Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Consecuencias del Axioma de Determinación en la Línea Real

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Matemáticas

por

Marco Antonio Zamora Sarabia

Asesorado por

Dr. Ivan Martínez Ruíz
Dr Alejandro Ramirez Paramo

Puebla Pue.
Junio de 2020

A mi dos madres, mi gran pradre Francisco y familia.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi familia por todo el apoyo resibido duerante mi carrera. Especialmente a mi madre que a sido mi sustento, mi motivación y anhelo para concluir con mi formación, a mi mamá Piedad por brindarme todo su apoyo, a mi papá Francisco por enseñarme a ser una persona humilde y trabajadora, a mis tias por motivarme todos los dias y mis hermanos.

A los Dr. Ivan Martinéz Ruiz y Dr. Alejandro Ramirez Paramo, por acetar dirigir y apoyar este trabajo, por su tiempo, enseñanza y comprensión que tuvieron conmigo a pesar de las adversidades de estos tiempos incirtos.Muchas gracias por que no me dejaron de apoyar en todo momento y debido a su esfuerzo pude salir adelante.

A mis sinoidales: Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, Dr. Agustin Contreras Carreto y Dr. Francisco Javier Mendoza Torres, por aceptar revisar y enriquecer esta tesis, así como su gran apoyo y amabilidad que obtuve de su parte a lo largo de la carrera. Así tambien quiero agradecer al profesor Soriano y Manuel Ibarra por sus enseñanzas en sus cursos.

A todos los compañeros que conoci y que me apoyaron a lo largo de mi formación. Especialmente le agradesco mucho a mi compañera, amiga y novia Erika Garcia Rodrigez por que en ella encontre una perosona en que confiar, en quien apoyarme, y lo más importante ella me dio el calor de un familiar, que se necesita mucho cuando te aventuras solo en una gran ciudad, gracias a ella yo jamás estuve solo, siempre la tuve a ella.

Índice general

Introducción

En 1904, Ernest Zermelo formuló por primera vez de manera formal el Axioma de Elección, posteriormente 1922 Zermelo junto con las ideas de Abrahan Fraenkel publicó una axiomatización para la teoría de conjuntos, la cual se le conoce por Zermelo-Fraenkel (ZFC), en el cual estaba presente el Axioma de Elección. Sin embargo, esté último fue cuestionado por matemáticos de la época tales como Borel, Baire y Lebesgue, ya que este establece la existencia de un cierto conjunto sin dar una definición explicita del mismo. Por otro lado, en 1902, Lebesgue comenzaba a intentar extender la noción de integración desarrollada por Riemann, tratando de buscar una función que pudiera medir a todos los conjuntos de números reales y que cumplieran ciertas características relacionadas a la noción de longitud. A este planteamiento lo denominó como el Problema de la medida. Este problema estuvo abierto hasta en 1906, cuando el matemático Giusppe Vitali demostró que la respuesta al planteamiento de Lebesgue era negativa. Este resultado junto con la paradoja de Banach-Tarski, publicada en 1924, originó una crisis en la matemática debido a que ambos resultados usaban fuertemente el Axioma de Elección, lo que hizo pensar que **AC** conducía a una contradicción y que el sistema de axiomas **ZFC** era inconsistente. Sin embargo, entre 1930 y 1936 Gödel, demostró que la consistencia de **ZF** no se puede deducir dentro de **ZF**, y que si **ZF** es consistente entonces **ZFC** es consistente, cerrando así el debate que existía en torno al Axioma de Elección.

Tras los resultados de Gödel, hubo un periodo de calma en el que AC había sido adoptado plenamente, surgiendo nuevas consecuencias del Axioma de Elección, como la existencia de conjuntos de $\mathbb{R}$ que no cumplen con la propiedad del conjunto perfecto o la propiedad de Baire. Varios matemáticos pensaron que si queremos evitar estas consecuencias, lo inmediato sería pensar en una teoría que se sustente únicamente en el sistema de axiomas **ZF**, sin embargo muchos otros resultados quedarían fuera de nuestro alcance por lo que surgió la idea de introducir un axioma adicional. Se intentaron varias alternativas, desde debilitar el Axioma de Elección hasta plantear nuevos axiomas. Fue en 1962, cuando dos matemáticos polacos, Jan Mycielski y Hugo Steinhaus, gracias a conceptos de la teoría de los juegos infinitos, introdujeron el Axioma de Determinación (abreviado como **AD**) como una alternativa al Axioma de Elección.

Este trabajo tiene como objetivo estudiar y presentar las consecuencias de asumir **AD** como verdadero, usando conceptos y técnicas de teoría de conjuntos y de la topología.

La tesis está dividida en tres capítulos, el primero de ellos esta dedicado a presentar las nociones necesarias de teoría de conjuntos y topología, además estudiaremos las nociones básicas de teoría de la medida, para poder presentar el problema de la medida de Lebesgue, así como la demostración de Vitali y su uso del Axioma de Elección para responder ducho problema. Para terminar el capítulo probaremos que todos los conjuntos analíticos son Lebesgue medibles, utilizando esquemas de Souslin.

Posteriormente en el segundo capítulo, **AD** será introducido, se abordará el hecho de que no es compatible con **AC** y mostraremos la consecuencias que se tienen de suponer como cierto este axioma en la recta real.

Finalmente en el tercer capítulo, introduciremos los conjuntos flip y sus consecuencia bajo **AD**, además estudiaremos la teoría de reducibilidad de Wadge.

Capítulo 1. Preliminares

En el presente capítulo exponemos conceptos y resultados básicos, principalmente de topología y teoría de conjuntos; con la finalidad de hacer en la medida de lo posible, un trabajo autocontenido. El lector interesado en alguno de los temas aquí expuestos puede consultar las referencias [3] y [5].

Primero, denotaremos por **ZF** a los Axiomas de Zermelo-Frankel.

Axioma 1 (de Existencia). Hay un cojunto que no tiene elementos.

Axioma 2 (de Extensión). Si todo elemento de X es un elemento de Y y todo elemento de Y es un elemento de X, entonces $X = Y$.

Axioma 3 (Esquema de Comprensión). Sea **P** una fórmula. Para cualquier conjunto A hay un conjunto B tal que $x \in B$ su y sólo si $x \in A$ y x satisface la formula **P**.

Axioma 4 (del Par). Para cualesquiera conjuntos a y b hay un conjunto C tal que $x \in C$ si y sólo si $x = a$ o $x = b$.

Axioma 5 (de Unión). Para cualquier conjunto S, existe un conjunto U tal que $x \in U$ si y sólo si $x \in X$para algún $X \in S$.

Axioma 6 (del Conjunto Potencia). Para cualesquier conjunto X, existe un conjunto S tal que $A \in S$ si y sólo si $A \subseteq X$.

Axioma 7 (de Fundación). En cada conjunto no vacío A existe $u \in A$ tal que u y A son ajenos.

Axioma 8 (de Infinitud). existe un conjunto indutivo.

Axioma 9 (Esquema de Remplazo). Sea $\mathbf{P}(x, y)$ una formula tal que para toda x existe un único y para el cual $\mathbf{P}(x, y)$ se satisface.

Para todo conjunto A, existe un conjunto B tal que,para toda $x \in A$, existe $y \in B$ para el cual $\mathbf{P}(x, y)$ se satisface.

Hay muchas formas de enunciar al Axioma de Elección, para nuestros propósitos lo enunciaremos de la siguiente manera: se entenderá por **Axioma de Elección** cualquiera de los siguientes enunciados.

- Para todo conjunto A no vació, existe una función $e : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ tal que $e(B) \in B$ para todo $B \in \mathcal{P}(A)$.

- Si $\mathcal{A}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos y ajenos dos a dos, entonces existe un conjunto B tal que para toda $A \in \mathcal{A}$, $A \cap B$ es un conjunto unitario.

- Todo conjunto puede ser bien ordenado.

Dicho axioma se abreviara como "**AC** ". El propósito de esta tesis es presentar algunas de las consecuencias del Axioma de Determinación, el cual, como veremos en los capítulos posteriores, es incompatible con **AC**. Entonces, el sistema de axiomas que estaremos asumiendo como base es **ZF**, junto con una versión más débil del Axioma de Elección, la cual nos dice: sea R una relación binaria en un conjunto no vacío A, si para todo $a \in A$ existe $b \in A$ tal que bRa entonces existe una sucesión $(a_0, a_1, a_2, ...)$ de elementos de A tal que $a_{n+1}Ra_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta versión se le conoce como el principio de Elecciones Dependientes, el cual es necesario para definir sucesiones de manera inductiva, y se denotará por **DC**.

Recordemos que un conjunto α es un ordinal si y sólo si es bien ordenado por la relación $\in_\alpha$, y es transitivo. Además, un número cardinal es un ordinal que no es biyectable con ninguno de sus elementos. Es costumbre en teoría de conjuntos nombrar a los números ordinales con las letras griegas α, β, γ y ζ. Todo número natural será considerado como ordinal y denotaremos a la colección de todos los números naturales con letra griega ω (incluyendo el 0).

Definición 0.1. *1. Un ordinal β es sucesor si es de la forma $\alpha \cap \{\alpha\} = \alpha^+$ para algún α.*

2. Un ordinal es límite si y sólo si noe es vacío y no es sucesor.

Ahora definiremos la condición de equipotencia entre conjuntos.

Definición 0.2. *Sea A y B conjuntos, entonces*

a) Se usará la notación $|A| \leq |B|$ para expresar que "existe una función inyectiva de A en B".

b) Se usara la notación $|A| < |B|$ para expresar que "$|A| \leq |B|$ pero no existe ninguna biyección entre $|A|$ y $|B|$".

c) Diremos que A y B son equipotentes si existe una función biyectiva de A en B, y se denotará como $|A| = |B|$.

No podemos utilizar la noción clásica de cardinalidad de un conjunto debido a que en ZF, pueden existir conjuntos cuyo número cardinal no exista, sin embargo, los números cardinales de ω y $\mathbb{R}$ existen y son $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$ respectivamente. Utilizaremos la notación $|A| = \aleph_0$ para referirnos al hecho de que existe una biyección entre ω y A, si ésto pasa diremos que A es numerable.

No es difícil, probar que la condición $|A| \leq |B|$ es una relación reflexiva y transitiva.

Ahora, presentaremos un teorema muy importante en teoría de conjuntos cuya demostracion la puedes consultar en [3].

Teorema 0.3 (Cantor-Shroder- Bernstein). *Si A, B son conjuntos tales que existe una función inyectiva de A a B y existe una función inyectiva de B a A entonces A y B son equipotentes.*

Definición 0.4. *Sean A y B conjuntos. Denotamos por B^A a la colección de todas las funciones de A en B.*

Dado un conjunto A no vacío y $n \in \omega$, se define al conjuntos de todas la sucesiones de longitud n denotado por A^n, a la colección de todas las funciones $s : \{0, , ..., n-1\} \to \omega$. Si $s \in A^n$, para cada $i \in \omega$, denotaremos como $s_i = s(i)$ y escribiremos a $s = (s_0, s_1, s_2, ..., s_n - 1) = (s(0), s(1), s(2), .., s(n-1))$, más aún, a n se le denominará como la longitud de s y se denota por $l(s)$. En el caso de que $n = 0$ definimos como $A^0 = \{\emptyset\}$ donde $\emptyset$ se toma como la sucesión vacía.

El conjunto definido como:

$$A^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} A^n$$

es llamado el conjunto de sucesiones finitas de A. Si $A = \omega$ entonces $\omega^{<\omega}$ es el conjunto de las sucesiones finitas de números naturales; generalizando este concepto a un producto cartesiano numerable infinito obtenemos la siguiente definición .

Definición 0.5. *El conjunto de las sucesiones infinitas de números naturales, denotado por ω^ω, es la colección de todas la funciones de ω a ω.*

Los siguientes resultados son importantes en el desarrollo de nuestro trabajo, ya que serán utilizados en posteriores capítulos.

Proposición 0.6. *El conjunto $\omega^{<\omega}$ es equipotente a ω.*

Demostración. Sea P el conjunto de los números primos. Sea $p : \omega \to P$ la biyección garantizada en **ZF**. Definamos a $f : \omega^{<\omega}\backslash\{\emptyset\} \to \omega$ como sigue: $f(x) = p(0)^{x_0} \cdot p(1)^{x_1} \cdot \cdots \cdot p(l(x)-1)^{x_{l(x)-1}}$ donde $x = (x_0, x_1, \cdots, x_{l(x)-1})$.

Veamos que f es inyectiva. Sean $x, y \in \omega^{<\omega}\backslash\{\emptyset\}$ distintos; si $l(x) \neq l(y)$ entonces $f(x) \neq f(y)$ debido a la unicidad de la descomposición en potencias de primos. Ahora, si $l(x) = l(y)$ definimos a $A = \{m < l(x) : x(m) \neq x(m)\}$; sea $A \neq \emptyset$ ya que x, y son distintas, por lo tanto, existe $k < l(x)$ tal que $k = min(A)$ por lo que $p(k)^{x(k)} \neq p(k)^{y(k)}$ y por la unicidad de la descomposición de primos se implica que $f(x) \neq f(y)$, por lo tanto f es inyectiva.

Ahora, tomemos a $g : \omega \to \omega^{<\omega}$ dada por $g(n) = \{(0, n)\}$ para cada $n \in \omega$, ya que g está bien definida y es inyectiva, se concluye que, ω es equipotente a ω. ■

Teorema 0.7. *Los conjuntos 2^ω y ω^ω son equipotentes.*

Demostración. Dado que $2^\omega \subset \omega^\omega$ entonces tomamos la función inclusión la cual es inyectiva, por lo tanto $|2^\omega| \leq |\omega^\omega|$.

Ahora definamos a $f : \omega^\omega \to 2^\omega$ como sigue

$$f(x)(n) := \begin{cases} 1 & \text{si existe } m \in \omega \text{ tal que } n = \sum_{i=0}^{m} x(i) + m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1}$$

Veamos que f es inyectiva. Sean $x, y \in \omega^\omega$ distintas. Sea $A = \{i \in \omega : x(i) \neq y(i)\}$, es claro que $A \neq \emptyset$ por ser x distinta de y, por lo que A tiene mínimo. Sea $k = minA$. Notemos que $x(n) = y(n)$ para cada $n < k$. Luego supongamos sin pérdida de generalidad que $x(k) < y(k)$.

Definamos $l = \sum_{i=0}^{k} x(i) + k$, entonces por definición de f, $f(x)(l) = 1$. Para demostrar que $f(x) \neq f(y)$, basta ver que para cada $m \in \omega$ se tiene que $l \neq \sum_{i=0}^{m} y(i) + m$. Tenemos dos casos:

Si $m < k$, se deduce que $x(i) = y(i)$ para cada $i \leq m$ por lo que

$$\sum_{i=0}^{m} y(i) + m = \sum_{i=0}^{m} x(i) + m < \sum_{i=0}^{k} y(i) + k = l$$

Ahora supongamos que $m \geq k$. Entonces

$$l = \sum_{i=0}^{k} x(i) + k < \sum_{i=0}^{k} y(i) + k \leq \sum_{i=0}^{m} y(i) + k \leq \sum_{i=0}^{m} y(i) + m$$

por lo que $l \neq \sum_{i=0}^{m} y(i) + m$.

Entonces, se concluye que $\sum_{i=0}^{m} y(i) + m \neq l$ para todo $m \in \omega$, de lo cual se sigue que

$$f(y)(l) = 0 \neq i = f(x)(l),$$

por lo tanto f es inyectiva. ■

Lema 0.8. *Si A es equipotente a A' y B es equipotente a B' entonces A^B es equipotente a ${A'}^{B'}$.*

Demostración. Sabemos que existe $f : A \to A'$ y $g : B \to B'$ funciones biyectivas y sea $F : A^B \to {A'}^{B'}$ definida como sigue: si $k \in A^B$, sea $F(k) = h$ donde $h : B' \to A'$ es tal que $h(g(b)) = f(k(b))$ para todo $b \in B$. Entonces F es biyectiva. ■

0.1. Espacios Topológicos

Recordemos que un espacio topológico es un par ordenado (X, τ) donde X es un conjunto y τ una familia de subconjuntos de X, que cumplen las siguiente propiedades:

a. Para toda $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$, $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$.

b. Para toda $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ con I finito, $\bigcap_{i\in I} A_i \in \tau$.

Los elementos de X se llaman puntos y los elementos de τ son llamados conjuntos abiertos de (X, τ). Decimos que un conjunto $A \subseteq X$ es cerrado si $X \backslash A \in \tau$.

Definición 0.9. *Sea (X, τ) es un espacio topológico y $A \subseteq X$.*

1 El interior de A en (X, τ), que denotaremos por $int(A)$, es la unión de todos los conjuntos abiertos de (X, τ) contenidos en A.

2 La cerradura de A en X, denotada por $cl_X(A)$, se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados de (X, τ) que contienen a A. Cuando no haya confusión sobre el espacio en el cual se toma la cerradura del conjunto A, ecribiremos simplemente $\overline{A}$, para referirnos a la cerradura de A.

En algunas ocasiones la familia de abiertos de una topología suele ser basta y difícil de manejar, por lo que es interesante plantearse si ésta se puede describir de una forma más simple, si podemos encontrar subfamilias de abiertos más sencillos con la capacidad de poder regenerar mediante operaciones conjuntistas básicas todos los abiertos del espacio. Este es el objetivo de la siguiente definición.

Definición 0.10. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $\beta \subseteq \tau$, se dice que β es una* **base** *de τ, si para todo $O \in \tau$ existen un conjunto de índices I y $\{b_i : i \in I\} \in \beta$ tales que*

$$O = \bigcup_{i\in I} B_i.$$

Una caracterización de las bases muy utilizada es la siguiente proposición.

Proposición 0.11. *Si (X, τ) es un espacio topológico y $\beta \subseteq \tau$. Entonces, β es una base de τ si y sólo si, para toda $U \in \tau$ y para toda $x \in U$ existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subseteq U$.*

Dado un conjunto X, sin estructura topológica, es posible a partir de una familia β de subconjuntos de X, dotarlo de una topología.

Teorema 0.12. *Si X es un conjunto y $\beta \subseteq \mathcal{P}(X)$ entonces son equivalentes:*

a. β es una base de una topología τ en X.

b. β satiface:

i. Para toda $x \in X$ existe $B \in \beta$ tal que $x \in B$.

ii. Para todo $B, C \in \beta$ y para toda $x \in B \cap C$ existe $B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x \subseteq B \cap C$.

Además, el concepto de base no es la única manera de conocer una cierta topología mediante una cierta familia de abiertos.

Definición 0.13. *Si (X, τ) es un espacio topológico y γ una familia de subconjuntos de X, se dice que γ es* **subbase** *de τ si*

$$\beta(\gamma) = \left\{ \bigcap_{j \in J} B_j : B_j \in \gamma \text{ para todo } j \in J, J \text{ finito} \right\}$$

es una base de τ.

Una vez establecidos estos conceptos, introduciremos la topología producto, la cual será importante para el estudio.

Definición 0.14. *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia de espacios no vacíos y $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$. Dada $\alpha \in J$, definamos la función $\pi_\alpha : X \to X_\beta$, definida por $\pi_\alpha(x) = X(\alpha)$ para toda $x \in X$.*

Sabemos que necesitamos AC para asegurar que $X \neq \emptyset$, sin embargo, podemos considerar al conjunto $\emptyset$, como un espacio topológico.

Definición 0.15. *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos. La topología producto del espacio $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, es la que tiene como subbase a la familia*

$$\{\pi^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in J \text{ y } U_\alpha \text{ es abierto de } X_\alpha\}.$$

De modo que, por la definicion 0.13, una base para la topología producto es:

$$\{\bigcap_{\alpha \in F} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) : F \subseteq J, F \text{ finito, y } U_\alpha \text{ es abierto de } X_\alpha, \text{ para cada } \alpha \in F\}.$$

Además no es difícil verificar que

$$\phi_\beta^{-1}(U_\beta) = \prod_{\alpha \in J} B_\alpha,$$

donde $B_\beta = U_\beta$ y $B_\alpha = X_\alpha$ para cada $\alpha \in J \backslash \{\beta\}$.

Ahora supongamos que U es un básico de X entonces

$$U = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}),$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in J$ y U_α es abierto de X_α, para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Por lo anterior se tiene que

$$\phi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \phi_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap ... \cap \phi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}) = \prod_{r \in J} C_r,$$

donde $C_{\alpha_i} = U_{\alpha_i}$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $C_r = X_r$ para cada $r \in J \backslash \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$, y como dentro de cualquier abierto, existe un básico que está contenido en él. Por lo que, se obtiene el siguiente resultado.

