

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA



Grafos Métricos: Problemas discretos de Dirichlet y Neumann

Tesis presentada para obtener el título de:

Licenciatura en Matemáticas

Presenta:

Fernanda López Montes

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Director de tesis: Dr. Carlos Guillén Galván

Junio 2018

Dedicada a mis padres y hermanos con mucho cariño . . .

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres Fernando y Teresa por todo el apoyo que me brindaron para poder culminar este trabajo. Por todas sus enseñanzas que me han servido a mejorar mi formación académica. A mis hermanos Karla, Emiliano y Jorge que son parte importante en mi vida, ya que sus consejos y ánimos fueron de gran ayuda durante la realización de la tesis. Agradezco a Dios por permitirme llegar a esta etapa de mi vida.

A todos mis amigos y amigas, con los que he compartido buenos momentos de mi vida, por confiar en mí y brindarme su apoyo. También a Jesús por sus consejos que ayudaron a mejorar el trabajo y por todo su apoyo incondicional.

A mi director de tesis, Dr. Carlos Guillén Galván, por ayudarme a la elección y desarrollo del tema, por el tiempo dedicado a la elaboración y revisión, sin su dirección esto no habría sido posible.

A mis sinodales: Dr. Gabriel Kantún Montiel, Dr. Agustín Contreras Carreto y M.C. Paulino Antonio Gómez Salgado, por sus valiosas observaciones y correcciones al trabajo.

Introducción

El inicio de la teoría de grafos (1736) fue a través de un artículo publicado por Leonhard Euler; el trabajo surgió de un problema conocido como el Problema de los puentes de Königsberg, el cual consistía en encontrar un camino cruzando los 7 puentes exactamente una vez.

Esta teoría ha tenido interés considerable dentro de la comunidad científica, debido al enorme poder de síntesis que tiene el concepto de grafo cuando un problema es modelado gráficamente. Actualmente la teoría de grafos tiene un desarrollo teórico propio y otro que gira en torno de las aplicaciones, las cuales pueden encontrarse en casi todas las áreas del conocimiento [3].

El concepto más primitivo de un grafo se presenta como un par de conjuntos (V, E) donde un conjunto representa los nodos del grafo (conjunto V) y el otro representa las aristas del grafo (conjunto E) que se forma a partir de subconjuntos de V de cardinalidad no mayor a 2 [2, 14, 15].

El alcance de los modelos a través del concepto de grafo aumenta notablemente cuando consideramos grafos métricos, estos son grafos con aristas pesadas o en otros términos un grafo junto con una función de valores reales definida sobre el conjunto de aristas.

El objetivo de este trabajo es introducir las propiedades y conceptos fundamentales de los grafos métricos y presentar como una aplicación la solución de los problemas discretos de Dirichlet y Neumann, para esto es necesario definir en el caso discreto algunos conceptos como: la derivación de grafos, el operador discreto de Laplace, y las funciones armónicas discretas de donde se obtienen criterios de máximos y mínimos análogos al caso continuo [7].

El contenido de la tesis es el siguiente. En el primer capítulo se establecen los conceptos básicos de la teoría de grafos, así como la manera algebraica de representar un grafo que es a través de matrices, junto con la notación necesaria y algunos ejemplos, que son de utilidad para el desarrollo del trabajo.

En el segundo capítulo se introduce la teoría de representaciones de grafos sobre una variedad, es decir, cómo las aristas del grafo se mapean en curvas sobre un espacio topológico. También aquí presentamos la planaridad de un grafo mediante los mapas y automorfismos, y al finalizar el capítulo se define el espacio

vectorial, $C^0(G)$, de las funciones reales sobre los vértices del grafo y el concepto de derivación de grafos.

En el tercer capítulo se establece la teoría de grafos métricos, la matriz de adyacencia y valencia métrica, el concepto de derivadas direccionales de una función con valores reales definida sobre los vértices de un grafo, también se define el operador discreto de Laplace Δ_2 , lo que nos permitirá definir el concepto de funciones armónicas discretas.

Utilizando algunos conceptos de álgebra lineal, se demuestran una serie de propiedades, que nos permitirán enunciar el principio de máximo y mínimo para funciones reales que no son localmente constantes sobre un conjunto de vértices.

En el cuarto capítulo, se presentan y resuelven los problemas discretos de Dirichlet y Neumann. Se enuncia y se demuestra un resultado de gran importancia para la resolución de dichos problemas (Lema 4.1), además se exponen algunos ejemplos que nos ayudarán a visualizar de mejor manera las pruebas. Finalmente se presentan las conclusiones y propuestas para trabajo futuro.

Índice general

Agradecimientos	v
Introducción	vi
Lista de Figuras	xi
Símbolos	xiii
1. Preliminares	1
1.1. Grafos	1
2. Representaciones de Grafos	11
2.1. Mapas y automorfismos	13
2.2. Matriz de adyacencia de un grafo dirigido	15
2.3. Funciones	16
2.4. Derivación de grafos	20
2.5. Campo de vectores	21
3. Grafos Métricos	25
3.1. Derivadas direccionales de funciones	29
3.2. Operador discreto de Laplace	30
3.3. Funciones armónicas discretas	32
3.4. Derivadas inducidas por campos de vectores	43
3.5. Principio de máximo y mínimo	44
3.6. Deducción de la ecuación del calor en una dimensión	47
4. Los problemas discretos de Dirichlet y Neumann	53
Conclusiones	65
Bibliografía	67

Índice de figuras

1.1.	Grafo simple $G = (V, E)$.	2
1.2.	Multigrafo.	3
1.3.	Grafo dirigido $G = (V, E)$.	3
1.4.	Grafo bipartito completo.	4
1.5.	G_3 es subgrafo de G_1 y también de G_2 .	4
1.6.	Grafo plano y no plano.	5
1.7.	El grafo G_1 es conexo, y G_2 no lo es.	6
1.8.	Ejemplo de circuito, circuito Euleriano y camino Euleriano.	7
1.9.	El grafo G es isomorfo al grafo G' .	7
1.10.	(a) caminos de longitud k de v_i a v_j , (b) caminos de longitud k de v_i a v_l .	9
2.1.	$K_{3,3}$ dibujado en S_1 .	12
2.2.	Circunferencias tangentes de radio menores que $\frac{1}{4}$.	12
2.3.	Aristas en forma de semicírculos en el semiplano P_n .	13
2.4.	Representación de un grafo conexo en una superficie orientada.	14
2.5.	El grafo G_2 es una subdivisión de G_1 y el grafo G_3 es una subdivisión de G_2 .	14
2.6.	G_2 grafo 2-coloreable.	16
2.7.	Grafos bipartitos.	16
2.8.	Campo de vectores.	22
2.9.	Órbita de c bajo X del grafo G .	23
2.10.	Órbitas diferentes que comparten el vértice 1.	23
3.1.	Grafo métrico G .	25
3.2.	Grafo conexo G .	26
3.3.	Automorfismo de grafo métrico.	27
3.4.	Grafo dirigido (G', d) .	41
3.5.	Isotermas	50
4.1.	Ejemplo problema discreto de Dirichlet.	57
4.2.	Ejemplo problema discreto de Neumann.	60

Símbolos

\mathbb{Z}	Conjunto de los números enteros.
\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales.
\mathbb{Q}	Conjunto de los números racionales.
\mathbb{I}	Conjunto de los números irracionales.
\mathbb{R}	Conjunto de los números reales.
G	Grafo.
V	Conjunto de vértices.
E	Conjunto de aristas.
P	Camino.
$N(v)$	Conjunto de vecinos de un vértice.
$N[v]$	$N(v) \cup \{v\}$.
K_n	Grafo completo de n vértices.
$ G $	Número de vértices de G .
$\ G\ $	Número de aristas de G .
$d(v)$	Grado de un vértice.
P_k	Camino de longitud k de G .
C_k	Ciclo de longitud k .
$G \leq H$	G es subgrafo de H .
$G \simeq G'$	G es isomorfo a G' .
$\Xi_{\mathcal{R}}(G)$	Álgebra real de derivaciones sobre G .
(G, d)	Grafo métrico.
$C^0(G)$	Espacio vectorial de todas las funciones reales definidas sobre V .
Δ_2	Operador discreto de Laplace
J_2	Matriz asociada del operador discreto de Laplace.
A_k	Matriz de adyacencia métrica de grado k de (G, d) .
B_k	Matriz de valencia métrica de grado k de (G, d) .

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo iniciamos con los conceptos básicos de la teoría de grafos que son necesarios para el desarrollo de la tesis. Para la notación y conceptos presentados a continuación, nos basamos principalmente en [2, 12].

1.1. Grafos

Con los símbolos \mathbb{Z} , \mathbb{N} , \mathbb{Q} , \mathbb{I} y \mathbb{R} denotamos los conjuntos de los números enteros, números enteros no negativos, números racionales, números irracionales y números reales respectivamente. Con $[A]^k$ denotamos el conjunto de todos los subconjuntos de A con k elementos, por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$, entonces $[A]^0 = \{\emptyset\}$, $[A]^1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, $[A]^2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$, $[A]^3 = \{A\}$ y $[A]^k = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 2, 3\}$.

Definición 1.1. Un *grafo simple* G es un par $G = (V, E)$ donde los elementos de V son llamados vértices o nodos del grafo y los elementos de E son llamados aristas o líneas del grafo, tal que $E \subseteq [V]^2$.

Es común representar un grafo dibujando un punto para cada vértice y unir dos de ellos por una línea si los dos vértices correspondientes forman una arista. Las aristas no necesariamente tienen que ser líneas rectas, pueden ser arcos o segmentos curvos.

Ejemplo 1.1. Sea G el grafo de la Figura 1.1, el par $G = (V, E)$ viene dado por los conjuntos $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$.

Dado un grafo G , su conjunto de vértices se denota por $V(G)$ y su conjunto de aristas como $E(G)$. Una arista $\{v_1, v_2\}$ usualmente es escrita como v_1v_2 .

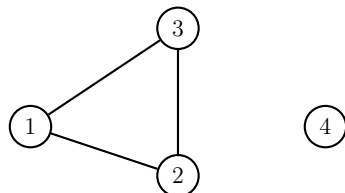


Figura 1.1: Grafo simple $G = (V, E)$.

Definición 1.2. Sea G un grafo; dos vértices v_1, v_2 en $V(G)$ son *adyacentes* o *vecinos*, si v_1v_2 es una arista de $E(G)$ y dos aristas $e \neq f$ son *adyacentes* si tienen un vértice en común.

El conjunto de vecinos de un vértice v en $V(G)$ es denotado por $N(v)$, donde $N(v) = \{x \in V(G) | vx \in E(G)\}$. Si todas las parejas de vértices en $V(G)$ son adyacentes, entonces G es *completo*. Un grafo completo de n vértices se denota por K_n .

El *orden* de un grafo G es su número de vértices, denotado por $|G|$; y su número de aristas es denotado por $||G||$. Para el grafo vacío (\emptyset, \emptyset) escribiremos simplemente \emptyset . Un grafo de orden 0 ó 1 es llamado trivial.

Definición 1.3. Un Multigrafo es una terna $G = (V, E, f)$, donde V es un conjunto de vértices, E un conjunto de aristas y $f : E \rightarrow [V]^2 \cup [V]$ una función.

Ejemplo 1.2. Considérese G un multigrafo como se muestra en la Figura 1.2, con $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$, donde $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_1v_2$, $e_3 = v_1v_3$, $e_4 = v_1v_3$, $e_5 = v_2v_3$, $e_6 = v_2v_3$, $e_7 = v_1v_5$, $e_8 = v_2v_5$, $e_9 = v_5v_4$, $e_{10} = v_2v_4$, $e_{11} = v_3v_4$, $e_{12} = v_3v_3$.

Note que un multigrafo es un grafo que admite aristas múltiples, es decir, aristas que conectan los mismos vértices. Un vértice v es incidente con una arista e si $v \in e$ implica que e es una arista en v . Por ejemplo, si $e = vw \in E$ decimos que los vértices v y w son incidentes con la arista e y los vértices v y w son llamados sus *extremos*.

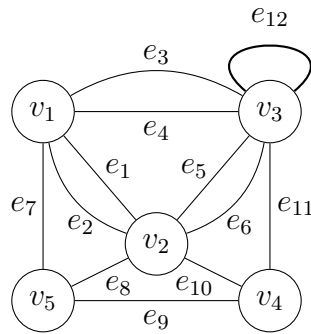


Figura 1.2: Multigrafo.

Definición 1.4. Una arista que conecta un vértice consigo mismo es llamado *lazo*.

Note que todo vértice $v \in V(G)$ es vecino de si mismo si y solo si existe un lazo en v , a éste hecho lo denotamos por $N[v]$, donde $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. En la Figura 1.2 tenemos un ejemplo de lazo en el vértice v_3 .

Definición 1.5. Un grafo $G = (V, E)$ tal que V es el conjunto de vértices y $E \subseteq V \times V$ es el conjunto de aristas es llamado *grafo dirigido*.

Podemos decir que un grafo dirigido es aquel en el cual sus aristas tienen un sentido definido, un ejemplo de un grafo dirigido se muestra en la Figura 1.3, donde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ con $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_1, v_3)$, $e_3 = (v_4, v_1)$, $e_4 = (v_4, v_3)$, $e_5 = (v_4, v_4)$, así la arista e_1 tiene un sentido dirigido desde v_1 hasta v_2 .

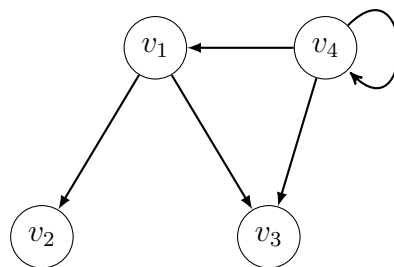


Figura 1.3: Grafo dirigido $G = (V, E)$.

Definición 1.6. Sea $r \geq 2$ un entero. Un grafo $G = (V, E)$ es llamado *r-partito* si V admite una partición en r clases tal que cada arista tiene sus extremos en diferentes clases, es decir, dos vértices en la misma clase no son adyacentes.

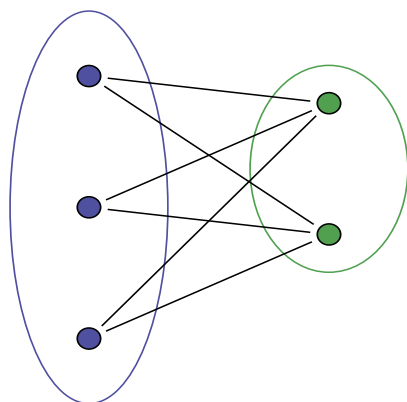


Figura 1.4: Grafo bipartito completo.

Un grafo G que es “2-partito”, por lo general se le llama *bipartito*. Un grafo r -partito en el cual cada par de vértices en diferentes clases son adyacentes se llama *completo*. En la figura 1.4 tenemos un ejemplo de un bipartito completo.

Definición 1.7. Un grafo G es llamado *plano* si se puede dibujar en el plano de tal manera que cualquier par de aristas a lo más se intersectan en los vértices. Si G no tiene tal representación, entonces G es llamado *no plano*.

En la Figura 1.6, se muestra un ejemplo de grafo plano y no plano.

Definición 1.8. Un grafo $G = (V, E)$ es un *subgrafo* del grafo $G' = (V', E')$ si y solo si $V \subseteq V'$ y $E \subseteq E'$, y se denota por $G \leq G'$.

Ejemplo 1.3. Sean G_1 , G_2 y G_3 grafos, como en la Figura 1.5. Afirmamos que G_3 es subgrafo de G_2 , ya que $V(G_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subseteq \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = V'(G_2)$ y $E(G_3) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1\} \subseteq \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4, v_2v_4, v_4v_5, v_2v_5, v_5v_1\} = E'(G_2)$. Observe que G_3 también es subgrafo de G_1 .

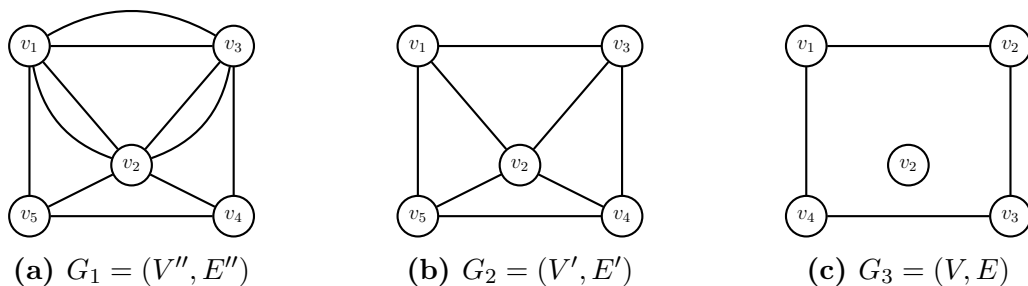


Figura 1.5: G_3 es subgrafo de G_1 y también de G_2 .

