la siguiente regla de conjugación

$$\left(\langle p^I q^J \rangle \right)^* = \left(\langle p^I |^a | q^J \rangle_a \right)^* = [q_J |_{\dot{a}} | p_I \rangle^{\dot{a}} = [q_J p_I] \tag{3.241}$$

$$\left(\langle p_I q_J \rangle \right)^* = [q^J q^I]. \tag{3.242}$$

Por lo tanto, la amplitud conjugada de $\mathcal{M}$ va ser

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M}^\dagger &= i \frac{2e^2}{s} \left(\langle 2_K 3_I \rangle [1^L 4^J] + \langle 1^L 3_I \rangle [4^J 2_K] + [1^L 3_I] \langle 4^J 2_K \rangle + [2_K 3_I] \langle 1^L 4^J \rangle \right) \\
&= i \frac{2e^2}{s} \left(\langle 23 \rangle [14] + \langle 13 \rangle [42] + [13] \langle 42 \rangle + [23] \langle 14 \rangle \right). \tag{3.243}
\end{aligned}$$

La amplitud cuadrada es

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{1}{4} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \mathcal{M} \mathcal{M}^\dagger \\
&= \frac{e^4}{s^2} \left\{ [32] \langle 41 \rangle \langle 23 \rangle [14] + [32] \langle 41 \rangle \langle 13 \rangle [42] + [32] \langle 41 \rangle [13] \langle 42 \rangle + [32] \langle 41 \rangle [23] \langle 14 \rangle \right. \\
&+ [31] \langle 24 \rangle \langle 23 \rangle [14] + [31] \langle 24 \rangle \langle 13 \rangle [42] + [31] \langle 24 \rangle [13] \langle 42 \rangle + [31] \langle 24 \rangle [23] \langle 14 \rangle \\
&+ \langle 31 \rangle [24] \langle 23 \rangle [14] + \langle 31 \rangle [24] \langle 13 \rangle [42] + \langle 31 \rangle [24] [13] \langle 42 \rangle + \langle 31 \rangle [24] [23] \langle 14 \rangle \\
&\left. + \langle 32 \rangle [41] \langle 23 \rangle [14] + \langle 32 \rangle [41] \langle 13 \rangle [42] + \langle 32 \rangle [41] [13] \langle 42 \rangle + \langle 32 \rangle [41] [23] \langle 14 \rangle \right\}.
\end{aligned}$$

Reordenando y usando las relaciones (3.219) - (3.222), tanto como (3.48), vamos a tener lo siguiente

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{e^4}{s^2} \left\{ 2(p_2 \cdot p_3) 2(p_4 \cdot p_1) - [3^I | (-m_e) | 4^J] \langle 4_J | (-m_e) | 3_I \rangle - \langle 2_K | (m_\mu) | 1_L \rangle [1^L | (m_\mu) | 2^K] \right. \\
&+ [3^I | (-m_e) | 3_I] \langle 4_J | (-m_e) | 4^J \rangle - [3^I | (m_e) | 4^J] \langle 4_J | (m_e) | 3_I \rangle + 2(p_1 \cdot p_3) 2(p_2 \cdot p_4) \\
&+ [3^I | (m_e) | 3_I] \langle 2^K | (-m_\mu) | 2_K \rangle - \langle 2_K | (m_\mu) | 1_L \rangle [1^L | (m_\mu) | 2^K] - \langle 2_K | (-m_\mu) | 1_L \rangle [1^L | (-m_\mu) | 2^K] \\
&+ \langle 3^I | (-m_e) | 3_I \rangle [2^K | (m_\mu) | 2_K] + 2(p_3 \cdot p_1) 2(p_4 \cdot p_2) - \langle 3^I | (-m_e) | 4^J \rangle \langle 4_J | (-m_e) | 3_I \rangle \\
&\langle 3^I | (m_e) | 3_I \rangle \langle 4_J | (m_e) | 4^J \rangle - \langle 1^L | (-m_\mu) | 2^K \rangle [2_K | (-m_\mu) | 1_L] - \langle 3^I | (m_e) | 4^J \rangle \langle 4_J | (m_e) | 3_I \rangle \\
&\left. + 2(p_3 \cdot p_2) 2(p_1 \cdot p_4) \right\}. \tag{3.244}
\end{aligned}$$

Otras propiedades que vamos a necesitar son [132]:

$$\langle \mathbf{i}_J \mathbf{i}^K \rangle = m_i \delta_J^K, \quad (3.245)$$

$$\langle \mathbf{i}^K \mathbf{i}_J \rangle = -m_i \delta_J^K, \quad (3.246)$$

$$[\mathbf{i}^J \mathbf{i}_K] = m_i \delta_K^J, \quad (3.247)$$

$$[\mathbf{i}_K \mathbf{i}^J] = -m_i \delta_K^J. \quad (3.248)$$

Notemos también que la traza para la identidad espinorial es

$$\text{Tr}[1] = \delta_a^a = \delta_a^{\dot{a}} = 2 = \delta_I^I. \quad (3.249)$$

De este modo el resultado final para la amplitud cuadrada es

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{e^4}{s^2} \left\{ 8(p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) - 2m_e^2(p_3 \cdot p_4) - 2m_\mu^2(p_1 \cdot p_2) + 4m_e^2 m_\mu^2 - 2m_e^2(p_3 \cdot p_4) \right. \\ &\quad \left. 8(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + 4m_e^2 m_\mu^2 - 2m_\mu^2(p_1 \cdot p_2) - 2m_\mu^2(p_1 \cdot p_2) + 4m_e^2 m_\mu^2 - 2m_e^2(p_3 \cdot p_4) \right. \\ &\quad \left. + 4m_e^2 m_\mu^2 - 2m_\mu^2(p_1 \cdot p_2) - 2m_e^2(p_3 \cdot p_4) \right\} \\ &= \frac{e^4}{s^2} \left\{ 8(p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) + 8(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) - 8m_e^2(p_3 \cdot p_4) - 8m_\mu^2(p_1 \cdot p_2) + 16m_e^2 m_\mu^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.250)$$

Este resultado es similar al que se obtuvo con la tecnología de trazas dado por (2.121), pero con un menor número de pasos y sin cálculo de trazas de matrices de Dirac. El cálculo del efecto Compton de QED utilizando el método híbrido se va mostrar completamente en [28].

Capítulo 4

Métodos modernos de amplitudes: reescribiendo la Física de Partículas

Hacer lo que ya sabemos lleva al mundo de **1** a **n**. Genera un progreso horizontal añadiendo más de lo mismo.

Cada nueva creación, sin embargo, va de **0** a **1**, es vertical e implica hacer algo que nadie ha llevado a cabo antes.

Si tomás una maquina de escribir y construyes cien, has hecho un progreso horizontal. Si tomás una máquina de escribir y construyes un procesador de textos, has hecho un progreso vertical.

Peter Thiel (Cofundador de PayPal)

4.1. Teorías Constructivas para partículas sin masa

Los espinores de helicidad tienen cierta elegancia y esto se debe a que su utilidad proviene del hecho de que muestran las simetrías del sistema. Estas simetrías son invariantes bajo Lorentz y el grupo pequeño o little group, el cual vimos en la sección (1.4). Bajo el grupo pequeño, los espinores de helicidad λ_i y $\tilde{\lambda}_i$ para dejar invariante el momento de la partícula deben transformar como

$$\lambda_i \rightarrow t_i \lambda_i \quad \text{y} \quad \tilde{\lambda}_i \rightarrow t_i^{-1} \tilde{\lambda}_i. \quad (4.1)$$

Notemos aquí que, para un momento real, los espinores satisfacen una condición real, por lo que la variable cinemática t_i se restringe a ser una fase pura. Desafortunadamente, estas variables espinoriales no nos sirven para describir interacciones entre escalares ya que las partículas escalares son singletes del grupo pequeño y la amplitud como tal únicamente es función del momento p_i . Por otro lado, para describir partículas con espín, es necesario introducir representaciones no triviales del grupo pequeño los cuales contienen la helicidad como número cuántico. En términos de diagramas de Feynman, la covarianza del grupo pequeño se manifiesta mediante los vectores de polarización los cuales en términos de espinores de helicidad tienen la forma

$$\epsilon_{a\dot{a}}^+ = \frac{\chi_a \tilde{\lambda}_{\dot{a}}}{\langle \chi \lambda \rangle} \quad \text{y} \quad \epsilon_{a\dot{a}}^- = \frac{\lambda_a \tilde{\chi}_{\dot{a}}}{[\tilde{\lambda} \tilde{\chi}]}, \quad (4.2)$$

donde los super-índices etiquetan la helicidad. Por construcción, estos vectores de polarización son transversales al momento

$$p^{a\dot{a}}\epsilon_{a\dot{a}}^+ \propto [\tilde{\lambda}\tilde{\lambda}] = 0 \quad \text{and} \quad p^{a\dot{a}}\epsilon_{a\dot{a}}^- \propto \langle\lambda\lambda\rangle = 0. \quad (4.3)$$

Podemos ver la apariencia de los espinores de referencia, χ y $\tilde{\chi}$, los cuales son linealmente independientes de λ y $\tilde{\lambda}$ pero arbitrarios. Incluso, podemos asignar diferentes espinores de referencia para cada partícula externa. Aunque suene extraño, pero este hecho no cambia la respuesta de nuestra amplitud aún si cambiamos χ y $\tilde{\chi}$. Para ver que no hay contradicción, cambiamos el espinor de referencia χ por χ' , y expandimos a χ' como una combinación lineal del espinor de referencia original χ y el momento espinorial λ

$$\chi_a \rightarrow \chi'_a = a\chi_a + b\lambda_a.$$

El vector de polarización correspondiente cambia de forma similar acorde a

$$\epsilon_{a\dot{a}}^+ \rightarrow \epsilon_{a\dot{a}}^{+'} = \epsilon_{a\dot{a}}^+ + \left(\frac{b}{a\langle\chi\lambda\rangle} \right) p_{a\dot{a}}, \quad (4.4)$$

el cual es literalmente una transformación de norma. Así que, las polarizaciones hacen cambios dependiendo de la elección del espinor de referencia pero de una manera que deja la amplitud invariante por la indentidad de Ward. Bajo el grupo pequeño, las polarizaciones transforman como

$$\epsilon_{a\dot{a}}^+ \rightarrow t^{-2}\epsilon_{a\dot{a}}^+ \quad \text{y} \quad \epsilon_{a\dot{a}}^- \rightarrow t^2\epsilon_{a\dot{a}}^-, \quad (4.5)$$

por lo que la covarianza del pequeño grupo para cada polarización contiene sus respectivas helicidad. Una amplitud de dispersión con muchas partículas tendrá que ser multi-lineal en sus respectivas polarizaciones

$$\mathcal{M}(1^{h_1} \dots n^{h_n}) = \epsilon_{\mu_1}^{h_1} \dots \epsilon_{\mu_n}^{h_n} \mathcal{M}^{\mu_1 \dots \mu_n}, \quad (4.6)$$

donde $h_i = \pm 1$ etiqueta la helicidad de cada línea externa. Por lo tanto, la amplitud de dispersión es covariante del grupo pequeño con la función peso

$$\mathcal{M}(1^{h_1} \dots n^{h_n}) \rightarrow \prod_i t_i^{-2h_i} \mathcal{M}(1^{h_1} \dots n^{h_n}). \quad (4.7)$$

Las amplitudes de dispersión vistas de esta manera parecen más covariantes que invariantes bajo el grupo pequeño, aunque todas las observables físicas son invariantes. Sin embargo, no hay contradicción debido a que los parámetros t_i se reduce a fases puras los cuales se cancelan trivialmente cuando cuadramos el elemento de matriz. El objeto tensorial (4.6), $\mathcal{M}^{\mu_1 \dots \mu_n}$, es el objeto calculado usando diagramas de Feynman de la manera estándar, mientras que el objeto $\mathcal{M}(1^{h_1} \dots n^{h_n})$ etiqueta amplitudes de helicidad, los cuales son un conjunto de distintas funciones que corresponden a cada configuración de helicidad. Estas amplitudes de dispersión son invariantes de norma completamente, como la fórmula de Parke-Taylor [6]. El objetivo del programa de amplitudes es cambiar la amplitud $\mathcal{M}^{\mu_1 \dots \mu_n}$ en total por la amplitud $\mathcal{M}(1^{h_1} \dots n^{h_n})$ directamente desde los principios físicos vistos en (3.1), a esto se le llama *bootstrapping* [133, 9, 134].

4.1.1. Teorías constructivas para amplitudes de tres partículas

Para enumerar sistemáticamente todas las posibles interacciones entre partículas sin masa que sean invariantes de Lorentz en cuatro dimensiones, $D = 4$, y derivar fórmulas sin hacer referencia a la acción; seguiremos el concepto de bootstrapping. La principal contribución no trivial de la matriz S es la amplitud de tres partículas. De acuerdo a conservación del momento $p_1 + p_2 + p_3 = 0$, tenemos

$$(p_1 + p_2)^2 = \langle 12 \rangle [12] = p_3^2 = 0, \quad (4.8)$$

$$(p_2 + p_3)^2 = \langle 23 \rangle [23] = p_1^2 = 0, \quad (4.9)$$

$$(p_3 + p_1)^2 = \langle 31 \rangle [31] = p_2^2 = 0. \quad (4.10)$$

De la primera línea, se deduce que si $\langle 12 \rangle \neq 0$ entonces $[12] = 0$. Además, $\langle 12 \rangle [23] = -\langle 11 \rangle [13] - \langle 13 \rangle [33] = 0$. Repitiendo este procedimiento ciclicamente, encontramos que $[12] = [23] = [31] = 0$. Por otro lado, si asumimos que $[12] \neq 0$ entonces $\langle 12 \rangle = \langle 23 \rangle = \langle 31 \rangle = 0$. En resumen, las amplitudes de tres partículas solamente van a existir en dos posibles configuraciones: *holomórfica*, la cual corresponde a que todos los espinores cuadrados desaparecen

$$[12] = [23] = [31] = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\lambda}_1 \propto \tilde{\lambda}_2 \propto \tilde{\lambda}_3, \quad (4.11)$$

y *anti-holomórfica*, la cual corresponde a que todos los espinores angulados desaparezcan

$$\langle 12 \rangle = \langle 23 \rangle = \langle 31 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \propto \lambda_2 \propto \lambda_3, \quad (4.12)$$

ambas configuraciones cinemáticas implican que $p_1 p_2 = p_2 p_3 = p_3 p_1 = 0$, y se requiere momento complejo por lo que las variables λ_i y $\tilde{\lambda}_i$ son variables independientes.

Sin pérdida de generalidad, la amplitud de tres partículas en la configuración holomórfica toma la forma

$$\mathcal{M}(1^{h_1} 2^{h_2} 3^{h_3}) = \langle 12 \rangle^{n_3} \langle 23 \rangle^{n_1} \langle 31 \rangle^{n_2}. \quad (4.13)$$

Debido a la covarianza del grupo pequeño (4.7), se puede resolver los exponentes n_i en términos de helicidades h_i de las partículas externas:

$$-2h_1 = n_2 + n_3, \quad (4.14)$$

$$-2h_2 = n_3 + n_1, \quad (4.15)$$

$$-2h_3 = n_1 + n_2, \quad (4.16)$$

encontramos que

$$n_1 = h_1 - h_2 - h_3, \quad (4.17)$$

$$n_2 = h_2 - h_3 - h_1, \quad (4.18)$$

$$n_3 = h_3 - h_1 - h_2. \quad (4.19)$$

Los exponentes son números enteros ya que las helicidades son enteros o semi-enteros. Las dimensiones de masa para las amplitudes de tres partículas no pueden ser negativas, ya que esto requeriría no localidad debido a la inversa en las potencias de las derivadas en el vértice de tres partículas. Por lo tanto, asumiendo localidad implicaría que las amplitudes de tres partículas tienen dimensión de masa no negativa, esto nos lleva a que

$$[\mathcal{M}(1^{h_1} 2^{h_2} 3^{h_3})] = n_1 + n_2 + n_3 = -(h_1 + h_2 + h_3) = -h \geq 0, \quad (4.20)$$

donde los corchetes [...] denotan dimensión de masa que se acumula debido a las potencias de los momentos. Ignorando las dimensión de las constantes de acoplamiento, vemos que la constricción holomórfica aplica cuando $h \leq 0$ mientras que la anti-holomórfica aplica cuando $h \geq 0$. Lo que nos lleva a derivar una fórmula general conocida como *fórmula maestra*, para amplitudes de tres partículas sin masa en cuatro dimensiones:

$$\mathcal{M}(1^{h_1}, 2^{h_2}, 3^{h_3}) = \begin{cases} c_{123} \langle 12 \rangle^{h_3-h_2-h_1} \langle 31 \rangle^{h_2-h_1-h_3} \langle 23 \rangle^{h_1-h_2-h_3}, & h_1 + h_2 + h_3 < 0 \\ \tilde{c}_{123} [12]^{h_1+h_2-h_3} [31]^{h_1+h_3-h_2} [23]^{h_2+h_3-h_1}, & h_1 + h_2 + h_3 > 0 \end{cases}, \quad (4.21)$$

donde c_{123} , $\tilde{c}_{123}$ son constantes por ser determinadas. $\langle ij \rangle$ y $[ij]$ denotan los productos espinoriales para partículas con momento i, j . Aquí, seguiremos la misma notación que en [19], para denotar las dos configuraciones posibles de las helicidades, de partículas sin masa, que existen. Esto se muestra en la Figura 4.1.

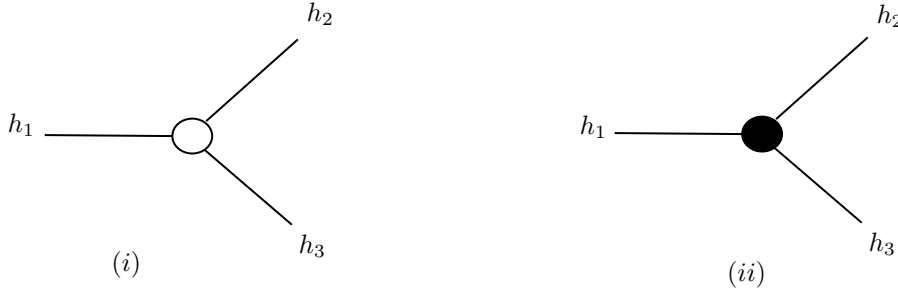


Figura 4.1: **(i)** configuración de helicidades $H = h_1 + h_2 + h_3 > 0$; **(ii)** configuración de helicidades $H = h_1 + h_2 + h_3 < 0$, aquí todas las partículas no tienen masa

La fórmula (4.21) se derivó desde análisis dimensional y simetrías, por lo que se va mantener no perturbativamente y es exclusivamente para amplitudes a nivel árbol. Contrario a ordenes de lazos (loops), los cuales generan funciones logarítmicas o funciones más complicadas que involucran objetos como $\log(p_1 p_2)$ y que son singulares o desaparecen en la cinemática para tres partículas. La fórmula (4.21) adquiere formas peculiares dependiendo si estamos con partículas escalares, vectores y tensores.

Escalares

Para escalares idénticos, todas las helicidades son $h_i = 0$, la ecuación (4.21) implica que las amplitudes de tres partículas o tres puntos es una constante

$$\mathcal{M}(123) = \omega, \quad (4.22)$$

el cual corresponde a un simple escalar auto-interactuando mediante un término de potencial cúbico. Se tiene un resultado similar cuando se tiene muchos escalares:

$$\mathcal{M}(1_a 2_b 3_c) = \omega_{abc}, \quad (4.23)$$

donde los sub-índices significan que corren sobre los sabores de los escalares. Ya que los estados externos son bosones, la constante de acoplamiento ω_{abc} es simétrico en sus índices. La expresión (4.23) es la única amplitud posible para escalares sin masa. Por otro lado, si tomamos los escalares que interactúan mediante el término $\phi(\partial\phi)^2$, estas amplitudes van a desaparecer debido a que solo dependen de productos de los momentos y estos no contribuyen: $p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p_1 p_2 = p_2 p_3 = p_3 p_1 = 0$. A nivel de la acción, al aplicar una re-definición de campos se pueden eliminar estas interacciones cúbicas.

Vectores

Para el caso de partículas vectoriales idénticas, las helicidades son $h_i = \pm 1$. Esto implica que los exponentes en (4.13) van a ser enteros impares. En consecuencia, las amplitudes de tres puntos son impares bajo el intercambio de cualquier partícula externa incluso si son bosones. Por consistencia se demanda que la amplitud para tres partículas deben desaparecer idénticamente. Esta conclusión esta en acuerdo con resultados que hay en la literatura sobre la amplitud para tres fotones el cual es cero por simetría de conjugación de carga. Este hecho prohíbe auto-interacciones cúbicas de una simple partícula vectorial, aunque permite interacciones entre especies diferentes de vectores, también conocidas como colores. Introduciendo un índice de color para cada vector, se obtiene

$$\mathcal{M}(1_a^- 2_b^- 3_c^+) = f_{abc} \frac{\langle 12 \rangle^3}{\langle 13 \rangle \langle 32 \rangle} \quad \text{y} \quad \mathcal{M}(1_a^+ 2_b^+ 3_c^-) = f_{abc} \frac{[12]^3}{[13][32]}. \quad (4.24)$$

Aquí f_{abc} es completamente anti-simétrico en sus índices así que la amplitud es par bajo el intercambio de bosones. Estas expresiones están en completo acuerdo con aquellas que se obtienen desde los diagramas de Feynman, usando las polarizaciones (4.2) en la siguiente expresión

$$\mathcal{M}(1_a 2_b 3_c) = f_{abc} (\epsilon_1 \epsilon_2) (p_1 \epsilon_3 - p_2 \epsilon_3) + \text{permutaciones cíclicas} . \quad (4.25)$$

Si tomamos las amplitudes donde la configuración de helicidades son todos negativos y todos positivos, la ecuación(4.21) se reduce a

$$\mathcal{M}(1_a^- 2_b^- 3_c^-) = f_{abc} \langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 31 \rangle, \quad \mathcal{M}(1_a^+ 2_b^+ 3_c^+) = f_{abc} [12] [23] [31], \quad (4.26)$$

donde f_{abc} es anti-simétrico entonces la amplitud es par bajo el intercambio de bosones. Al contar las potencias del momento, las amplitudes de la ecuación (4.26) provienen de una tercera derivada de la interacción entre gluones; desde un operador de dimensión alta no renormalizable, $f_{abc} F_\mu^{a\nu} F_\nu^{b\rho} F_\rho^{c\mu}$, que es generado a orden de lazos (loops) por partículas de color pesado.

Tensores

Para el caso de partículas tensoriales idénticas; las helicidades son $h_i = \pm 2$. Tomando la ecuación(4.13) podemos ver que los exponentes n_i son pares, así que la amplitud es invariante bajo el intercambio de bosones. Las amplitudes son

$$\mathcal{M}(1^{--} 2^{--} 3^{++}) = \frac{\langle 12 \rangle^6}{\langle 13 \rangle^2 \langle 32 \rangle^2}, \quad \mathcal{M}(1^{++} 2^{++} 3^{--}) = \frac{[12]^6}{[13]^2 [32]^2}, \quad (4.27)$$

los cuales corresponden a la dispersión de tres gravitones. Como vimos anteriormente, podemos comparar estas amplitudes con aquellas expresiones equivalentes que provienen de usar diagramas de Feynman, contrayendo el vértice de tres gravitones (3.97) con los tensores de polarización se tiene algo así:

$$\mathcal{M}(123) = -\frac{1}{2} (\epsilon_1 \epsilon_2)^2 (p_1 \epsilon_3) (p_2 \epsilon_3) + (\epsilon_1 \epsilon_2) (\epsilon_2 \epsilon_3) (p_1 \epsilon_3) (p_2 \epsilon_1) + \text{perm} , \quad (4.28)$$

incluso con la ayuda de una acción simplificada para la perturbación de gravitones [135] se obtiene algo similar. Podemos ver que aun con todas las simplificaciones que podamos encontrar la ecuación(4.28) luce más complicado que (4.27), aquí todos los tensores de polarización están escritos como el producto de vectores de polarización (3.61) y (3.62). Por otro lado, consideremos las amplitudes con la configuración de helicidades todas negativas y todas positivas:

$$\mathcal{M}(1^{--} 2^{--} 3^{--}) = \langle 12 \rangle^2 \langle 23 \rangle^2 \langle 31 \rangle^2, \quad \mathcal{M}(1^{++} 2^{++} 3^{++}) = [12]^2 [23]^2 [31]^2. \quad (4.29)$$

Nuevamente, si contamos las potencias de los momentos, podemos ver que estas amplitudes son generadas por las sextas derivadas que provienen de la interacción entre los gravitones inducidos por el operador de curvatura $R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}{}^{ab} R_{ab}{}^{\mu\nu}$. Como podemos ver estas amplitudes están relacionadas con curvaturas cúbicas. Las curvaturas cuadráticas R^2 , $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$, y $R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$ producen vértices de Feynman no triviales los cuales agregan contribuciones de cuarta derivada. Pareciera que saltamos hasta las contribuciones de sextas derivadas sin pasar por las de cuarta derivada. Resulta que ninguno de estos operadores R^2 , $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$, y $R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$ contribuye realmente a la amplitud de dispersión de capa de masa en cuatro dimensiones, $D = 4$. Esto fue descubierto por 't Hooft y Veltman [52] quienes calcularon por primera vez las divergencias a un lazo en cuatro dimensiones de gravedad pura; entonces el diagrama a un lazo de gravitones produce contribuciones divergentes correspondientes a un contra-término local curvado cuadrado como R^2 , $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$, y $R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$. Para entender esto a nivel de la acción, se reescribe $R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$ en términos de la combinación de Gauss-Bonnet $R^2 - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$. En $D = 4$, este término es una derivada total el cual se desacopla de la dispersión perturbativa, luego explotando la re-definición de campos podemos

conectar la ecuación de movimiento del orden principal (leading order), los cuales son las ecuación de campo de Einstein, en las correcciones del siguiente orden principal (next to leading order). Esto establece que $R = R_{\mu\nu} = 0$ en los operadores de curvatura cuadrados, eliminandose entre sí.

En cuatro dimensiones, estos operadores de curvatura cuadrados no contribuyen a la matriz S del gravitón a nivel árbol, entonces gravedad pura es finita un lazo. Durante mucho tiempo se creía que gravedad pura era finita a mayores ordenes de lazos pero la esperanza se término cuando el cálculo llevo a las divergencias de dos lazos correspondientes a los contra-términos $R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}{}^{ab} R_{ab}{}^{\mu\nu}$ [136, 137, 138, 139]. Hoy en día entender la estructura divergente de las teorías de supergravedad es un campo activo de estudio. Algunos estudios han encontrado cancelaciones inesperadas que provienen de contratérminos sugiriendo que la teoría de supergravedad $\mathcal{N} = 8$ podría ser finita en el ultra-violeta a todos los ordenes [140, 141, 142, 143, 144, 145]. Ahora utilicemos la fórmula (4.21) que nos va permitir escribir las amplitudes de tres puntos tanto para las interacciones entre gluones y gluinos como para la de gravitones y gravitinos. Ya que estamos interesados en el contexto de las relaciones de KLT, los cálculos relacionados con $(\tilde{g}\tilde{g}g)$ pueden ser usados para probar la equivalencia entre las amplitudes de una teoría de supergravedad y una de super-Yang Mills (SYM) como habíamos mencionado en la introducción.

Interacciones	Parametros entrantes				Amplitud de 3-puntos $\mathcal{M}(1^{h_1}, 2^{h_2}, 3^{h_3})$
	h_1	h_2	h_3	H	
gluino-gluino-gluon $(\tilde{g}\tilde{g}g)$	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$-\frac{1}{2}$	$+1 > 0$	$\tilde{c}_{123} \frac{[12]^2}{[31]}$
	$-\frac{1}{2}$	-1	$+\frac{1}{2}$	$-1 < 0$	$c_{123} \frac{\langle 12 \rangle^2}{\langle 31 \rangle}$
graviton-graviton-graviton (hhh)	$+2$	$+2$	-2	$+2 > 0$	$\tilde{G}_{123} \frac{[12]^6}{[23]^2[31]^2}$
	-2	-2	$+2$	$-2 < 0$	$G_{123} \frac{\langle 12 \rangle^6}{\langle 23 \rangle^2 \langle 31 \rangle^2}$
gravitino-graviton-gravitino $(\tilde{h}h\tilde{h})$	$+\frac{3}{2}$	$+2$	$-\frac{3}{2}$	$+2 > 0$	$\tilde{g}_{123} \frac{[12]^5}{[23][31]^2}$
	$-\frac{3}{2}$	-2	$+\frac{3}{2}$	$-2 < 0$	$g_{123} \frac{\langle 12 \rangle^5}{\langle 23 \rangle \langle 31 \rangle^2}$

Tabla 4.1: Se presentan las amplitudes de 3-puntos para diferentes interacciones usando (4.21).

La notación H significa $h_1 + h_2 + h_3$.

Las amplitudes dadas en el segundo renglón son las únicas que satisfacen las constricciones holomorficas y anti-holomorfica que vimos anteriormente para las amplitudes de tres partículas en supergravedad $N = 1$ (SUGRA, por sus siglas en ingles) [10]. En el caso de la interacción gravitino-graviton-gravitino, si cambiamos $2 \leftrightarrow 3$ vamos a tener las amplitudes correspondientes para las configuraciones de helicidades $h_1 = +\frac{3}{2}, h_2 = -\frac{3}{2}, h_3 = +2$ y $h_1 = -\frac{3}{2}, h_2 = +\frac{3}{2}, h_3 = -2$. Si cambiamos $1 \leftrightarrow 2$, entonces las amplitudes corresponden a la configuración de helicidades $h_1 = +2, h_2 = +\frac{3}{2}, h_3 = -\frac{3}{2}$ y $h_1 = -2, h_2 = -\frac{3}{2}, h_3 = +\frac{3}{2}$. En este trabajo de tesis, no nos enfocamos explícitamente en calcular las constantes de acoplamiento $G_{123}, \tilde{G}_{123}, g_{123}, \tilde{g}_{123}$ sino que nuestro mayor interés es saber la estructura espinorial de las amplitudes [70].

4.1.2. Teorías constructivas para amplitudes de cuatro partículas

Vimos que las amplitudes de tres partículas están fijadas por las simetrías, ya que estos objetos son generados por los vértices de contacto o funciones vértice y no sufren de complicaciones al intercambiar partículas. Para extender este análisis al caso de amplitudes de cuatro partículas se necesita un nuevo ingrediente, este es *la localidad*. La localidad está codificada en las singularidades de la amplitud. En particular, cuando escogemos la cinemática de la partícula externa cuidadosamente de tal manera que la partícula mediadora o intermedia este en la capa de masa. La amplitud de tres partículas exhibe una singularidad del tipo $1/p^2$ que señala la propagación del estado intermedio sobre una distancia física macroscópica en el espacio-tiempo. En este límite de factorización, la amplitud se descompone como el producto de dos subamplitudes correspondientes

a dos diferentes procesos que ocurren en diferentes puntos. Las propiedades de factorización imponen condiciones estrictas en la estructura de la amplitud. Por ejemplo, en las amplitudes de cuatro partículas, pueden surgir polos simples como $1/s$, pero no polos del tipo $1/s^2$. Para la amplitud de cuatro partículas a nivel árbol, esto implica que

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{M}_4 = \mathcal{M}_3\mathcal{M}_3, \quad (4.30)$$

donde la cinemática no llega a ser una relación trivial entre las amplitudes de mayor orden y las de menor orden. Como un corolario se tiene que la dimensión de las masas de las amplitudes para cuatro partículas y tres partículas están relacionadas por

$$[\mathcal{M}_4] = 2[\mathcal{M}_3] - 2, \quad (4.31)$$

la dimensión de la masa tabula las contribuciones desde los factores cinemáticos y no de las constantes de acoplamiento.

Escalares

Como vimos anteriormente, las amplitudes de tres puntos tienen dimensión de masa positiva $[\mathcal{M}_3] \geq 0$, ya que los vértices asociados son locales. Por análisis dimensional, la ecuación(4.31) implica que

$$[\mathcal{M}_3] \geq 0 \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{M}_4] \geq -2,$$

así que la dimensión de la masa de las amplitudes escalares de cuatro partículas están limitadas desde abajo. Además, las amplitudes a nivel árbol debería ser una función invariante ante permutaciones de s, t y u con polos simples. Enumerando todas las posibles funciones permitidas, se obtiene

$$\phi^3 : \mathcal{M}_4 = s^{-1} + t^{-1} + u^{-1}, \quad (4.32)$$

$$\phi^4 : \mathcal{M}_4 = 1, \quad (4.33)$$

$$(\partial\phi)^2\phi^2 : \mathcal{M}_4 = s + t + u = 0, \quad (4.34)$$

$$(\partial\phi)^4 : \mathcal{M}_4 = s^2 + t^2 + u^2, \quad (4.35)$$

$$(\partial\partial\phi)^2(\partial\phi)^2 : \mathcal{M}_4 = s^3 + t^3 + u^3, \quad (4.36)$$

y así sucesivamente; en la ecuación (4.34) recordemos que estamos considerando partículas sin masa, $m_\phi = 0$. Podemos ver que la amplitud para ϕ^3 tiene singularidades en cada canal de factorización. En contraste, todas las amplitudes asociadas con derivadas escalares acopladas son regulares, consistentes con el hecho de que estas están asociadas a amplitudes de tres partículas en la capa de masa que son cero.

Vectores

Ahora consideremos las amplitudes a nivel árbol para cuatro partículas vectoriales sin masa. Siguiendo el mismo análisis que hicimos previamente, vimos que $[\mathcal{M}_3] = 1$, entonces de la ecuación(4.31) implica que

$$[\mathcal{M}_3] = 1 \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{M}_4] = 2[\mathcal{M}_3] - 2 = 0. \quad (4.37)$$

Por lo que la amplitud no tiene dimensiones. Considerando las constricciones que surgen de la covarianza del pequeño grupo y con análisis dimensional, es posible construir una hipótesis restrictiva para la amplitud de cuatro partículas. De este modo, la amplitud debería transformar como

$$\mathcal{M}(1_a^- 2_b^- 3_c^+ 4_d^+) \rightarrow t_1^2 t_2^2 t_3^{-2} t_4^{-2} \mathcal{M}(1_a^- 2_b^- 3_c^+ 4_d^+), \quad (4.38)$$

bajo el pequeño grupo. Factorizando la función peso del pequeño grupo de la amplitud, entonces tenemos que

$$\mathcal{M}(1_a^- 2_b^- 3_c^+ 4_d^+) = \langle 12 \rangle^2 [34]^2 F(s, t, u), \quad (4.39)$$

donde se define que

$$F(s, t, u) = \frac{c_{st}}{st} + \frac{c_{tu}}{tu} + \frac{c_{us}}{us}, \quad (4.40)$$

el cual es el invariante bajo el pequeño grupo más general de dimensiones de masa apropiadas que tiene polos simples. Las constantes c_{st}, c_{tu}, c_{us} no tienen dimensiones. Por ejemplo, si demandamos que en el canal-s la factorización tenga singularidad, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s \mathcal{M}(1_a^- 2_b^- 3_c^+ 4_d^+) &= \langle 12 \rangle^2 [34]^2 \frac{1}{t} (c_{st} - c_{us}) \\ &= \sum_{h=\pm} \sum_e \mathcal{M}(1_a^- 2_b^- P_e^h) \mathcal{M}(3_c^+ 4_d^+ P_e^{-h}) \\ &= \sum_e \mathcal{M}(1_a^- 2_b^- P_e^+) \mathcal{M}(3_c^+ 4_d^+ P_e^-) \\ &= \sum_e f_{abe} f_{cde} \frac{\langle 12 \rangle^3}{\langle 1P \rangle \langle P2 \rangle} \frac{[34]^3}{[3P][P4]} \\ &= \sum_e f_{abe} f_{cde} \langle 12 \rangle^2 [34]^2 \frac{1}{t}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

donde se ha definido $P = -(p_1 + p_2) = (p_3 + p_4)$ y se fija $t = -u$ sobre el canal de factorización. En las últimas líneas se ha usado que

$$\langle 1P \rangle [P4] = -\langle 12 \rangle [24] \quad y \quad \langle P2 \rangle [3P] = \langle 42 \rangle [34]. \quad (4.42)$$

Igualando la primera y la ultima línea de la ecuación(4.41) se obtiene una ecuación para $c_{st} - c_{us}$, en términos de constantes de estructura. Del mismo modo para los canales $-s$ y $-t$, se obtiene un triplete de ecuaciones:

$$c_{st} - c_{us} = \sum_e f_{abe} f_{cde}, \quad (4.43)$$

$$c_{tu} - c_{st} = \sum_e f_{bce} f_{ade}, \quad (4.44)$$

$$c_{us} - c_{tu} = \sum_e f_{cae} f_{bde}, \quad (4.45)$$

los cuales satisfacen una ecuación de Jacobi

$$\sum_e f_{abe} f_{cde} + f_{bce} f_{ade} + f_{cae} f_{bde} = 0. \quad (4.46)$$

En cualquier curso de teoría cuántica de campos, la identidad de Jacobi aparece como una identidad fundamental, en términos de álgebras de Lie esta es

$$\text{tr}([T_a, T_b][T_c, T_d]) + \text{tr}([T_b, T_c][T_a, T_d]) + \text{tr}([T_c, T_a][T_b, T_d]) = 0. \quad (4.47)$$

Pero en la ecuación(4.46) surge como una condición consistente desde la factorización de la amplitud de cuatro partículas.

Tensores

La amplitud a nivel árbol para cuatro partículas tensoriales sin masa, tiene dimensiones de masa $[\mathcal{M}_3] = 2$, entonces la ecuación (4.31), implica que

$$[\mathcal{M}_3] = 2 \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{M}_4] = 2[\mathcal{M}_3] - 2 = 2. \quad (4.48)$$

Como antes lo hicimos, construimos una hipótesis para la amplitud de cuatro partículas consistente con las propiedad del pequeño grupo y el análisis dimensional, entonces

$$\mathcal{M}(1^{--}2^{--}3^{++}4^{++}) = \langle 12 \rangle^4 [34]^4 F(s, t, u), \quad (4.49)$$

donde $F(s, t, u)$ es el objeto invariante bajo el pequeño grupo con dimensiones de masa correctas con polos simples,

$$F(s, t, u) \propto \frac{1}{stu}.$$

Las fórmulas que aquí se han deducido están en total acuerdo con las expresiones conocidas para la amplitud de cuatro gravitones. La fórmula (4.49) se dedujo sin la necesidad de imponer la factorización.

