



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

INSTITUTO DE FÍSICA "LUIS RIVERA TERRAZAS"

**"NONEQUILIBRIUM MANY-BODY QUANTUM
DYNAMICS: ANALYTICAL APPROACHES"**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**DOCTOR EN CIENCIAS
(FÍSICA)**

PRESENTA

DAVID ABRAHAM ZARATE HERRADA

DIRECTORES DE TESIS

DR. EDUARDO JONATHAN TORRES HERRERA

DRA. LEA FERREIRA DOS SANTOS

No. de CVU: 942384

JUNIO 2025

©Año - David Abraham Zarate Herrada

Derechos Reservados

Agradecimientos

Agradezco al Instituto de Física “Luis Rivera Terrazas” de la BUAP por su apoyo en mi formación como futuro investigador. A SECIHTI-México, por brindarme apoyo financiero durante todo mi programa de estudios. A mis asesores de tesis, el Dr. Eduardo Jonathan Torres Herrera y la Dra. Lea Ferreira dos Santos, por darme la libertad de explorar muchas ideas, por sus enseñanzas, consejos y constante apoyo durante todo el programa de posgrado. A mi familia, mi madre, mi padre, mis hermanos y a mis amigos, quienes han sido fundamentales para continuar tanto académicamente como en lo personal. Y a todas las personas que he conocido en este camino, pues de cada una he aprendido mucho, y gracias a ellas soy quien soy.

Dedicado a mis padres Veronica Herrada Carpinteyro y Filemon Zarate Coliote, mis hermanos, Mayra e Ivan, mi familia, ellos siempre creyeron en mi y me apoyaron incondicionalmente, a ellos les agradezco todo la ayuda que me han proporcionado y se que estarán ahí en el futuro al igual que yo para ellos. A mi madre, quien siempre me dio palabras de aliento y eso evito que cometiera muchos errores. A mi abuela Margarita quien jamás ha dejado de ser una abuela amable y cariñosa conmigo. A todos y cada uno de mis amigos, los que hice en la licenciatura, posgrado y en el extranjero, todos ellos me demostraron su cariño, apoyo y sobre todo compartimos muchos momentos inolvidables. Finalmente a Copper, Wendy, Sasha, Pinta, Isis, Perséfone y Anubis, más que mascotas, fueron valiosa compañía durante todos mis estudios y gran parte de mi vida, enseñándome lo efímero que puede ser la vida y lo importante de compartir nuestro tiempo con aquellos que amamos profundamente.

Resumen

El objetivo principal de esta tesis es contribuir al estudio de la dinámica cuántica fuera de equilibrio en sistemas cuánticos de muchas partículas que presentan una transición de una fase ergódica o extendida a una fase localizada o fase localizada de muchas partículas. Realizamos estudios analíticos y numéricos de la dinámica fuera de equilibrio en modelos de matrices aleatorias y sistemas cuánticos de muchas partículas. Proponemos generalizaciones de la probabilidad de supervivencia y la densidad local de estados, y aplicamos estas herramientas para investigar las características multifractales de estados extendidos pero no ergódicos. Mostramos cómo la desviación estándar de la densidad local de estados indica cualitativamente la transición en los sistemas de interés, así como su sensibilidad a los puntos críticos de transición. Presentamos resultados analíticos para la probabilidad de supervivencia en modelos de matrices aleatorias y demostramos una conexión directa entre la naturaleza multifractal de los eigenestados y la dinámica del sistema, mediante la función de correlación de la probabilidad de supervivencia tanto en matrices aleatorias como en modelos físicos. Proporcionamos un enfoque eficiente para detectar el caos cuántico en sistemas de muchas partículas y demostramos su viabilidad en plataformas experimentales típicas como trampas de iones, cúbits superconductores y átomos ultrafríos, entre otras. También implementamos nuestra propuesta en circuitos cuánticos reproducibles en los ordenadores cuánticos comerciales actuales. Finalmente, estudiamos los efectos sobre la dinámica que resultan de abrir sistemas cuánticos de muchas partículas a un entorno que induce un desfase energético, centrándonos en el problema del autopromedio sobre cantidades dinámicas de uso común.