Definición 1.9. Sea $G = (V, E)$ un grafo, y $v \in V$ un vértice, decimos que el número de aristas incidentes con v es el *grado* del vértice, denotado por $d(v)$. Un vértice de grado 0 se llama *aislado*.

Definición 1.10. Considere un grafo $G = (V, E)$. Un *camino* P en G que va de los vértice w_0 a w_k es de la forma:

$$P = w_0w_1 \cup w_1w_2 \cup \cdots \cup w_{k-2}w_{k-1} \cup w_{k-1}w_k.$$

donde $w_0, w_1, \dots, w_k \in V$ y $w_0w_1, w_1w_2, \dots, w_{k-2}w_{k-1}, w_{k-1}w_k \in E$.

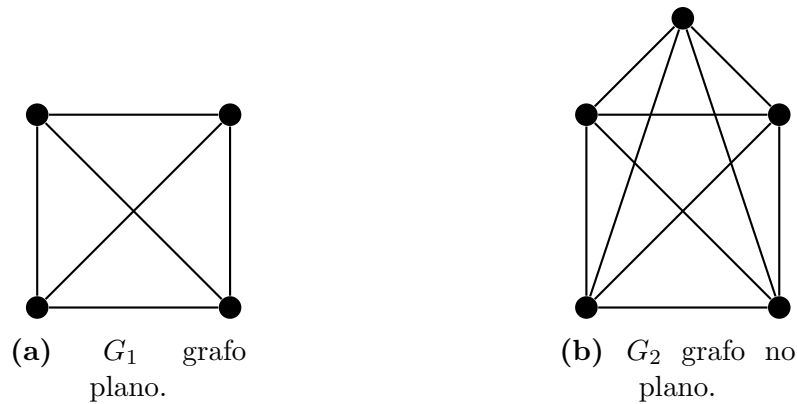


Figura 1.6: Grafo plano y no plano.

Los vértices w_0 y w_k están ligados por P y son llamados sus extremos, los vértices w_1, \dots, w_{k-1} son los vértices interiores de P . Si el camino inicia y termina en el mismo vértice, es decir $w_0 = w_k$ decimos que es un *camino cerrado*. El número de aristas de un camino es su *longitud*, y el camino de longitud k es denotado por P_k . Notar que k puede ser cero, por tanto, $P_0 = K_1$. En ocasiones, para denotar un camino P daremos únicamente la secuencia de sus vértices, es decir, $P = v_0v_1, \dots, v_k$ y decimos que P es un camino desde v_0 a v_k , o bien, para $0 \leq i \leq j \leq k$ escribiremos la notación $v_iPv_j := v_i, \dots, v_j$. En el caso de un multigrafo un camino es denotado de la siguiente forma $P = v_0e_1v_1e_2v_2 \cdots v_{n-1}e_nv_n$.

Definición 1.11. Un *camino simple* es aquel que no tiene tres de sus aristas diferentes compartiendo un mismo vértice, es decir, no repite vértices en su trayecto.

Ejemplo 1.4. En la Figura 1.2, en el multigrafo G definimos un posible camino $P = v_1e_3v_3e_4v_1e_7v_5$ que va del vértice v_1 al v_5 de longitud 3. Notemos que P no es un camino simple ya que el vértice v_1 pertenece a 3 aristas diferentes.

Definición 1.12. Sea G un grafo, un *ciclo* en G es un camino cerrado y simple. Un *ciclo Hamiltoniano* de G es un ciclo en G que contiene todos los vértices de G .

La *longitud* de un ciclo es el número de aristas (o vértices) y el ciclo de longitud k es llamado k - *ciclo*, denotado por C_k .

Definición 1.13. Un grafo G no vacío es *conexo* si cualquier par de vértices están unidos por al menos un camino en G .

Un grafo que no es conexo se dice que es *disconexo*, éste se forma por varias particiones conexas, a dichas particiones se les denomina *componentes conexas*.

Ejemplo 1.5. En la Figura 1.7 claramente el grafo G_1 es conexo ya que para cualquier par de vértices que tomemos existe un camino que los une y el grafo G_2 es disconexo con dos componentes conexas.

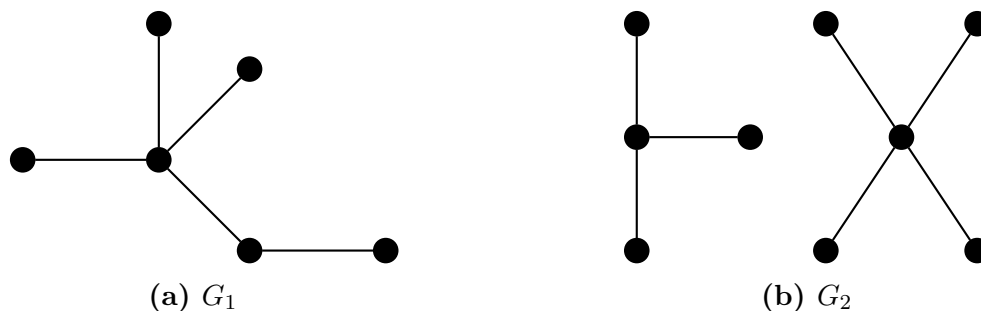


Figura 1.7: El grafo G_1 es conexo, y G_2 no lo es.

Definición 1.14. Un *circuito* es un camino cerrado que repite vértices pero no repite aristas. Un circuito es llamado *Euleriano* si no repite aristas y además contiene a todas las del grafo.

Definición 1.15. Un *camino Euleriano* es un camino que contiene a todas sus aristas sin repetición.

En la Figura 1.8 vemos que en el grafo G_1 se tiene al menos un camino cerrado $P = v_5v_4v_2v_3v_4v_6v_5$, el cual es un ejemplo de circuito. El grafo G_2 es un ejemplo de circuito Euleriano; ya que contiene camino cerrado $P = v_1v_2v_3v_4v_2v_5v_3v_6v_4v_1$ y este tiene todas sus aristas sin repetición alguna. El grafo G_3 es un ejemplo de camino Euleriano.

Definición 1.16. Un *árbol* es un grafo conexo y acíclico. La unión disjunta de ellos se denomina *bosque*.

Un bosque puede ser visto como un grafo cuyas componentes son árboles, en la Figura 1.7 podemos ver que el grafo G_1 es un árbol y G_2 es un bosque. En un árbol los vértices de grado 1 son sus *hojas*.

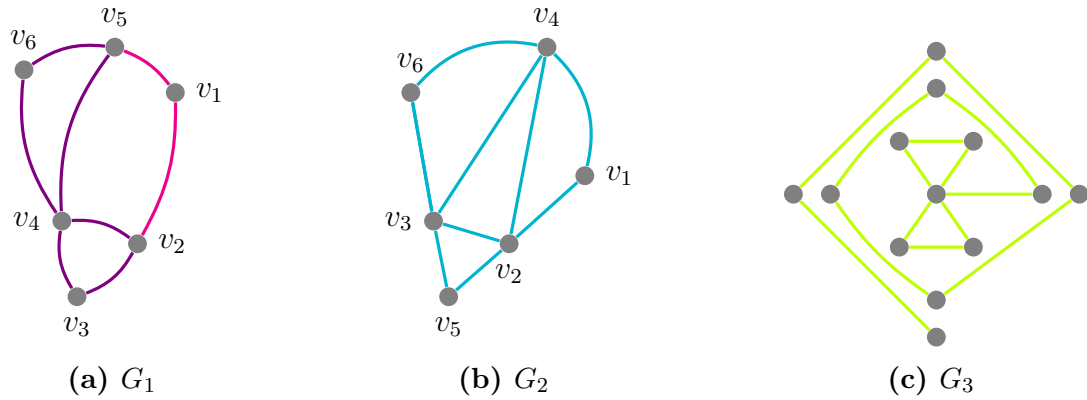


Figura 1.8: Ejemplo de circuito, circuito Euleriano y camino Euleriano.

Definición 1.17. Sea $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos. Decimos que una función biyectiva $f : V \rightarrow V'$ es un *isomorfismo* de grafos si cumple que para cualquier par de vértices $v_1, v_2 \in V$, tales que $v_1v_2 \in E$ entonces $f(v_1)f(v_2) \in E'$.

Ejemplo 1.6. Sean los siguientes grafos $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ con $V = \{a, b, c, d\}$, $V' = \{a', b', c', d'\}$. La función $f : V \rightarrow V'$ definida por $f(a) = c'$, $f(b) = b'$, $f(c) = d'$, $f(d) = a'$ es un isomorfismo de G en G' . En efecto,

$ab \in E \Rightarrow f(a)f(b) = c'b' \in E'$, $bd \in E \Rightarrow f(b)f(d) = b'a' \in E'$, $dc \in E \Rightarrow f(d)f(c) = a'd' \in E'$, $ca \in E \Rightarrow f(c)f(a) = d'c' \in E'$.



Figura 1.9: El grafo G es isomorfo al grafo G' .

Si tal función existe decimos que G y G' son *grafos isomorfos*, este hecho es denotado por $G \simeq G'$. Si f es un isomorfismo del grafo G , en sí mismo ($G = G'$) es decir, si $f : G \rightarrow G$ es un isomorfismo, entonces f se llama *automorfismo*.

A continuación, veremos como se representa un grafo G mediante matrices.

Definición 1.18. Sea G un grafo simple, donde $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. La *matriz de adyacencia* $A = (a_{ij})_{n \times n}$, está definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{si } v_i v_j \notin E(G). \end{cases}$$

Ejemplo 1.7. La matriz de adyacencia del grafo G_2 de la Figura 1.9 (b) es la siguiente:

$$A = \begin{matrix} & a' & b' & c' & d' \\ \begin{matrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Definición 1.19. Sea G un grafo simple, donde $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. La matriz de valencia $B = (b_{ij})_{n \times n}$, está definida por

$$b_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{ik} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

donde (a_{ij}) es la matriz de adyacencia.

Observación 1.1. Podemos notar de la definición que la matriz de valencia es una matriz diagonal, la cual se obtiene sumando los elementos de cada fila de la matriz de adyacencia.

Ejemplo 1.8. La matriz de valencia del grafo G_2 de la Figura 1.9 (b) es la siguiente:

$$B = \begin{matrix} & a' & b' & c' & d' \\ \begin{matrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

El siguiente teorema establece que es posible contar el número de caminos entre cualquier par de vértices en un grafo a través de las potencias de su matriz de adyacencia.

Teorema 1.1. Sea G un grafo simple finito, $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Si A es la matriz de adyacencia de G , entonces $A^k = (C_{ij})_{n \times n}$, con $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$, donde C_{ij} es el número de caminos de longitud k que conectan a v_i con v_j .

Demostración. La demostración se hará por inducción sobre k . Para $k = 1$ se tiene que $A^1 = A$, esto se cumple por la definición de matriz de adyacencia ya que se tienen caminos de longitud 1 del vértice v_i al vértice v_j . Ahora, supongamos que la afirmación se cumple para $k - 1$ y demostremos para k . En efecto, note que $A^k = A^{k-1}A$ y el coeficiente c_{ij} de A^k se obtiene de la siguiente forma

$$\sum_{l=1}^n b_{il}a_{lj},$$

donde b_{ij} es el coeficiente de la matriz A^{k-1} y a_{ij} es el coeficiente de la matriz A . Por hipótesis, se tienen b_{ij} caminos de longitud $k - 1$ conectando a v_i con v_l . Ahora, si $a_{lj} = 0$, entonces no hay arista que conecte a v_l con v_j , por lo que hay $b_{il}a_{lj} = 0$ caminos de longitud k de v_i a v_j , donde la última arista es de v_l a v_j . Si $a_{lj} = 1$, entonces hay una arista que conecta a v_l con v_j . Como hay b_{ij} caminos de longitud $k - 1$ de v_i a v_l , entonces hay $b_{il}a_{lj} = b_{il}$ caminos de longitud k de v_i a v_j donde la última arista es $v_l v_j$. Al sumar sobre l se cuentan todos los caminos de longitud k del vértice v_i al vértice v_j . Entonces el elemento c_{ij} en A^k representa el número de caminos de longitud k del vértice v_i al vértice v_j .

□

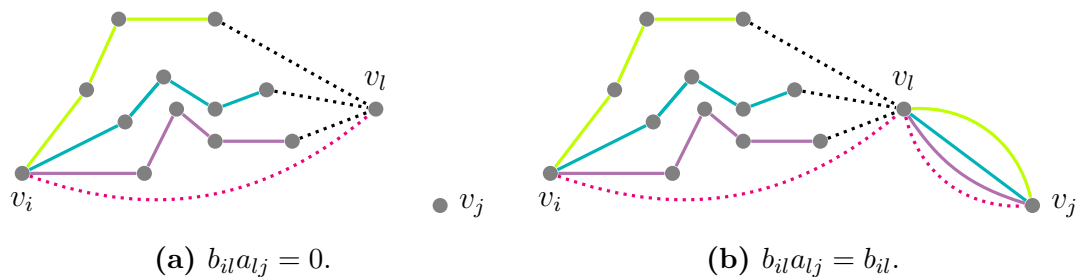


Figura 1.10: (a) caminos de longitud k de v_i a v_j ,
 (b) caminos de longitud k de v_i a v_l .

Capítulo 2

Representaciones de Grafos

A menudo es conveniente representar un grafo como un subconjunto de una variedad o espacio topológico. En esta sección presentamos gráficamente la manera usual de representación de grafos en la topología, también se define el espacio vectorial $C^0(G)$ de las funciones reales sobre $V(G)$.

Definición 2.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo y (X, τ) un espacio topológico. Una representación de G en (X, τ) consiste de

1. Un conjunto $W \subseteq X$.
2. Una función biyectiva $h : V \rightarrow W$.
3. Para cada arista $e = vw \in E$ de una función continua

$$\alpha_e : [0, 1] \rightarrow X,$$

tal que $\alpha_e(0) = h(v)$, $\alpha_e(1) = h(w)$, $\alpha_e : (0, 1) \rightarrow X$ inyectiva y $\alpha_e((0, 1)) \cap W = \emptyset$.

4. Si $e_1, e_2 \in E$ y $e_1 \neq e_2$, entonces $\alpha_{e_1}((0, 1)) \cap \alpha_{e_2}((0, 1)) = \emptyset$, esto es las aristas del grafo se mapean en curvas sobre el espacio topológico que sólo se pueden intersectar en las imágenes de los vértices. Si tenemos una arista repetida (multigrafo), entonces debemos considerarlas como diferentes aristas para la asignación de los caminos continuos.

En la Figura 2.1 se muestra la representación del grafo completo $K_{3,3}$ sobre el espacio topológico definido por un toro. La imagen de la arista que atraviesa por el “agujero” del toro se ilustra por comodidad fuera del espacio topológico.

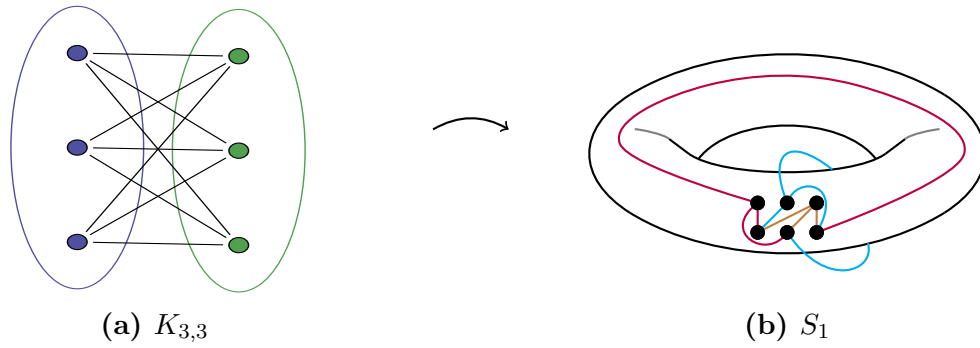


Figura 2.1: $K_{3,3}$ dibujado en S_1 .

El siguiente Teorema tiene como corolario que todo grafo finito puede ser representado en \mathbb{R}^3 .

Teorema 2.1. [7] *Todo grafo con una cantidad numerable de vértices y una cantidad numerable de aristas puede ser representado en \mathbb{R}^3 .*

Demostración. Basta demostrar el teorema para un grafo donde cualesquiera dos vértices están unidos por una arista y cualesquiera de sus vértices tiene una cantidad numerable de lazos. Todos los lazos del grafo pueden ser representados mediante un conjunto numerable de circunferencias tangentes de radios menores que $\frac{1}{4}$ que están contenidas en el semiplano inferior XZ , $H^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : y = 0, z \leq 0\}$ como se ve en la Figura 2.2.