4.2. Teorías constructivas para partículas con masa

Como vimos en la sección (3.6), Nima Arkani Hamed, Huang y Huang [17] introdujeron los espín espinores para poder escribir cualquier amplitud de dispersión de partículas con masa. También estos autores derivaron los vértices de tres puntos más generales y construyeron las reglas para crear teorías constructivas usando estos vértices. Por ejemplo, se han encontrado los vértices de tres puntos en el modelo estándar usando esta teoría constructiva [132, 146]. Las amplitudes de Born usando estos métodos fueron estudiados en [147]. Amplitudes de helicidad con quarks masivos fueron calculados en la referencia [18]. El mecanismo de Higgs fue estudiado en este contexto en [148, 149]. Operadores de mayor dimensión fueron calculados en este contexto de teorías constructivas en [150]. Una discusión en el contexto de gravedad se puede encontrar en [151]. Materia oscura en el contexto de teorías constructivas fueron estudiadas en [38]. La renormalización de operadores de altas dimensiones en este contexto se obtuvieron en [152]. Los vértices de tres partículas no solamente fueron concebidas desde los espinores de helicidad para partículas sin masa como vimos en la sección 4.1 sino también desde los espín espinores. Los vértices permitidos son restringidos por las propiedades de localidad y el requerimiento en el límite de altas energías de estos vértices y amplitudes coincidan con los resultados obtenidos para partículas sin masa. Un ingrediente clave para entender individualmente estos vértices con espín espinores es el factor x , introducido por Nima, Huang y Huang [17]

4.2.1. El factor x

En general, para construir vértices de tres puntos se necesitan dos espinores de helicidad que sean linealmente independientes. En el caso en el que tenemos dos partículas masivas con la misma masa $p_1^2 = m^2 = p_2^2$, y una partícula sin masa $p_3^2 = 0$, aparece lo que se conoce como *factor- x* , donde solamente hay un espinor de helicidad linealmente independiente $|\xi\rangle$ o $|\xi]$; su definición y propiedades son descritas en [17, 146, 153], pero aquí las revisaremos a continuación. Vayamos al espacio de los espinores de helicidad donde $|3\rangle$ y $\frac{1}{m}p_2|3\rangle$ son paralelos, entonces el producto interno es

$$\langle 3|p_2|3\rangle = \langle 3|2|3\rangle = \langle 32\rangle[23] = \text{Tr}(p_2 \cdot p_3) = 2(p_2 \cdot p_3) = (p_2 + p_3)^2 - m^2 = p_1^2 - m^2 = m^2 - m^2 = 0,$$

donde se ha usado la definición de traza (3.48), y la conservación de momento para tres partículas $p_1 + p_2 + p_3 = 0$ esto implica que $p_2 + p_3 = -p_1$. Entonces podemos relacionar ambos espinores mediante una constante de proporcionalidad, que vamos a llamar x , de la siguiente manera:

$$x_{12}|3\rangle_a = \frac{p_{2ab}}{m}|3]^b = -\frac{p_{1ab}}{m}|3]^b, \quad (4.50)$$

donde los subíndices 12 representan las partículas del vértice con la misma masa, en este caso p_1 va ser la partícula y p_2 la anti-partícula, mientras que la partícula sin masa es p_3 . También se ha usado la ecuación de Weyl: $p_3|3\rangle = p_3|3] = 0$ y conservación de momento para tres partículas. Como podemos ver en (4.50) existe una ambigüedad acerca de si debemos tomar p_2 o $-p_1$; ya que escoger uno o el otro nos van a dar identidades o resultados que no son equivalentes. Por lo tanto, siguiendo el trabajo de Arkani, Huang y Huang [17], vamos a simetrizar la fórmula tomando el promedio de ambos resultados, entonces:

$$x_{12}|3\rangle_a = \frac{1}{2m} (p_{2ab} - p_{1ab})|3]^b, \quad (4.51)$$

aquí aparece el signo menos, -, debido a que por conservación de momento para tres partículas, $p_1 + p_2 + p_3 = 0$, en la ecuación(4.51) el signo positivo, +, nos va dar $p_1 + p_2 = -p_3$, entonces p_3 va actuar sobre el espinor $|3]$ dando una ecuación de Weyl $p_3|3] = 0$, por lo tanto la suma en (4.51) no es valida ya que nos da un resultado que desaparece. Similarmente se define para $\tilde{x}$

$$\tilde{x}_{12}|3]^{\dot{a}} = \frac{p_2^{\dot{a}b}}{m}|3\rangle_b = -\frac{p_1^{\dot{a}b}}{m}|3\rangle_b, \quad (4.52)$$

simetrizando de la misma manera se tiene:

$$\tilde{x}_{12}|3]^{\dot{a}} = \frac{1}{2m} (p_2^{\dot{a}b} - p_1^{\dot{a}b})|3\rangle_b. \quad (4.53)$$

En esta expresión podemos ver que $\tilde{x}$ es el reciproco de x . Para ver esto, se multiplica por ambos lados por $(p_2 - p_1)/2m$, entonces

$$\tilde{x}_{12} \frac{(p_{2b\dot{a}} - p_{1b\dot{a}})}{2m} |3]^{\dot{a}} = \frac{2m^2 - 2p_1 \cdot p_2}{4m^2} |3\rangle_b, \quad (4.54)$$

sin embargo

$$2p_1 \cdot p_2 = (p_1 + p_2)^2 - 2m^2 = p_3^2 - 2m^2 = -2m^2, \quad (4.55)$$

entonces $2m^2 - 2p_1 \cdot p_2 = 4m^2$, dando como resultado

$$\frac{(p_{2b\dot{a}} - p_{1b\dot{a}})}{2m} |3]^{\dot{a}} = \frac{1}{\tilde{x}_{12}} |3\rangle_b, \quad (4.56)$$

donde hemos despejado $\tilde{x}_{12}$. Vemos que la parte derecha de (4.56) es la misma que la parte izquierda de (4.51), entonces

$$x_{12}|3\rangle_b = \frac{1}{\tilde{x}_{12}} |3\rangle_b, \quad (4.57)$$

por lo tanto

$$\tilde{x} = \frac{1}{x}. \quad (4.58)$$

Por otro lado, multiplicando las ecuaciones (4.51) y (4.68) por un espinor de helicidad de referencia línealmente independiente para obtener otro tipo de expresiones de x y $\tilde{x}$:

$$x_{12} = \frac{\langle \xi | (p_2 - p_1) | 3 \rangle}{2m \langle \xi 3 \rangle}, \quad (4.59)$$

$$\tilde{x}_{12} = \frac{[\xi | (p_2 - p_1) | 3\rangle}{2m[\xi 3]}. \quad (4.60)$$

En principio, tenemos la libertad de escoger libremente cualquier espinor independiente de referencia para $|\xi\rangle$ y $[\xi]$. Si este espinor no es físico entonces se debe cancelar al final de los cálculos. Estos espinores de referencia lucen como si fuera una norma, pero no lo es. En teorías constructivas no hay norma, pero es similar en el sentido de que no afectan los cálculos y se cancelan al final de estos. Veamos unos ejemplos de esto, tomemos al espinor de referencia como $|\xi\rangle = p_4|3\rangle$, y multiplicando en (4.51) vamos a tener

$$[3|p_4x_{12}|3\rangle = \frac{1}{2m}[3|p_4(p_2 - p_1)|3\rangle, \quad (4.61)$$

ya que x es una constante, puede salir de los brackets y $p_1 = -p_2 - p_3$,

$$x_{12}[3|p_4|3\rangle = \frac{1}{2m}[3|p_4(p_2 + p_2 + p_3)|3\rangle = \frac{1}{2m}[3|p_4(2p_2 + p_3)|3\rangle, \quad (4.62)$$

tenemos dos términos, uno de ellos desaparece, este es

$$-\frac{1}{2m} \frac{[3|p_4p_3|3\rangle}{[3|p_4|3\rangle} = 0, \quad (4.63)$$

por la acción de la ecuación de Weyl, $p_3|3\rangle = 0$. Entonces tenemos que

$$x_{12} = \frac{1}{2m} \frac{[3|2p_4p_2|3\rangle}{[3|p_4|3\rangle} = \frac{1}{m} \frac{[34]\langle 42\rangle[23]}{[3|p_4|3\rangle} = \frac{1}{m} \frac{\langle 42\rangle[23]}{\langle 43\rangle}, \quad (4.64)$$

donde se ha usado la identidad de cadena cuadrada $[3|p_4p_2|3\rangle = [34]\langle 42\rangle[23]$, también existe el equivalente angulado, el cual sería $\langle 3|p_4p_2|3\rangle = \langle 34\rangle[42]\langle 23\rangle$; simplemente notación. Y se ha usado que $[3|p_4|3\rangle = [34]\langle 43\rangle$. Ahora, si ponemos $p_2 = -p_1 - p_3$ en (4.61) entonces el factor x , va ser:

$$x_{12} = -\frac{\langle 41\rangle[13]}{m\langle 43\rangle}. \quad (4.65)$$

Notemos que para ir de una amplitud a otra, cambiar el momento tiene el efecto de $p_1 \leftrightarrow p_2$ en la amplitud, concluyendo que x no es unicamente definida. De manera similar para $\tilde{x}$ pero con un espinor de referencia $[\xi] = p_4|3\rangle$, multiplicando este espinor de referencia a ambos lados de la igualdad en (4.68), entonces

$$\langle 3|p_4\tilde{x}_{12}|3\rangle = \frac{1}{2m}\langle 3|p_4(p_2 - p_1)|p_3\rangle, \quad (4.66)$$

usando conservación del momento, $p_2 = -p_1 - p_3$, vamos a tener

$$\tilde{x}_{12}\langle 3|p_4|3\rangle = \frac{1}{2m}\langle 3|p_4(-p_1 - p_3 - p_1)|3\rangle, \quad (4.67)$$

dando como resultado

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{12} &= -\frac{1}{2m} \frac{\langle 3|p_4(2p_1)|3\rangle}{\langle 3|p_4|3\rangle} \\ &= \frac{1}{m} \frac{\langle 3|p_1p_4|3\rangle}{\langle 3|p_4|3\rangle} \\ &= \frac{1}{m} \frac{\langle 31\rangle[14]\langle 43\rangle}{\langle 34\rangle[43]} \\ &= -\frac{1}{m} \frac{\langle 31\rangle[14]}{[43]}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Ya mencionado el factor- x , ahora procedemos a definir los vértices de tres puntos con partículas masivas; queremos encontrar las máster fórmulas como la de (4.21) pero con partículas masivas y espín espinores. Este reto lo resolvieron Nima Arkani Hammed, Huang y Huang utilizando el concepto del mínimo vértice definido de la siguiente manera [17], para partículas de helicidad positiva:

$$\mathcal{M}(\mathbf{1}_p, 3^h, \mathbf{2}_{\bar{p}}) = x^h \frac{\langle \mathbf{12} \rangle^{2S}}{m^{2S-1}}, \quad (4.69)$$

donde las partículas masivas están denotadas por la notación en negritas, $\mathbf{1}$ y $\mathbf{2}$, además tienen la misma masa y espín, donde el espín está simetrizado. La ecuación (4.69) va a ser la notación que vamos a usar para describir amplitudes de tres partículas donde 3^h en $\mathcal{M}$ se refiere a la partícula sin masa de helicidad positiva h ; $\mathbf{1}_p$ se refiere al momento de la partícula masiva y $\mathbf{2}_{\bar{p}}$ al momento de la antipartícula masiva, ambos de masa $m_p = m = m_{\bar{p}}$. Con

$$x = \frac{\langle \xi | p_2 | 3 \rangle}{m \langle \xi 3 \rangle}, \quad (4.70)$$

aquí se puede ver que x transforma bajo el grupo pequeño del mismo modo si la partícula 3 es de helicidad $+1$. Entonces, el vértice (4.69) fue construido de tal manera de que tenga las propiedades de transformación correcta, ya que el factor x crece como potencia de la helicidad h y $\langle \mathbf{12} \rangle$ crece como potencia del espín $2S$. Para partículas de helicidad negativa se define el vértice de tres puntos como

$$\mathcal{M}(\mathbf{1}_p, 3^{-h}, \mathbf{2}_{\bar{p}}) = \tilde{x}^{-h} \frac{[\mathbf{12}]^{2S}}{m^{2S-1}}, \quad (4.71)$$

con

$$\tilde{x} = \frac{[\xi | p_2 | 3]}{m [\xi 3]}. \quad (4.72)$$

Vemos que, $\tilde{x}$ se transforma como una partícula de helicidad negativa, como se espera. Cuando estos vértices, (4.69) y (4.71), se usan para construir amplitudes de mayor orden, el espinor de referencia ξ puede escogerse independientemente de cada vértice, no necesariamente debe ser el mismo de cualquiera de los dos vértices de la misma amplitud aunque al final del cálculo se cancelan así como ocurre en el caso sin masa que vimos en (3.4.1). Un estudio del correcto comportamiento de estos vértices en el modelo estándar, cuando se toma el límite de masa cero, $m \rightarrow 0$, se presenta en [146], donde se toman correcciones a la masa a primer orden. Ahora, veremos algunos ejemplos. Consideremos la amplitud de dos quarks masivos Q y $\bar{Q}$ de espín $S = \pm 1/2$, y un gluón g , partícula sin masa de helicidad $h = \pm 1$. Entonces usando la fórmula (4.69), para un gluón de helicidad positiva se tiene

$$\mathcal{M}_3(\mathbf{1}_Q, 3^+, \mathbf{2}_{\bar{Q}}) = \frac{x^{+1} \langle \mathbf{12} \rangle^{2(\frac{1}{2})}}{m^{2(\frac{1}{2})-1}} \quad (4.73)$$

$$= x \langle \mathbf{12} \rangle \quad (4.74)$$

$$= \frac{\langle q | \mathbf{2} | 3 \rangle}{m \langle q 3 \rangle} \langle \mathbf{12} \rangle \quad (4.75)$$

$$= \frac{\langle q | - (p_1 + p_3) | 3 \rangle}{m \langle q 3 \rangle} \langle \mathbf{12} \rangle \quad (4.76)$$

$$= - \langle \mathbf{12} \rangle \frac{\langle q | p_1 | 3 \rangle + \langle q | p_3 | 3 \rangle}{m \langle q 3 \rangle} \quad (4.77)$$

$$= - \frac{\langle \mathbf{12} \rangle \langle q | p_1 | 3 \rangle}{m \langle q 3 \rangle} \quad (4.78)$$

$$= - \frac{\langle \mathbf{12} \rangle \langle q | 1 | 3 \rangle}{m \langle q 3 \rangle} \quad (4.79)$$

donde se ha utilizado el factor x (4.70) en la línea (4.75) con $\xi = q$, por simplicidad se escoge la notación para los momentos de las partículas masivas $p_2 = \mathbf{2}$, en la línea (4.76) se utiliza conservación de momento: $p_1 + p_2 + p_3 = 0 \Rightarrow p_2 = -(p_1 + p_3)$ y $\langle q|p_3|3\rangle = \langle q3|33\rangle = 0$, es cero por ecuación de Weyl o $[33] = 0$. Si escogemos $q = 4$ en (4.79) vamos a ver que tenemos el mismo factor x que se obtuvo por simetrización de los espinores de helicidad (4.65). Ahora, para un gluón de helicidad negativa usando la fórmula (4.71) se tiene:

$$\mathcal{M}_3(\mathbf{1}_Q, 3^-, \mathbf{2}_{\bar{Q}}) = \frac{\tilde{x}^{-h}[\mathbf{12}]^{2S}}{m^{2S-1}} \quad (4.80)$$

$$= \tilde{x}^{-(-1)} \frac{[\mathbf{12}]^{2(\frac{1}{2})}}{m^{2(\frac{1}{2})-1}} \quad (4.81)$$

$$= \tilde{x}[\mathbf{12}] \quad (4.82)$$

$$= [\mathbf{12}] \frac{[q|p_2|3\rangle}{m[q3]} \quad (4.83)$$

$$= \frac{[\mathbf{12}]\langle 3|p_2|q\rangle}{m[3q]} \quad (4.84)$$

$$= -\frac{[\mathbf{12}]\langle 3|(p_1 + p_3)|q\rangle}{m[3q]} \quad (4.85)$$

$$= -\frac{[\mathbf{12}]\langle 3|p_1|q\rangle}{m[3q]} \quad (4.86)$$

$$= -\frac{[\mathbf{12}]\langle 3|1|q\rangle}{m[3q]}, \quad (4.87)$$

donde se ha seguido la misma argumentación que el cálculo anterior. Si escogemos $q = 4$ en (4.87) se tiene el mismo factor x que se obtuvo por simetrización en (4.68).

Hemos dicho que el factor x es exclusivamente para vértices de tres puntos o partículas, pero resulta que hay una manera de ver amplitudes de cuatro partículas o cuatro puntos como un vértice de tres puntos mediante el concepto del factor x . Consideremos una amplitud de cuatro puntos con tres partículas masivas p_1, p_2, p_4 y una partícula sin masa p_3 .

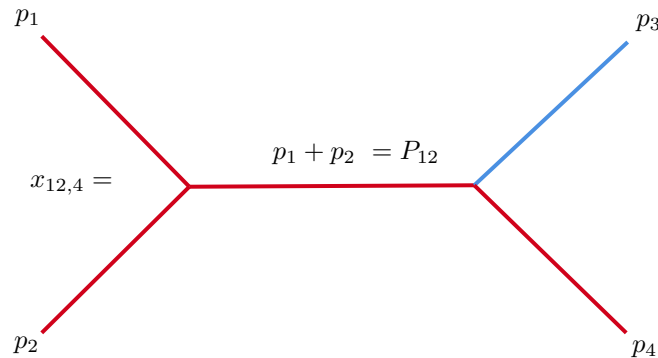


Figura 4.2: Amplitud de cuatro puntos con factor $x_{12,4}$; en el canal- s , las líneas rojas significan partículas masivas; las líneas azules significan partículas sin masa

En este caso, queremos tener una amplitud con el factor $x_{12,4}$ en el canal- s , donde los sub-índices quieren decir que las partículas masivas p_1 y p_2 entran hacia el vértice con momento p_{12} y la anti-partícula va tener momento p_4 con $m_2 = m_1 = m_4 = m$. Entonces vamos a calcular la

amplitud de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 x_{12,4} &= x_{12,4} \times 1 \\
 &= x_{12,4} \frac{(p_2 + p_3)^2 - m^2}{(u - m^2)} \\
 &= x_{12,4} \frac{p_2^2 + 2(p_2 \cdot p_3) + p_3^2 - m^2}{(u - m^2)} \\
 &= x_{12,4} \frac{m^2 + 2(p_2 \cdot p_3) - m^2}{(u - m^2)} \\
 &= x_{12,4} \frac{2(p_2 \cdot p_3)}{(u - m^2)} \\
 &= x_{12,4} \frac{\langle \mathbf{23} \rangle [\mathbf{32}]}{(u - m^2)} \\
 &= x_{12,4} \frac{[\mathbf{32}] \langle \mathbf{23} \rangle}{(u - m^2)} \\
 &= x_{12,4} \frac{[3|p_2|3]}{(u - m^2)} \\
 &= \frac{[3|p_2(x_{12,4}|3])}{(u - m^2)}. \tag{4.88}
 \end{aligned}$$

En la última línea se va aplicar la fórmula (4.51); además la conservación de momento $(p_1 + p_2) = -(p_3 + p_4)$ y la ecuación de Weyl $p_3|3] = 0$, entonces vamos a tener que

$$x_{12,4} = \frac{[3|p_2(p_4 - (p_1 + p_2))|3]}{2m(u - m^2)} \tag{4.89}$$

$$= \frac{[3|p_2(p_4 + (p_3 + p_4))|3]}{2m(u - m^2)} \tag{4.90}$$

$$= \frac{[3|p_2(2p_4)|3]}{2m(u - m^2)} \tag{4.91}$$

$$= \frac{[3|p_2p_4|3]}{m(u - m^2)}. \tag{4.92}$$

Por lo tanto, hemos obtenido la amplitud de cuatro puntos con tres partículas masivas y una sin masa en el canal- s , se puede ver que queda expuesto la helicidad de la partícula externa sin masa, en este caso es de helicidad positiva:

$$\mathcal{M}(\mathbf{1}_p, \mathbf{2}_p, \mathbf{3}^+, \mathbf{4}_{\bar{p}}) = x_{12,4} = \frac{[3|p_2p_4|3]}{m(u - m^2)}. \tag{4.93}$$

Para el canal- u vamos a tener un factor x denotado como $x_{2,14}$, entonces

$$\begin{aligned}
 x_{2,14}|3] &= \frac{1}{2m} \left((p_1 + p_4) - p_2 \right) |3] \\
 &= \frac{1}{2m} \left(-(p_2 + p_3) - p_2 \right) |3] \\
 &= \frac{-1}{2m} 2p_2 |3] \\
 &= -\frac{1}{m} p_2 |3]. \tag{4.94}
 \end{aligned}$$

Aquí simplemente se ha usado la fórmula (4.51), multiplicando el espinor $[3|p_4$ en ambos lados de la igualdad, se tiene:

$$[3|p_4 x_{2,14}|3\rangle = -\frac{1}{m}[3|p_4 p_2|3], \quad (4.95)$$

entonces

$$x_{2,14}[3|p_4|3\rangle = -\frac{1}{m}[3|p_4 p_2|3], \quad (4.96)$$

lo que implica que

$$x_{2,14} = \frac{1}{m} \frac{[3|p_2 p_4|3]}{[3|p_4|3]} \quad (4.97)$$

4.2.2. El decaimiento $Z \rightarrow f \bar{f}$

En el caso de amplitudes que involucran tres partículas se hace uso de las reglas y fórmulas establecidas por Arkani, Huang y Huang [17]. La amplitud para tal proceso toma la forma:

$$\mathcal{M} = g_{zv\bar{v}} \frac{\langle 31 \rangle [23]}{M_z}, \quad (4.98)$$

esta ecuación se puede obtener usando las formulas maestras de Nima, Huang y Huang. Dicha amplitud se puede encontrar en las tablas de Christensen [132, 146]. En la amplitud (4.98) el neutrino se toma como la partícula 1, el anti-neutrino como la partícula 2, y el bosón z másivo como la Partícula 3. Hay dos formas de calcular la amplitud cuadrada, la explícita y la implícita. Empezamos viendo la explícita, para esto se necesita calcular la amplitud para cada combinación posible de espín, luego elevar al cuadrado cada una de ellas y sumar todas las combinaciones. De la ecuación (4.98) se necesita determinar $\langle 31 \rangle$ y $[23]$. De la referencia [132] se tienen productos espinoriales explícitas, en particular:

$$\langle i^I j \rangle = \sqrt{2E_j} \begin{pmatrix} \sqrt{E_i + p_i} & (s_i c_j - c_i s_j) \\ \sqrt{E_i - p_i} & (s_i^* s_j + c_i c_j) \end{pmatrix} \quad (4.99)$$

$$[i j^I] = \sqrt{2E_i} \begin{pmatrix} -\sqrt{E_j - p_j} & (c_i c_j + s_i^* s_j) \\ \sqrt{E_j + p_j} & (c_i s_j^* - s_i^* c_j) \end{pmatrix} \quad (4.100)$$

En este caso, se considera el marco en reposo del bosón z . Tal como se muestra en la figura:

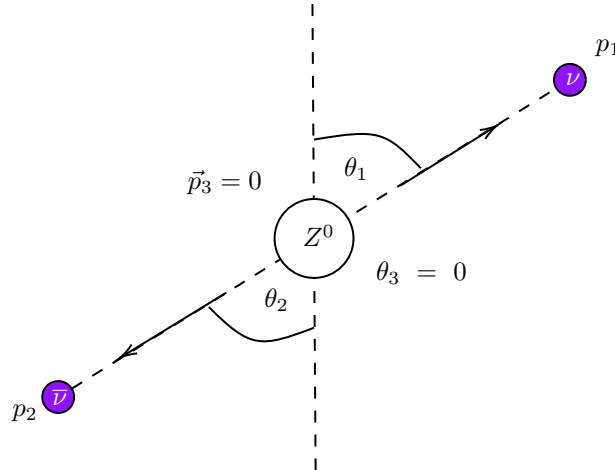


Figura 4.3: Marco en reposo del bosón Z^0 , con momento $\vec{p}_3$

La cinemática para la partícula 3, bosón Z, es $\vec{p}_3 = 0$, lo que implica que $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$. Además, $E_3 = E_1 + E_2$, ya que las partículas 1 y 2 no tienen masa, sus momentos son iguales $E_1 = E_2$, por lo tanto

$$E_1 = E_2 = \frac{E_2}{2} = \frac{M_2}{2}. \quad (4.101)$$

Usando (4.99) y (4.100), junto con la cinemática se tiene:

$$\begin{aligned} [2\mathbf{3}^I] &= \sqrt{2E_2} \begin{pmatrix} -\sqrt{E_3-0} & (c_2 \times 1 + s_2^* \times 0) \\ \sqrt{E_3+0} & (c_2 \times 0 - s_2^* \times 1) \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2E_2} \begin{pmatrix} -\sqrt{M_z} & c_2 \\ -\sqrt{M_z} & s_2^* \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2 \left(\frac{M_z}{2} \right)} \begin{pmatrix} -\sqrt{M_z} & c_2 \\ -\sqrt{M_z} & s_2^* \end{pmatrix} \\ &= M_z (-c_2). \end{aligned} \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{3}^I 1 \rangle &= \sqrt{2E_1} \begin{pmatrix} \sqrt{E_3+0} (0 \times c_1 - s_1 s_1) \\ \sqrt{E_3-0} (0 \times s_1 + 1 \times c_1) \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2E_1} \begin{pmatrix} -\sqrt{M_z} & s_1 \\ \sqrt{M_z} & c_1 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2 \left(\frac{M_z}{2} \right)} \begin{pmatrix} -\sqrt{M_z} & s_1 \\ \sqrt{M_z} & c_1 \end{pmatrix} \\ &= M_z \begin{pmatrix} -s_1 \\ c_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Ahora multiplicando (4.102) y (4.103) en (4.98) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{g_{zv\bar{v}}}{M_z} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{3}^1 1 \rangle [2\mathbf{3}^1] \\ (\langle \mathbf{3}^1 1 \rangle [2\mathbf{3}^2] + \langle \mathbf{3}^2 1 \rangle [2\mathbf{3}^1]) / \sqrt{2} \\ \langle \mathbf{3}^2 1 \rangle [2\mathbf{3}^2] \end{pmatrix} \\ &= \frac{g_{zv\bar{v}}}{M_z} \times M_z^2 \begin{pmatrix} -s_1 \times (-c_2) \\ (-s_1 \times (-s_2^*) + c_1 \times (-c_2)) / (\sqrt{2}) \\ c_1 \times (-s_2^*) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Como el neutrino y antineutrino van en direcciones opuestas, los ángulos se simplifican, es decir: $\theta_2 = \pi - \theta_1$ y $\phi_2 = \pi + \phi_1$: la amplitud queda

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= g_{zv\bar{v}} M_z \begin{pmatrix} \sin \left(\frac{\theta_1}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi - \theta_1}{2} \right) e^{i\phi_1} \\ \left(\sin \left(\frac{\theta_1}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi - \theta_1}{2} \right) e^{i\phi_1} e^{-i(\pi + \phi_1)} - \cos \left(\frac{\theta_1}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi - \theta_1}{2} \right) \right) / \sqrt{2} \\ - \cos \left(\frac{\theta_1}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi - \theta_1}{2} \right) e^{-i(\pi + \phi_1)} \end{pmatrix} \\ &= g_{zv\bar{v}} M_z \begin{pmatrix} \sin^2 \left(\frac{\theta_1}{2} \right) \exp(i\phi_1) \\ - \sin(\theta_1) / \sqrt{2} \\ \cos^2 \left(\frac{\theta_1}{2} \right) \exp(-i\phi_1) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.105)$$

El primer renglón corresponde a la amplitud cuando el espín del bosón Z es -1, el segundo renglón corresponde a la amplitud cuando el bosón Z es de espín $s = 0$, y el tercer renglón corresponde

cuando la amplitud tiene un bosón Z de espín $s = +1$. Posteriormente, elevamos al cuadrado cada uno de los términos y los sumamos, lo que nos va dar la amplitud cuadrada:

$$\begin{aligned}
 |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= g_{zv\bar{v}}^2 M_z^2 \left[\sin^4 \left(\frac{\theta_1}{2} \right) + \frac{\sin^2(\theta_1)}{2} + \cos^4 \left(\frac{\theta_1}{2} \right) \right] \\
 &= g_{zv\bar{v}}^2 M_z^2 \left[\sin^4 \left(\frac{\theta_1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(2 \sin \left(\frac{\theta_1}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta_1}{2} \right) \right)^2 + \cos^4 \left(\frac{\theta_1}{2} \right) \right] \\
 &= g_{zv\bar{v}}^2 M_z^2 \left[\sin^4 \left(\frac{\theta_1}{2} \right) + 2 \sin^2 \left(\frac{\theta_1}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\theta_1}{2} \right) + \cos^4 \left(\frac{\theta_1}{2} \right) \right] \\
 &= g_{zv\bar{v}}^2 M_z^2 \left(\sin^2 \left(\frac{\theta_1}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{\theta_1}{2} \right) \right)^2 \\
 &= g_{zv\bar{v}}^2 M_z^2.
 \end{aligned} \tag{4.106}$$

Por otro lado, la forma implícita implica conjugar la amplitud, multiplicar la amplitud por su compleja conjugada, contraer índices de espín y sumar sobre ellos y aplicar identidades espinoriales para reducir todo en términos masas. En el caso del bosón Z por ser una partícula de espín 1, entonces se necesitan $2(1) = 2$ índices de espín $\text{su}(2)$. Por lo tanto la amplitud (4.98) queda de la siguiente forma:

$$\mathcal{M}^{IJ} = g_{zv\bar{v}} \left(\frac{\langle \mathbf{3}^I 1 \rangle [23^J]}{2M_z} + \frac{\langle \mathbf{3}^J 1 \rangle [23^I]}{2M_z} \right), \tag{4.107}$$

la amplitud está simetrizada, donde se usa el factor $1/2$ en lugar de $1/\sqrt{2}$. El complejo conjugado es

$$\mathcal{M}_{IJ}^* = g_{zv\bar{v}}^* \left(\frac{-\langle \mathbf{3}_J 2 \rangle [13_I]}{2M_z} - \frac{\langle \mathbf{3}_I 2 \rangle [13_J]}{2M_z} \right), \tag{4.108}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= -g_{zv\bar{v}}^2 \left(\frac{\langle \mathbf{3}^I 1 \rangle [23^J]}{2M_z} + \frac{\langle \mathbf{3}^J 1 \rangle [23^I]}{2M_z} \right) \times \left(\frac{\langle \mathbf{3}_J 2 \rangle [13_I]}{2M_z} + \frac{\langle \mathbf{3}_I 2 \rangle [13_J]}{2M_z} \right) \\
 &= -g_{zv\bar{v}}^2 \left(\frac{\langle \mathbf{3}^I 1 \rangle [23^J] \langle \mathbf{3}_J 2 \rangle [13_I]}{4M_z^2} + \frac{\langle \mathbf{3}^I 1 \rangle [23^J] \langle \mathbf{3}_I 2 \rangle [13_J]}{4M_z^2} + \frac{\langle \mathbf{3}^J 1 \rangle [23^I] \langle \mathbf{3}_J 2 \rangle [13_I]}{4M_z^2} + \frac{\langle \mathbf{3}^J 1 \rangle [23^I] \langle \mathbf{3}_I 2 \rangle [13_J]}{4M_z^2} \right) \\
 &= -g_{zv\bar{v}}^2 \left(\frac{\langle \mathbf{3}^I 1 \rangle [23^J] \langle \mathbf{3}_J 2 \rangle [13_I]}{2M_z^2} + \frac{\langle \mathbf{3}^J 1 \rangle [23^I] \langle \mathbf{3}_J 2 \rangle [13_I]}{2M_z^2} \right) \\
 &= -g_{zv\bar{v}}^2 \left(\frac{\langle \mathbf{3}^I 1 \rangle [13_I] \langle \mathbf{3}_J 2 \rangle [23^J]}{2M_z^2} + \frac{\langle \mathbf{23}_J \rangle \langle \mathbf{3}^J 1 \rangle [13_I] [\mathbf{3}^I 2]}{2M_z^2} \right) \\
 &= -g_{zv\bar{v}}^2 \left(\frac{2(p_3 \cdot p_1) 2(p_3 \cdot p_2)}{2M_z^2} + \frac{\langle 2 | (M_z) | 1 \rangle [1 | (M_z) | 2]}{2M_z^2} \right) \\
 &= -g_{zv\bar{v}}^2 \left(\frac{2(p_3 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_2)}{M_z^2} + \frac{\langle 12 \rangle [21]}{2} \right) \\
 &= -g_{zv\bar{v}}^2 \left(\frac{2(p_3 \cdot p_1)(p_3 \cdot p_2)}{M_z^2} + \frac{2(p_1 \cdot p_2)}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{4.109}$$

$$\tag{4.110}$$

En el marco en reposo del bosón Z , se tiene

$$p_1 = \left(\frac{M_z}{2}, 0, 0, \frac{M_z}{2} \right), \quad (4.111)$$

$$p_2 = \left(\frac{M_z}{2}, 0, 0, -\frac{M_z}{2} \right), \quad (4.112)$$

$$p_3 = (M_z, 0, 0, 0), \quad (4.113)$$

entonces

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = g_{zv\bar{v}}^2 \left(\frac{M_z^2 \cdot M_z^2}{2M_z^2} + \frac{M_z^2}{4} + \frac{M_z^2}{4} \right) \quad (4.114)$$

$$= g_{zv\bar{v}}^2 \left(\frac{M_z^2}{2} + \frac{M_z^2}{2} \right) \quad (4.115)$$

$$= g_{zv\bar{v}}^2 M_z^2. \quad (4.116)$$

Vemos en el resultado (4.114) es similar al resultado que se obtuvo en la ecuación (2.62). Podemos concluir que usando el formalismo de los espín espinores en teorías constructivas podemos calcular amplitudes de dispersión de una manera más directa y eficiente, con un menor número de pasos.

4.3. Relaciones de recursión, el caso BCFW.

Las relaciones de recursión nos proveen un método para construir amplitudes de mayor número de partículas a partir de amplitudes de menos número de partículas. En 1988 las relaciones de recursión fuera de la capa de masa (off-shell) dadas por Berends y Giele [7] permitieron construir amplitudes de partones de n puntos a partir de amplitudes de menores puntos con una línea externa fuera de la capa de masa. Este método continua siendo útil como un algoritmo para evaluar numéricamente y de forma eficiente amplitudes de dispersión. En esta sección vamos a revisar, y luego aplicar los métodos modernos recursivos cuyos bloques principales son las amplitudes en la capa de masa (on-shell). Los más famosos métodos de recursión son las *relaciones de recursión de BCFW* por Britto-Cachazo-Feng-Witten introducidas en 2005 [68, 69]. Si bien estos métodos de recursión han sido bien establecidos en el caso de amplitudes que contienen partículas sin masa completamente [154, 155, 9]; también se han hecho progresos significativos para el caso de amplitudes con partículas masivas como las dadas por Simón Badger et al [156, 157, 158, 159, 160]. La idea clave detrás de las relaciones de recursión de BCFW es utilizar el poder del análisis complejo para explotar las propiedades analíticas de las amplitudes de dispersión [9].

4.3.1. Teorema de Cauchy y desplazamientos complejos

Una amplitud $\mathcal{M}_n$ en la capa de masa (on-shell) es caracterizado por el momento de las partículas externas, por la helicidad en el caso de partículas sin masa y por la masa y espín en el caso de partículas masivas. En el caso en el que nuestra amplitud involucra partículas sin masa tanto en sus líneas externas como en las internas (propagador), esto es $p_i^2 = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ por lo que conservación de momento tiene la siguiente forma

$$\sum_{i=1}^n p_i^\mu = 0, \quad (4.117)$$

ahora se introducen n -vectores complejos r_i^μ , aunque algunos de ellos pueden ser cero, se va cumplir que

$$\sum_{i=1}^n r_i^\mu = 0, \quad (4.118)$$

$$r_i \cdot r_j = 0, \quad \forall \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.119)$$

$$p_i \cdot r_i = 0, \quad \forall \quad i. \quad (4.120)$$

En particular se tiene $r_i^2 = 0$ en (4.119), en la ecuación (4.120) no implica suma sobre índices i . Los vectores r_i son usados para definir a lo que le vamos a llamar como *desplazamientos en los momentos*, esto es

$$\hat{p}_i^\mu \equiv p_i^\mu + z r_i^\mu \quad \text{con} \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.121)$$

aquí el gorrito en el momento $\hat{p}_i^\mu$ es la notación que se va usar para describir que el momento de la partícula está desplazado. Por la propiedad (4.118) la conservación de momento se mantiene del mismo modo que en (4.117), debido a (4.119) y (4.120) se tiene que $\hat{p}_i^2 = 0$, así que cada desplazamiento en el momento estarán en la capa de masa. Si definimos que

$$P_I^\mu = \sum_{i \in I} p_i^\mu, \quad (4.122)$$

donde el conjunto $\{p_i\}_{i \in I}$ se refiere a uno de momentos genéricos no triviales, es decir, al menos dos momentos y no más van a provocar que $P_I^2 \neq 0$, entonces $\hat{P}_I^2$ es lineal en z , esto es:

$$\hat{P}_I^2 = \left(\sum_{i \in I} \hat{p}_i \right)^2 = P_I^2 + z 2P_I \cdot R_I \quad \text{con} \quad R_I = \sum_{i \in I} r_i, \quad (4.123)$$

debido a que los términos que contiene z^2 desaparecen por (4.119) se puede escribir

$$\hat{P}_I^2 = -\frac{P_I^2}{z_I} (z - z_I) \quad \text{con} \quad z_I = -\frac{P_I^2}{2P_I \cdot R_I}. \quad (4.124)$$

De esta manera podemos considerar nuestra amplitud $\mathcal{M}_n$ en términos del momento desplazado $\hat{p}_i^\mu$. En particular, es útil estudiar el comportamiento de lo que llamaremos *amplitud desplazada* como función de la variable z ; por construcción la función $\hat{\mathcal{M}}_n(z)$ va ser holomórfica (4.11). La amplitud con momento no desplazado se obtiene fijando $z = 0$, por lo que $\mathcal{M}_n = \hat{\mathcal{M}}_n(z = 0)$. En esta tesis nos especializamos cuando la amplitud $\mathcal{M}_n$ es a nivel árbol, en este caso la estructura analítica de la amplitud desplazada $\hat{\mathcal{M}}_n$ es muy simple y está capturada por sus polos y estos están determinados por el intercambio de las partículas físicas. Por lo tanto, la amplitud desplazada $\hat{\mathcal{M}}_n(z)$ denota una función racional de z y sus polos simples en el plano z están todos ubicados lejos del origen en $z = 0$ (ver [9]). Para ver que los polos son simples consideremos sus diagramas de Feynman. La única manera en que podemos obtener polos es desde los propagadores desplazados $1/\hat{P}_I^2$, donde $\hat{P}_I$ es una suma de un conjunto no trivial de momentos desplazados. Debido a (4.123) y (4.124), el propagador $1/\hat{P}_I^2$ da un polo simple en z_I , y para momentos genéricos se tiene $P_I^2 \neq 0$ entonces $z_I \neq 0$. Para los momentos genéricos ningún diagrama de Feynman puede tener más de una potencia en su respectivo propagador $1/\hat{P}_I^2$; y los polos de diferentes propagadores están en diferentes lugares en el plano- z . Por lo tanto, para un momento genérico, la amplitud $\hat{\mathcal{M}}_n$ solamente tiene polos simples y todos ellos están localizados muy lejos del origen $z = 0$. Asumir localidad nos dice que las amplitudes pueden ser derivadas desde lagrangianas locales así que los propagadores determinan los polos. Para estudiar la función holomórfica $\frac{\hat{\mathcal{M}}_n(z)}{z}$ en el plano complejo es común elegir un contorno que rodee el polo simple en $z = 0$, por lo que el residuo en estos polos se expresa en términos de la amplitud no desplazada de la siguiente manera $\mathcal{M}_n = \hat{\mathcal{M}}_n(z = 0)$. Supongamos que

el contorno que rodea a todos los demás polos se deforma, entonces, según el teorema de Cauchy, podemos escribir

$$\mathcal{M}_n = - \sum_{z^*} \text{Res}_{z=z^*} \frac{\hat{\mathcal{M}}_n(z)}{z} + B_n, \quad (4.125)$$

donde B_n es el residuo del polo en $z = \infty$. Es habitual considerar $B_n = 0$ y esto se justifica con mayor frecuencia demostrando la afirmación de que

$$\hat{\mathcal{M}}_n(z) \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad z \rightarrow \infty. \quad (4.126)$$

Si se satisface (4.126), entonces decimos que tenemos un desplazamiento bueno (o válido). Este fenómeno se llama comportamiento z grande de las amplitudes (Large z behavior), lo cual nos ayuda a saber si nuestra amplitud es correcta sin depender tanto de la comparación con los diagramas de Feynman. En (4.125) cuando tomamos z_I como el polo entonces el propagador $1/\hat{P}_I^2$ se va a la capa de masa. En este límite, la amplitud desplazada se factoriza en dos partes, los cuales están en la capa de masa:

$$\hat{\mathcal{M}}_n(z) \xrightarrow{z \text{ cerca de } z_I} \hat{\mathcal{M}}_L(z_I) \frac{1}{\hat{P}_I^2} \hat{\mathcal{M}}_R(z_I) = - \frac{z_I}{z - z_I} \hat{\mathcal{M}}_L(z_I) \frac{1}{\hat{P}_I^2} \hat{\mathcal{M}}_R(z_I), \quad (4.127)$$

donde se ha usado la ecuación (4.124); de esta manera es fácil evaluar el residuo en $z = z_I$, veamos la Figura 4.4:

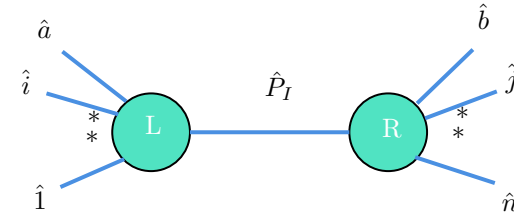
$$- \text{Res}_{z=z_I} \frac{\hat{\mathcal{M}}_n(z)}{z} = \hat{\mathcal{M}}_L(z_I) \frac{1}{\hat{P}_I^2} \hat{\mathcal{M}}_R(z_I) =$$


Figura 4.4: Residuo

El momento en la línea interna en la figura (4.4) está en la capa de masa, $\hat{P}_I^2 = 0$, las burbujas azules representan amplitudes en la capa de masa con momentos desplazados evaluados en $z = z_I$, los que son conocidos como *subamplitudes*. La reglas para la línea interna en la representación diagramática (4.4) es escribir el propagador escalar $1/\hat{P}_I^2$ del momento no desplazado. Cada subamplitud necesariamente involucra una cantidad menor de n -partículas, por lo tanto todos los residuos en z pueden ser determinados en términos de amplitudes en la capa de masa con un menor número de partículas que n . Está es la base para las relaciones de recursión. Hay algunos trabajos al respecto sobre como demostrar que una teoría se factoriza y se puede usar BCFW [147, 159]

4.3.2. Método de recursión Britto-Cachazo-Feng-Witten (BCFW)

4.3.3. Argumento general

En esta subsección, vamos a usar la poderosa técnica de recursión de BCFW [68, 69], el cual nos permite calcular amplitudes de mayor orden a partir de amplitudes de menor orden de una forma recursiva. Vamos a verificar esto en las siguientes subsecciones 4.3.4 y 4.3.4 para gravitones y gravitinos sin masa. Para nuestra discusión vamos a seguir de cerca las siguientes referencias [4, 9, 131, 153, 161]. Las transformaciones de BCFW cuando todas las partículas involucradas no tienen masa es

$$|\hat{i}\rangle = |i\rangle, \quad [\hat{i}] = [i] + z[j], \quad (4.128)$$

$$[\hat{j}] = [j], \quad |\hat{j}\rangle = |j\rangle - z|i\rangle, \quad (4.129)$$

con z siendo un número complejo, y el simbolo de gorrito $\hat{i}$ denota el momento desplazado de las partículas i y j . Los otros espinores permanecen sin cambios. Estas transformaciones preservan la conservación de momento

$$\begin{aligned} \hat{p}_i + \hat{p}_j &= |i\rangle[\hat{i}] + |\hat{j}\rangle[j] \\ &= |i\rangle[i] + z|i\rangle[j] + |j\rangle[j] - z|i\rangle[j] \\ &= p_i + p_j \end{aligned} \quad (4.130)$$

Nuestra convención es tal que la partícula i se encuentra del lado izquierdo y j se encuentra del lado derecho con respecto al propagador o línea interna. La fórmula para el momento desplazado de una partícula relacionada a su propagador que esta en la capa de masa, es dado por:

$$\hat{P}(z) = |\hat{P}\rangle[\hat{P}] = \sum_{k=a}^b |k\rangle[k] - z|i\rangle[j], \quad (4.131)$$

donde la suma aquí es sobre las partículas (a, b) que se encuentran en la mano derecha, así que el polo es obtenido por

$$z_{a,b}^* = \frac{(\sum_{k=a}^b k)^2}{\sum_{k=a}^b \langle ik\rangle[kj]}. \quad (4.132)$$

La fórmula de recursión BCFW que vamos a usar es el siguiente [4]

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n &= \sum_{a,b,h} \mathcal{M}(1, \dots, a-1, b+1, \dots, n \rightarrow \hat{P}^h) \\ &\times \frac{1}{(p_a + \dots p_b)^2} \mathcal{M}(\hat{P}^{-h} \rightarrow a, \dots, b). \end{aligned} \quad (4.133)$$

Debido al teorema de Cauchy, la parte derecha de (4.133) se factorizan en dos elementos de matriz; un elemento de matriz derecho y otro elemento de matriz izquierdo, evaluados en el polo $z = z_{a,b}^*$. El super-índice en $\hat{P}^h$ describe la helicidad del propagador o línea interna con momento P . La suma corre sobre la helicidad y esta cambia de izquierda a derecha. La notación $(1, \dots, a-1, b+1, \dots, n)$ denota las partículas que se encuentran del lado derecho del elemento de matriz y $(a, \dots, b)$ son las partículas que se encuentran del lado izquierdo del elemento de matriz. La convención para el momento es que todas sean entrantes.

4.3.4. BCFW y la interacción de cuatro puntos en supergravedad N=1

Aquí vamos a utilizar la aproximación constructiva introducida en la sección 4.1 para escribir las amplitudes parciales de cuatro puntos de supergravedad pura. Para nuestro propósito, vamos a calcular las tres amplitudes parciales de cuatro puntos asociadas al efecto Compton de supergravedad, el cual se muestra en la figura (3.5) de la sección 3.5, usando el programa de las relaciones de recursión de BCFW. Vamos a trabajar las amplitudes parciales usando la configuración de helicidades $\mathcal{M}(1_h^-, 2_h^-, 3_h^+, 4_h^+)$ para todos los diagramas de BCFW. También vamos a usar en este caso la notación para diagramas de BCFW que se muestran en la figura (4.1).