Lema 0.16. *Sea $\{X_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos. Entonces la colección*

$$\beta = \{\prod_{\alpha \in J} B_\alpha : B_\alpha \in \beta_\alpha, B_\alpha = X_\alpha \text{ si } \alpha \notin F, F \subseteq J, F \text{ finito } \},$$

donde β_α es base de τ_α para todo $\alpha \in J$, es una base para el espacio producto. Dicha base se le conoce como la base canónica.

0.2. La topología de ω^ω

El objetivo de esta sección es dar una descripción de la topología de ω^ω. En la sección anterior, vimos la topología producto de una cantidad infinita de espacios topológicos, pero debido a que no suponemos **AC**, no garantizamos que el producto de conjuntos no vacíos sea no vacía. Sin embargo, ésto no va a suponer algún problema a la hora de trabajar con los productos topológicos numerables, ya que las propiedades que necesitamos de los productos numerables son demostrables en **ZF+DC**. Empecemos recordando algunos conceptos necesarios.

Si $s \in A^n$ y $m \leq n$, entonces $s|m = (s_0, ..., s_{m-1})$. Si s, t son sucesiones de ω, decimos que s es un **segmento inicial** de t o bien que t es una extensión de s denotado por $s \subseteq t$, si $s = t|m$ para algún $m \leq l(t)$. Notemos que $\emptyset \subseteq s$ para toda sucesión finita.

Definición 0.17. *Sean $s, t \in A^{<\omega}$, la* ***concatenación de s y t*** *denotada por $s^\frown t$, es definida por*

$$s^\frown t(i) := \begin{cases} s(i) & si\ i < l(s) \\ t(i - l(s)) & si\ l(s) \leq i < l(t) + l(s) \end{cases}$$

es decir, si $l(s) = n$ y $l(t) = m$ entonces

$$s^\frown t = (s(0), ..., s(n-1), t(0), ..., t(m-1)) \in A^{n+m}.$$

Para $s \in \omega^{<\omega}$ y $x \in \omega^\omega$ la concatenación $s^\frown x$ se dará por

$$s^\frown x(i) := \begin{cases} s(i) & si\ i < l(s) \\ x(i) & si\ l(s) \leq i. \end{cases}$$

Notemos que si $s \in A^n$ con $n \in \omega$ y $a \in A$, entonces
$s^\frown(a) = (s(0), s(1), \cdots, s(l(s)-1), a)$.

Definición 0.18. *Sean A un conjunto no vacío y $s \in A^{<\omega}$. Se define el conjunto $\langle s \rangle = \{x \in A^\omega : s \subseteq x\}$ al cual llamaremos cono generado por s.*

Observemos que $s \subseteq t$ si y sólo si $\langle t \rangle \subseteq \langle s \rangle$. Además $\langle s \rangle \cap \langle t \rangle = \emptyset$ si y sólo si $s \not\subseteq t$ y $t \not\subseteq s$.

Los conos generados por los elementos de $A^{<\omega}$, están estrechamente relacionados con la topología producto de la siguiente forma.

Tomemos al conjunto no vacío A con la topología discreta, por el Lema 0.16 una base para el producto topologico A^ω es la colección

$$\{\prod_{n\in\omega} B_n : B_n \in \beta_n, B_n = A^\omega \text{ si } n \notin J, J \subseteq \omega, J \text{ finito } \}$$

donde $\beta_n = \{\{x\} : x \in A\}$ para todo $n \in \omega$, ya que, es un base para la topología discreta, por tanto $| B_n |= 1$ para una cantidad finita de n y $B_n = X_n$ para los demás n. Dicho esto podemos probar el siguiente resultado el cual nos dará la descripción de la topología de A^ω.

Proposición 0.19. *El conjunto $\{\langle s \rangle : s \in A^{<\omega}\}$ forma una base para el espacio topológico A^ω.*

Demostración. Si $s \in A^{<\omega}$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $s \in A^n$, definamos una familia de abiertos $\{B_i\}_{i\in\omega}$ donde para cada $m < n, B_m = \{s_m\}$ y si $m \geq n$, $B_n = A$, entonces $\prod_{n\in\omega} B_n \subseteq \langle s \rangle$.

Luego, si $\prod_{n\in\omega} B_n$ es un básico canónico del espacio producto A^ω y para todo $n \in J$ se tiene que $|B_n| = 1$ donde $B_n \in \beta_n$, podemos tomar a $n_0 = \text{máx} J$ entonces si para cada $m \in \omega$ tal que $m \leq n_0$ eligimos $x_n \in B_n$ y a $s : n_0 + 1 \to A$ una función tal que para cada $m \leq n_0$, $s(m) = x_m$, entonces $\langle s \rangle \subseteq \prod_{n\in\omega} B_n$.

■

Si consideramos a $A = \omega$, entonces obtenemos la siguiente definición.

Definición 0.20. *El espacio ω^ω con la topología τ que tiene como base canónica a la familia $\{< s >: s \in \omega^{<\omega}\}$, se le conoce como el espacio de Baire.*

A partir de ahora, cada vez que tomemos a ω^ω, lo estaremos considerando como el espacio de Baire.

Ahora, pasemos a dar algunas propiedades sobre continuidad y convergencia en ω^ω, que serán de gran ayuda posteriormente.

Teorema 0.21. *Una función $f : \omega^\omega \to \omega^\omega$ es continua en $x \in \omega^\omega$ si y sólo si para todo $s \subseteq f(x)$, existe $t \subseteq x$ tal que $s \subseteq f(y)$ para todo $y \in \langle t \rangle$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $s \subseteq f(x)$, como f es una función continua en x, entonces para el conjunto básico abierto $\langle s \rangle$, existe un conjunto abierto $U \in \omega^\omega$ el cual cumple que $x \in U$ y $f(U) \in \langle s \rangle$. Dado que U es abierto entonces existe $t \in \omega^{<\omega}$ tal que $x \in \langle t \rangle \subseteq U$, por lo tanto para todo $y \in \langle t \rangle$, $f(y) \in \langle s \rangle$, lo cual implica que $s \subseteq f(y)$.

$\Leftarrow$] Sea V un conjunto abierto en ω^ω tal que $f(x) \in V$, entonces existe $s \in \omega^{<\omega}$ tal que $f(x) \in \langle s \rangle \subseteq V$. De lo cual se deduce que $s \subseteq f(x)$ y por lo tanto existe $t \subseteq x$ tal que $s \subseteq f(y)$ para toda $y \in \langle t \rangle$, es decir $x \in \langle t \rangle$ y $f(\langle t \rangle) \in \langle s \rangle \subseteq V$, donde $\langle t \rangle$ es un conjunto abierto básico. Por lo tanto f es continua. ■

Teorema 0.22. *Sean $x \in \omega^\omega$ y $(x_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de elementos de ω^ω tal que para todo $k \in \omega$ $x_k(i) = x(i)$ para cada $i = 0, ..., k-1$. Entonces x_n converge a x.*

Demostración. Sea U un abierto en ω^ω tal que $x \in U$, entonces existe $t \in \omega^{<\omega}$ tal que $x \in \langle t \rangle \subseteq U$, tomando a $n_0 = l(s)$, sabemos que para toda $k \geq n_0$, se tiene que $x_k(i) = x(i)$ con $i = 0, ..., k-1$. Por lo tanto $x_k \in \langle t \rangle \subseteq U$ para toda $k \geq n_0$. ■

0.3. Conceptos de teoría de la medida

La medida de Lebesgue tiene un papel importante en esta tesis, más específico, con los conjuntos Lebesgue medibles. Usaremos el Axioma de Elección para demostrar la existencia de conjuntos que no son Lebesgue medibles.

Sabemos que la longitud de un intervalo de la recta real es la diferencia, en valor absoluto, de sus puntos extremos:

$$\mathscr{L}((a,b)) = \mathscr{L}((a,b]) = \mathscr{L}([a,b)) = \mathscr{L}([a,b]) = b - a$$

Parece natural extender la noción de longitud a conjuntos de puntos de la recta real más complicados que los intervalos. Varios matemáticos tratarón de abordar este tema, pero fue Henri Lebesque, quien dijo que en el caso de la recta real, lo verdaderamente importante es preguntarse, si existe una función m, llamada medida, tal que a cada conjunto acotado de números reales le asocie un número real no negativo, y que cumpla las siguientes características:

a) m no es la función constante 0.

b) Para todo intervalo I de $\mathbb{R}$, se cumple que $m(I) = \mathscr{L}(I)$.

c) Para cada $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces $m(r + A) = m(A)$, donde $r + A = \{r + a : a \in A\}$. Esta propiedad recibe el nombre invariancia bajo traslaciones.

d) Si $\{A_n : n \in \omega\}$ es una colección de conjuntos ajenos por pares cuya unión es un conjunto acotado de reales, entonces

$$m(\bigcup_{n\in\omega} A_n) = \sum_{n\in\omega} m(a_n).$$

Para referirnos a esta propiedad, diremos que m es σ-aditiva.

Notemos que un resultado consecuente de las propiedades anteriores es el siguiente: si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tales que $A \subseteq B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Este problema, planteado en la tesis doctoral de Lebesque, se le conoce como el *Problema de la medida.* Lebesgue trató de dar una respuesta afirmativa a este problema, construyendo una función que cumpliera con las características antes mencionadas.

A continuación daremos la construcción clásica de la medida de Lebesgue, así como algunas propiedades y problemas a los que Lebesgue se enfrentó al construir su función. los resultados que no sean demostrado se pueden colsultar en [2] y [8].

Lebesgue partió del hecho de que, lo único que sabemos "medir" son intervalos, además cualquier subconjunto de números reales, se puede cubrir mediante uniones numerables de intervalos y como queremos que la función m sea σ-aditiva, entonces propuso la siguiente función.

Definición 0.23. *Definimos la función $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$ como:*

$$\mu^*(A) = inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{L}(I) : \{I_n\}_{n\in\omega}, A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right\},$$

donde $\{I_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de intervalos en $\mathbb{R}$. A μ^* se le llama medida exterior.

De manera inmediata obtenemos algunas propiedades.

Proposición 0.24. *Sea μ^* la medida exterior de Lebesgue, entonces se cumple:*

- $\mu^*(\emptyset) = 0$.
- *Monotonía: Si $A \subseteq B$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*
- *Subaditividad: Para toda sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{P}(X)$ se tiene que*

$$\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

- *Si I es un intervalo no vacío en $\mathbb{R}$, se tiene que $\mu^*(I) = \mathscr{L}(I)$.*

Recordemos que Lebesgue construyó esta medida para generalizar la noción de longitud de los intervalos a conjuntos más complicados de números reales. Recordemos que una propiedad de los intervalos es la siguiente: si consideramos al intervalo I y a una traslación de este conjunto por un número real c, es decir, $c + I = \{c + I : x \in I\}$, la longitud de ambos conjuntos será el mismo número real $\mathscr{L}(I) = \mathscr{L}(c + I)$. A esta característica se le llama *invarianza bajo traslaciones.* No es difícil verificar que μ^* también es invariante bajo traslaciones.

Teorema 0.25. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto y sea μ^* la medida exterior, entonces para todo $c \in \mathbb{R}$ se tiene que $\mu^*(c + A) = \mu(A)$.*

0.3.1. Conjuntos Medibles

Los resultados anteriores establecen que la medida exterior μ^* cumple las condiciones del problema de la medida salvo la σ-aditividad ya que sólo tenemos que μ^* es subaditiva, sin embargo, el hecho de que no hayamos podido probar la aditividad numerable de μ^* no significa aún que no exista una manera de demostrarla; un intento para resolver ésto es restringirnos a ciertos conjuntos donde μ^* sea σ-aditiva. Veremos que tal restricción existe y que su construcción se basa en una simple, aunque notable, condición debida a Carathéodory.

Definición 0.26. *(Carathéodory) Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice Lebesgue medible si para todo $B \subseteq \mathbb{R}$*

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \backslash A).$$

Denotaremos por $\mathcal{M}$ a la familia de los conjuntos Lebesgue medibles.

En ocasiones diremos simplemente que un conjunto es medible para referirnos a que es Lebesgue medible.

Observación 0.27. *Sabemos que $B = (B \cap A) \cup (B \backslash A)$ para cualesquiera $A, B \subseteq \mathbb{R}$, y como μ^* es subaditiva entonces*

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \backslash A).$$

Por lo tanto, para que un conjunto A sea medible, sólo basta que para todo $B \subseteq \mathbb{R}$ se cumpla:

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \backslash A) \leq \mu^*(B).$$

Notemos que $\mathcal{M}$ es no vacío, ya que $\mathbb{R}, \emptyset \in \mathcal{M}$. Además, dados J, un intervalo, $A \subseteq \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ y $\{I_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de intervalos tales que

$$A \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n \text{ y } \sum_{n\in\omega} \mathscr{L}(I_n) \leq \mu^*(A) + \epsilon,$$

entonces $A \cap J \subseteq \bigcup_{n\in\omega}(I_n \cap J)$ y $A \backslash J \subseteq \bigcup_{n\in\omega}(I_n \backslash J)$. Por la Proposición 0.24 tenemos que:

$$\mu^*(A \cap J) \leq \mu^*(\bigcup_{n\in\omega}(I_n \cap J) \leq \sum_{n\in\omega} \mu^*(I_n \cap J) = \sum_{n\in\omega} \mathscr{L}(I_n \cap J) \text{ y}$$

$$\mu^*(A \backslash J) \leq \mu^*(\bigcup_{n\in\omega}(I_n \backslash J) \leq \sum_{n\in\omega} \mu^*(I_n \backslash J) = \sum_{n\in\omega} \mathscr{L}(I_n \backslash J).$$

La última igualdad se debe a que $I_n \cap J, I_n \backslash J$ son uniones numerables de intervalos disjuntos para toda $n \in \omega$. Entonces por las desigualdades anteriores se tiene que para todo $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap J) + \mu^*(A \backslash J) &\leq \sum_{n\in\omega} \mathscr{L}(I_n \cap J) + \mathscr{L}(I_n \backslash J) \\ &\leq \sum_{n\in\omega} \mathscr{L}(I_n) \\ &\leq \mu^*(A) + \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mu^*(A \cap J) + \mu^*(A \backslash J) \leq \mu^*(A)$. Entonces, por la observación 0.27, se concluye que J es medible. Además, a partir de cómo están definidos los conjuntos Lebesgue medibles, es claro que si $A \in \mathcal{M}$ entonces $\mathbb{R} \backslash A \in \mathcal{M}$.

Definamos un concepto de gran importancia, el cual nos ayudará para saber más de los conjuntos medibles y sus propiedades.

Definición 0.28. *Sea X un conjunto no vacío. Una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se llama una σ-álgebra si cumple:*

- *$X \in \mathcal{A}$,*
- *si $A \in \mathcal{A}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{A}$, y*
- *si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in A$.*

El ejemplo más sencillo de una σ-álgebra es $\mathcal{P}(X)$, por lo que da lugar a la siguiente definición.

Proposición 0.29. *Dada una familia S de subconjuntos de X, entonces el conjunto*

$$\mathcal{A}(S) = \bigcap\{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ es } \sigma\text{-algebra y } A \subseteq \mathcal{A}\}$$

es una σ-álgebra, la cual llamaremos σ-álgebra generada por el conjunto S.

Veremos a continuación que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra. Ésto será de gran ayuda ya que no basta que μ^* sea σ-aditiva, sino que también los conjuntos medibles se porten bien entre sí.

Teorema 0.30. *La familia de conjuntos $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra. Más aún $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ es σ-aditiva.*

Demostración. Probemos en primer lugar que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra. Ya vimos que $\mathbb{R}, \emptyset \in \mathcal{M}$ y que si $A \in \mathcal{M}$, entonces $\mathbb{R}\setminus A \in \mathcal{M}$. Consideremos $B_1, B_2 \in \mathcal{M}$, demostremos que $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{M}$, para ello sea $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces tenemos que:

$$\begin{gathered}\mu^*[A \cap (B_1 \cup B_2)] + \mu^*[A \cap \mathbb{R}\setminus(B_1 \cup B_2)] = \\ \mu^*[A \cap (B_1 \cup B_2) \cap B_1] + \mu^*[A \cap (B_1 \cup B_2) \cap \mathbb{R}\setminus B_1] + \mu^*[A \cap \mathbb{R}\setminus(B_1 \cup B_2)] = \\ \mu^*[A \cap B_1] + \mu^*[A \cap B_2 \cap \mathbb{R}\setminus B_1] + \mu^*[A \cap \mathbb{R}\setminus B_2 \cap \mathbb{R}\setminus B_1] = \mu^*[A \cap B_1] + \mu^*[A \cap \mathbb{R}\setminus B_1] = \mu^*(A).\end{gathered}$$

Por otra parte, observe que si $E, F \in \mathcal{M}$ son tales que $E \cap F = \emptyset$ y $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces como E es medible se tiene que:

$$\mu^*[A \cap (E \cup F)] = \mu^*[A \cap (E \cup F) \cap E] + \mu^*[A \cap (E \cup F) \cap \mathbb{R}\setminus E] = \mu^*[A \cap E] + \mu^*[A \cap F]$$

Mediante un proceso inductivo podemos obtener, a partir de la ecuación anterior, que si $n \in \omega$ y $\{E_i \in \mathcal{M} : i \in n\}$ es una colección de conjuntos ajenos dos a dos, entonces para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que

$$\mu^*\Big(A \cap (\bigcup_{i=0}^{n} E_i)\Big) = \sum_{i=0}^{n} (A \cap E_i).$$

Ahora, tomemos $\{E_m : m \in \omega\}$ una familia de conjuntos medibles. Sea $E := \bigcup_{m\in\omega} E_m$, Queremos probar que E es medible, para ello definamos la siguiente sucesión: sea $B_0 = E_0$ y $B_n = E_n \cap (\mathbb{R}\setminus(\bigcup_{i=0}^{n-1} E_i))$ para cada $n \geq 1$. Entonces, $\{B_n\}_{n\in\omega}$ es una sucesión de conjuntos medibles, disjuntos dos a dos y cuya unión es E. Luego, con la ayuda de la igualdad anterior, para cada $A \subseteq \mathbb{R}$ ocurre

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*[A \cap \Big(\bigcup_{i=0}^{n} B_i\Big)] + \mu^*[A \cap \big(\mathbb{R}\setminus(\bigcup_{i=0}^{n} B_i)\big)] \\ &= \sum_{i=0}^{n} (A \cap B_i) + \mu^*\big(A \cap (\bigcap_{i=0}^{n} \mathbb{R}\setminus B_i)\big) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (A \cap B_i) + \mu^*\big(A \cap (\bigcap_{i=0}^{\infty} \mathbb{R}\setminus B_i)\big)\end{aligned}$$

y tomando el límite cuando $n \to \infty$

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &\geq \sum_{i\in\omega}(A\cap B_i) + \mu^*\big[A\cap\big(\mathbb{R}\backslash(\bigcup_{i\in\omega} B_i)\big)\big]\\ &\geq \mu^*[A\cap\Big(\bigcup_{i\in\omega} B_i\Big)] + \mu^*[A\cap\big(\mathbb{R}\backslash(\bigcup_{i\in\omega} B_i)\big)] \geq \mu^*(A),\end{aligned}$$

por lo tanto $\bigcup_{i\in\omega} E_i = \bigcup_{i\in\omega} B_i \in \mathcal{M}$. Se concluye que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra. Más aún, dado que para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ ocurre que

$$\mu^*(A) = \sum_{i\in\omega}(A\cap B_i) + \mu^*\big[A\cap\big(\mathbb{R}\backslash(\bigcup_{i\in\omega} B_i)\big)\big],$$

eligiendo $A = \bigcup_{i\in\omega} B_i$ se cumple que μ^* es σ-aditiva en $\mathcal{M}$.

■

Con esto hemos logrado definir una función que en su dominio cumpla con lo requerido en el problema de la medida, esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 0.31. *Sea $\mu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ la función definida como $\mu(X) = \mu^*(X)$ para todo $X \in \mathcal{M}$. A esta función se le conoce como* **la medida de Lebesgue.**

La medida de Lebesgue no sólo es capaz de medir a los intervalos abiertos, sino también a todas la uniones numerables de estos intervalos, es decir, a los conjuntos abiertos. Además como $\mathcal{M}$ es una σ-algebra, también podemos medir a todos los conjuntos cerrados.

Proposición 0.32. *Dada una familia S de subconjuntos de X, entonces el conjunto*

$$\mathcal{A}(S) = \bigcap\{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ es } \sigma\text{-algebra y } A \subseteq \mathcal{A}\}$$

es una σ-álgebra, la cual llamaremos σ-álgebra generada por el conjunto S.