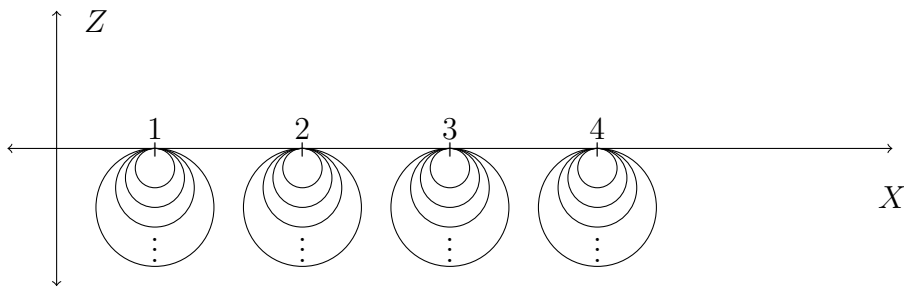


Figura 2.2: Circunferencias tangentes de radio menores que $\frac{1}{4}$.

Los vértices del grafo pueden ser representados en el eje X mediante los puntos $(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)$. Para cada vértice n del grafo se consideran aristas en forma de semicírculos contenidos en el semiplano

$$P_n = \{(x, y, z) : z = \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} y \wedge z \geq 0\},$$

que se conectan con todo vértice de la forma $n + k$, para $k \in \mathbb{N}$, ver la Figura 2.3.

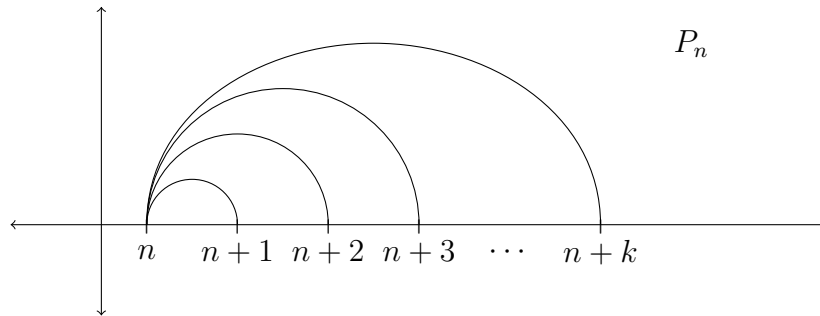


Figura 2.3: Aristas en forma de semicírculos en el semiplano P_n .

□

2.1. Mapas y automorfismos

Los mapas y automorfismos están relacionados con la posibilidad de representar un grafo en \mathbb{R}^2 , esto es equivalente a determinar si un grafo es plano. La planaridad de un grafo es un tema importante dentro de la teoría de grafos debido a sus múltiples aplicaciones como el coloreo de mapas y circuitos.

Recordar que una superficie en el espacio \mathbb{R}^3 con un sistema coordenado ortogonal es un objeto geométrico de dos dimensiones.

Definición 2.2. Una *superficie orientada* es una superficie con dos lados; uno de ellos se llama *lado exterior* o *positivo* y el otro se llama *lado interior* o *negativo*. En cada punto $(x, y, z) \in S$ hay dos vectores normales unitarios n_1 y n_2 , donde $n_1 = -n_2$. Cada una de estas dos normales puede asociarse con un lado de la superficie.

Definición 2.3. Sea Σ una superficie orientada y Γ una representación de un grafo conexo en Σ . Un grafo $\Gamma \subseteq \Sigma$ es un mapa en Σ si y solo si

1. Γ es localmente finito (Si $K \subseteq \Sigma$ es compacto entonces K corta a Γ en un número finito de aristas y contiene un número finito de vértices (ver Figura 2.4(a))).
2. Toda componente conexa de $\Sigma \setminus \Gamma$ es simplemente conexa y su borde consiste de un número finito de aristas del grafo Γ (ver Figura 2.4(b)).

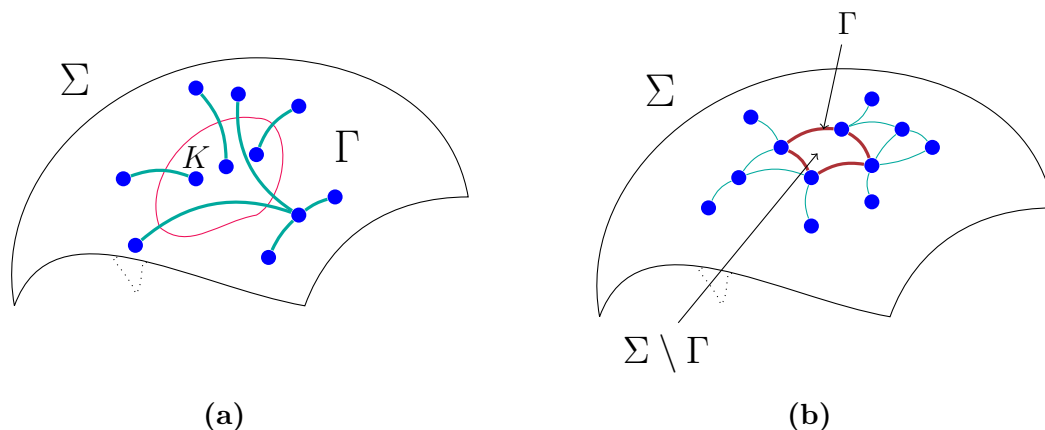


Figura 2.4: Representación de un grafo conexo en una superficie orientada.

Definición 2.4. Un automorfismo del mapa Γ es la restricción de un homeomorfismo de Σ . Esto es, si $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ es un homeomorfismo entonces $f|_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow \Sigma$ es un automorfismo del mapa Γ .

Un automorfismo de mapa preserva la orientación si el homeomorfismo preserva la orientación de Σ . En caso contrario, decimos que revierte la orientación.

Definición 2.5. Una subdivisión de un grafo $G = (V, E)$ es un grafo obtenido al reemplazar una arista $vw \in E$ por un nuevo vértice $u \notin V$ y dos nuevas aristas vu, uw .

Ejemplo 2.1. Sean G_1, G_2, G_3 grafos como se muestran en la Figura 2.5. Una subdivisión del grafo G_1 con $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $E(G_1) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$ es el grafo G_2 con $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E(G_2) = \{v_1v_2, v_2v_4, v_4v_3, v_3v_1\}$, ya que se reemplaza la arista $v_3v_2 \in G_1$ por el vértice $v_4 \notin G_1$ y las dos nuevas aristas v_3v_4, v_4v_2 . Observemos que una subdivisión del grafo G_2 es el grafo G_3 .

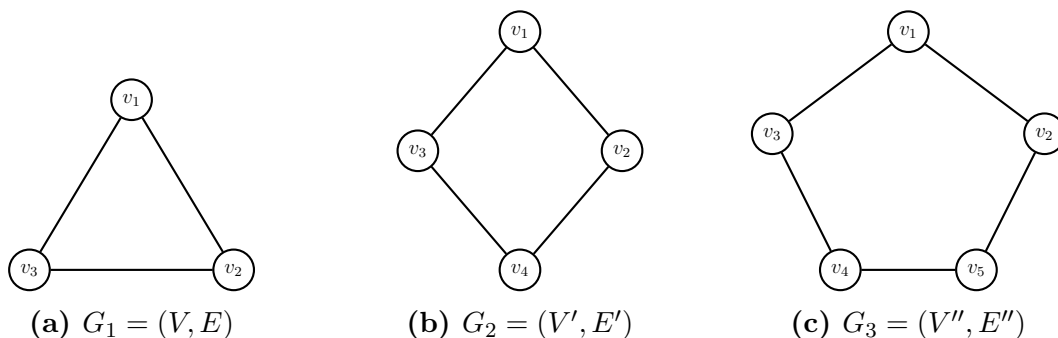


Figura 2.5: El grafo G_2 es una subdivisión de G_1 y el grafo G_3 es una subdivisión de G_2 .

El Teorema 2.1 establece que podemos representar todo grafo finito en \mathbb{R}^3 . Ahora, nos podemos preguntar si se pueden representar los grafos en el plano \mathbb{R}^2 . El teorema de Kuratowski nos da condiciones necesarias y suficientes para poder representar grafos en el plano, equivalentemente como mapas en la esfera. Su demostración requiere más herramientas de las presentadas aquí y puede ser consultada en [2, pág 101].

Teorema 2.2. (Teorema de Kuratowski, [10]) *Un grafo G se puede representar en \mathbb{R}^2 si y solo si no contiene ningún subgrafo que sea isomorfo a una subdivisión de K_5 ó $K_{3,3}$.*

2.2. Matriz de adyacencia de un grafo dirigido

Como ya vimos en el capítulo anterior, otra manera de representar un grafo de manera algebraica es mediante matrices. Para los grafos dirigidos ocurre de la misma manera, se pueden representar mediante la matriz de adyacencia.

Definición 2.6. Sea G un grafo dirigido finito y sea $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. La *matriz de adyacencia* del grafo dirigido G se define como $M = (a_{ij})_{n \times n}$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{si } (v_i, v_j) \notin E(G). \end{cases}$$

Ejemplo 2.2. La matriz de adyacencia del grafo dirigido G de la Figura 1.3 es la siguiente:

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Otro concepto ampliamente estudiado en la teoría de grafos es el de “coloración de grafos”.

Definición 2.7. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple y K un conjunto con $|K| \geq 2$. Una coloración por K de G es una función $f : V \rightarrow K$ tal que

si $vw \in E$, entonces $f(v) \neq f(w)$.

Dicho de otra manera, una coloración por K de G consiste en asignar a cada vértice de G un elemento de K , es decir, si cada elemento de K representa un color, de tal manera que los vértices vecinos reciban colores distintos.

Ejemplo 2.3. Sea $G_2 = (V', E')$, con $V' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E' = \{v_1v_2, v_2v_4, v_4v_3, v_3v_1\}$ y sea $K = \{0, 1\}$, definimos la función f como $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = 1$, $f(v_3) = 1$, $f(v_4) = 0$, de esta manera $f(v_1) \neq f(v_2)$, $f(v_2) \neq f(v_4)$, $f(v_4) \neq f(v_3)$, $f(v_3) \neq f(v_1)$. Así el grafo G_2 es 2-coloreable (ver Figura 2.6).

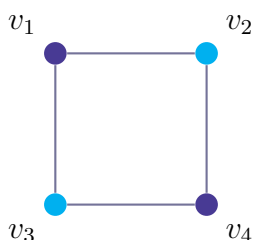


Figura 2.6: G_2 grafo 2-coloreable.

Una manera diferente de ver un grafo bipartito es si éste admite una coloración con dos colores, es decir, si sus vértices pueden colorearse con dos colores de tal forma que no exista ninguna arista que conecte dos vértices del mismo color.

En la Figura 2.7 se muestran dos grafos bipartitos que además son isomorfos.

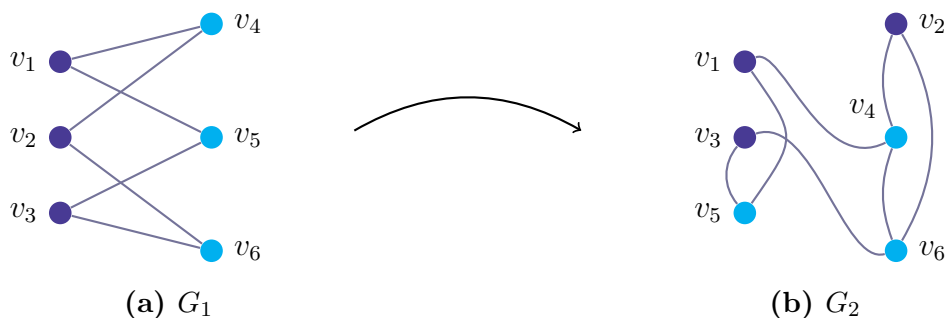


Figura 2.7: Grafos bipartitos.

2.3. Funciones

En el capítulo 3 será necesario definir algunas funciones sobre los vértices de un grafo así como operadores lineales sobre espacios vectoriales por lo que recordaremos algunos conceptos relacionados del álgebra lineal.

Definición 2.8. Sea \mathbb{V} un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , una *norma* en \mathbb{V} es una función $\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que:

1. $\|v\| \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{V}$.
2. $\|v\| = 0$ si y sólo si $v = 0$.
3. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{V}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ para todo $v, w \in \mathbb{V}$.

Definición 2.9. Un espacio vectorial \mathbb{V} sobre un campo K es un *espacio normado* si tiene definida una norma.

Definición 2.10. Un espacio normado es *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente con su norma.

Definición 2.11. Sea \mathbb{V} un espacio vectorial real. Supongamos que a cada par de vectores $u, v \in \mathbb{V}$ se le asigna un número real, denotado por $\langle u, v \rangle$. Esta función se llama un *producto interior* en \mathbb{V} si cumple las siguientes condiciones:

1. $\langle \lambda u_1 + \alpha u_2, v \rangle = \lambda \langle u_1, v \rangle + \alpha \langle u_2, v \rangle$. (Propiedad lineal)
2. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$. (Propiedad simétrica)
3. $\langle u, u \rangle \geq 0$; y $\langle u, u \rangle = 0$ si y sólo si $u = 0$. (Propiedad definida positiva)

Definición 2.12. Un espacio vectorial \mathbb{V} sobre un campo K es un *espacio de Hilbert* si tiene definido un producto interno y es completo con respecto a la norma inducida por su producto interior.

Sea $G = (V, E)$ un grafo, y sea $C^o(G)$ el espacio vectorial real de todas las funciones $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Resulta que $C^o(G)$ es espacio normado con $\|f\| := \sum_{v \in V} f(v)^2$.

$$\text{Sea } L^2(G) = \left\{ \mu \in C^o(G) : \|\mu\| < \infty \right\}.$$

Proposición 2.1. Sea G un grafo, si $V(G)$ es finito entonces $C^o(G) = L^2(G)$.

Demostración. Supongamos que $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, si $\mu \in C^o(G)$, entonces $\|\mu\| = \sum_{i=1}^n \mu(v_i) < \infty$, por lo tanto $\mu \in L^2(G)$ y así $C^o(G) \subseteq L^2(G)$. Ahora, la contención $L^2(G) \subseteq C^o(G)$ se sigue de la definición de $L^2(G)$, por lo tanto $C^o(G) = L^2(G)$. □

Proposición 2.2. Si $\mu, \nu \in L^2(G)$, entonces el siguiente define un producto interior

$$\langle \mu, \nu \rangle = \sum_{v \in V} \mu(v)\nu(v).$$

Demostración. Sean $\mu, \nu \in C^0(G)$ y $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$. Veamos que cumple con las propiedades de producto interior.

1. Propiedad lineal:

$$\begin{aligned} \langle \lambda\mu_1 + \alpha\mu_2, \nu \rangle &= \sum_{v \in V} (\lambda\mu_1 + \alpha\mu_2)(v)\nu(v) \\ &= \left(\sum_{v \in V} \lambda\mu_1(v) + \sum_{v \in V} \alpha\mu_2(v) \right) \nu(v) \\ &= \left(\lambda \sum_{v \in V} \mu_1(v) + \alpha \sum_{v \in V} \mu_2(v) \right) \nu(v) \\ &= \lambda \sum_{v \in V} \mu_1(v)\nu(v) + \alpha \sum_{v \in V} \mu_2(v)\nu(v) \\ &= \lambda \langle \mu_1, \nu \rangle + \alpha \langle \mu_2, \nu \rangle. \end{aligned}$$

2. Propiedad simétrica:

$$\begin{aligned} \langle \mu, \nu \rangle &= \sum_{v \in V} \mu(v)\nu(v) \\ &= \sum_{v \in V} \nu(v)\mu(v) \\ &= \langle \nu, \mu \rangle. \end{aligned}$$

3. Propiedad definida positiva:

Supongamos que $\mu \neq 0$ esto es, existe $v_0 \in V$ tal que $\mu(v_0) \neq 0$, entonces $\mu(v_0)^2 > 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle \mu, \mu \rangle &= \sum_{v \in V} \mu(v)\mu(v) \\ &= \sum_{v \in V} (\mu(v))^2 > 0. \end{aligned}$$

Además, $\langle \mu, \mu \rangle = 0$ si y solo si $\sum_{v \in V} \mu(v)\mu(v) = 0$ si y solo si $\sum_{v \in V} (\mu(v))^2 = 0$ si y solo si $(\mu(v))^2 = 0$ para todo $v \in V$ si y solo si $\mu(v) = 0$ para todo $v \in V$ si y solo si $\mu = 0$.

□

Proposición 2.3. Sea $G = (V, E)$ un grafo finito, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Entonces $(L^2(G), \langle, \rangle)$ y $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle_o)$ son isomorfos. (\langle, \rangle_o) es el producto punto usual en \mathbb{R}^n

Demostración. Sea $\varphi : C^o(G) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(\mu) = (\mu(v_1), \mu(v_2), \dots, \mu(v_n))$. Veamos que φ es un isomorfismo de espacio vectoriales, es decir, φ es inyectiva, sobreyectiva y lineal.