Abstract

The main objective of this thesis is to contribute to the study of out-of-equilibrium quantum dynamics in many-body quantum systems that exhibit a transition from an ergodic or extended phase to a localized phase or many-body localized phase. We carry out analytical and numerical studies of out-of-equilibrium dynamics in random matrix models and many-body quantum systems. We propose generalizations of the survival probability and the local density of states, and apply these tools to investigate the multifractal characteristics of extended but non-ergodic states. We show how the standard deviation of the local density of states qualitatively signals the transition in the systems of interest, as well as its sensitivity to critical transition points. We present analytical results for the survival probability in random matrix models and demonstrate a direct connection between the multifractal nature of eigenstates and the system's dynamics, via the correlation function of the survival probability in both random matrices and physical models. We provide an efficient approach for detecting quantum chaos in many-body systems, and demonstrate its feasibility in typical experimental platforms such as ion traps, superconducting qubits, and ultracold atoms, among others. We also implement our proposal in quantum circuits that can be reproduced on current commercial quantum computers. Finally, we study the dynamical effects of coupling many-body quantum systems to an environment that induces energy dephasing, focusing on the problem of self-averaging in commonly used dynamical quantities.

Publicaciones

Los resultados presentados en esta Tesis provienen de los siguientes trabajos publicados:

- D. A. Zarate-Herrada, L. F. Santos, and E. J. Torres-Herrera, Generalized survival probability, *Entropy* 25 (2023).
- I. Vallejo-Fabila, A. K. Das, D. A. Zarate-Herrada, A. S. Matsoukas-Roubeas, E. J. Torres-Herrera, and L. F. Santos, Reducing dynamical fluctuations and enforcing self-averaging by opening many-body quantum systems, *Phys. Rev. B* 110, 075138 (2024).
- A. K. Das, C. Cianci, D. G. A. Cabral, D. A. Zarate-Herrada, P. Pinney, S. Pilatowsky-Cameo, A. S. Matsoukas-Roubeas, V. S. Batista, A. del Campo, E. J. Torres-Herrera, et al., Proposal for many-body quantum chaos detection, *PhysRevResearch*.7.013181 (2025).

El siguiente trabajo se encuentra listo para ser enviado a una revista especializada:

- D. A. Zarate-Herrada, I. Vallejo-Fabila, L. F. Santos, and E. J. Torres-Herrera, Dynamical detection of extended non-ergodic states in many-body quantum systems, *arXiv:2505.23910v1*.

El siguiente trabajo se encuentran en preparación:

- D. A. Zarate-Herrada, L. F. Santos and E. J. Torres-Herrera, Decay rate of the generalized survival probability as an order parameter for localization-delocalization transitions.

Participación en eventos

Se realizaron las siguientes actividades académicas, se incluyen participaciones en eventos nacionales e internacionales así como una escuela y una estancia académica:

- Escuela, 3rd Latin American Introductory School on Parallel Programming and Parallel Architecture for HPC — (smr 3872), ICTP-Universidad Simon Bolivar, Barranquilla, Colombia (Septiembre 2023).
- Evento, Congreso Nacional de Física, LXVI-007569, Póster, Michoacán, México (Octubre 2023).

- Evento, APS March Meeting 2022, Time evolution of non-ergodic extended states. Plática corta virtual (Marzo 2022).
- Evento, APS March Meeting 2024, Decay rate of the generalized survival probability as a signature of localization transitions. Plática corta virtual (Marzo 2024).
- Estancia de investigación, Universidad de Connecticut, Connecticut, Estados Unidos (Junio 2024).
- Evento, Meeting on Complex Systems & Stochastic Processes. Póster, Guadalajara, México (Julio 2024).
- Evento, Random Matrix Theory and its applications. Póster, Morelos, México (Julio 2024).
- Evento, Workshop on Open Quantum Systems and Quantum Information. Plática corta, Puebla, México (Septiembre 2024).
- Evento, Congreso Nacional de Física, LXVII-009304. Plática corta, Chihuahua, México (Octubre 2024).
- Evento, APS March Meeting 2025, Dynamical detection of extended non-ergodic states in many-body quantum systems. Plática corta virtual (Marzo 2025).

Así como participación en múltiples eventos académicos del cuerpo académico de sistemas complejos y del posgrado en Física. Se realizaron actividades de apoyo en diferentes cursos de maestría como requisito para obtener el grado así como actividades de difusión de ciencia y cultura.