Definición 0.33. *Sea $B = \{I \in \mathbf{R} : I$ es un intervalo abierto$\}$ entonces, a la σ-álgebra generada por B se le llama como la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.*

Debido a la importancia de esta σ-álgebra, la denotaremos como $\mathcal{B}$ para referirnos a ella. Así mismo, decimos que X es un *conjunto Boreliano* si y sólo si $X \in \mathcal{B}$. El siguiente teorema establece que los conjuntos borelianos son medibles.

Teorema 0.34. *Todos los conjuntos borelianos son Lebesgue medibles.*

Demostración. Sabemos que para todo intervalo abierto I, este es medible, entonces $B \subseteq \mathcal{M}$, por lo tanto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$.

■

Introducimos ahora una clase de conjuntos muy importantes en la Teoria de la Medida. Estos son los conjuntos de medida nula

Definición 0.35. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mu^*(A) = 0$. Entonces decimos que A es un conjunto de medida nula.*

Proposición 0.36. *Si A es un conjunto de medida nula, entonces $A \in \mathcal{M}$ y $\mu(A) = 0$.*

0.3.2. AC y Medida

El Teorema 0.30 establece que μ es una función como Lebesgue quería en el problema de la medida, sin embargo no nos dice si $dom(\mu|_{\mathcal{M}})$ es o no un elemento de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. No fue hasta 1905, cuando Giuseppe Vitali en la publicación de un artículo, demostraba que la función que cumpliera con las condiciones que pide el problema de la medida, no podía tener como dominio a todo el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Para demostrar ésto, Vitali construyó, con ayuda de la formulación formal del Axioma de Elección dada por Zermelo en 1904, un conjunto que no podía estar en el dominio de la función que pedía Lebesgue en el problema de la medida. A continuación daremos la demostración de Vitali. Primero definamos algunos conceptos importantes.

Definición 0.37. *La relación $\sim$ en $\mathbb{R}$, está dada por $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$.*

Es facil probar que la relación $\sim$, es una relación de equivalencia. Entonces el conjunto cociente $\mathbb{R}/\sim$ es una partición de $\mathbb{R}$, utilizando **AC**, sabemos que existe un conjunto que tiene exactamente un elemento de cada clase de equivalencia. A este conjunto se le conoce como el *conjunto de Vitali.* La siguiente proposición establece algunas propiedades para este tipo de conjunto.

Proposición 0.38. *Asúmase* **AC***. Si $\mathbb{R}/\sim$ es el conjunto cociente determinado por la relacion $\sim$, entonces se cumple lo siguiente:*

a) Para todo $C \in \mathbb{R}/\sim$ se tiene que $|C| = \aleph_0$.

b) $|\mathbb{R}/\sim| = 2^{\aleph_0}$.

Demostración. a) Como $C \neq \emptyset$, podemos tomar $x_0 \in C$, entonces $C = \{y \in \mathbb{R} : y \sim x_0\} = \{y \in \mathbb{R} : y = x_0 + r, r \in \mathbb{Q}\} = \{x_0 + r \in \mathbb{R} : r \in \mathbb{Q}\}$. por tanto, como $\mathbb{Q}$ es numerable, se cumple lo requerido.

b) Sea $\kappa := |\mathbb{R}/\sim|$ y supongamos que $\mathbb{R}/\sim = \{C_\alpha : \alpha \in k\}$. Como $C_\alpha \cap C\beta = \emptyset$ siempre que $\alpha \neq \beta$, entonces

$$2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| = |\bigcup_{\alpha<k} C_\alpha| = \sum_{\alpha<k} |C_\alpha| = \text{máx}\{k, \aleph_0\}$$

por lo tanto $k = 2^{\aleph_0}$.

■

Si V es un conjunto de Vitali, por la Proposición anterior, se cumple que $|V| = 2^{\aleph_0}$. Además, si para cada $q \in \mathbb{Q}$ denotamos por V_q al conjunto $q + V$, se cumple el siguiente resultado.

Lema 0.39. *Asúmase* **AC***. Sean $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$, y V un conjunto de Vitali, entonces para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$, se tiene que, $V_{q_n} \cap V_{q_m} = \emptyset$. Más aún,*

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{q_n}.$$

Demostración. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que, $n \neq m$. Supongamos que $V_{q_n} \cap V_{q_m} \neq \emptyset$, entonces, existen $v_n, v_m \in V$ tales que $q_n + v_n = q_m + v_m$, por lo que $v_n - v_m = q_m - q_n \in \mathbb{Q}$. Así que $v_n \sim v_m$, pero como $v_n, v_m \in V$ con V un conjunto de Vitali, entonces $v_n = v_m$ por lo que $q_n = q_m$, lo cual implica que $n = m$, lo cual es una contradicción.

Ahora, para la segunda parte, tomemos $x \in \mathbb{R}$ arbitrario. Sabemos que $\mathbb{R}/\sim$ es una partición de $\mathbb{R}$, por lo que existe un único $v \in V$ tal que $x \sim v$. es decir, $x - v \in \mathbb{Q}$. Por lo anterior, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x - v = q_i$; luego $x = q_i - v$. Por lo tanto, $x \in V_{q_i}$. El hecho de que esta representación sea única se sigue de que $v_{q_i} \cap v_{q_j} = \emptyset$ siempre que $i \neq j$. ■

Después de establecer estos resultados, estamos en condiciones de demostrar que $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Más aún, con la ayuda del Axioma de Elección podemos demostar que cualquier función $\mathbf{m}$ que satisfaga las condiciones (a), (b), (c) que nos pide el problema de la medida, no puede ser definida en los conjuntos de Vitali.

Teorema 0.40 (Vitali)**.** *Asúmase* **AC**. *No existe una función* $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$ *tal que:*

(a) $\mu(\emptyset)$.

(b) Si $a, b \in \mathbb{R}$ *tales que* $a < b$, *entonces* $\mu((a,b]) = b - a = \mathcal{L}((a,b])$.

(c) Para cuales quiera $x \in \mathbb{R}$ *y* $X \subseteq \mathbb{R}$, $\mu(x + X) = \mu(X)$.

(d) μ *es* σ*-aditiva, es decir, si* $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es una coleccioón de subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *ajenos dos a dos, entonces*

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(X_n).$$

Demostración. La prueba se hará por contradicción. Supongamos que existe una función $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$ que sastiface las propiedades (a), (b), (c) y (d). Tomemos la ralación de equivalencia de la Definición 0.37, entonces utilizando el Axioma de Elección, supongamos que V es el conjunto de Vitali.

Afirmamos que $\mu(V) > 0$. Por el Lema 0.39, si $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una enumeración de $\mathbb{Q}$, entonces $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{q_n}$, con $V_{q_n} \cap V_{q_m} = \emptyset$, siempre que $n \neq m$. Por lo que, si $\mu(V) = 0$, utilizando la propidades (c) y (d), tendríamos que

$$\mu(\mathbb{R}) = \mu\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{q_n}\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(V_{q_n}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(q_n + V) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(V) = 0.$$

Pero, por otro lado

$$\mu(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R}\backslash(0,1] \cup (0,1]) = \mu(\mathbb{R}\backslash(0,1]) + \mu((0,1]) = \mu(\mathbb{R}\backslash(0,1]) + 1 > 0$$

lo cual nos da una contradicción. Por lo que $\mu(V) > 0$.

Ahora notemos que

$$V = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} V \cap (n, n+1],$$

es decir, que V es la unión numerable de conjuntos ajenos. Como μ es σ-aditiva y $\mu(V) > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\mu(V \cap (N, N+1]) > 0.$$

Sea $W := V \cap (N, N+1]$, entonces definamos al conjunto $\mathcal{W}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{W} := \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} (q + W).$$

Como $W \subseteq (N, N+1]$ y $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, entonces $\mathcal{W} \subseteq (N, N+2]$; Utilizando el Lema 0.39, tenemos que si $q, r \in \mathbb{Q}$ son tales que $q \neq r$, entonces $(q + W) \cap (r + W) \subseteq V_q \cap V_r = 0$. Por lo que $\mathcal{W}$ es unión numerable de conjuntos ajenos dos a dos; además, para cada $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ tenemos que $\mu(q + W) = \mu(W) > 0$, por lo que, al aplicar la σ-adictividad de μ a $\mathcal{W}$, tenemos que:

$$\mu(\mathcal{W}) = \mu\big(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} (q + W)\big) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} \mu(q + W) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} \mu(W) = \infty,$$

por lo que

$$2 = \mu((N, N+1]) = \mu((N, N+1]\backslash\mathcal{W} \cup \mathcal{W}) = \mu((N, N+1]\backslash\mathcal{W}) + \mu(\mathcal{W}) = \infty$$

lo cual es una contradicción. Se concluye que $V \notin dom(\mu)$, lo cual contradice la definición de μ. ∎

0.3.3. Conjuntos de medida nula

Ahora introduciremos a los conjunto de medida cero y algunas de sus propiedades.

Definición 0.41. *Sea $A \in \mathbb{R}$. Decimos que A es un conjunto nulo o que tiene medida nula si $\mu^*(A) = 0$.*

Es decir, A tiene medida nula si existe una sucesión $(I_n)_{n\in\omega}$ de intervalos abiertos tales que: $A \subseteq \bigcup_{n\in\omega} I_n$ y $\sum_{n\in\omega} \mathscr{L}(I_n) < \epsilon$. Además, si A tiene medida nula, entonces es Lebesgue medible, es decir, si $\mu^*(A) = 0$ entonces $A \in \mathcal{M}$.

Proposición 0.42. *La unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula.*

En la prueba de la anetrior proposición es necesario el uso de Axioma de Elección Numerable.

Corolario 0.43. *Sea $A \in \mathbb{R}$. Si para toda $n \in \omega$, $\mu^*(A \cap [n, n+1]) = 0$, entonces $\mu^*(A) = 0$.*

Proposición 0.44. *Para todo $X \subseteq \mathbb{R}$, existe A medible tal que $X \subseteq A$ y $\mu^*(X) = \mu(A)$. Además cumple que todo conjunto medible $Z \subseteq A\backslash X$, tiene medida nula.*

Demostración. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$. Tomemos los conjuntos

$$A_n = \Big\{U : U \textbf{ es abierto, } X \subseteq U, \quad \mu(U) < \mu^*(X) + \frac{1}{n}\Big\}.$$

Por el Axioma de Elección Numerable, existe una sucesión $\{U_n\}_{n\in\omega}$ de abiertos tales que $U_n \in A_n$ para toda $n \in \omega$. Sea $A = \bigcap_{n\in\omega} U_n$ es tal que $X \subseteq A$ y

$$\mu^*(X) \leq \mu^*(A) = \mu(A) \leq \mu(U_n) < \mu^*(X) + \frac{1}{n},$$

para toda $n \in \omega$. Por lo tanto $\mu(A) = \mu^*(X)$.

Ahora probaremos que el conjunto $A\backslash X$ cumple que todo subconjunto medible de él es nulo. Supongamos que existe $Z \subseteq A\backslash X$ medible, tal que $\mu(Z) > 0$. Notemos que como Z es medible, entonces $\mu(A) = \mu^*(A \cap Z) + \mu^*(A\backslash Z)$, Por lo que $\mu(G) - \mu(Z) = \mu^*(A\backslash Z)$, y tomoamdo en cuenta que $X \subseteq A\backslash Z$ (pues $Z \subseteq Z\backslash X$) tenemos que

$$\mu(A) = \mu^*(X) \leq \mu^*(X\backslash Z) = \mu(A) - \mu(Z) < \mu(A) = \mu^*(X).$$

Por lo tanto $\mu(X) < \mu^*(X)$, lo cual es una contradicción. ■

0.4. Esquemas de Souslin y conjuntos analiticos.

El proposito de esta sección es probar que los conjuntos analíticos son medibles. Comenzaremos dando una serie de definiciones.

Definición 0.45. *Sea ω^ω con la topología que tiene como base al conjunto $\{\langle s\rangle : s \in A^{<\omega}\}$ y $\mathbb{R}$ con la topología euclidian. Entonces $A \subseteq \mathbb{R}$ es analítico si existe f función continua tal que*

$$f(\omega^\omega) = A.$$

Definición 0.46. *Un esquema de Souslin de un conjunto X es una familia de subconjuntos de X indexada por $\omega^{<\omega}$, la cual se denota por $(p_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$.*

Como vamos a trabajar en $\mathbb{R}$, apartir de ahora sólo diremos un esquema de Souslin.

Definición 0.47. *Un esquema de Souslin $(P_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ es regular si $s \subseteq t$ entonces $P_s \supseteq P_t$.*

Si para cada $s \in \mathbb{N}$, tomamos a $N_s = \langle s \rangle$ entonces $(N_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ es un esquema de Souslin. Además $(N_s)_{s\in\mathbb{N}}$ es regular ya que si $s \subseteq t$ entonces $N_t = \langle t \rangle \subseteq \langle s \rangle = N_s$.

Definición 0.48. *Dado $(p_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$, un esquema de Souslin. La operación de Souslin $\mathcal{A}$, aplicada al esquema $(p_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$, produce el conjunto $\mathcal{A}_s P_s = \bigcup_{x\in\omega} \bigcap_{n\in\omega} P_{x|n}$.*

Si $(P_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ es un esquema de Souslin y definimos a $P'_s = \bigcap_{t\subseteq s} P_t$, es fácil verificar que $(P')_{s\in\omega^{<\omega}}$ es regular. Más aún $\mathcal{A}_s P_s = \mathcal{A}_s P'_s$. Esto nos quiere decir que cualquier esquema de Souslin puede tomarse como regular.

A continuación vamos a relacionar los esquemas de Souslin con los conjuntos analíticos.

Definición 0.49. *Decimos que un esquema de Souslin $(P_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ tiene diámetro decreciente, si $diam(P_{x|n}) \to O$, para todo $x \in \omega^\omega$, donde $diam(P_{x|n}) = sup\{|a-b| : a, b \in P_{x|n}\}$.*

Teorema 0.50. *Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es analítico entonces $A = \mathcal{A}_s F_s$, con F_s cerrado, para todo $s \in \omega^\omega$, $(F_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ es regular, con diámetro decreciente y $F_s \neq \emptyset$ si $A \neq \emptyset$*

Demostración. Sea $A \subseteq X$ analítico y supongamos que $A \neq \emptyset$. Entonces existe una función continua, $f : \omega^\omega \to X$ continua, tal que $f(\omega^\omega) = A$. Ahora, tomemos el esquema de Souslin $(N_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$, entonces para cada $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ definamos a $F_s = \overline{f(N_s)}$. Notemos que F_s es cerrado y regular ya que, como $(N_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ es regular, entonces $s \subseteq t$ implica que $N_s \supseteq N_t$. Por lo tanto $f(N_s) \supseteq f(N_t)$ de lo cual se sigue $\overline{f(N_s)} \supseteq \overline{f(N_t)}$ por lo que; $F_s \supseteq F_t$ y como N_s es no vacío entonces F_s es no vacío.

Luego, como f es continua, si $x \in \omega$ y $\epsilon > 0$, existe V abierto en $\mathcal{N}$ tal que $f(V) \subseteq B_\epsilon(f(x))$, luego por la forma que tienen los básicos de la topología producto, tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $N_{x|n} \subseteq V$, lo cual implica que $f(N_{x|n}) \subseteq f(V) \subseteq B_\epsilon(f(x))$. Por lo tanto $F_{x|n} = \overline{f(N_{x|n})} \subseteq \overline{f(V)} \subseteq \overline{B_\epsilon(f(x))}$; entonces para todo $x \in N$ y para dado ϵ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $diam(F_{x|n}) \leq \epsilon$. Dado que $(F_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ es regular, entonces para todo $m > n$ se cumple que $F_{x|m} \subseteq F_{x|n}$ y por tanto $dim(F_{x|m}) \leq dim(F_{x|n}) \leq \epsilon$ para todo $m > n$.

Solo falta probar que $A = \mathcal{A}_s F_s$. Si $x \in A$ entonces existe $y \in \omega^\omega$ tal que $f(y) = x$, pero como $y \in N_{y|n}$ para toda $n \in \omega$, entonces se cumple que $x = f(y) \in f(N_{y|n})$ para toda $n \in \omega$, por lo que $x \in \bigcap_{n\in\omega} \overline{f(N_{y|n})} = \bigcap_{n\in\omega} F_{y|n}$.

Ahora si $x \in \mathcal{A}_s F_s$ entonces existe $y \in \omega^\omega$ tal que $x \in \bigcap_{n\in\omega} F_{y|_n} = \bigcap_{n\in\omega} \overline{f(N_{y|n})}$. Dado que para cada $n \in \omega$, $x \in \overline{f(N_{y|n})}$, entonces existe $(x_k)_{k\in\omega}$ una sucesión en $f(N_{y|n})$ que converge a x, es decir, existe $k_0 \in \omega$ tal que para todo $k \geq k_0$ se tiene que $d(x, x_k) < \frac{1}{2^n}$. Luego construimos otra sucesión $(x_n)_{n\in\omega}$ con $x_n \in f(N_{x|n})$ para cada $n \in \omega$. tal que para todo n se cumple que $d(x, x_n) < \frac{1}{2^n} = 2^{-n}$. Luego para cada $n \in \omega$, tomamos $y_n \in N_{y|n}$ que cumpla que $f(y_n) = x_n$, entonces tenemos que $(y_n)_{n\in\omega}$ converge a y, y como f es continua entonces $x_n = f(y_n) \to f(y)$, por contrución, $(x_n)_{n\in\omega}$ converge a x, entonces tenemos que $x = f(y)$ con $y \in \omega^\omega$. Se concluye que $x \in f(\omega^\omega) = A$. ■

Ahora daremos dos construcciones de esquemas de Souslin a partir de otros que serán de gran ayuda para nuestros propósitos.

Definición 0.51. *Sean $n \in \omega$ y $s, t \in \omega^n$. Diremos que $s \leq t$ si y sólo si para todo $i < n$, se cumple que $s(i) \leq t(i)$.*

Definición 0.52. *Sea $(P_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ un esquema de Souslin, para cuales quiera $n \in \omega$, $s \in \omega^n$ definimos los conjuntos*

$$Q^s = \bigcup_{x;x|n\leq s} \bigcap_{i\in\omega} P_{x|i}$$

y

$$Q_s = \bigcup_{t\in\omega^n, t\leq s} P_t.$$

Notemos que $(Q^s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ y $(Q_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ son esquemas de Souslin. Además por la forma en que estan definidos, si $s\in\omega^{<\omega}$ entonces $Q^s, Q_s \in \mathcal{A}_s P_s$

Teorema 0.53. *Si $(P_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ un esquemas de Souslin regular entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $(Q_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$, $(Q^s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ *son regulares.*
2. $Q^s \subseteq Q_s$ *para cualquier sucesión finita* $s\in\omega^{<\omega}$.
3. $Q^s = \bigcup_{n\in\omega} Q^{s\frown n}$.
4. $Q^{\emptyset} = A_s P_s$.

Demostración. 1) Sean s, t dos sucesiones finitas tales que $s\subseteq t$ y supongamos que $l(s)=n$, $l(t)=k$. Primero probemos que $(Q_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ es regular. Sea $p\in Q_t$, lo cual implica que existe $x\in\omega^k$ tal que $x|t$ y $p\in P_x$. Ahora, dado que $s=t\mid n$, se cumple que $x|n\leq t|n=s$. Más aún, $p\in P_{x|n}$, ya que $x|n\subseteq x$, $p\in P_x$ y $(P_s)_{s\in\omega^\omega}$ es regular. Por lo tanto existe $x|n\in\omega^n$ tal que $x|n\leq s$ y $p\in P_{x_n}$, por lo que $p\in Q_s$.
Ahora probemos $(Q^s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ es regular. Sea $p\in Q^t$, entonces existe $x\in\omega^\omega$ tal que $x|k\leq t$ y $p\in P_{x|i}$ para cada $i\in\omega$. Luego, como $s=t|n$ se cumple que $x|n\leq t|n=s$ y $p\in P_{x|i}$ para todo $i\in\omega$. Hemos probado que $p\in Q^s$.

2) Sean $n\in\omega$ y $s\in\omega^n$ elíjase $p\in Q^s$. Entonces existe $x\in\omega^\omega$ tal que $x|n\leq s$ y $p\in P_{x|i}$ para cada $i\in\omega$. En particular $p\in P_{x|n}$, lo cual implica que $p\in Q_s$.