1. Sea $\mu, \nu \in C^o(G)$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) = \varphi(\nu) &\Rightarrow (\mu(v_1), \mu(v_2), \dots, \mu(v_n)) = (\nu(v_1), \nu(v_2), \dots, \nu(v_n)) \\ &\Rightarrow \mu(v_1) = \nu(v_1), \mu(v_2) = \nu(v_2), \dots, \mu(v_n) = \nu(v_n) \\ &\Rightarrow \mu(v_i) = \nu(v_i) \text{ con } i = 1, \dots, n \\ &\Rightarrow \mu = \nu \end{aligned}$$

por lo tanto, φ es inyectiva.

2. Sea $w \in \mathbb{R}^n$, entonces $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, definimos $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\mu(v_i) = w_i$ con $i = 1, \dots, n$, es claro que $\varphi(\mu) = w$. Por lo tanto φ es sobreyectiva.

3. Sean $\mu, \nu \in C^o(G)$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi(\mu + \nu) &= (\mu + \nu)(v_1), (\mu + \nu)(v_2), \dots, (\mu + \nu)(v_n) \\ &= \mu(v_1) + \nu(v_1), \mu(v_2) + \nu(v_2), \dots, \mu(v_n) + \nu(v_n) \\ &= (\mu(v_1), \mu(v_2), \dots, \mu(v_n)) + (\nu(v_1), \nu(v_2), \dots, \nu(v_n)) \\ &= \varphi(\mu) + \varphi(\nu) \end{aligned}$$

por otro lado, sea $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi(c\mu) &= ((c\mu)(v_1), (c\mu)(v_2), \dots, (c\mu)(v_n)) \\ &= (c\mu(v_1), c\mu(v_2), \dots, c\mu(v_n)) \\ &= c(\mu(v_1), \mu(v_2), \dots, \mu(v_n)) \\ &= c\varphi(\mu) \end{aligned}$$

por lo tanto φ es lineal.

Por lo tanto φ es un isomorfismo. \square

Corolario 2.1. *Si G es un grafo finito, entonces $(L^2(G), \langle, \rangle)$ es un espacio de Hilbert.*

2.4. Derivación de grafos

Para nuestro estudio es necesario definir conceptos análogos a los del cálculo para el caso discreto como la derivada, el operador de Laplace, el Jacobiano, entre otros.

Definición 2.13. Una *derivación* en un grafo $G = (V, E)$ es un operador lineal $D : C^0(G) \rightarrow C^0(G)$. Denotamos por $\Xi_{\mathcal{R}}(G)$ el álgebra real de derivaciones sobre G .

Ejemplo 2.4. Sean G un grafo y sea el operador $D : C^0(G) \rightarrow C^0(G)$ tal que $D(\mu) = \nu$ donde $\nu(v_0) = 0$ y $\nu(v) = \mu(v)$ para todo $v \neq v_0$.

Verifiquemos que definida de esa manera $D : C^0(G) \rightarrow C^0(G)$ es una transformación lineal .

1. Sean $\mu_1, \mu_2 \in C^0(G)$ tales que

$$D(\mu_1) = \nu_1 \text{ donde } \nu_1(v_0) = 0, \nu_1(v) = \mu_1(v) \text{ para todo } v \neq v_0$$

y

$$D(\mu_2) = \nu_2 \text{ donde } \nu_2(v_0) = 0, \nu_2(v) = \mu_2(v) \text{ para todo } v \neq v_0$$

claramente,

$$\begin{aligned} D(\mu_1) + D(\mu_2) &= \begin{cases} \nu_1 + \nu_2 & \text{si } v \neq v_0, \\ 0 & \text{si } v = v_0, \end{cases} \\ &= \mu_1 + \mu_2. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} D(\mu_1 + \mu_2) &= \nu \quad \text{donde } \nu(v_0) = 0, \nu(v) = \mu_1(v) + \mu_2(v) \text{ para todo } v \neq v_0 \\ &= \mu_1 + \mu_2, \end{aligned}$$

entonces $D(\mu_1 + \mu_2) = D(\mu_1) + D(\mu_2)$.

2. Sean $\mu \in C^0(G)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$D(\mu) = \nu_1 \text{ donde } \nu_1(v_0) = 0, \nu_1(v) = \mu(v) \text{ para todo } v \neq v_0.$$

Así,

$$D(\lambda\mu) = \nu \quad \text{donde } \nu(v_0) = 0, \nu(v) = \lambda\mu(v) \text{ para todo } v \neq v_0,$$

luego

$$D(\lambda\mu) = \begin{cases} \lambda\mu(v) & \text{si } v \neq v_0, \\ 0 & \text{si } v = v_0, \end{cases}$$

entonces

$$D(\lambda\mu) = \begin{cases} \lambda D\mu(v) & \text{si } v \neq v_0, \\ 0 & \text{si } v = v_0, \end{cases}$$

por lo tanto $D(\lambda\mu) = \lambda D(\mu)$.

De 1. y 2. se concluye que D es una transformación lineal.

2.5. Campo de vectores

Para establecer la derivada de una función definida sobre los vértices de un grafo se presentan las siguientes definiciones.

Definición 2.14. Un *campo de vectores* de un grafo G conexo es una función $X : V(G) \rightarrow V(G)$ tal que $X(v) \in N[v]$.

Ejemplo 2.5. Sea G un grafo con $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ y $E(G) = \{ab, ad, bd, be, de, aa\}$.

1. Los conjuntos de vecinos de cada $v \in v(G)$ son los siguientes:

$$N[a] = \{b, d, a\}, N[b] = \{a, d, e, b\}, N[c] = \{e, c\}, N[d] = \{a, b, e, d\} \text{ y } N[e] = \{b, d, e\} \text{ (ver Figura 2.8(a)).}$$

2. Un campo de vectores es el siguiente:

$$X(a) = a, X(b) = e, X(c) = e, X(d) = a \text{ y } X(e) = d \text{ (ver Figura 2.8(b)).}$$

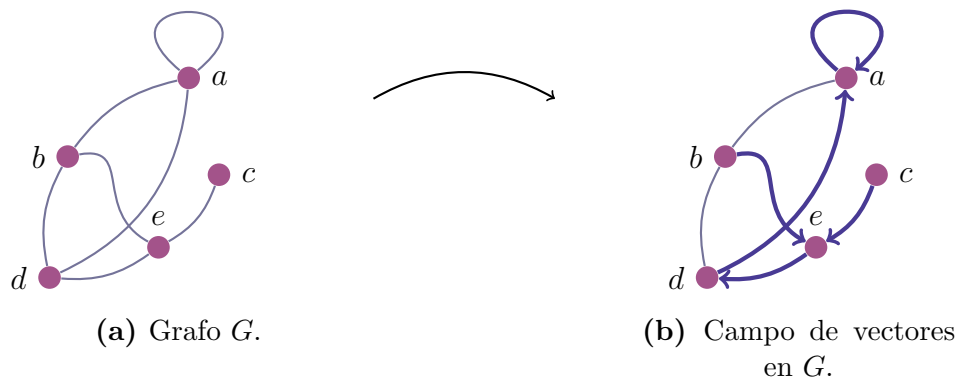


Figura 2.8: Campo de vectores.

Definición 2.15. Un vértice $v \in G$ se llama *crítico* si $X(v) = v$.

Por ejemplo, en la Figura 2.8, $v = a$ es un vértice crítico de G con el campo X .

Definición 2.16. Dado G un grafo, y sea X un campo de vectores de G , una solución del campo X es una colección de vértices

$$v_1, v_2, \dots \in V(G),$$

tal que

$$v_{i+1} = X(v_i), \text{ para todo } i = 1, 2, 3, \dots$$

Denotamos por $O^+(v_1) = \{v_1, X(v_1), X^2(v_1), \dots\}$ la *órbita* de $v_1 \in V(G)$.

Ejemplo 2.6. Tomando el campo de vectores G del ejemplo 2.5 tenemos las siguientes órbitas:

1. $O^+(a) = \{a\}$.
2. $O^+(b) = \{b, e, d, a\}$.
3. $O^+(c) = \{c, e, d, a\}$.
4. $O^+(d) = \{d, a\}$.
5. $O^+(e) = \{e, d, a\}$.

En la Figura 2.9 mostramos la órbita de c .

Las siguientes propiedades para las órbitas, son conocidas.

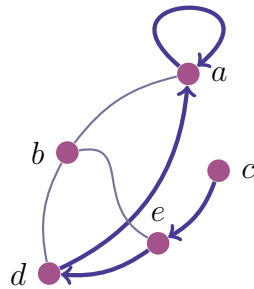


Figura 2.9: Órbita de c bajo X del grafo G .

Propiedades:

Sea G un grafo y X un campo de vectores de G . Entonces:

1. Para todo $v \in V(G)$ existe una órbita con $v_1 = v$.
2. La órbita está determinada de manera única por v .
3. Es posible tener órbitas diferentes para el mismo campo que compartan al menos un vértice.
4. A partir de un vértice en común tales órbitas deben coincidir.

Demostración. 1. Sea $v \in V(G)$, entonces $O^+(v) = \{v, X(v), X^2(v), \dots\}$ es una órbita con $v_1 = v$.

2. Como $X : V(G) \rightarrow V(G)$ es una función, es claro que $O^+(v)$ está determinado de manera única por v .

3. Sea G un grafo tal que $V(G) = \{0, 1\}$ y $E(G) = \{01, 1\}$ y sea $X : V(G) \rightarrow V(G)$ tal que $X(0) = 1$ y $X(1) = 1$, entonces $O^+(0) = \{0, 1\}$ y $O^+(1) = \{1\}$ comparten el vértice 1 (véase la Figura 2.10).



Figura 2.10: Órbitas diferentes que comparten el vértice 1.

4. Si $w \in O^+(u) \cap O^+(v)$, entonces $w = X^i(u)$ y $w = X^j(v)$ para algún $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Luego, $X^{i+s}(u) = X^{j+s}(v)$ para todo $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

□

Capítulo 3

Grafos Métricos

En este capítulo definiremos el concepto de grafo métrico, conocido en otros contextos como grafo pesado, es decir, un grafo con una función de peso sobre las aristas, el concepto de derivadas direccionales de funciones definidas sobre los vértices de un grafo y finalmente se muestra el operador discreto de Laplace Δ_2 , que está asociado al concepto de las funciones armónicas discretas.

Definición 3.1. Una métrica discreta en un grafo G es una función

$$d : E(G) \longrightarrow (0, +\infty).$$

En tal caso decimos que (G, d) es un *grafo métrico*.

En la Figura 3.1 se ilustra un grafo métrico $G = (V, E)$ donde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $E = \{e_1, e_2\}$ con $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$. Definiendo la función $d : E(G) \longrightarrow (0, +\infty)$ tal que $d(e_1)=0.3$ y $d(e_2)=0.5$.

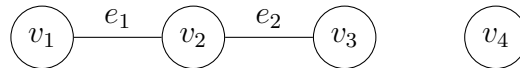


Figura 3.1: Grafo métrico G .

Definición 3.2. Sea G un grafo conexo y $v, w \in V(G)$. Si P es un camino tal que vPw , definimos la longitud de P como

$$\text{long}(P) = \sum_{i=1}^{n-1} d(w_i w_{i+1}),$$

donde $P = w_1 w_2 \cdots w_{n-1} w_n$ y $v = w_1, w_n = w$.

Definición 3.3. Dado G un grafo conexo y sean $v, w \in V(G)$ definimos la distancia del vértice v al vértice w como

$$\text{dist}(v, w) = \min\{\text{long}(P) : vPw\}.$$

Ejemplo 3.1. Considérese G el grafo conexo con $V(G) = \{v, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w\}$ y $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$, donde $e_1 = vw_2$, $e_2 = w_2w_3$, $e_3 = w_3w$, $e_4 = ww_6$, $e_5 = w_6w_5$, $e_6 = w_5w_2$, $e_7 = w_1v$, $e_8 = vw_3$, $e_9 = vw_4$, $e_{10} = w_1w_4$ (ver Figura 3.2).

Definimos la función $d : E(G) \rightarrow (0, +\infty)$ tal que $d(e_1) = 1$, $d(e_2) = 2$, $d(e_3) = 3$, $d(e_4) = 4$, $d(e_5) = 5$, $d(e_6) = 6$, $d(e_7) = 7$, $d(e_8) = 8$, $d(e_9) = 9$, $d(e_{10}) = 10$.

Ahora, los caminos que unen a v y w son los siguientes:

1. $P_1 := vw_3w$, entonces $\text{long}(P_1) = d(e_8) + d(e_3) = 8 + 3 = 11$.
2. $P_2 := vw_2w_5w_6w$, entonces $\text{long}(P_2) = d(e_1) + d(e_6) + d(e_5) + d(e_4) = 1 + 6 + 5 + 4 = 16$.
3. $P_3 := vw_2w_3w$, entonces $\text{long}(P_3) = d(e_1) + d(e_2) + d(e_3) = 1 + 2 + 3 = 6$.

Por tanto, la distancia $\text{dist}(v, w) = \min\{\text{long}(P) : vPw\} = \text{long}(P_3) = 6$.

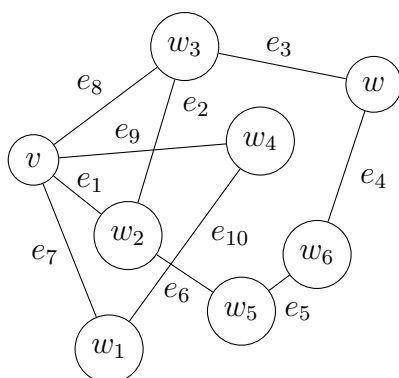


Figura 3.2: Grafo conexo G .

Observación 3.1. La función $\text{dist} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{dist}(v_1, v_2) = 1$, $\text{dist}(v_1, v_3) = 1$, $\text{dist}(v_2, v_3) = 3$ no es una métrica, ya que no cumple con la desigualdad triangular. En efecto, considérese el grafo G' . Sean $V'(G') = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $E'(G') = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\}$. Entonces,

$$\text{dist}(v_2, v_3) \leq \text{dist}(v_1, v_2) + \text{dist}(v_1, v_3) \Rightarrow 3 \leq 1 + 1 \Rightarrow 3 \leq 2,$$

lo cual no es posible, por lo tanto no cumple la desigualdad triangular.

Definición 3.4. Dos grafos métricos (G, d_1) , (H, d_2) son isomorfos si existe un isomorfismo de grafos $h : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $d_1(vw) = d_2(h(v)h(w))$ para toda arista $vw \in E(G)$. En tal caso h es llamado *isomorfismo de grafos métricos*.

Ejemplo 3.2. Sea f el isomorfismo de grafos del ejemplo 1.6 en el capítulo 1 definido como

$$f : V(G) \rightarrow V'(G')$$

tal que $f(a) = c'$, $f(b) = b'$, $f(c) = d'$, $f(d) = a'$. Sean $E(G) = \{ab, bd, dc, ca\}$ con la métrica $d_1(ab) = 1$, $d_1(bd) = 2$, $d_1(dc) = 3$, $d_1(ca) = 4$ y $E(G') = \{a'b', b'c', c'd', d'a'\}$ con la métrica $d_2(a'b') = 2$, $d_2(b'c') = 1$, $d_2(c'd') = 4$, $d_2(d'a') = 3$. Es fácil verificar que f es un isomorfismo de grafos métricos.

Definición 3.5. Un *automorfismo de grafo métrico* del grafo métrico (G, d) es un isomorfismo métrico de (G, d) consigo mismo.

Ejemplo 3.3. Sea (G, d) un grafo métrico con $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ y $E(G) = \{ab, bc, cd, da\}$. Afirmamos que

$$h : V(G) \rightarrow V(G)$$

tal que $h(a) = b$, $h(b) = c$, $h(c) = d$, $h(d) = a$ es un isomorfismo. Definimos la métrica como $d(ab) = 10$, $d(bc) = 11$, $d(cd) = 12$, $d(da) = 13$ y $d(bc) = 10$, $d(cd) = 11$, $d(da) = 12$, $d(ab) = 13$. Es fácil verificar que h es un automorfismo de grafo métrico.

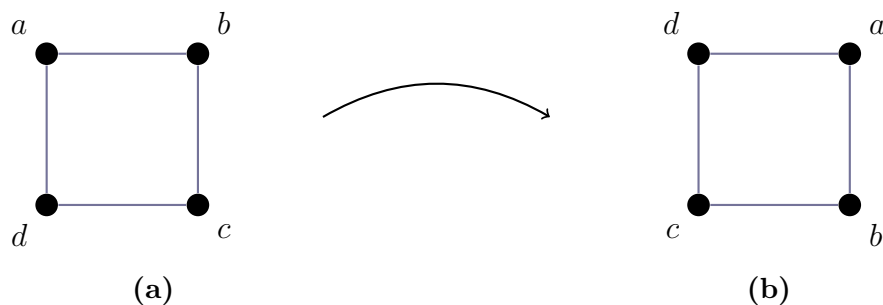


Figura 3.3: Automorfismo de grafo métrico.