Diagrama de BCFW A

En este caso tenemos dos diagramas de BCFW asociados al canal s_{14} y al diagrama de Feynman A de la figura (3.5), los cuales se muestran en la figura siguiente :

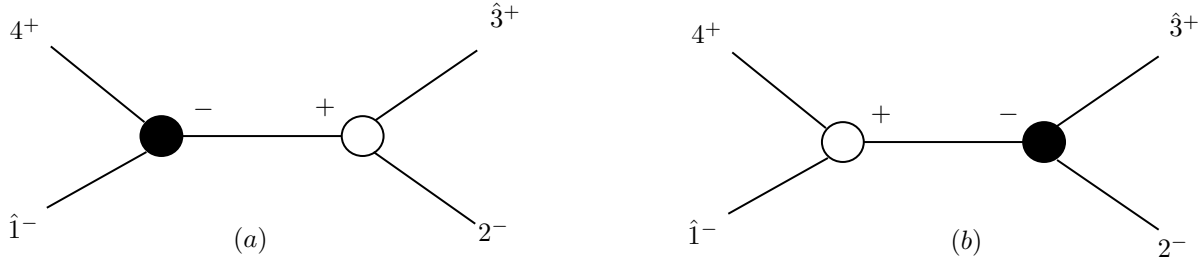


Figura 4.5: Diagrama de BCFW A

La configuración de helicidades en la amplitud en la ecuación (4.133) es

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_A(1_h^{-\frac{3}{2}}, 4_h^{+2}, 3_h^{+\frac{3}{2}}, 2_h^{-2}) &= \widetilde{\mathcal{M}}_a(1^{-\frac{3}{2}}, 4^{+2}, \hat{P}^{-\frac{3}{2}}) \frac{1}{s_{14}} \widetilde{\mathcal{M}}_a(-\hat{P}^{+\frac{3}{2}}, 3^{+\frac{3}{2}}, 2^{-2}) \\ &+ \widetilde{\mathcal{M}}_b(1^{-\frac{3}{2}}, 4^{+2}, \hat{P}^{+\frac{3}{2}}) \frac{1}{s_{14}} \widetilde{\mathcal{M}}_b(-\hat{P}^{-\frac{3}{2}}, 3^{+\frac{3}{2}}, 2^{-2}). \end{aligned} \quad (4.134)$$

Tomando el desplazamiento como $i = 1$ y $j = 3$, el cual es una combinación $(-, +)$. Entonces, las transformaciones de BCFW llegan a ser

$$|\hat{1}\rangle = |1\rangle, \quad |\hat{1}] = [1] + z_{2,3}^* [3], \quad (4.135)$$

$$|\hat{3}\rangle = |3\rangle, \quad |\hat{3}] = [3] - z_{2,3}^* [1]. \quad (4.136)$$

Usando la ecuación (4.132) el polo del canal s_{14} es

$$z_{2,3}^* = \frac{(p_2 + p_3)^2}{\langle 12 \rangle [23] + \langle 13 \rangle [33]} = \frac{\langle 23 \rangle [32]}{\langle 12 \rangle [23]} = -\frac{\langle 23 \rangle}{\langle 12 \rangle}. \quad (4.137)$$

De acuerdo a la tabla (4.1), en (4.134), los términos $\widetilde{\mathcal{M}}(1^{-\frac{3}{2}}, 4^{+2}, \hat{P}^{-\frac{3}{2}})$ and $\widetilde{\mathcal{M}}(-\hat{P}^{+\frac{3}{2}}, 3^{+\frac{3}{2}}, 2^{-2})$ van a desaparecer, así que solo nos quedamos con las contribuciones que vienen de la amplitud b

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_A(1_h^{-\frac{3}{2}}, 4_h^{+2}, 3_h^{+\frac{3}{2}}, 2_h^{-2}) &= \widetilde{\mathcal{M}}_b(\hat{1}^{-\frac{3}{2}}, 4^{+2}, \hat{P}^{+\frac{3}{2}}) \frac{1}{s_{14}} \widetilde{\mathcal{M}}_b(-\hat{P}^{-\frac{3}{2}}, \hat{3}^{+\frac{3}{2}}, 2^{-2}) \\ &= \frac{[\hat{P}4]^5}{[4\hat{1}][\hat{1}\hat{P}]^2} \frac{1}{\langle 14 \rangle [41]} \frac{\langle (-\hat{P})2 \rangle^5}{\langle 2\hat{3} \rangle \langle \hat{3}(-\hat{P}) \rangle^2}. \end{aligned} \quad (4.138)$$

donde hemos usado resultados previos que vienen de la tercera columna de la tabla (4.1) (suprimiendo los factores $\tilde{g}_{123}$ y g_{123}). A nivel de las amplitudes de tres puntos, los espinores con momento $-P$ y P están relacionados por

$$|(-P)\rangle = i|P\rangle, \quad |(-P)] = i|P], \quad \langle (-P)| = i\langle P|, \quad [(-P)| = i[P|. \quad (4.139)$$

En esta aproximación los desplazamientos de momento de (4.131) toman la siguiente forma

$$|\hat{P}\rangle |\hat{P}| = |2\rangle [2] + |3\rangle [3] - z_{2,3}^* |1\rangle [3], \quad (4.140)$$

Finalmente, aplicando ambos (4.139) y (4.140), el numerador de (4.138) llegan a ser

$$\begin{aligned} \langle 2\hat{P} \rangle [\hat{P}4] &= \langle 23 \rangle [34] + \frac{\langle 23 \rangle}{\langle 12 \rangle} \langle 21 \rangle [34] \\ &= \langle 23 \rangle [34] - \langle 23 \rangle [34]. \end{aligned} \quad (4.141)$$

Por lo tanto, la amplitud de (4.138) desaparece

$$\widetilde{\mathcal{M}}_A(1_h^{-\frac{3}{2}}, 4_h^{+2}, 3_h^{+\frac{3}{2}}, 2_h^{-2}) = 0. \quad (4.142)$$

Diagrama de BCFW B

En este caso, tenemos dos diagramas de BCFW asociados al canal s_{12} como se muestra en la figura (4.6):

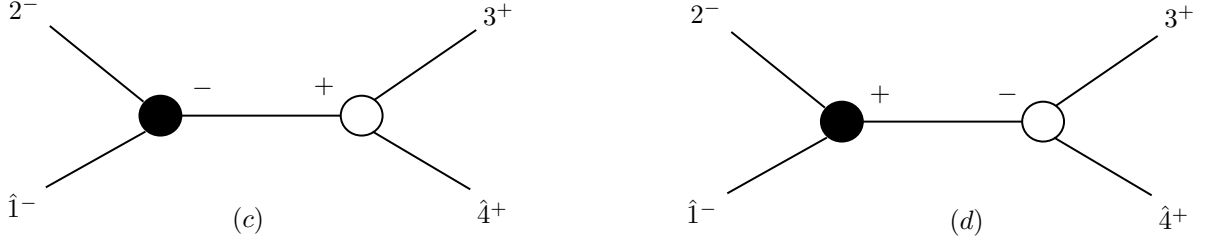


Figura 4.6: Diagrama de BCFW B

Las correspondientes configuraciones en la amplitud es la siguiente

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_B(1^{-\frac{3}{2}}, 2^{-2}, 3^{+\frac{3}{2}}, 4^{+2}) &= \widetilde{\mathcal{M}}_c(1^{-\frac{3}{2}}, 2^{-2}, \hat{P}^{-\frac{3}{2}}) \frac{1}{s_{12}} \widetilde{\mathcal{M}}_c(-\hat{P}^{+\frac{3}{2}}, 3^{+\frac{3}{2}}, 4^{+2}) \\ &+ \widetilde{\mathcal{M}}_d(1^{-\frac{3}{2}}, 2^{-2}, \hat{P}^{+\frac{3}{2}}) \frac{1}{s_{12}} \widetilde{\mathcal{M}}_d(-\hat{P}^{-\frac{3}{2}}, 3^{+\frac{3}{2}}, 4^{+2}). \end{aligned} \quad (4.143)$$

En este caso, vamos a considerar $i = 1$ y $j = 4$, de nuevo usando la combinación $(-, +)$. Entonces las transformaciones de BCFW llegan a ser

$$|\hat{1}\rangle = |1\rangle, \quad |\hat{1}| = [1] + z_{3,4}^*[4], \quad (4.144)$$

$$|\hat{4}| = [4], \quad |\hat{4}\rangle = |4\rangle - z_{3,4}^*[1]. \quad (4.145)$$

el polo en este caso es

$$z_{3,4}^* = \frac{\langle 34 \rangle [43]}{\langle 13 \rangle [34]} = -\frac{\langle 34 \rangle}{\langle 13 \rangle}. \quad (4.146)$$

El mismo procedimiento que desarrollamos anteriormente en la amplitud del diagrama de BCFW A, es también válido aquí, por lo tanto solamente necesitamos calcular la contribución de la amplitud parcial d

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_B(1^{-\frac{3}{2}}, 2^{-2}, 3^{+\frac{3}{2}}, 4^{+2}) &= \widetilde{\mathcal{M}}_d(\hat{1}^{-\frac{3}{2}}, 2^{-2}, \hat{P}^{+\frac{3}{2}}) \frac{1}{s_{12}} \widetilde{\mathcal{M}}_d(-\hat{P}^{-\frac{3}{2}}, 3^{+\frac{3}{2}}, \hat{4}^{+2}) \\ &= \frac{\langle \hat{1}2 \rangle^5}{\langle 2\hat{P} \rangle \langle \hat{P}1 \rangle^2} \frac{1}{\langle 34 \rangle [43]} \frac{[3\hat{4}]^5}{[\hat{4}(-\hat{P})][(-\hat{P})3]^2} \\ &= i \frac{\langle 12 \rangle^5 [34]^5}{\langle 2\hat{P} \rangle [\hat{P}4] \langle 34 \rangle [43] \langle 1\hat{P} \rangle^2 [\hat{P}3]^2}, \end{aligned} \quad (4.147)$$

donde de nuevo vamos a suprimir los factores $\tilde{g}_{123}$ y g_{123} usando los resultados del tercer renglón de la tabla (4.1). El momento de la línea interna es

$$|\hat{P}\rangle[\hat{P}] = |3\rangle[3] + |4\rangle[4] + \frac{\langle 34 \rangle}{\langle 13 \rangle} |1\rangle[4]. \quad (4.148)$$

Por lo tanto, el denominador de (4.147) llega a ser

$$\langle 2\hat{P} \rangle [\hat{P}4] = \langle 23 \rangle [34], \quad (4.149)$$

$$\langle 1\hat{P} \rangle [\hat{P}3] = \langle 14 \rangle [43]. \quad (4.150)$$

La forma final de la amplitud llega a ser

$$\widetilde{\mathcal{M}}_B(1^{-\frac{3}{2}}, 2^{-2}, 3^{+\frac{3}{2}}, 4^{+2}) = -i \frac{\langle 12 \rangle^6 [34]}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 41 \rangle^2}. \quad (4.151)$$

La validez de las relaciones de recursion de BCFW demanda que los términos de frontera desaparezcan, es decir, $B_n = 0$ en (4.125). El objetivo es mostrar que la amplitud desplazada desaparece en el límite cuando la variable z es muy grande en (4.126). El desplazamiento del diagrama de BCFW B es denotado por $[\hat{1}\hat{4}]$ y la amplitud desplazada va tener el siguiente comportamiento en z

$$\hat{\mathcal{M}}_B(z) = \frac{\langle \hat{1}2 \rangle^6 [3\hat{4}]}{\langle \hat{1}2 \rangle \langle 23 \rangle \langle 3\hat{4} \rangle \langle \hat{4}1 \rangle^2} = \frac{\langle 12 \rangle^6 [34]}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle (\langle 34 \rangle - z \langle 31 \rangle) \langle 41 \rangle^2} \approx \frac{1}{z}. \quad (4.152)$$

Podemos ver que $\hat{\mathcal{M}}_B(z)$ tiene un polo en $z = \frac{\langle 34 \rangle}{\langle 31 \rangle}$. Tomando el limite

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \hat{\mathcal{M}}_B(z) = 0, \quad (4.153)$$

demuestra que no tenemos polos en el infinito debido a $B_n = 0$, probando el hecho que $[\hat{1}\hat{4}]$ es una buena elección de desplazamiento. Si escogemos el desplazamiento $[\hat{1}\hat{2}]$, entonces las transformaciones de BCFW son

$$|\hat{1}\rangle = |1\rangle, \quad |\hat{1}| = [1| + z[2|, \quad (4.154)$$

$$|\hat{2}\rangle = [2|, \quad |\hat{2}| = |2\rangle - z|1\rangle. \quad (4.155)$$

El comportamiento de la amplitud cuando z es muy grande con este desplazamiento es $\hat{\mathcal{M}}_B(z) \approx \frac{1}{z}$ cuyo polo esta en $z = \frac{\langle 23 \rangle}{\langle 13 \rangle}$. Como antes, vemos que no tenemos polos en el infinito así que $[\hat{1}\hat{2}]$ es un buen desplazamiento. El desplazamiento $[\hat{3}\hat{4}]$ induce el comportamiento $\hat{\mathcal{M}}_B(z) \approx \frac{1}{z^2}$ cuando z es muy grande, su polo esta en $z = \frac{\langle 41 \rangle}{\langle 31 \rangle}$, de nuevo tenemos una buena elección para el desplazamiento ya que la amplitud desaparece en $z \rightarrow \infty$. Por último, el desplazamiento $[\hat{3}\hat{2}]$ induce el comportamiento $\hat{\mathcal{M}}_B(z) \approx z^6$ cuando z es muy grande, haciendo que la amplitud explote. Por lo tanto, la elección $[\hat{3}\hat{2}]$ no es una buena elección para un desplazamiento.

Diagrama de BCFW C

Tenemos dos diagramas de BCFW asociados al canal s_{13} como se muestran en la figura (3.5):

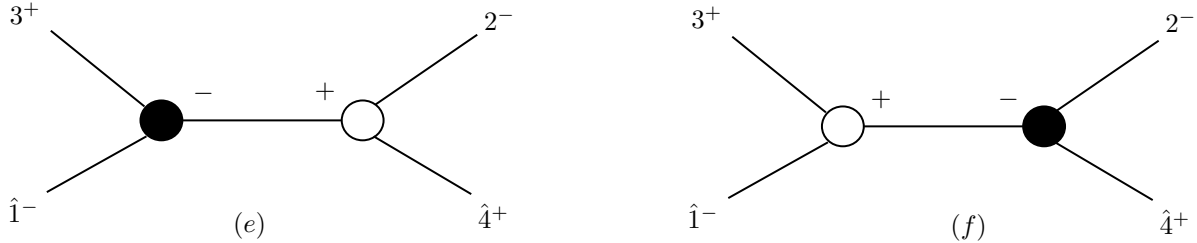


Figura 4.7: Diagrama de BCFW C

La configuración de de helicidades para la respectiva amplitud es

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_C(1^{-\frac{3}{2}}, 3^{+\frac{3}{2}}, 2^{-2}, 4^{+2}) &= \widetilde{\mathcal{M}}_e(1^{-\frac{3}{2}}, 3^{+\frac{3}{2}}, \hat{P}^{-2}) \frac{i}{s_{13}} \widetilde{\mathcal{M}}_e(-\hat{P}^{+2}, 2^{-2}, 4^{+2}) \\ &+ \widetilde{\mathcal{M}}_f(1^{-\frac{3}{2}}, 3^{+\frac{3}{2}}, \hat{P}^{+2}) \frac{i}{s_{13}} \widetilde{\mathcal{M}}_f(-\hat{P}^{-2}, 2^{-2}, 4^{+2}). \end{aligned} \quad (4.156)$$

Aquí vamos a escoger el desplazamiento $i = 1$ y $j = 4$, de nuevo tenemos una combinación $(-, +)$. Las transformaciones de BCFW van a ser

$$|\hat{1}\rangle = |1\rangle, \quad |\hat{1}| = [1] + z_{2,4}^*[4], \quad (4.157)$$

$$|\hat{4}| = [4], \quad |\hat{4}\rangle = |4\rangle - z_{2,4}^*[1]. \quad (4.158)$$

Ahora, el polo es

$$z_{2,4}^* = \frac{\langle 24 \rangle [42]}{\langle 12 \rangle [24]} = -\frac{\langle 24 \rangle}{\langle 12 \rangle}. \quad (4.159)$$

En este caso, ambos términos no van a desaparecer

$$\widetilde{\mathcal{M}}_C(1^{-\frac{3}{2}}, 3^{+\frac{3}{2}}, 2^{-2}, 4^{+2}) = \frac{\langle \hat{1}\hat{P} \rangle^5}{\langle \hat{P}3 \rangle \langle 3\hat{1} \rangle^2} \frac{i}{s_{13}} \frac{[(-\hat{P})\hat{4}]^6}{[\hat{4}2]^2 [2(-\hat{P})]^2} + \frac{[3\hat{P}]^5}{[\hat{P}1][\hat{1}3]^2} \frac{i}{s_{13}} \frac{\langle (-\hat{P})2 \rangle^6}{\langle 2\hat{4} \rangle^2 \langle \hat{4}(-\hat{P}) \rangle^2}. \quad (4.160)$$

Por otro lado, el momento en la línea interna es

$$|\hat{P}\rangle[\hat{P}] = |2\rangle[2] + |4\rangle[4] + \frac{\langle 24 \rangle}{\langle 12 \rangle} |1\rangle[4], \quad (4.161)$$

para el segundo término de (4.160), tenemos

$$\langle 2\hat{P} \rangle[\hat{P}3] = \langle 24 \rangle[43] + \frac{\langle 24 \rangle}{\langle 12 \rangle} \langle 21 \rangle[43] = 0, \quad (4.162)$$

por lo tanto, vemos que solamente el primer término de (4.160) va a sobrevivir, relacionado al diagrama (e) de la figura 4.7, entonces de acuerdo a los resultados del tercer renglón de la tabla (4.1), la amplitud va ser

$$\widetilde{\mathcal{M}}_C(1^{-\frac{3}{2}}, 3^{+\frac{3}{2}}, 2^{-2}, 4^{+2}) = i \frac{\langle 1\hat{P} \rangle^5 [\hat{P}4]^5 [\hat{P}4]}{\langle 31 \rangle^2 [42]^2 \langle 3\hat{P} \rangle [\hat{P}2] [\hat{P}2] \langle 24 \rangle [42]}, \quad (4.163)$$

entonces, vamos a encontrar que:

$$\langle 1\hat{P} \rangle[\hat{P}4] = \langle 12 \rangle[24] = -\langle 13 \rangle[34], \quad (4.164)$$

$$\langle 3\hat{P} \rangle[\hat{P}2] = \langle 34 \rangle[42] + \frac{\langle 24 \rangle}{\langle 12 \rangle} \langle 31 \rangle[42], \quad (4.165)$$

$$\frac{[\hat{P}4]}{[\hat{P}2]} = \frac{\langle 1\hat{P} \rangle[\hat{P}4]}{\langle 1\hat{P} \rangle[\hat{P}2]} = \frac{\langle 12 \rangle[24]}{\langle 14 \rangle[42]} = -\frac{\langle 12 \rangle}{\langle 14 \rangle}. \quad (4.166)$$

Sustituyendo los resultados de arriba en (4.163), la forma final de la amplitud es

$$\widetilde{\mathcal{M}}_C(1^{-\frac{3}{2}}, 3^{+\frac{3}{2}}, 2^{-2}, 4^{+2}) = i \frac{\langle 12 \rangle^6 [34]}{\langle 13 \rangle \langle 32 \rangle \langle 24 \rangle \langle 41 \rangle^2}. \quad (4.167)$$

De nuevo, para estudiar el comportamiento de la amplitud cuando la variable z es grande, vamos a considerar todos los posibles desplazamientos. Empezamos con $[\hat{1}\hat{4}]$, entonces la amplitud desplazada es

$$\hat{\mathcal{M}}_C(z) = \frac{\langle \hat{1}2 \rangle^6 [3\hat{4}]}{\langle \hat{1}3 \rangle \langle 32 \rangle \langle 2\hat{4} \rangle \langle \hat{4}1 \rangle^2} = \frac{\langle 12 \rangle^6 [34]}{\langle 13 \rangle \langle 32 \rangle (\langle 24 \rangle - z \langle 21 \rangle) \langle 41 \rangle^2} \approx \frac{1}{z}, \quad (4.168)$$

cuyo polo reside en $z = \frac{\langle 24 \rangle}{\langle 21 \rangle}$. Cuando $z \rightarrow \infty$, vamos a obtener $\hat{\mathcal{M}}_C(z) \rightarrow 0$. Por lo tanto, la ausencia de polos en el infinito nos dice que $[\hat{1}\hat{4}]$ es una buena elección de desplazamiento. El

siguiente desplazamiento es $[\hat{1}\hat{2}]$, induce en la amplitud el siguiente comportamiento cuando z es muy grande $\hat{\mathcal{M}}_C(z) \approx \frac{1}{z^2}$; en este caso tenemos dos polos: uno en $z = \frac{\langle 32 \rangle}{\langle 31 \rangle}$ y el otro en $z = \frac{\langle 24 \rangle}{\langle 14 \rangle}$. En el límite $z \rightarrow \infty$, la amplitud va desaparecer, por lo tanto $[\hat{1}\hat{2}]$ es una buena elección para un desplazamiento. Tomando el desplazamiento $[\hat{3}\hat{4}]$, la amplitud se comporta como $\hat{\mathcal{M}}_C(z) \approx \frac{1}{z^3}$, de nuevo observamos dos polos: uno en $z = \frac{\langle 24 \rangle}{\langle 23 \rangle}$ y el otro en $z = \frac{\langle 41 \rangle}{\langle 31 \rangle}$. Por lo tanto $[\hat{3}\hat{4}]$ es una buena elección para un desplazamiento debido a $B_n = 0$. Finalmente el desplazamiento $[\hat{3}\hat{2}]$ explota a la amplitud como $\hat{\mathcal{M}}_C(z) \approx z^6$, entonces esta elección no es una buena opción para un desplazamiento. Por lo tanto, tenemos dos amplitudes parciales que contribuyen correspondientes a los canales s_{12} y s_{13} . Estas amplitudes son las interacciones de cuatro puntos entre gravitones y gravitinos.

4.3.5. Desplazamientos de los momentos complejos en BCFW

En esta subsección vamos a resumir todos los casos posibles de desplazamientos en los momentos complejos cuando tenemos solo partículas sin masa, una combinación entre partículas sin masa y con masa hasta el caso cuando tenemos todas las partículas con masa siguiendo el programa de Christensen [153]. Algunas aplicaciones de BCFW en el caso másivo podemos verlas en estos trabajos [162, 163, 164].

a. Desplazamiento $[i, j]$ con dos partículas sin masa

En este caso las partículas i y j son las seleccionadas para desplazar sus momentos, como se muestra en la figura (4.8) todas las partículas externas e internas no tienen masa.

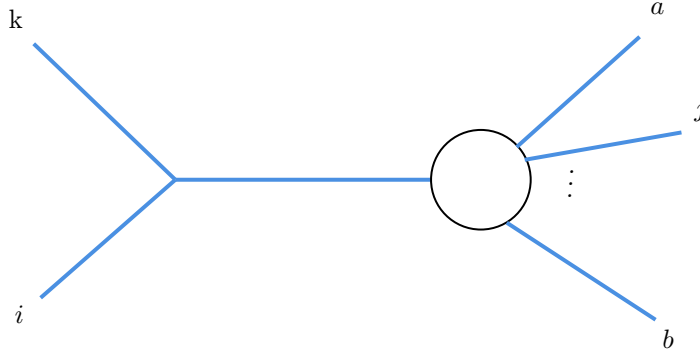


Figura 4.8: Diagrama de BCFW con todas las partículas sin masa indicados en color azul

Los desplazamientos cuando tenemos dos partículas externas sin masa, y el propagador también no tiene masa, tenemos

$$[\hat{i}] = [i] + z[j], \quad (4.169)$$

$$[\hat{j}] = [j] - z[i], \quad (4.170)$$

con el polo indicado por

$$z_p = -\frac{\langle ik \rangle [ki]}{\langle ik \rangle [kj]} = -\frac{[ik]}{[jk]}, \quad (4.171)$$

o escritos de otro modo:

$$[\hat{i}] = [i] - \frac{s_{ik}}{\langle i|p_k|j]} [j], \quad (4.172)$$

$$[\hat{j}] = [j] + [i] \frac{s_{ik}}{\langle i|p_k|j]}. \quad (4.173)$$

En el caso en el que tengamos las partículas externas sin masa y la línea interna tiene masa

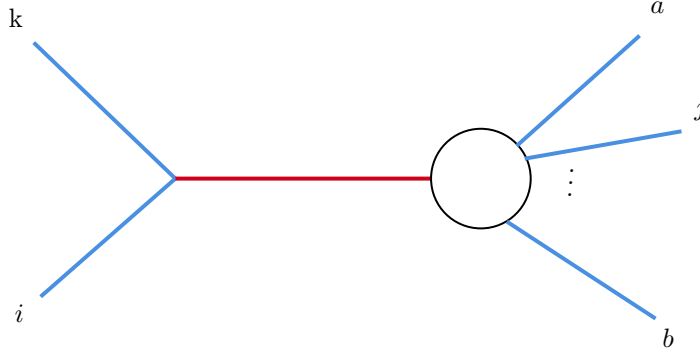


Figura 4.9: Diagrama de BCFW con la línea interna másiva indicado en rojo, y las partículas externas sin masa.

En este caso el momento del propagador va ser

$$(\hat{p}_i + p_k)^2 = s_{ik} + z_p \langle i | p_k | j \rangle = M^2, \quad (4.174)$$

$$(\hat{p}_j + p_l)^2 = s_{jl} - z_p \langle i | p_l | j \rangle = M^2, \quad (4.175)$$

donde M es la masa de la partícula de la línea interna, esto nos va modificar el polo de la siguiente manera:

$$z_p = \frac{M^2 - s_{ik}}{\langle i | p_k | j \rangle}, \quad (4.176)$$

$$z_p = \frac{s_{jl} - M^2}{\langle i | p_l | j \rangle}, \quad (4.177)$$

por lo tanto los desplazamientos de los momentos de las partículas externas se modifica de la siguiente manera:

$$|\hat{i}\rangle = |i\rangle - \frac{(s_{ik} - M^2)}{\langle i | p_k | j \rangle} |j\rangle, \quad (4.178)$$

$$|\hat{j}\rangle = |j\rangle + |i\rangle \frac{(s_{ik} - M^2)}{\langle i | p_k | j \rangle}. \quad (4.179)$$

b. Desplazamiento $[i, j]$ con una partícula másiva y una partícula sin masa

Una generalización de los casos anteriores donde ahora tendremos una partícula externa con masa. Se toma el desplazamiento $[i, j]$, la partícula i el cual es másivo está representado por un espín espinor y la partícula j el cual es una partícula sin masa se representa por un espinor de helicidad.

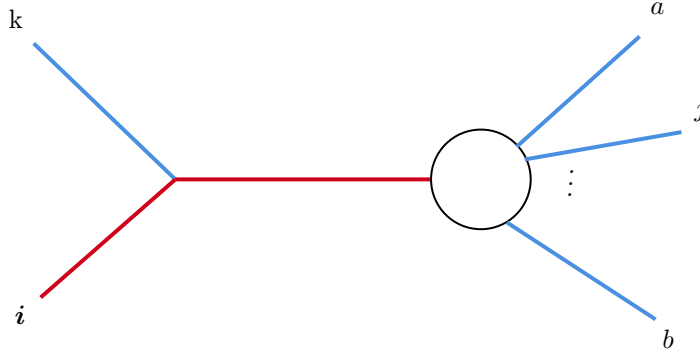


Figura 4.10: Diagrama de BCFW con una partícula externa masiva, la línea interna masiva está indicados en rojo, y una partícula externa sin masa indicado en azul.

Las transformaciones de BCFW en este caso van a ser

$$|\hat{\mathbf{i}}_I\rangle = |\mathbf{i}_I\rangle + z_I |j\rangle, \quad (4.180)$$

$$|\hat{j}\rangle = |j\rangle - z_I |\mathbf{i}^I\rangle, \quad (4.181)$$

donde $\mathbf{I}$ es el índice de espín que también aparece en el pozo z_p así como en el espín espinor. Estas transformaciones satisfacen la conservación de momento:

$$\begin{aligned} \hat{p}_i + \hat{p}_j &= |\mathbf{i}^I\rangle [\hat{\mathbf{i}}_I] + |\hat{j}\rangle [j] \\ &= |\mathbf{i}^I\rangle [\mathbf{i}_I + z_I |\mathbf{i}^I\rangle] [j] + |j\rangle [j - z_I |\mathbf{i}^I\rangle] [j] \\ &= |\mathbf{i}^I\rangle [\mathbf{i}_I] + |j\rangle [j] \\ &= p_i + p_j, \end{aligned} \quad (4.182)$$

también satisfacen las condiciones de capa de masa:

$$\begin{aligned} 2\hat{p}_i^2 &= \langle \mathbf{i}^I \mathbf{i}^J \rangle [\hat{\mathbf{i}}_J \hat{\mathbf{i}}_I] \\ &= \langle \mathbf{i}^I \mathbf{i}^J \rangle [\mathbf{i}_J \mathbf{i}_I] + 2z_I \langle \mathbf{i}^I \mathbf{i}^J \rangle [\mathbf{i}_J j] + z_I z_J \langle \mathbf{i}^I \mathbf{i}^J \rangle [jj] \\ &= \langle \mathbf{i}^I \mathbf{i}^J \rangle [\mathbf{i}_J \mathbf{i}_I] \\ &= 2p_i^2 \\ &= 2m_i^2, \end{aligned} \quad (4.183)$$

la línea interna tiene momento $(p_i + p_k) = -(p_j + p_l)$ donde las partículas i y j están en lados opuestos del propagador, entonces se tiene

$$\begin{aligned} (\hat{p}_i + p_k)^2 &= m_i^2 + m_k^2 + 2\hat{p}_i \cdot p_k \\ &= m_i^2 + m_k^2 + \langle \mathbf{i}^I | p_k | \hat{\mathbf{i}}_I \rangle \\ &= m_i^2 + m_k^2 + \langle \mathbf{i}^I | p_k | \mathbf{i}_I \rangle + z_I \langle \mathbf{i}^I | p_k | j \rangle \\ &= M^2. \end{aligned} \quad (4.184)$$

Por otro lado, el polo z_p va tener la siguiente forma:

$$z_I = \frac{[j \mathbf{i}_I]}{[j | p_i p_k | j]} (M^2 - s_{ik}), \quad (4.185)$$

si tomamos el limite cuando la masa tiende a cero, vemos que se recupera el polo de la ecuación (4.171), esto es:

$$z_I \rightarrow \frac{[ji]}{[ji]\langle ik\rangle[kj]}(-\langle ik\rangle[kj]) = -\frac{[ki]}{[kj]}, \quad (4.186)$$

de este modo las transformaciones de BCFW van a ser

$$|\hat{i}| = |i| + \frac{[ij][j|}{[j|p_i p_k|j]}(s_{ik} - M^2), \quad (4.187)$$

$$|\hat{j}\rangle = |j\rangle - \frac{p_i|j]}{[j|p_i p_k|j]}(s_{ik} - M^2). \quad (4.188)$$

c. Desplazamiento $[i, j]$ con una partícula sin masa y una partícula másiva

En este caso vamos a desplazar el espinor $|i|$ y el espín espinor $|\mathbf{j}^J\rangle$. Ya que es análogo al anterior, vamos a ser directos.

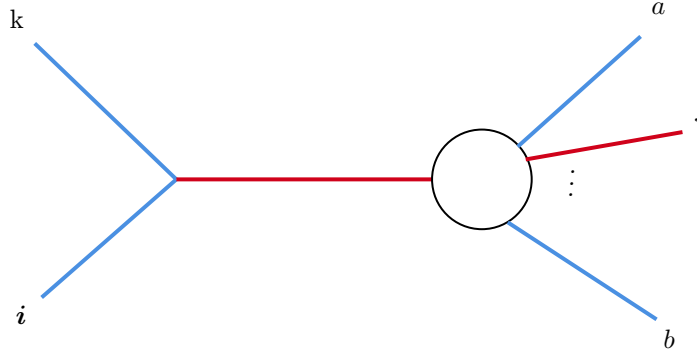


Figura 4.11: Diagrama de BCFW con una partícula externa sin masa indicado en azul, y el propagador y partícula externa másiva indicados en rojo.

El desplazamiento $[i, j]$ nos lleva a las siguientes transformaciones de BCFW:

$$|\hat{i}| = |i| + z^J |\mathbf{j}_J|, \quad (4.189)$$

$$|\hat{\mathbf{j}}^J\rangle = |\mathbf{j}^J\rangle - z^J |i\rangle. \quad (4.190)$$

El cual preserva conservación de momento:

$$\begin{aligned} \hat{p}_i + \hat{p}_j &= |i\rangle \left[|\hat{i}| + |\hat{\mathbf{j}}^J\rangle \right] |\mathbf{j}_J| \\ &= |i\rangle \left[|i| + z^J |i\rangle \right] |\mathbf{j}_J| + |\mathbf{j}^J\rangle \left[|\mathbf{j}_J| - z^J |i\rangle \right] |\mathbf{j}_J| \\ &= |i\rangle \left[|i| + |\mathbf{j}^J\rangle \right] |\mathbf{j}_J| \\ &= p_i + p_j. \end{aligned} \quad (4.191)$$

En este caso el polo obtiene la siguiente forma

$$z^J = \frac{\langle \mathbf{j}^J i \rangle}{\langle i | p_k p_j | i \rangle} (M^2 - s_{ik}). \quad (4.192)$$

Si tomamos el limite cuando la masa tiende a cero, entonces el polo se reduce a

$$z^J \rightarrow -\frac{\langle ji \rangle \langle ik \rangle [ki]}{\langle ik \rangle [kj] \langle ji \rangle} = -\frac{[ki]}{[kj]}. \quad (4.193)$$

Ahora bien, las transformaciones nos van a quedar

$$[\hat{i}] = [i] - \frac{\langle i | p_j}{\langle i | p_j p_k | i \rangle} (s_{ik} - M^2), \quad (4.194)$$

$$[\hat{j}] = [j] + \frac{|i\rangle \langle ij|}{\langle i | p_j p_k | i \rangle} (s_{ik} - M^2). \quad (4.195)$$

d. Desplazamiento $[i, j]$ con dos partículas externas masivas y la línea interna sin masa

En este caso tenemos dos partículas externas masivas denotadas por i y j , la línea interna no tiene masa, como se muestra en la Figura:

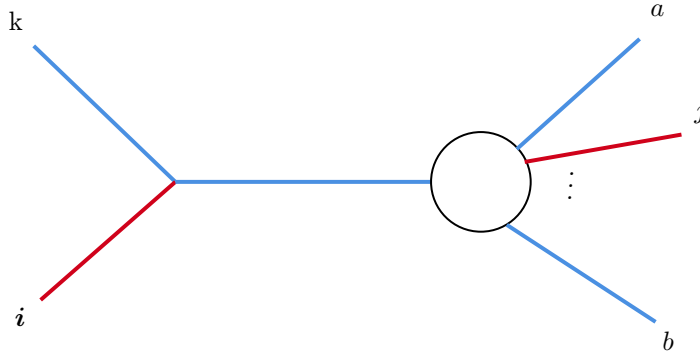


Figura 4.12: Diagrama de BCFW con dos partículas externas masivas las cuales están indicados en rojo, y el propagador o línea interna es no masivo indicado en azul.

El desplazamiento $[i, j]$ nos lleva a las siguientes transformaciones de BCFW:

$$[\hat{i}] = [i] + z_I^J [j], \quad (4.196)$$

$$[\hat{j}] = [j] - z_I^J [i]. \quad (4.197)$$

Cuyo polo es calculado mediante la expresión:

$$z_I^J = - \frac{(m_i [i j^J] + \langle i | p_k | j^J \rangle) s_{ik}}{(m_i [i k j^L] + \langle i | p_k | j^L \rangle) \langle i^K | p_k | j^L \rangle}, \quad (4.198)$$

al tomar el límite cuando la masa tiende a cero, se tiene

$$z_I^J \rightarrow - \frac{\langle i | p_k | j \rangle \langle i | p_k | i \rangle}{\langle i | p_k | j \rangle \langle i | p_k | j \rangle} \quad (4.199)$$

$$= - \frac{\langle ik \rangle [ki]}{\langle ik \rangle [kj]} \quad (4.200)$$

$$= - \frac{[ki]}{[kj]}. \quad (4.201)$$

con el polo z_p las transformaciones de BCFW van a tener la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbf{i}}_I| &= |\mathbf{i}_I| + \frac{m_i [\mathbf{i}_I \mathbf{j}^J] [\mathbf{j}_J| + \langle \mathbf{i}_I | p_k | \mathbf{j}^J] [\mathbf{j}_J|}{m_i m_j} \\ &= |\mathbf{i}_I| + \frac{-m_i m_j [\mathbf{i}_I| - m_j \langle \mathbf{i}_I | p_k |}{m_i m_j} \\ &= -\frac{1}{m_i} \langle \mathbf{i}_I | p_k, \end{aligned} \quad (4.202)$$

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbf{j}}^J\rangle &= |\mathbf{j}^J\rangle - \frac{m_i |\mathbf{i}^I\rangle [\mathbf{i}_I \mathbf{j}^J] + |\mathbf{i}^I\rangle \langle \mathbf{i}_I | p_k | \mathbf{j}^J]}{m_i m_j} \\ &= |\mathbf{j}^J\rangle - \frac{1}{m_j} (p_i + p_k) |\mathbf{j}^J\rangle \\ &= |\mathbf{j}^J\rangle + \frac{1}{m_j} (p_j + p_l) |\mathbf{j}^J\rangle \\ &= \frac{1}{m_j} p_l |\mathbf{j}^J\rangle. \end{aligned} \quad (4.203)$$

e. Desplazamiento $[\mathbf{i}, \mathbf{j}]$ con dos partículas externas masivas y la línea interna masiva

En este caso tomamos las partículas masivas como $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, ambos de la misma masa del mismo modo que la línea interna, así como se muestra en la Figura:

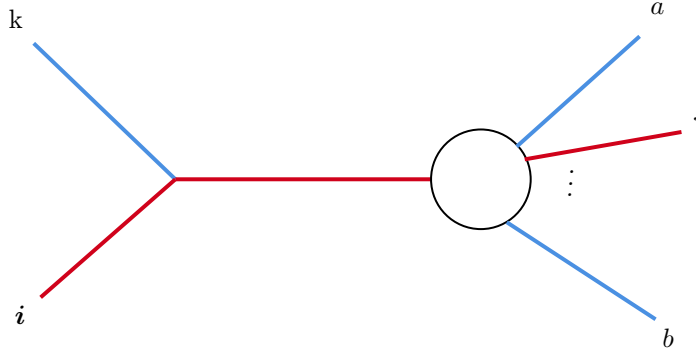


Figura 4.13: Diagrama de BCFW donde las partículas que consideramos son todas masivas, indicadas por líneas rojas

El desplazamiento $[\mathbf{i}, \mathbf{j}]$ nos lleva a las siguientes transformaciones de BCFW:

$$|\hat{\mathbf{i}}_I| = |\mathbf{i}_I| + z_I^J [\mathbf{j}_J|, \quad (4.204)$$

$$|\hat{\mathbf{j}}^J\rangle = |\mathbf{j}^J\rangle - z_I^J |\mathbf{i}^I\rangle. \quad (4.205)$$

donde el polo es

$$z_I^J = \frac{C_I^J (m^2 - s_{ik})}{C_K^L \langle \mathbf{i}^K | p_k | \mathbf{j}_L \rangle}, \quad (4.206)$$

con

$$C_I^J = m (s_{ij} - m_i^2) (s_{il} - m^2) [\mathbf{i}_I \mathbf{j}^J] + (s_{ij} s_{il} - m^2 m_l^2) \langle \mathbf{i}_I | p_k | \mathbf{j}^J \rangle + m^2 (s_{ij} - m_l^2) [\mathbf{i}_I | p_k | \mathbf{j}^J]. \quad (4.207)$$

Con toda esta nueva información ahora podemos explorar procesos más complicados que involucren un número n de partículas a nivel árbol, sin importar si están relacionados con miles de diagramas de Feynman.

4.3.6. BCFW másivo y el proceso $p\bar{p} \rightarrow t\bar{t}H$

Esta subseccion vamos a poner una parte del trabajo que se hizo en colaboración con el Dr. Manfred Kraus acerca de cómo calcular las amplitudes de dispersión a nivel árbol del proceso $p\bar{p} \rightarrow t\bar{t}H$ los cuales son necesarios para obtener la contribución al orden de $NNLO$. A nivel árbol, se necesitan alrededor de 678 diagramas de Feynman para calcular a la forma tradicional los siguientes procesos

$$\begin{aligned} q\bar{q} &\rightarrow t\bar{t}H, \\ gg &\rightarrow t\bar{t}H, \\ q\bar{q} &\rightarrow t\bar{t}Hg, \\ gg &\rightarrow t\bar{t}Hg, \\ q\bar{q} &\rightarrow t\bar{t}Hgg, \\ qq &\rightarrow t\bar{t}Hqq, \\ q\bar{q} &\rightarrow t\bar{t}HQ\bar{Q}, \\ gg &\rightarrow t\bar{t}Hgg. \end{aligned}$$

Este trabajo sigue en proceso y se va publicar como [71]. En este caso, se necesitan 11 amplitudes de tres puntos a nivel árbol cómo se van a mostrar a continuación. Tenemos las amplitudes de tres gluones

$$\mathcal{M}_3(1_g^-, 2_g^-, 3_g^+) = \frac{\langle 12 \rangle^3}{\langle 23 \rangle \langle 31 \rangle}, \quad \mathcal{M}_3(1_g^+, 2_g^+, 3_g^-) = \frac{[12]^3}{[23][31]}. \quad (4.208)$$

La amplitud para dos quarks sin masa y un gluón son

$$\mathcal{M}_3(1_q^-, 3_g^-, 2_{\bar{q}}^+) = \frac{\langle 31 \rangle^2}{\langle 12 \rangle}, \quad \mathcal{M}_3(1_q^-, 3_g^+, 2_{\bar{q}}^+) = \frac{[23]^2}{[12]}. \quad (4.209)$$

Cuando tenemos una partícula sin masa y dos partículas con masa, se hace uso del factor-x que ya vimos anteriormente en 4.2.1, así que las amplitudes para un gluón y dos quarks son [17, 130, 146]:

$$-i\mathcal{M}_3(\mathbf{1}_q, 3_g^+, \mathbf{2}_{\bar{q}}) = -\frac{\langle \mathbf{12} \rangle \langle q|\mathbf{1}|3 \rangle}{m_q \langle q3 \rangle}, \quad -i\mathcal{M}_3(\mathbf{1}_q, 3_g^-, \mathbf{2}_{\bar{q}}) = -\frac{[\mathbf{12}] \langle 3|\mathbf{1}|q \rangle}{m_q [q3]}, \quad (4.210)$$

$$-i\mathcal{M}_3(\mathbf{1}_t, 3_g^+, \mathbf{2}_{\bar{t}}) = -\frac{\langle \mathbf{12} \rangle \langle r|\mathbf{1}|3 \rangle}{m_t \langle r3 \rangle}, \quad -i\mathcal{M}_3(\mathbf{1}_t, 3_g^-, \mathbf{2}_{\bar{t}}) = -\frac{[\mathbf{12}] \langle 3|\mathbf{1}|r \rangle}{m_t [r3]}. \quad (4.211)$$

En el caso cuando tenemos tres partículas masivas, la amplitud para dos quarks y el bosón de Higgs es [146]:

$$-i\mathcal{M}_3(\mathbf{1}_t, \mathbf{3}_H, \mathbf{2}_{\bar{t}}) = \langle \mathbf{12} \rangle + [\mathbf{12}]. \quad (4.212)$$

En la ecuación (4.212) cuando la masa del quark tiende a cero entonces vamos a tener que

$$-i\mathcal{M}_3(1_t^+, 3_H, 2_{\bar{t}}^+) = [12], \quad -i\mathcal{M}_3(1_t^-, 3_H, 2_{\bar{t}}^-) = \langle 12 \rangle. \quad (4.213)$$

Para ir calentando motores y calcular amplitudes usando los desplazamientos másivos que vimos en la sección ??, consideremos el proceso $\mathcal{M}_4(\mathbf{1}_Q, 4_g^-, 3_g^+, \mathbf{2}_{\bar{Q}})$ el cual es una amplitud de cuatro puntos

con dos partículas sin masa y dos partículas masivas, vamos a escoger el siguiente desplazamiento $[\hat{4}, \hat{3}]$, esto va inducir las siguientes transformaciones de BCFW

$$[\hat{4} | = [4 | + z[3 |, \quad \langle \hat{4} | = \langle 4 |, \quad (4.214)$$

$$|\hat{3}\rangle = |3\rangle - z|4\rangle, \quad |\hat{3}] = |3]. \quad (4.215)$$

El diagrama de BCFW es el siguiente[29]:

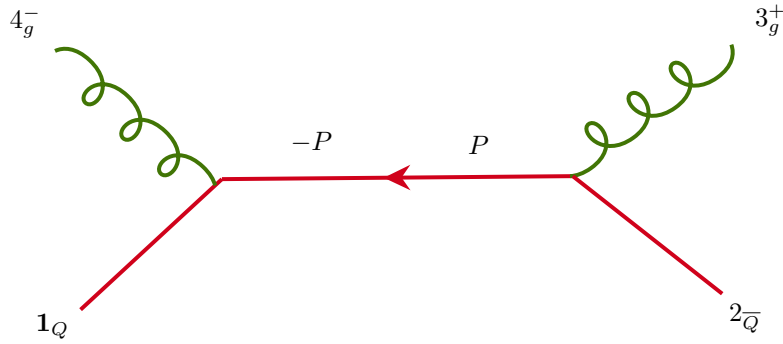


Figura 4.14: Diagrama de BCFW para el proceso $\mathcal{M}_4(\mathbf{1}_Q, 4_g^-, 3_g^+, \mathbf{2}_{\bar{Q}})$, donde $i = 4, j = 3, k = 1, l = 2$. Para los bosones sin masa los vamos a denotar con la línea curvada en verde.