3) Supongamos que $s\in\omega^m$. Si $p\in Q^s$, entonces existe $x\in\omega^\omega$ tal que $x|m\leq s$ y $p\in P_{x|i}$ para cada $i\in\omega$, si tomamos a $n_0=x(m)$, obtenemos la sucesión finita $s\frown n_0$ la cual cumple que $x|(m+1)\leq s\frown n_0$ y $p\in P_{x|i}$ para todo $i\in\omega$. Entonces $p\in Q^{s\frown n_0}$ por lo que $p\in\bigcup_{n\in\omega} Q^{s\frown n}$.

Ahora si $p\in\bigcup_{n\in\omega} Q^{s\frown n}$, entonces existe $n_0\in\omega$ tal que $p\in Q^{s\frown n_0}$. Luego, existe $x\in\omega^\omega$ tal que $x\mid m+1\leq s\frown n_0$ y $p\in P_{x|i}$ para todo $i\in\omega$. En particular $x|m\leq s$. Se concluye que $p\in Q^s$.

4) Por 3) tenemos que $Q^{\emptyset}=\bigcup_{n\in\omega} Q^{(n)}$ entonces probemos que $Q^{\emptyset}=\mathcal{A}_s P_s$. Si $p\in Q^{\emptyset}$ entonces existe $n_0\in\omega$ tal que $p\in Q^{(n_0)}\subseteq\mathcal{A}_s P_s$.

Ahora, si $p\in\mathcal{A}_s P_s$ entonces existe $x\in\omega^\omega$ tal que $p\in P_{x|i}$ para todo $i\in\omega$. Si definimos a $n_0=x|1$, es claro que $x|1\leq(n_0)$. Entonces $p\in Q^{(n_0)}$, por lo tanto $p\in Q^{\emptyset}$. ■

Proposición 0.54. *Sea (P_s) un esquema de Souslin regular. Si consideramos el esquema de Souslin $(Q_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$, entonces $\mathcal{A}_s P_s=\mathcal{A}_s Q_s$.*

Demostración. $\subseteq]$ Notemos que si $s\in\omega^{<\omega}$ entonces $P_s\subseteq Q_s$. Luego, si $p\in\mathcal{A}_s P_s$, existe $x\in\omega^\omega$ tal que $p\in P_{x|n}\subseteq Q_{x|n}$, por lo que si $y=x$, se tiene que $p\in\mathcal{A}_s Q_s$.

$\supseteq]$ Sea $p\in\mathcal{A}_s Q_s$. Entonces, existe $x\in\omega$ tal que $p\in Q_{x|n}$ para toda $n\in\omega$. Deseamos encontrar un $y\in\omega^\omega$ tal que $p\in P_{y|n}$ para todo $n\in\omega$.

Observemos que, para cada $n\in\omega$, por definición $p\in Q_{x|n}$, entonces existe al menos una sucesión finita $t_n\leq x|n$ de manera que $p\in P_{t_n}$. Por tanto, si definimos $T=\{t\in\omega^{<\omega}: t\leq x|l(t) \text{ y } p\in P_t\}$, se concluye que $|T|=\aleph_0$.

Fijamos $t\in T$ y definamos $T_t=\{s\in T: t\subseteq s\}$. Construyamos recurcivamente una sucesión $y=(y_0,y_1,...)$ que cumpla que $(y_0,y_1,...,y_n)\in T$ y $|T_{(y_0,y_1,...,y_n)}|=\aleph_0$ para toda $n\in\omega$, como sigue. Comencemos buscando $y_0\in\omega$, de tal forma que $(y_0)\in T$ y $|T_(y_0)|=\aleph_0$. Dado que $T=\bigcup_{r\leq x_0} T_{(r)}$, y $|T|=\aleph_0$, entonces existe $r_0\in\omega$ tal que $|T_{(r_0)}|=\aleph_0$ y $r_0\in T$, por lo que tomamos a $y_0=r_0$.

Luego, supongamos que ya tenemos $(y_0, y_1, ..., y_{n-1}) \leq x|(n-1)$ tal que $(y_0, ..., y_{n-1}) \in T$ y $|T_{(y_0,...,y_{n-1})}| = \aleph_0$, como se cumple que $T_{(y_0,...,y_{n-1})} = \bigcup_{r \leq x_n} T_{(y_0,...,y_{n-1},r)}$, entonces existe $r_n \in \omega$ tal que $|T_{(y_0,...,y_{n-1},r_n)}| = \aleph_0$ y $(y_0, y_1, ..., y_{n-1}, r) \in T$, por lo que tomamos a $y_n = r_n$. Entonces, la sucesión $y = (y_0, y_1, ...)$ satisface que $p \in P_{y|n}$ para todo $n \in \omega$, por lo tanto $p \in \mathcal{A}_s P_s$. ■

Recordemos que el propósito de esta sección es probar que los conjuntos analíticos son Lebesgue medibles. Ya hemos demostrado que cualquier conjunto analítico se puede escribir como la operación de Souslin aplicada a un cierto esquema de conjuntos cerrados; además sabemos que todos los conjuntos cerrados son conjuntos medibles. Por tanto, si logramos probar que la condicion de los conjuntos Lebesgue medibles es cerrada bajo la operación de Souslin, obtendríamos que los conjuntos analíticos son medibles.

Teorema 0.55 (Saks)**.** *Sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Entonces, la colección de los conjuntos Lebesgue medibles es cerrada bajo la operación de Souslin.*

Demostración. Sea $(P_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ un esquema de Souslin de conjuntos medibles. Sin pérdida de generalila podemos suponer que $(P_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ es regular y elíjanse a $(Q_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ y $(Q^s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ como en la Definición 0.52. Sea $P = \mathcal{A}_s P_s$, por la Observación 0.27, basta demostr que se cumple que $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap P) + \mu^*(A \backslash P)$, para todo $A \subseteq \mathbb{R}$.

Si $\mu^*(A) = \infty$, entoncese cumple lo requerido, por lo que, supongamos $\mu(A) < \infty$, para todo $B \subseteq \mathbb{R}$ defínace

$$\mu_A^*(B) = inf\{\mu^*(A \cap C) : B \subseteq C, C \text{ es medibles}\}.$$

Nótece que $\mu_A^*(B)$ está bien definido. Además, para cualquier sucesión $\{B_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos creciente, se tiene que $\mu^*(A \cap \bigcup_{n\in\omega} B_n) \leq \mu_A^*(\bigcup_{n\in\omega} B_n)$ lo cual se sigue del hecho de $\mu^*(A \cap \bigcup_{n\in\omega} D_n) = \sum_{n\in\omega} \mu^*(A \cap D_n)$, donde $\{D_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de conjuntos medibles ajenos dos a dos.

Ahora fijamos $\epsilon > 0$. Usando lo anterior podemos definir $x \in \omega^\omega$ recursivamente de tal modo que $\mu_A^*(Q^{(x_0)}) \geq \mu^*(A \cap P) - \epsilon = 2$, y $\mu_A^*(Q^{x|(n+1)}) \geq \mu_A^*(Q^{x|n}) - \epsilon = 2^{n+1}$ si $n \geq 1$. Luego, para $n \geq 1$, $\mu^*(A \cap Q_{x|n}) \geq \mu_A^*(Q^{x|n}) \geq \mu^*(A \cap P) - \epsilon$, ya que, $Q^{x|n} \subseteq Q_{x|n}$ y $Q_{x|n}$ es medible (por ser union numerable de medibles). Entonces:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap Q_{x|n}) + \mu^*(A \backslash Q_{x|n}) \geq \mu^*(A \cap P) + \mu^*(A \backslash Q_{x|n}) - \epsilon.$$

Como $\{Q_{x|n}\}_{n\in\omega}$ es decreciente y $\bigcap_{n\in\omega} Q_{x|n} \subseteq \mathcal{A}_s Q_s = \mathcal{A}_s P_s = P$, tenemos que $\{\omega^\omega \backslash Q_{x|n}\}_{n\in\omega}$ es creciente y $\bigcup_{n\in\omega} \omega^\omega \backslash Q_{x|n} \supseteq \omega^\omega \backslash P$, entonces $\mu^*(A \backslash Q_{x|n}) \to \mu^*(A \cap \bigcup(\omega^\omega \backslash Q_{x|n}) \geq \mu^*(A \backslash P)$, y por lo tanto $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap P) + \mu^*(A \backslash P) - \epsilon$. Dado que ϵ es arbitrario, hemos terminado. ■

Corolario 0.56. *Todo conjunto analítico es Lebesgue medible.*

Demostración. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Por el Teorema 0.50, A es la operación de Souslin de un cierto esquema de conjuntos cerrados, y por Teorema 0.34, estos son conjuntos medibles y por el Teorema 0.55, se tiene que A es Lebegue medible. ■

Capítulo 2. Consecuencias del Axioma de Determinación

0.5. Axioma de Determinación

En los años 30's y 40's, varios matemáticos, incluidos Dénes König y László Kalmár trabajaron en mejorar y extender la teoría original de Zermelo. Aproximadamente al mismo tiempo, matemáticos polacos como Stefan Banach y Stanislaw Mazur utilizaron los juegos infinitos para resolver problemas en topología pura y teoría de conjuntos. En los años 50's, 60's y 70's, la teoría de los juegos infinitos ganó popularidad después de que Jan Mycielski y Hugo Steinhaus introdujeron el Axioma de la Determinación, el cual es una declaración que contradice el Axioma de Elección. Comenzaremos dando una defición formal del Axioma de Determinación, para la cual serán necesarias varias definiciones previas. Comenzanremos definiendo los juegos infinitos.

Definición 0.57. *Sea $A \subseteq \omega^\omega$ arbitrario, el* **juego infinito** *asociado a A, denotado por $\partial(A)$, como el juego que tiene las siguientes reglas:*

- *Participan dos jugadores, a los que llamaremos* **jugador I** *y* **jugador II***; usualmente lo denotaremos para mayor comodidad como* **I** *y* **II**.
- *El jugador* **I** *elige(o juega) un número natural x_0, acto seguido, el jugador* **II** *elige un número natural y_0. Ahora,* **I** *elige otro número natural x_1, a lo que* **II** *responde de nuevo tomando un número natural y_0, y así sucesivamente. El juego infinito $\partial(A)$ concluye luego de ω turnos.*

$$\begin{array}{c||cccccc} \mathbf{I} & x_0 & & x_1 & & \dots & \\ \hline \mathbf{II} & & y_0 & & y_1 & & \dots \end{array}$$

- *Sea $z := (x_0, y_0, x_1, y_1, ...) \in \omega^\omega$ la sucesión genarada por turnos de I y II la cual llamaremos* **una partida del juego** *$\partial(A)$. El jugardor* **I** *gana el $\partial(A)$, si $z \in A$, en caso contrario el juego $\partial(A)$ lo gana el jugador* **II**.

Denotaremos por $x = (x_n)_{n\in\omega}$ a la sucesión infinita formada por los movimientos de **I**. Del mismo modo denotaremos por $y = (y_n)_{n\in\omega}$ a la sucesión formada por los movimientos de **II**.

Ahora definiremos algunos conceptos que nos ayudaran en nuestro estudio.

Definición 0.58. $S_p := \bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n}$ *y* $S_i := \bigcup_{n\in\omega} \omega^{2n+1}$. *Es decir, S_p y S_i denotarán al conjunto de todas las funciones de $k \in \omega$ en ω, dode k es par e impar, respectivamente.*

Definición 0.59. *Una* **estrategia** *para el jugador* **I** *es una función:*

$$\sigma : S_p \to \omega.$$

Diremos que **I** *juega mediante la estrategia σ, si para cualquier $y = (y_i)_{i\in\omega}$, sucesión en ω formada por los movimientos de* **II**, *la partida $(x_0.y_0, x_1.y_1, ...)$ es de la forma:*

- $x_0 = \sigma(\emptyset)$.
- $x_{i+1} = \sigma((x_0, y_0, ..., x_i, y_i))$.

A esta sucesión la denotaremos como $\sigma \star y$.

Una **estrategia** *para el jugador* **II** *es una función:*

$$\tau : S_i \to \omega.$$

Diremos que **II** *juega mediante la estrategia τ, si para cualquier $x = (x_i)_{i\in\omega}$, sucesión en ω, formada por los movimientos de* **I***, la partida $(x_0.y_0, x_1.y_1, ...)$ es de la forma:*

- $y_0 = \tau(x_0)$.
- $y_i = \tau((x_0, y_0, ..., y_{i-1}, x_i))$.

A esta sucesión la denotaremos como $x \star \tau$.

Dada una σ una estrategia para el jugador **I**, denotaremosmos por $J(\sigma)$ al conjunto $\{\sigma \star x : x \in \omega^\omega\}$ que consiste de todas las jugadas posibles en las que **I** juega según σ. Similarmente, $J(\tau) := \{y \star \tau : y \in \omega^\omega\}$ es el conjunto de todas las jugadas posibles en las que **II** juega según τ. Claramente $|J(\sigma)| = \aleph_0$ para cada estrategia σ y $|J(\tau)| = \aleph_0$ para cada estrategia τ.

Lema 0.60. *Sean $A \subseteq \omega^\omega$, entonces el conjunto de todas las estrategias para* **I** *y el conjunto de todas las estrategias para* **II** *en el juego infinito $\partial(A)$ son equipotente a ω^ω.*

Demostración. Los conjuntos de estrategias para **I** y **II** son ω^{S_p} y ω^{S_i} respectivamente. Entonces bastará probar que S_p, S_i son equipotentes a ω para concluir el lema.

Comenzaremos demostrando que S_p es equipotente a ω. Sea $f : \omega \to \omega^2$ la función dada por $f(n) = (n, n)$. Entonces, f es inyectiva y, dado que $\omega^2 \subseteq S_p$, se puede definir la función inclusión $i_{\omega^2} : \omega^2 \to S_p$. Entonces se verifica que la función $i_{\omega^2} \circ f : \omega \to S_p$ es inyectiva.

Más aún, sabemos que $S_p \subseteq \omega^{<\omega}$. Por la Proposición 0.6, existe una una función $f : \omega^{<\omega} \to \omega$ biyectiva. Luego, la composición $i_{S_p} \circ f$, donde i_{S_p} es la inclusión de S_p a $\omega^{<\omega}$, es una función inyectiva, entonces por el Teorema 0.3 obtenemos que S_p es equipotente a $\omega^{<\omega}$ y la Proposición 0.8 permite concluir que ω es equipotente a S_p.

Ahora, para probar que S_i es equipotente a ω, tomamos a $g : \omega \to \omega^1$ dado por $g(n) = (n)$ para cada $n \in \omega$. Entonces, g es inyectiva y como $\omega^1 \subseteq S_i$ entonces tomando la función inclusión de ω^1 en S_i, obtenemos que $i_{\omega^1} \circ g : \omega \to S_p$ es inyectiva. Luego notemos que $S_i \subseteq \omega^{<\omega}$ y, por un argumento análogo al parráfo anterior, concluimos que S_i es equipotente a ω y por tanto ω^{S_i} es equipotente a ω^ω. ■

De manera intuitiva, decimos que una estrategia es ganadora si, el jugador que juege mediante esta estrategia, gane el juego.

Definición 0.61. *Sea $A \in \omega^\omega$. Decimos que:*

- *Una estrategia σ es una* **estrategia ganadora para el jugador I en** $\partial(A)$, *si para cualquier $y \in \omega^\omega$:*
$$\sigma \star y \in A.$$
- *Una estrategia τ es una* **estrategia ganadora para el jugador II en** $\partial(A)$, *si para cualquier $x \in \omega^\omega$:*
$$x \star \tau \notin A.$$

Si σ es una estrategia ganadora para **I**, en el juego infinito $\partial(A)$, es claro que $J(\sigma) \subseteq A$. Además, si τ es una estrategia ganadora para **I** en $\partial(A)$, ocurre que $J(\tau) \cap A = \emptyset$.

Definición 0.62. *Un conjunto $A \subseteq \omega^\omega$ está determinado si y sólo si existe una estrategia ganadora para* **I** *o existe una estrategia ganadora para* **II**.

Dada la anterior definición ya podemos enunciar nuestro Axioma de Determinación.

Axioma de la Determinación (abreviado por **AD**). Todos los juegos infinitos están determinados.

Llegamos al punto principal de este trabajo. Este axioma establece que cada juego infinito resulta en una victoria para al menos uno de los jugadores y no hay juegos indecisos.

0.6. La incompatibilidad de AE y AD

En esta sección veremos la incompatibilidad de AD con AE. Primero recordemos unos resultados importantes que nos serán de utilidad.

Lema 0.63 (AC)**.** *Asúmase* **AC**. *Para todo conjunto X, existe un conjunto bien ordenado $(I, \leq)$, que llamamos el conjunto de índice para el conjunto X, de modo que*
1) $|I| = |X|$.
2) *Para todo $\alpha \in I$, el conjunto $\{\beta \in I : \beta < \alpha\}$ tiene cardinalidad estrictamente menor que* $|I|$.

Demostración. Por el Axioma de Elección cualquier conjunto X puede ser bien ordenado, por lo tanto, hay un orden ordinal α isomorfo a él. Sea κ cardinal tal que $\kappa = |\alpha| = |X|$, es decir el menor ordinal en biyección con α . Como κ es un cardinal claramente $|\kappa| = \kappa = |\alpha| = |X|$ y para todo $\gamma < \kappa$, el conjunto $\{\beta < \kappa : \beta < \gamma\} = \beta$ tiene cardinalidad $< \kappa$. Entonces $(\kappa, \in)$ es el conjunto de índices deseado. ■

Si el lector está interesado el estudio de los cardinales puede culsultar [4]. Ahora estamos en posición de establecer y demostrar que el Axioma de Elección contradice al Axioma de Determinación.

Teorema 0.64. *Asumiendo AC. Existe $A \subseteq \omega^\omega$ tal que el juego $\eth(A)$ no está determinado.*

Demostración. Sean **Est(I)** y **Est(II)** los conjuntos de todas las estrategias para **I** y **II** respectivamente. Por los lemas 0.7 y 0.60, estos dos conjuntos son equipotentes a 2^ω. Aplicando el Lema 0.63 a 2^ω, es posible obtener el conjunto de índices I, de cardinalidad $2^{\aleph_0} = |2^\omega|$ que admite una biyección con **Est(I)** y **Est(II)**.

Luego podemos indexar al conjunto de las estrategias de **I** y **II**, de la siguiente manera:

$$\textbf{Est(I)} = \{\sigma_\alpha : \alpha \in I\}.$$

$$\textbf{Est(II)} = \{\tau_\alpha : \alpha \in I\}.$$

Construyamos recursivamente los conjuntos $A = \{a_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \omega^\omega$ y $B = \{b_\alpha : \alpha \in I\} \subseteq \omega^\omega$, de la siguiente manera:

Sea $\alpha \in I$, supongamos que ya hemos elegido a_β para todo $\beta < \alpha$ y b_β para todo $\beta < \alpha$, entonces Elijamos a a_α y b_α como sigue. Note que $\{b_\beta : \beta < \alpha\}$ está en biyección con $\{\beta \in I : \beta < \alpha\}$, por lo que tiene cardinalidad estrictamente menor que $2^{\aleph_0}$ (por el Lema 0.63 (2)). Por otro lado, ya vimos que $|J(\tau_\alpha)| = 2^{\aleph_0}$. Por lo tanto, hay al menos un elemento en $J(\tau_\alpha)$ que no está en $\{b_\beta : \beta < \alpha\}$. Tomemos cualquiera de estos elementos y denotemoslo a_α.

Ahora, hacemos lo mismo para la colección $\{a_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{a_\alpha\}$. Es posible elegir un elemento en $J(\sigma_\alpha)$ que no está en $\{a_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{a_\alpha\}$, al cual llamaremos b_α. Esto completa la contrución de A y B.

Afirmamos que $A \cap B = \emptyset$. En efecto. Tome cualquier elemento $a \in A$. Por construcción, existe $\alpha \in I$ tal que $a = a_\alpha$. Ahora, recuerde que en el "paso α"del procedimiento recursivo, nos aseguramos de que a_α no sea igual a b_β para cualquier $\beta < \alpha$. Por otro lado, en cada "paso γ"para $\gamma \geq \alpha$, nos aseguramos de que b_γ no sea igual a a_α. Por lo tanto, a_α no es igual a ningún $b \in B$, probando así la afirmación.

Veamos que el juego infinito $\partial(A)$ no está determinado. Primero, suponga que **I** tiene una estrategia ganadora σ en $\partial(A)$. Entonces $J(\sigma) \subseteq A$. Pero existe un $\alpha \in I$ tal que $\sigma = \sigma_\alpha$. En el "paso α"del procedimiento recursivo elegimos a un $b_\alpha \in J(\sigma_\alpha)$ tal que $b_\alpha \in B$. Pero por la afirmación anterior, b_α no puede estar en A, dando así una cotradicción.