Definición 3.6. Considérese (G, d) un grafo métrico finito, y supongamos

$$V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

Sea $A_k = [a_{ij}^k]_{n \times n}$ donde

$$a_{ij}^k = \begin{cases} \frac{1}{d(v_i v_j)^k} & \text{si } v_i v_j \in G, \\ 0 & \text{si } v_i v_j \notin G. \end{cases}$$

A_k es llamada *matriz de adyacencia métrica* de grado k del grafo métrico (G, d) .

Ejemplo 3.4. La matriz de adyacencia métrica de grado 2 del grafo métrico G de la Figura 3.1 es la siguiente:

$$A_2 = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(0.3)^2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{(0.3)^2} & 0 & \frac{1}{(0.5)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(0.5)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Definición 3.7. Considérese (G, d) un grafo métrico finito, y supongamos

$$V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

Sea $B_k = [b_{ij}^k]_{n \times n}$ donde

$$b_{ij}^k = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \sum_{l=1}^n a_{il}^k & \text{si } i = j. \end{cases}$$

B_k es llamada *matriz de valencia métrica* de grado k del grafo métrico (G, d) .

Ejemplo 3.5. La matriz de valencia métrica de grado 2 del grafo métrico G de la Figura 3.1 es la siguiente:

$$B_2 = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{(0.3)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(0.3)^2} + \frac{1}{(0.5)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(0.5)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

3.1. Derivadas direccionales de funciones

Una vez que tenemos establecido la noción de grafo métrico podemos dar el concepto de derivada direccional de una función con valores reales definida sobre los vértices de un grafo.

Definición 3.8. Sea (G, d) un grafo métrico, conexo. Sean $\mu \in C^0(G)$, $v \in V(G)$ y $w \in N[v]$. La *derivada direccional de orden k* de μ en v en la dirección w , se define como

$$D_w^k \mu(v) = (-1)^k \begin{cases} \frac{\mu(v) - \mu(w)}{d^k(vw)} & \text{si } v \neq w, \\ 0 & \text{si } v = w. \end{cases}$$

Ejemplo 3.6. Sea (G, d) un grafo métrico conexo, donde $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3\}$ tal que $d(v_1v_2) = 1$, $d(v_2v_3) = 2$. Sean $v_1, v_2, v_3 \in V(G)$ tal que $\mu(v_1) = \frac{1}{2}$, $\mu(v_2) = \frac{1}{3}$, $\mu(v_3) = \frac{1}{4}$.

Ahora, las derivadas direccionales de orden 1 y 2 de μ en v_2 y v_3 en las direcciones de v_3 y v_2 respectivamente, son las siguientes:

1. $D_{v_3}^1 \mu(v_2) = \frac{(-1)(\mu(v_2) - \mu(v_3))}{d(v_2v_3)} = -\frac{1}{24}$.
2. $D_{v_3}^2 \mu(v_2) = \frac{(-1)^2(\mu(v_2) - \mu(v_3))}{d^2(v_2v_3)} = \frac{1}{48}$.
3. $D_{v_2}^1 \mu(v_3) = \frac{(-1)(\mu(v_3) - \mu(v_2))}{d(v_3v_2)} = \frac{1}{24}$.
4. $D_{v_2}^2 \mu(v_3) = \frac{(-1)^2(\mu(v_3) - \mu(v_2))}{d^2(v_3v_2)} = -\frac{1}{48}$.

Proposición 3.1. Sea (G, d) un grafo métrico conexo. Sean $\mu \in C^0(G)$, $v \in V(G)$ y $w \in N[v]$. Entonces

$$D_w^{k+1} \mu(v) = \frac{(-1)D_w^k \mu(v)}{d(vw)},$$

para todo entero $k \geq 1$.

Demostración. La prueba se hará por inducción matemática sobre k . Veamos que se cumple para $k = 1$

$$D_w^2 \mu(v) = \frac{(-1)D_w \mu(v)}{d(vw)}$$

desarrollando la parte izquierda de la igualdad, por definición se obtiene la siguiente cadena de igualdades.

$$D_w^2 \mu(v) = (-1)^2 \begin{cases} \frac{\mu(v) - \mu(w)}{d^2(vw)} & \text{si } v \neq w \\ 0 & \text{si } v = w \end{cases} = \begin{cases} \frac{\mu(w) - \mu(v)}{d^2(vw)} & \text{si } v \neq w \\ 0 & \text{si } v = w \end{cases}$$

3.2. Operador discreto de Laplace

por otra lado, desarrollando la parte derecha de la igualdad tenemos

$$\frac{(-1)D_w\mu(v)}{d(vw)} = (-1) \begin{cases} \frac{(-1)\frac{\mu(v)-\mu(w)}{d^2(vw)}}{d(vw)} & \text{si } v \neq w \\ \frac{(-1)\cdot 0}{d(vw)} & \text{si } v = w \end{cases} = \begin{cases} \frac{\mu(v)-\mu(w)}{d^2(vw)} & \text{si } v \neq w, \\ 0 & \text{si } v = w, \end{cases}$$

así se cumple para $k = 1$. Ahora supongamos que se cumple para k y demostremos para $k + 1$

$$D_w^{k+2}\mu(v) = \frac{(-1)D_w^{k+1}\mu(v)}{d(vw)},$$

por hipótesis inductiva se tiene que

$$\frac{(-1)D_w^{k+1}\mu(v)}{d(vw)} = \frac{(-1)(-1)D_w^k\mu(v)}{d(vw)} = \frac{D_w^k\mu(v)}{d(vw)} = \begin{cases} \frac{(-1)^k\mu(v)-\mu(w)}{d^{k+2}(vw)} & \text{si } v \neq w, \\ 0 & \text{si } v = w, \end{cases}$$

por otra parte, por definición

$$\begin{aligned} D_w^{k+2}\mu(v) &= (-1)^{k+2} \begin{cases} \frac{\mu(v)-\mu(w)}{d^{k+2}(vw)} & \text{si } v \neq w \\ 0 & \text{si } v = w \end{cases} = \begin{cases} \frac{(-1)^k(-1)^2\mu(v)-\mu(w)}{d^{k+2}(vw)} & \text{si } v \neq w, \\ 0 & \text{si } v = w, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(-1)^k\mu(v)-\mu(w)}{d^{k+2}(vw)} & \text{si } v \neq w, \\ 0 & \text{si } v = w. \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto se demuestra lo deseado. \square

3.2. Operador discreto de Laplace

Del mismo modo que las funciones de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m , tenemos que un campo de vectores $X : V(G) \rightarrow V(G)$ sobre un grafo métrico (G, d) induce una derivación

$$D_X : C^\circ(G) \rightarrow C^\circ(G),$$

la cual está definida por

$$D_X(\mu)(v) = \partial_{X(v)}\mu(v),$$

donde $\partial_w\mu(v) = D_w\mu(v)$ con $w = X(v)$.

Ejemplo 3.7. Sea (G, d) un grafo métrico, con $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $E(G) = \{e_1, e_2\}$ donde $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$ tal que $d(e_1) = 1$, $d(e_2) = 2$. Sean $v_1, v_2, v_3 \in$

$V(G)$ tal que $\mu(v_1) = \frac{1}{5}, \mu(v_2) = \frac{1}{3}, \mu(v_3) = \frac{1}{4}$ y el campo de vectores $X(v_1) = v_2, X(v_2) = v_3, X(v_3) = v_3$.

1. $D_X(\mu)(v_1) = \partial_{v_2}\mu(v_1) = D_{v_2}\mu(v_1) = \frac{2}{15}$.
2. $D_X(\mu)(v_2) = \partial_{v_3}\mu(v_2) = D_{v_3}\mu(v_2) = -\frac{1}{24}$.
3. $D_X(\mu)(v_3) = \partial_{v_3}\mu(v_3) = 0$.

Observación 3.2. Para cada $\mu \in C^0(G)$ se tiene que $D_X(\mu) \in C^0(G)$, entonces si $Y : V \rightarrow V$ es un campo de vectores, podemos definir $D_{YX} = D_Y \circ D_X$, y así tenemos también que

$$D_X^k(\mu)(v) = \partial_{X(v)}^k \mu(v),$$

donde $\partial_w^k \mu(v) = D_w^k \mu(v)$ con $w = X(v)$.

Ahora estamos en condiciones de definir el operador discreto de Laplace como sigue.

Definición 3.9. Sea (G, d) un grafo métrico. El *operador discreto de Laplace*, se define como

$$\Delta_2 : C^0(G) \rightarrow C^0(G),$$

dado por

$$\Delta_2 \mu(v) = \sum_{w \in N(v)} \frac{\mu(v) - \mu(w)}{d^2(vw)} = \sum_{w \in N(v)} \partial_w^2 \mu(v).$$

Recordemos que el espectro de un operador lineal es su conjunto de valores propios, entonces tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.2. Sea (G, d) un grafo métrico finito, conexo y sea n la cardinalidad de $V(G)$. Entonces el *espectro* de Δ_2 está contenido en los reales no negativos y posee un elemento nulo, es decir, es posible ordenarlo como sigue:

$$0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Demostración. Sea $\mu \in C^0(G)$, entonces

$$\begin{aligned}
 \langle \mu, \Delta_2 \mu \rangle &= \sum_{v \in V} \mu(v) \Delta_2 \mu(v) \\
 &= \sum_{v \in V} \mu(v) \left(\sum_{w \in N(v)} \frac{\mu(v) - \mu(w)}{d^2(vw)} \right) \\
 &= \sum_{v \in V} \sum_{w \in N(v)} \frac{\mu^2(v) - \mu(v)\mu(w)}{d^2(vw)} \\
 &= \sum_{w \in N(v_1)} \frac{\mu^2(v_1) - \mu(v_1)\mu(w)}{d^2(v_1w)} + \sum_{w \in N(v_2)} \frac{\mu^2(v_2) - \mu(v_2)\mu(w)}{d^2(v_2w)} \\
 &\quad + \sum_{w \in N(v_3)} \frac{\mu^2(v_3) - \mu(v_3)\mu(w)}{d^2(v_3w)} + \dots + \sum_{w \in N(v_n)} \frac{\mu^2(v_n) - \mu(v_n)\mu(w)}{d^2(v_nw)},
 \end{aligned}$$

notar que cada arista vw aparece dos veces en la suma anterior, ya que v es vecino de w , con lo cual w es vecino de v , de donde se obtiene que la última igualdad coincide con la sumatoria

$$\sum_{vw \in G} \left(\frac{\mu(v) - \mu(w)}{d(vw)} \right)^2,$$

entonces

$$\langle \mu, \Delta_2 \mu \rangle = \sum_{vw \in G} \left(\frac{\mu(v) - \mu(w)}{d(vw)} \right)^2 \geq 0.$$

Por otra parte, si μ es un vector propio se obtiene que $\langle \mu, \Delta_2 \mu \rangle = \langle \mu, \lambda \mu \rangle = \lambda \langle \mu, \mu \rangle \geq 0$ entonces $\lambda \geq 0$. Ahora, por lo anterior tenemos que si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ es el espectro de Δ_2 entonces $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son reales no negativos y podemos suponer que $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Si tomamos a μ como constante obtenemos que $\Delta_2 \mu = 0 = 0\mu$, así $\lambda_1 = 0$. \square

3.3. Funciones armónicas discretas

En general una función armónica extiende la idea de la segunda derivada. En esta sección presentamos el concepto de función armónica discreta para obtener criterios de máximos y mínimos análogos al caso continuo.

Definición 3.10. Sea (G, d) un grafo métrico finito, $\mu \in C^0(G)$ es *armónica* en el vértice $v \in V(G)$ si y sólo si $\Delta_2\mu(v) = 0$. Se dice que μ es *armónica discreta* si μ es armónica en todo vértice $v \in V(G)$.

Ejemplo 3.8. Sea (G, d) un grafo métrico con $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3\}$ tal que $d(v_1v_2) = 1$ y $d(v_2v_3) = 1$. Ahora, sean $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V(G)$ tal que $\mu(v_1) = 1$, $\mu(v_2) = 2$, $\mu(v_3) = 3$, $\mu(v_4) = 4$. Verifiquemos que μ es armónica solamente en el vértice v_2 .

$$1. \Delta_2\mu(v_1) = \sum_{w \in N(v_1)} \frac{\mu(v_1) - \mu(w)}{d^2(v_1w)} = \frac{\mu(v_1) - \mu(v_2)}{d^2(v_1v_2)} = -1 \neq 0,$$

entonces μ no es armónica en el vértice v_1 .

$$2. \Delta_2\mu(v_2) = \sum_{w \in N(v_2)} \frac{\mu(v_2) - \mu(w)}{d^2(v_2w)} = \frac{\mu(v_2) - \mu(v_1)}{d^2(v_2v_1)} + \frac{\mu(v_2) - \mu(v_3)}{d^2(v_2v_3)} = 0,$$

entonces μ es armónica en el vértice v_2 .

$$3. \Delta_2\mu(v_3) = \sum_{w \in N(v_3)} \frac{\mu(v_3) - \mu(w)}{d^2(v_3w)} = \frac{\mu(v_3) - \mu(v_2)}{d^2(v_3v_2)} = 1 \neq 0,$$

entonces μ no es armónica en el vértice v_3 .

En otras palabras, el espacio de las funciones armónicas discretas es el núcleo de Δ_2 .

Definición 3.11. Sea $\mu : V \rightarrow \mathbb{C}$ es llamada *armónica* en el vértice $v \in V(G)$ si su parte real $Re(\mu)$ y su parte imaginaria $Im(\mu)$ son armónicas.

La siguiente proposición incluye un listado de propiedades interesantes que facilitan el cálculo del operador de Laplace.

Proposición 3.3. Sea (G, d) un grafo métrico finito, conexo con al menos dos vértices. Supongamos que $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ y sean A_2, B_2 matrices de adyacencia y valencia métrica de G de grado 2, respectivamente. Defina $w_{ij} = d(v_i v_j)^{-2}$ para $v_i v_j \in E(G)$ y $w_{ij} = 0$ en otro caso. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. El operador discreto de Laplace produce un endomorfismo lineal del espacio vectorial real $C^0(G)$.

2. La función

$$\varphi : C^0(G) \longrightarrow \mathbb{R}^m : \mu \longmapsto \varphi(\mu) = (\mu(v_1), \dots, \mu(v_m))$$

es un isomorfismo entre espacios vectoriales reales. La base $\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ de $C^0(G)$ definida por $\varphi(\mu_j) = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_j, 0, \dots, 0)$ es llamada la base canónica de $C^0(G)$.

3. El operador de Laplace $\widehat{\Delta}_2$ queda descrito como el operador lineal:

$$\widehat{\Delta}_2 : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

definido por

$$\widehat{\Delta}_2(x_1, \dots, x_m) = \left(\sum_{j=1}^m w_{1j}(x_1 - x_j), \dots, \sum_{j=1}^m w_{mj}(x_m - x_j) \right)$$

y

$$\widehat{\Delta}_2(x_1, \dots, x_m) = (B_2 - A_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

es decir, la matriz de Δ_2 en la base canónica de $C^0(G)$ es $J_2 = B_2 - A_2$.

4. Verificar que

$$(x_1, \dots, x_m) J_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq m} w_{ij} (x_i - x_j)^2.$$

5. El operador discreto de Laplace es simétrico y positivo definido, y en consecuencia

$$\langle \Delta_2 \mu, \nu \rangle = \langle \mu, \Delta_2 \nu \rangle,$$

donde

$$\langle \mu, \nu \rangle = \sum_{v \in V} \mu(v) \nu(v).$$

Demostración. 1. Veamos que $\Delta_2 : C^0(G) \longrightarrow C^0(G)$ es una transformación lineal. Para esto, basta ver que para cada $\mu, \nu \in C^0(G)$, y $s, t \in \mathbb{R}$ se cumple

que

$$\Delta_2(s\mu + t\nu) = s \Delta_2 \mu + t \Delta_2 \nu.$$

En efecto, tenemos que $\Delta_2(s\mu + t\nu)(v) = \sum_{w \in N(v)} \partial_w^2(s\mu + t\nu)(v)$,

tomando $w \in N(v)$ se tiene la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \partial_w^2(s\mu + t\nu)(v) &= \frac{(s\mu + t\nu)(v) - (s\mu + t\nu)(w)}{d(vw)^2} \\ &= \frac{(s\mu(v) + t\nu(v)) - (s\mu(w) + t\nu(w))}{d(vw)^2} \\ &= \frac{s\mu(v) + t\nu(v) - s\mu(w) - t\nu(w)}{d(vw)^2} \\ &= \frac{s\mu(v) - s\mu(w) + t\nu(v) - t\nu(w)}{d(vw)^2} \\ &= \frac{s\mu(v) - s\mu(w)}{d(vw)^2} + \frac{t\nu(v) - t\nu(w)}{d(vw)^2} \\ &= s\partial_w^2\mu(v) + t\partial_w^2\nu(v) \end{aligned}$$

por lo que, $\partial_w^2(s\mu + t\nu)(v) = s\partial_w^2\mu(v) + t\partial_w^2\nu(v)$ y

$$\sum_{w \in N(v)} \partial_w^2(s\mu + t\nu)(v) = \sum_{w \in N(v)} s\partial_w^2\mu(v) + t\partial_w^2\nu(v) = s \sum_{w \in N(v)} \partial_w^2\mu(v) + t \sum_{w \in N(v)} \partial_w^2\nu(v)$$

por lo tanto, $\Delta_2(s\mu + t\nu) = s \Delta_2 \mu + t \Delta_2 \nu$.