Índice general

1. Introducción	1
2. Herramientas de teoría de matrices aleatorias para estudiar sistemas cuánticos de muchos cuerpos	6
2.1. Matrices aleatorias	7
2.2. Ensamble gaussiano ortogonal	7
2.3. Estadística espectral	8
2.3.1. Distribución de espaciamientos consecutivos	8
2.4. Medidas de localización	9
2.5. Breve introducción hipótesis de termalización de sistemas de muchos cuerpos	12
2.6. Localización en sistemas de muchos cuerpos	14
3. Matrices aleatorias y modelos físicos	16
3.1. Matrices aleatorias de bandas	16
3.2. Ensamble Rosenzweig-Porter	17
3.3. Modelo unidimensional de Heisenberg de partículas de espín-1/2 con desorden	18
3.4. Modelo de Aubry-André	19
3.5. Modelo de Ising desordenado con campo transversal e interacciones de largo alcance	20
4. Probabilidad de supervivencia	22
4.1. Indicadores de caos cuántico de muchos cuerpos en la dinámica del sistema	25
5. Probabilidad de supervivencia generalizada	29
5.1. LDoS generalizada	30
5.2. Análisis de σ_q como un indicador de la transición deslocalización-localización de sistemas cuánticos de muchos cuerpos	33
5.3. Resultados	34
5.3.1. Modelos de matrices aleatorias	34
5.3.2. Sistemas físicos	35
5.3.3. Curvatura de $\langle \sigma_q \rangle$	38
5.4. Evolución de la probabilidad generalizada de supervivencia bajo el modelo GOE: Expresión analítica	40
5.4.1. Tiempo del mínimo del hoyo de correlaciones	42
5.5. Evolución de la probabilidad de supervivencia generalizada bajo el modelo de espín .	42
5.6. Evidencias del carácter multifractal en la dinámica del sistema	43
5.7. Resultados	45
5.7.1. Modelos de matrices aleatorias	45

5.7.2. Sistemas físicos	48
5.8. Conclusiones	51
6. Análisis de correlaciones espectrales para la detección de caos en sistemas cuánticos de muchos cuerpos	53
6.1. Función de autocorrelación de espín	54
6.2. Resultados: Modelo de Heisenberg de espín-1/2 con desorden	54
6.2.1. Resultados: Modelo de Ising desordenado con interacciones de largo alcance	59
6.3. Circuitos cuánticos y detección de caos en sistemas de muchos cuerpos	60
6.4. Resultados: Caso de una excitación	62
6.5. Conclusiones	64
7. Apertura de sistemas cuánticos de muchos cuerpos: una vía para reducir fluctuaciones dinámicas y mejorar el autopromedio	65
7.1. Probabilidad de supervivencia en sistemas abiertos	66
7.2. Varianza relativa de la probabilidad de supervivencia en sistemas abiertos	69
7.3. Resultados: Matrices aleatorias	71
7.4. Resultados: Modelo de Heisenberg de partículas de espín-1/2	77
7.5. Conclusiones	80
8. Conclusiones	81
A. Multifractalidad en cadenas de Fibonacci	83
A.1. Resultados	84
Bibliografía	89

Capítulo 1

Introducción

Motivación

El estudio de sistemas cuánticos de muchas partículas con interacciones fuera del equilibrio constituye un área de investigación fundamental en la física contemporánea [1]. Usualmente estos sistemas se estudian en entornos aislados y son sometidos a perturbaciones, exhibiendo una rica variedad de fenómenos no triviales, por ejemplo la termalización [2], la localización [3], entre otros [4]. Comprender cómo y cuándo estos sistemas alcanzan el equilibrio térmico ha sido un gran desafío, especialmente en presencia de desorden y fuertes interacciones. En este contexto, la localización de muchas partículas (MBL, por sus siglas en inglés) [5] emerge como un fenómeno clave, caracterizado por la supresión de la termalización y la retención de información sobre las condiciones iniciales del sistema a lo largo del tiempo [6]. El estudio de MBL no solo profundiza nuestra comprensión de la dinámica cuántica fuera del equilibrio, sino que también tiene implicaciones significativas para el desarrollo de tecnologías cuánticas [7], como la preservación de la coherencia en sistemas cuánticos [8] y el diseño de materiales con propiedades inusuales de transporte [9].

El trabajo de investigación se lleva a cabo en el contexto de la teoría MBL [5, 7, 10] la cual ha sido uno de los temas de la física más relevantes de los últimos 60 años. Esencialmente esta teoría proviene de la necesidad de estudiar sistemas cuánticos de muchas partículas con interacciones y es el resultado de décadas de investigación de múltiples campos de la física cuántica, mecánica estadística y matemáticas.