Ahora, asumimos que **II** tiene una estrategia ganadora τ en A. Entoces, $J(\tau) \cap A = \emptyset$. De la misma forma, $\tau = \tau_\alpha$ para algún $\alpha \in I$. Pero en el "paso α"tomamos a $a_\alpha \in J(\tau_\alpha)$ tal que $a_\alpha \in A$. lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, el juego infinito $\partial(A)$ no está determinado.

■

El anterior resultado muestra que, asumiendo el Axioma de Elección, debe existir un juego infinito que no está determinado. Sin embargo, la prueba no es constructiva en el sentido de que no proporciona información sobre este juego. Este resultado tiene una naturaleza semejante a las pruebas de la existencia de un conjunto no Lebesgue medible (conjunto Vitali) y un conjunto sin la propiedad de Baire.

Además, el hecho de suponer AD, en nuestro sistema axiomatico (recordando que estamos trabajando en **ZF**+**DC**), establecería que AC no puedira aceptarse, lo cual pondría en duda muchos de los resultado en el análisis Matemáticos que se desprenden de él. Sin embargo, tenemos que AD implica una versión más débil de AC, la cual es suficiente para demostrar muchos de los resultados del análisis matemático que no requieren toda la fuerza de AC. Dicha versión es mejor conocida como el Axioma de Elección Numerables. Nos enfocaremos en lo que resta de esta sección a demostar este resultado.

Definición 0.65. *El Axioma de Elección Numerable sobre $\mathcal{X}$, nos dice: para cualquier familia $\{A_n : n \in \omega\}$ de subcojuntos no vacíos de $\mathcal{X}$, tienen una función de elección. Denotaremos dicho enunciado como AEN.*

Teorema 0.66. *AD implica AEN.*

Demostración. Sea $\{A_n : n \in \omega\}$ es una colección de subconjuntos no vacíos de ω^ω. Consideremos el juego infinito donde los movimientos del jujagor **I** están representados por $x = (x_0, x_1, \cdots)$, y movimientos del jujagor **II** están representados por $y = (y_0, y_1, \cdots)$. El jugador **II** gana si y sólo si $y \in A_{x_0}$.

Notemos que solo el primer movimiento del Jugador **I** es importante para el juego, sus otros movimientos son irrelevantes.

Por AD, este juego está determinado. Suponga primero que **I** tiene una estrategia ganadora σ en este juego infinito. Si $n = \sigma(\emptyset)$ es el primer movimiento de **I**. No importa qué secuencia $y \in \omega^\omega$ jugará el Jugador **II**, **I** ganará el juego, lo que implica que $y \notin A_{x_0}$, para toda $y \in \omega^\omega$. Esto significa que $A_n = \emptyset$. Pero hemos asumido que este no era el caso.

Por lo tanto, el Jugador **II** debe tener una estrategia ganadora τ. Luego, defina a f de la siguiente manera: para cualquier $n \in \omega$, que $f(n)$ sea la secuencia de los movimientos de **II**, jugados de acuerdo con la estrategia τ, si **I** juega la secuencia $(n, 0, 0, 0, ...)$. Como τ es una estrategia ganadora, $f(n)$ es un elemento de X_n. Esto es válido para cada n, por lo que f es una función de elecci'on para $\{X_n : n \in \omega\}$.

■

Este principio de elección contable es suficiente para muchos resultados matemáticos (por ejemplo, la unión contable de conjuntos contables es contable), aunque obviamente no para "existe un buen orden de ω^ω".

0.7. AD y Medida

Uno de los resultados que probaremos gracias a **AD** es: todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ son conjuntos Lebesgue medibles. Para probar esto nos apoyaremos en un juego infinito que llamaremos **el juego de los cubrimientos**.

0.7.1. El juego de los cubrimientos

Empezaremos a definir las condiciones necesarias para definir nuestro juego infinito. Sean $S \subseteq [0,1]$ y $\epsilon > 0$. Tomemos una sucesión $(K_n)_{n\in\omega}$ de conjuntos, donde para cada $n \in \omega$ los elementos de K_n son conjuntos de la forma:

- G es una unión finita de intervalos abirtos con extremos racionales.
- $\mu(G) \leq \frac{\epsilon}{2^{2(n+1)}}$.

Notemos que para cada $n \in \omega$, los K_n son numerables, ya que el conjunto de los intervalos abiertos con extremos racionales se pueden inyectar con $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Por otro lado. $K_n = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_{n_p}$ donde:

$$K_{n_p} := \{G : G \text{ es la union de } p \text{ intervalos abiertos con extremos racionales y } \mu(G) \leq \tfrac{\epsilon}{2^{2(n+1)}} \}.$$

Además como cada K_{n_p} se puede inyectar en $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^p$ y la unión de conjuntos numerables es numerable (gracias a **ACN**), entonces K_n es numerable.

Luego, como K_n es numerable para cada cada $n \in \omega$, entonces tomamos a $(G_n^m)_{m\in\mathbb{N}}$ como una enumeración de los elemetos de K_n.

Por último, tomemos la función: $\mathcal{A} : 2^\omega \to [0,1]$ definida por

$$(x_0, x_1, ...) \to \sum_{n=0}^{n} \frac{x_n}{2^{n+1}}.$$

No es difícil probar que $\mathcal{A}$ es continua. En estas condiciones ya podemos dar las reglas de nuestro juego de los cubrimientos.

Definición 0.67. *Sean $S \subseteq [0,1]$ y $\epsilon > 0$. El juego de los cubrimientos, denotado por $\partial(S,\epsilon)$, está definido como sigue:*

En cada turno, el jugador I elige 0 o 1, y el jugador II elige números naturales.

I	x_0		x_1		x_2		...	
II		y_0		y_1		y_2		...

*El jugador **I** gana la partida $(x_0.y_0, x_1, y_1, \cdots)$ en $\partial(S,\epsilon)$, si se cumple la siguiente condición:*

- $\mathcal{A}((x_0, x_1, \cdots)) \in S \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} G_{y_n}^n$, *donde*

$$\mathcal{A}((x_0, x_1, \cdots)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{2n+1}}.$$

Los siguientes resultados establecen qué ocurre cuando cada jugador tiene una estrategia ganadora.

Teorema 0.68. *Sea $S \in [0,1]$ y $\epsilon > 0$, entonces si el jugador **I** tiene una estrategia ganadora en $\partial(S,\epsilon)$, entonces existe un conjunto Z medible con $\mu(Z) > 0$ tal que $Z \subseteq S$.*

Demostración. Sea σ una estrategia ganadora para **I**. Sabemos que $\sigma : S_p \to \mathbb{N}$, pero también la podemos intepretar como:

$$\sigma : \omega^\omega \to \omega^\omega$$

definida como $\sigma(y) = (x_0, x_1, ...)$, donde $y = (y_0, y_1, ...)$ y $(x_0, y_0, x_1, y_1, ...) = \sigma \star y$. Notemos que, en este caso para todo $y \in \omega^\omega$, $\sigma(y) \in 2^\omega$. Entonces, si consideramos la función $\mathcal{A} : 2^\omega \to \mathbb{R}$, podemos definir la función $f : \omega^\omega \to \mathbb{R}$ como $f = \mathcal{A} \circ \sigma$. Además, para cada $y \in \omega^\omega$, la serie $f(y)$ va a converger, es decir existe $N \in \omega$ tal que para todo $m \geq N$, $\alpha < \frac{\epsilon}{2}$.

Afirmamos que f es continua. En efecto, sea $y \in \omega$ entonces por lo anterior, existe $k \in \omega$ tal que para todo $m \geq k$ se tiene que

$$\mathcal{A}(\sigma(y)) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\sigma(y)(n)}{2^{n+1}} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $O_k = \langle y|_k \rangle$ un conjunto abierto básico de y, entonces

$$\sigma(O_k) = \{x \in \{0,1\}^\omega : x\ |_{k+1} = \sigma(y)\ |_{k+1}\}.$$

Por lo tanto, se obtiene

$$f(O_k) = \mathcal{A}(\sigma(O_k)) = \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{2^{n+1}} : x(i) = \sigma(y)(i) \text{ para } i = 0, ..., k \Big\}$$

Luego, si $z \in O_k$, entonces $f(z) \in f(O_k)$, por lo que:

$$|f(z) - f(y)| = |f(z) - \mathcal{A}(\sigma(y))| = \Big| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z(n)}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma(y)(n)}{2^{n+1}} \Big| =$$

$$\Big| \sum_{n=mk+1}^{\infty} \frac{z(n)}{2^{n+1}} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\sigma(y)(n)}{2^{n+1}} \Big| \leq \Big| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2(n)}{2^{n+1}} \Big| + \Big| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\sigma(y)(n)}{2^{n+1}} \Big| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por lo tanto f es continua. Luego, si $Z = f(\omega^\omega)$, entonces Z es un conjunto analítico, y por el Teorema 0.55, Z es medible, y por construcción $Z \subseteq S$.

Solo falta ver que $\mu(Z) > 0$. Para ello supongamos lo contrario. Si $\mu(Z) = 0$, entonces existen $\{s_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ y $\{r_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$Z \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (s_n, r_n) \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} \mid r_n - s_n \mid < \frac{\epsilon}{2^2} = \epsilon_0$$

gracias a la densidad de $\mathbb{Q}$ podemos decir $s_n, r_n \in \mathbb{Q}$ para toda $n \in \omega$.

Ahora, como $\sum_{n=0}^{\infty} \mid r_n - s_n \mid$ converge, entonces existe m_1 suficientemente grande, que cumple $\sum_{n=m_1}^{\infty} \mid r_n - s_n \mid < \frac{\epsilon}{2^4} = \epsilon_1$.

Haciendo el mismo procedimiento de manera inductiva, obtenemos una sucesión $0 = m_0 < m_1 < \cdots < m_k < \cdots$, tal que $\sum_{n=m_k}^{\infty} \mid r_n - s_n \mid < \frac{\epsilon}{2^{2(k+1)}} = \epsilon_k$. Definamos a $H_k := \bigcup_{n=m_k}^{m_k+1} \mid r_n - s_n \mid$, por lo tanto

$$\mu(H_k) = \mu\Big(\bigcup_{n=m_k}^{m_k+1} |r_n - s_n| \Big) = \sum_{n=m_k}^{m_k+1} \mid r_n - s_n \mid \leq \sum_{n=m_k}^{\infty} \mid r_n - s_n \mid < \epsilon_k = \frac{\epsilon}{2^{2(k+1)}},$$

para todo $k \in \omega$. Por lo tanto, $H_k \in K_k$ para cada $n \in \omega$ y $Z \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} H_k$.

Pero, si **II** juega la sucesión $(y_0, y_1, ...)$, tal que $H_n = G^n_{y_n}$, entonces como **I** juega mediante σ, se cumple que

$$f(y) \in f(\omega^\omega) = Z \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n.$$

Entonces

$$\mathcal{A}(\sigma(y)) \in \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n \text{ donde } \mathcal{A}(\sigma(y)) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\sigma(y)(n)}{2^{2(n+1)}},$$

es decir **II** gana el juego $\eth(S,\epsilon)$ lo cual es una contradicción para la estrategia ganadora σ. Por lo tanto se concluye que $\mu(Z) > 0$. ■

El siguiente resultado establecen qué ocurre si el jugador **I** tiene una estrategia ganadora.

Teorema 0.69. *Sean $S \in [0,1]$ y $\epsilon > 0$. Si* **II** *tiene estrategia ganadora τ en $\eth(S,\epsilon)$, entonces existe un conjunto abierto O tal que $S \subset O$ y $\mu(O) < \epsilon$ (es decir $\mu(S) < \epsilon$).*

Demostración. Sea τ una estrategía ganadora para **II**. Para toda $s \in 2^{<\omega}$ sucesión finta de longitud n, definimos al conjunto $G_s := G^n_{y_n} \subseteq K_n$, donde $y_n = (\tau * s)(2(n-1)+1)$. Como τ es una estrategia ganadora para **II**, para cada $\alpha \in S$, existe $x_\alpha \in 2^\omega$ formada por los movimientos de **I**, tal que $\mathcal{A}(z) = \alpha$ y

$$\alpha \in \bigcup \{G_s : s \subset x_\alpha\} = \bigcup_{s \subseteq x\alpha} G_s.$$

Luego, se obtiene lo siguiente

$$S \subseteq \bigcup_{\alpha \in S} \bigcup_{s \subseteq x_\alpha} G_s \subseteq \bigcup_{s \in 2^\omega} G_s = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s \in \{0,1\}^n} G_s.$$

Ahora, por la estrategia τ, para cada $n \geq 1$, si $s \in \{0,1\}^n$, entonces $\mu(G_s) \leq \frac{\epsilon}{2^{2(n+1)}} < \frac{\epsilon}{2^n}$. Por lo tanto

$$\mu(\bigcup_{s \in \{0,1\}^n} G_s) \leq 2^n \frac{\epsilon}{2^{2n}} = \frac{\epsilon}{2^n},$$

y como $S \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s \in \{0,1\}^n} G_s$, se obtiene que

$$\mu(S) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s \in \{0,1\}^n} G_s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\bigcup_{s \in \{0,1\}^n} G_s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \frac{\frac{\epsilon}{2}}{1 - \frac{1}{2}} < \epsilon.$$

Entonces, $\mu^\star(S) < \epsilon$ para toda $\epsilon > 0$, por lo tanto $\mu(S) = 0$. ■

De los dos últimos teoremas se deduce el siguiente lema:

Lema 0.70. *Asumimos AD. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que para todo $Z \subseteq S$ medible tiene medida nula, entonces S es medible y tiene medida nula.*

Demostración. Está claro que podemos restringirnos a subconjuntos del intervalo de la unidad; así pues supongamos que $S \subseteq [0,1]$ y probemos que $\mu(S) < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Sea $\epsilon > 0$ y consideremos el Juego $\eth(A,\epsilon)$ descrito anteriormente. Entonces como suponemos cierto AD implica que el juego $\eth(A,\epsilon)$ esta determinado por lo que al menos **I** o **II** tienen una estrategia ganadora. Si **I** tiene una estrategia ganadora entonces por el Teorema 0.68 existe $Z \subseteq S$ tal que $\mu(Z) > 0$ lo cual contradice la propiedad de S. Por lo tanto **II** tiene una estrategia ganadora y por el Teorema 0.69 obtenemos que $\mu(S) < \epsilon$. ■

Ahora solo queda usar el lema anterior para mostrar que cada subconjunto de números reales es un conjunto medibles medible.

Corolario 0.71. *Asumiendo AD. Todo conjunto de números reales es un conjunto Lebesgue Medible.*

Demostración. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$. Por la Proposición 0.44, existe A un conjunto medible tal que $A\backslash X$ cumple con la hipótesis del Lema 0.70. Entonces $A\backslash X$ es de medida nula, por lo tanto $A\backslash X$ es un conjunto Lebesgue medible. Más aún, $\mathbb{R}\backslash(A\backslash X)$ también es Lebesgue medible, y como $X = \big(\mathbb{R}\backslash(A\backslash X)\big) \cup A$, se concluye que X es un conjunto Lebesgue medible. ■

0.8. La propiedad de Baire

Una propiedad análoga a la propiedad de Lebesgue medible de un conjunto, es la propiedad de Baire. Al igual que con la propiedad de Lebesgue, del Axioma de Elección se deduce que hay conjuntos de reales sin la propiedad de Baire. Por este motivo, haremos un estudio sobre este tema.

Definición 0.72. *Sea X un espacio topologico y $A \subseteq X$, entonces*

- *A es nada denso (o denso en ninguna parte) si y sólo si $int(\overline{A}) = \emptyset$.*
- *A es denso en X si para todo abierto U en X $U \cap A \neq \emptyset$.*
- *A es magro (o de primera categoria) si es la unión numerable de subconjuntos nada densos en X, en otro caso a es un conjunto de segunda categoría.*
- *X tiene la propiedad de Baire si existe un conjunto abierto G tal que $(A\backslash G) \cup (G\backslash A)$ es magro.*

El siguiente teorema exhibe la relación que existe entre conjuntos nada densos y conjuntos densos.

Proposición 0.73. *Sean X un espacio topologico de Hausdorff y $B \subseteq X$ entonces*

$$X\backslash int(B) = \overline{X\backslash B}.$$

Demostración. Sabemos que $int(B) \subseteq B$, luego $X\backslash B \subseteq X \int(B)$ y como $X\backslash int(B)$ es cerrado, esto implica que $\overline{X\backslash B} \subseteq X\backslash int(B)$. Por otro lado supongamos que para algún $x \in N$, $x \notin \overline{X\backslash B}$. Por lo que existe un abierto U alrededor de X tal que $U \cap \overline{X\backslash B} = \emptyset$ es decir $x \in U \subseteq B$ por lo que $x \in int(B)$. Por tanto $x \notin X\backslash int(B)$ y así $X\backslash int(B) \subseteq \overline{X\backslash B}$. ■

Notemos que si $int(B) = \emptyset$ si y sólo si $X = X\backslash\emptyset = X\backslash int(A) = \overline{X\backslash B}$ si y sólo si B es denso.

Definición 0.74. *Sea X es un subconjunto de ω^ω y consideremos el siguiente juego llamado el juego de Banach-Mazur denotado por $\partial^{\star\star}(X)$: El jugador* **I** *y* **II** *alternan turnos, pero en lugar de número naturales juegan sucesiones finitas no vacías de número naturales.*

I	s_0		s_1		s_2		...	
II		t_0		t_1		t_2		...

Con la condición de que cumplan con lo siguiente:

$$s_0 \subset t_0 \subset s_1 \subset t_1 \subset s_2 \subset t_2 \subset \cdots$$

La secuencia anterior converge a una $x \in \omega^\omega$. Entonces **I** gana el juego $\partial^{\star\star}(X)$ si $x \in X$ y **II** gana si $x \notin X$.

Notemos que el juego que necesitamos no es exactamente como los juegos infinitos de la Definición 0.57, ya que éste requiere que los jugadores jueguen otros objetos naturales en lugar de números naturales, y la condición ganadora es bastante sofisticada. Para abordar este problema, sabemos que $\omega^{<\omega}$ es numerable por lo que existe $\phi : \omega \to \omega^{<\omega}$ biyectiva. Entonces consideremos al conjunto $X^{\star\star}$ definido como

$$X^{\star\star} = \{(x_0, y_0, x_1, y_1, ...) \in \omega^\omega \mid \phi(x_0) \subset \phi(y_0) \subset \phi(x_1) \subset \phi(y_1) \subset \quad \text{converge a un } x \text{ y } x \in X\}$$

Es claro que **I** gana el juego $⅁^{\star\star}(\mathcal{X})$ si y sólo si **I** gana el juego $⅁(X^{\star\star})$ Así pues si AD se cumple, el juego $⅁^{\star\star}(\mathcal{X})$ está determinado para todo $\mathcal{X} \subset \omega^\omega$

Usaremos ésto para mostrar que cada $\mathcal{X} \subset N$ tiene la propiedad de Baire. Para verlo, nos ayudaremos ampliamente del siguiente lema.

Lema 0.75. *Si el jugador II tiene una estrategia ganadora en el juego $G^{\star\star}(X)$ entonces X es magro.*

Demostración. Sea $Y = \omega^\omega \backslash X$. Asumimos que II tiene una estrategia ganadora τ en $G^{\star\star}(X)$. Decimos que una correcta posición en el juego $⅁^{**}(X)$ es una sucesión $p = (s_0, t_0, ..., s_n, t_n)$ tal que $s_0 \subseteq t_0 \subseteq ... \subseteq t_n$, $t_1 = \tau(s_0)$ y $t_i = \tau((s_0, t_0, ..., s_i))$ para cada $i = 0, 1, ..., n$.

Afirmación: Si $x \in \omega^\omega$ y para cada posición correcta $P = (s_0, t_0, ..., s_n, t_n)$, con $t_n \subseteq x$, existe $s \subseteq \omega^{<\omega}$ tal que $t_n \subseteq s$ y $\tau(p^\frown s) \subseteq x$, entonces $x \in Y$.

En efecto: Sea $x \in \omega^\omega$ que cumple con lo establecido en la hipótesis de la afirmación. Para empezar, la susesión vacío $\emptyset$, es una posición correcta en $⅁^{**}(X)$, por lo que existe $s_0 \in \omega^{<\omega}$ tal que $\tau((s_0)) \subseteq x$. Si $t_0 = \tau((s_0))$, entonces la sucesión (s_0, t_1) es una posición correcta lo cual implica que existe $s_1 \in \omega^{<\omega}$ tal que $t_0 \subseteq s_1$ y $\tau((s_0, t_0, s_1)) \subseteq x$. Nuevamente, tomando $t_1 = \tau((s_0, t_0, s_1))$, existe $s_2 \supseteq t_1$ tal que $\tau((s_0, t_0, s_1, t_1, s_2)) \subseteq x$ y así sucesivamente. Entonces, la secuencia $s_0 \subseteq t_0 \subseteq s_1 \subseteq t_1 \subseteq ...$ converge a x y como ésta es una partida en la cual II juega mediante la estrategia ganadora τ, se concluye que $x \in Y$. Esto demuestra la afirmación.