2. Sea $\mu_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ definido como

$$\mu(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } v = v_i, \\ 0 & \text{si } v \neq v_i. \end{cases} \quad (3.1)$$

Es fácil verificar que $\{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ es una base de $C^0(G)$, así $C^0(G)$ es de dimensión finita m . Por lo tanto, $C^0(G)$ y \mathbb{R}^m son espacios vectoriales de dimensión finita m , es decir $\dim(C^0(G)) = \dim(\mathbb{R}^m)$, entonces $C^0(G)$ es isomorfo a \mathbb{R}^m .

3. Para esto, basta ver que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C^0(G) & \xrightarrow{\Delta_2} & C^0(G) \\ \downarrow \phi & & \uparrow \phi^{-1} \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\widehat{\Delta_2}} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

3.3. Funciones armónicas discretas

donde $\phi : C^o(G) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\phi(\mu) = (\mu(v_1), \mu(v_2), \dots, \mu(v_m))$, y $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ es una base de \mathbb{R}^m . Esto es, debemos probar que

$$\phi^{-1} \circ \widehat{\Delta}_2 \circ \phi = \Delta_2.$$

Sean $\mu \in C^o(G)$ y $v \in G$, entonces

$$\begin{aligned} (\phi^{-1} \circ \widehat{\Delta}_2 \circ \phi)(\mu) &= (\phi^{-1} \circ \widehat{\Delta}_2)(\mu(v_1), \mu(v_2), \dots, \mu(v_m)) \\ &= \phi^{-1}(\widehat{\Delta}_2(\mu(v_1), \mu(v_2), \dots, \mu(v_m))) \\ &= \phi^{-1}\left(\sum_{j=1}^m w_{1j}(\mu(v_1) - \mu(v_j)), \dots, \sum_{j=1}^m w_{mj}(\mu(v_m) - \mu(v_j))\right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^m w_{1j}(\mu(v_1) - \mu(v_j))\right)\mu_1 + \dots + \left(\sum_{j=1}^m w_{mj}(\mu(v_m) - \mu(v_j))\right)\mu_m \\ &= \sum_{v_j \in N(v_1)}^m \frac{(\mu(v_1) - \mu(v_j))}{d(v_1 v_j)^2} \mu_1 + \dots + \sum_{v_j \in N(v_m)}^m \frac{(\mu(v_m) - \mu(v_j))}{d(v_m v_j)^2} \mu_m \\ &= \nu(\mu) \end{aligned}$$

donde $\nu = \phi^{-1} \circ \widehat{\Delta}_2 \circ \phi$, que claramente es una función de $C^o(G)$ en $C^o(G)$, entonces

$$\nu(\mu)(v_1) = \sum_{v_j \in N(v_1)}^m \frac{(\mu(v_1) - \mu(v_j))}{d(v_1 v_j)^2}, \dots, \nu(\mu)(v_m) = \sum_{v_j \in N(v_m)}^m \frac{(\mu(v_m) - \mu(v_j))}{d(v_m v_j)^2}. \quad (3.2)$$

Ahora, resta verificar que $\nu(\mu) = \Delta_2(\mu)$, es decir que para toda $v \in G$ se cumple que $\nu(\mu)(v) = \Delta_2(\mu)(v)$. De 3.1 y 3.2 tenemos que

$$\nu(\mu)(v) = \sum_{v_j \in N(v)}^m \frac{(\mu(v) - \mu(v_j))}{d(v v_j)^2}$$

y sabemos que

$$\Delta_2(\mu)(v) = \sum_{w \in N(v)}^m \frac{(\mu(v) - \mu(w))}{d(v w)^2},$$

por lo tanto $\nu(\mu)(v) = \Delta_2(\mu)(v)$. Entonces el diagrama es conmutativo y así queda demostrado lo deseado.

Para la segunda parte, basta encontrar la matriz asociada a la base canónica. Sea $J_2 = B_2 - A_2$, donde $A_2 = [a_{ij}^2]_{m \times m}$ y $B_2 = [b_{ij}^2]_{m \times m}$ matrices de adyacencia y valencia métrica de grado 2, respectivamente. Se define $w_{ij} = d(v_i v_j)^{-2}$ para

$v_i v_j \in E(G)$ y $w_{ij} = 0$ en otro caso. Por otra parte $J_2 = B_2 - A_2$ se desarrolla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 B_2 - A_2 &= \begin{pmatrix} (b_{11}^2 - a_{11}^2) & -a_{12}^2 & -\cdots & -a_{1m}^2 \\ -a_{21}^2 & (b_{22}^2 - a_{22}^2) & -\cdots & -a_{2m}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1}^2 & -a_{m2}^2 & -\cdots & (b_{mm}^2 - a_{mm}^2) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \left(\sum_{r=1}^m a_{1r}^2 - a_{11}^2 \right) & -a_{12}^2 & -\cdots & -a_{1m}^2 \\ -a_{21}^2 & \left(\sum_{r=1}^m a_{2r}^2 - a_{22}^2 \right) & -\cdots & -a_{2m}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1}^2 & -a_{m2}^2 & -\cdots & \left(\sum_{r=1}^m a_{mr}^2 - a_{mm}^2 \right) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{r \neq 1}^m a_{1r}^2 & -a_{12}^2 & -\cdots & -a_{1m}^2 \\ -a_{21}^2 & \sum_{r \neq 2}^m a_{2r}^2 & -\cdots & -a_{2m}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1}^2 & -a_{m2}^2 & -\cdots & \sum_{r \neq m}^m a_{mr}^2 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

entonces

$$J_2 = \begin{pmatrix} \sum_{r \neq 1}^m w_{1r} & -w_{12} & -\cdots & -w_{1m} \\ -w_{21} & \sum_{r \neq 2}^m w_{2r} & -\cdots & -w_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -w_{m1} & -w_{m2} & -\cdots & \sum_{r \neq m}^m w_{mr} \end{pmatrix}.$$

3.3. Funciones armónicas discretas

Ahora, sea $\widehat{\Delta}_2 : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ el operador lineal definido por

$$\widehat{\Delta}_2(x_1, \dots, x_m) = \left(\sum_{j=1}^m w_{1j}(x_1 - x_j), \dots, \sum_{j=1}^m w_{mj}(x_m - x_j) \right),$$

evaluando $\widehat{\Delta}_2$ en la base canónica e_1, e_2, \dots, e_m se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}_2(1, 0, \dots, 0) &= \left(\sum_{j=1}^m w_{1j}(x_1 - x_j), \sum_{j=1}^m w_{2j}(x_2 - x_j), \dots, \sum_{j=1}^m w_{mj}(x_m - x_j) \right) \\ &= \left(\sum_{j=2}^m w_{1j}(x_1), \sum_{j=1}^m w_{2j}(-x_j), \dots, \sum_{j=1}^m w_{mj}(-x_j) \right) \\ &= \left(\sum_{j=2}^m w_{1j}, -w_{21}, \dots, -w_{m1} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}_2(0, 1, \dots, 0) &= \left(\sum_{j=1}^m w_{1j}(x_1 - x_j), \sum_{j=1}^m w_{2j}(x_2 - x_j), \dots, \sum_{j=1}^m w_{mj}(x_m - x_j) \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^m w_{1j}(-x_j), \sum_{j=1}^m w_{2j}(x_2), \dots, \sum_{j=1}^m w_{mj}(-x_j) \right) \\ &= \left(-w_{12}, \sum_{j=1}^m w_{2j}, \dots, -w_{m2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}_m(0, 0, \dots, 1) &= \left(\sum_{j=1}^m w_{1j}(x_1 - x_j), \sum_{j=1}^m w_{2j}(x_2 - x_j), \dots, \sum_{j=1}^m w_{mj}(x_m - x_j) \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^m w_{1j}(-x_j), \sum_{j=1}^m w_{2j}(-x_j), \dots, \sum_{j=1}^m w_{mj}(x_m) \right) \\ &= \left(-w_{1m}, -w_{2m}, \dots, \sum_{j=1}^m w_{mj} \right), \end{aligned}$$

colocando en las columnas las imágenes de la base canónica de \mathbb{R}^m se obtiene la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} \sum_{j=2}^m w_{1j} & -w_{12} & -\cdots & -w_{1m} \\ -w_{21} & \sum_{j=1}^m w_{2j} & -\cdots & -w_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -w_{m1} & -w_{m2} & -\cdots & \sum_{j=1}^m w_{mj} \end{pmatrix},$$

entonces $M = J_2$ y por lo tanto se verifica que J_2 es la matriz asociada al operador discreto de Laplace.

4. De 3. sabemos que J_2 es la matriz asociada del operador discreto de Laplace, entonces

$$J_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{r=1}^m w_{1r}(x_1 - x_r) \\ \sum_{r=1}^m w_{2r}(x_2 - x_r) \\ \vdots \\ \sum_{r=1}^m w_{mr}(x_m - x_r) \end{pmatrix},$$

y de aquí obtenemos

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) J_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^m w_{sr}(x_s^2 - x_s x_r),$$

desarrollando la parte derecha de esta igualdad de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^m w_{sr}(x_s^2 - x_s x_r) &= \sum_{r=s}^m w_{sr}(x_s^2 - x_s x_r) + \sum_{s<r}^m w_{sr}(x_s^2 - x_s x_r) \\
 &\quad + \sum_{r<s}^m w_{sr}(x_s^2 - x_s x_r) \\
 &= 0 + \sum_{s<r}^m w_{sr}(x_s^2 - x_s x_r) + \sum_{s<r}^m w_{rs}(x_r^2 - x_r x_s) \\
 &= \sum_{s<r}^m w_{sr}(x_s^2 - 2x_s x_r + x_r^2) \quad (\text{por simetría}) \\
 &= \sum_{s<r}^m w_{sr}(x_s - x_r)^2,
 \end{aligned}$$

se obtiene que

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) J_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \sum_{s<r}^m w_{sr}(x_s - x_r)^2.$$

5. El operador Δ_2 es simétrico ya que su matriz asociada J_2 es diferencia de matrices simétricas y es definido positivo por la Proposición 3.2. Ahora, sean $\mu, \nu \in C^o(G)$ y el operador lineal $\Delta_2 : C^o(G) \rightarrow C^o(G)$. Entonces

$$\langle \Delta_2 \mu, \nu \rangle = \langle \mu, \Delta_2^t \nu \rangle = \langle \mu, \Delta_2 \nu \rangle$$

ya que el operador Δ_2 es simétrico, esto es $\Delta_2 = \Delta_2^t$. □

Para la siguiente proposición considérese (G, d) un grafo métrico finito, cono con al menos dos vértices. Supongamos que $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ y sean A_2, B_2 matrices de adyacencia y valencia métrica de G de grado 2, respectivamente. Defina $w_{ij} = d(v_i v_j)^{-2}$ para $v_i v_j \in E(G)$ y $w_{ij} = 0$ en otro caso. También, considérese una orientación para las aristas del grafo. Si $v_i v_j \in E(G)$, escribimos (v_i, v_j) para denotar la arista orientada de manera que v_i es el vértice de partida.

Proposición 3.4. Sean $U = (u_{ij}), V = (v_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ definidas por

$$u_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } e_i = (v_j, v_k) \\ -1, & \text{si } e_i = (v_k, v_j) \\ 0, & \text{si } v_j \notin e_i \end{cases}$$

y

$$v_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & \text{si } e_i = (v_j, v_k) \\ -w_{ij}, & \text{si } e_i = (v_k, v_j) \\ 0, & \text{si } v_j \notin e_i. \end{cases}$$

Entonces $J_2 = U^t V$ y $U^t V$ no depende de la orientación escogida sobre las aristas.

La prueba de esta proposición puede ser obtenida generalizando el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.9. Sea (G', d) el grafo métrico de la Figura 3.4 con $V'(G') = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $E'(G') = \{e_1, e_2, e_3\}$.

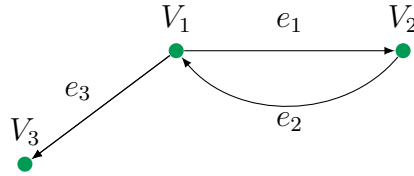


Figura 3.4: Grafo dirigido (G', d) .

Definimos la orientación como $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_2, v_1)$, $e_3 = (v_1, v_3)$. Por una parte, las componentes de la matriz U para el grafo (G', d) son las siguientes:

$$\begin{aligned} u_{11} &= 1, & u_{12} &= -1, & u_{13} &= 0, \\ u_{21} &= -1, & u_{22} &= 1, & u_{23} &= 0, \\ u_{31} &= 1, & u_{32} &= 0, & u_{33} &= -1, \end{aligned}$$

así

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ entonces } U^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.3. Funciones armónicas discretas

ahora, las componentes de la matriz V del grafo (G', d) son las siguientes:

$$\begin{aligned} v_{11} &= w_{11}, & v_{12} &= -w_{12}, & v_{13} &= 0, \\ v_{21} &= -w_{21}, & v_{22} &= w_{22}, & v_{23} &= 0, \\ v_{31} &= w_{31}, & v_{32} &= 0, & v_{33} &= -w_{33}, \end{aligned}$$

notar que $w_{11} = 0, w_{22} = 0$ y $w_{33} = 0$ ya que $v_1v_1 \notin E', v_2v_2 \notin E'$ y $v_3v_3 \notin E'$, entonces

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -w_{12} & 0 \\ -w_{21} & 0 & 0 \\ w_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

haciendo el producto de matrices, obtenemos lo siguiente:

$$U^tV = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -w_{12} & 0 \\ -w_{21} & 0 & 0 \\ w_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{21} + w_{31} & -w_{12} & 0 \\ -w_{21} & w_{12} & 0 \\ -w_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, A_2 y B_2 las matrices de adyacencia y valencia métrica de grado 2 del grafo (G', d) respectivamente, son:

$$A_2 = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \text{y} \quad B_2 = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} w_{12} + w_{13} & 0 & 0 \\ 0 & w_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

así, la matriz J_2 es:

$$B_2 - A_2 = \begin{pmatrix} w_{12} + w_{13} & 0 & 0 \\ 0 & w_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{12} + w_{13} & -w_{12} & -w_{13} \\ -w_{21} & w_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

recordando que $J_2 = B_2 - A_2$, por tanto, se concluye que $U^tV = J_2$ y notemos que no depende de la orientación de las aristas.

3.4. Derivadas inducidas por campos de vectores

El operador discreto de Laplace puede expresarse en términos de derivadas inducidas por campos de vectores, también puede ser generalizado a través de los campos vectoriales. Dado (G, d) un grafo métrico y $X : V \rightarrow V$ un campo de vectores, donde $G = (V, E)$, el operador

$$D_X : C^0(G) \rightarrow C^0(G),$$

se define como $D_X \mu(v) = \partial_{X(v)} \mu(v)$.

Ahora si (G, d) es un grafo métrico de grado finito, y $v, w \in G$, $w \in N(v)$, entonces definimos el campo de vectores

$$X_{v,w}(\tau) = \begin{cases} w, & \tau = v \\ v, & \tau \neq v. \end{cases}$$

Con esta definición para $\mu \in C^0(G)$ tenemos

$$\begin{aligned} D_{X_{v,w}} \mu(\tau) &= \partial_{X_{v,w}(\tau)} \mu(\tau) = \begin{cases} \partial_w \mu(v) & \text{si } \tau = v \\ \partial_v \mu(\tau) & \text{si } \tau \neq v \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\mu(w) - \mu(v)}{d(vw)} & \text{si } \tau = v \\ 0 & \text{si } \tau \neq v. \end{cases} \end{aligned}$$

Luego,

$$D_{X_{v,w}}^2 \mu(\tau) = \begin{cases} \frac{X_{v,w}(\mu)(v) - X_{v,w}(\mu)(w)}{d(vw)} = \frac{\mu(v) - \mu(w)}{d(vw)^2} = \partial_w^2 \mu(v) & \text{si } \tau = v \\ 0 & \text{si } \tau \neq v \end{cases}$$

de aquí, el operador discreto de Laplace es

$$\Delta_2 = \sum_{v \in V} \sum_{w \in N(v)} D_{X_{v,w}}^2.$$

Por inducción podemos definir

$$\Delta_k = \sum_{v \in V} \sum_{w \in N(v)} D_{X_{v,w}}^k,$$

donde

$$D_{X_{v,w}}^k \mu(\tau) = (-1)^k \begin{cases} \frac{\mu(v) - \mu(w)}{d(vw)^k} = \partial_w^k \mu(v) & \text{si } \tau = v \\ 0 & \text{si } \tau \neq v. \end{cases}$$

3.5. Principio de máximo y mínimo

Un análogo al criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos de funciones reales de una variable es el principio de máximo y mínimo dado para funciones reales que no son localmente constantes sobre un conjunto de vértices.