Entonces para ilustrar BCFW másivo, la amplitud va ser calculada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4(\mathbf{1}_Q, 4_g^-, 3_g^+, \mathbf{2}_{\bar{Q}}) &= \mathcal{M}_3(\mathbf{1}_Q, 4_g^-, -\mathbf{P}_{\bar{Q}}) \times \frac{1}{(s_{14} - m_Q^2)} \times \mathcal{M}_3(\mathbf{P}_Q, 3_g^+, \mathbf{2}_{\bar{Q}}) \\ &= -[1 | - \mathbf{P}] \frac{\langle 4 | 1 | 3 \rangle}{m[34]} \times \frac{1}{(s_{14} - m_Q^2)} \times \left(\frac{-\langle \mathbf{P} \mathbf{2} \rangle \langle 4 | \mathbf{P} | 3 \rangle}{m \langle 43 \rangle} \right) \\ &= \frac{[\mathbf{1} \mathbf{P}] \langle 4 | 1 | 3 \rangle \langle \mathbf{P} \mathbf{2} \rangle \langle 4 | \mathbf{P} | 3 \rangle}{m^2 s_{34} (s_{14} - m_Q^2)}, \end{aligned} \quad (4.216)$$

donde se han usado las amplitudes (4.210). Usando la siguiente propiedad vamos a simplificar el resultado [132]:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P} \mathbf{2} \rangle \langle 4 | \mathbf{P} | 3 \rangle &= -[3 | \mathbf{P} | \mathbf{2} \rangle \langle 4 \mathbf{P} \rangle + [3 | \mathbf{P} | \mathbf{P} \rangle \langle 4 \mathbf{2} \rangle \\ &= -[3 | - (p_3 + p_2) | \mathbf{2} \rangle \langle 4 \mathbf{P} \rangle + (-m)[3 \mathbf{P}] \langle 4 \mathbf{2} \rangle \\ &= [3 | p_2 | \mathbf{2} \rangle \langle 4 \mathbf{P} \rangle - m[3 \mathbf{P}] \langle 4 \mathbf{2} \rangle \\ &= -m[3 \mathbf{2}] \langle 4 \mathbf{P} \rangle - m[3 \mathbf{P}] \langle 4 \mathbf{2} \rangle \\ &= m(\langle \mathbf{P} \mathbf{4} \rangle [3 \mathbf{2}] + [\mathbf{P} \mathbf{3}] \langle 4 \mathbf{2} \rangle). \end{aligned} \quad (4.217)$$

Donde $\mathbf{P} = -(p_3 + p_2) = p_1 + p_4$ y se han usado las identidades (3.215). Entonces la amplitud se

convierte en

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_4(\mathbf{1}_Q, 4_g^-, 3_g^+, 2_{\bar{Q}}) &= \frac{m\langle 4|1|3\rangle\left([\mathbf{1}P]\langle P4\rangle[32] + [\mathbf{1}P][P3]\langle 42\rangle\right)}{m^2 s_{34}(s_{14} - m_Q^2)} \\
 &= \frac{m\langle 4|1|3\rangle\left([1|(p_1 + p_4)|4\rangle[32] + m[13]\langle 42\rangle\right)}{m^2 s_{34}(s_{14} - m_Q^2)} \\
 &= \frac{m\langle 4|1|3\rangle\left(m\langle 14\rangle[32] + m[13]\langle 42\rangle\right)}{m^2 s_{34}(s_{14} - m_Q^2)} \\
 &= \frac{\langle 4|1|3\rangle\left(\langle 14\rangle[32] + [13]\langle 42\rangle\right)}{m^2 s_{34}(s_{14} - m_Q^2)}. \tag{4.218}
 \end{aligned}$$

Entonces, para obtener el residuo, es decir, la amplitud correcta debemos desplazar los momentos de la amplitud con las transformaciones de BCFW dadas por (4.214) vamos a tener que la amplitud correcta es

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{M}}_4 &= \frac{\langle \hat{4}|1|\hat{3}\rangle\left(\langle \hat{1}\hat{4}\rangle[\hat{3}2] + [\hat{1}\hat{3}]\langle \hat{4}2\rangle\right)}{m^2 s_{34}(s_{14} - m_Q^2)} \\
 &= \frac{\langle 4|1|3\rangle\left(\langle 14\rangle[32] + [13]\langle 42\rangle\right)}{m^2 s_{34}(s_{14} - m_Q^2)}, \tag{4.219}
 \end{aligned}$$

este resultado es similar al que se obtiene en la referencia de Campbell y Ellis [130].

Amplitudes de 4-puntos

Las siguientes amplitudes que necesitamos son las de 4-puntos, en este caso vamos a tener 4 amplitudes de 4 puntos. Para nuestro proposito, solamente vamos a considerar amplitudes con una partícula externa sin masa como es el caso de un gluón y la línea interna masiva en este caso va ser el quark top t . Estas amplitudes son $\mathcal{A}^+(\mathbf{1}_t, 2_g^+, \mathbf{3}_{\bar{t}}, \mathbf{4}_H)$ y $\mathcal{A}^-(\mathbf{1}_t, 2_g^-, \mathbf{3}_{\bar{t}}, \mathbf{4}_H)$, en el canal-s las amplitudes fueron obtenidas primero por Christensen, et al. [153, 161]:

$$\mathcal{A}_s^+(\mathbf{1}_t, 2_g^+, \mathbf{3}_{\bar{t}}, \mathbf{4}_H) = \frac{em_t g_s T_{a,i3}^{i1}}{\sqrt{2}M_w S_w} \times \left(\frac{m_h^2 [\mathbf{1}2][\mathbf{3}2] + m_t [\mathbf{3}2][2|p_4|\mathbf{1}] + m_t [\mathbf{1}2][2|p_4|\mathbf{3}] + \langle \mathbf{1}3\rangle [2|p_3 p_4|2]}{(s - m_t^2)(u - m_t^2)} \right), \tag{4.220}$$

$$\mathcal{A}_s^-(\mathbf{1}_t, 2_g^-, \mathbf{3}_{\bar{t}}, \mathbf{4}_H) = \frac{em_t g_s T_{a,i3}^{i1}}{\sqrt{2}M_w S_w} \times \left(\frac{m_h^2 \langle 12\rangle \langle 32\rangle + m_t \langle 32\rangle \langle 2|p_4|\mathbf{1}] + m_t \langle 12\rangle \langle 2|p_4|\mathbf{3}] + [\mathbf{1}3]\langle 2|p_3 p_4|2]}{(s - m_t^2)(u - m_t^2)} \right). \tag{4.221}$$

Vamos a tomar las amplitudes de 4-puntos $f\bar{f}gH$ de la referencia [161]. Es posible obtener estas amplitudes para los canales t y u mediante las técnicas del factor- x , y su comportamiento cuando la variable z es muy grande se estudia también en [153].

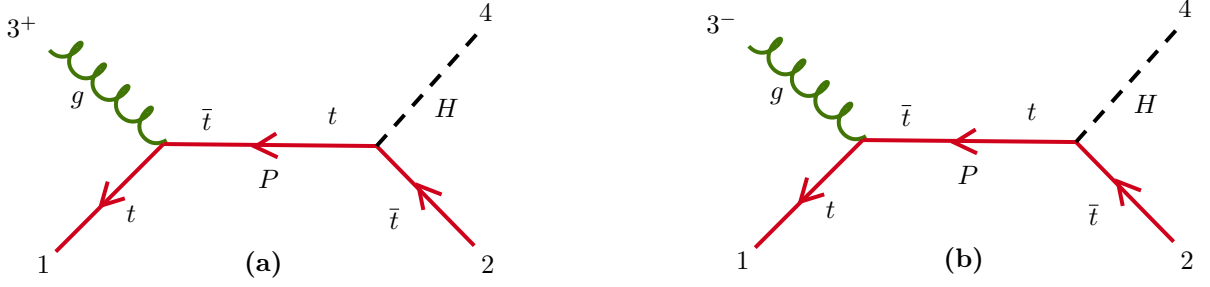


Figura 4.15: Diagramas de BCFW para $\mathcal{A}(1_t, 3_g^\pm, 2_{\bar{t}}, 4_H)$

Otras amplitudes útiles de 4-puntos son $\mathcal{A}_4(1_t, 2_{\bar{t}}, 3_q^\mp, 4_q^\pm)$ los cuales contienen dos quarks másivos y dos quarks sin masa como líneas externas

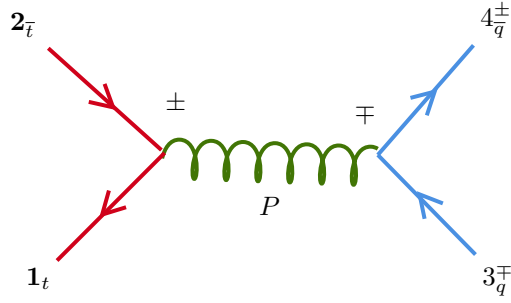


Figura 4.16: Diagramas de BCFW para $\mathcal{A}_4(1_t, 2_{\bar{t}}, 3_q^\pm, 4_q^\mp)$

Las amplitudes van a ser [130]

$$\mathcal{M}_4(1_Q, 2_{\bar{Q}}, 3_q^-, 4_q^+) = \frac{\langle 13 \rangle [42] + [14] \langle 32 \rangle}{s_{34}}, \quad (4.222)$$

$$\mathcal{M}_4(1_Q, 2_{\bar{Q}}, 3_q^+, 4_q^-) = \frac{\langle 14 \rangle [32] + [13] \langle 42 \rangle}{s_{43}}. \quad (4.223)$$

Amplitudes de 5-puntos

Las siguientes amplitudes que se requieren son las de 5-puntos, estas se obtienen al usar la forma constructiva, es decir, van a resultar de pegar las amplitudes de 3-puntos con las de 4-puntos conectadas mediante un propagador con polos simples. Los diagramas se muestran en la Figura:

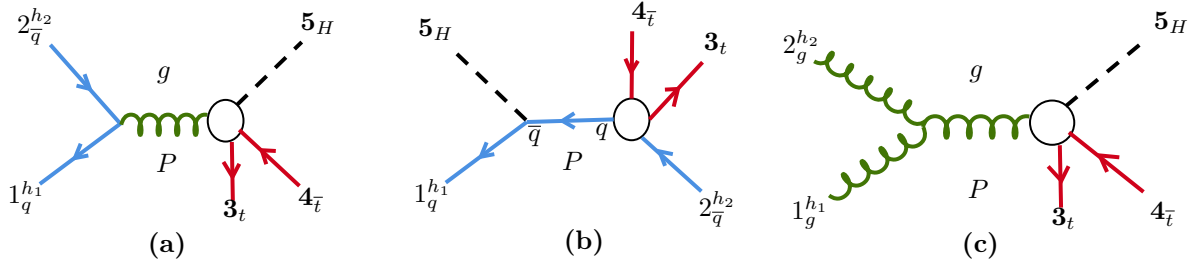


Figura 4.17: Diagramas de BCFW para las amplitudes de 5-puntos: a) $\mathcal{M}(1_q^\pm, 2_q^\mp, \mathbf{3}_t, \mathbf{4}_{\bar{t}}, \mathbf{5}_H)$, b) $\mathcal{M}(1_q^\pm, 2_q^\mp, \mathbf{3}_t, \mathbf{4}_{\bar{t}}, \mathbf{5}_H)$, c) $\mathcal{M}(1_g^\pm, 2_g^\mp, \mathbf{3}_t, \mathbf{4}_{\bar{t}}, \mathbf{5}_H)$.

Para ilustrar como calcular una amplitud de 5-puntos usando BCFW, nos enfocamos en la amplitud $\mathcal{M}(1_q^+, 2_q^+, \mathbf{3}_t, \mathbf{4}_{\bar{t}}, \mathbf{5}_H)$ inciso b, como se muestra abajo en la Figura 4.18 [71]:

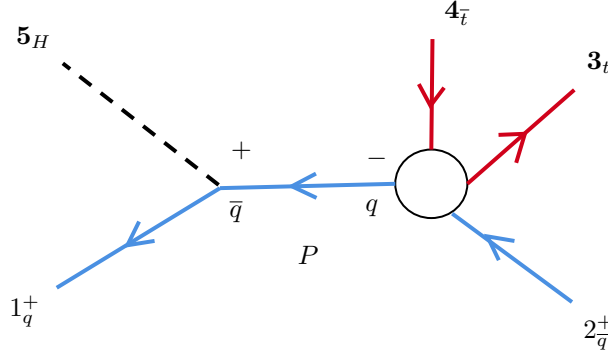


Figura 4.18: Diagrama de BCFW de 5-puntos

La amplitud correspondiente al diagrama de BCFW de la Figura 4.18 es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_5(1_q^+, 2_q^+, \mathbf{3}_t, \mathbf{4}_{\bar{t}}, \mathbf{5}_H) &= \mathcal{M}_3(1_q^+, \mathbf{5}_H, P_q^+) \times \frac{1}{(s_{15} - m_H^2)} \times \mathcal{M}(\mathbf{3}_t, \mathbf{4}_{\bar{t}}, -P_q^+, 2_q^+) \\
 &= [1P] \times \frac{1}{(s_{15} - m_H^2)} \times \left\{ \frac{\langle \mathbf{3} | -P \rangle [24] + [\mathbf{32}] \langle -P | 4 \rangle}{(s_{34} - M^2)} \right\} \\
 &= -\frac{[1P] \langle P\mathbf{3} \rangle [24] + [1P] \langle P4 \rangle [\mathbf{32}]}{(s_{15} - m_H^2)(s_{34} - M^2)} \\
 &= -\frac{[1P] \langle \mathbf{3} \rangle [24] + [1(p_1 + p_5)] \langle 4 \rangle [\mathbf{32}]}{(s_{15} - m_H^2)(s_{34} - M^2)} \\
 &= -\frac{[1p_5] \langle \mathbf{3} \rangle [24] + [1p_5] \langle 4 \rangle [\mathbf{32}]}{(s_{15} - m_H^2)(s_{34} - M^2)}. \tag{4.224}
 \end{aligned}$$

El desplazamiento que escogemos es $[\hat{1}, \hat{2}]$, esto nos da las siguientes transformaciones de BCFW:

$$|\hat{2}\rangle = |2\rangle - z|1\rangle; \quad |\hat{2}] = |2], \tag{4.225}$$

$$|\hat{1}\rangle = |1\rangle + z|2\rangle; \quad \langle \hat{1}| = \langle 1|. \tag{4.226}$$

El polo en este caso tiene la siguiente forma:

$$z_p = -\frac{\langle i|p_k|i\rangle}{\langle i|p_k|j\rangle} = -\frac{\langle 1|p_5|1\rangle}{\langle 1|p_5|2\rangle}. \tag{4.227}$$

De este modo la amplitud desplazada va tener la forma:

$$\hat{\mathcal{M}}_5(1_q^+, 2_{\bar{q}}^+, \mathbf{3}_t, \mathbf{4}_{\bar{t}}, \mathbf{5}_H) = -\frac{[\hat{1}|p_5|\mathbf{3}\rangle[\hat{2}\mathbf{4}] + [\hat{1}|p_5|\mathbf{4}\rangle[\mathbf{3}\hat{2}]}{(s_{15} - m_H^2)(s_{34} - M^2)} \quad (4.228)$$

$$= -\frac{[\hat{1}\mathbf{5}]\langle\mathbf{5}\mathbf{3}\rangle[\hat{2}\mathbf{4}] + [\hat{1}\mathbf{5}]\langle\mathbf{5}\mathbf{4}\rangle[\mathbf{3}\hat{2}]}{(s_{15} - m_H^2)(s_{34} - M^2)}, \quad (4.229)$$

calculando la contribución $[\hat{1}\mathbf{5}]$, se tiene

$$\begin{aligned} [\hat{1}\mathbf{5}] &= \left([1| - \frac{\langle 1|p_5|1\rangle}{\langle 1|p_5|2\rangle} [2|] \right) |\mathbf{5}\rangle \\ &= [\mathbf{1}\mathbf{5}] - \frac{\langle 1|p_5|1\rangle}{\langle 1|p_5|2\rangle} [\mathbf{2}\mathbf{5}] \\ &= [\mathbf{1}\mathbf{5}] - \frac{\langle \mathbf{1}\mathbf{5}\rangle[\mathbf{5}\mathbf{1}]}{\langle \mathbf{1}\mathbf{5}\rangle[\mathbf{5}\mathbf{2}]} [\mathbf{2}\mathbf{5}] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.230)$$

Por lo tanto, el residuo o la amplitud desaparece

$$\hat{\mathcal{M}}_5(1_q^+, 2_{\bar{q}}^+, \mathbf{3}_t, \mathbf{4}_{\bar{t}}, \mathbf{5}_H) = 0, \quad (4.231)$$

el resto de resultados de las amplitud van a aparecer en el trabajo que lleva por nombre *Analytic Tree-level Scattering Amplitudes for $pp \rightarrow t\bar{t}H$ production* [71].

Capítulo 5

Conclusiones

Hermoso el tiempo que habían vivido, a pesar de los maltratos y desvelos. El inicio desde abajo. La construcción de la amistad- Las enseñanzas de sus maestros. La angustia por la vida de Leo pendiendo de un haz de protones. El viaje al CERN. Las clases de física. Claren. Dichoso aquel que puede disfrutar del aprendizaje, le dijo la maga, con tanto por hacer, puedes llegar tan lejos como las ondas gravitacionales y descifrar el ritmo de las partículas y las estrellas. Constancio sintió el llamado del universo.

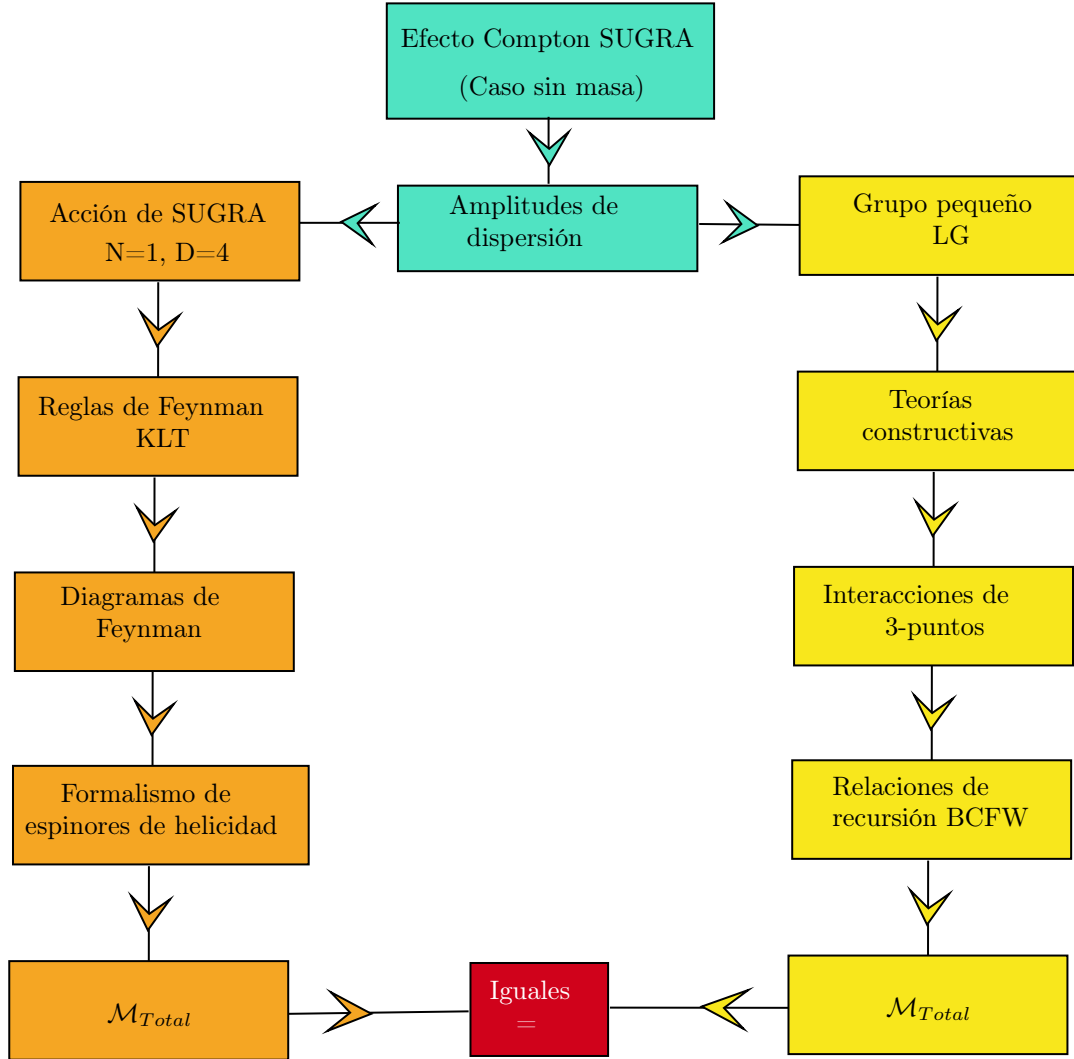
El muchacho que soñaba con el bosón de Higgs, J. Lorenzo Díaz Cruz

En este capítulo presentamos las conclusiones del trabajo que se hizo durante los 4 años del doctorado, estas son las siguientes:

En este trabajo de tesis revisamos varios ejemplos de procesos de dispersión, uno de estos fue el proceso de dispersión $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ a nivel árbol, primero con partículas sin masa involucradas, como ejemplo de cálculo de una amplitud para ilustrar el formalismo de los espinores de Weyl. Observamos en (3.66) y (3.29) resultados más directos en comparación con el método tradicional de Feynman de cuatro componentes donde se usa la tecnología de las trazas [1]. Las amplitudes cuyas configuraciones de helicidades tengan a lo más dos helicidades positivas o dos negativas como en (3.65), son nombradas *Maximum Helicity Violating* (MHV, por sus siglas en inglés) [7]. Estas son las únicas amplitudes que contribuyen en los procesos.

Por otro lado, también calculamos este proceso usando la forma tradicional de los diagramas de Feynman con todo y el cálculo de trazas. Posteriormente en la sección 3.6.3 calculamos el mismo proceso pero ahora con la extensión de los espinores de Weyl conocidos como espín espinores que son los objetos que sirven para calcular procesos de dispersión que involucran partículas masivas, utilizando el método híbrido; esto es, primero se calcula la amplitud con las reglas de Feynman y luego se cambia de variables de espinores de Dirac de cuatro componentes a los espín espinores, obteniendo resultados similares en (2.121) y (3.250), pero con un número menor de pasos, siendo los espín espinores mas eficientes y directos.

Hemos demostrado que nuestros resultados para tres y cuatro amplitudes para la interacción del gravitino y gravitón en supergravedad $\mathcal{N} = 1$, coinciden ambas perspectivas, es decir desde los métodos de amplitudes y el análisis convencional de las reglas de Feynman. Para las amplitudes de tres partículas, primero aplicamos la fórmula maestra, el cual fue obtenida en la literatura desde las propiedades del pequeño grupo o little group en ingles [10, 133]. Usando esta fórmula, tenemos dos configuraciones de helicidades correspondientes a dos amplitudes de tres puntos que son diferentes. Uno es para la interacción gravitino-gravitino-gravitón y el otro es la interacción gravitón-gravitón-gravitón. Suprimiendo todos los factores de constantes de acoplamiento, mostramos que estas interacciones poseen la misma estructura matemática como aquellas que se obtuvieron por la contracción los vértices de tres puntos de KLT para las interacciones de gravitino-gravitino-gravitón and gravitón-gravitón-gravitón, reglas derivadas por Bjerrum-Bohr and Engelund [113], con sus correspondientes tensores de polarización los cuales pueden ser escritos en términos de espinores de helicidad sin masa. Para obtener las amplitudes de cuatro puntos para el efecto Compton en supergravedad a partir de las amplitudes de tres puntos hicimos uso de las técnicas de recursión BCFW el cual forma parte de los métodos modernos de amplitudes. Curiosamente, los resultados son similares si usamos las reglas de Feynman de KLT [113] para calcular las amplitudes para cada diagrama de Feynman después se reescribe todo en términos de espinores de helicidad. Acerca del calculo de amplitudes del gravitino a orden de loops, uno puede decir que en un nivel práctico dichas correcciones serían mas bien pequeñas, ya que estamos tratando con efectos gravitatorios. Sin embargo, desde una perspectiva formal, es un problema relevante. Contribuciones recientes a estos temas de extender supergravedad han sido evaluados en [64], y permanece como un problema abierto para identificar posibles divergencias en supergravedad $\mathcal{N} = 4$. En el caso de un gravitino masivo, luce bastante complicado calcular a orden de loops, pero bastantes herramientas como los métodos unitarios, KLT, etc. están disponibles para tratar de simplificar el problema. Posibles exploraciones a lo largo de esta línea se dejan como trabajo a futuro. Entonces enfatizamos que es mas fácil calcular amplitudes incluso de una teoría muy complicada como supergravedad mediante los métodos modernos de amplitudes que el análisis convencional de las reglas de Feynman, lo cual podemos ver resumido en la Figura 5.1.

Figura 5.1: Feynman vs BCFW, para $N = 1$ en $D = 4$

Los desplazamientos que vimos en la sección 4.3.5 funcionan de muy buena manera utilizando las teorías constructivas para muchos casos donde tenemos partículas externas sin masa tanto con una línea interna masiva como una sin masa, excepto cuando tenemos partículas externas masivas y la línea internas sin masa; en este caso tenemos que darle masa a la línea interna por ejemplo un fotón o gluón masivo, calcular la amplitud de este modo y luego tomar el límite cuando la masa tiende a cero. Todo esto para hacer coincidir los resultados obtenidos con aquellos que se calculan mediante el análisis de las reglas de Feynman, así como se muestra en la Figura 5.2. Para el caso de $t\bar{t}H$ fue suficiente solamente usar los casos $a)$, $b)$ y $c)$, para calcular las amplitudes. Para resolver el caso $e)$ hay algunas propuestas tales como [165, 166]. En nuestro caso intentamos resolverlos desde el punto de vista de la contracción entre grupos pequeños tal como vimos en la sección 1.5, dicho trabajo sigue en progreso en [31, 96], para tratar de entender si una teoría sin masa está dentro de su teoría masiva o son completamente independientes, en el contexto de la discontinuidad de Van Dam-Veltman-Zakharov [167, 168] tal como se muestra en la Figura 5.2.

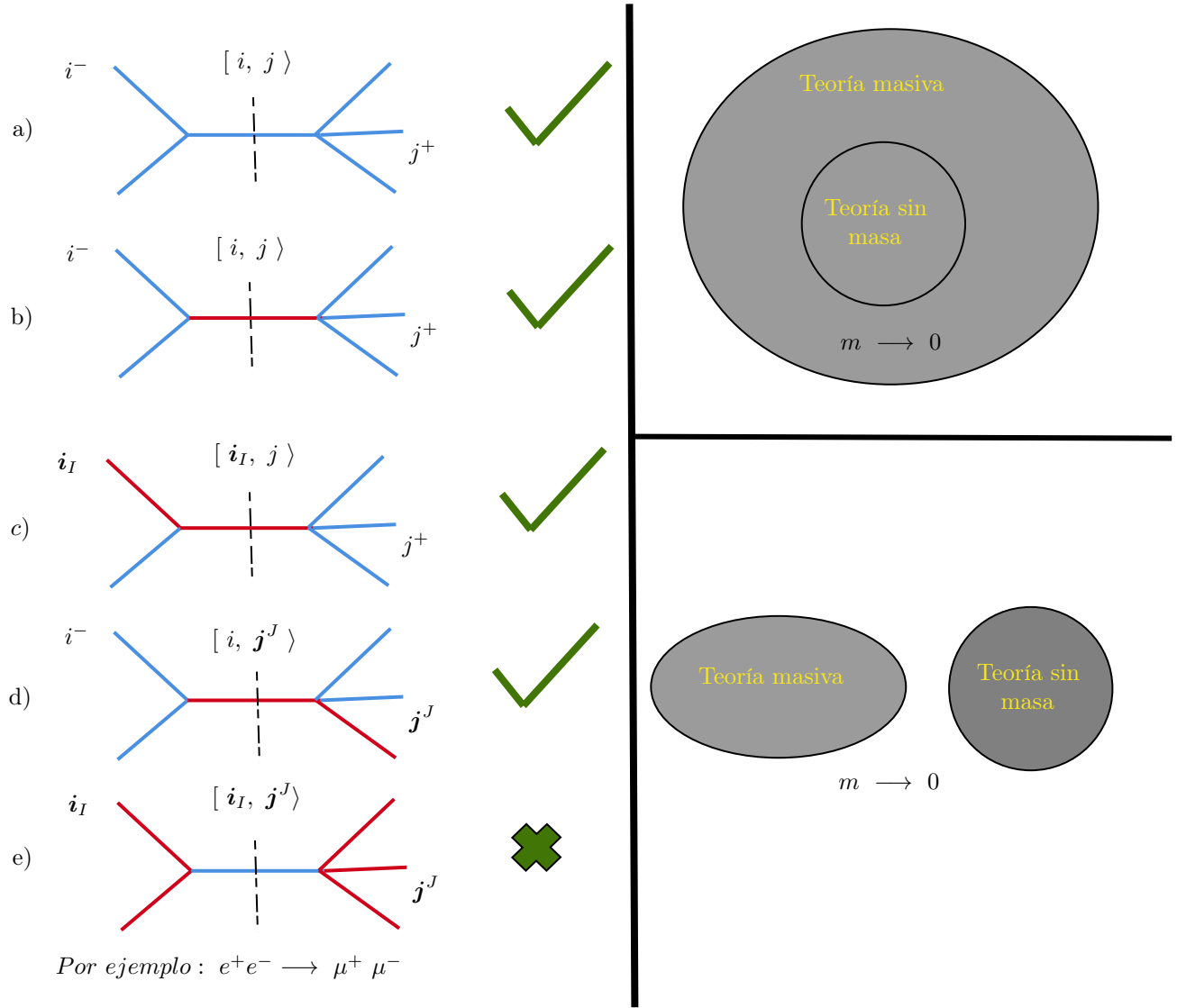


Figura 5.2:

Por último, en este trabajo se presentaran los aspectos elementales de supergravedad global $\mathcal{N} = 1$ de forma accesible utilizando el formalismo lagrangiano en la sección de apéndice. En particular, se demostró que la acción de Rarita-Schwinger para el gravitino (ψ_μ), así como la de Einstein-Hilbert para el gravitón ($h_{\mu\nu}$), las cuales conforman supergravedad pura $N = 1$, son invariantes ante difeomorfismos y transformaciones supersimétricas globales. Los cálculos realizados de manera explícita de estas invarianzas permiten que un estudiante o alguien interesado en supergravedad pueda verificarlo por sí mismo.

Apéndice A

Invarianza de supergravedad $N = 1$ ante difeomorfismos

En teoría cuántica de campos uno deriva las interacciones de la teoría mediante el uso de la invarianza ante transformaciones de norma, el llamado el principio de gauge, mientras que en gravitación el equivalente es la llamada invarianza ante difeomorfismos, la cuál consiste en la libertad para elegir el sistema de coordenadas, ésta invarianza se extiende naturalmente a supergravedad global. En esta subsección demostramos evidentemente que la acción $\mathcal{S}_{SUGRA}$ es invariante ante transformaciones de norma (difeomorfismos) [169]. La transformación de norma correspondiente a la acción de Rarita-Schwinger es

$$\delta_\eta \Psi_\mu = \partial_\mu \eta, \quad (\text{A.1})$$

donde η es un parámetro fermiónico, mientras que para la acción de Einstein-Hilbert se tiene la transformación

$$\delta_\epsilon h_{\mu\nu} = \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu. \quad (\text{A.2})$$

siendo ϵ_μ un parámetro bosónico. A continuación, se verifica que las transformaciones de norma (F) y (A.2), dejan invariantes la acción (3.98) y la acción (C.24), respectivamente. La variación del lagrangiano de Rarita-Schwinger $\mathcal{L}_{RS}$ ante la transformación (F) es la siguiente:

$$\begin{aligned} \delta_\eta \mathcal{L}_{RS} &= -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu (\partial_\rho \Psi_\sigma) (\delta_\eta \bar{\Psi}_\mu) - \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu \bar{\Psi}_\mu (\partial_\rho \delta_\eta \Psi_\sigma) \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu \bar{\Psi}_\mu (\partial_\rho \partial_\sigma \eta) \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu \left\{ \partial_\rho [\bar{\Psi}_\mu (\partial_\sigma \eta)] - (\partial_\rho \bar{\Psi}_\mu) (\partial_\sigma \eta) \right\}, \end{aligned}$$

donde en la segunda fila se utilizó la ecuación de campo (3.99), y en la última se aplicó la regla de Leibniz. Posteriormente notamos que

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu (\partial_\rho \bar{\Psi}_\mu) &= \epsilon^{\sigma\nu\rho\mu} \gamma_5 \gamma_\nu (\partial_\rho \bar{\Psi}_\sigma) \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu (\partial_\rho \bar{\Psi}_\sigma) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

donde al final se utiliza nuevamente (3.99). Así pues, la variación del lagrangiano de Rarita-Schwinger ante transformaciones de norma es la siguiente:

$$\delta_\eta \mathcal{L}_{RS} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho [\bar{\Psi}_\mu (\partial_\sigma \eta)], \quad (\text{A.4})$$

y siendo una derivada total implica que $\delta_\eta \mathcal{S}_{RS} = 0$. Por otro lado, la variación del lagrangiano de Einstein-Hilbert $\mathcal{L}_{EH}$ ante la transformación (A.2) resulta

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon \mathcal{L}_{EH} &= -\frac{1}{2} \left(\delta_\epsilon R_{\mu\nu}^L - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \delta_\epsilon R^L \right) h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(R_{\mu\nu}^L - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^L \right) (\delta_\epsilon h^{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{4} h(\delta_\epsilon R^L) - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} (\delta_\epsilon R_{\mu\nu}^L),\end{aligned}\tag{A.5}$$

donde usamos la ecuación de campo (C.25). Es posible notar que

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon R^L &= \partial^\rho \partial^\sigma (\delta_\epsilon h_{\rho\sigma}) - \eta^{\alpha\beta} \partial^\epsilon \partial_\epsilon (\delta_\epsilon h_{\alpha\beta}) \\ &= \partial^\rho \partial^\sigma (\partial_\rho \epsilon_\sigma + \partial_\sigma \epsilon_\rho) - \eta^{\alpha\beta} \partial^\epsilon \partial_\epsilon (\partial_\alpha \epsilon_\beta + \partial_\beta \epsilon_\alpha) \\ &= 0,\end{aligned}\tag{A.6}$$

de igual forma vamos a tener,

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon R_{\mu\nu}^L &= \frac{1}{2} [\partial^\lambda \partial_\mu (\delta_\epsilon h_{\lambda\nu}) + \partial^\lambda \partial_\nu (\delta_\epsilon h_{\lambda\mu}) - \square (\delta_\epsilon h_{\mu\nu}) - \partial_\mu \partial_\nu (\delta_\epsilon h)] \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\lambda\gamma} [\partial_\mu \partial_\gamma (\delta_\epsilon h_{\lambda\nu}) + \partial_\nu \partial_\gamma (\delta_\epsilon h_{\lambda\mu}) - \partial_\gamma \partial_\lambda (\delta_\epsilon h_{\mu\nu}) - \partial_\mu \partial_\nu (\delta_\epsilon h_{\gamma\lambda})] \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\lambda\gamma} [\partial_\mu \partial_\gamma (\partial_\lambda \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\lambda) + \partial_\nu \partial_\gamma (\partial_\lambda \epsilon_\mu + \partial_\mu \epsilon_\lambda) - \partial_\gamma \partial_\lambda (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) - \partial_\mu \partial_\nu (\partial_\gamma \epsilon_\lambda + \partial_\lambda \epsilon_\gamma)] \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\lambda\gamma} [\partial_\nu \partial_\gamma \partial_\mu \epsilon_\lambda - \partial_\mu \partial_\nu \partial_\lambda \epsilon_\gamma] \\ &= 0,\end{aligned}\tag{A.7}$$

donde se utiliza la propiedad conmutativa de las parciales y $\eta^{\lambda\gamma} = \eta^{\gamma\lambda}$. Por tanto, sustituyendo las dos ecuaciones anteriores en la variación del lagrangiano de Einstein-Hilbert (A.5), se tiene que la variación ante transformaciones de norma es nula:

$$\delta_\epsilon \mathcal{L}_{EH} = 0,\tag{A.8}$$

lo cual implica que $\delta_\epsilon \mathcal{S}_{EH} = 0$. Dado (3.100), se prueba que el cambio en la acción de supergravedad global ante transformaciones de norma es nulo, es decir, la acción global de supergravedad es invariante ante difeomorfismos,

$$\delta_{\eta,\epsilon} \mathcal{S}_{SUGRA} = \delta_\eta \mathcal{S}_{RS} + \delta_\epsilon \mathcal{S}_{EH} = 0.\tag{A.9}$$

Apéndice B

Invarianza de S_{SUGRA} ante SUSY global

Por otra parte, para verificar que la teoría es realmente una teoría supersimétrica, tenemos que verificar que las transformaciones que conectan los campos del gravitón $h_{\mu\nu}$ y del gravitino Ψ^μ dejen la acción de S_{SUGRA} (3.100) invariante. En esta subsección demostramos que la acción S_{SUGRA} global es invariante bajo transformaciones supersimétricas globales. Para la acción de Rarita-Schwinger se tiene la siguiente transformación

$$\delta_\xi \Psi_\mu = -i\Sigma^{\rho\tau} \partial_\rho h_{\tau\mu} \xi, \quad (B.1)$$

donde ξ es un parámetro espinorial de Majorana y $\Sigma^{\rho\tau}$ esta dado por

$$\Sigma^{\rho\tau} \equiv \frac{i}{2}(\gamma^\rho \gamma^\tau - \gamma^\tau \gamma^\rho). \quad (B.2)$$

Mientras que la transformación correspondiente a la acción de Einstein-Hilbert está dada por

$$\delta_\xi h_{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \bar{\xi} (\gamma_\mu \Psi_\nu + \gamma_\nu \Psi_\mu). \quad (B.3)$$

A continuación se verifica que las transformaciones de supergravedad (B.1) y (C.28), dejan invariante la acción (3.98) y (C.24), respectivamente. Comenzamos con la variación del lagrangiano de Rarita-Schwinger (3.98), ante la transformación de supergravedad (B.1):

$$\begin{aligned} \delta_\xi \mathcal{L}_{RS} &= -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu (\partial_\rho \Psi_\sigma) (\delta_\xi \bar{\Psi}_\mu) - \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu \bar{\Psi}_\mu \partial_\rho (\delta_\xi \Psi_\sigma) \\ &= \frac{i}{2} \Sigma^{\lambda\tau} \xi \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu \bar{\Psi}_\mu (\partial_\rho \partial_\lambda h_{\tau\sigma}), \end{aligned} \quad (B.4)$$

donde en el primer renglón se eliminó el primer término con la ecuación de campo (3.99). Posteriormente, usando la siguiente identidad:

$$i\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\nu = \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu - \eta^{\rho\sigma} \gamma^\mu - \eta^{\sigma\mu} \gamma^\rho + \eta^{\rho\mu} \gamma^\sigma, \quad (B.5)$$

y que $\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, podemos reescribir la ecuación anterior, obteniendo

$$\begin{aligned} \delta_\xi \mathcal{L}_{RS} &= \frac{1}{2} \Sigma^{\lambda\tau} \xi (\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu - \eta^{\rho\sigma} \gamma^\mu - \eta^{\sigma\mu} \gamma^\rho + \eta^{\rho\mu} \gamma^\sigma) \bar{\Psi}_\mu (\partial_\rho \partial_\lambda h_{\tau\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} \Sigma^{\lambda\tau} \xi (\gamma^\sigma \bar{\Psi}^\rho \partial_\rho \partial_\lambda h_{\tau\sigma} - \gamma^\rho \bar{\Psi}^\sigma \partial_\rho \partial_\lambda h_{\tau\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} \Sigma^{\lambda\tau} \xi \{ \gamma^\sigma \partial_\rho (\bar{\Psi}^\rho \partial_\lambda h_{\tau\sigma}) - \gamma^\rho \partial_\rho (\bar{\Psi}^\sigma \partial_\lambda h_{\tau\sigma}) \}, \end{aligned} \quad (B.6)$$

donde se utilizó la regla de Leibniz para derivadas y la condición de reducibilidad (C.34). Finalmente, la variación del lagrangiano de Rarita-Schwinger ante transformaciones de supergravedad es la siguiente:

$$\delta_\xi \mathcal{L}_{RS} = \frac{1}{2} \Sigma^{\lambda\tau} \xi \partial^\rho \left\{ (\gamma^\sigma \bar{\Psi}_\rho - \gamma_\rho \bar{\Psi}^\sigma) \partial_\lambda h_{\tau\sigma} \right\}. \quad (\text{B.7})$$

es decir, es una derivada total, por tanto $\delta_\xi \mathcal{S}_{RS} = 0$. A continuación verificamos que la transformación de supersimetría (C.28) correspondiente al gravitón, deja invariante la acción (C.24):

$$\begin{aligned} \delta_\xi \mathcal{L}_{EH} &= \delta_\xi \left\{ -\frac{1}{2} (R_{\mu\nu}^L - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^L) h^{\mu\nu} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \delta_\xi (h R^L) - \frac{1}{2} \delta_\xi (h^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^L). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Procedemos a calcular los términos de forma independiente:

$$\begin{aligned} \delta_\xi (h R^L) &= (\delta_\xi h) R^L + h (\delta_\xi R^L) \\ &= h [\partial^\mu \partial_\gamma (\delta_\xi h^\gamma_\mu) - \square (\delta_\xi h)] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

donde es evidente que $R^L = 0$ es una consecuencia de la ecuación de campo (C.25), y que cualquier término del tipo $\partial_\gamma (\delta_\xi h^\gamma_\nu)$ se elimina, ya que contraemos el índice de la parcial con $\delta_\xi h^\mu_\nu$, y esto lleva a las condiciones de irreducibilidad (C.34) y (F.54), las cuales son cero. Ahora calculamos el otro término en (C.38),

$$\begin{aligned} \delta_\xi (h^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^L) &= \frac{1}{2} \delta_\xi [h^{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\gamma h^\gamma_\nu + \partial_\nu \partial_\gamma h^\gamma_\mu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu})] \\ &= \frac{1}{2} (\delta_\xi h^{\mu\nu}) (\partial_\mu \partial_\gamma h^\gamma_\nu + \partial_\nu \partial_\gamma h^\gamma_\mu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \square (\delta_\xi h_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (\delta_\xi h^{\mu\nu}) \partial_\mu (2 \partial_\gamma h^\gamma_\nu - \partial_\nu h) - \frac{1}{2} (\delta_\xi h^{\mu\nu}) \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \square (\delta_\xi h_{\mu\nu}) \\ &= \partial_\mu \{ (\delta_\xi h^{\mu\nu}) (\partial_\gamma h^\gamma_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu h) \} - \frac{1}{2} (\delta_\xi h^{\mu\nu}) \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \square (\delta_\xi h_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

donde se utilizó que los términos de tipo $\partial_\gamma (\delta_\xi h^\gamma_\nu)$ y $\delta_\xi h$ se anulan (dado que $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$, la variación de supersimetría aplicada a este escalar da como resultado una contracción como en (C.32), la cual es cero). Sin embargo, notemos que,

$$\begin{aligned} \square [h_{\mu\nu} (\delta_\xi h^{\mu\nu})] &= \partial^\lambda [(\partial_\lambda h_{\mu\nu}) (\delta_\xi h^{\mu\nu}) + h_{\mu\nu} (\partial_\lambda \delta_\xi h^{\mu\nu})] \\ &= (\delta_\xi h^{\mu\nu}) \square h_{\mu\nu} + 2 (\partial_\lambda h_{\mu\nu}) (\partial^\lambda \delta_\xi h^{\mu\nu}) + \square (\delta_\xi h^{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

luego, renombrando algunos índices y sustituyendo esta ecuación en la anterior podemos reescribir (B.10), obteniendo lo siguiente

$$\delta_\xi (h^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^L) = \partial^\lambda \{ (\delta_\xi h^\nu_\lambda) (\partial_\gamma h^\gamma_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu h) - \frac{1}{2} \partial_\lambda [h_{\mu\nu} (\delta_\xi h^{\mu\nu})] \} + (\partial_\lambda h_{\mu\nu}) (\partial^\lambda \delta_\xi h^{\mu\nu}). \quad (\text{B.12})$$

Ahora analizaremos el último término, aquel que no se encuentra adentro de la derivada total en (C.42), procedemos de la siguiente forma, observemos que:

$$\begin{aligned} \partial^\lambda [(\delta_\xi h_{\mu\nu}) (\partial_\lambda h^{\mu\nu})] &= (\partial^\lambda \delta_\xi h_{\mu\nu}) (\partial_\lambda h^{\mu\nu}) + (\delta_\xi h_{\mu\nu}) \square h^{\mu\nu} \\ &= (\partial_\lambda h_{\mu\nu}) (\partial^\lambda \delta_\xi h^{\mu\nu}) + (\delta_\xi h_{\mu\nu}) (\partial^\mu \partial_\gamma h^{\gamma\nu} + \partial^\nu \partial_\gamma h^{\gamma\mu} - \partial^\mu \partial^\nu h), \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

donde usamos la ecuación de campo (C.25), escrita de forma explícita. Sin embargo, notemos que

$$\partial^\nu [(\delta_\xi h_{\mu\nu}) (\partial_\gamma h^{\gamma\nu})] = (\delta_\xi h_{\mu\nu}) (\partial^\nu \partial_\gamma h^{\gamma\mu}), \quad (\text{B.14})$$

$$\partial^\nu [(\delta_\xi h_{\mu\nu})(\partial^\mu h)] = (\delta_\xi h_{\mu\nu})(\partial^\mu \partial_\nu h), \quad (\text{B.15})$$

donde se anulan los primeros términos en cada ecuación puesto que contienen factores del tipo $\partial^\nu \delta_\xi h_{\mu\nu}$. Con lo anterior reescribimos (C.43) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (\partial_\lambda h_{\mu\nu})(\partial^\lambda \delta_\xi h^{\mu\nu}) &= \partial^\lambda [(\delta_\xi h_{\mu\nu})(\partial_\lambda h^{\mu\nu})] - \partial^\mu [(\delta_\xi h_{\mu\nu})(2\partial_\gamma h^{\gamma\nu} - \partial^\nu h)] \\ &= \partial^\lambda [(\delta_\xi h_{\mu\nu})(\partial_\lambda h^{\mu\nu}) - (\delta_\xi h_{\lambda\nu})(2\partial_\gamma h^{\gamma\nu} - \partial^\nu h)]. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Finalmente, haciendo algunos cambios de índices y sustituyendo (C.46) en (C.42), obtenemos lo siguiente

$$\delta_\xi (h^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^L) = \partial^\lambda \{ (\delta_\xi h_{\lambda\nu}) \left(\frac{1}{2} \partial^\nu h - \partial_\gamma h^{\gamma\nu} \right) + (\delta_\xi h_{\mu\nu}) (\partial_\lambda h^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \partial_\lambda [h_{\mu\nu} (\delta_\xi h^{\mu\nu})] \}. \quad (\text{B.17})$$

Y para concluir, sustituyendo (C.39) y (C.47), en (C.38), se obtiene la siguiente expresión en la variación del lagrangiano de Einstein-Hilbert,

$$\delta_\xi \mathcal{L}_{EH} = \partial^\lambda \{ (\delta_\xi h_{\lambda\nu}) \left(\frac{1}{2} \partial_\gamma h^{\gamma\nu} - \frac{1}{4} \partial^\nu h \right) + \frac{1}{4} \partial_\lambda [h_{\mu\nu} (\delta_\xi h^{\mu\nu})] - \frac{1}{2} (\delta_\xi h_{\mu\nu}) (\partial_\lambda h^{\mu\nu}) \}, \quad (\text{B.18})$$

$$= \partial^\lambda \{ (\delta_\xi h_{\lambda\nu}) \left(\frac{1}{2} \partial_\gamma h^{\gamma\nu} - \frac{1}{4} \partial^\nu h \right) + \frac{1}{4} h^{\mu\nu} (\partial_\lambda \delta_\xi h_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} (\partial_\lambda h^{\mu\nu}) (\delta_\xi h_{\mu\nu}) \}. \quad (\text{B.19})$$

Sustituyendo (C.28), en la ecuación (C.48), se obtiene que la variación del lagrangiano de Einstein-Hilbert ante transformaciones de supersimetría es equivalente a la derivada total:

$$\delta_\xi \mathcal{L}_{EH} = \frac{i}{4} \xi \partial^\lambda \left\{ (\gamma_\lambda \Psi_\nu + \gamma_\nu \Psi_\lambda) \left(\frac{1}{2} \partial^\nu h - \partial_\gamma h^{\gamma\nu} \right) + \gamma_\mu \Psi_\nu \partial_\lambda h^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \partial_\lambda \gamma_\mu \Psi_\nu \right\}, \quad (\text{B.20})$$

lo cuál implica que $\delta_\xi \mathcal{S}_{EH} = 0$. Así pues, dado (3.100), se demuestra que el cambio en la acción de supergravedad global ante transformaciones de supersimetría es nulo, es decir, supergravedad es invariante bajo SUSY global,

$$\delta_\xi \mathcal{S}_{\text{SUGRA}} = \delta_\xi \mathcal{S}_{RS} + \delta_\xi \mathcal{S}_{EH} = 0. \quad (\text{B.21})$$

Apéndice C

Supergravedad $N = 1$ en $D = 4$ en dos componente

En este apéndice, presentamos la invarianza de la lagrangiana supersimétrica global de $N = 1$ para el gravitón y su pareja supersimétrica de espín $\frac{3}{2}$, el gravitino, bajo transformaciones supersimétricas [170, 171]. Se construye la transformación supersimétrica en términos de espinores de Weyl de dos componentes de tal manera de conectarlo con los calculos hechos en la sección (A); esto es útil para derivar reglas de Feynman directamente usando espinores de dos componentes [102]. Este trabajo se hizo en colaboración con el estudiante de licenciatura Pablo Ortega Ruiz, Dibya Chakraborty y Lorenzo Díaz Cruz. [70, 169].