Ahora, para cada posición correcta $p = (s_0, t_0, ..., t_n)$. Definimos

$$F_p = \{x \in \omega^\omega : t_n \subseteq x \text{ y } \tau(p^\frown s) \nsubseteq x \text{ para toda } s \supseteq x\}.$$

Para cada $x \in X$, existe una posición correcta tal que $x \in F_p$, de lo contrario, x cumplirá las condiciones de la hipótesis de la afimación, por lo que $x \in Y$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto

$$X \subseteq \bigcup \{F_p : p \text{ es una posición correcta}\},$$

es una unión de conjuntos a lo más numerable.

Veamos que, para cada posición correcta $p = (s_0, t_0, \cdots, t_n)$, $\omega^\omega \backslash F_p$ es un conjunto denso abierto en $\langle t_n \rangle$.

Primero probemos que $\omega^\omega \backslash F_p$ es un conjunto abierto. Sea $x \in \omega^\omega \backslash F_p$, entonces $t_n \nsubseteq x$ o existe $s \supseteq t_n$ tal que $\tau(p^\frown s) \subseteq x$. Supongamos que $t_n \nsubseteq x$, por lo que existe $m \in \omega$ tal que $t_n \nsubseteq x|m$, tomando cualquier $y \in \langle x|m \rangle$, se tiene que $t_n \nsubseteq x|m \subseteq y$. Por lo tanto $y \in \omega^\omega \backslash F_p$, lo cual implica que $\langle x|m \rangle \subseteq \omega^\omega \backslash F_p$. Ahora, si asumimos que existe $s \supseteq t_n$ tal que $\tau(p^\frown s) \subseteq x$, podemos tomar un $m \in \omega$, tal que $\tau(p^\frown s) \subseteq x$. Entonces, para cada $y \in \langle x|m \rangle$ existe $s \supseteq t_n$ tal que $\tau(p^\frown s) \subseteq x|m \subseteq y$, por lo tanto $y \notin F_{p_n}$, entonces $y \in \omega^\omega \backslash F_p$ por lo que $\langle x|m \rangle \subseteq \omega^\omega \backslash F_p$. Se concluye que $\omega^\omega \backslash F_{p_n}$ es un conjunto abierto.

Para la densidad de F_p, elíjase un conjuto abirto básico U en el conjunto abierto $\langle t_n \rangle$, entonces existe $r \in \omega^{<\omega}$ que genera a U, lo cual implica que $\langle r \rangle \subseteq \langle t_n \rangle$. Tomando a $s = r$, obtenemos que $t_n \subseteq s$ y $s \subseteq \tau(p^\frown s)$. Luego, si $y \in \langle \tau(p^\frown s) \rangle$, se tiene que $s \supseteq t_n$ y $\tau(p^\frown s) \subseteq y$, por lo tanto $y \in \langle t_n \rangle \backslash F_p$, y como $y \in \langle \tau(p^\frown s) \rangle \subseteq \langle r \rangle$ (ya que $r = s \subseteq \tau(p^\frown s_n)$), entonces $U \cap (\langle t_n \rangle \backslash F_p) \neq \emptyset$, es decir, $\langle t_n \rangle \backslash F_p$ es denso en $\langle t_n \rangle$.

Luego como para toda posición correcta p, $\langle t_n\rangle\backslash F_p$ es un conjunto denso abierto en $\langle t_n\rangle$, entonces F_p es nada denso. Se conclye que X es magro. ■

Corolario 0.76. *Sea $X \subset \omega^\omega$. Si el jugador* **I** *tiene una estrategia ganadora en el $\Game^{\star\star}(X)$ entonces $\langle s\rangle\backslash X$ es magro para algún $s \in \omega^{<\omega}$*

Demostración. Si **I** tiene una estrategia ganadora entonces existe $s \in \omega^{<\omega}$ tal que $\sigma(\emptyset) = s$, es decir, s es el primer movimiento de **I**. Ahora, definamos el siguiente juego $\Game^{\star\star}(O(s)\backslash X)$: $\mathbf{I}'$ juega $t_0 \supset s$, $\mathbf{II}'$ juega $s_0 \supset t_0$, $\mathbf{I}'$ juega $t_1 \supset s_0$, así sucesivamente. Luego de ω, $\mathbf{I}'$ gana si la secuencia $t_0 \subset s_0 \subset ...$ converge a un $x \in O(s)\backslash X$.

$$\begin{array}{c||cccccccccc}
\mathbf{I}' & t_0 & & t_1 & & t_2 & & & \ldots & \\ \hline
\mathbf{II}' & & s_0 & & s_1 & & s_2 & & & \ldots
\end{array}$$

$$\begin{array}{c||cccccccc}
\mathbf{I} & \sigma(\emptyset) = s & & s_0 & & s_1 & & \ldots & \\ \hline
\mathbf{II} & & t_0 & & t_1 & & t_2 & & \ldots
\end{array}$$

Notemos que **I** tiene una estrategia ganadora en $\Game^{\star\star}(X)$ si y sólo si el jugador $\mathbf{II}'$ tiene una estrategia ganadora en $\Game^{\star\star}(O(s)\backslash X)$. Por el Teorema 0.75, si $\mathbf{II}'$ tiene una estrategia ganadora en $\Game^{\star\star}(O(s)\backslash X)$ entonces $O(s)\backslash X$ es magro. ■

Dados los resultados anteriores, estamos en condiciones de probar el siguiente resultado bajo **AD**.

Teorema 0.77. *Supongamos AD. Entonces, todo conjunto $X \subseteq \omega^\omega$ tiene la propiedad de Baire.*

Demostración. Si $X \subseteq \omega^\omega$, entonces el juego Banach-Mazur $\Game^{\star\star}(X)$ está determinado. Si **II** tiene una estrategia ganadora en $\Game^{\star\star}(X)$, entonces por el Teorema 0.75, X es magro y por lo tanto X tiene la propiedad de Baire.

Si **I** tiene una estrategia ganadora en $\Game^{\star\star}(X)$, entonces por Corolario 0.76, existe $s \in \omega^{<\omega}$ tal que $\langle s\rangle\backslash X$ es magro, por lo que $\{\langle s\rangle : \langle s\rangle\backslash X \text{ es magro }\} \neq \emptyset$. Sea

$$O = \bigcup\{\langle s\rangle : \langle s\rangle\backslash\mathcal{X} \text{ es magro }\}.$$

Por definición, $O\backslash\mathcal{X}$ es unión numerable de magros, por lo que $O\backslash X$ es magro.

Queda por demostrar que $X\backslash O$ es magro. Supongamos que $X\backslash O$ no es magro. Tomando el juego $\Game^{\star\star}(X\backslash O)$, entonces por AD, $X\backslash O$ es magro lo cual es una contradicción, o existe $t \in \omega^\omega$ tal que $\langle t\rangle\backslash(X\backslash O)$ es magro, es decir, $\big(\langle t\rangle\backslash X\big) \cup \big(\langle t\rangle \cap O\big)$ es magro, lo cual implica que $\langle t\rangle \subset O$ y $\langle t\rangle \cap O = \langle t\rangle$ es magro, lo cual es una contradicción ya que los conjuntos abirtos básicos no son magros. Por lo tanto $X\backslash O$ es magro, lo cual implica que $X\backslash O \cup O\backslash X$ es un conjunto magro. Se concluye que X tiene la propiedade de Baire. ■

0.9. La Propiedad de Conjunto Perfecto en AD

En esta sección probaremos que si asumimos **AD**, la propiedad del conjunto perfecto, que se cumple para todos los conjuntos de $\mathbb{R}$, antes de verlo recordamos un par de nociones.

Definición 0.78. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, decimos que*

- *A es un conjunto perfecto si es un conjunto cerrado no vacío y sin puntos aislados.*
- *A tiene la propiedad del conjunto perfecto abreviada por PCP, si A es numerable o existe un conjunto $T \subseteq A$ tal que T es un conjunto perfecto.*

Hacia la demostración de la hipótesis del continuo, Cantor demostró que los conjuntos perfectos tienen la misma cardinalidad de $\mathbb{R}$, además esperaba demostrar que cada conjunto no numerable tuviera la propiedad del conjunto perfecto. Sin embargo, usando el Axioma de Elección podemos mostrar que esa afirmación es falsa. Para ello recordemos algunas nociones necesarias de números ordinales (para más detalle ver [4]).

Proposición 0.79. *Para todo ordinal α existe un único número natural $n(\alpha)$ y un único ordinal límite $o(\alpha)$ tal que $\alpha = o(\alpha) + n(\alpha)$. A $o(\alpha)$ se le llama la parte limite de α y a $n(\alpha)$ parte finita de α y a $o(\alpha)$, parte límite de α.*

Definición 0.80. *Un ordinal α es par (impar) si y sólo si su parte finita es par(impar).*

Estamos en condiciones de demostrar la existencia de conjunto que no cumple la PCP.

Teorema 0.81. *(**AC**) Existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ que no tiene la PCP.*

Demostración. Supongamos que cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ tiene la PCP. Por **AC**, $\mathbb{R}$ es bien ordenado. Sea $\alpha = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$.

Afirmamos que existen tantos conjuntos perfectos como números reales. En efecto. Dado que para todo $x \in X$, $(-\infty, x]$ es un conjunto perfecto entonces al menos hay tantos conjunto perfecto como números reales. Por otra parte, como cada conjunto abierto U en $\mathbb{R}$ es unión numerable de intervalos abiertos con extremos racionales, entonces hay a lo más tantos conjuntos abiertos como funciones de ω a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, y sabemos que $|(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^\omega| = |\omega^\omega| = |\mathbb{R}|$ por lo tanto existen, a lo más, tantos conjuntos abiertos como reales; además, como los conjuntos perfectos son cerrados y por cada cerrado hay un abierto, se sigue que $|\mathbb{R}| = |\{P : P \text{ es perfecto}\}|$.

Entonces, por la afirmacion anterior podemos indexar a la familia de todos los conjuntos perfectos $\mathcal{P}$ utilizando a α de las siguientes formas:

$$\mathcal{P} = \{P_\gamma : \gamma < \alpha \text{ tal que } \gamma \text{ es par } \} \text{ y}$$
$$\mathcal{P} = \{P_\gamma : \gamma < \alpha \text{ tal que } \gamma \text{ es impar } \}$$

Utilizando recursión transfinita construyamos al conjunto $X = \{x_\gamma : \gamma < \alpha\}$ que cumpla:

1. $\zeta < \gamma < \alpha$ entonces $x_\zeta \neq x_\gamma$.
2. Para todo $\gamma < \alpha$, $x_\gamma \in P_\gamma$.

Tomemos $\beta < \alpha$ y supongamos que para todo $\gamma < \beta$ ya tenemos definido x_γ. Dado que $|\beta| < |\alpha| = |\mathbb{R}| = |P_\beta|$, se tiene que $P_\beta \backslash \{x_\gamma : \gamma < \beta\} \neq \emptyset$. Por lo tanto, definimos a x_β tal que $x_\beta \in P_\beta \backslash \{x_\gamma : \gamma < \beta\}$. Ahora, como X tiene la PSC y no es numerable, entonces existe $P \in X$ tal que P es un conjunto perfecto. Si P es un conjunto perfecto, se tiene que existen γ par y ζ impar tales que $P_\gamma = P = P_\zeta$. Notemos que, por las propiedades de X y por la forma de su contrucción, se tiene que $x_\gamma \in P_\gamma \cap X$ y que $x_\zeta \notin X$ por lo que $x_\zeta \in P_\zeta \cap (\mathbb{R} \backslash X)$ es decir $P \cap (\mathbb{R} \backslash X) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. ■

Notemos que todo subconjunto X, en la demostración anterior, no es un conjunto perfecto, más aún, todo subconjunto de $\mathbb{R} \backslash X$ no es un conjunto perfecto. Tales conjuntos que satisfice estas propiedades se les llaman conjuntos de Bernstein.

Al igual que los conjuntos de Vitali, la exitencia de los conjuntos de Bernstein está extrechamente relacionada con **AC**.

Ahora, el propósito la presente sección es estudiar esta propiedad asumiendo **AD**. Para ello tendremos que definir el siguente juego.

Definición 0.82. *Sea $A \subseteq 2^\omega$ un conjunto. El juego de Morton Davis, denotado por $\partial^*(A)$, se define como sigue:*

- *El jugador **I** elige $s \in 2^{<\omega}$ sucesiones finitas y el jugardor **II** elige $n_i \in \{0{,}1\}$.*

$$\begin{array}{c||cccccccc} \mathbf{I} & s_0 & & s_1 & & s_2 & & \dots & \\ \hline \mathbf{II} & & n_0 & & n_1 & & \dots & & \end{array}$$

- *Si tomamos a $x := s_0{}^\frown n_0{}^\frown s_1{}^\frown n_1{}^\frown \cdots$. Entonces el jugador **I** gana el jugo infinito $\partial^*(A)$ si y sólo si $x \in A$.*

En este juego, los roles de I y II no son simétricos. La intuición es que el jugador **I** juega sucesiones finitas intentando formar una secesión infinita en A. El resultado del juego depende, en mayor parte, de los movimientos del jugador **I**. El papel del jugador **II** es completamente diferente; la única influencia que tiene en el juego es que en cada paso puede elegir $n_i \in \{0, 1\}$. En el siguiente movimiento, el Jugador **I** puede jugar cualquier suceción finita en $2^{<\omega}$, y así sucesivamente. Por lo tanto, **I** gana el juego, si **I** puede superar los desafíos establecidos por II y concatenar una secuencia infinita en A. II gana si puede elegir los números de tal manera que evite que I alcance su objetivo.

Los siguientes resultados muestran qué ocurre cuando cada jugador tiene una estrategia ganadora en el juego de Morton Davis.

Teorema 0.83. *Sea $A \subseteq 2^\omega$. Si el jugador **I** tiene una estrategia ganadora en $\partial^\star(A)$, entonces A contiene un conjunto perfecto.*

Demostración. Sea σ una estrategia ganadora para **I** en $\partial^\star(A)$. Definamos al conjunto B como el conjuntos de las suceciones $s_0^\frown n_0^\frown s_1^\frown n_1^\frown \cdots$ tales que $(n_0, n_1, \cdots) \in 2^\omega$, $s_0 = \sigma(\emptyset)$ y $s_i = \sigma(s_0^\frown n_0^\frown \dots {}^\frown n_{i-1})\}$ para toda $i \in \omega$.

Veamos que B es un conjunto perfecto. En efecto. Sea $x \in B$, tomemos el conjunto abiserto básico $< t >$ con $t \in \omega^{<\omega}$, tal que $t \subseteq x$, como $x = s_0^\frown n_0^\frown s_1^\frown n_1^\frown \cdots$, entonces existe $j \in \omega$ tal que obtenemos los siguientes casos.

Caso 1. Si $t = s_0^\frown n_0^\frown s_1^\frown n_1^\frown \dots {}^\frown s_j$.

Como $n_i \in \{0, 1\}$ para todo $i \in \omega$, entonces tomamos a $m{\in}\{0, 1\}$ tal que $m \neq n_j$, luego creamos la sucesión:

$$z := t^\frown m^\frown s_{m_0}^\frown n_{j+1}^\frown s_{m_1}^\frown \cdots = s_0^\frown n_0^\frown \dots {}^\frown n_{j-1}^\frown s_j^\frown m^\frown s_{m_0}^\frown m_{j+1}^\frown \cdots ,$$

donde $s_{m_0} = \sigma(t^\frown m)$ y $s_{m_i} = \sigma\big(t^\frown m^\frown s_{m_0}^\frown n_{j+1}^\frown s_{m_1}^\frown \dots {}^\frown s_{m_{i-1}}^\frown n_{j+i-1}\big)$.

Por lo tanto $z \in B$, además $z \in < t >$ con $y \neq x$, por lo tanto x es un punto de acumulación de B.

Caso 2. Si $t = s_0^\frown n_0^\frown s_1^\frown n_1^\frown \dots {}^\frown s_j^\frown n_j$

Sea $s_{j+1} = \sigma(t)$, entonces si tomando $t' = t^\frown s_{j+1} \subseteq x$ tenemos el caso anterior, por lo que se cumple lo requerido.

Caso 3 Si $t = s_0^\frown n_0^\frown s_1^\frown n_1^\frown \dots {}^\frown s_{j|m}$ para algún $m \in \omega$

Definimos una sucesión como $t' = s_0^\frown n_0^\frown s_1^\frown \dots {}^\frown s_{j+1}$ por lo que $t \subseteq t'$ y por el primer caso obtenemos lo requerido.

Por lo tanto B es un conjunto perfecto. Además, por cómo está definido B, tenemos que $B \subseteq A$, se concluye A contiene un conjunto perfecto. ■

Teorema 0.84. *Sea $A \subseteq 2^\omega$. Si **II** tiene una estrategia ganadora en $\partial^\star(A)$ entonces A es numerable.*

Demostración. Sea τ una estartegia ganadora para **II** en $\Game^\star(A)$. Decimos que una sucesión $p = (s_0, n_0, s_1, n_1, \cdots, s_k, n_k)$ es una posición correcta para τ si y sólo si $n_i = \tau(s_0{}^\frown n_0{}^\frown s_1{}^\frown n_1 \cdots{}^\frown s_i)$ para todo $i \leq k$, más aún, si $x \in 2^\omega$ entonces decimos que $p = (s_0, n_0, s_1, n_1, \cdots, s_k, n_k)$ es *compatible* con x si y sólo si $s_0{}^\frown n_0{}^\frown s_1{}^\frown n_1 \cdots{}^\frown s_i{}^\frown n_i \subseteq x$.

Dado que τ es una estrategia ganadora para **II**, tenemos que $x \notin A$, de esto se deduce que para todo $p = (s_0, n_0, \cdots, n_k)$, posición corecta para τ y compatible con x, existe $s \in 2^{<\omega}$ tal que $\big(s_0, n_0, \cdots, n_k, s, \tau(s_0, n_0, \cdots, n_k, s)\big)$ es compatible con x. Por lo tanto, si $y \in A$, existe $p_x = (s_0, n_0, \cdots, s_k, n_k)$ posición corecta para τ y compatible con x tal que para todo $s \in 2^{<\omega}$, $(s_0, n_0, \cdots, s_k, n_k, s, \tau((s_0, n_0, \cdots, s_k, n_k, s))$ no es compatible con x. Tomamdo al conjunto $A' = \{p_x : x \in A\}$, si $x \in B$, $p_x = (s_0, n_0, \cdots, s_k, n_k)$ y

$$x = s_0{}^\frown n_0{}^\frown \cdots{}^\frown s_k{}^\frown n_k{}^\frown m_0{}^\frown m_1{}^\frown \cdots,$$

donde $m_i = \tau(s_0{}^\frown n_0{}^\frown \cdots{}^\frown s_k{}^\frown n_k{}^\frown m_0{}^\frown m_1{}^\frown \cdots{}^\frown m_{i-1})$. Por lo tanto hay una función inyectiva de A en A' y como A' es a lo más numerable, entonces A es numerable.

■

Dados los resultados anteriores, estamos en condiciones de probar el siguiente resultado asumiendo **AD**.

Teorema 0.85. *Asumamos* **AD**. *Todo conjunto no numerable de* 2^ω *tiene un subconjunto perfecto.*

Demostración. Sea $A \in 2^\omega$ no numerable entonces el juego $\Game^\star(A)$ está determinado. Supongamos que **II** tiene una extrategia ganadora entonces por el Teorema 0.84, A es numerable lo cual no puede ocurrir. Por lo tanto **I** tiene una estrategia ganadora y por el Teorema 0.83, A contiene un conjunto perfecto. ■

Corolario 0.86. *Asúmase AD. Todos los conjunto de* 2^ω *tienen la PCP.*

Capítulo 3. Reducibilidad de Wadge y AD

En los capítulos anteriores observamos que, para algunas propiedades, si se asume como cierto **AD** entonces todo conjunto cumple dicha propiedad. Ahora, el concepto fundamental de este capítulo es el de reducibilidad de Wadge. Probaremos que bajo AD, la reducibilidad de Wadge tiene una estructura muy rica, para ello primero estudiaremos un tipo de conjuntos que serán de gran ayuda.