Definición 3.12. Dada $\mu \in C^0(G)$ decimos que *no es localmente constante* si para cada vértice $v \in G$ existe $w \in N(v)$ tal que $\mu(v) \neq \mu(w)$.

Notemos que si μ es localmente constante en el vértice v , entonces μ es armónica en v .

Ejemplo 3.10. Sea (G, d) un grafo métrico, donde $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5\}$. Sea $N(v_1) = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ el conjunto de vecinos del vértice v_1 y sea $\mu \in C^0(G)$ tal que $\mu(v_1) = 0$, $\mu(v_i) = 1$ para $i = 2, 3, 4, 5$.

Es fácil verificar que μ no es localmente constante en el vértice $v_1 \in G$.

Lema 3.1. *Sea G un grafo finito. Entonces toda $\mu \in C^0(G)$ tiene un máximo global y un mínimo global.*

Demostración. Sea $G = (V, E)$ un grafo finito y $\mu \in C^0(G)$. Como G es finito se tiene un número finito de vértices, sea n la cardinalidad de V , entonces el conjunto $\{\mu(v_i) : i = 1, \dots, n\}$ es finito, y además $\{\mu(v_i) : i = 1, \dots, n\} \subseteq \mathbb{R}$, por tanto $\mu \in C^0(G)$ tiene un máximo y mínimo global. \square

Teorema 3.1 (Principio del máximo y mínimo, [7]). *Sea (G, d) un grafo métrico finito y $\mu \in C^0(G)$ una función que no es localmente constante. Si $v \in G$ es un máximo o un mínimo local para μ , entonces μ no es armónica en v .*

Demostración. Como el grafo es finito, entonces V es finito y por el Lema 3.1 supongamos que $v \in G$ es un máximo local para μ , entonces $\mu(w) \leq \mu(v)$ para todo $w \in N(v)$ y supongamos que μ es armónica en v , entonces

$$0 = \Delta_2 \mu(v) = \sum_{w \in N(v)} \frac{\mu(v) - \mu(w)}{d(vw)^2},$$

de aquí se sigue que $\mu(v) - \mu(w) = 0$ para todo $w \in N(v)$ lo cual contradice la hipótesis de que μ no es localmente constante, por lo tanto μ no es armónica en v . \square

Corolario 3.1. *Sea (G, d) un grafo métrico finito y conexo, entonces las únicas funciones armónicas $\mu \in C^0(G)$ son las constantes.*

Demostración. Si μ es armónica y $v \in G$ tal que $\mu(v) \geq \mu(w)$ para todo $w \in N(v)$ entonces

$$0 = \Delta_2 \mu(v) = \sum_{w \in N(v)} \frac{\mu(v) - \mu(w)}{d(vw)^2} \geq 0,$$

se sigue que $\mu(v) - \mu(w) = 0$ para todo $w \in N(v)$, lo cual implica que $\mu(v) = \mu(w)$, es decir la igualdad se cumple para toda función $\mu \in C^0(G)$ constante. \square

Corolario 3.2. *Sea (G, d) un grafo métrico finito, conexo. Entonces el espectro del operador Laplaciano discreto es*

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m$$

donde el espacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 0$ es de dimensión 1.

Demostración. Sea ε_{λ_1} el espacio asociado al valor propio $\lambda_1 = 0$, entonces si $\mu \in \varepsilon_{\lambda_1}$ se tiene que $\Delta_2 \mu = 0$, lo cual implica que μ es armónica y por el Corolario 3.1 tenemos que μ es constante. Así ε_{λ_1} es el espacio de las funciones constantes, entonces se tiene que $\dim(\varepsilon_{\lambda_1}) = 1$. Por otra parte

$$\dim C^0(G) = \dim(\text{Ker } \Delta_2) + \dim(\text{Im } \Delta_2) = 1 + \dim(\text{Im } \Delta_2),$$

entonces $\dim(\text{Im } \Delta_2) \geq 1$. Esto es existe un valor propio $\lambda \neq 0$,

\square

Corolario 3.3. Sea (G, d) un grafo métrico finito, conexo. Si $C(0)$ es el subespacio de las funciones constantes de $C^0(G)$, entonces

$$C(0)^\perp = \left\{ \mu \in C^0(G) : \sum_{v \in V} \mu(v) = 0 \right\} \quad (3.3)$$

y

$$\lambda_2 = \inf_{\mu \in C(0)^\perp - \{0\}} \frac{\sum_{vw \in E} \frac{\mu(v) - \mu(w)}{d(vw)^2}}{\sum_{v \in V} \mu(v)^2} \quad (3.4)$$

Demostración. Sea $H = \left\{ \mu \in C^0(G) : \sum_{v \in V} \mu(v) = 0 \right\}$. Veamos que la igualdad $C(0)^\perp = H$ se cumple.

Primera contención: $C(0)^\perp \subset H$. Sea $\alpha \in C(0)^\perp$ veamos que $\alpha \in H$, entonces para todo $\gamma \neq 0 \in C(0)$ se cumple que

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \gamma \rangle &= 0 \\ &= \sum_{v \in V} \alpha(v) \gamma(v) \\ &= \gamma(v) \sum_{v \in V} \alpha(v) \text{ ya que } \gamma \text{ es constante.} \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que $\gamma(v) \sum_{v \in V} \alpha(v) = 0$ lo cual implica que $\gamma(v) = 0$ ó $\sum_{v \in V} \alpha(v) = 0$ pero por hipótesis tenemos que $\gamma \neq 0$, por lo tanto $\sum_{v \in V} \alpha(v) = 0$, así $\alpha \in H$.

Segunda contención: $H \subset C(0)^\perp$. Sea $\beta \in H$, veamos que $\beta \in C(0)^\perp$, para esto se afirma que para todo $\delta \in C(0)$ se cumple que

$$\langle \beta, \delta \rangle = 0.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \langle \beta, \delta \rangle &= \sum_{v \in V} \beta(v) \delta(v) \\ &= \delta(v) \sum_{v \in V} \beta(v) \text{ ya que } \delta \text{ es constante.} \\ &= \delta(v) \cdot 0 \text{ ya que } \beta \in H \\ &= 0 \end{aligned}$$

así $\beta \in C(0)^\perp$. Por lo tanto $C(0)^\perp = H$.

Ahora, verifiquemos 3.4. Sabemos por la Proposición 3.2 que para cada $\mu \in C^\circ(G)$ se cumple que

$$\langle \mu, \Delta_2 \mu \rangle = \sum_{vw \in G} \left(\frac{\mu(v) - \mu(w)}{d(vw)} \right)^2.$$

Si μ es un vector propio asociado a λ_j entonces $\langle \mu, \Delta_2 \mu \rangle = \langle \mu, \lambda_j \mu \rangle = \lambda_j \langle \mu, \mu \rangle$ como $\langle \mu, \mu \rangle \neq 0$ ya que μ es un vector propio, se tiene que

$$\lambda_j = \frac{\langle \mu, \Delta_2 \mu \rangle}{\langle \mu, \mu \rangle} = \frac{\sum_{vw \in G} \left(\frac{\mu(v) - \mu(w)}{d(vw)} \right)^2}{\sum_{v \in V} \mu(v)^2}.$$

Para concluir elegimos $\lambda_2 = \min\{\lambda_j : \lambda_j \neq 0\}$. □

La siguiente sección tiene como principal objetivo motivar los problemas de Dirichlet y Neumann que serán presentados en el capítulo 4.

3.6. Deducción de la ecuación del calor en una dimensión

A continuación se muestra como puede ser obtenida la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3.5}$$

Para esto, supongamos una varilla de longitud 1

- Fina.
- Homogénea.
- Aislada del exterior.
- Con sección transversal S . (superficie)

Las consideraciones anteriores permiten que las leyes físicas dependan únicamente de la posición x y del tiempo t . En la deducción de la ecuación 3.5 se emplean las siguientes magnitudes:

3.6. Deducción de la ecuación del calor en una dimensión

- $u(x, t)$ = Temperatura de la varilla para la posición x y el instante de tiempo t .
- $Q(x, t)$ = Flujo (o cantidad) de calor en la dirección positiva de x para la posición x y el instante de tiempo t por unidad de superficie.
- Principios de conservación de la energía (sobre la varilla en el segmento $x, x + \Delta x$).
- Variación de la energía interna = Flujo de calor entrante - Flujo de calor saliente. La expresión matemática correspondiente es :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = Q_{en}(x, t)S - Q_{sal}(x + \Delta x, t)S. \quad (3.6)$$

- Ley. Ecuación Fundamental de la termología (relaciona el calor $Q(x, t)$ con la masa m y la temperatura $u(x, t)$)

$$Q(x, t) = \lambda m u(x, t) \quad (3.7)$$

donde λ es una constante característica del material que representa su calor específico.

En el segmento $(x, x + \Delta x)$ el volumen de la varilla es $S \Delta x$. Ahora, si ρ representa la densidad de la varilla tenemos que

$$\rho = \frac{\Delta m}{S \Delta x}$$

es decir

$$\Delta m = \rho S \Delta x, \quad (3.8)$$

y sustituyendo la ecuación 3.8 en 3.7 obtenemos:

$$Q(x, t) = \lambda(\rho S \Delta x)u(x, t), \quad (3.9)$$

luego, derivando con respecto de t la ecuación 3.9 tenemos:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = S\lambda\rho \Delta x \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (3.10)$$

ahora, sustituyendo la ecuación 3.10 en 3.6 se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
 S\lambda\rho \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} &= Q_{en}(x, t)S - Q_{sal}(x + \Delta x, t)S \\
 S\lambda\rho \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} &= S(Q_{en}(x, t) - Q_{sal}(x + \Delta x, t)) \\
 \lambda\rho \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} &= (Q_{en}(x, t) - Q_{sal}(x + \Delta x, t)) \\
 \lambda\rho \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{Q(x + \Delta x, t) - Q(x, t)}{\Delta x},
 \end{aligned}$$

tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ obtenemos:

$$\lambda\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (3.11)$$

Considerando la ley de Fourier de conducción de calor que establece que el flujo de calor se traslada en dirección opuesta al gradiente de la temperatura y es proporcional a él:

$$Q(x, t) = -k\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right), \quad (3.12)$$

donde k es una constante que se refiere a la conductividad térmica del material. Aplicando 3.12 a una dimensión tenemos

$$Q(x, t) = -k\frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.13)$$

y sustituyendo la ecuación 3.13 en 3.11 obtenemos:

$$\lambda\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial u}{\partial x}\right) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

entonces

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{\lambda\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

y haciendo $\alpha^2 = \frac{k}{\lambda\rho}$ obtenemos la ecuación deseada 3.5.

Ahora en el caso bidimensional un problema famoso es el problema de Dirichlet que consiste en lo siguiente: dada una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y una función $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar una función $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.14)$$

3.6. Deducción de la ecuación del calor en una dimensión

donde $u(x, 0) = g$ y $u|_{\partial\Omega} = f$.

Para resolver este tipo de ecuación que está sujeta a condiciones iniciales y condiciones de frontera, se establece un problema con valores en la frontera.

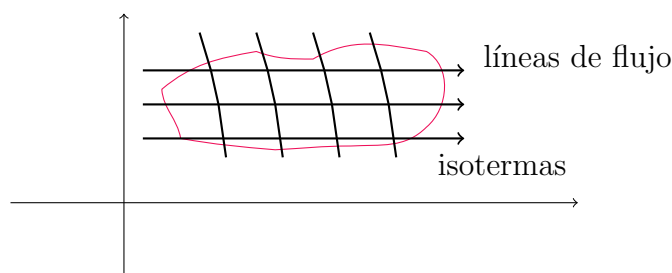
Se observa que $u(x, y)$ es una función armónica y la expresión 3.14 se denomina la Ecuación de Laplace. Un problema de valores en la frontera que consiste en determinar una función armónica en cierta región del plano, conociendo los valores que toma en la frontera de la región, se conoce como Problema de Dirichlet.

Observe que si $u(x, y)$ es solución de un Problema de Dirichlet, entonces se puede encontrar la conjugada armónica $v(x, y)$ de variable compleja tal que

$$T(x, y) = u(x, y) + iv(x, y),$$

donde $u(x, y)$ es la temperatura en cada punto de una región del plano xy y $iv(x, y)$ es llamada *función de corriente*. Las curvas de nivel de $v(x, y)$ serán ortogonales, esto es, $\nabla u \cdot \nabla v = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} \nabla u \cdot \nabla v &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{ecs. de Cauchy Riemann}) \\ &= 0. \end{aligned}$$



(a)

Figura 3.5: Isotermas

En este caso, habrá dos componentes del flujo de calor, de manera que el flujo térmico se obtendrá en la dirección del gradiente de temperatura, la cual coincide

con la normal a las isotermas, de donde se deduce que $v(x, y)$ determina la dirección del flujo de calor, donde el sentido será el de la disminución de temperatura (ver Figura 3.5).

Capítulo 4

Los problemas discretos de Dirichlet y Neumann

Peter Gustav Lejeune Dirichlet, matemático alemán, hizo abundantes contribuciones de gran valor al análisis y a la teoría de números. También se interesó por la física matemática y formuló el llamado principio de Dirichlet en teoría potencial, dicho principio establece que si la función $\mu(x)$ es solución de la ecuación de Poisson

$$\Delta\mu + f = 0,$$

en una región Ω de \mathbb{R}^n con condición de frontera

$$\mu = g \text{ en } \partial\Omega, \tag{4.1}$$

entonces μ puede ser obtenido a través del mínimo de la funcional de energía de Dirichlet

$$E(\mu(x)) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla\mu - \mu f| \right) \cdot dx$$

sobre el espacio de todas las funciones armónicas μ que cumplen la condición 4.1.

En lo subsecuente, procedemos a establecer la versión discreta del problema de Dirichlet.

Lema 4.1. *Sea (G, d) un grafo métrico conexo y finito. Supongamos que el conjunto de vértices de G está dado por*

$$V = \{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_m\},$$

donde $n > 0$ y $m > n$. Entonces la matriz J_2 del laplaciano discreto Δ_2 puede ser escrita como

$$J_2 = \begin{pmatrix} R & U \\ U^t & T \end{pmatrix},$$

donde R y T son matrices cuadradas de tamaño n y $(m - n)$ respectivamente, y la submatriz T es invertible.

Demostración. Sea \mathcal{L} el espacio de funciones $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ que son armónicas en $\{v_{n+1}, \dots, v_m\}$ y que se anulan en $\{v_1, \dots, v_n\}$, entonces por el principio del máximo ni mínimo μ no tiene máximo y mínimo en $\{v_{n+1}, \dots, v_m\}$. Si $\mu \in \mathcal{L}$, entonces sus máximos y mínimos pertenecen a $\{v_1, \dots, v_n\}$, de donde se deduce que $\mu \equiv 0$, es decir $\mathcal{L} = \{0\}$. Por otro lado, si $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces podemos identificarla con el vector columna $[x, y]^t$ donde $x = (\mu(v_1), \dots, \mu(v_n))$, $y = (\mu(v_{n+1}), \dots, \mu(v_m))$. Entonces \mathcal{L} es el espacio de soluciones de la ecuación

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ U^t & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y como $\text{Ker} \begin{pmatrix} I & 0 \\ U^t & T \end{pmatrix} = 0$, entonces $\begin{pmatrix} I & 0 \\ U^t & T \end{pmatrix}$ es invertible, lo cual implica que el $\det \begin{pmatrix} I & 0 \\ U^t & T \end{pmatrix} \neq 0$, esto es, el $\det T \neq 0$ y, por lo tanto, T es invertible. \square

Teorema 4.1. (Problema discreto de Dirichlet, [7]) Sea (G, d) un grafo métrico finito y conexo. Sea $\emptyset \neq W \subseteq V$ y consideremos $a_w, b_v \in \mathbb{R}$ para cada $w \in W$ y para cada $v \in V \setminus W$. Entonces, existe una y solo una función $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ solución del problema discreto de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta_2 \mu(v) = b_v, & v \in V(G) \setminus W & (a) \\ \mu(w) = a_w, & w \in W & (b) \end{cases} \quad (4.2)$$

Demostración. (Existencia) Sean A_2 y B_2 las matrices de adyacencia y valencia de grado dos respectivamente. Sean

$$\begin{aligned} V &= \{v_1, \dots, v_m\}, \\ W &= \{v_1, \dots, v_r\}, \end{aligned}$$

y $a_1 = a_{v_1}, \dots, a_r = a_{v_r} \in \mathbb{R}, b_1 = b_{v_{r+1}}, \dots, b_{m-r} = b_{v_m} \in \mathbb{R}$.