Supergravedad es principalmente conocido como una teoría local supersimétrica donde el número $N = 1$ significa que el supermultiplete quirral va contener un super-compañero de espín-2. Aquí consideramos supergravedad pura con acoplamiento cero a los campos de materia así como la presencia tanto del gravitón como del gravitino. Se deja el problema de construir una lagrangiana supersimétrica local para el multiplete de supergravedad, escrito en términos de una base de espinores de Weyl como trabajo futuro. La lagrangiana supersimétrica global de supergravedad pura (no acoplamiento con la materia) en la capa de masa puede ser escrita como una suma de los términos cinemáticos cuadrados tanto del gravitino como el gravitón. Más específicamente, la lagrangiana contiene dos grados de libertad bosónicos del gravitón y dos grados de libertad fermiónicos del vector-espinor de Weyl sin masa. El término cinemático del gravitino es escrito en términos del vector-espinor de Dirac sin masa Ψ_μ y el gravitón esta en términos del tensor simétrico $g_{\mu\nu}$. Veamos ahora la invarianza de la lagrangiana total bajo la transformación supersimétrica global individualmente para ambas partículas, gravitón y gravitino.

La acción de Rarita-Schwinger en el formalismo de dos componentes

La acción de Rarita-Schwinger (RS) [171, 90], describe precisamente el término cinético de un gravitino escrito en términos de un espinor de Dirac:

$$S_{RS} = -\frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\Psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho \Psi_\sigma, \quad (C.1)$$

donde $\epsilon^{\nu\rho\sigma}$ es el tensor anti-simétrico de Levi-Civita con $\epsilon^{0123} = 1$. El espinor de Dirac es

$$\Psi_\mu = \begin{pmatrix} (\psi_\mu)_a \\ (\tilde{\chi}_\mu)^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}_\mu = \Psi_\mu^\dagger \gamma^0. \quad (C.2)$$

donde ψ_μ y $\tilde{\chi}_\mu$ son los espinores de Weyl de quiralidad opuesta. Algunas definiciones matriciales en la representación quiral son las siguientes:

$$\gamma_\nu = \begin{pmatrix} 0 & (\sigma_\nu)_{a\dot{a}} \\ (\bar{\sigma}_\nu)^{\dot{a}a} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (C.3)$$

Estos espinores de Weyl pueden escribirse como

$$\tilde{\psi}_{\dot{a}} \equiv (\psi_a)^*, \quad \chi^a \equiv (\tilde{\chi}^{\dot{a}})^*, \quad (C.4)$$

el cual puede ayudarnos a expresar la adjunta del espinor de Dirac como

$$\Psi_\mu^\dagger = ((\tilde{\psi}_\mu)_{\dot{a}}, (\chi_\mu)^a). \quad (C.5)$$

Usando las definiciones de arriba, la acción de Rarita-Schwinger en términos de espinores de Weyl llegan a ser:

$$\begin{aligned} S_{RS} &= -\frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} ((\tilde{\psi}_\mu)_{\dot{a}} (\bar{\sigma}_\nu)^{\dot{a}a} \partial_\rho (\psi_\sigma)_a - (\chi_\mu)^a (\sigma_\nu)_{a\dot{a}} \partial_\rho (\tilde{\chi}_\sigma)^{\dot{a}}) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\tilde{\psi}_\mu \bar{\sigma}_\nu \partial_\rho \psi_\sigma - \chi_\mu \sigma_\nu \partial_\rho \tilde{\chi}_\sigma). \end{aligned} \quad (C.6)$$

Las ecuaciones de movimiento asociadas con las dos componentes fermiónicas del gravitino $\tilde{\psi}_\mu, \chi_\mu$ de (C.6) son

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\bar{\sigma}_\nu)^{\dot{a}a} \partial_\rho (\psi_\sigma)_a = 0, \quad (C.7)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\sigma_\nu)_{a\dot{a}} \partial_\rho (\tilde{\chi}_\sigma)^{\dot{a}} = 0. \quad (C.8)$$

Para obtener el término cinemático correcto el cual es cuadrático en $g_{\mu\nu}$, necesitamos hacer uso de la gravedad de Einstein linealizada donde $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$. Aquí, $\eta_{\mu\nu}$ es el tensor métrico de Minkowski y $\kappa^2 = 8\pi G_N$, donde tomamos la misma convención que en la referencia [90], esto es $\kappa^2 = 1$. El factor κ nos ayuda a mantener las dimensiones de $h_{\mu\nu}$ correctas, esto es dimensión de masa 1. Podemos expandir la ecuación de Einstein a primer orden en $h_{\mu\nu}$ y obtener (C.24), sin embargo, aquí consideramos unicamente la acción de Rarita-Schwinger y su invarianza supersimétrica. Ahora, consideremos una transformación global supersimétrica de la forma $e^{i\xi Q}$ con ξ siendo un parámetro del espinor de Majorana y Q el generador supersimétrico el cual es un espinor de Majorana. La transformación supersimétrica global en dos componentes son:

$$\delta_\xi (\psi_\sigma)_a = -i(\sigma^{\theta\tau})_a^b \partial_\theta h_{\tau\sigma} \xi_b, \quad (C.9)$$

$$\delta_\xi (\tilde{\chi}_\sigma)^{\dot{a}} = -i(\bar{\sigma}^{\theta\tau})^{\dot{a}}_b \partial_\theta h_{\tau\sigma} \tilde{\xi}^b. \quad (C.10)$$

Vamos a revisar la invarianza de (C.6) bajo la transformación supersimétrica de (C.9) y (C.10):

$$\delta_\xi S_{RS} = -\frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left[(\delta_\xi \tilde{\psi}_\mu)_{\dot{a}} \bar{\sigma}_\nu^{\dot{a}a} \partial_\rho \psi_\sigma + \tilde{\psi}_\mu \bar{\sigma}_\nu \partial_\rho (\delta_\xi \psi_\sigma) - (\delta_\xi \chi_\mu) \sigma_\nu \partial_\rho \tilde{\chi}_\sigma - \chi_\mu \sigma_\nu \partial_\rho (\delta_\xi \tilde{\chi}_\sigma) \right]. \quad (C.11)$$

Imponiendo las ecuaciones de movimiento (C.7) y (C.8), encontramos que el primer y tercer término desaparecen, sustituyendo la transformación supersimétrica global llegando a los siguiente :

$$\delta_\xi S_{RS} = -\frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left[(\tilde{\psi}_\mu)_{\dot{a}} (\bar{\sigma}_\nu)^{\dot{a}a} (\sigma^{\theta\tau})_a^b \xi_b - (\chi_\mu)^a (\sigma_\nu)_{a\dot{a}} (\bar{\sigma}^{\theta\tau})^{\dot{a}}_b \tilde{\xi}^b \right] \partial_\rho \partial_\theta h_{\tau\sigma}. \quad (C.12)$$

Vamos a definir $(A^{\theta\tau})_a = (\sigma^{\theta\tau})_a^b \xi_b$ y $(\tilde{A}^{\theta\tau})^{\dot{a}} = (\bar{\sigma}^{\theta\tau})^{\dot{a}}_b \tilde{\xi}^b$. Aplicando las siguientes propiedades de los espinores, $\tilde{\chi}_{\dot{a}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a} \psi_a = -\psi^a (\sigma^\mu)_{a\dot{a}} \tilde{\chi}^{\dot{a}}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta_\xi S_{RS} &= -\frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left[(\tilde{A}^{\theta\tau})_{\dot{a}} (\bar{\sigma}_\nu)^{\dot{a}a} (\chi_\mu)_a - (A^{\theta\tau})^a (\sigma_\nu)_{a\dot{a}} (\tilde{\psi}_\mu)^{\dot{a}} \right] \partial_\rho \partial_\theta h_{\tau\sigma} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left[\tilde{B}_\nu^{\theta\tau} \chi_\mu - B_\nu^{\theta\tau} \tilde{\psi}_\mu \right] \partial_\rho \partial_\theta h_{\tau\sigma}. \end{aligned} \quad (C.13)$$

Además, definimos $(B_\nu^{\theta\tau})_{\dot{a}} = (A^{\theta\tau})^a(\sigma_\nu)_{a\dot{a}}$ y $(\tilde{B}_\nu^{\theta\tau})^a = \tilde{A}_a^{\theta\tau}(\bar{\sigma}_\nu)^{\dot{a}a}$. Por consiguiente, vamos aplicar la regla de la derivada para el producto, para simplificar:

$$\begin{aligned} \delta_\xi S_{RS} = & -\frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left[\partial_\rho (\tilde{B}_\nu^{\theta\tau} \chi_\mu \partial_\theta h_{\tau\sigma}) - \partial_\rho (B_\nu^{\theta\tau} \tilde{\psi}_\mu \partial_\theta h_{\tau\sigma}) \right. \\ & \left. + B_\nu^{\theta\tau} \partial_\rho \tilde{\psi}_\mu \partial_\theta h_{\tau\sigma} - \tilde{B}_\nu^{\theta\tau} \partial_\rho \chi_\mu \partial_\theta h_{\tau\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (C.14)$$

Los términos tercero y cuarto son cero, ellos son las ecuaciones de movimiento

$$A^{\theta\tau} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \sigma_\nu \partial_\rho \tilde{\psi}_\mu \partial_\theta h_{\tau\sigma} = 0, \quad (C.15)$$

$$\tilde{A}^{\theta\tau} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\sigma}_\nu \partial_\rho \chi_\mu \partial_\theta h_{\tau\sigma} = 0. \quad (C.16)$$

Sustituyendo las arriba mencionadas ecuaciones de movimiento, finalmente llegamos a una derivada total

$$\begin{aligned} \delta_\xi S_{RS} = & -\frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \left[\tilde{A}_a^{\theta\tau} (\bar{\sigma}_\nu)^{\dot{a}a} (\chi_\mu)_a \partial_\theta h_{\tau\sigma} - (A^{\theta\tau})^a (\sigma_\nu)_{a\dot{a}} (\tilde{\psi}_\mu)^{\dot{a}} \partial_\theta h_{\tau\sigma} \right] \\ = & -\frac{1}{2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \left[\partial_\theta h_{\tau\sigma} (\tilde{\psi}_\mu \bar{\sigma}_\nu \sigma^{\theta\tau} \xi - \chi_\mu \sigma_\nu \bar{\sigma}^{\theta\tau} \tilde{\xi}) \right]. \end{aligned} \quad (C.17)$$

esto muestra que la acción de Rarita-Schwinger en términos de espinores de Weyl, espinores de dos componentes, es invariante bajo transformaciones supersimétricas globales. Ahora, la segunda tarea es demostrar que la acción de Rarita-Schwinger es invariante bajo transformaciones de norma, difeomorfismos. La transformación de norma correspondiente a la acción de Rarita-Schwinger en términos de espinores de Dirac, es dado por:

$$\delta_\eta \Psi_\mu = \partial_\mu \eta, \quad (C.18)$$

donde η es un parámetro fermiónico, el cual podemos escribir en términos de espinores de Weyl de la siguiente manera:

$$\eta = \begin{pmatrix} (\zeta)_a \\ (\tilde{\lambda})^{\dot{a}} \end{pmatrix}. \quad (C.19)$$

La transformación de (C.18) puede ser escrita en dos componentes de la siguiente manera

$$\delta_\eta (\psi_\mu)_a = \partial_\mu (\zeta)_a, \quad (C.20)$$

$$\delta_\eta (\tilde{\chi}_\mu)^{\dot{a}} = \partial_\mu (\tilde{\lambda})^{\dot{a}}. \quad (C.21)$$

El objetivo es verificar que estas transformaciones de norma dejan la acción (C.6) invariante. La variación de la lagrangiana de Rarita-Schwinger $\mathcal{L}_{RS}$ bajo las transformaciones (C.20)-(C.21) es

dado por

$$\begin{aligned}
\delta_\eta \mathcal{L}_{RS} &= -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ [\delta_\eta(\tilde{\psi}_\mu)_{\dot{a}}] (\bar{\sigma}_\nu)^{\dot{a}a} \partial_\rho(\psi_\sigma)_a + (\tilde{\psi}_\mu)_{\dot{a}} (\bar{\sigma})^{\dot{a}a} \partial_\rho[\delta_\eta(\psi_\sigma)_a] \right. \\
&\quad \left. - [\delta_\eta(\chi_\mu)^a] (\sigma_\nu)_{a\dot{a}} \partial_\rho(\tilde{\chi}_\sigma)^{\dot{a}} - (\chi_\mu)^a (\sigma_\nu)_{a\dot{a}} \partial_\rho[\delta_\eta(\tilde{\chi}_\sigma)^{\dot{a}}] \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ (\tilde{\psi}_\mu)_{\dot{a}} (\bar{\sigma})^{\dot{a}a} \partial_\rho[\delta_\eta(\psi_\sigma)_a] - (\chi_\mu)^a (\sigma_\nu)_{a\dot{a}} \partial_\rho[\delta_\eta(\tilde{\chi}_\sigma)^{\dot{a}}] \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ \partial_\rho \{ (\tilde{\psi}_\mu)_{\dot{a}} (\bar{\sigma}_\nu)^{\dot{a}a} [\delta_\eta(\psi_\sigma)_a] \} - \partial_\rho (\tilde{\psi}_\mu)_{\dot{a}} (\bar{\sigma}_\nu)^{\dot{a}a} [\delta_\eta(\psi_\sigma)_a] \right. \\
&\quad \left. - \partial_\rho \{ (\chi_\mu)^a (\sigma_\nu)_{a\dot{a}} [\delta_\eta(\tilde{\chi}_\sigma)^{\dot{a}}] \} + \partial_\rho (\chi_\mu)^a (\sigma_\nu)_{a\dot{a}} [\delta_\eta(\tilde{\chi}_\sigma)^{\dot{a}}] \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \left\{ (\tilde{\psi}_\mu)_{\dot{a}} (\bar{\sigma}_\nu)^{\dot{a}a} [\delta_\eta(\psi_\sigma)_a] - (\chi_\mu)^a (\sigma_\nu)_{a\dot{a}} [\delta_\eta(\tilde{\chi}_\sigma)^{\dot{a}}] \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \left\{ \tilde{\psi}_\mu \bar{\sigma}_\nu (\delta_\eta \psi_\sigma) - \chi_\mu \sigma_\nu (\delta_\eta \tilde{\chi}_\sigma) \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \left\{ \tilde{\psi}_\mu \bar{\sigma}_\nu \partial_\sigma \zeta - \chi_\mu \sigma_\nu \partial_\sigma \tilde{\lambda} \right\}
\end{aligned}$$

donde en la segunda linea hemos usado las ecuaciones de campo (C.15)-(C.16), y en la última linea, aplicamos la regla de multiplicación de Leibniz. También, se puede notar que

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu (\partial_\rho \bar{\Psi}_\mu) &= \epsilon^{\sigma\nu\rho\mu} \gamma_5 \gamma_\nu (\partial_\rho \bar{\Psi}_\sigma) \\
&= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu (\partial_\rho \bar{\Psi}_\sigma) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{C.22}$$

donde, en la última linea, de nuevo hemos usado (C.15)-(C.16). Entonces, la variación de la lagrangiana de Rarita-Schwinger bajo la transformación de norma (F) es

$$\delta_\eta \mathcal{L}_{RS} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho [\bar{\Psi}_\mu (\partial_\sigma \eta)], \tag{C.23}$$

y siendo una derivada total, esto implica que $\delta_\eta \mathcal{S}_{RS} = 0$.

La acción de Einstein-Hilbert en el formalismo de dos componentes

En esta subsección, nos fijamos en el término cinemático del gravitón y verificaremos su invarianza. La acción de Einstein-Hilbert linealizado expandiendo el tensor métrico a primer orden en $h_{\mu\nu}$ es dado por [90]:

$$S_{EH} = -\frac{1}{2} \int d^4x (R_{\mu\nu}^L - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^L) h^{\mu\nu}. \tag{C.24}$$

La correspondiente ecuación de campo de Einstein linealizado en el vacío es

$$R_{\mu\nu}^L = 0, \tag{C.25}$$

donde el tensor de Ricci linealizado $R_{\mu\nu}^L$ es expresado como,

$$R_{\mu\nu}^L = \frac{1}{2} (\partial^\lambda \partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial^\lambda \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h), \tag{C.26}$$

y el escalar de Ricci R^L es

$$R^L \equiv \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^L. \tag{C.27}$$

La transformación supersimétrica global para $h_{\mu\nu}$ es dado por,

$$\begin{aligned}\delta_\xi h_{\mu\nu} &= -\frac{i}{2}\bar{\xi}(\gamma_\mu\Psi_\nu + \gamma_\nu\Psi_\mu) \\ &= -\frac{i}{2}\left\{\xi^a((\sigma_\mu)_{a\dot{a}}\tilde{\psi}_\nu^{\dot{a}} + (\sigma_\nu)_{a\dot{a}}\tilde{\psi}_\mu^{\dot{a}}) + \tilde{\xi}_{\dot{a}}((\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a}\psi_{\nu a} + (\bar{\sigma}_\nu)^{\dot{a}a}\psi_{\mu a})\right\} \\ &= -\frac{i}{2}\left\{\xi(\sigma_\mu\tilde{\psi}_\nu + \sigma_\nu\tilde{\psi}_\mu) + \tilde{\xi}(\bar{\sigma}_\mu\psi_\nu + \bar{\sigma}_\nu\psi_\mu)\right\},\end{aligned}\tag{C.28}$$

el cual es escrito en términos de espinores de Weyl usando (C.2) y (C.3). Antes de mostrar como la transformación supersimétrica (C.28) deja la acción (C.24) invariante, haremos una revisión del espinor de campo libre Ψ^μ . Un campo espinorial con un índice vectorial adicional, pertenece a la representación del grupo de Lorentz homogéneo $[(\frac{1}{2}, 0) + (0, \frac{1}{2})] \times (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Para aislar la parte $(1, \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}, 1)$ del campo libre, las siguientes condiciones de irreducibilidad deben imponerse:

$$\gamma_\mu\Psi^\mu = 0,\tag{C.29}$$

$$\partial_\mu\Psi^\mu = 0,\tag{C.30}$$

así como la ecuación de Dirac

$$\partial\Psi^\mu = \gamma^\nu\partial_\nu\Psi^\mu = 0,\tag{C.31}$$

estas condiciones también podrían escribirse en términos de espinores de Weyl. Como resultado, podemos obtener dos ecuaciones para cada condición de irreducibilidad

$$\sigma^\mu\tilde{\psi}_\mu = 0,\tag{C.32}$$

$$\bar{\sigma}^\mu\psi_\mu = 0,\tag{C.33}$$

$$\partial_\mu\tilde{\psi}^\mu = 0,\tag{C.34}$$

$$\partial_\mu\psi^\mu = 0,\tag{C.35}$$

$$\partial_\nu\sigma^\nu\tilde{\psi}^\mu = 0,\tag{C.36}$$

$$\partial_\nu\bar{\sigma}^\nu\psi^\mu = 0,\tag{C.37}$$

donde (C.32) y (C.33), (C.34), (C.35), (F.54) y (C.37), se refieren a (C.29), (C.30), y (C.31), respectivamente, escritos en dos componentes. Estas condiciones serán útiles cuando se muestre que la lagrangiana de supergravedad es invariante bajo transformaciones supersimétricas.

Las anteriores condiciones pueden ser derivadas considerando el grupo pequeño, en particular, construyendo el operador de Pauli-Lubanski y de momento, y con ellos construir los proyectores en diferentes subespacios con espín 3/2 y espín 1/2 [172, 173]. También, proveen una útil ventaja computacional ya que se ve explícitamente que la acción de supergravedad es invariante bajo transformaciones supersimétricas. Ahora, procedemos a checar que la acción de Einstein-Hilbert (C.24) es realmente invariante bajo transformaciones supersimétricas (C.28):

$$\begin{aligned}\delta_\xi\mathcal{L}_{EH} &= -\frac{1}{2}\delta_\xi\left\{(R_{\mu\nu}^L - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^L)h^{\mu\nu}\right\} \\ &= \frac{1}{4}\delta_\xi(hR^L) - \frac{1}{2}\delta_\xi(h^{\mu\nu}R_{\mu\nu}^L).\end{aligned}\tag{C.38}$$

Primero, empezamos calculando cada término en (C.38) independientemente y para el primer término se obtiene que

$$\begin{aligned}\delta_\xi(hR^L) &= (\delta_\xi h)R^L + h(\delta_\xi R^L) \\ &= h[\partial^\mu\partial_\gamma(\delta_\xi h^\gamma{}_\mu) - \square(\delta_\xi h)] \\ &= 0.\end{aligned}\tag{C.39}$$

Notar que $R^L = 0$ proviene como un resultado desde las ecuaciones de campo (C.25), y que cualquier término de la forma $\partial_\mu(\delta_\xi h_\nu^\mu)$ o $\delta_\xi h$ desaparece ya que esto nos lleva las condiciones de irreducibilidad (C.34)-(C.37). Segundo, calculamos el otro término en (C.38), y se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
 \delta_\xi (h^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^L) &= \frac{1}{2} \delta_\xi [h^{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\gamma h^\gamma_\nu + \partial_\nu \partial_\gamma h^\gamma_\mu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu})] \\
 &= \frac{1}{2} (\delta_\xi h^{\mu\nu}) (\partial_\mu \partial_\gamma h^\gamma_\nu + \partial_\nu \partial_\gamma h^\gamma_\mu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \square (\delta_\xi h_{\mu\nu}) \\
 &= \frac{1}{2} (\delta_\xi h^{\mu\nu}) \partial_\mu (2 \partial_\gamma h^\gamma_\nu - \partial_\nu h) - \frac{1}{2} (\delta_\xi h^{\mu\nu}) \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \square (\delta_\xi h_{\mu\nu}) \\
 &= \partial_\mu \{ (\delta_\xi h^{\mu\nu}) (\partial_\gamma h^\gamma_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu h) \} - \frac{1}{2} (\delta_\xi h^{\mu\nu}) \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \square (\delta_\xi h_{\mu\nu}), \quad (C.40)
 \end{aligned}$$

ya que, como antes, el término de la forma $\partial_\mu(\delta_\xi h_\nu^\mu)$ y $\delta_\xi h$ desaparecen. Notar que,

$$\begin{aligned}
 \square [h_{\mu\nu} (\delta_\xi h^{\mu\nu})] &= \partial^\lambda [(\partial_\lambda h_{\mu\nu}) (\delta_\xi h^{\mu\nu}) + h_{\mu\nu} (\partial_\lambda \delta_\xi h^{\mu\nu})] \\
 &= (\delta_\xi h^{\mu\nu}) \square h_{\mu\nu} + 2 (\partial_\lambda h_{\mu\nu}) (\partial^\lambda \delta_\xi h^{\mu\nu}) + \square (\delta_\xi h^{\mu\nu}), \quad (C.41)
 \end{aligned}$$

y haciendo algunos re-acomodos en los índices tensoriales, sustituyendo en (C.40), podemos reescribir (C.40) como,

$$\delta_\xi (h^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^L) = \partial^\lambda \{ (\delta_\xi h^\nu_\lambda) (\partial_\gamma h^\gamma_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu h) - \frac{1}{2} \partial_\lambda [h_{\mu\nu} (\delta_\xi h^{\mu\nu})] \} + (\partial_\lambda h_{\mu\nu}) (\partial^\lambda \delta_\xi h^{\mu\nu}). \quad (C.42)$$

Ahora nos enfocamos en el último término el cual está afuera de la derivada total en (C.42). Después, haciendo algo de álgebra, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \partial^\lambda [(\delta_\xi h_{\mu\nu}) (\partial_\lambda h^{\mu\nu})] &= (\partial^\lambda \delta_\xi h_{\mu\nu}) (\partial_\lambda h^{\mu\nu}) + (\delta_\xi h_{\mu\nu}) \square h^{\mu\nu} \\
 &= (\partial^\lambda \delta_\xi h_{\mu\nu}) (\partial_\lambda h^{\mu\nu}) + (\delta_\xi h_{\mu\nu}) (\partial^\mu \partial_\gamma h^{\gamma\nu} + \partial^\nu \partial_\gamma h^{\gamma\mu} - \partial^\mu \partial^\nu h), \quad (C.43)
 \end{aligned}$$

donde hicimos uso de la ecuación de campo (C.25) escrito en forma explícita. Sin embargo, notemos que los siguientes términos son equivalentes a una derivada total del lado izquierdo de (C.44) y (C.45),

$$\partial^\mu [(\delta_\xi h_{\mu\nu}) (\partial_\gamma h^{\gamma\nu})] = (\delta_\xi h_{\mu\nu}) (\partial^\nu \partial_\gamma h^{\gamma\mu}), \quad (C.44)$$

$$\partial^\nu [(\delta_\xi h_{\mu\nu}) (\partial^\mu h)] = (\delta_\xi h_{\mu\nu}) (\partial^\mu \partial_\nu h), \quad (C.45)$$

ya que en el primer término ambos tienen la forma $\partial^\nu \delta_\xi h_{\mu\nu}$, los primeros términos en cada ecuación desaparecen. Subsecuentemente, podemos reescribir la ecuación (C.43) como

$$\begin{aligned}
 (\partial^\lambda \delta_\xi h_{\mu\nu}) (\partial_\lambda h^{\mu\nu}) &= \partial^\lambda [(\delta_\xi h_{\mu\nu}) (\partial_\lambda h^{\mu\nu})] - \partial^\mu [(\delta_\xi h_{\mu\nu}) (2 \partial_\gamma h^{\gamma\nu} - \partial^\nu h)] \\
 &= \partial^\lambda [(\delta_\xi h_{\mu\nu}) (\partial_\lambda h^{\mu\nu})] - (\delta_\xi h_{\lambda\nu}) (2 \partial_\gamma h^{\gamma\nu} - \partial^\nu h). \quad (C.46)
 \end{aligned}$$

Después de hacer algunos ajustes en los índices tensoriales, como lo hicimos anteriormente, y sustituyendo (C.46) en (C.42), encontramos

$$\delta_\xi (h^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^L) = \partial^\lambda \{ (\delta_\xi h_{\lambda\nu}) (\frac{1}{2} \partial^\nu h - \partial_\gamma h^{\gamma\nu}) + (\delta_\xi h_{\mu\nu}) (\partial_\lambda h^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \partial_\lambda [h_{\mu\nu} (\delta_\xi h^{\mu\nu})] \}. \quad (C.47)$$

Para concluir, sustituyendo (C.39) y (C.47) in (C.38), encontramos que los cambios en la lagrangiana

$$\begin{aligned}
 \delta_\xi \mathcal{L}_{EH} &= \partial^\lambda \{ (\delta_\xi h_{\lambda\nu}) (\frac{1}{2} \partial_\gamma h^{\gamma\nu} - \frac{1}{4} \partial^\nu h) + \frac{1}{4} \partial_\lambda [h_{\mu\nu} (\delta_\xi h^{\mu\nu})] - \frac{1}{2} (\delta_\xi h_{\mu\nu}) (\partial_\lambda h^{\mu\nu}) \} \\
 &= \partial^\lambda \{ (\delta_\xi h_{\lambda\nu}) (\frac{1}{2} \partial_\gamma h^{\gamma\nu} - \frac{1}{4} \partial^\nu h) + \frac{1}{4} h^{\mu\nu} (\partial_\lambda \delta_\xi h_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} (\partial_\lambda h^{\mu\nu}) (\delta_\xi h_{\mu\nu}) \} \quad (C.48)
 \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo las transformaciones supersimétricas (C.28) en la ecuación (C.48), obtenemos la variación correspondiente en la lagrangiana de Einstein-Hilbert el cual es equivalente a la siguiente derivada total:

$$\begin{aligned} \delta_\xi \mathcal{L}_{EH} = \frac{i}{4} \partial^\lambda \Big\{ & \left(\frac{1}{2} \partial^\nu h - \partial_\gamma h^{\gamma\nu} \right) [\xi(\sigma_\lambda \tilde{\psi}_\nu + \sigma_\nu \tilde{\psi}_\lambda) + \tilde{\xi}(\bar{\sigma}_\lambda + \bar{\sigma}_\nu \psi_\lambda)] \\ & + \partial_\lambda h^{\mu\nu} (\xi \sigma_\mu \tilde{\psi}_\nu + \tilde{\xi} \bar{\sigma}_\mu \psi_\nu) - h^{\mu\nu} \partial_\lambda (\xi \sigma_\mu \tilde{\psi}_\nu + \tilde{\xi} \bar{\sigma}_\mu \psi_\nu) \Big\}, \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

esto implica que $\delta_\xi \mathcal{S}_{EH} = 0$. Es decir, la acción de Einstein-Hilbert es invariante bajo transformaciones supersimétricas globales en términos de espinores de Weyl.

Apéndice D

Espacio fase $d^3\text{LIPS}$

Uno de los puntos más complicados de calcular en física de partículas, la sección eficaz diferencial. La sección eficaz diferencial para el proceso, $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$; no importando el marco de referencia en el que se trabaje la cinemática, esta dada por la siguiente expresión:

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 \cdot m_2)^2}} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d\text{lips}_2(p_1 + p_2), \quad (\text{D.1})$$

con

$$d\text{lips}_2(p_1 + p_2) = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \cdot \frac{d^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4}. \quad (\text{D.2})$$

El efecto Compton

En el marco de referencia de laboratorio tenemos que

$$d\text{lips}_2(p_1 + p_2) = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_4 - p_3) \frac{d^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_4} \quad (\text{D.3})$$

$$= \frac{d^3\vec{p}_4 d^3\vec{p}_3}{16\pi^2 \omega_4 E_4} \delta(m_e + \omega_2 - \omega_4 - E_4) \delta^3(\vec{O} + \vec{p}_2 - \vec{p}_4 - \vec{p}_3), \quad (\text{D.4})$$

ya que $E_3 = \omega_4$, $E_2 = \omega_2$, $E_1 = m_e$ y $\vec{p}_1 = 0$. Por lo que la integral en el espacio fase es:

$$\int d\text{lips}_2(p_1 + p_2) = \frac{1}{16\pi^2} \int \frac{d^3\vec{p}_4 d^3\vec{p}_3}{\omega_4 E_4} \delta(m_e + \omega_2 - \omega_4 - E_4) \delta^3((\vec{p}_2 - \vec{p}_4) - \vec{p}_3), \quad (\text{D.5})$$

luego, escribiendo el elemento de volumen del espacio fase de momento $d^3\vec{p}_4$ en coordenadas esféricas, tenemos:

$$d^3\vec{p}_4 = |\vec{p}_4|^2 d|\vec{p}_4| d\phi d\cos\theta \quad (\text{D.6})$$

$$= \omega_4^2 d\omega_4 d\phi d\cos\theta. \quad (\text{D.7})$$

Con esta información entonces nuestro espacio fase quedaría de la siguiente manera:

$$\int d\text{lips}_2(p_1 + p_2) = \frac{1}{16\pi^2} \int \frac{\omega_4^2 d\omega_4 d\phi d\cos\theta}{\omega_4 E_4} \delta(m_e + \omega_2 - \omega_4 - E_4) \delta^3((\vec{p}_2 - \vec{p}_4) - \vec{p}_3) \quad (\text{D.8})$$

$$= \frac{2\pi}{8\pi^2} \int \frac{\omega_4^2 d\omega_4 d\cos\theta}{\omega_4 E_4} \delta(m_e + \omega_2 - \omega_4 - E_4) \delta^3((\vec{p}_2 - \vec{p}_4) - \vec{p}_3) \quad (\text{D.9})$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int \frac{\omega_4 d\omega_4 d\cos\theta}{\sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_e^2}} \delta\left(m_e + \omega_2 - \omega_4 - \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_e^2}\right) \delta^3((\vec{p}_2 - \vec{p}_4) - \vec{p}_3), \quad (\text{D.10})$$

donde hemos usado que $E_4 = \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_e^2}$. Posteriormente, utilizamos $\delta^3((\vec{p}_2 - \vec{p}_4) - \vec{p}_3)$ para hacer la integral sobre $\vec{p}_3$. Esta simplemente reemplaza todos los $\vec{p}_3$ por $(\vec{p}_2 - \vec{p}_4)$ reflejando la conservación del momento, entonces:

$$\begin{aligned} \int d\text{lips}_2(p_1 + p_2) &= \frac{1}{8\pi} \int \frac{\omega' d\omega' d\cos\theta}{\sqrt{|\vec{p}_2 - \vec{p}_4|^2 + m_e^2}} \delta\left(m_e + \omega_2 - \omega_4 - \sqrt{|\vec{p}_2 - \vec{p}_4|^2 + m_e^2}\right) \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \frac{\omega_4 d\omega_4 d\cos\theta}{\sqrt{m_e^2 + \omega_2^2 + \omega_4^2 - 2\omega_2\omega_4 \cos\theta}} \delta\left(m_e + \omega_2 - \omega_4 - \sqrt{m_e^2 + \omega_2^2 + \omega_4^2 - 2\omega_2\omega_4 \cos\theta}\right), \end{aligned}$$

con $|\vec{p}_2 - \vec{p}_4|^2 = (\vec{p}_2 - \vec{p}_4) \cdot (\vec{p}_2 - \vec{p}_4)$. Enseguida, realizamos la integral con respecto a ω_4 , la cual se resuelve empleando la siguiente propiedad de la función delta de Dirac

$$\int f(z) \delta(g(z)) dz = \frac{f(z)}{|g'(z)|}. \quad (\text{D.11})$$

Sean

$$\begin{aligned} f(\omega_4) &= \frac{\omega_4}{\sqrt{m_e^2 + \omega_2^2 + \omega_4^2 - 2\omega_2\omega_4 \cos\theta}} = \frac{\omega_4}{E_4} \\ g(\omega_4) &= m_e + \omega_2 - \omega_4 - \sqrt{m_e^2 + \omega_2^2 + \omega_4^2 - 2\omega_2\omega_4 \cos\theta}, \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

entonces

$$\begin{aligned} g(\omega_4) &= -1 - \frac{1}{2} (m_e^2 + \omega_2^2 + \omega_4^2 - 2\omega_2\omega_4 \cos\theta)^{-1/2} \times (2\omega_4 - 2\omega_2 \cos\theta) \\ &= -1 - \frac{\omega_4 - \omega_2 \cos\theta}{(m_e^2 + \omega_2^2 + \omega_4^2 - 2\omega_2\omega_4 \cos\theta)^{1/2}} \\ &= -1 - \frac{(\omega_4 - \omega_2 \cos\theta)}{E_4}, \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

con lo anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \int d\text{lips}_2(p_1 + p_2) &= \frac{1}{8\pi} \int d\cos\theta \frac{\omega_4}{E_4} \cdot \frac{1}{\left| -1 - \frac{\omega_4 - \omega_2 \cos\theta}{E_4} \right|} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \frac{d\cos\theta \omega_4}{E_4} \cdot \frac{1}{\left| 1 + \frac{\omega_4 - \omega_2 \cos\theta}{E_4} \right|} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \frac{d\cos\theta \omega_4}{E_4 + \omega_4 - \omega_2 \cos\theta} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \frac{d\cos\theta \omega_4}{m_e + \omega_2 - \omega_4 + \omega_4 - \omega_2 \cos\theta} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \frac{d\cos\theta \omega_4}{m_e + m(1 - \cos\theta)} \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

con $E_4 = m_e + \omega_2 - \omega_4$. Dado que (2.105), entonces

$$m_e + \omega_2(1 - \cos\theta) = \frac{\omega_2 m_e - \omega_4 m_e + \omega_4 m_e}{\omega_4} = \frac{\omega_2 m_e}{\omega_4}, \quad (\text{D.15})$$

entonces la integral del espacio fase nos queda

$$\begin{aligned}\int d\text{lips}_2(p_1 + p_2) &= \frac{1}{8\pi} \int \frac{d\cos\theta\omega_4}{\frac{\omega_2 m_e}{\omega_4}} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \frac{\omega_4^2}{\omega_2 m_e} d\cos\theta \\ &= \frac{\omega_4^2}{8\pi\omega_2 m_e}.\end{aligned}\tag{D.16}$$

Para tener todos los términos que intervienen en la sección eficaz diferencial, veremos lo siguiente. Si $p_1 \cdot p_2 = m_e \omega_2$; además $m_1 = m_e$ y $m_2 = m_\gamma = 0$ implica que $m_1 \cdot m_2 = 0$, por lo tanto $\sqrt{(p_1 \cdot p_2) \cdot m_e m_\gamma} = p_1 \cdot p_2 = m_e \omega_2$. Finalmente, la sección eficaz diferencial para el efecto Compton visto desde el marco de referencia de laboratorio, resultaría en

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\cos\theta} &= \frac{1}{4m_e\omega_2} \cdot 2e^4 \left[\frac{\omega_4}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_4} - \sin^2\theta \right] \cdot \frac{\omega_4^2}{8\pi\omega_2 m_e} \\ &= \frac{e^4}{16m_e^2\pi} \left(\frac{\omega_4}{\omega_2} \right)^2 \left[\frac{\omega_4}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_4} - \sin^2\theta \right] \\ &= \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2} \left(\frac{\omega_4}{\omega_2} \right)^2 \left[\frac{\omega_4}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_4} - \sin^2\theta \right],\end{aligned}\tag{D.17}$$

donde

$$\omega_4 = \frac{\omega_2}{1 + \frac{\omega_2}{m_e}(1 - \cos\theta)},\tag{D.18}$$

con $e^4 = 16\pi^2\alpha^2$ donde α es la constante de estructura fina ($\alpha = e^2/4\pi$). La expresión (D.17) es la famosa fórmula de Klein-Nishina, derivado por primera vez en 1929. Cuando nos vamos al límite $\omega_2 \rightarrow 0$, esta fórmula se comporta de la siguiente manera:

$$\lim_{\omega_2 \rightarrow 0} \frac{\omega_4}{\omega_2} = \lim_{\omega_2 \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{\omega_2}{m_e}(1 - \cos\theta)} = \frac{1}{1 + \lim_{\omega_2 \rightarrow 0} \frac{\omega_2}{m_e}(1 - \cos\theta)} = 1,\tag{D.19}$$

por lo tanto la sección eficaz diferencial es

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2} (1 + \cos^2\theta).\tag{D.20}$$

Finalmente

$$\sigma = \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2} \int [1 + \cos^2\theta] d\cos\theta\tag{D.21}$$

$$= \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2} \int_{-1}^1 [1 + z^2] dz = \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2} \left[z + \frac{z^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2} \left[\frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3} \right) \right],\tag{D.22}$$

por lo tanto

$$\sigma = \frac{8\pi\alpha^2}{3m_e^2}.\tag{D.23}$$

Proceso: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Para la Sección eficaz diferencial, el proceso: $1 + 2 \longrightarrow 3 + 4$. En el caso de dos partículas en el estado final, podemos simplificar la expresión parcialmente evaluando las integrales del espacio

fase en el marco de referencia del centro de masa. Sea

$$\begin{aligned} d\sigma(1+2 \rightarrow 3+4) &= \frac{1}{4|\vec{p}_1|\sqrt{s}} \overline{\mathcal{M}^2} \text{dlips}_2(p_1+p_2) \\ &= \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{|\vec{p}_1|\sqrt{s}E_3E_4} \overline{\mathcal{M}^2} \delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4) d^3\vec{p}_3 d^3\vec{p}_4, \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

a esta expresión se le conoce como regla de oro para un proceso de dispersión $1+2 \rightarrow 3+4$, donde s es la variable de Mandelstam, el cual es equivalente a el cuadrado de la energía del centro de masa, con

$$\text{dlips}_2(p_1+p_2) = (2\pi)^4 \delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4) \left[\frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \cdot \frac{d^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} \right]. \quad (\text{D.25})$$

En el marco de referencia del centro de masa se tiene $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$ y $s = (E_1 + E_2)^2$, entonces

$$\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4) = \delta(E_1+E_2-E_3-E_4) \delta^3(-\vec{p}_3-\vec{p}_4), \quad (\text{D.26})$$

expresando las energías salientes en términos de los momentos $\vec{p}_3$ y $\vec{p}_4$ mediante la ecuación (2.128) se tiene

$$\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4) = \delta\left(E_1+E_2-\sqrt{|\vec{p}_3|^2+m_3^2}-\sqrt{|\vec{p}_4|^2+m_4^2}\right) \delta^3(-\vec{p}_3-\vec{p}_4), \quad (\text{D.27})$$

e integrando sobre $\vec{p}_4$ usando la función delta la expresión (D.24) toma la siguiente forma

$$d\sigma(1+2 \rightarrow 3+4) = \frac{\overline{\mathcal{M}^2}}{64\pi^2(E_1+E_2)|\vec{p}_1|} \frac{\delta\left(E_1+E_2-\sqrt{|\vec{p}_3|^2+m_3^2}-\sqrt{|\vec{p}_3|^2+m_4^2}\right) d^3\vec{p}_3}{\sqrt{|\vec{p}_3|^2+m_3^2}\sqrt{|\vec{p}_3|^2+m_4^2}}. \quad (\text{D.28})$$