0.10. Conjunto Flip

Definición 0.87. *Un conjunto $X \subseteq 2^\omega$ es llamado conjunto flip si para cuales quiera $x, y \in 2^\omega$, si $|\{n \in \omega : x(n) \neq y(n)\}| = 1$ entonces $x \in X$ si y sólo si $y \notin X$.*

Algunas consecuencias inmediatas que podemos deducir son las siguientes. Sea $X \subset 2^\omega$ es un conjunto flip, con $x, y \in 2^\omega$, se deduce que:

- Si $|\{n \in \omega : x(n) \neq y(n)\}| = 2k$ con $k \geq 1$, entonces $x \in X$ si y sólo si $y \in X$.
- Si $|\{n \in \omega : x(n) \neq y(n)\}| = 2k + 1$ con $k \geq 1$, entonces $x \in X$ si y sólo si $y \notin X$.

Análogo a las propiedades mostradas en capítulos anteriores, la existencia de los conjuntos flip no siempre se garantiza en la teoría **ZF**, sin embargo si suponemos **AC** es posible demostrar la existencia de tales conjuntos.

Teorema 0.88. *Asumamos AC. Existe un conjunto flip.*

Demostración. Sea $\sim$ una relación de equivalencia en 2^ω tal que $x \sim y$ si y sólo si $\{n \in \omega : x(n) \neq y(n)\}$ es finito. Para cada clase de equivalencia $[x]_\sim$, sea $s_{[x]_\sim}$ un elemento fijo de esta clase. Definamos a X como

$$x \in X \text{ si y sólo si } \mid \{n \in \omega : x(n) \neq s_{[x]_\sim}(n)\} \mid \text{ es par.}$$

Este es un conjunto *flip*, ya que si $x, y \in 2^\omega$ son tales que $|\{n \in \omega : x(n) \neq y(n)\}| = 1$ entonces $x \sim y$ y como suponemos AC esto implica que $s_{[x]_\sim} = s_{[y]_\sim}$, entonces por como esta construido X, exactamente uno de ellos, ya sea x o y, está en X. ∎

Es de suponer que, al asumir **AC**, los conjuntos flip existen, entonces al asumir **AD**, ésto no se cumple. Para demostrar este hecho vamos a introducir un juego el cual nos dará (bajo determinación) la no existencia de conjuntos flip.

El siguiente es otra versión de juego de Banach-Mazur, definido en secciones pasadas.

Definición 0.89. *Sea $X \subseteq 2^\omega$. Consideremos el juego $\eth^{\star\star}(X)$ como sigue: Los jugadores* **I** *y* **II** *se alternan en turnos, donde cada jugador juega sucesiones finitas no vacías de $\{0, 1\}$.*

$$\begin{array}{c||cccccccc}
\mathbf{I} & s_0 & & s_1 & & s_2 & & \ldots & \\
\hline
\mathbf{II} & & t_0 & & t_1 & & t_2 & & \ldots
\end{array}$$

*Sea $z := s_0^\frown t_0^\frown s_1^\frown t_1^\frown \cdots$. Decimos que el jugador **I** gana el juego $\Game^{\star\star}(X)$ si y sólo si $z \in X$, en otro caso **II** gana el juego.*

El siguiente resultado establece qué ocurre cuando cada jugador tiene una estrategia ganadora.

Lema 0.90. *Sea $X \subseteq 2^\omega$ un conjunto flip.*

1. *Si **I** tiene una estrategia ganadora en $\Game^{\star\star}(X)$, entonces **I** también tiene una estrategia ganadora en $\Game^{\star\star}(2^\omega \backslash X)$.*

2. *Si **II** tiene una estrategia ganadora en $\Game^{\star\star}(X)$ entonces **II** también tiene una estrategia ganadora en $\Game^{\star\star}(2^\omega \backslash X)$.*

Demostración. La demostración de 1 y 2 son análogas, así que únicamente demostraremos 1.
Sea σ una estrategia ganadora para **I** en $\Game^{\star\star}(X)$. Definamos a σ' como sigue:

- El primer movimiento $\sigma'(\emptyset)$ es una sucesión de igual longitud que $\sigma(\emptyset)$ y cumple que $|\{n \in dom(\sigma(\emptyset)) : \sigma(\emptyset)(n) \neq \sigma'(\emptyset)(n)\}| = 1$.

- Los siguientes movimientos de σ' se comportan igual que σ.

Es claro que para cualquier sucesión, $y \in 2^\omega$, formada por los movimientos de **II**, $|\{n \in \omega : \sigma * y(n) \neq \sigma' * y(n)\}| = 1$. Luego, como $\sigma * y \in X$ y X es un conjunto $flip$, entonces $\sigma' * y \notin X$ por lo tanto σ' es una estrategia ganadora para **I** en $\Game^{\star\star}(2^\omega \backslash X)$. ■

Lema 0.91. *Sea X un conjunto $flip$. Si **II** tiene una estrategia ganadora en $\Game^{\star\star}(X)$, entonces **I** tiene una estrategia ganadora en $\Game^{\star\star}(2^\omega \backslash X)$.*

Demostración. Sea τ una estrategia ganadora de **II** para el juego $\Game^{\star\star}(X)$. Ahora, construyamos una estrategia para el jugador **I** en el juego $\Game^{\star\star}(2^\omega \backslash X)$ como sigue: tomemos un $s \in 2^{<\omega}$ arbitrario y digamos que es la primera jugada de **I** en $\Game(2^\omega \backslash X)$, acto seguido **II** responderá con algún t en $\Game(2^\omega \backslash X)$. Entonces nos apoyamos en el juego $\Game^{\star\star}(X)$, en el cual **II** tiene una estrategia ganadora τ. Si **I** elige a $s^\frown t$ como primera jugada en el juego $\Game(X)$, entonces la respuesta de **II** dada por τ en el juego $\Game^{\star\star}(X)$, s_0 es la siguiente jugada de **I** en $\Game^{\star\star}(2^\omega \backslash X)$. Luego, el jugador **II** en el juego $\Game^{\star\star}(2^\omega \backslash X)$ responde con t_0 por lo que **I** copia t_0 en el juego $\Game^{\star\star}(X)$ por lo que **II** responderá en el juego $\Game^{\star\star}(X)$ con s_1 dada por τ, entonces **I** jugará s_1 en $\Game^{\star\star}(2^\omega \backslash X)$ y así sucesivamente. El siguiente esquema muestra nuestro procedimiento.

$$\Game^{\star\star}(2^\omega \backslash X) \quad \begin{array}{c||cccccccc}
\mathbf{I} & s & & s_0 & & s_1 & & \ldots & \\
\hline
\mathbf{II} & & t & & t_0 & & t_1 & & \ldots
\end{array}$$

$$\Game^{\star\star}(X) \quad \begin{array}{c||cccccccc}
\mathbf{I} & s^\frown t & & t_0 & & t_1 & & \ldots & \\
\hline
\mathbf{II} & & s_0 & & s_1 & & s_2 & & \ldots
\end{array}$$

Ahora, como $z = s^\frown t^\frown s_0^\frown t_0^\frown \cdots$ es la sucesión resultante del juego $\Game^{\star\star}(2^\omega \backslash X)$ que también es la sucesión resultante de $\Game^{\star\star}(X)$, donde **II** jugaba mediante la estrategia ganadora τ, entonces $z \notin X$. Esto implica que **I** gana en $\Game^{\star\star}(2^\omega \backslash X)$ por lo que la estrategia que seguimos es ganadora para **I** en $\Game^{\star\star}(2^\omega \backslash X)$. ■

Lema 0.92. *Sea X es un conjunto $flip$. Si **I** tiene una estrategia ganadora en $\Game^{\star\star}(X)$ entonces **II** tiene una estrategia ganadora en $\Game^{\star\star}(2^\omega \backslash X)$.*

Demostración. Sea σ una estrategia ganadora para **I** en $\Game^{\star\star}(X)$. El jugador **II** jugara dos juegos, el principal $\Game^{\star\star}(2^\omega\backslash X)$ y uno auxiliar $\Game^{\star\star}(X)$ donde **I** juega de acuerdo a σ. Si el primer movimiento del jugador **I** en $\Game^{\star\star}(2^\omega\backslash X)$ es s_0, tomemos a $s := \sigma(\emptyset)$ como la primera jugada de **I** en $\Game^{\star\star}(X)$. Consideremos dos casos:

$\cdot$) Supongamos que $l(s_0) < l(s)$. Entonces, en el juego $\Game^{\star\star}(2^\omega\backslash X)$, dejemos que **II** juegue t_0, de tal forma que $l(s_0^\frown t_0) = l(s)$ y que $|\{n \in dom(s) : s(n) \neq s_0^\frown t_0(n)\}| = 2k$ para algún $k \in \omega$. Luego, si s_1 es la siguiente tirada de **I** en $\Game^{\star\star}(2^\omega\backslash X)$, el jugador **II** copia s_1 en $\Game^{\star\star}(X)$, por lo tanto **I** juega t_1, dado por σ, en $\Game^{\star\star}(X)$ con lo cual **II** tira t_1 en $\Game^{\star\star}(2^\omega\backslash X)$ y así sucesivamente, por lo que nos da los siguientes esquemas.

$$\Game^{\star\star}(2^\omega\backslash X)\ \begin{array}{c||cccccccc} \mathbf{I} & s_0 & & s_1 & & s_2 & & \ldots & \\ \hline \mathbf{II} & & t_0 & & t_1 & & t_2 & & \ldots \end{array}$$

$$\Game^{\star\star}(X)\ \begin{array}{c||cccccccc} \mathbf{I} & s & & t_1 & & t_2 & & \ldots & \\ \hline \mathbf{II} & & s_1 & & s_2 & & s_3 & & \ldots \end{array}$$

Sea $x = s_0^\frown t_0^\frown s_1^\frown t_1^\frown \cdots$ es la sucesión resultante del juego $\Game^{\star\star}(2^\omega\backslash X)$ y $z = s^\frown s_1^\frown t_1^\frown s_2^\frown \cdots$ la sucesión resultante del juego $\Game^{\star\star}(X)$, como **I** juega mediante σ en $\Game^{\star\star}(X)$ entonces $z \in X$, además por construcción $|\{n \in \omega : x(n) \neq z(n)\}| = 2k$ para algún $k \in \omega$, y X es un conjunto *flip*, entonces $x \in X$, es decir $x \notin 2^\omega\backslash X$. Por lo que la estrategia que describimos es ganadora para **II** en el juego $\Game^{\star\star}(2^\omega\backslash X)$.

$\cdot\cdot$) Supongamos que $l(s) \leq l(s_0)$. Esta vez, el jugador **II** juega un t en $\Game^{\star\star}(X)$ tal que $l(s^\frown t) > l(s_0)$, después **I** juega t' dado por la estrategia σ en $\Game^{\star\star}(X)$. Es claro que $l(s^\frown t^\frown t') > l(s_0)$ por lo que **II** juega en $\Game^{\star\star}(2^\omega\backslash X)$ un t_o tal que $l(s_0^\frown t_0) = l(s^\frown t^\frown t')$ con $|\{n \in dom(s_0^\frown t_0) : s_0^\frown t_0(n) \neq s^\frown t^\frown s'(n)\}| = 2k$ para algún $k \in \omega$. Después si s_1 es la siguiente jugada de **I** en $\Game^{\star\star}(2^\omega\backslash X)$ entonces **II** juega s_1 $\Game^{\star\star}(X)$ y repite el proceso del caso anterior. Obteniendo

$$\Game^{\star\star}(2^\omega\backslash X)\ \begin{array}{c||cccccccc} \mathbf{I} & s_0 & & s_1 & & s_2 & & \ldots & \\ \hline \mathbf{II} & & t_0 & & t_1 & & t_2 & & \ldots \end{array}$$

$$\Game^{\star\star}(X)\ \begin{array}{c||cccccccc} \mathbf{I} & s & & t' & & t_1 & & \ldots & \\ \hline \mathbf{II} & & t & & s_1 & & s_2 & & \ldots \end{array}$$

Luego, si $x = s_0^\frown t_0^\frown s_1^\frown t_1^\frown \cdots$ y $z = s^\frown t^\frown t'^\frown s_1^\frown \cdots$ con $|\{n \in \omega : x(n) \neq z(n)\}| = 2k$ para algún $k \in \omega$, con $x \in X$, y como X es un conjunto *flip* entonces $z \in X$. Por los que la estrategia que describimos es ganadora para **II** en el juego $\Game^{\star\star}(2^\omega\backslash X)$.

■

Ahora ya estamos listos para dar nuestro resultado bajo *AD*.

Teorema 0.93. *Si asumimos AD, entonces no existen conjuntos flip.*

Demostración. Por contradicción. Supongamos que existe $X \subseteq 2^\omega$ un conjunto flip, entonces como estamos suponiendo **AD**, el juego $\Game^{\star\star}(X)$ esta determinado por lo tanto se tiene lo siguiente:

- Si **I** tiene una estrategia ganadora en $\Game^{\star\star}(X)$, por el Lema 0.90, **I** tiene una estrategia ganadora en $\Game^{\star\star}(2^\omega\backslash X)$, pero por el Lema 0.92, **II** tiene una estrategia ganadora en $\Game(2^\omega\backslash X)$ lo cual no puede ocurrir.
- Si **II** tiene una estrategia ganadora en $\Game^{\star\star}(X)$, por el Lema 0.90 **II** tiene una estrategia ganadora en $\Game^{\star\star}(2^\omega\backslash X)$ y por el Lema 0.91, **I** tiene una estrategia ganadora en $\Game^{\star\star}(2^\omega\backslash X)$ lo cual no puede ocurrir.

Por lo tanto **I** y **II** no tienen estrategia ganadora en $\Game^{\star\star}(X)$ por lo que $\Game^{\star\star}(X)$ no esta determinada la cual es una contradicción. Se concluye que, no existen los conjuntos $flip$.

$\blacksquare$

También los anteriores lemas implican una forma alternativa para demostrar que AC implica la existencia de conjuntos no determinados.

Corolario 0.94. *Si asumimos AC entonces existe un conjunto $X \in 2^{\omega}$ tal que $\Game^{\star\star}(X)$ no está determinado.*

0.11. Teoría de Wadge

En esta sección mostraremos que al asumir el Axioma de Determinación, los elementos de $\mathcal{P}(\omega)$ se pueden distribuir en una jerarquía de grados en orden creciente de complejidad, gracias a la reducibilidad de Wadge.

Definición 0.95. *Sean $A, B \subseteq \omega^{\omega}$. Decimos que A es Wadge-reducible a B, denotado por $A \leq_W B$, si existe una función continua $f : \omega^{\omega} \to \omega^{\omega}$ tal que $A = f^{-1}(B)$. Además $A <_W B$ si y sólo si $A \leq_W B$ y $B \nleq_W A$.*

Aunque la definición anterior está dada solo para el espacio ω^{ω}, también se puede formular para cualquier espacio topológico. Como trataremos frecuentemente con los complementos de conjuntos en esta sección, será conveniente usar la notación $A^c = \omega^{\omega} \setminus A$.

Es claro que, $A \leq_W B$ si y sólo si $A^c \leq_W B^c$. Además la relación $\leq_W$ es reflexiva y transitiva, pero no simetrica. Sin embargo, podemos establecer la siguiente relación. Decimos que A es Wadge-equivalente, denotado por $A \equiv_W B$, si y sólo si $A \leq_W B$ y $B \leq_W A$. Esta relación es una relación de equivalencia. Representaremos por $\mathbb{G}_W$ al conjunto cociente de $\mathcal{P}(\omega)$ respecto a la relación de equivalencia $\equiv_W$ y a sus elementos de los llamaremos grados de Wadge. Usaremos la notación $[A]_W$ para referirnos al grado de Wadge de un conjunto A.

Notemos que en $\mathbb{G}_W$ podemos definir una relación de orden parcial dada por: $[A]_W \leq_W [B]_W$ si y sólo si $A \leq_W B$. Ahora, como $A \leq_W B$ implica que $A^C \leq_W B^C$, podemos definir el grado complementario $\mathbb{G}_W \setminus [A]_W = [A^C]_W$.

Sin el Axioma Determinación, no se puede decir mucho sobre la reducibilidad de Wadge. Sin embargo, bajo AD obtenemos una teoría de estructura muy rica, gracias a que existe una conexión muy estrecha entre los conceptos de reducibilidad de Wadge y los juegos infinitos, más específicamente con el juego infinito de Wadge.

Definición 0.96. *Sea $A, B \subseteq \omega^{\omega}$. El juego de Wadge, denotado por $\Game^W(A, B)$ es jugado como sigue: los jugadores* **I** *y* **II** *en cada turno eligen números naturales.*

$$\begin{array}{c||cccccccc} \mathbf{I} & x_0 & & x_1 & & x_2 & & \dots & \\ \hline \mathbf{II} & & y_0 & & y_1 & & y_2 & & \dots \end{array}$$

Si $x = (x_0, x_1, \cdots)$ y $y = (y_0, y_1, \cdots)$, entonces el jugador **II** *gana el juego $\Game^W(A, B)$ si se cumple que: $x \in A$ si y sólo si $y \in B$.*

Recordemos que en el espacio de Baire, una función $f : \omega^{\omega} \to \omega^{\omega}$ es continua en $x \in \omega^{\omega}$ si y sólo si para todo $s \subseteq f(x)$, existe $t \subseteq x$ tal que $s \subseteq f(y)$ para todo $y \in \langle t \rangle$.

Además, podemos interpretar a σ estrategia de **I**, como la función $\sigma : \omega^{\omega} \to \omega^{\omega}$ definida por $\sigma(y) = \sigma * y$. Notemos que la anterior función es continua, ya que si $s \subseteq \sigma * y$ entonces existe $n \in \omega^{\omega}$ tal que, $s = (x_0, y_0, \cdots, x_n)$ o $s = (x_0, y_0, \cdots, x_n, y_n)$, tomando $t = (y_0, y_1, \cdots, y_n)$, para cualquer $z \in \langle t \rangle$ se tiene que $\sigma(z)|2n = (\sigma * y)|2n \subseteq s$. Por lo tanto $s \subset \sigma(y)$. Algo análogo ocurre si consideramos a τ, estrategia de **II**, como la función $\sigma : \omega^{\omega} \to \omega^{\omega}$ dada por $\tau(x) = x * \tau$. Dicho lo anterior, vamos a demostrar el siguiente resultado impotante.

Teorema 0.97 (Wadge)**.** *Si asumimos* **AD**. *Para cuales quiera* $A, B \subseteq \omega^\omega$, *se tiene que* $A \leq_W B$ *o* $B \leq_W A^c$.

Demostración. Tomemos el juego de Wadge $\Game^W(A, B)$, el cual está determinado. Primero supongamos que **II** tiene una estrategia ganadora τ en $\Game^W(A, B)$. Sea $g : \omega^\omega \to \omega^\omega$ la función definida como $g(z)(n) = z(2n + 1)$, entonces para toda sucesión, x, formada por los movimientos de **I**, tenemos que:

$$x \in A \text{ si y sólo si } g \circ \tau(x) = g(x * \tau) \in B.$$

Dado que g y τ son funciones continuas, por lo tanto $(g \circ \tau)^{-1}(B) = A$. Se concluye que, si **II** tiene una estarategia ganadora en $\Game^W(A, B)$ entonces $A \leq_W B$.

Ahora, supongamos que **I** tiene una estrategia ganadora σ en $\Game^W(A, B)$. Tomemos la función $f : \omega^\omega \to \omega^\omega$ dada por $f(z)(n) = z(2n)$, entonces se cumple que :

$$x = f(\sigma(y)) \in A \text{ si y sólo si } y \notin B.$$

Dado que f y σ son funciones continuas, por lo tanto $(f \circ \sigma)^{-1}(A) = B^C$. Se concluye que, si **I** tiene una estarategia ganadora en $\Game^W(A, B)$ entonces $B^C \leq_W A$. ■

A continuación se presentan algunas consecuencias.

Corolario 0.98. *Asumiendo* **AD**. *Si* $A <_W B$, *entonces*

1. $A \leq_W B^C$.

2. $B \nleq A^C$.

Demostración. 1. Si $A <_W B^C$, entonces $B \nleq A$, por el Teorema 0.97 $A \leq_W B^C$.

2. Supongamos que $B \leq_W A^C$, entonces $B^C \leq_W A$ y como $A <_W B$, es decir $A \leq_W B$ y $B \nleq_W A$, tenemos que
$$B \leq_W A^C \leq_W B^C \leq_W A.$$
Por lo tanto $B \leq_W A$, lo cual es una contradicción.