Identificando cada función $\mu \in C^0(G)$ con el vector columna

$$x = \begin{pmatrix} \mu(v_1) \\ \vdots \\ \mu(v_m) \end{pmatrix}$$

y suponiendo que

$$J_2 = B_2 - A_2 = \begin{pmatrix} R & U \\ U^t & T \end{pmatrix},$$

donde R es de tamaño $r \times r$, U es de tamaño $r \times (m-r)$ y T de tamaño $(m-r) \times (m-r)$, vemos que el problema de Dirichlet es equivalente a resolver el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ U^t & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{m-r} \end{pmatrix},$$

como T es invertible por el Lema 4.1, el sistema anterior tiene solución y además es única.

(Unicidad) Sea $D = \{\mu \in C^0(G) \mid \mu(w) = a_w, w \in W\}$, supongamos que hay dos soluciones al problema discreto de Dirichlet $\mu_1, \mu_2 \in D$, esto es

$$\begin{cases} \Delta_2 \mu_1(v) = b_v, & v \in V \setminus W & \text{(i)} \\ \mu_1(w) = a_w, & w \in W & \text{(ii)} \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \Delta_2 \mu_2(v) = b_v, & v \in V \setminus W \quad (\text{i}') \\ \mu_2(w) = a_w, & w \in W \quad (\text{ii}') \end{cases}$$

como D es subespacio de $C^0(G)$ se tiene que $\mu_1 - \mu_2 \in D$ y como

$$\Delta_2(\mu_1 - \mu_2)(v) = \Delta_2 \mu_1(v) - \Delta_2 \mu_2(v) = 0 \quad \forall v \in V \setminus W,$$

entonces $\mu_1 - \mu_2$ es armónica en $V \setminus W$ y de (ii) y (ii') tenemos que

$$(\mu_1 - \mu_2)(w) = a_w - a_w = 0 \quad \forall w \in W. \quad (4.3)$$

Ahora por el principio del máximo y mínimo si v es un máximo o mínimo local para $\mu_1 - \mu_2 : V \rightarrow \mathbb{R}$ entonces $\mu_1 - \mu_2$ no es armónica en v . Supongamos que v_1 y v_2 son el mínimo y el máximo de $\mu_1 - \mu_2$ respectivamente, entonces

$$(\mu_1 - \mu_2)(v_1) \leq (\mu_1 - \mu_2)(u) \leq (\mu_1 - \mu_2)(v_2) \quad \forall u \in V,$$

por el principio del máximo y mínimo sabemos que $v_1, v_2 \notin V \setminus W$, entonces $v_1, v_2 \in W$, por 4.3 tenemos

$$0 = (\mu_1 - \mu_2)(v_1) \leq (\mu_1 - \mu_2)(u) \leq (\mu_1 - \mu_2)(v_2) = 0 \quad \forall u \in V,$$

entonces $(\mu_1 - \mu_2)(u) = 0 \quad \forall u \in V$, por lo tanto $\mu_1 \equiv \mu_2$ en V . \square

Ejemplo 4.1. Consideremos un grafo (G, d) métrico, conexo (Figura 4.1). Sean $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}$, $W = \{v_1, v_4, v_6, v_{10}\} \subseteq V(G)$ así se tiene que $V \setminus W = \{v_2, v_3, v_5, v_7, v_8, v_9, v_{11}\}$. Consideremos $a_1, a_4, a_6, a_{10} \in \mathbb{R}$ y $b_2, b_3, b_5, b_8, b_9, b_{11} \in \mathbb{R}$, por el Teorema 4.1 se asegura la existencia de una única función $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple con la ecuación 4.2 de donde se tiene lo siguiente:

1. Para cada $v \in V \setminus W = \{v_2, v_3, v_5, v_7, v_8, v_9, v_{11}\}$

$$\begin{aligned} \Delta_2 \mu(2) &= b_2, & \Delta_2 \mu(3) &= b_3, & \Delta_2 \mu(5) &= b_5, & \Delta_2 \mu(7) &= b_7, \\ \Delta_2 \mu(8) &= b_8, & \Delta_2 \mu(9) &= b_9, & \Delta_2 \mu(11) &= b_{11}. \end{aligned}$$

2. Para cada $w \in W = \{v_1, v_4, v_6, v_{10}\}$

$$\mu(1) = a_1, \quad \mu(4) = a_4, \quad \mu(6) = a_6, \quad \mu(10) = a_{10}.$$

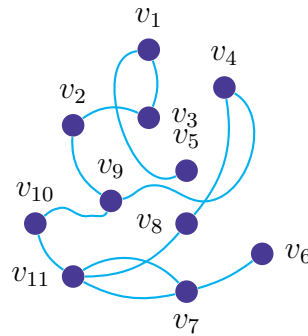


Figura 4.1: Ejemplo problema discreto de Dirichlet.

Una versión similar al problema discreto de Dirichlet se presenta en el siguiente Teorema.

Teorema 4.2. (Problema discreto de Neumann, [7]) Sea (G, d) un grafo métrico finito y conexo. Sean $W \subset Z \subset V(G)$, $W \neq \emptyset$, $V(G) \setminus Z \neq \emptyset$, $|Z \setminus W| = 1$, de manera que al quitar todas las aristas que tienen alguno de sus vértices en W no desconecta el grafo. Sea $\sigma : W \rightarrow V \setminus Z$ y consideremos una colección de números reales $a_w, b \in \mathbb{R}$. Entonces, existe una y sólo una función $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \Delta_2 \mu(v) = 0 & v \in V \setminus Z \\ \mu(w) - \mu(\sigma(w)) = a_w & w \in W \\ \mu(z) = b & \{z\} = Z \setminus W. \end{cases}$$

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} V &= \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \\ Z &= \{v_1, v_2, \dots, v_{m+1}\} \text{ y} \\ W &= \{v_1, v_2, \dots, v_m\}. \end{aligned}$$

Supongamos que $\sigma(v_j) = v_{\tau(j)}$, $j = 1, \dots, m$, donde $\tau : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{m+2, \dots, n\}$.

Sean A_2 y B_2 las matrices de adyacencia y valencia de grado dos del grafo G . Identificamos cada función $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ con el vector

$$x = \begin{pmatrix} \mu(v_1) \\ \vdots \\ \mu(v_n) \end{pmatrix}.$$

Descomponiendo en bloques $J_2 = B_2 - A_2$ tenemos:

$$J_2 = \begin{pmatrix} \underbrace{L_1}_{m \times m} & \underbrace{L_2}_{m \times 1} & \underbrace{L_3}_{m \times (n-m-1)} \\ L_2^t & \underbrace{L_4}_{1 \times 1} & \underbrace{L_5}_{1 \times (n-m-1)} \\ L_3^t & L_5^t & \underbrace{L_6}_{(n-m-1) \times (n-m-1)} \end{pmatrix}.$$

Sea $M = m_{jk}$ una matriz de tamaño $m \times (n - m - 1)$ tal que

$$m_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \tau(j) - m - 1 \\ -1 & \text{si } k = \tau(j) - m - 1. \end{cases}$$

Entonces el problema de Neumann se reduce a la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} Im & 0 & M \\ 0 & 1 & 0 \\ L_3^t & L_5^t & L_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde Im es la matriz identidad de $m \times m$. Haciendo operaciones elementales, el sistema anterior es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} Im & 0 & M \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & LL_5 & LL_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ a_{m+1} = b \\ a_{m+2} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Ahora, verifiquemos que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ LL_5 & LL_6 \end{pmatrix}$ es invertible. Para esto, sea Φ el grafo que se obtiene al eliminar todos los vértices v_1, v_2, \dots, v_m del grafo G y haciendo que cada arista que termina en v_j ahora termine en $v_{\tau(j)}$. Por hipótesis, se tiene que Φ es conexo. Sean A'_2 y B'_2 las matrices de adyacencia y valencia de grado dos de Φ , entonces

$$J'_2 = B'_2 - A'_2 = \begin{pmatrix} r_{1 \times 1} & U_{1 \times (n-m-1)} \\ LL_5 & LL_6 \end{pmatrix}.$$

El Lema 4.1 se asegura que la matriz LL_6 es invertible, y por lo tanto se tiene lo que queremos probar. \square

Ilustremos el Teorema 4.2 mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2. Sea (G, d) un grafo métrico, conexo, el conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y supongamos que $d(v_i v_j) = 1$ si $v_i v_j \in E$ y 0 si $v_i v_j \notin E$ con $j, i = 1, 2, 3, 4, 5$. Tomemos a $Z = \{v_3, v_4, v_5\} \subseteq V$, entonces $V \setminus Z = \{v_1, v_2\}$ y $W = \{v_3, v_4\} \subseteq Z \subseteq V$ tal que $|Z \setminus W| = 1$. Observemos que si quitamos todas las aristas que tienen alguno de sus vértices en W , entonces no se desconecta el grafo, es decir, si quitamos las aristas que están en color verde del grafo (G, d) de la Figura 4.2.

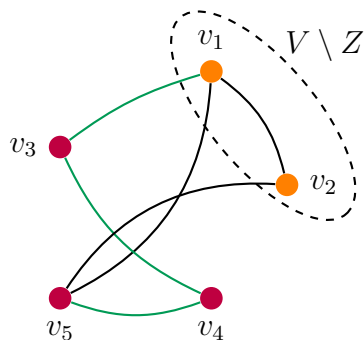


Figura 4.2: Ejemplo problema discreto de Neumann.

En este caso, la función $\sigma : \{v_3, v_4\} \longrightarrow \{v_1, v_2\}$ y consideremos $a_{w_1}, a_{w_2}, b \in \mathbb{R}$, por el Teorema 4.2 existe una única función $\mu : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 \mu(v) = 0 \quad v \in \{v_1, v_2\}, \\ \mu(w) - \mu(\sigma(w)) = a_w \quad w \in \{v_3, v_4\} \text{ y} \\ \mu(z) = b \quad \{z\} = \{v_3\}. \end{array} \right.$$

A_2, B_2 las matrices de adyacencia y valencia métrica del grafo (G, d) de grado 2, respectivamente, son las siguientes:

$$A_2 = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \text{y} \quad B_2 = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

entonces, su matriz $J_2 = B_2 - A_2$ es la siguiente:

$$J_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Notemos que al realizar $\Delta_2\mu(v) = 0$ es equivalente a realizar $J_2\mu(v) = 0$, es decir

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu(v_1) \\ \mu(v_2) \\ \mu(v_3) \\ \mu(v_4) \\ \mu(v_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3\mu(v_1) - \mu(v_2) - \mu(v_3) - \mu(v_4) &= 0 \\ -\mu(v_1) + 2\mu(v_2) - \mu(v_5) &= 0 \\ -\mu(v_1) + 2\mu(v_3) - \mu(v_4) &= 0 \\ -\mu(v_3) + 2\mu(v_4) - \mu(v_5) &= 0 \\ -\mu(v_1) - \mu(v_2) - \mu(v_4) + 3\mu(v_5) &= 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

ahora, $\mu(w) - \mu(\sigma(w)) = a_w$ es equivalente al siguiente sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \mu(w_1) \\ \mu(w_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu(\sigma(w_1)) \\ \mu(\sigma(w_2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{w_1} \\ a_{w_2} \end{pmatrix},$$

de donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mu(w_1) - \mu(\sigma(w_1)) &= a_{w_1}, \\ \mu(w_2) - \mu(\sigma(w_2)) &= a_{w_2}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

y $\mu(z) = b$, entonces para $\{z\} = Z \setminus W$ tenemos que

$$\mu(v_3) = b. \tag{4.6}$$

Por otra parte, tenemos que $|V| = n = 5$ y $|W| = m = 2$, ahora para $j = 1, 2$ se tiene que $\tau : \{1, 2\} \rightarrow \{4, 5\}$ definida de la siguiente manera: $\tau(1) = 4$ y $\tau(2) = 5$. Supongamos que $\sigma(v_1) = v_{\tau(1)}$ y $\sigma(v_2) = v_{\tau(2)}$, esto es, $\sigma(v_1) = v_4$ y

$\sigma(v_2) = v_5$. Identificamos a cada función $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ con el vector columna

$$x = \begin{pmatrix} \mu(v_1) \\ \mu(v_2) \\ \mu(v_3) \\ \mu(v_4) \\ \mu(v_5) \end{pmatrix}.$$

Descomponiendo en bloques $J_2 = B_2 - A_2$ tenemos:

$$J_2 = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{L_1} & \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{L_2} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{L_3} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}}_{L_2^t} & \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}}_{L_4} & \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}}_{L_5} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{L_3^t} & \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{L_5^t} & \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{L_6} \end{pmatrix},$$

y su matriz M de tamaño 2×2 es la siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

El problema de Neumann se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o de forma equivalente al sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned}
 x_1 - x_4 &= a_1 \\
 x_2 - x_5 &= a_2 \\
 x_3 &= b \\
 -x_3 + 2x_4 - x_5 &= 0 \\
 -x_1 - x_2 - x_4 + 3x_5 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

recordando que

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \mu(v_1) \\
 x_2 &= \mu(v_2) \\
 x_3 &= \mu(v_3) \\
 x_4 &= \mu(v_4) \\
 x_5 &= \mu(v_5)
 \end{aligned}$$

y recordando que $v_4 = \sigma(v_1)$ y $v_5 = \sigma(v_2)$, el sistema de ecuaciones 4.7, queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \mu(v_1) - \mu(\sigma(v_1)) &= a_1 \\
 \mu(v_2) - \mu(\sigma(v_2)) &= a_2 \\
 \mu(v_3) &= b \\
 -\mu(v_3) + 2\mu(v_4) - \mu(v_5) &= 0 \\
 -\mu(v_1) - \mu(v_2) - \mu(v_4) + 3\mu(v_5) &= 0.
 \end{aligned}$$

Observe que los sistemas de ecuaciones 4.4, 4.5 y 4.6 son equivalente al sistema 4.7 y la solución del sistema es:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= b + \frac{3a_1}{2} + \frac{a_2}{2}, \\
 x_2 &= b + a_1 + 2a_2, \\
 x_3 &= b, \\
 x_4 &= b + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} \text{ y} \\
 x_5 &= b + a_1 + a_2.
 \end{aligned}$$

Conclusiones

Existen modelos similares a los problemas de Dirichlet y Neumann que consisten en hallar una función solución de una ecuación en derivadas parciales, en consecuencia estos modelos pueden ser retomados para resolver problemas análogos. Los conceptos definidos en éste trabajo son de utilidad para establecer un modelo discreto de los problemas de Dirichlet y Neumann que se espera sirvan de motivación al lector en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales sobre grafos como las ecuaciones del tipo $\Delta_2\mu = f(\mu)$, donde $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones reales, ya que éstas ecuaciones tienen múltiples aplicaciones en el área de física.

Adicionalmente, otra de las intenciones del material presentado aquí es establecer las bases para un estudio futuro de los Grupos Kleinianos Planares y Estructuras Discretas de Riemann. Otra línea de continuación de éste trabajo es la extensión de la teoría aquí desarrollada a grafos dirigidos, multigrafos e hipergrafos.

Bibliografía

- [1] BAKER, M. Harmonic analysis on metrized graphs. *Canad J. Math* 59, 2 (2007), 225–275.
- [2] DIESTEL, R. *Graph Theory*, 3rd ed. Springer, 2005. [vi](#), [1](#), [15](#)
- [3] FOUNIER, J.-C. *Graph Theory and Applications with Exercises and Problems*. Wiley, Gran Bretaña, 2009. [vi](#)
- [4] FRIEDBERG, S. H. *Linear Algebra*, 4th ed. Prentice Hall, 2003.
- [5] HARRIS, J. M. *Combinatorics and Graph Theory*, 2nd ed. Springer, 2008.
- [6] HASSANI, S. *Mathematical Physics A Modern Introduction to Its Foundations*, 2da ed. Springer, 1999.
- [7] HIDALGO, R. *Introducción a las Estructuras de Superficie de Riemann Discretas*. Monografías Matemáticas, Versión preliminar 2007. [vi](#), [12](#), [44](#), [54](#), [57](#)
- [8] JOHNSONBAUGH, R. *Matemáticas Discretas*, 6ta ed. Prentice Hall, 2005.
- [9] KOLMOGOROV, A. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, 2da ed. Editorial Mir Moscú, 1975.
- [10] KURATOWSKI, K. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math* 15 (1930), 271–283. [15](#)
- [11] LANG, S. *Linear Algebra*, 3rd ed. Springer-Verlag New York, 2002.
- [12] ROSEN, K. H. *Discrete Mathematics and Its Applications*, 7th ed. McGraw-Hill, 2012. [1](#)

- [13] SIMMONS, G. F. *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, 2da ed. McGraw-Hill, Inc., 1993.
- [14] TRUDEAU, R. J. *Introduction to Graph Theory*, 2nd ed. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 1994. [VI](#)
- [15] WILSON, R. J. *Introduction to Graph Theory*, 4th ed. Prentice Hall, 1996. [VI](#)