En general, $\overline{\mathcal{M}^2}$ depende de los cuatro trimomentos. Sin embargo, en este caso se tiene $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ y $\vec{p}_4 = -\vec{p}_3$, por lo que permanece solo como función de $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_3$. Pero $\vec{p}_1$ es fijo, por lo que las variables de las cuales la amplitud puede depender son la magnitud del trimomento p_3 ($|\vec{p}_3|$) y su dirección θ . Tal como se puede ver en (2.142). Posteriormente, escribiendo el elemento de volumen del espacio fase de momento $d^3\vec{p}_3$ en coordenadas esféricas:

$$d^3\vec{p}_3 = |\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3| d\phi d\cos\theta = |\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3| d\Omega, \quad (\text{D.29})$$

donde $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$, es el diferencial de ángulo sólido. Sustituyendo en la expresión (D.29) e integrando de 0 a ∞ se tiene que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} = \frac{1}{64\pi^2(E_1+E_2)|\vec{p}_1|} \int_0^\infty |\mathcal{M}^2| \frac{\delta\left(E_1+E_2-\sqrt{|\vec{p}_3|^2+m_3^2}-\sqrt{|\vec{p}_3|^2+m_4^2}\right) |\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3|}{\sqrt{|\vec{p}_3|^2+m_3^2}\sqrt{|\vec{p}_3|^2+m_4^2}}, \quad (\text{D.30})$$

para reducir la función delta restante, se hace un cambio de variable. Sea

$$E_{out} = \sqrt{|\vec{p}_3|^2+m_3^2} + \sqrt{|\vec{p}_3|^2+m_4^2}, \quad (\text{D.31})$$

el cual se define como la energía total de las partículas saliente. Luego, al derivar E_{out} con respecto a $|\vec{p}_3|$, se tiene

$$dE_{ou} = \frac{E_{out} |\vec{p}_3|}{\sqrt{|\vec{p}_3|^2+m_3^2}\sqrt{|\vec{p}_3|^2+m_4^2}} d|\vec{p}_3|, \quad (\text{D.32})$$

despejando se tiene

$$|\vec{p}_3| d|\vec{p}_3| = \frac{\sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_3^2} \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_4^2} dE_{\text{out}}}{E_{\text{out}}}, \quad (\text{D.33})$$

entonces la integral en (D.30) se convierte en

$$\int_{m_3+m_4}^{\infty} \overline{\mathcal{M}}^2 \delta((E_1 + E_2) - E_{\text{out}}) \frac{|\vec{p}_3|}{E_{\text{out}}} dE_{\text{out}}, \quad (\text{D.34})$$

utilizando las propiedades de la delta de Dirac $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$ entonces se tiene

$$\int_{m_3+m_4}^{\infty} \overline{\mathcal{M}}^2 \delta(E_{\text{out}} - (E_1 + E_2)) \frac{|\vec{p}_3|}{E_{\text{out}}} dE_{\text{out}} = \overline{\mathcal{M}}^2 \frac{|\vec{p}_3|_0}{(E_1 + E_2)'}, \quad (\text{D.35})$$

donde $|\vec{p}_3|_0$ es el valor particular de $|\vec{p}_3|$ para el cual $E_{\text{out}} = E_1 + E_2$. Para encontrar este valor, sea $\rho_0 \equiv |\vec{p}_3|_0$ por conservación de la energía se tiene

$$E_1 + E_2 = \sqrt{\rho_0^2 + m_3^2} + \sqrt{\rho_0^2 + m_4^2}, \quad (\text{D.36})$$

resolviendo esta ecuación para ρ_0 se tiene

$$\rho_0 = \frac{1}{2(E_1 + E_2)} \left[\left((E_1 + E_2)^2 + m_4^2 - m_3^2 \right)^2 - 4(E_1 + E_2)^2 m_4^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{D.37})$$

Finalmente, la sección eficaz diferencial para el proceso $1+2 \rightarrow 3+4$ desde el marco de referencia del centro de masa (CM) es

$$\frac{d\sigma(1+2 \rightarrow 3+4)}{d\Omega_{CM}} = \frac{1}{64\pi^2 (E_1 + E_2)^2} \frac{|\vec{p}_3|_0}{|\vec{p}_1|} \overline{\mathcal{M}}^2. \quad (\text{D.38})$$

Por lo tanto la sección eficaz para nuestro proceso es

$$\frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}{d\Omega_{CM}} = \frac{|\vec{p}_3|_0}{64\pi^2 (2E)^2 |\vec{p}_1|} \frac{e^4}{E^4} [E^4 + (E^2 - m_e^2)(E^2 - m_\mu^2) \cos^2 \theta + E^2(m_e^2 + m_\mu^2)], \quad (\text{D.39})$$

donde $E_1 = E_2 = E$. Integrando esta ecuación se tiene

$$\sigma = \frac{|\vec{p}_3|_0}{64\pi^2 (2E)^2 |\vec{p}_1|} \frac{e^4}{E^4} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [E^4 + (E^2 - m_e^2)(E^2 - m_\mu^2) \cos^2 \theta + E^2(m_e^2 + m_\mu^2)] d\phi d\cos \theta, \quad (\text{D.40})$$

de la integral en ϕ sale un 2π , luego haciendo el cambio de variable $z = \cos \theta$ con $d\cos \theta = dz$. Finalmente se tiene

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{|\vec{p}_3|_0}{64\pi^2 (2E)^2 |\vec{p}_1|} \frac{e^4}{E^4} \left[E^4 + \frac{1}{3} (E^2 - m_e^2)(E^2 - m_\mu^2) + E^2(m_e^2 + m_\mu^2) \right], \quad (\text{D.41})$$

donde

$$|\vec{p}_3|_0 = \sqrt{E^2 - m_\mu^2}, \quad (\text{D.42})$$

ya que haciendo $E_1 = E_2 = E$ y $m_3 = m_4 = m_\mu$ en la ecuación (D.37) se llega esa igualdad, y $|\vec{p}_1| = \sqrt{E^2 - m_e^2}$. Por lo tanto, reescribiendo la sección eficaz, se tiene

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{e^4}{16\pi(2E)^2} \left(\frac{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}}{1 - \frac{m_e^2}{E^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{m_e^2}{E^2} \right) \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) + \frac{m_e^2 + m_\mu^2}{E^2} \right]. \quad (\text{D.43})$$

por otro lado, la constante de estructura fina se define como $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ entonces $e^4 = 16\pi^2\alpha^2$ y $s = (2E)^2$. Finalmente

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{\pi\alpha^2}{s} \left(\frac{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}}{1 - \frac{m_e^2}{E^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{m_e^2}{E^2} \right) \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2} \right) + \frac{m_e^2 + m_\mu^2}{E^2} \right]. \quad (\text{D.44})$$

Podemos hacer aproximaciones, debido a que la masa del muón ($m_\mu = 106.6$ Mev) es 200 veces más grande que la masa del electrón ($m_e = 0.511$ Mev) se puede tomar la aproximación de $m_e \approx 0$, ya que $\frac{m_e}{m_\mu} \approx \frac{1}{200}$ es mucho más pequeño que el error fraccional introducido por despreciar los términos de orden superior en las series de perturbación. Por lo tanto, la sección eficaz dada por (D.44)

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{m_\mu^2}{E^2} \right]. \quad (\text{D.45})$$

Por otro lado, en el límite ultra-relativista cuando $E \gg m_\mu$. Los términos $\frac{m_e^2}{E^2}$, $\frac{m_\mu^2}{E^2}$ y $\frac{m_e^2 + m_\mu^2}{2}$ en la ecuación (D.44) tienden a cero. Por lo tanto

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}. \quad (\text{D.46})$$

LIPS en términos de espinores de Weyl

El espacio fase invariante de Lorentz (LIPS, por sus siglas en inglés) asociado con una partícula en la capa de masa es dado por cuatro grados de libertad de λ_a y $\tilde{\lambda}_a$, modulo la acción del grupo pequeño, una redundancia de $GL(1)$. De este modo, la forma diferencial que describe el espacio fase de una partícula en la capa de masa puede ser escrita como [19]:

$$d^3\text{LIPS}_a \equiv \frac{d^2\lambda_a d^2\tilde{\lambda}_a}{\text{vol}(GL(1))}, \quad (\text{D.47})$$

donde $1/\text{vol}(GL(1))$ representa el elemento que elimina la redundancia $GL(1)$ del grupo pequeño, resultando en una forma tri-dimensional en el espacio fase.

Apéndice E

Tecnología de las matrices de Dirac en $D = 4$

Vamos a demostrar que las matrices de Dirac satisfacen

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu. \quad (1)$$

Prueba En el 4-espacio, una representación conveniente de las matrices de Dirac es

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (E.1)$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (E.2)$$

donde 1 es la matriz identidad de 2×2 y σ^i las matrices de Pauli, vemos que

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i \quad (E.3)$$

además se cumple que

$$\gamma^0 \gamma^0 = 1, \quad \{\gamma^0, \gamma^i\} = 2g^{0i}1 = 0 \Rightarrow \gamma^0 \gamma^i = -\gamma^i \gamma^0,$$

entonces, usando la condición (E.3) tenemos que

$$\begin{aligned} \gamma^0 \gamma^{0\dagger} \gamma^0 &= \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 \\ &= 1 \gamma^0 \end{aligned} \quad (E.4)$$

$$= \gamma^0, \quad (E.5)$$

por otro lado, usando la condición (E.3) y el álgebra de Clifford

$$\begin{aligned} \gamma^0 \gamma^{i\dagger} \gamma^0 &= -\gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \\ &= \gamma^i \gamma^0 \gamma^0 \\ &= \gamma^i 1 \\ &= \gamma^i, \end{aligned} \quad (E.6)$$

de lo anterior concluimos que

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu \quad (5)$$

2. Use el álgebra de Clifford de las matrices de Dirac para demostrar las siguientes identidades

$$\text{a)} \quad \gamma_\mu \gamma^\mu = 4. \quad (\text{E.7})$$

Prueba

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma^\mu &= g_{\mu\nu} \gamma^\nu \gamma^\mu \\ &= g_{\mu\nu} (2g^{\nu\mu} - \gamma^\mu \gamma^\nu) \\ &= 2g_{\mu\nu} g^{\nu\mu} - g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \\ &= 2g_{\mu\nu} g^{\nu\mu} - \gamma^\mu \gamma_\mu \\ &\Rightarrow 2\gamma^\mu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} g^{\nu\mu} \\ &\Rightarrow \gamma^\mu \gamma_\mu = g_{\mu\nu} g^{\nu\mu} = 4. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Segunda identidad que vamos a demostrar es

$$\text{b)} \quad \gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = -2\gamma^\mu. \quad (\text{E.9})$$

Prueba

$$\begin{aligned} \gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu &= \gamma_\nu (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \\ &= 2\gamma^\mu - \gamma_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu \\ &= (2 - \gamma_\nu \gamma^\nu) \gamma^\mu \\ &= (2 - 4) \gamma^\mu \\ &= -2\gamma^\mu. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Tercera identidad por demostrar

$$\text{c)} \quad \gamma_\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda = 4g^{\mu\nu}. \quad (\text{E.11})$$

Prueba

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda &= \gamma_\lambda \gamma^\mu (2g^{\nu\lambda} - \gamma^\lambda \gamma^\nu) \\ &= 2\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma_\lambda \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \\ &= 2\gamma^\nu \gamma^\mu - (-2\gamma^\mu) \gamma^\nu \\ &= 2\gamma^\nu \gamma^\mu + 2\gamma^\mu \gamma^\nu \\ &= 2\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \\ &= 4g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Cuarta identidad

$$\text{d)} \quad \gamma_\lambda \sigma^{\mu\nu} \gamma^\lambda = 0. \quad (\text{E.13})$$

Prueba Por definición

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \\ &= \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu), \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

por lo que, usando el inciso c) y el hecho de que $g^{\mu\nu}$ es simétrica

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda \sigma^{\mu\nu} \gamma^\lambda &= \frac{i}{2} \gamma_\lambda (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \gamma^\lambda \\ &= \frac{i}{2} (\gamma_\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda - \gamma_\lambda \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\lambda) \\ &= \frac{i}{2} (4g^{\mu\nu} - 4g^{\nu\mu}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Quinta identidad

$$\text{e) } \gamma_\lambda \sigma^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\lambda = 2\gamma^\rho \sigma^{\mu\nu}. \quad (\text{E.16})$$

Prueba usando el inciso d) y el álgebra de Clifford

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda \sigma^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\lambda &= \gamma_\lambda \sigma^{\mu\nu} (2g^{\rho\lambda} - \gamma^\lambda \gamma^\rho) \\ &= 2\gamma^\rho \sigma^{\mu\nu} - \gamma_\lambda \sigma^{\mu\nu} \gamma^\lambda \gamma^\rho \\ &= 2\gamma^\rho \sigma^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

Usar el álgebra de Clifford para demostrar los siguientes resultados de trazas de matrices de Dirac:

a) $\text{Tr} [\gamma^\mu] = 0$.

Prueba

Para $\mu = 0$ tenemos

$$\text{Tr} [\gamma^0] = \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.18})$$

$$= 1 - 1 = 0 \quad (\text{E.19})$$

para $\mu = i$

$$\text{Tr} [\gamma^i] = \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.20})$$

$$= 0 - 0 = 0 \quad (\text{E.21})$$

por lo tanto

$$\text{Tr} [\gamma^\mu] = 0 \quad (12)$$

b) $\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$ usando el álgebra de Clifford

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] = \text{Tr} [2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu] \quad (\text{E.22})$$

$$= 2g^{\mu\nu} \text{Tr}(I) - \text{Tr} [\gamma^\nu \gamma^\mu] \quad (\text{E.23})$$

Por lo tanto

$$2 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] = 2g^{\mu\nu} 4 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu} \quad (\text{E.24})$$

c) $\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda] = 0$. Prueba

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda] &= \text{Tr} [\gamma^\mu (2g^{\nu\lambda} - \gamma^\lambda \gamma^\nu)] \\ &= 2g^{\nu\lambda} \text{Tr} [\gamma^\mu] - \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu] \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

Por lo tanto

$$2 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda] = 2g^{\nu\lambda} \text{Tr} [\gamma^\mu] \quad (\text{E.26})$$

por el inciso a) concluimos que

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda] = 0. \quad (13)$$

d) $\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho] = 4(g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho})$ Prueba

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho] &= \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu (2g^{\lambda\rho} - \gamma^\rho \gamma^\lambda)] \\ &= 2g^{\lambda\rho} \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] - \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\lambda] \\ &= 2g^{\lambda\rho} 4g^{\mu\nu} - \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\lambda] \\ &= 8g^{\lambda\rho} g^{\mu\nu} - 8g^{\nu\rho} g^{\mu\lambda} + \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\lambda] \\ &= 8g^{\lambda\rho} g^{\mu\nu} - 8g^{\nu\rho} g^{\mu\lambda} + \text{Tr} [(2g^{\mu\rho} - \gamma^\rho \gamma^\mu) \gamma^\nu \gamma^\lambda] \\ &= 8g^{\lambda\rho} g^{\mu\nu} - 8g^{\nu\rho} g^{\mu\lambda} + 2g^{\mu\rho} \text{Tr} [\gamma^\nu \gamma^\lambda] - \text{Tr} [\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda]. \end{aligned} \quad (\text{E.27})$$

entonces

$$2 \operatorname{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho] = 8g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} - 8g^{\nu\rho} g^{\mu\lambda} + 8g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda}, \quad (\text{E.28})$$

por lo que, finalmente

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho] &= 4g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} - 4g^{\nu\rho} g^{\mu\lambda} + 4g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} \\ &= 4 (g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} - g^{\nu\rho} g^{\mu\lambda} + g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda}) \end{aligned} \quad (\text{E.29})$$

Apéndice F

Representación de las matrices de Dirac en $D = 4$

REPRESENTACION DE MAJORANA. La representación de Majorana de las matrices de Dirac está relacionada con la representación de Dirac a través de la siguiente transformación

$$\gamma_M^\mu = U \gamma_D^\mu U^\dagger \quad (\text{F.1})$$

donde

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -I \end{pmatrix} \quad (\text{F.2})$$

con I y σ^2 es la matriz identidad 2×2 y la matriz de Pauli, respectivamente. Determine la forma de las matrices $\gamma^\mu \boldsymbol{\gamma} \gamma^5$ en esta representación

Prueba

En la representación de Dirac, las matrices de Dirac son

$$\gamma_D^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (\text{F.3})$$

$$\gamma_D^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.4})$$

por otro lado

$$U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -I \end{pmatrix}, \quad (\text{F.5})$$

para $\mu = 0$

$$\gamma_M^0 = U \gamma_D^0 U^\dagger \quad (\text{F.6})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -I \end{pmatrix} \quad (\text{F.7})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -I \end{pmatrix} \quad (\text{F.8})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2\sigma^2 \\ 2\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.9})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.10})$$

para $\mu = i$

$$\gamma_M^i = U \gamma_D^i U^\dagger \quad (\text{F.11})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -I \end{pmatrix} \quad (\text{F.12})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sigma^2 \sigma^i & \sigma^i \\ \sigma^i & \sigma^2 \sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -I \end{pmatrix} \quad (\text{F.13})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i \sigma^2 - \sigma^2 \sigma^i & -\sigma^2 \sigma^i \sigma^2 - \sigma^i \\ \sigma^i + \sigma^2 \sigma^i \sigma^2 & \sigma^i \sigma^2 - \sigma^2 \sigma^i \end{pmatrix}. \quad (\text{F.14})$$

Usando el álgebra de Clifford y la propiedad de que las matrices de Pauli elevadas al cuadrado son la identidad, por lo que

$$\gamma_M^i = \begin{pmatrix} \sigma^i \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^i \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.15})$$

entonces

$$\gamma_M^1 = \begin{pmatrix} \sigma^1 \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \sigma^2 \end{pmatrix} \quad (\text{F.16})$$

$$= \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.17})$$

$$\gamma_M^2 = \begin{pmatrix} \sigma^2 \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \sigma^2 \end{pmatrix} \quad (\text{F.18})$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (\text{F.19})$$

$$\gamma_M^3 = \begin{pmatrix} \sigma^3 \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \sigma^2 \end{pmatrix} \quad (\text{F.20})$$

$$= \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.21})$$

La matriz de quiralidad en la representación de Majorana es

$$\gamma_M^5 = i\gamma_M^0 \gamma_M^1 \gamma_M^2 \gamma_M^3 \quad (\text{F.22})$$

$$= i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix} \quad (\text{F.23})$$

$$= i \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \sigma^3 \\ i\sigma^2 \sigma^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix} \quad (\text{F.24})$$

$$= i \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \sigma^3 \sigma^1 \\ i\sigma^2 \sigma^3 \sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.25})$$

$$= i \begin{pmatrix} 0 & iI \\ iI & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.26})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.27})$$

ya que

$$i\sigma^2 \sigma^3 \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.28})$$

$$= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (\text{F.29})$$

REPRESENTACION QUIRAL o WEYL La representación quiral de las matrices de Dirac se define mediante la siguiente transformación

$$\gamma_Q^\mu = U \gamma_D^\mu U^\dagger,$$

donde

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix}. \quad (\text{F.30})$$

Determine la forma de las matrices γ^μ y γ^5 en esta representación

Prueba

En la representación de Dirac, las matrices de Dirac son

$$\gamma_D^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (\text{F.31})$$

$$\gamma_D^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.32})$$

por otro lado

$$U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix}. \quad (\text{F.33})$$

Para $\mu = 0$

$$\gamma_Q^0 = U \gamma_D^0 U^\dagger \quad (\text{F.34})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} \quad (\text{F.35})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} \quad (\text{F.36})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix} \quad (\text{F.37})$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \quad (\text{F.38})$$

Para $\mu = i$

$$\gamma_Q^i = U \gamma_D^i U^\dagger \quad (\text{F.39})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} \quad (\text{F.40})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & \sigma^i \\ -\sigma^i & \sigma^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix} \quad (\text{F.41})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\sigma^i & 0 \\ 0 & 2\sigma^i \end{pmatrix} \quad (\text{F.42})$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}, \quad (\text{F.43})$$

entonces

$$\gamma_Q^1 = \begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.44})$$

$$\gamma_Q^2 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.45})$$

$$\gamma_Q^3 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.46})$$

La matriz de quiralidad en la representación de Majorana es

$$\begin{aligned} \gamma_Q^5 &= i\gamma_Q^0\gamma_Q^1\gamma_Q^2\gamma_Q^3 \\ &= i \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} \sigma^1\sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^1\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} \sigma^1\sigma^2\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^1\sigma^2\sigma^3 \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{F.47})$$

ya que

$$\sigma^1\sigma^2\sigma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{F.48})$$

$$= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (\text{F.49})$$

La matriz de transformación que relaciona la representación de Majorana y Quiral

Prueba

La representación de Majorana es

$$\gamma_M^\mu = M\gamma_D^\mu M^\dagger, \quad (\text{F.50})$$

donde

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -I \end{pmatrix}. \quad (\text{F.51})$$

La representación Quiral es

$$\gamma_Q^\mu = Q\gamma_D^\mu Q^\dagger, \quad (\text{F.52})$$

donde

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix}. \quad (\text{F.53})$$

Ahora, tomando la representación de Majorana, multiplicamos la inversa de M por la izquierda y por la derecha multiplicamos la inversa de $M^\dagger$, por lo que tenemos

$$M^{-1} \gamma_M^\mu (M^\dagger)^{-1} = \gamma_D^\mu, \quad (\text{F.54})$$

por otro lado, para la representación quirál aplicamos lo mismo que para la representación de Majorana, entonces

$$Q^{-1} \gamma_Q^\mu (Q^\dagger)^{-1} = \gamma_D^\mu,$$

igualando (F.54) y (F)

$$M^{-1} \gamma_M^\mu (M^\dagger)^{-1} = Q^{-1} \gamma_Q^\mu (Q^\dagger)^{-1} \quad (\text{F.55})$$

$$\Leftrightarrow \quad (\text{F.56})$$

$$\gamma_M^\mu = M Q^{-1} \gamma_Q^\mu ((Q^\dagger)^{-1} M^\dagger) \quad (\text{F.57})$$

$$= U \gamma_Q^\mu U^\dagger, \quad (\text{F.58})$$

donde

$$U = M Q^{-1}. \quad (\text{F.59})$$

Entonces la transformación que nos lleva de la representación Quiral a la representación de Majorana es

$$\gamma_M^\mu = U \gamma_Q^\mu U^\dagger, \quad (\text{F.60})$$

por lo que la matriz de transformación que relaciona las representaciones de Majorana y Quiral es

$$\begin{aligned} U &= M Q^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & \sigma^2 \\ \sigma^2 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I - \sigma^2 & I + \sigma^2 \\ I + \sigma^2 & \sigma^2 - I \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{F.61})$$

Apéndice G

Soluciones a la ecuación de Dirac, representación de Weyl

Para resolver la ecuación de Dirac libre, debemos mencionar que los espinores satisfacen la ecuación de Klein-Gordon [4]:

$$(\square + m^2) \psi = 0, \quad (\text{G.1})$$

dicha ecuación tiene soluciones de onda plana:

$$\psi_s(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} u_s(p) e^{ipx}, \quad (\text{G.2})$$

con $p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} > 0$. Estas soluciones son análogas a las soluciones de onda plana para espín-1:

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \epsilon_\mu(p) e^{ipx}. \quad (\text{G.3})$$

En el caso de las anti-partículas las soluciones se escriben como

$$\chi_s(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} v_s(p) e^{ipx}, \quad (\text{G.4})$$

también con $p_0 > 0$. Estas son soluciones clásicas, pero las versiones cuánticas van aniquilar partículas y crear anti-partículas de energía positiva. Los espinores $u_s(p)$ y $\bar{v}_s(p)$ son las polarizaciones para las partículas y las anti-partículas, respectivamente. Estos se transforman bajo el grupo de Poincaré mediante p^μ y el grupo pequeño que estabiliza p^μ . Entonces necesitamos encontrar soluciones explícitas para momentos fijados p^μ . Para encontrar soluciones a los espinores, se va usar la base de Weyl en la ecuación de Dirac:

$$\begin{pmatrix} -m & p \cdot \sigma \\ p \cdot \bar{\sigma} & -m \end{pmatrix} u_s(p) = \begin{pmatrix} -m & -p \cdot \sigma \\ -p \cdot \sigma & -m \end{pmatrix} v_s(p) = 0. \quad (\text{G.5})$$

Tomando el marco en reposo, $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$ la ecuación de movimiento se reduce a

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u_s = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} v_s = 0, \quad (\text{G.6})$$

de este modo las soluciones son constantes:

$$u_s = \begin{pmatrix} \xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix}, \quad v_s = \begin{pmatrix} \eta_s \\ -\eta_s \end{pmatrix}, \quad (\text{G.7})$$

para cualquier espinor de dos componentes ξ_s y η_s . Por ejemplo, hay cuatro soluciones linealmente independientes:

$$u_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_{\uparrow} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{G.8})$$

El espinor de Dirac es un objeto complejo de cuatro componentes con ocho grados de libertad reales. La ecuación de movimiento lo reduce a cuatro grados de libertad, los cuales pueden interpretarse como partículas de espín arriba y anti-partículas de espín abajo. Para derivar una expresión más general, podemos resolver la ecuación en otro marco de referencia mediante un boost y conectar la normalización. Si el marco ahora es $p^\mu = (E, 0, 0, p_z)$ entonces

$$p \cdot \sigma = \begin{pmatrix} E - p_z & 0 \\ 0 & E + p_z \end{pmatrix}, \quad p \cdot \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} E + p_z & 0 \\ 0 & E - p_z \end{pmatrix}. \quad (\text{G.9})$$

Sea $A = \sqrt{E - p_z}$ y $B = \sqrt{E + p_z}$, entonces $m^2 = (E - p_z)(E + p_z) = A^2 B^2$, la ecuación (G.5) se convierte:

$$\begin{pmatrix} -AB & 0 & A^2 & 0 \\ 0 & -AB & 0 & B^2 \\ B^2 & 0 & -AB & 0 \\ 0 & A^2 & 0 & -AB \end{pmatrix} u_s(p) = 0. \quad (\text{G.10})$$

Las soluciones son

$$u_s = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \xi_s \\ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \xi_s \end{pmatrix}, \quad (\text{G.11})$$

para cualquier espinor ξ_s . Cuando $p_z = 0$ entonces $A^2 = B^2 = m$, y estas soluciones se reducen a (G.7). Las soluciones en el marco p_z son

$$u_s(p) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{E - p_z} & 0 \\ 0 & \sqrt{E + p_z} \end{pmatrix} \xi_s \\ \begin{pmatrix} \sqrt{E + p_z} & 0 \\ 0 & \sqrt{E - p_z} \end{pmatrix} \xi_s \end{pmatrix}. \quad (\text{G.12})$$

Similarmente para las anti-partículas

$$v_s(p) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{E - p_z} & 0 \\ 0 & \sqrt{E + p_z} \end{pmatrix} \eta_s \\ \begin{pmatrix} -\sqrt{E + p_z} & 0 \\ 0 & -\sqrt{E - p_z} \end{pmatrix} \eta_s \end{pmatrix}. \quad (\text{G.13})$$

Por otro lado, usando

$$\sqrt{p \cdot \sigma} = \begin{pmatrix} \sqrt{E - p_z} & 0 \\ 0 & \sqrt{E + p_z} \end{pmatrix}, \quad \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sqrt{E + p_z} & 0 \\ 0 & \sqrt{E - p_z} \end{pmatrix}, \quad (\text{G.14})$$

se pueden escribir de manera mas general los espinores de Dirac:

$$u_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi_s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi_s \end{pmatrix}, \quad v_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta_s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta_s \end{pmatrix}, \quad (\text{G.15})$$

donde la raíz cuadrada de una matriz se puede definir cambiando a la base diagonal, tomando la raíz cuadrada de los valores propios y luego volviendo a la base original. Aunque en la práctica, se toma p^μ a lo largo del eje z , por lo que no se necesita saber cómo hacer sentido del término $\sqrt{p \cdot \sigma}$. Por lo tanto, las cuatro soluciones van a ser:

$$u_p^1 = \begin{pmatrix} \sqrt{E - p_z} \\ 0 \\ \sqrt{E + p_z} \\ 0 \end{pmatrix}, u_p^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E - p_z} \\ 0 \\ \sqrt{E + p_z} \end{pmatrix}, v_p^1 = \begin{pmatrix} \sqrt{E - p_z} \\ 0 \\ -\sqrt{E + p_z} \\ 0 \end{pmatrix}, v_p^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E - p_z} \\ 0 \\ -\sqrt{E + p_z} \end{pmatrix}. \quad (\text{G.16})$$

En cualquier sistema de referencia, u^s son los electrones de frecuencia positiva, y v^s son los electrones de frecuencia negativa, o equivalentemente, los positrones de frecuencia positiva. Para espinores sin masa, $p_z = \pm E$ y las soluciones explícitas en la ecuación (G.16) son 4 vectores con un componente distinto de cero que describen espinores con helicidad fija. Las soluciones de espinores para electrones sin masa a veces se denominan polarizaciones y son útiles para calcular las amplitudes de dispersión de electrones polarizados. Para los espinores de Weyl, solo hay cuatro grados de libertad reales fuera de la capa y dos grados de libertad reales dentro de la capa. Recordando que la ecuación de Dirac se divide en ecuaciones separadas para ψ_L y ψ_R , los espinores de Dirac con ceros en las dos filas inferiores serán ψ_L y aquellos con ceros en las dos filas superiores serán ψ_R . Dado que ψ_L y ψ_R tienen dos grados de libertad cada uno, deben ser partícula y antipartícula para la misma helicidad tal y como vimos en la sección 1.7.2. La incrustación de espinores de Weyl en campos de esta manera induce representaciones unitarias irreducibles del grupo de Poincaré para $m = 0$. Para averiguar cuál es la normalización que hemos elegido implícitamente, se calcula el producto interno:

$$\begin{aligned} \bar{u}_s(p) u_{s'}(p) &= u_s^\dagger(p) \gamma_0 u_{s'}(p) \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi_s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi_s \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi_{s'} \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi_{s'} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \sqrt{(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma})} & 0 \\ 0 & \sqrt{(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{s'} \\ \xi_{s'} \end{pmatrix} \\ &= 2m \delta_{ss'}. \end{aligned} \quad (\text{G.17})$$

Similarmente para $\tilde{v}_s(p) v_{s'}(p) = -2m \delta_{ss'}$. Esta es la convención para la normalización del producto interno de espinores de Dirac masivos. También se da la siguiente relación $\bar{v}_s(p) u_{s'}(p) = \bar{u}_s(p) v_{s'}(p) = 0$. Además,

$$u_s^\dagger(p) u_{s'}(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi_s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi_s \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi_{s'} \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi_{s'} \end{pmatrix} = 2E \xi_s^\dagger \xi_{s'} = 2E \delta_{ss'}. \quad (\text{G.18})$$

Similarmente $v_s^\dagger(p) v_{s'}(p) = 2E \delta_{ss'}$. El cual es la convención para la normalización de espinores de Dirac sin masa. Por otro lado, si se define $\bar{p}^\mu = (E_p, -\vec{p})$ como el momento hacia atrás de p^μ entonces

$$v_s^\dagger(p) u_{s'}(\bar{p}) = u_s^\dagger(p) v_{s'}(\bar{p}) = 0. \quad (\text{G.19})$$

El producto externo de los espinores para las partículas va ser:

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = \not{p} + m. \quad (\text{G.20})$$

Para las antipartículas es:

$$\sum_{s=1}^2 v_s(p) \bar{v}_s(p) = \not{p} - m. \quad (\text{G.21})$$

Donde la suma es sobre los espinores. Ambos lados de la ecuación son matrices. Aunque podemos pensarlos como:

$$\sum_s |s\rangle\langle s|. \quad (\text{G.22})$$

Cuando sumamos sobre índices de espín internos se usa un producto interno y se obtiene un número. Cuando sumamos sobre polarizaciones o espines, se obtiene una matriz.

Grupo de Lorentz como $SL(2, \mathbb{C})$

En relatividad especial solemos ver fenómenos como la contracción de objetos, se destaca que diferentes observadores atribuyen distintas coordenadas a los eventos espacio-temporales. Sin embargo, esto no es lo mismo que lo que el observador realmente ve, ya que también implica el tiempo que la luz tardó en viajar desde el evento hasta el observador. Esto deja abierta las preguntas: ¿qué observa un observador? ¿Cómo son realmente los objetos contraídos por Lorentz? Resulta que escribir el grupo de Lorentz como $SL(2, \mathbb{C})$ ofrece una forma elegante de responder a esta pregunta. Además, lo que encontraremos es algo sorprendente [174]. Lo que un observador realmente ve son, por supuesto, rayos de luz. A medida que los objetos se mueven a través del espacio de Minkowski, emiten luz que luego se propaga a la posición del observador. Esto se ve expresado en los diagramas de la Figura G.1, ambos con el observador situado en el origen del espacio de Minkowski. También se muestran los conos de luz futuros y pasados emitidos desde el origen.

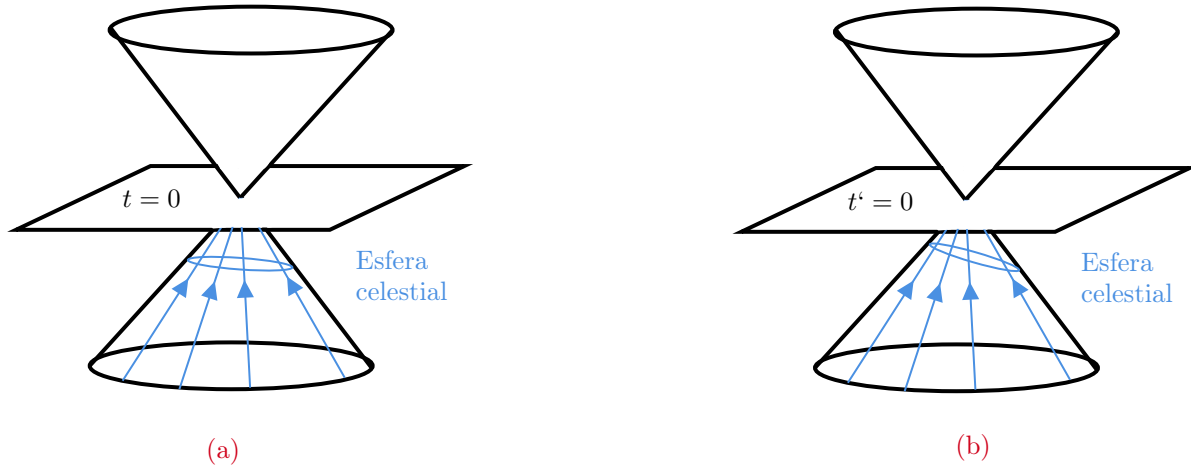


Figura G.1: Esfera celestia para dos observadores diferentes: (a) a un tiempo t y (b) a un tiempo t'

En la Figura (a), se supone que el observador está estacionario con la coordenada temporal t . En cada instante fijo, t , los rayos de luz forman una esfera $\mathbf{S}^2$. Esta se dibuja como el círculo azul en el cono de luz pasado del diagrama. Si suponemos que ningún otro objeto se interpone entre esta esfera y el observador, los rayos de luz que la intersecan son una buena representación de lo que el observador realmente ve. Si se tomara una fotografía de todo lo que le rodea, registraría la imagen en esta esfera. A veces se le llama esfera celeste, lo que refleja que así es como deberíamos pensar en ver el cielo nocturno. Veamos ahora lo que ve un observador en un sistema inercial diferente. Esto se muestra en la Figura (b). Este segundo observador también tomará una fotografía al pasar por el origen. Sin embargo, la esfera celeste de este nuevo observador está dada por rayos nulos que se encuentran en $t' = \text{constante}$. Aunque ya no es evidente en la imagen, sabemos que el espacio definido por la intersección de los rayos de luz con el hiperplano t' constante debe seguir siendo una esfera, simplemente porque todos los observadores inerciales son equivalentes. Sin embargo,

esta nueva esfera celeste está claramente inclinada con respecto a la anterior. Los cuatro rayos de luz dibujados en azul de la Figura G.1, intersecan ambas esferas celestes. Por lo tanto, estos rayos de luz proporcionan un mapa entre lo que ven los dos observadores. Este es un mapeo entre las dos esferas celestes, $\mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$. Cualquier punto de un rayo de luz se encuentra, por definición, a una distancia de separación del origen cuando se mide con la métrica de Minkowski. De forma equivalente, la matriz hermítica de 2×2 denotado como $\hat{P}$ que describe este punto debe tener determinante nulo. Pero existe una forma sencilla de escribir estas matrices con determinante cero. Introducimos un vector complejo de dos componentes, λ_a , con $a = 1, 2$. Entonces podemos escribir lo siguiente

$$\hat{P} = \lambda \lambda^\dagger = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & \lambda_1 \lambda_2^\dagger \\ \lambda_2 \lambda_1^\dagger & |\lambda_2|^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{G.23})$$

que, por construcción, obedece a $\det \hat{P} = 0$, similar a la matriz que vemos en (1.272). Es fácil comprobar que la matriz hermítica más general $\hat{P}$ con $\det \hat{P} = 0$ y traza no negativa puede escribirse de esta manera. La condición de traza no negativa significa que $\hat{P}$ reside en el cono de luz futuro. Siempre podemos parametrizar el cono de luz pasado mediante $\hat{P} = -\lambda \lambda^\dagger$. Sin embargo, cabe destacar que existe una redundancia en esta descripción, ya que si rotamos ambas componentes de λ una fase, de modo que $\lambda \rightarrow e^{i\beta} \lambda$, entonces $\hat{P}$ permanece inalterado. En nuestra nueva notación, la esfera celestial a un tiempo t constante es dado por:

$$\lambda^\dagger \lambda = |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = \text{constant}. \quad (\text{G.24})$$

De hecho, esta afirmación contiene algunos cálculos matemáticos interesantes. Es obvio que, dadas dos variables complejas λ_1 y λ_2 , la ecuación (G.24) define una esfera tridimensional $\mathbf{S}^3$. Lo que quizás sea menos obvio, pero no por ello menos cierto, es que si identificamos todos los puntos de $\mathbf{S}^3$ relacionados por $\lambda \rightarrow e^{i\beta} \lambda$, obtenemos una esfera bidimensional $\mathbf{S}^2$. En lenguaje matemático, decimos que $\mathbf{S}^3/U(1) \cong \mathbf{S}^2$. Es sencillo escribir directamente la función $\mathbf{S}^3 \rightarrow \mathbf{S}^2$. Dado un dos-vector complejo, λ , que cumple la condición $\lambda^\dagger \lambda = 1$, se pueden definir 3 números reales k^i mediante

$$k^i = \lambda^\dagger \sigma^i \lambda, \quad (\text{G.25})$$

donde σ^i son las tres matrices de Pauli (1.17). Un poco de álgebra muestra que $k^i k^i = 1$. En otras palabras, k^i da un punto en $\mathbf{S}^2$. Esta función de $\mathbf{S}^3$ a $\mathbf{S}^2$ se denomina *función de Hopf*.

Utilicemos ahora estos nuevos objetos λ para construir el mapa entre las dos esferas celestes. Un dato interesante es que las transformaciones de Lorentz actúan de forma natural sobre los dos componentes λ . Para comprobarlo, recordemos que

$$\hat{P}' = \lambda' \lambda'^\dagger = M \lambda \lambda^\dagger M^\dagger, \quad (\text{G.26})$$

podemos ver esto como una transformación de λ por sí misma. Tenemos la transformación de $SL(2, \mathbb{C})$:

$$\lambda' = M \lambda. \quad (\text{G.27})$$

Sin embargo, esta no es exactamente nuestra transformación. Podemos partir de una esfera celeste definida por (G.24) y aplicar una transformación de Lorentz. El problema radica en que el espacio resultante sigue siendo la primera esfera celeste, simplemente escrita en las coordenadas del segundo observador. Aún necesitamos propagar los rayos de luz hacia adelante y hacia atrás para que intercepten la segunda esfera celeste. Para evitar esta complicación, es mejor pensar en estas esferas celestes de una manera ligeramente diferente. En lugar de decir que se definen en tiempo constante, definámoslas como clases de equivalencia de rayos de luz. Esto significa que perdemos la información sobre dónde nos encontramos a lo largo del rayo de luz: solo conservamos la información sobre de qué rayo de luz estamos hablando. Matemáticamente, esto es muy simple: a cada λ asociamos un único número complejo $\omega \in \mathbb{C}$ mediante

$$\omega = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (\text{G.28})$$

El mapa de la esfera celeste $\mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ se conoce como *proyección estereográfica* y se muestra en la Figura G.2. En sentido estricto, ω parametriza $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, incluyendo el punto en el infinito para dar cabida al punto $\lambda_2 = 0$, que es el polo norte de la esfera celeste. Este plano complejo extendido se denomina *esfera de Riemann*.

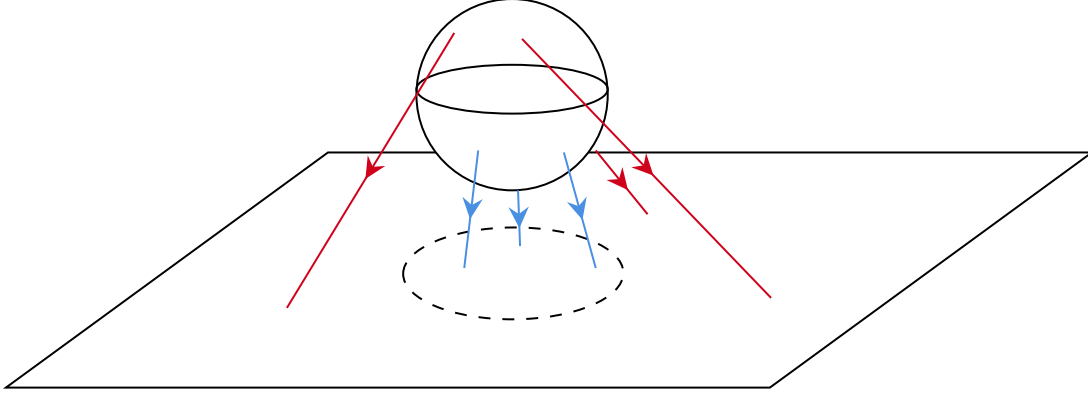


Figura G.2: Proyección estereográfica: El hemisferio sur es mapeado dentro del círculo punteado mientras que el hemisferio norte es mapeado fuera del círculo punteado.

Ahora, los rayos de luz vistos por el primer observador están etiquetados como $\omega \in \mathbf{C}$ y forman una esfera celeste. Los rayos de luz vistos por el segundo observador están etiquetados como $\omega' = \lambda'_1/\lambda'_2$ y forman una esfera celeste diferente. Una transformación de Lorentz $M \in SL(2, \mathbf{C})$ actúa sobre λ como (G.27) que, en términos de ω , se lee

$$\omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \quad \text{donde } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad ad - bc = 1 \quad (\text{G.29})$$

Esta transformación en el plano complejo se conoce como *transformación de Möbius*. Es fácil ver que las transformaciones de Möbius forman un grupo. De hecho, a partir de lo visto anteriormente, no debería sorprenderle saber que el grupo de transformaciones de Möbius es $SL(2, \mathbf{C})$, hasta una identificación discreta $\mathbf{Z}_2$ [175]. Supongamos ahora que el primer observador ve un objeto en su esfera celeste que traza una forma. Tras la proyección estereográfica, esto resultará en una forma en el plano complejo (quizás pasando por el punto en el infinito). Al segundo observador le parece que esta se transforma mediante (G.29). Al realizar la proyección estereográfica inversa, sabremos qué forma ve realmente el segundo observador. Veamos un ejemplo sencillo. El ejemplo más sencillo es el de un objeto que es en sí mismo una esfera. Esto significa que, cuando está estacionario con respecto al primer observador, el contorno del objeto parece un círculo. ¿Qué ve el segundo observador? Para responder a esta pregunta, se necesita mencionar algunos datos sencillos sobre la proyección estereográfica y las transformaciones de Möbius:

- La proyección estereográfica convierte círculos de la esfera en círculos o líneas en el plano.
- Las transformaciones de Möbius convierten círculos y líneas de el plano en círculos o líneas en el plano.