■

Corolario 0.99. *Asumiendo* **AD**. *Si* $A <_W B$, *entonces* **I** *tiene estrategia ganadora en* $\Game^W(B, A)$ *y* $\Game^W(B, A^C)$.

Demostración. Supongamos que **I** no tiene una estrategia ganadora en los juegos $\Game^W(B, A)$ y $\Game^W(B, A^C)$. Entonces, como estamos asumiendo **AD**, **II** tiene una estrategia ganadora en $\Game^W(B, A)$ o en $\Game^w(B, A^C)$.

Si **II** tiene una estrategia ganadora en $\Game^W(B, A)$, por lo visto en la demostracion del Teorema 0.97, se concluye que $B \leq_W A$, lo cual es una contardicción.

Ahora, si **II** tiene una estrategia ganadora en $\Game^W(B, A^C)$, por lo visto en la demostración del Teorema 0.97, implica que $B \leq_W A^C \leq_W B^C \leq_W A$, es decir $B \leq_W A$ lo cual es una contradicción.

Así **I** tiene una estrategia ganadora en $\Game^W(B, A)$ y en $\Game^W(B, A^C)$.

■

El siguiente teorema, llamado el Teorema de Martin-Monk, ilustra de gran manera el nivel estándar de argumentación que se puede aplicar a los juegos infinitos. Para ello, recordemos que dada una relación $\prec$ en un conjunto S, $\prec$ es bien fundada si no existe una sucecion decreciente $\cdots \prec x_2 \prec x_1 \prec x_0$ en S. Dicho lo anterior enunciemos nuestro teorema.

Teorema 0.100 (Martin, Monk)**.** *Si asumimos* **AD**, *la relación* $<_W$ *es bien fundada en* $\mathcal{P}(\omega^\omega)$.

Demostración. La prueba será por contradicción. Sea

$$\cdots\cdots <_W A_3 <_W A_2 < A_1 <_W A_0$$

una sucesión infinita $<_w$-decreciente de subconjuntos de ω^ω. Para cada $n \in \omega$ se tiene que $A_{n+1} < A_n$, por el Corolario 0.99, **I** tiene una estrategia ganadora tanto en $\Game^W(A_n, A_{n+1})$ como en $\Game^W(A_n, A_{n+1}^C)$. Denotamos a estas estrategias σ_n^0 y σ_n^1 respectivamente.

Definamos la siguiente abreviación para cada $n \in \omega^\omega$.

$$\Game_n^0 := \Game^W(A_n, A_{n+1})$$
$$\Game_n^1 := \Game^W(A_n, A_{n+1}^C).$$

Luego, cada elemento $x \in 2^\omega$, determina una sucesión de juegos de Wadge

$$\left(\Game_0^{x_0}, \Game_1^{x_1}, \Game_2^{x_2}, \cdots\right);$$

donde $x = (x_0, x_1, \cdots)$. Más aún, dado que en cada uno de los juegos, el jugador **I** tiene una estrategia, obtenemos la siguente sucesión

$$\left(\sigma_0^{x_0}, \sigma_1^{x_1}, \sigma_2^{x_2}, \cdots\right).$$

Ahora, elijamos algún $x \in 2^\omega$, y consideremos su sucesión de juegos $(\Game_0^{x_0}, \Game_1^{x_1}, \Game_2^{x_2}, \cdots)$ y estrategias $(\sigma_0^{x_0}, \sigma_1^{x_1}, \sigma_2^{x_2}, \cdots)$. Entonces el jugador **II** jugará simultaneamente todos los juegos $\Game_n^{x_n}$ con su respectivo jugador **I** y su estrategia ganadora $\sigma_0^{x_0}$, mediante el siguiente procedimiento diagonal:

- En el primer juego infinito $\Game_0^{x_0}$, sea $a_0^{x_0}(0)$ el primer movimiento de **I**, dado por $\sigma_0^{x_0}$.
- Para responderle a **I** en el juego $\Game_0^{x_0}$, el jugador **II** se apoya en el segundo juego $\Game_1^{x_1}$. Sea $a_1^x(0)$ el primer movimiento de **I** en el juego $\Game_1^{x_1}$, dado por $\sigma_1^{x_1}$. Entonces **I** elige $a_1^x(0)$ como respuesta a **II** en el juego $\Game_0^{x_0}$.
- Ahora el jugador **I** juega $a_0^x(1)$ en el primer juego $\Game_0^{x_0}$, para que **II** responda a ésto, se apoya en el segundo juego, pero en $\Game_1^{x_1}$, **I** a jugado $a_1^x(0)$ y espera respuesta por lo tanto **II** se apoya en el siguiente juego.
- Si $a_2^x(0)$ es el primer movimiento de **I**, dado por $\sigma_2^{x_2}$ en el juego $\Game_2^{x_2}$. Entonces **II** copia $a_2^x(0)$ en el juego $\Game_1^{x_1}$, por lo tanto **I** responde en $\Game_1^{x_1}$ con $a_1^x(1)$ dado por $\sigma_1^{x_1}$. Acto seguido **II** elige a $a_1^x(1)$ en el primer juego $\Game_o^{x_0}$.
- Etc.

El siguiente esquema representa lo que describimos.

$$
\begin{array}{cc|cccccccccc}
\Game_0^{X_0} & \mathbf{I} & a_0^x(0) & & a_0^x(1) & & a_0^x(2) & & a_0^x(3) & \cdots & \to a_0^x \\
\hline
 & \mathbf{II} & & a_1^x(0) & & a_1^x(1) & & a_1^x(2) & & \cdots & \to a_1^x \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & & \nearrow & & & \\
\Game_1^{X_1} & \mathbf{I} & a_1^x(0) & & a_1^x(1) & & a_1^x(2) & & \cdots\cdots & \cdots & \to a_1^x \\
\hline
 & \mathbf{II} & & a_2^x(0) & & a_2^x(1) & & \cdots\cdots & & \cdots & \to a_2^x \\
 & & \nearrow & & \nearrow & & & & & & \\
\Game_2^{X_2} & \mathbf{I} & a_2^x(0) & & a_2^x(1) & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \cdots & \to a_2^x \\
\hline
 & \mathbf{II} & & a_3^x(0) & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots & \to a_3^x \\
 & & \nearrow & & & & & & & & \\
\Game_3^{X_3} & \mathbf{I} & a_3^x(0) & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \cdots & \to a_3^x \\
\hline
 & \mathbf{II} & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots & \to a_4^x
\end{array}
$$

Para cada juego $\Game_n^{x_n}$, sea a_n^x la sucesión formada por los movimientos del jugador **I** y a_{n+1}^x la sucesión formada por los movimientos de **II**. Además notemos que la sucesión a_{n+1}^x también es la sucesión formada por los movimientos del jugador **I** en en el siguente juego $\Game_{n+1}^{x_{n+1}}$.

Dado que **I** tiene una estrategia ganadora en $\Game_n^{x_n}$, por definición tenemos que:

$$
\begin{array}{l}
\text{Si } x_n = 0 \text{ entonces } a_n^x \in A_n \text{ si y sólo si } a_{n+1}^x \notin A_{n+1}. \\
\text{Si } x_n = 1 \text{ entonces } a_n^x \in A_n \text{ si y sólo si } a_{n+1}^x \in A_{n+1}.
\end{array}
$$

Todo esto para $x \in 2^\omega$ por lo que, para cualquier $y \in 2^\omega$ repitiendo el procedimiento anterior, se le asocia el conjunto $\{a_n^y : n \in \omega\}$. Ahora, comparemos estos conjuntos, cuando $x, y \in 2^\omega$ son diferentes.

Se cumple la siguente afirmación 1: sean $x, y \in 2^\omega$; si para todo $n \geq m$ se tiene que $x(n) = y(n)$, entonces para todo $n \geq m$, $a_n^x = a_n^y$.

En efecto. Notemos que los valores de a_n^x y a_n^y solo dependen de los juego $\Game_{n'}^{x_{n'}}$ y $\Game_{n'}^{y_{n'}}$ para todo $n' = n$. Entonces, si $x(n') = y(n')$ implica que $\Game_{n'}^{x_{n'}} = \Game_{n'}^{y_{n'}}$ y por tanto $a_n^x = a_n^y$ para $n' \geq n$.

Dado lo anterior también se cumple la siguiente afirmación 2: sean $x, y \in 2^\omega$. Si $n \in \omega$ es tal que $x(n) \neq y(n)$ pero para toda $m > n$, $x(m) = y(m)$. Entonces $a_n^x \in A_n$ si y sólo si $a_y^x \notin A_n$.

En efecto. Supongamos que $x(n) = 0$, por lo que $y(n) = 1$ entonces se obtiene lo siguiente

$$
\begin{array}{l}
a_n^x \in A_n \text{ si y sólo si } a_{n+1}^x \notin A_{n+1}. \\
a_n^y \in A_n \text{ si y sólo si } a_{n+1}^y \in A_{n+1}.
\end{array}
$$

Luego, como para toda $m > n$, se cumple $x(m) = y(m)$, se tiene que para todo $m \geq n+1$ $x(m) = y(m)$, entonces por la Afirmación 1, $a_m^x = a_m^y$ para toda $m \geq n+1$. En particular $a_{n+1}^x = a_{n+1}^y$, por lo tanto, se deduce lo siguiente:

$$a_n^x \in A_n \text{ si y sólo si } a_{n+1}^x \notin A_{n+1}. \text{ si y sólo si } a_{n+1}^y \notin A_{n+1} \text{ si y sólo si } a_n^y \notin A_n.$$

Ahora, si suponemos que $x(n) = 0$ y $x(n) = 1$ entonces:

$$
\begin{array}{l}
a_n^x \in A_n \text{ si y sólo si } a_{n+1}^x \in A_{n+1}. \\
a_n^y \in A_n \text{ si y sólo si } a_{n+1}^y \notin A_{n+1}.
\end{array}
$$

y como $a_n^x = a_n^y$, se deduce lo siguiente:

$$a_n^x \in A_n \text{ si y sólo si } a_{n+1}^x \in A_{n+1} \text{ si y sólo si } a_{n+1}^y \in A_{n+1} \text{ si y sólo si } a_n^y \notin A_n.$$

Por lo cual, cualquiera de los dos casos se concluye que $a_n^x \in A_n$ si y sólo si $a_n^y \notin A_n$.

Por las afirmaciones anteriores se cumple la siguiente afirmación 3: sean $x, y \in 2^\omega$ tales que existe un único $n \in \omega$ tal que $x(n) \neq y(n)$. Entonces $a_0^x \in A_0$ si y sólo si $a_0^y \notin A_0$.

En efecto. Dado que solo para n se tiene que $x(n) \neq y(n)$, se tiene que para todo $m > n$, $x(m) = y(m)$. Entonces, por la afirmación 2 tenemos que $a_n^x \in A_n$ si y sólo si $a_n^y \notin A_n$ y como $x(n-1) = y(n-1)$ se tiene lo siguiente:

- Si $x(n-1) = y(n-1) = 0$, lo cual implica que:

$$a_{n-1}^x \in A_{n-1} \text{ si y sólo si } a_{n+}^x \notin A_n.$$
$$a_{n-1}^y \in A_{n-1} \text{ si y sólo si } a_{n+}^y \notin A_n.$$

  por lo tanto $a_{n-1}^x \in A_{n-1}$ si y sólo si $a_{n+}^x \notin A_n$ si y sólo si $a_n^y \in A_n$ si y sólo si $a_{n-1}^y \notin A_{n-1}$. Es decir, $a_{n-1}^x \in A_{n-1}$ si y sólo si $a_{n-1}^y \notin A_{n-1}$.

- Si $x(n-1) = y(n-1)$, lo cual implica que

$$a_{n-1}^x \in A_{n-1} \text{ si y sólo si } a_n^x \in A_n.$$
$$a_{n-1}^y \in A_{n-1} \text{ si y sólo si } a_n^y \in A_n.$$

  Por lo tanto, $a_{n-1}^x \in A_{n-1}$ si y sólo si $a_n^x \in A_n$ si y sólo si $a_n^y \notin A_n$ si y sólo si $a_{n-1}^y \notin A_{n-1}$.

Entonces, se concluye que $a_{n-1}^x \in A_{n-1}$ si y sólo si $a_{n-1}^y \notin A_{n-1}$. Ahora, para el caso $n-1$, también se tiene que $x(n-2) = y(n-2)$, por lo que al aplicar un procedimiento similar al anterior se obtiene que $a_{n-2}^x \in A_{n-2}$ si y sólo si $a_{n-2}^y \notin A_{n-2}$. Siguiendo este mismo proceso hasta llegar al caso donde $x(0) = y(0)$, obtenemos que $a_0^x \in A_0$ si y sólo si $a_0^y \notin A_0$.

Ahora, siguiendo con la demostración del teorema, definimos el conjunto $X \in 2^\omega$ como sigue:

$$X = \{x \in 2^\omega : a_0^x \in A_0\}.$$

Eligiendo $x, y \in 2^\omega$ tales que $|\{n \in \omega : x(n) = y(n)\}| = 1$, por la Afirmación 3, sucede lo siguiente:

$$x \in X \text{ si y sólo si } a_0^x \in A_0 \text{ si y sólo si } a_0^y \notin A_0 \text{ si y sólo si } y \notin X.$$

Por lo tanto X es un conjunto flip, lo cual es una contradicción, ya que como estamos suponiendo AD, estos conjuntos no pueden existir.

■

Aunque estos resultados están establecidos para ω^ω, gracias a algunos resultados ya establecidos, podemos extender toda la teoría de reducibilidad de Wadge a cualquier espacio Polaco. Para ello definamos la noción de reducibilidad de Wadge para cualquier espacio topológico.

Definición 0.101. *Sea X un espacio topológico. Dado $A, B \subseteq Z$. Decimos que $A \leq_W B$ en Z si existe una función continua $f : \omega^\omega \to \omega^\omega$ tal que $A = f^{-1}(B)$.*

Recordemos que un espacio topológico (X, τ) es un *espacio Polaco* si es separable y completamente metrizable. Además, se dice que X es un *espacio cero-dimensional* si tiene una base cuyos elementos son abiertos y cerrados, y cumple que para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Sabemos que dos espacios topológicos son *homeomorfos* si existe un función $f : X \to Y$ tal que f es biyectiva y continua y f^{-1} es continua. Por último, un subconjunto F cerrado de un espacio topológico X, se *retrae* en X si existe una función continua $\rho : X \to F$ tal que $\rho(x) = x$ para toda $x \in F$.

Las siguientes proposiciones son de gran ayuda debido a que arrojan resultados importantes sobre los espacios Polacos cero-dimensionales y el espacio de Baire. Las pruebas de éstas no se presentarán en este trabajo, pues su demostraciones requieren de conceptos que están fuera del estudio de nuestro trabajo, pero se pueden encontrar en [1].

Proposición 0.102. *Todo espacio cero dimensional Polaco es homeomorfo a un subconjunto cerrado de ω^ω.*

Proposición 0.103. *Sean $T, F \subseteq A^\omega$ conjuntos cerrados no vacíos tal que $T \subseteq F$, entonces T se retrae en F.*

Por la Proposición 0.102, todo espacio Polaco cero-dimensional es homeomorfo a un subconjunto cerrado Z de ω^ω, y de la Proposición 0.103, Z se retrae en ω^ω, por lo que existe una función $\rho : \omega^\omega \to Z$ tal que $\rho(x) = x$ para todo $x \in Z$. A esta función la llamaremos *retracción.*

Lema 0.104. *Sean $Z \subseteq \omega^\omega$, $\rho : \omega^\omega \to Z$ la función retracción y $A \subseteq Z$ y $B \subseteq Z$. Entonces $A \leq_W B$ en Z si y sólo si $\rho^{-1}(A) \leq_W \rho^{-1}(B)$ en ω^ω.*

Demostración. $\Rightarrow$] Dado que $A \leq_W B$ en Z, existe una $f : Z \to Z$ continua tal $A = f^{-1}(B)$, es decir $f(A) = B$. Entonces $f \circ \rho : \omega^\omega \to \omega^\omega$ es una función continua, como $A, B \subseteq Z$ se tiene que

$$(f \circ \rho)[\rho^{-1}(A)] = f[\rho(\rho^{-1}(A))] = f(A) = B = \rho^{-1}(B),$$

es decir $\rho^{-1}(A) = (f \circ \rho)^{-1}[\rho^{-1}(B)]$. Por lo tanto se concluye que $\rho^{-1}(A) \leq_W \rho^{-1}(B)$ en ω^ω.

$\Leftarrow$] Dado que $\rho^{-1}(A) \leq_W \rho^{-1}(B)$ en ω^ω, existe $f : \omega^\omega \to \omega^\omega$ continua tal que $\rho^{-1}(A) = f^{-1}[\rho^{-1}(B)]$, es decir $f(\rho^{-1}(A) = \rho^{-1}(B)$. Entonces $\rho \circ (f \restriction Z) : Z \to Z$ es continua, donde $f \restriction Z$ es la restricción de f en Z. Como $A, B \subseteq Z$ se tiene que

$$\big(\rho \circ (f \restriction Z)\big)(A) = \rho[\big(f \restriction Z\big)(A)] = \rho(f(A)) = \rho[f\big(\rho^{-1}(A)\big)] = \\ \rho\big(\rho^{-1}(B)\big) = B,$$

es decir $A = (\rho \circ (f \restriction Z))^{-1}(B)$. Por lo tanto,$A \leq B$ en Z.

■

El lema anterior nos permitirá generalizar resultados sobre la reducibilidad de Wadge a un espacio Polaco cero-dimensional arbitrario.

Teorema 0.105 (Wadge)**.** *Asúmase* **AD**. *Si Z es un espacio cero-dimensional Polaco y $A, B \subseteq Z$, entonces se tiene que $A \leq_W B$ o $B \leq_W Z \backslash A$.*

Demostración. Para el caso $Z = \omega^\omega$ la conclusión se desprende del Teorema 0.97. Para los demás casos, sabemos que Z es homeomorfo a algún $Z' \subset \omega$ y que existe una retracción $\rho : \omega \to Z'$, entonces por el Lema 0.104 lo que suceda con la relación $\leq_W$ en ω^ω sucederá igualmente en Z. ■

Teorema 0.106. *(Martin,Monk) Asúmase* **AD**. *Si Z un espacio Polaco cero-dimensional, entonces la relación $\leq_W$ en $\mathcal{P}(Z)$ es bien fundada.*

Demostración. El caso $Z = \omega^\omega$ es el Teorema 0.99. Para los demás casos, sabemos que Z es homeomorfo a algún $Z' \subset \omega$ y que existe una retracción $\rho : \omega \to Z'$, entonces por el Lema 0.104 lo que suceda con la relación $\leq_W$ en ω^ω sucederá igualmente en Z.

■

Finalicemos la tesis con uno comentarios. Sabemos que por el Teorema 0.64 existen conjuntos que no están determinados por lo tanto el Axioma de Elección es incompatible con el Axioma de Determinación. Entonces surge una pregunta ¿qué subconjuntos de ω^ω están determinados en **ZFC**? En 1953 Gale y Stewaet probaron que todo conjunto abierto o cerrado de ω^ω está determinado. En 1955 Philip Wolfe demostró la determinación de los conjuntos F_σ y G_δ, en 1964 Morton Davis demostró la determinación del siguiente nivel en la jerarquía de Borel. Finalmente, en 1975 Tony Martin demostró la determinación de los conjuntos de Borel. Desafortunadamente, este resultado está mucho más allá del alcance de nuestro trabajo. Los lectores interesados pueden encontrar una exposición clara en [1].

Bibliografía

[1] A. S. Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] D. L. Cohn, *Measure Theory*, Boston, Birkhauser, 1980.

[3] F. Hernández, *Teoría de Conjuntos*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 2017.

[4] José Alfredo Amor Montaño, Gabriela Campero Arena y Favio Ezequiel Miranda Perea. "Teoría de los conjuntos, Curso intermedio", Las prensas de Ciencias, 2011

[5] G. Salicrup, *Introducción a la Topología,* Aportaciones Matemáticas, sociedad metemática Mexicana, 1997.

[6] R. Carroy, A. Medini and S. Műller. *Every Zero-Dimensional Homogeneous Space is Strongly Homogeneus Under Determinacy*. 2018

[7] R. Schindler. *Set Theory. Exploring Independence and Truth*, Springer, 1996.

[8] S. K. Berberian. *Fundamentals of Real Analysis*. Springer, 1996

[9] T. Jech, *Set Theory,* 3rd. Millennium edition revised and expanded. Berlin. Springer. 2002.

[10] Y. Khomskii, *Infinite Games. sumer curse at the University of Sofia, Bulgaria*, 2010.