Actualmente, MBL no solo se mantiene vigente, aún se conserva como un campo de investigación de frontera con un fuerte soporte experimental al contribuir satisfactoriamente en estudios alrededor de las tecnologías cuánticas como estudios de largos tiempos de coherencia [11], diseño de sistemas cuánticos que en el régimen MBL solo sean accesibles mediante computación cuántica [8]

y el diseño de materiales con propiedades inusuales de transporte [12].

Comprender la física de sistemas cuánticos de muchas partículas es un gran reto, lo que hace que la realización experimental no sea suficiente para describir las propiedades de estos sistemas. Es aquí donde los desarrollos analíticos y los estudios numéricos computacionales juegan un papel crucial en el entendimiento de estos sistemas, que en este sentido, las herramientas matemáticas y conceptuales de la teoría de matrices aleatorias (RMT por sus siglas en inglés) han sido fundamentales en el análisis de las correlaciones espectrales de sistemas cuánticos de muchas partículas [13, 14]. No obstante los sistemas típicos en estudios sobre MBL tienen importantes limitaciones analíticas por ejemplo falta de integrabilidad de muchos sistemas tridimensionales y bidimensionales, aunque la existencia de sistemas unidimensionales que son integrables ha permitido ciertos desarrollos analíticos [15], estos sistemas son escasos y algunos pierden su integrabilidad cuando se consideran interacciones.

En particular, el estudio de la dinámica ha revelado aún más detalles sobre el espectro y los eigenestados según el sistema estudiado. Los estudios sobre dinámica son accesibles experimentalmente en redes ópticas [12], estudios de coherencia en plataformas de resonancia magnética nuclear [16] entre otros [17–19] destacando estudios analíticos y computacionales sobre la dinámica y la multifractalidad de los eigenestados de sistemas de muchas partículas [20, 21] y estudios de entrelazamiento [22].

No obstante, dependiendo la plataforma experimental, algunas observables no son viables ya que pueden presentar periodos cortos de coherencia, inaccesibilidad al espectro energético completo, tiempos cortos en la evolución temporal o problemas con el aislamiento en un sistema cuántico, lo cual suelen considerarse perjudicial debido a la pérdida de coherencia cuántica que dificultan el procesamiento de información cuántica. Sin embargo, esta influencia también puede ser beneficiosa. Por ejemplo, abrir un sistema a un entorno de decoherencia energética puede reducir las fluctuaciones dinámicas [23–27].

Uno de los objetivos clave en nuestra investigación de este es profundizar en la comprensión de la dinámica cuántica fuera del equilibrio usando tanto enfoques analíticos como estudios numéricos computacionales. Para estudiar la dinámica comenzamos con el estudio de la probabilidad de supervivencia, una cantidad igual a la superposición entre un estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ y su evolución en el tiempo $|\Psi(t)\rangle$ descrita como,

$$SP(t) = |\langle\Psi(0)|\Psi(t)\rangle|^2, \quad (1.1)$$

y mide la probabilidad de que el sistema permanezca en su estado inicial en el tiempo t . Esta cantidad ha sido ampliamente estudiada desde las primeras décadas de la mecánica cuántica [28–30]. Su importancia radica en que proporciona información detallada sobre la dinámica cuántica, la estructura espectral y la evolución de estados iniciales en sistemas de muchas partículas.

La probabilidad de supervivencia también ofrece información relacionada con la estructura de los estados del sistema contribuyendo a los estudios destacados de localización y multifractalidad de cantidades generalizadas como las entropías de Rényi [31], la razón inversa de participación [32–37] y otras cantidades similares [38].

A pesar de los beneficios que ofrece la probabilidad de supervivencia esta presenta una falta de autopromedio que se manifiesta como fluctuaciones significativas entre diferentes realizaciones del sistema incluso en el límite termodinámico. La presencia de autopromedio es importante porque implica que la cantidad de muestras utilizadas en experimentos y en análisis numéricos puede disminuir a medida que aumenta el tamaño del sistema y con ello se pueden construir modelos teóricos para describir las propiedades físicas de la observable utilizando muestras estadísticamente finitas.

El trabajo de investigación desarrollado aquí encuentra su motivación en los estudios analíticos sobre observables típicas medibles en la mayoría de plataformas experimentales incluyendo las actuales. Nuestra investigación tiene como objetivo contribuir al estudio de la dinámica de sistemas cuánticos de muchas partículas al aplicar la teoría de matrices aleatorias para estudiar teóricamente la evolución temporal de ciertas observables físicas típicas en el estudio de MBL. Nuestros objetivos claves son contribuir en los análisis sobre la transición hacia una fase MBL, multifractalidad y su conexión con la dinámica del sistema. Nuestro análisis será principalmente analítico y también estará respaldado por simulaciones numéricas.