Tras estos hechos se esconde la afirmación de que ambas transformaciones son conformes, es decir, que conservan los ángulos. La conclusión es que un círculo en la primera esfera celeste se transforma, mediante una transformación de Lorentz, en un círculo en la segunda esfera celestial. El primer observador ve un objeto que tiene la forma de un círculo; con el argumento de la contracción de la longitud de Lorentz, el segundo observador verá un objeto tipo elipse. Sin embargo, esto no pasa; el segundo observador sigue viendo un círculo. El tiempo que tarda la luz en viajar completamente,

elimina el efecto de la contracción en la longitud. Finalmente los objetos λ_i son los espinores de Weyl, vectores de dos componentes complejos que se transforman bajo el grupo $SL(2, \mathbf{C})$, en realidad son espinores de Weyl izquierdos, para obtener los espinores de Weyl derechos, se cambia $\phi \rightarrow -\phi$ como vimos en las ecuaciones (1.257) y (1.258). Ya hemos visto cómo se pueden usar los espinores para describir los rayos de luz. Pero este no es su único uso; tienen otras utilidades. Hay algunas propiedades que hacen muy sorprendente a los espinores lo que permite que tengan alguna relevancia real en el mundo. Esto nos remonta a la observación de que $SL(2, \mathbf{C})$ es la doble cobertura del grupo de Lorentz. Supongamos que existe algún objeto en el universo que se describe mediante un espinor. Esto significa, en particular, que el estado del objeto con λ es diferente del estado del objeto con $-\lambda$. ¿Qué sucede cuando rotamos este objeto? Bueno, ya hemos visto cómo realizar una rotación usando matrices $SL(2, \mathbf{C})$: están dadas por (1.257) y (1.258). Excepto que si actuamos sobre espinores, debemos tomar una decisión: ¿elegimos $+M$ o $-M$? Porque, a diferencia de la acción en el espacio de Minkowski, estas dos matrices diferentes resultarán en estados λ distintos después de una rotación. En realidad, no importa qué opción elijamos, siempre y cuando elijamos una. Así que, supongamos que una rotación sobre un eje n^i actúa sobre un espinor mediante

$$\lambda \rightarrow \exp\left(\frac{i\theta}{2}n^i\sigma^i\right)\lambda \quad (\text{G.30})$$

Todo esto parece estar bien. La sorpresa surge al observar lo que ocurre si rotamos el espinor 2π . No vuelve a su estado original. En cambio, tras una rotación de 2π , encontramos $\lambda \rightarrow -\lambda$. ¡Tenemos que rotar 4π para que el espinor vuelva a su estado original! ¿No sería asombroso si existieran objetos en el universo con esta propiedad: que al rotarlos se descubriera que no volvían a su estado original? Esto es aún más asombroso al comprender que rotar un objeto es lo mismo que rodearlo. Si existieran tales objetos, se podría rodearlos una vez y ver que el objeto se encuentra en un estado diferente simplemente porque se ha caminado a su alrededor. Estos objetos son los electrones, protones y neutrones. Estas partículas contienen un momento angular intrínseco cuya dirección es descrita por un espinor en lugar de un vector. Rota un electrón 360 grados y no va ser el mismo, si lo rotamos 720 grados tenemos el mismo electrón con el que empezamos. La simetría de grupo del universo en donde vivimos no es el grupo de Lorentz $SO^+(1, 3)$; mas bien es la doble cubierta $SL(2, \mathbf{C})$

Apéndice H

Corte Unitario y BCFW para calcular a ordenes de Lazos

El cuerpo central de esta tesis fue calcular eficientemente amplitudes de dispersión desde teorías como QED hasta teorías más complicadas como Supergravedad. Por lo tanto, vamos a ver en esta sección algunas técnicas sobre cómo calcular el orden de lazos (loops, en ingles) siguiendo las ideas que vimos en el capítulo 4 basándonos en los espinores de helicidad de Weyl. Seguimos el mismo procedimiento del libro de Elvang y Huang [9], también hay otras referencias donde se trata el tema de integrales de Feynman [176, 177], uno de los más útiles es la integración por partes [178]. Las correcciones a orden de lazos son, por supuesto, muy relevantes, tanto en aplicaciones de física de partículas como para nuestra comprensión de la estructura matemática de la matriz S . En esta sección, exploramos la estructura de las amplitudes de lazos. Las reglas de Feynman requieren la conservación del momento en cada vértice de un diagrama de Feynman. A nivel de árbol, esto fija todos los momentos de las líneas internas (propagadores) en función de los momentos externos. A nivel de lazos, la conservación del momento deja un momento indeterminado por lazo y se debe integrar sobre todos estos momentos no fijos. Por ejemplo, en D dimensiones, se tiene una integral de lazo D dimensional para cada lazo. Por ejemplo, en la teoría ϕ^3 , uno de los diagramas que contribuye a la amplitud de 1 lazo de 4 puntos es:

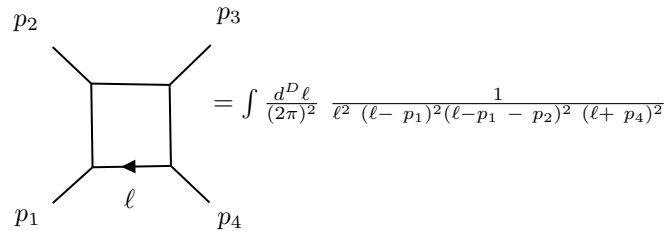
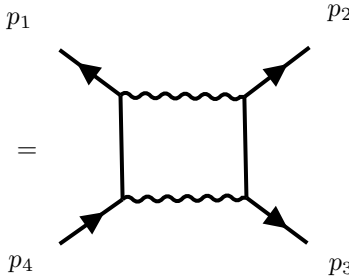

$$= \int \frac{d^D \ell}{(2\pi)^2} \frac{1}{\ell^2 (\ell - p_1)^2 (\ell - p_1 - p_2)^2 (\ell + p_4)^2}$$

Figura H.1: Integral de caja escalar

Otro ejemplo, es el diagrama de la corrección de 1 lazo a la amplitud de 4 puntos en QED escalar:

$$\mathcal{M}_{QED}^{4\ell} =$$


Aquí $\mathcal{M}_{QED}^{4\ell}$ es

$$\mathcal{M}_{QED}^{4\ell} = e^4 \int \frac{d^D \ell}{(2\pi)^D} \frac{[(\ell - 2p_1) \cdot (\ell + 2p_2)][(\ell - p_1 + p_4) \cdot (\ell + p_2 - p_3)]}{\ell^2 (\ell - p_1)^2 (\ell - p_1 - p_2)^2 (\ell + p_4)^2}, \quad (\text{H.1})$$

donde e es la carga eléctrica del escalar. Nótese que la integral (H.1) tiene dependencia del momento de lazo en el numerador. En general, una amplitud de lazo L puede escribirse esquemáticamente como:

$$\mathcal{M}_n^{L\text{-lazo}} = \sum_j \int \left(\prod_{l=1}^L \frac{d^D \ell_l}{(2\pi)^D} \right) \frac{1}{S_j} \frac{n_j c_j}{\prod_{\alpha_j} p_{\alpha_j}^2}, \quad (\text{H.2})$$

donde la suma abarca todos los posibles diagramas de Feynman de lazos j . Para cada diagrama, ℓ_l denota los momentos de los lazos L , α_j etiqueta los propagadores y S_j es el factor de simetría asociado al diagrama. Los factores cinemáticos del numerador n_j son polinomios de productos internos invariantes de Lorentz de los momentos externos, de lazos, y vectores de polarización (u otras funciones de onda externas). Las constantes c_j capturan la información sobre los acoplamientos y los factores del grupo de norma. En este trabajo nos centraremos en el límite planar de las amplitudes de Yang-Mills como ejemplo. En este contexto, el límite planar significa que las amplitudes tienen una única estructura de traza, al igual que las amplitudes de árbol. Este tipo de amplitudes se denominan *planares*. Los diagramas que contribuyen a una amplitud son precisamente aquellos en los que no se cruzan líneas. A nivel de lazos, se distinguen tres tipos de objetos:

- **El integrando del lazo** es la función racional dentro de la integración del momento del lazo.
- **La integral del lazo** es la combinación del integrando y la medida de integración del momento del lazo; este es un objeto formal, ya que no hemos especificado la región de integración del momento del lazo ni abordado las divergencias.
- **La amplitud del lazo** es el resultado de realizar las integraciones de los lazos en la integral del lazo. Si integramos sobre el espacio físico de momento $\mathbb{R}^{1,3}$, la integral puede tener divergencias infrarrojas (IR) y/o ultravioleta (UV). Necesitamos regular dichas divergencias para que el resultado de la integración, la amplitud del lazo, esté bien definido.

Nos centraremos principalmente en el integrando del lazo y la integral del lazo. Sin embargo, es útil comprender la estructura analítica de la amplitud del lazo, ya que esta revela qué restricciones debe satisfacer el integrando del lazo y, por lo tanto, la integral. No es sorprendente que las integrales de amplitudes de lazos puedan ser divergentes. Integran una función racional (el integrando del lazo) sobre L copias de $\mathbb{R}^{1,3}$, lo que incluye regiones donde el momento del lazo es infinito $|\ell| \rightarrow \infty$, así como regiones donde el integrando-denominador puede anularse; en ambos casos, se producen divergencias potenciales. Tras regular la amplitud y separar las divergencias, las partes finitas de la amplitud no suelen ser simplemente funciones racionales. Para amplitudes de lazos inferior sin masa, a veces se encuentran funciones que pueden expresarse en forma de integrales iterativas o

productos de integrales iterativas. Por ejemplo,

$$\log(x) = \int_0^x \frac{dt}{t}, \quad \log(x) \log(y) = \left(\int_0^x \frac{dt}{t} \right) \left(\int_0^y \frac{ds}{s} \right), \quad \text{Li}_2(x) = \int_0^x \frac{dt}{t} \int_0^t \frac{du}{1-u}. \quad (\text{H.3})$$

La última función, Li_2 , es un dilogaritmo. Es el caso especial $q = 2$ del polilogaritmo Li_q . A partir del conocido logaritmo $\text{Li}_1(x) = -\log(1-x)$, los polilogaritmos se definen iterativamente como

$$\text{Li}_q(x) = \int_0^x dt \frac{\text{Li}_{q-1}(t)}{t}. \quad (\text{H.4})$$

Estas funciones suelen denominarse funciones *trascendentales*. Se asocian con un grado de trascendentalidad, dado por la dimensión de la integral involucrada. Las tres funciones en (H.3) tienen trascendentalidad 1, 2 y 2, mientras que r es para el polilogaritmo Li_r . Nótese que, en esta categorización, π tiene trascendentalidad 1, ya que $i\pi = \log(-1)$. La estructura analítica de las amplitudes de lazos es claramente más compleja que la de las amplitudes de árbol: donde las amplitudes de árbol son funciones racionales simples con polos simples, las integraciones de lazos suelen dar lugar a logaritmos generalizados, como en (H.3), y otras funciones especiales. Estas tienen cortes de rama (branch cuts, en inglés), además de polos. La estructura de polos bien comprendida de las amplitudes de árbol fue fundamental para el desarrollo de las relaciones de recursión BCFW en la capa de masa de la sección 4.3, por lo que, a primera vista, parece difícil desarrollar un enfoque similar en la capa de masa para las amplitudes de lazos. No obstante, la estructura analítica de los integrandos de lazo puede aprovecharse para reconstruir la amplitud a partir de menor orden. Veamos cómo hacerlo. Si una integral de lazo diverge a medida que el momento del lazo aumenta, se dice que el diagrama de lazo presenta una divergencia ultravioleta (UV). Con un momento de lazo elevado, los denominadores de los propagadores se comportan como ℓ^2 , por lo que un integrando dado se comporta como

$$\int d^D \ell \frac{\ell^N}{(\ell^2)^P} \sim \int d|\ell| \frac{|\ell|^{N+D-1}}{|\ell|^{2P}}, \quad (\text{H.5})$$

donde D es el número de dimensiones del espacio-tiempo, P es el número de propagadores y N cuenta las potencias de los momentos del lazo en el numerador. Con $D + N - 2P = 0, 1, 2, \dots$, la integral es logarítmica, lineal, cuadráticamente divergente, etc. Para regular el comportamiento UV de la integral, se puede introducir un límite UV explícito Λ , pero suele ser más conveniente continuar analíticamente el espacio-tiempo hasta $4 - 2\epsilon$ dimensiones y usar ϵ como parámetro de regularización. Esta es la *regularización dimensional*, ampliamente utilizada en la teoría cuántica de campos debido a su atractivo atributo de preservar la invariancia de norma [179]. Si la amplitud presenta divergencias UV, esto nos indica que, a distancias cortas, la teoría debe modificarse, ya sea modificando las constantes de la acción original o añadiendo nuevos operadores locales a la acción. La forma en que se modifica la teoría depende crucialmente de la forma de la divergencia. Dado que la integral de lazo tiene una dimensión de masa definida, la divergencia debe multiplicarse por un invariante cinemático con la dimensión correspondiente. Si este invariante es la amplitud del árbol, entonces podemos simplemente modificar las constantes, como los factores de acoplamiento generales, de la amplitud del árbol para absorber esta divergencia. Esta modificación puede traducirse en la modificación de las constantes de acoplamiento y las masas en la descripción lagrangiana de la teoría. Si, por otro lado, el invariante cinemático frente a la divergencia del lazo no es proporcional a la amplitud del árbol, entonces esto significa que uno tiene que modificar la teoría agregando nuevos operadores a la acción de modo que las divergencias puedan ser absorbidas. El procedimiento para eliminar las *divergencias UV* de las amplitudes de lazos se denomina *renormalización*. Si las divergencias UV de todas las amplitudes de lazos de una teoría dada pueden eliminarse añadiendo un número finito de términos a la acción (incluido cero), se dice que la teoría es renormalizable. La renormalización es un tema fundamental en la teoría cuántica de campos. Es crucial para realizar predicciones físicas a partir de las teorías de norma, y sus técnicas han demostrado su eficacia

en las notables y exitosas comparaciones de predicciones teóricas con resultados experimentales. Otro tipo de singularidad son las *divergencias infrarrojas* (IR). Pueden provenir de dos fuentes: divergencias suaves y divergencias colineales. Para facilitar el análisis, consideremos una integral con dos patas adyacentes sin masa:

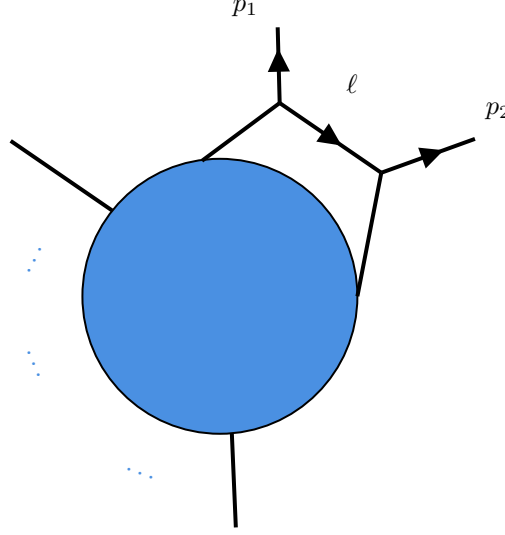


Figura H.2: Integrand

La parte relevante de este integrando es

$$\int \frac{d^D \ell}{(\ell + p_1)^2 \ell^2 (\ell - p_2)^2}. \quad (\text{H.6})$$

Ahora, consideremos las coordenadas del cono de luz en notación de Elvang y Huang [9]

$$p^+ \equiv p^0 + p^1, \quad p^- \equiv p^0 - p^1, \quad \vec{p}_\perp \equiv (p^2, p^3, \dots, p^{D-1}). \quad (\text{H.7})$$

Entonces $p^2 = -p^+ p^- + p_\perp^2$. Siempre podemos elegir las coordenadas de tal manera que p_1 esté en la dirección p^- . Para simplificar, elegimos que p_2 esté en la dirección p^+ ; esto no es general, pero el resultado de la discusión sí lo será. La integral del lazo es ahora:

$$\int \frac{d\ell^+ d\ell^- d^{D-2} \ell_\perp}{(\ell^2 - 2\ell^+ p_1^-) \ell^2 (\ell^2 - 2\ell^- p_2^+)}. \quad (\text{H.8})$$

Donde se han eliminado los factores generales. Consideremos la región de integración donde el momento del lazo se suaviza, $\ell^\mu \rightarrow 0$. En la práctica, escalamos la integral a esta región cambiando la variable de integración de ℓ^+ a t como:

$$\ell^+ \rightarrow t, \quad \ell^- \rightarrow t\ell^-, \quad \vec{\ell}_\perp \rightarrow t\vec{\ell}_\perp. \quad (\text{H.9})$$

Todos los términos en ℓ^2 escalan homogéneamente como t^2 , lo cual conduce a $\ell \cdot p_i$ para t pequeño. Por lo tanto, para t cercano a cero, la integral (H.8) da

$$\int \frac{t^{D-1} dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^{5-D}}. \quad (\text{H.10})$$

En $D = 4$, esta integral es logarítmicamente divergente cerca de $t = 0$. Podemos regularla continuando formalmente las dimensiones del espacio-tiempo hasta $4 - 2\epsilon$, y ahora tenemos:

$$\int \frac{t^{3-2\epsilon} dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^{1+2\epsilon}} = \frac{1}{2\epsilon} + O(\epsilon^0). \quad (\text{H.11})$$

Esta divergencia se denomina *divergencia suave*, ya que se produce cuando el momento del lazo es más suave que los lados externos. A continuación, consideramos un límite en el que el momento del lazo se vuelve colineal con p_1 : escalando las componentes para alinearlas con la dirección p^-

$$\ell^+ \rightarrow t^2, \quad \ell^- \rightarrow \ell^-, \quad \vec{\ell}_\perp \rightarrow t\vec{\ell}_\perp. \quad (\text{H.12})$$

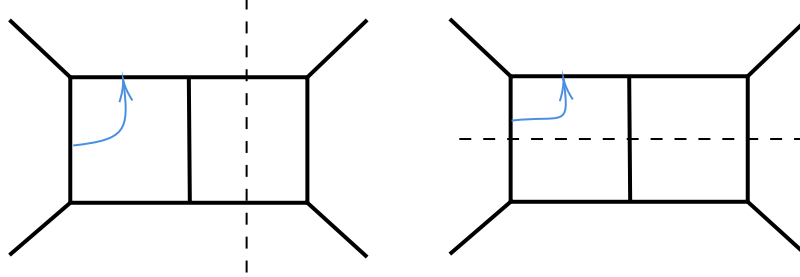
Nuevamente, ℓ^2 escala como t^2 , por lo que para t pequeño tenemos que $(\ell^2 - 2\ell^+ p_1^-)$ escala como t^2 y que $(\ell^2 - 2\ell^- p_2^+)$ va como t^0 en orden principal. Por lo tanto, el comportamiento general de la integral para t pequeño es nuevamente (H.11), por lo que va como $1/\epsilon$ en dimensiones $4 - 2\epsilon$. Esta es una divergencia colineal; corresponde al límite donde el momento del lazo se vuelve colineal con uno de los momentos externos. Las divergencias suaves pueden ocurrir simultáneamente con divergencias colineales, por lo que en la regularización dimensional $D = 4 - 2\epsilon$, la ℓ -integración de la Figura H.2 se comporta en orden principal como $1/\epsilon^2$. Para una amplitud de L -lazos, las divergencias IR principales suelen ser de orden $1/\epsilon^{2L}$. Los límites suaves y colineales para amplitudes en teorías de norma sin masa se han estudiado desde finales de la década de 1970 [180].

La aparición de divergencias IR no responde a la necesidad de modificar la teoría original. Más bien, es consecuencia de una sutileza en la definición de las amplitudes de dispersión para partículas sin masa. Para definir una amplitud de dispersión, es necesario tener una noción clara de los estados asintóticos, es decir, ¿qué son exactamente las partículas que estamos dispersando? Si partículas idénticas sin masa se vuelven colineales, es difícil distinguirlas de una sola partícula sin masa: una sola partícula con un momento definido similar al de la luz es indistinguible de cientos de partículas blandas cuyos momentos son colineales y cercanos a cero. Esta ambigüedad para los estados asintóticos sin masa se refleja en las divergencias IR de las amplitudes de lazo, así como en las singularidades de los límites blandos y colineales de la amplitud a nivel de árbol. Las singularidades suaves y colineales de árbol y lazos están estrechamente relacionadas, como se puede observar en el cálculo de la sección eficaz de dispersión. La sección eficaz de un proceso de 4 puntos para cuatro gluones en la teoría pura de Yang-Mills implica el producto cuadrado de la norma de la amplitud de gluones sumada sobre los estados. Organizandó la expansión perturbativa en potencias del acoplamiento de norma g , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \sum_i \langle g_1 g_2 | S | i \rangle \langle i | S | g_3 g_4 \rangle = & \\ & \underbrace{\text{Diagrama 1}}_{g^4} + \underbrace{\text{Diagrama 2}}_{g^6} + \\ & + \underbrace{\text{Diagrama 3}}_{g^6} + O(g^8) \end{aligned}$$

La suma $\sum_i$ representa la suma de todos los estados multi-partícula en la capa de masa y S es la matriz S . La línea discontinua en cada diagrama representa la suma de las especies de partículas

del lado interno en la capa de masa. Las amplitudes de árbol de 4 gluones y de un lazo son de orden g^2 y g^4 , respectivamente, mientras que la amplitud del árbol de 5 gluones es de orden g^3 . Por lo tanto, el producto de las amplitudes del árbol de 4 gluones y de un lazo contribuyen al mismo orden, es decir g^6 , como el producto de dos amplitudes de árboles de 5 gluones. Diagramáticamente, se puede observar que la divergencia colineal de la amplitud del lazo de 4 gluones en un diagrama puede considerarse, de hecho, como la divergencia colineal de la amplitud del árbol de 5 puntos, vista de otra manera:

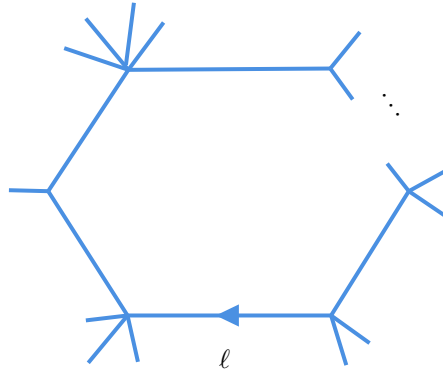


Las divergencias colineales de las amplitudes de árbol de 5 puntos cancelan la divergencia IR de las amplitudes de un lazo de 4 puntos para producir una sección eficaz finita.

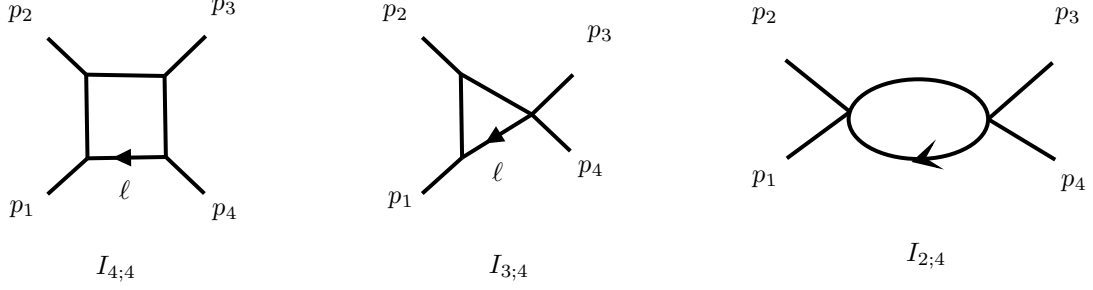
La discusión anterior ilustra que las divergencias IR de las amplitudes de lazos están íntimamente ligadas al comportamiento suave y colineal de las amplitudes de árbol. Históricamente, esto ha servido como punto de partida inspirador para el desarrollo de las relaciones de recursión a nivel de árbol [68], discutidas en la sección 4.3. Nótese que si un proceso de dispersión está ausente a nivel de árbol y no es nulo solo a nivel de lazos, entonces el resultado de orden principal no puede tener singularidades IR; no tendría una contraparte a nivel de árbol que cancelara sus divergencias IR en la sección eficaz. Por ejemplo, las amplitudes de gluones con todos los valores negativos o con un solo valor positivo se anula a nivel de árbol [4, 9, 26], pero en la teoría pura de Yang-Mills son no nulas a orden de un lazo. Se puede demostrar mediante cálculo explícito que los resultados para estas amplitudes de gluones están libres de divergencias IR y, de hecho, son funciones racionales simples [181, 182]. La teoría de Yang-Mills pura es

$$\mathcal{M}_n^{1\text{-lazo}} [1^- 2^- \dots n^-] = \frac{\sum [i_1 i_2] \langle i_2 i_3 \rangle [i_3 i_4] \langle i_4 i_1 \rangle}{[12][23] \dots [n1]}, \quad (\text{H.13})$$

Donde la suma en el numerador es mayor que $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n$ y se han descartado los factores de normalización generales. Por otro lado, resulta útil considerar un conjunto de integrales escalares básicas y sus resultados integrados en la regularización dimensional. Las integrales escalares de un lazo $I_m^{(i)}$ son los diagramas de Feynman de m -gonos que aparecen en la teoría ϕ^n :



En las integrales escalares, la dependencia de los momentos del lazo y los externos se limita únicamente a los propagadores. Las integrales escalares de un lazo se clasifican como *burbujas*, *triángulos*, *cajas*, *etc.*, si tienen propagadores 2, 3, 4, etc. Estas integrales se denotan por $I_{2;n}(K_i, K_j)$, $I_{3;n}(K_i, K_j, K_k)$, y $I_{4;n}(K_i, K_j, K_k, K_l)$, donde el subíndice indica el número de vértices de los diagramas, así como el número de patas externas involucradas. K_i es la suma de los momentos externos en cada vértice. Las integrales escalares de caja, triángulo y burbuja de 4 puntos son:



a) Cajas

b) Triangulos

c) Burbujas

Donde

$$\begin{aligned}
 I_{4;4} &= I_{4;4}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \int \frac{d^D \ell}{(2\pi)^D} \frac{1}{\ell^2 (\ell - p_1)^2 (\ell - p_1 - p_2)^2 (\ell + p_4)^2}, \\
 I_{3;4} &= I_{3;4}(p_1, p_2, p_3 + p_4) = \int \frac{d^D \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2 (\ell - p_1)^2 (\ell - p_1 - p_2)^2}, \\
 I_{2;4} &= I_{2;4}(p_1 + p_2, p_3 + p_4) = \int \frac{d^D \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{\ell^2 (\ell - p_1 - p_2)^2}.
 \end{aligned} \tag{H.14}$$

Encontramos la integral de caja escalar en (H.1). En $D = 4$, el conteo de potencias muestra que las integrales de caja y triángulo $I_{4;n}$ y $I_{3;n}$ no pueden tener divergencias UV, solo divergencias IR debido a las esquinas sin masa. Las excepciones son los casos en los que todas las esquinas son masivas, es decir, todas $K_i^2 \neq 0$; tales integrales de triángulo y caja masivas son finitas IR. Las integrales de burbuja $I_{2;n}$ tienen divergencias UV, pero no divergencias IR porque ambas esquinas son masivas, $K_i^2 \neq 0$. La integral de burbuja escalar con una esquina sin masa se anula en la regularización dimensional. Esto se debe a que la integral tiene una dimensión de masa de 2, pero no hay una cantidad dimensional que le dé dimensión, ya que el único invariante que entra en la integral es $K_i^2 = 0$. Si se establece $D = 4 - 2\epsilon$, los resultados integrados de las integrales de caja, triángulo y burbuja de 4 puntos son:

$$\begin{aligned}
 I_{4;4}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \frac{\gamma_\Gamma}{su} \left(\frac{2}{\epsilon^2} \left[(-\mu^{-2}s)^{-\epsilon} + (-\mu^{-2}u)^{-\epsilon} \right] - \ln^2 \left(\frac{s}{u} \right) - \pi^2 \right) + O(\epsilon), \\
 I_{3;4}(p_1, p_2, p_3 + p_4) &= \frac{\gamma_\Gamma}{\epsilon^2} (-\mu^{-2}s)^{-1-\epsilon} + O(\epsilon), \\
 I_{2;4}(p_1 + p_2, p_3 + p_4) &= \gamma_\Gamma \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln(-\mu^{-2}s) + 2 \right) + O(\epsilon).
 \end{aligned} \tag{H.15}$$

Aquí,

$$\gamma_\Gamma = \Gamma(1 + \epsilon)\Gamma^2(1 - \epsilon)/\Gamma(1 - 2\epsilon), \tag{H.16}$$

y μ es la escala de regularización. Estos resultados y sus generalizaciones de n puntos se pueden encontrar en [183]. Las integrales de caja y triángulo de un lazo son $1/\epsilon^2$, como se esperaba de la

combinación de las divergencias suaves y colineales. La divergencia $1/\epsilon$ en la integral de burbuja es una divergencia UV. Las integrales escalares de caja, triángulo y burbuja proporcionan una base para amplitudes de un lazo en $D = 4$ dimensiones. Veremos cómo funciona esto más adelante en el método de unitariedad.

Método del Corte Unitario

Consideremos la amplitud del gluón de un lazo de n puntos, ordenada por colores, en la teoría pura de Yang-Mills como ejemplo. Supongamos que identificamos el momento del lazo ℓ tal que, en cada diagrama de Feynman, ℓ es el momento que fluye entre los tramos 1 y n , como se indica para $n = 5$ en la Figura H.3:

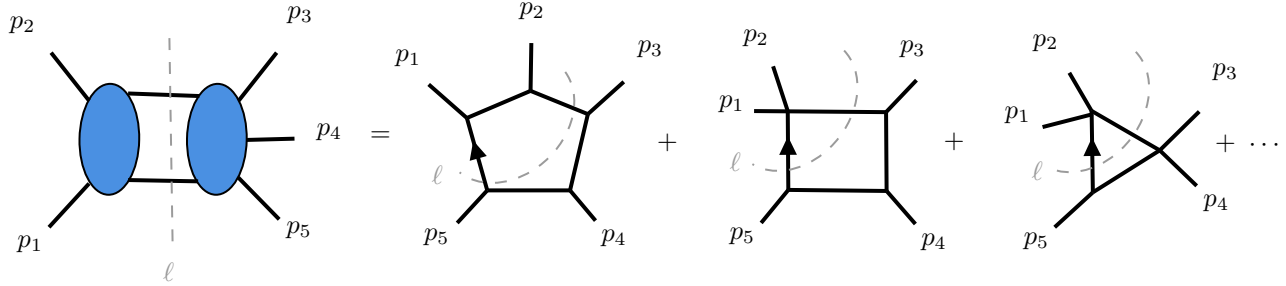


Figura H.3: La suma de los residuos de todos los diagramas de Feynman con propagadores ℓ^2 y $(\ell - p_1 - p_2)^2$ en la capa de masa debe dar el producto de dos amplitudes a nivel árbol.

Entonces, podemos agrupar inequívocamente todos los diagramas de Feynman distintos bajo una integral,

$$\int d^D \ell \sum_j J_j, \quad (\text{H.17})$$

Los integrandos J_j toman la forma indicada por (H.2). Para calcular la amplitud completa, necesitamos integrar ℓ sobre $\mathbb{R}^4$ (después de la rotación de Wick desde $\mathbb{R}^{1,3}$), pero centrémonos en el subplano donde el momento de lazo satisface las dos condiciones de corte.

$$\ell^2 = (\ell - p_1 - p_2)^2 = 0. \quad (\text{H.18})$$

En este subplano, los integrandos de la forma

$$J_j = \frac{1}{S_j \dots (\ell^2) \dots (\ell - p_1 - p_2)^2 \dots}, \quad (\text{H.19})$$

se vuelven singulares. La singularidad corresponde a una configuración cinemática donde los dos propagadores, $1/\ell^2$ y $1/(\ell - p_1 - p_2)^2$, se encuentran en la misma capa de masa. La suma de los residuos de todos estos integrandos debe ser equivalente al producto de dos amplitudes de árbol en la misma capa de masa, como se muestra esquemáticamente en la Figura H.3. Esta observación es muy útil para restringir el integrando del lazo: si alguien nos da una función racional y afirma que es el integrando del lazo único de alguna teoría (unitaria), podemos aplicar cortes, como (H.18), y comprobar la afirmación comprobando si la función se factoriza correctamente en productos de amplitudes de tres. De esta manera, nuestro conocimiento de las amplitudes de tres puede reciclarse en información sobre el integrando del lazo. La operación de tomar propagadores de lazos en la capa de masa se denomina *corte unitario*. Se origina en la restricción unitaria de la matriz S . Para comprender cómo, la unitariedad requiere que $S^\dagger S = 1$. Al escribir $S = 1 + iT$, donde T representa la parte interactuante de la matriz S , la unitariedad requiere $-i(T - T^\dagger) = T^\dagger T$. Si examinamos

esta restricción orden por orden en la teoría de perturbaciones, nos indica que la parte imaginaria de la matriz T en un orden dado está relacionada con el producto de los resultados de orden inferior. En particular, la parte imaginaria de la amplitud de un lazo está dada por el producto de dos amplitudes de árbol. Esto se ilustra en el siguiente diagrama:

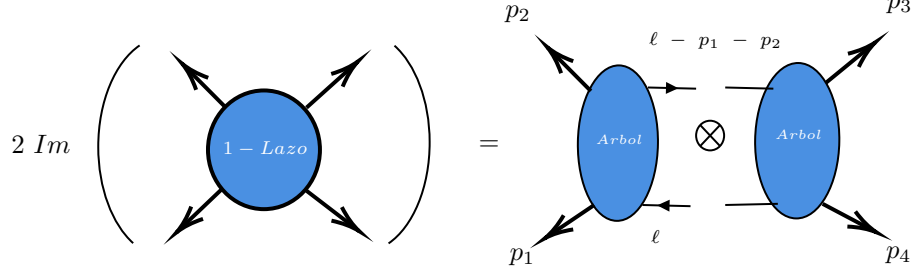


Figura H.4: Corte Unitario

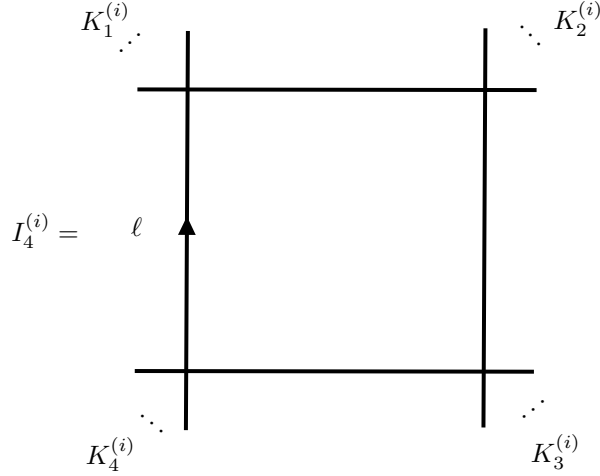
El producto de dos amplitudes de árbol en el lado derecho implica una suma de todos los posibles estados en la capa de masa que pueden cruzar el corte. Solo se incluyen en esta suma los estados del espectro físico de la teoría. En la teoría de norma, los cálculos de las amplitudes de lazos mediante diagramas de Feynman requieren fantasmas en los lazos: el propósito de estos fantasmas es cancelar los modos no físicos en los lazos. Por el contrario, en un corte unitario (H.4), restringimos los momentos del lazo a estar en la capa de masa y solo se incluyen los modos físicos en las dos amplitudes en la capa en el lado derecho de (H.4). Las reglas de corte también incluyen integrales de cualquier libertad restante en el momento del lazo después de imponer las restricciones de corte, como (H.18), y la conservación del momento. La integral sobre todas las configuraciones cinemáticas permitidas, con respecto al diagrama (H.4), puede escribirse como

$$\int d^D \ell \delta_+(\ell^2) \delta_+((\ell - p_1 - p_2)^2), \quad (\text{H.20})$$

El subíndice $+$ significa que elegimos la solución para la condición en la capa de masa que tiene un componente temporal positivo, $\ell^0 > 0$, es decir, está asociada con una partícula (en lugar de una antipartícula) que cruza el corte. Vemos que (H.20) simplemente reemplaza los dos propagadores de corte con sus condiciones en la capa de masa, tal como lo vimos en la Figura H.1. La parte imaginaria de la amplitud explora su estructura de corte de rama; por lo tanto, el corte unitario nos permite relacionar la estructura polar del integrando con la estructura de corte de rama de la integral de lazo. Se puede reconstruir el integrando analizando diferentes conjuntos de cortes unitarios. Los cortes unitarios también pueden involucrar más de dos líneas de corte, es decir, varias líneas internas tomadas en la capa de masa, de modo que la amplitud del lazo se factoriza en múltiples amplitudes en la capa de lazo inferior. Un corte de N líneas simplemente significa que N líneas internas se toman en la capa de masa. La reconstrucción de la amplitud del lazo completo a partir de la aplicación sistemática de cortes de unitariedad se denomina método de unitariedad generalizada [127]. Se ha aplicado a una amplia gama de problemas de dispersión, desde predicciones en QCD de NLO hasta el comportamiento ultravioleta de las teorías de supergravedad perturbativa. Sus aplicaciones para teorías supersimétricas y no supersimétricas han sido estudiadas en trabajos como [184, 185, 186, 187]. La información de los cortes unitarios se puede utilizar con mayor eficiencia si conocemos, a priori, una base completa de integrales que pueden aparecer en las amplitudes de dispersión. Se puede demostrar que, en D dimensiones, todas las amplitudes de un lazo pueden reescribirse como una suma de integrales escalares de un lazo de m -gonos I_m para $m = 2, 3, \dots, D$ [188, 189, 183, 190, 191, 192]:

$$\mathcal{M}^{1\text{-lazo}} = \sum_i C_D^{(i)} I_D^{(i)} + \sum_j C_{D-1}^{(j)} I_{D-1}^{(j)} + \dots + \sum_k C_2^{(k)} I_2^{(k)} + \text{términos racionales}. \quad (\text{H.21})$$

Aquí, $C_m^{(i)}$ son coeficientes cinemáticos dependientes de las integrales escalares de m -gono $I_m^{(i)}$ que se introdujeron en (H.14). Las integrales escalares de caja, triángulo y burbuja de 4 puntos se evaluaron en (H.15). La integral de caja de n puntos $I_4^{(i)}$ toma la forma (de ahora en adelante, eliminando el subíndice n):



Donde

$$I_4^{(i)} = \int \frac{d^D \ell}{(2\pi)^D} \frac{1}{\ell^2 (\ell - K_1^{(i)})^2 (\ell - K_1^{(i)} - K_2^{(i)})^2 (\ell + K_4^{(i)})^2}, \quad (\text{H.22})$$

donde $(K_1^{(i)}, K_2^{(i)}, K_3^{(i)}, K_4^{(i)})$ son las sumas de los momentos externos en cada vértice. La etiqueta i indica una elección particular de distribución de las líneas externas en las cuatro subamplitudes, es decir, diferentes cortes de 4 líneas. Puede parecer sorprendente que todas las integrales de un lazo puedan escribirse en términos de una base de integrales escalares de 1 lazo, como en (H.21), ya que las integrales obtenidas a partir de diagramas de Feynman generalmente implican numeradores que dependen del momento del lazo. La simplificación consiste en que se pueden usar los momentos externos para formar una base para cualquier vector en las integrales. Por ejemplo, una integral vectorial de un lazo de 4 puntos puede desarrollarse como:

$$\int d^D \ell \frac{\ell^\mu}{\ell^2 (\ell - p_1)^2 (\ell - p_1 - p_2)^2 (\ell + p_4)^2} = a_1 p_1^\mu + a_2 p_2^\mu + a_3 p_3^\mu. \quad (\text{H.23})$$

Aquí simplemente utilizamos el hecho de que la integral debe ser un vector de Lorentz, y dado que, por conservación del momento, solo hay tres vectores de momento linealmente independientes en la entrada de 4 partículas, la respuesta debe ser una combinación lineal de los mismos. Los coeficientes en (H.23) se resuelven mediante el procedimiento de reducción de *Passarino-Veltman* [192]. La idea es simplemente añadir puntos en varias combinaciones de momentos externos y simplificar el resultado. Por ejemplo, añadiendo puntos a p_1 en (H.23), el numerador de la integral se convierte en:

$$(\ell \cdot p_1) = \frac{1}{2} [(\ell + p_1)^2 - \ell^2]. \quad (\text{H.24})$$

Los dos términos del lado derecho cancelan cada uno un propagador del lazo, dejando dos integrales

escalares. Entonces (H.23) da:

$$\int d^D \ell \left[\frac{1}{2\ell^2 (\ell + p_1 + p_2)^2 (\ell - p_4)^2} - \frac{1}{2 (\ell + p_1)^2 (\ell + p_1 + p_2)^2 (\ell - p_4)^2} \right] \quad (\text{H.25})$$

$$= -\frac{1}{2} (a_2 s + a_3 t). \quad (\text{H.26})$$

Repetiendo el procedimiento anterior, se pueden obtener tres ecuaciones lineales para a_1, a_2 y a_3 . Resolver este sistema lineal es sencillo y proporciona la integral vectorial (H.23) como una combinación lineal de integrales escalares. En general, dado que solo hay D vectores independientes en D dimensiones, el conjunto de integrales escalares necesarias puede reducirse al conjunto de integrales escalares que se muestra en (H.21). Las integrales tensoriales pueden simplificarse de forma similar. Se puede encontrar una discusión más detallada sobre las reducciones integrales en [103]. La expansión de la base (H.21) hace que la tarea de calcular la amplitud de un lazo sea cuestión de determinar los coeficientes $C_m^{(i)}$. Dado que las integrales escalares tienen estructuras de propagador distintas, solo un subconjunto contribuye a un corte unitario dado. Al aplicar múltiples cortes unitarios, se obtiene un conjunto de ecuaciones lineales que relacionan los $C_m^{(i)}$ con los resultados de los cortes, cada uno calculado como un producto de amplitudes de árbol. Resolviendo estas ecuaciones lineales se obtienen los coeficientes $C_m^{(i)}$ como una combinación de productos de amplitudes de árbol. Por (H.21), esto determina la amplitud de un lazo, hasta la posibilidad de términos racionales. Los coeficientes integrales $C_m^{(i)}$ se pueden hallar sistemáticamente organizando el cálculo según el número de propagadores presentes en las integrales escalares $I_m^{(i)}$. En D dimensiones, el momento del lazo ℓ tiene D componentes, por lo que se pueden encontrar soluciones aisladas para ℓ tales que todos los propagadores en la integral escalar $I_D^{(i)}$ estén en la capa de masa: esto corresponde a un corte de D líneas, y este es el corte máximo posible en D dimensiones. A esto se le denomina *corte máximo*. Dado que las restricciones de corte son cuadráticas en el momento del lazo, existen dos soluciones aisladas, denotadas $\ell^{*(1)}$ y $\ell^{*(2)}$, para un corte máximo. El coeficiente correspondiente $C_D^{(i)}$ es completamente determinado por el producto de D amplitudes de árbol como:

$$C_D^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=\ell^{*(1)}, \ell^{*(2)}} \mathcal{M}_{n_1}^{\text{arbol}} \dots \mathcal{M}_{n_D}^{\text{arbol}}. \quad (\text{H.27})$$

Nótese que se promedian las dos soluciones, $\ell^{*(1)}$ y $\ell^{*(2)}$. En un lazo, el peso relativo entre las dos soluciones se puede determinar considerando integrandos especiales que integran a cero. El corte máximo asociado también debe anularse, lo que corrige la prescripción anterior [193]. Los coeficientes $C_m^{(i)}$ con $m < D$ no son tan sencillos de calcular, pero pueden obtenerse sistemáticamente. Tras determinar todos los coeficientes de D -gonos, tratamos los $(D-1)$ -cortes. Tanto las integrales $I_D^{(i)}$ como las $I_{D-1}^{(j)}$ pueden contribuir potencialmente a los $(D-1)$ -cortes, pero como ya hemos determinado todos los $C_D^{(i)}$, podemos determinar sin ambigüedad todos los $C_{D-1}^{(j)}$. De forma similar, todos los coeficientes integrales pueden determinarse iterativamente. De esta forma, el método de unitariedad generalizada ofrece una forma sistemática de determinar la amplitud de un lazo en términos de amplitudes de árbol. Se pueden encontrar análisis detallados de la extracción de coeficientes integrales de un lazo en $D=4$ en referencias como [110]. Por supuesto, hay un gran problema, ya mencionado en (H.21): se trata de los términos racionales. Los términos racionales son funciones racionales que no poseen cortes de rama (branch cuts, en inglés), por lo que son indetectables por cortes de unitariedad. Los términos racionales surgen de la necesidad de regularizar las integrales de lazos. En la regularización dimensional, el momento del lazo ℓ es realmente $(D-2\epsilon)$ -dimensional. Si separamos el momento del lazo en una parte D -dimensional, $\ell^{(D)}$, y una parte (-2ϵ) -dimensional, $\mu^{-2\epsilon}$, también puede haber contribuciones de las μ -integrales. Un ejemplo de un integrando que da una contribución sin cortes de rama es la integral escalar de

$(D/2 + 1)$ -gono con numerador μ^2 : se integra a un valor finito:

$$\int \frac{d\ell^{(D)} d\mu^{-2\epsilon}}{(2\pi)^{D-2\epsilon}} I_{D/2+1} [\mu^2] = -\frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{1}{(D/2)!} + O(\epsilon). \quad (\text{H.28})$$

Esto no se puede capturar a partir del corte unitario ordinario, ya que es simplemente una función racional (en este caso, una constante). El corte unitario obliga al momento del lazo a estar en la capa de masa en D dimensiones, lo que implica $\mu^2 = 0$, por lo que la contribución del integrando anterior se anula. Por otro lado, si se consideran cortes unitarios donde las líneas internas se vuelven sin masa en $D - 2\epsilon$ dimensiones $(\ell^{(D)})^2 + \mu^2 = 0$, o, equivalentemente, masivas en D dimensiones con masa $m^2 = \mu^2$, dichos términos son detectables. Por lo tanto, los términos racionales se pueden reconstruir a partir de cortes unitarios si permitimos que los estados que cruzan el corte sean masivos. Los términos racionales están ausentes en las teorías supersimétricas de Yang-Mills porque las cancelaciones de supersimetría garantizan que las potencias del momento del lazo en las integrales no conduzcan a términos racionales tras la reducción integral. En las teorías no supersimétricas, por ejemplo, $\lambda\phi^4$, QED y QCD, los términos racionales están presentes y son los que requieren más tiempo para calcularse.

BCFW para Lazos

Los cortes unitarios analizados anteriormente implican cortes de al menos dos propagadores. En contraste, la relación de recursión a nivel de árbol que vimos en capítulo 4.3 se asemeja más a una construcción de corte de una sola línea, ya que utiliza la estructura de factorización de un solo propagador en la capa de masa. Cabe preguntarse si las amplitudes de lazo pueden reconstruirse de forma similar a partir de las singularidades asociadas con la toma de un solo propagador en la capa de masa. En esta sección, estudiamos un enfoque recursivo que generaliza la construcción BCFW a nivel de árbol a los integrandos del lazo. Las amplitudes a orden de lazos tienen una estructura analítica compleja, por lo que nos centramos en el integrando de los lazos, que es simplemente una función racional con polos en la ubicación de los propagadores, muy similar a las amplitudes a nivel árbol. Supongamos que realizamos un desplazamiento del BCFW en los tramos externos, por ejemplo, $p_1^\mu \rightarrow p_1^\mu + zq^\mu$ y $p_n^\mu \rightarrow p_n^\mu - zq^\mu$, con $q^2 = 0$, como es habitual. Podemos deducir de los diagramas de Feynman que los integrandos del lazo desplazados poseen dos tipos de polos en z :

- Polos en propagadores independientes del lazo;
- Polos en propagadores que involucran el momento del lazo.

El residuo de un polo de tipo 1 corresponde a la factorización del integrando en un producto de dos integrandos del lazo inferior. El residuo de un polo de tipo 2 en un integrando de n puntos del lazo L es un integrando de $(n + 2)$ puntos $(L - 1)$ con dos patas adyacentes, evaluado en el límite directo:

$$p_i^\mu \rightarrow r^\mu, \quad p_{i+1}^\mu \rightarrow -r^\mu, \quad \text{con } r^2 = 0. \quad (\text{H.29})$$

Esto se ilustra con el ejemplo de una amplitud de 3 lazos y 4 puntos en la Figura:

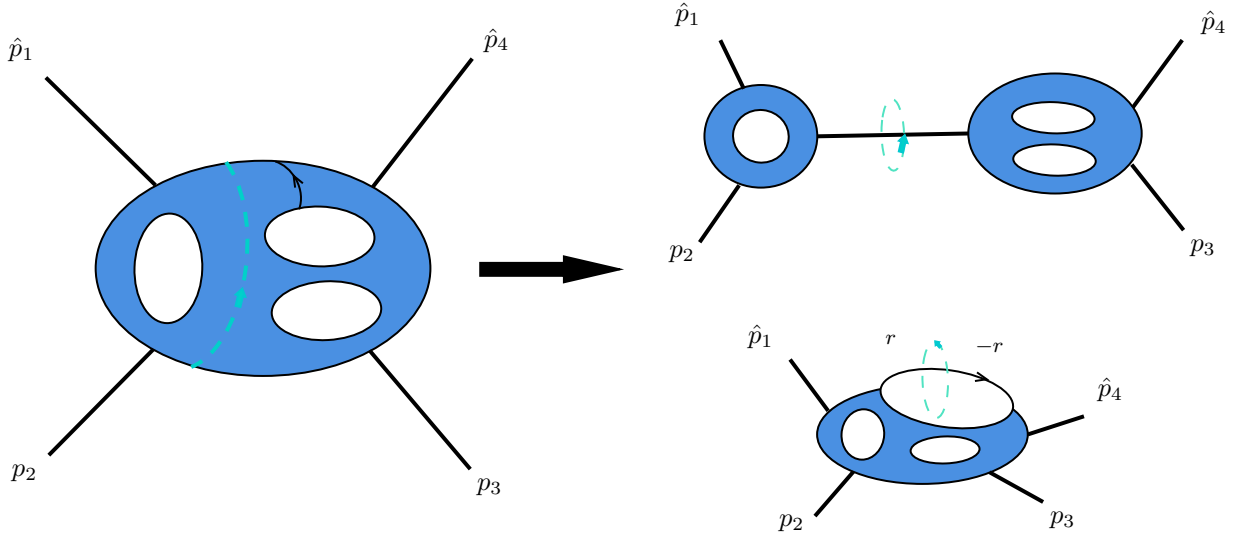


Figura H.5: Tipos de polos en lazos con BCFW

En la Figura H.5 vemos la representación de los dos tipos de polos que se producen en un desplazamiento BCFW de un integrando de 3 lazos de 4 puntos. Los de tipo 1 son polos asociados a propagadores independientes del momento del lazo, mientras que los de tipo 2 son propagadores dependientes del momento del lazo. El primero factoriza el integrando de 3 lazos en un producto de un integrando de 2 lazos y uno de 1 lazo, mientras que el segundo proporciona un límite directo de una amplitud de 2 lazos con dos tramos adicionales. Los polos de tipo 2 son lo que llamaríamos cortes de línea única en el método de unitariedad [194, 195, 196, 197]. Por lo tanto, siempre que se comprenda bien el comportamiento de z grande, parece que se puede establecer directamente una relación de recursión para integrandos de los lazos. Sin embargo, existen sutilezas que se deben resolver. Uno de ellos se relaciona con la identificación de los momentos del lazo en el integrando del lazo. En la amplitud, debemos integrar los momentos del lazo, por lo que ℓ_i son solo variables ficticias que pueden redefinirse sin dejar de obtener la misma respuesta integrada. Sin embargo, el propio integrando puede tener diferentes estructuras polares dependiendo de cómo se identifiquen los ℓ_i . Como ejemplo, considere la integral de caja de 4 puntos de un lazo (H.1) y comparemos las parametrizaciones equivalentes $I_4^{(a)}$ e $I_4^{(b)} = I_4^{(a)}(\ell \rightarrow \ell + p_1)$. Los desplazamientos de BCFW en las líneas externas 1 y 2 produce dos funciones analíticas distintas en z :

$$I_4^{(a)}(\hat{1}, \hat{2}, 3, 4) = \frac{1}{\ell^2 (\ell - p_1 - zr)^2 (\ell - p_1 - p_2)^2 (\ell + p_4)^2}, \quad (\text{H.30})$$

$$I_4^{(b)}(\hat{1}, \hat{2}, 3, 4) = \frac{1}{(\ell + p_1 + zr)^2 \ell^2 (\ell - p_2 + zr)^2 (\ell - p_2 - p_3 + zr)^2}. \quad (\text{H.31})$$

En general, no existe una forma canónica de identificar cómo se parametriza el momento del lazo, por lo que esa es la primera sutileza que debe resolverse. Básicamente, se reduce a la definición de lo que se entiende por *integrando no integrado*. La otra gran sutileza tiene que ver con el límite directo (H.29). Cuando los propagadores dependientes del momento del lazo se integran en capas, existe un residuo correspondiente a un integrando de punto $(n+2)$ del lazo inferior en el límite directo, pero dicho límite presenta singularidades. Por ejemplo, a partir de los diagramas de Feynman explícitos, se observa que si las líneas delanteras están unidas a la misma línea externa, entonces, debido a la conservación del momento, existe una singularidad $1/p^2$ cuando $p^2 \rightarrow 0$. Dichos diagramas pueden identificarse con cortes de burbujas en las líneas externas o diagramas de tadpole. Esto se ilustra en la siguiente Figura:

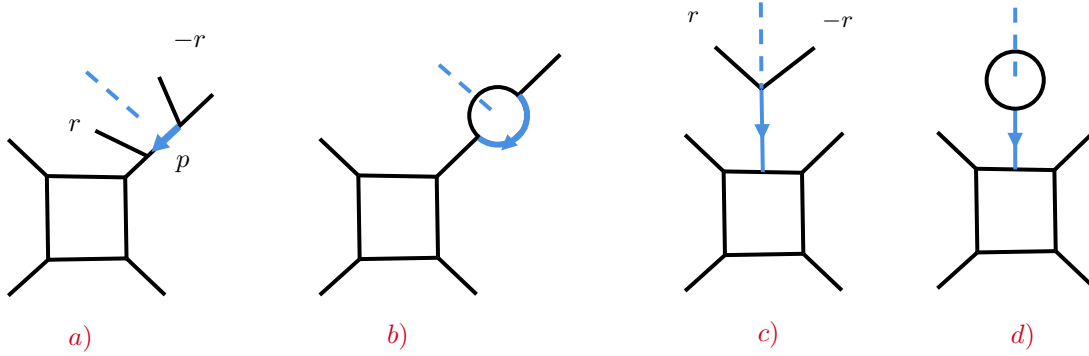


Figura H.6: Caption

En teorías sin masa, estos se integran a cero en la regularización dimensional y no contribuyen a la amplitud del lazo. Sin embargo, antes de la integración, forman parte del integrando y contribuirán a los cortes individuales. Por lo tanto, una tarea importante, aunque difícil, es identificar estas contribuciones en el límite directo de manera que se puedan eliminar de forma consistente. La resolución de las sutilezas anteriores se ha logrado parcialmente para teorías no supersimétricas [113] y se ha resuelto completamente en teorías supersimétricas en el límite planar [114, 115]. En particular, se demostró que, para teorías supersimétricas, los términos problemáticos asociados con el tadpole, así como con las burbujas externas, se cancelan en la suma de estados sobre el supermultiplete, y por lo tanto, se tiene un residuo perfectamente definido. Además, en el límite planar, los momentos del lazo en el integrando pueden definirse sin ambigüedad. Esto se hace definiendo los ℓ_i con una relación específica con el orden de los momentos externos. Por ejemplo, a un lazo, una opción es declarar que ℓ es el momento asociado con la línea interna inmediatamente anterior a la línea 1. Para la integral de caja de 4 puntos y un lazo, esto selecciona el integrando $I_4^{(a)}$ en (H.6). En la Figura H.6 vemos ejemplos de diagramas problemáticos para el límite hacia adelante (forward limit, en inglés). En el diagrama de la izquierda de (a), el propagador entre las líneas delanteras diverge debido a la conservación del momento. El diagrama (b) ilustra que dicho diagrama corresponde al corte único de una burbuja en una línea externa. Observaciones similares se aplican a los diagramas (c) y (d), donde el límite corresponde al corte de un tadpole. Este tipo de métodos se han estudiado mucho en teorías como $\mathcal{N} = 4$ SYM [198, 199]. Sería interesante probar si este tipo de técnicas podrían ayudar al área de física de partículas a mejorar los cálculos de procesos cuando se tengan n -partículas tanto a nivel árbol como a orden de lazos.

Bibliografía

- [1] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995.
- [2] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 6 1996.
- [3] D. Griffiths, *Introduction to elementary particles*, 2008.
- [4] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 3 2014.
- [5] M. Srednicki, *Quantum field theory*. Cambridge University Press, 1 2007.
- [6] S. J. Parke and T. R. Taylor, “An Amplitude for n Gluon Scattering,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 56, p. 2459, 1986.
- [7] F. A. Berends and W. T. Giele, “Recursive Calculations for Processes with n Gluons,” *Nucl. Phys. B*, vol. 306, pp. 759–808, 1988.
- [8] F. Cachazo, P. Svrcek, and E. Witten, “MHV vertices and tree amplitudes in gauge theory,” *JHEP*, vol. 09, p. 006, 2004.
- [9] H. Elvang and Y.-t. Huang, *Scattering Amplitudes in Gauge Theory and Gravity*. Cambridge University Press, 4 2015.
- [10] C. Cheung, *TASI Lectures on Scattering Amplitudes*. World Scientific, 2018, pp. 571–623.
- [11] L. J. Dixon, “Calculating scattering amplitudes efficiently,” in *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics (TASI 95): QCD and Beyond*, 1 1996, pp. 539–584.
- [12] R. Penrose, “Twistor algebra,” *J. Math. Phys.*, vol. 8, p. 345, 1967.
- [13] R. Penrose and M. A. H. MacCallum, “Twistor theory: An Approach to the quantization of fields and space-time,” *Phys. Rept.*, vol. 6, pp. 241–316, 1972.
- [14] E. Witten, “Perturbative gauge theory as a string theory in twistor space,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 252, pp. 189–258, 2004.
- [15] N. Arkani-Hamed, F. Cachazo, C. Cheung, and J. Kaplan, “The S-Matrix in Twistor Space,” *JHEP*, vol. 03, p. 110, 2010.
- [16] W. Siegel, “Fields,” 12 1999.
- [17] N. Arkani-Hamed, T.-C. Huang, and Y.-t. Huang, “Scattering amplitudes for all masses and spins,” *JHEP*, vol. 11, p. 070, 2021.
- [18] A. Ochirov, “Helicity amplitudes for QCD with massive quarks,” *JHEP*, vol. 04, p. 089, 2018.

- [19] N. Arkani-Hamed, J. L. Bourjaily, F. Cachazo, A. B. Goncharov, A. Postnikov, and J. Trnka, *Grassmannian Geometry of Scattering Amplitudes*. Cambridge University Press, 4 2016.
- [20] N. Arkani-Hamed, A. Hodges, and J. Trnka, “Positive Amplitudes In The Amplituhedron,” *JHEP*, vol. 08, p. 030, 2015.
- [21] N. Arkani-Hamed and J. Trnka, “The Amplituhedron,” *JHEP*, vol. 10, p. 030, 2014.
- [22] Arkani-Hamed, Nima and Trnka, Jaroslav, “Into the Amplituhedron,” *JHEP*, vol. 12, p. 182, 2014.
- [23] J. L. Diaz-Cruz, B. L. Lopez, O. Meza-Aldama, and J. R. Perez, “Weyl spinors and the helicity formalism,” *Rev. Mex. Fis. E*, vol. 61, p. 104, 2015.
- [24] J. L. Diaz-Cruz, B. O. Larios, and O. Meza-Aldama, “An Introduction to the Massive Helicity Formalism with applications to the Electroweak SM,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 761, no. 1, p. 012012, 2016.
- [25] B. O. Larios López, “Nuevas técnicas en teorías del campo supersimétricas,” Ph.D. dissertation, Puebla U., Inst. Fis., 2018.
- [26] J. Reyes Pérez, “Métodos de amplitudes en QFT supersimétricas,” Master’s thesis, FCFM-BUAP, 12 2021.
- [27] J. Reyes Pérez, “Aspectos básicos del método de amplitudes I: caso sin masa,” *Rev. Mex. Fis. E*, vol. 22, no. 1, p. 010203, 2025.
- [28] J. Reyes Pérez, J. Leon Silverio, M. Espinoza Martínez, and J. Hernandez Camacho, “Aspectos básicos del método de amplitudes ii: Caso masivo.” work in progress.
- [29] J. Reyes Pérez and J. Leon Silverio, “Aspectos básicos del método de amplitudes iii: Métodos de recursión, bcfw,” *work in progress*, 2026.
- [30] J. L. Diaz-Cruz and B. O. Larios, “Helicity Amplitudes for massive gravitinos in N=1 Supergravity,” *J. Phys. G*, vol. 45, no. 1, p. 015002, 2018.
- [31] J. L. Díaz Cruz, J. Reyes Pérez, M. Espinosa Martinez, and J. Leon Silverio, “Constructive mssm,” *work in progress*, 2026.
- [32] R. Aoude and C. S. Machado, “The Rise of SMEFT On-shell Amplitudes,” *JHEP*, vol. 12, p. 058, 2019.
- [33] G. Durieux, T. Kitahara, Y. Shadmi, and Y. Weiss, “The electroweak effective field theory from on-shell amplitudes,” *JHEP*, vol. 01, p. 119, 2020.
- [34] G. Durieux, T. Kitahara, C. S. Machado, Y. Shadmi, and Y. Weiss, “Constructing massive on-shell contact terms,” *JHEP*, vol. 12, p. 175, 2020.
- [35] G. F. S. Alves, E. Bertuzzo, and G. M. Salla, “On-shell approach to neutrino oscillations,” *Phys. Rev. D*, vol. 106, no. 3, p. 036028, 2022.
- [36] N. Arkani-Hamed, Y.-t. Huang, and D. O’Connell, “Kerr black holes as elementary particles,” *JHEP*, vol. 01, p. 046, 2020.
- [37] A. Guevara, A. Ochirov, and J. Vines, “Scattering of Spinning Black Holes from Exponentiated Soft Factors,” *JHEP*, vol. 09, p. 056, 2019.
- [38] G. M. Salla, “Characterising dark matter-induced neutrino potentials,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 83, no. 3, p. 204, 2023.

- [39] Einstein, A, “Zur Elektrodynamik bewegter Körper,” *Ann. Phys.*, 1905.
- [40] Einstein. A, “De Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie,” *Ann. Phys.*, 1916.
- [41] Einstein, A, “Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie,” *Vieweg+ Teubner Verlag*, 1923.
- [42] W. Rindler, *Relativity: Special, General, and Cosmological*. Oxford University Press, 2006.
- [43] M. Fierz and W. Pauli, E, “On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field,” *Proc. R. Soc. Lond. A: Math. Phys. Sci.*, 1939.
- [44] W. Rarita and J. Schwinger, “On a Theory of Particles with Half-Integral Spin,” *Phys.Rev.*, 1941.
- [45] J. Wess and B. Zumino, “Supergauge transformations in four dimensions,” *Nucl. Phys.B*, 1974.
- [46] I. Aitchison, *Supersymmetry in Particle Physics: An Elementary Introduction* . Cambridge University Press, 2007.
- [47] P. Freedman, D. van Nieuwenhuizen and S. Ferrara, “Progress toward a theory of supergravity,” *Phys. Rev. D*, 1976.
- [48] R. P. Feynman, “Quantum theory of gravitation,” *Acta Phys. Polon.*, vol. 24, pp. 697–722, 1963.
- [49] B. S. DeWitt, “Quantum theory of gravity. i. the canonical theory,” *Phys. Rev.*, vol. 160, pp. 1113–1148, Aug 1967. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.160.1113>
- [50] B. S. "DeWitt, “Quantum theory of gravity. ii. the manifestly covariant theory,” *Phys. Rev.*, vol. 162, pp. 1195–1239, Oct 1967. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.162.1195>
- [51] B. S. DeWitt, “Quantum Theory of Gravity. 3. Applications of the Covariant Theory,” *Phys. Rev.*, vol. 162, pp. 1239–1256, 1967.
- [52] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, “One loop divergencies in the theory of gravitation,” *Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. A*, vol. 20, pp. 69–94, 1974.
- [53] G. 't Hooft, “Reflections on the renormalization procedure for gauge theories,” *Nucl. Phys. B*, vol. 912, pp. 4–14, 2016.
- [54] S. Weinberg, “Effective field theory, past and future,” *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 31, no. 06, p. 1630007, 2016.
- [55] J. F. Donoghue, “Leading quantum correction to the Newtonian potential,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 72, pp. 2996–2999, 1994.
- [56] Donoghue, John F., “General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections,” *Phys. Rev. D*, vol. 50, pp. 3874–3888, 1994.
- [57] N. E. J. Bjerrum-Bohr, “Leading quantum gravitational corrections to scalar QED,” *Phys. Rev. D*, vol. 66, p. 084023, 2002.
- [58] M. L. Mangano and S. J. Parke, “Multiparton amplitudes in gauge theories,” *Phys. Rept.*, vol. 200, pp. 301–367, 1991.

- [59] Z. Bern, L. J. Dixon, and D. A. Kosower, “Progress in one loop QCD computations,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, vol. 46, pp. 109–148, 1996.
- [60] H. Elvang and Y.-t. Huang, “Scattering Amplitudes,” 8 2013.
- [61] Z. Bern and A. K. Grant, “Perturbative gravity from QCD amplitudes,” *Phys. Lett. B*, vol. 457, pp. 23–32, 1999.
- [62] H. Kawai, D. C. Lewellen, and S. H. H. Tye, “A Relation Between Tree Amplitudes of Closed and Open Strings,” *Nucl. Phys. B*, vol. 269, pp. 1–23, 1986.
- [63] Z. Bern, J. J. M. Carrasco, and H. Johansson, “New Relations for Gauge-Theory Amplitudes,” *Phys. Rev. D*, vol. 78, p. 085011, 2008.
- [64] Bern, Zvi and Carrasco, John Joseph M. and Johansson, Henrik, “Perturbative Quantum Gravity as a Double Copy of Gauge Theory,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, p. 061602, 2010.
- [65] D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, and S. Ferrara, “Progress Toward a Theory of Supergravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 13, pp. 3214–3218, 1976.
- [66] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity*. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1992.
- [67] D. Z. Freedman and A. Van Proeyen, *Supergravity*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 5 2012.
- [68] R. Britto, F. Cachazo, and B. Feng, “New recursion relations for tree amplitudes of gluons,” *Nucl. Phys. B*, vol. 715, pp. 499–522, 2005.
- [69] R. Britto, F. Cachazo, B. Feng, and E. Witten, “Direct proof of tree-level recursion relation in Yang-Mills theory,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 94, p. 181602, 2005.
- [70] D. Chakraborty, J. L. Díaz-Cruz, J. Reyes Pérez, and P. O. Ruiz, “Symmetries and Interactions of N=1 SUGRA: from Constructive and BCFW to KLT formulations,” 6 2024.
- [71] M. Kraus and J. Reyes Pérez, “Analytic tree-level scattering amplitudes for $pp \rightarrow t\bar{t}h$ production,” *work in progress*, 2026.
- [72] S. Weinberg, *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. Cambridge University Press, 6 2005.
- [73] M. A. Pérez de Leon, “Teoría Cuántica de Campos para representaciones del grupo de Poincaré con Espín continuo,” Master’s thesis, FCFM-BUAP, 2017.
- [74] H. Muller-Kirsten and A. Wiedemann, *Supersymmetry: An introduction with conceptual and calculational details*. World Scientific, 1987.
- [75] R. Gilmore, *Lie groups, physics, and geometry: An introduction for physicists, engineers and chemists*. Cambridge University Press, 2008.
- [76] M. Robinson, *Symmetry and the Standard Model*. Springer, 2011.
- [77] A. M. Steane, “An introduction to spinors,” 12 2013.
- [78] P. Langacker, *The Standard Model and Beyond*. Taylor & Francis, 2017.
- [79] E. Cartan, “Lectures on the theory of spinors. I: Spinors of three-dimensional space,” *Actual. Sci. Ind.*, vol. 643, pp. 1–98, 1938.

- [80] E. P. Wigner, “On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group,” *Annals Math.*, vol. 40, pp. 149–204, 1939.
- [81] Y. S. Kim and E. P. Wigner, “Space-time Geometry of Relativistic Particles,” *J. Math. Phys.*, vol. 31, p. 55, 1990.
- [82] J. K. Lubanski, *Physica*, vol. IX, pp. 310–324, 1942.
- [83] E. Inonu and E. P. Wigner, “On the Contraction of groups and their representations,” *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 39, pp. 510–524, 1953.
- [84] Y. S. Kim and E. P. Wigner, “Cylindrical Group and Massless Particles,” *J. Math. Phys.*, vol. 28, p. 1175, 1987.
- [85] Y. S. Kim, “Symmetries of Massive and Massless Neutrinos,” 9 2016.
- [86] P. A. M. Dirac, “The quantum theory of the electron,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 117, pp. 610–624, 1928.
- [87] E. Majorana, “Teoria simmetrica dell’elettrone e del positrone,” *Nuovo Cim.*, vol. 14, pp. 171–184, 1937.
- [88] B. van der Waerden, “Nachrichten Akad. Wiss. Gottingen,” *Math.-Physik- K1-*, 1929.
- [89] H. Weyl, “Quantum mechanics and group theory,” *Z. Phys.*, vol. 46, p. 1, 1927.
- [90] D. Bailin and A. Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*. Taylor & Francis, 1994.
- [91] D. Tong, “Quantum Field Theory,” university of Cambridge Part III Mathematical Tripos.
- [92] M. Thomson, *Modern particle physics*. New York: Cambridge University Press, 2013.
- [93] F. Quevedo and A. Schachner, “Cambridge Lectures on The Standard Model,” 9 2024.
- [94] D. McMahon, *Quantum field theory demystified: A self-teaching guide*. Mc Graw Hill, 2009.
- [95] S. Mandelstam, “Determination of the pion - nucleon scattering amplitude from dispersion relations and unitarity. General theory,” *Phys. Rev.*, vol. 112, pp. 1344–1360, 1958.
- [96] L. Diaz Cruz, J. Leon Silverio, I. Perez Castro, and J. Reyes Perez, “Little group contraction and the massless limit in quantum field theory,” work in progress.
- [97] G. L. Kane, *Modern elementary particle physics*. Cambridge University Press, 2 2017.
- [98] P. De Causmaecker, R. Gastmans, W. Troost, and T. T. Wu, “Multiple Bremsstrahlung in Gauge Theories at High-Energies. 1. General Formalism for Quantum Electrodynamics,” *Nucl. Phys. B*, vol. 206, pp. 53–60, 1982.
- [99] F. A. Berends, R. Kleiss, P. De Causmaecker, R. Gastmans, and T. T. Wu, “Single Bremsstrahlung Processes in Gauge Theories,” *Phys. Lett. B*, vol. 103, pp. 124–128, 1981.
- [100] K. Hagiwara and D. Zeppenfeld, “Helicity Amplitudes for Heavy Lepton Production in e^+e^- Annihilation,” *Nucl. Phys. B*, vol. 274, pp. 1–32, 1986.
- [101] S. Weinzierl, “Tales of 1001 Gluons,” *Phys. Rept.*, vol. 676, pp. 1–101, 2017.
- [102] H. K. Dreiner, H. E. Haber, and S. P. Martin, “Two-component spinor techniques and Feynman rules for quantum field theory and supersymmetry,” *Phys. Rept.*, vol. 494, pp. 1–196, 2010.

- [103] R. K. Ellis, Z. Kunszt, K. Melnikov, and G. Zanderighi, “One-loop calculations in quantum field theory: from Feynman diagrams to unitarity cuts,” *Phys. Rept.*, vol. 518, pp. 141–250, 2012.
- [104] W. J. Torres Bobadilla *et al.*, “May the four be with you: Novel IR-subtraction methods to tackle NNLO calculations,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 81, no. 3, p. 250, 2021.
- [105] R. Haag, “Quantum field theories with composite particles and asymptotic conditions,” *Phys. Rev.*, vol. 112, pp. 669–673, 1958.
- [106] J. F. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein, *Dynamics of the standard model*. CUP, 2014, vol. 2.
- [107] J. C. Ward, “An Identity in Quantum Electrodynamics,” *Phys. Rev.*, vol. 78, p. 182, 1950.
- [108] C.-N. Yang and R. L. Mills, “Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance,” *Phys. Rev.*, vol. 96, pp. 191–195, 1954.
- [109] D. A. McGady and L. Rodina, “Higher-spin massless S -matrices in four-dimensions,” *Phys. Rev. D*, vol. 90, no. 8, p. 084048, 2014.
- [110] N. Arkani-Hamed, F. Cachazo, and J. Kaplan, “What is the Simplest Quantum Field Theory?” *JHEP*, vol. 09, p. 016, 2010.
- [111] Z. Xu, D.-H. Zhang, and L. Chang, “Helicity Amplitudes for Multiple Bremsstrahlung in Massless Nonabelian Gauge Theories,” *Nucl. Phys. B*, vol. 291, pp. 392–428, 1987.
- [112] J. J. M. Carrasco, “Gauge and Gravity Amplitude Relations,” in *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: Journeys Through the Precision Frontier: Amplitudes for Colliders*. WSP, 2015, pp. 477–557.
- [113] N. E. J. Bjerrum-Bohr and O. T. Engelund, “Gravitino Interactions from Yang-Mills Theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 81, p. 105009, 2010.
- [114] P. West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*. World scientific, 1990.
- [115] D. Bailin and A. Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*. CRC Press, 1994.
- [116] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*. Princeton University Press, 1992.
- [117] D. Freedman, Z and A. Van Proeyen, *Supergravity*. Cambridge University Press, 2012.
- [118] P. Labelle, *Supersymmetry DeMystified: A self-teaching guide*. McGraw Hill, 2010.
- [119] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields: Volume III Supersymmetry*. Cambridge University Press, 2005.
- [120] J. Wess and B. Zumino, “Supergauge Transformations in Four-Dimensions,” *Nucl. Phys. B*, vol. 70, pp. 39–50, 1974.
- [121] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley, 1972.
- [122] M. Napsuciale, M. Kirchbach and S. Rodriguez, “Spin- $\frac{3}{2}$ beyond the Rarita-Schwinger framework,” *Eur. Phys. J. A*, 2006.
- [123] B. R. Holstein, “Graviton Physics,” *Am. J. Phys.*, vol. 74, pp. 1002–1011, 2006.

- [124] T. Moroi, “Effects of the gravitino on the inflationary universe,” Other thesis, Tohoku University, 3 1995.
- [125] J. L. Diaz-Cruz and B. O. Larios, “Very long-lived Stop NLSP in MSSM scenarios with Gravitino LSP,” 1 2019.
- [126] A. K. Das and D. Z. Freedman, “Gauge Quantization for Spin $3/2$ Fields,” *Nucl. Phys. B*, vol. 114, pp. 271–296, 1976.
- [127] Z. Bern, L. J. Dixon, D. C. Dunbar, and D. A. Kosower, “One loop n point gauge theory amplitudes, unitarity and collinear limits,” *Nucl. Phys. B*, vol. 425, pp. 217–260, 1994.
- [128] J. M. Henn and J. C. Plefka, *Scattering Amplitudes in Gauge Theories*. Berlin: Springer, 2014, vol. 883.
- [129] A. Belyaev, N. D. Christensen, and A. Pukhov, “CalcHEP 3.4 for collider physics within and beyond the Standard Model,” *Comput. Phys. Commun.*, vol. 184, pp. 1729–1769, 2013.
- [130] J. M. Campbell and R. K. Ellis, “Top tree amplitudes for higher order calculations,” *JHEP*, vol. 10, p. 125, 2023.
- [131] N. Christensen, “SPINAS: spinor amplitude subroutines for constructive diagram evaluations,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 84, no. 5, p. 520, 2024.
- [132] N. Christensen, B. Field, A. Moore, and S. Pinto, “Two-, three-, and four-body decays in the constructive standard model,” *Phys. Rev. D*, vol. 101, no. 6, p. 065019, 2020.
- [133] P. Benincasa and F. Cachazo, “Consistency Conditions on the S-Matrix of Massless Particles,” 5 2007.
- [134] A. Zee, *Quantum field theory in a nutshell*. Princeton University Press, 2003.
- [135] C. Cheung and G. N. Remmen, “Twofold Symmetries of the Pure Gravity Action,” *JHEP*, vol. 01, p. 104, 2017.
- [136] M. H. Goroff and A. Sagnotti, “The Ultraviolet Behavior of Einstein Gravity,” *Nucl. Phys. B*, vol. 266, pp. 709–736, 1986.
- [137] Goroff, Marc H. and Sagnotti, Augusto, “Quantum gravity at two loops,” *Phys. Lett. B*, vol. 160, pp. 81–86, 1985.
- [138] A. E. M. van de Ven, “Two loop quantum gravity,” *Nucl. Phys. B*, vol. 378, pp. 309–366, 1992.
- [139] Z. Bern, C. Cheung, H.-H. Chi, S. Davies, L. Dixon, and J. Nohle, “Evanescent Effects Can Alter Ultraviolet Divergences in Quantum Gravity without Physical Consequences,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 115, no. 21, p. 211301, 2015.
- [140] Z. Bern, S. Davies, T. Dennen, and Y.-t. Huang, “Absence of Three-Loop Four-Point Divergences in $N=4$ Supergravity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, p. 201301, 2012.
- [141] Bern, Zvi and Davies, Scott and Dennen, Tristan and Huang, Yu-tin, “Ultraviolet Cancellations in Half-Maximal Supergravity as a Consequence of the Double-Copy Structure,” *Phys. Rev. D*, vol. 86, p. 105014, 2012.
- [142] G. Bossard, P. S. Howe, and K. S. Stelle, “Anomalies and divergences in $N=4$ supergravity,” *Phys. Lett. B*, vol. 719, pp. 424–429, 2013.

- [143] Bossard, G. and Howe, P. S. and Stelle, K. S., “Invariants and divergences in half-maximal supergravity theories,” *JHEP*, vol. 07, p. 117, 2013.
- [144] Z. Bern, S. Davies, and T. Dennen, “The Ultraviolet Structure of Half-Maximal Supergravity with Matter Multiplets at Two and Three Loops,” *Phys. Rev. D*, vol. 88, p. 065007, 2013.
- [145] Bern, Zvi and Davies, Scott and Dennen, Tristan, “Enhanced ultraviolet cancellations in $\mathcal{N} = 5$ supergravity at four loops,” *Phys. Rev. D*, vol. 90, no. 10, p. 105011, 2014.
- [146] N. Christensen and B. Field, “Constructive standard model,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, no. 1, p. 016014, 2018.
- [147] C. Wu and S.-H. Zhu, “Massive on-shell recursion relations for n-point amplitudes,” *JHEP*, vol. 06, p. 117, 2022.
- [148] B. Bachu and A. Yelleshpur, “On-Shell Electroweak Sector and the Higgs Mechanism,” *JHEP*, vol. 08, p. 039, 2020.
- [149] R. Balkin, G. Durieux, T. Kitahara, Y. Shadmi, and Y. Weiss, “On-shell Higgsing for EFTs,” *JHEP*, vol. 03, p. 129, 2022.
- [150] G. Durieux and C. S. Machado, “Enumerating higher-dimensional operators with on-shell amplitudes,” *Phys. Rev. D*, vol. 101, no. 9, p. 095021, 2020.
- [151] A. Falkowski and G. Isabella, “Matter coupling in massive gravity,” *JHEP*, vol. 04, p. 014, 2020.
- [152] P. Baratella, C. Fernandez, and A. Pomarol, “Renormalization of Higher-Dimensional Operators from On-shell Amplitudes,” *Nucl. Phys. B*, vol. 959, p. 115155, 2020.
- [153] N. Christensen, H. Diaz-Quiroz, B. Field, J. Hayward, and J. Miles, “Challenges with internal photons in constructive QED,” *Nucl. Phys. B*, vol. 993, p. 116278, 2023.
- [154] T. Cohen, H. Elvang, and M. Kiermaier, “On-shell constructibility of tree amplitudes in general field theories,” *JHEP*, vol. 04, p. 053, 2011.
- [155] C. Cheung, K. Kampf, J. Novotny, C.-H. Shen, and J. Trnka, “On-Shell Recursion Relations for Effective Field Theories,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, no. 4, p. 041601, 2016.
- [156] S. D. Badger, E. W. N. Glover, V. V. Khoze, and P. Svrcek, “Recursion relations for gauge theory amplitudes with massive particles,” *JHEP*, vol. 07, p. 025, 2005.
- [157] S. D. Badger, E. W. N. Glover, and V. V. Khoze, “Recursion relations for gauge theory amplitudes with massive vector bosons and fermions,” *JHEP*, vol. 01, p. 066, 2006.
- [158] K. J. Ozeren and W. J. Stirling, “Scattering amplitudes with massive fermions using BCFW recursion,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 48, pp. 159–168, 2006.
- [159] S. Ballav and A. Manna, “Recursion relations for scattering amplitudes with massive particles,” *JHEP*, vol. 03, p. 295, 2021.
- [160] S. Badger, J. Henn, J. C. Plefka, and S. Zoia, “Scattering Amplitudes in Quantum Field Theory,” *Lect. Notes Phys.*, vol. 1021, p. pp., 2024.
- [161] N. Christensen, “A complete set of 4-point amplitudes in the constructive Standard Model,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 84, no. 6, p. 620, 2024.
- [162] R. Aoude, K. Haddad, and A. Helset, “On-shell heavy particle effective theories,” *JHEP*, vol. 05, p. 051, 2020.

- [163] K. Haddad, “Recursion in the classical limit and the neutron-star Compton amplitude,” *JHEP*, vol. 05, p. 177, 2023.
- [164] W.-M. Chen, M.-Z. Chung, Y.-t. Huang, and J.-W. Kim, “The 2PM Hamiltonian for binary Kerr to quartic in spin,” *JHEP*, vol. 08, p. 148, 2022.
- [165] Y. Ema, T. Gao, W. Ke, Z. Liu, K.-F. Lyu, and I. Mahbub, “Momentum shift and on-shell constructible massive amplitudes,” *Phys. Rev. D*, vol. 110, no. 10, p. 105003, 2024.
- [166] Y.-H. Ni, Y.-N. Wang, C. Wu, and J.-H. Yu, “Massive Helicity-Chirality Spinor Formalism from Massless Amplitudes with On-shell Mass Insertion,” 1 2025.
- [167] H. van Dam and M. J. G. Veltman, “Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields,” *Nucl. Phys. B*, vol. 22, pp. 397–411, 1970.
- [168] V. I. Zakharov, “Linearized gravitation theory and the graviton mass,” *JETP Lett.*, vol. 12, p. 312, 1970.
- [169] J. L. Diaz Cruz, P. Ortega-Ruiz, and J. Reyes Pérez, “Aspectos básicos de Supergravedad $N=1$ ($D=4$),” *Rev. Mex. Fis. E*, vol. 21, no. 2, p. 020216, 2024.
- [170] M. Fierz and W. Pauli, “On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 173, pp. 211–232, 1939.
- [171] W. Rarita and J. Schwinger, “On a theory of particles with half integral spin,” *Phys. Rev.*, vol. 60, p. 61, 1941.
- [172] M. Kirchbach and D. V. Ahluwalia, “Space-time structure of massive gravitino,” *Phys. Lett. B*, vol. 529, pp. 124–131, 2002.
- [173] M. Napsuciale, M. Kirchbach, and S. Rodriguez, “Spin $3/2$ Beyond the Rarita-Schwinger Framework,” *Eur. Phys. J. A*, vol. 29, pp. 289–306, 2006.
- [174] D. Tong, “Dynamics and Relativity,” university of Cambridge Part IA Mathematical Tripos.
- [175] S. Pasterski, “Lectures on celestial amplitudes,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 81, no. 12, p. 1062, 2021.
- [176] S. Weinzierl, *Feynman Integrals. A Comprehensive Treatment for Students and Researchers*, ser. UNITEXT for Physics. Springer, 2022.
- [177] V. A. Smirnov, “Evaluating Feynman integrals,” *Springer Tracts Mod. Phys.*, vol. 211, pp. 1–244, 2004.
- [178] A. G. Grozin, “Integration by parts: An Introduction,” *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 26, pp. 2807–2854, 2011.
- [179] J. C. Collins, *Renormalization : An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*, ser. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1984, vol. 26.
- [180] N. Beisert *et al.*, “Review of AdS/CFT Integrability: An Overview,” *Lett. Math. Phys.*, vol. 99, pp. 3–32, 2012.
- [181] G. Mahlon, “Multi - gluon helicity amplitudes involving a quark loop,” *Phys. Rev. D*, vol. 49, pp. 4438–4453, 1994.
- [182] Z. Bern, G. Chalmers, L. J. Dixon, and D. A. Kosower, “One loop N gluon amplitudes with maximal helicity violation via collinear limits,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 72, pp. 2134–2137, 1994.

- [183] Z. Bern, L. J. Dixon, and D. A. Kosower, “Dimensionally regulated pentagon integrals,” *Nucl. Phys. B*, vol. 412, pp. 751–816, 1994.
- [184] Z. Bern, L. J. Dixon, D. C. Dunbar, and D. A. Kosower, “Fusing gauge theory tree amplitudes into loop amplitudes,” *Nucl. Phys. B*, vol. 435, pp. 59–101, 1995.
- [185] J. J. M. Carrasco and H. Johansson, “Generic multiloop methods and application to N=4 super-Yang-Mills,” *J. Phys. A*, vol. 44, p. 454004, 2011.
- [186] H. Ita, “Susy Theories and QCD: Numerical Approaches,” *J. Phys. A*, vol. 44, p. 454005, 2011.
- [187] R. Britto, “Loop Amplitudes in Gauge Theories: Modern Analytic Approaches,” *J. Phys. A*, vol. 44, p. 454006, 2011.
- [188] W. L. van Neerven and J. A. M. Vermaseren, “Large Loop Integrals,” *Phys. Lett. B*, vol. 137, pp. 241–244, 1984.
- [189] Z. Bern, L. J. Dixon, and D. A. Kosower, “Dimensionally regulated one loop integrals,” *Phys. Lett. B*, vol. 302, pp. 299–308, 1993, [Erratum: *Phys.Lett.B* 318, 649 (1993)].
- [190] L. M. Brown and R. P. Feynman, “Radiative corrections to Compton scattering,” *Phys. Rev.*, vol. 85, pp. 231–244, 1952.
- [191] G. ’t Hooft and M. J. G. Veltman, “Scalar One Loop Integrals,” *Nucl. Phys. B*, vol. 153, pp. 365–401, 1979.
- [192] G. Passarino and M. J. G. Veltman, “One Loop Corrections for $e^+ e^-$ Annihilation Into $\mu^+ \mu^-$ in the Weinberg Model,” *Nucl. Phys. B*, vol. 160, pp. 151–207, 1979.
- [193] H. Johansson, D. A. Kosower, and K. J. Larsen, “An Overview of Maximal Unitarity at Two Loops,” *PoS*, vol. LL2012, p. 066, 2012.
- [194] S. Caron-Huot, “Loops and trees,” *JHEP*, vol. 05, p. 080, 2011.
- [195] E. W. Nigel Glover and C. Williams, “One-Loop Gluonic Amplitudes from Single Unitarity Cuts,” *JHEP*, vol. 12, p. 067, 2008.
- [196] I. Bierenbaum, S. Catani, P. Draggiotis, and G. Rodrigo, “A Tree-Loop Duality Relation at Two Loops and Beyond,” *JHEP*, vol. 10, p. 073, 2010.
- [197] H. Elvang, D. Z. Freedman, and M. Kiermaier, “Integrands for QCD rational terms and N=4 SYM from massive CSW rules,” *JHEP*, vol. 06, p. 015, 2012.
- [198] N. Arkani-Hamed, J. L. Bourjaily, F. Cachazo, S. Caron-Huot, and J. Trnka, “The All-Loop Integrand For Scattering Amplitudes in Planar N=4 SYM,” *JHEP*, vol. 01, p. 041, 2011.
- [199] R. H. Boels, “On BCFW shifts of integrands and integrals,” *JHEP*, vol. 11, p. 113, 2010.