Buscamos contribuir en los estudios experimentales actuales de sistemas cuánticos aislados de muchas partículas proponiendo el análisis de las correlaciones espectrales para mejorar eficientemente la detección de caos en estos sistemas. Motivados por los efectos que tiene el entorno en sistemas cuánticos de muchas partículas estudiamos sus efectos sobre las observables dinámicas usuales.

Antecedentes y estado del arte

La teoría de MBL tiene sus orígenes en trabajo seminal de Philip W. Anderson, donde demostró que una magnitud suficientemente grande de impurezas en un sistema cuántico como un sólido cristalino provoca que las funciones de onda de los electrones se localicen exponencialmente y no como ondas de Bloch, a este fenómeno se le conoce como localización de Anderson [3], no obstante, desde el 58, la curiosidad por el fenómeno de localización en presencia de interacciones estaba presente y fue opacado por las investigaciones sobre localización .

Fue hasta 48 años después, en 2006 que Basko, Aleiner y Altshuler [10] llamaron la atención nuevamente al problema de localización en sistemas de muchas partículas presentado resultados sobre la transición de una fase extendida a una fase localizada de un sistema de electrones que interactúan en potenciales desordenados o aleatorios estáticos; a este nuevo fenómeno se le conoce

como fase MBL. El fenómeno de MBL persiste incluso en sistemas no desordenados. Existen sistemas unidimensionales sujetos a un potencial cuasiperiódico que exhiben la transición a una fase MBL. En particular el modelo de Aubry-André es un ejemplo de esto aún en la presencia de interacciones [39, 40].

En nuestro trabajo de investigación nos enfocamos en estudiar sistemas cuánticos de muchas partículas que exhiben una transición de una fase extendida o caótica a una fase localizada o fase MBL. En el contexto de RMT, en sistemas cuánticos de muchos cuerpos, el caos cuántico está vinculado a niveles de energía correlacionados y eigenestados que, en el régimen caótico, se aproximan a vectores aleatorios [41–43]. Este fenómeno es esencial para comprender la redistribución de información cuántica, que dificulta reconstruir el estado inicial mediante mediciones locales y está relacionado con la termalización [43, 44], así como con las dificultades para alcanzar una fase MBL [45, 46]. Su estudio es crucial para describir y controlar la dinámica de muchas partículas y para el desarrollo de tecnologías cuánticas. En el presente contexto el estudio de las correlaciones del espectro energético así como los efectos de las correlaciones de las componentes de los eigenestados vía la probabilidad de supervivencia hace de esta una cantidad fundamental en la comprensión de la dinámica de sistemas cuánticos de muchas partículas.

La evolución de la probabilidad de supervivencia en sistemas de muchos cuerpos exhibe distintos comportamientos a diferentes escalas temporales, revelando características del estado inicial, el espectro y los eigenestados del sistema.

La probabilidad de supervivencia presenta un decaimiento inicial cuadrático universal, seguido por una fase gobernada por la forma de la densidad local de estados (LDoS) inicialmente estudiado en matrices aleatorias de bandas [47, 48] y en modelos realistas en [42, 49–61]. Posteriormente, su evolución sigue un decaimiento como ley de potencias, cuyo exponente está determinado por la estructura de la LDoS, en particular por los límites de su distribución de energía [62–70]. Además, la multifractalidad y las correlaciones espectrales influyen en la magnitud del exponente, reflejando la complejidad de los eigenestados del sistema [20, 71–74].

En sistemas caóticos, donde las estadísticas de nivel de energía son similares a las de matrices aleatorias, la probabilidad de supervivencia no se satura después del decaimiento como ley de potencias. En cambio, aparece un región de valores mínimos por debajo de su promedio de tiempo infinito, $\overline{SP}$, y se conoce como hoyo de correlaciones, la cual es una manifestación dinámica de las correlaciones espectrales [74–91]. Este fenómeno ha sido propuesto como un indicador del caos cuántico inicialmente en [75]. Más tarde se demostró que el hoyo de correlaciones aparece en la función de autocorrelación de espín, una cantidad local en el espacio real [87, 91]. En ambos casos, esta estructura desaparece a medida que el sistema transita hacia un régimen integrable o localizado [74, 87].

A pesar de su versatilidad, se ha demostrado numérica y analíticamente que la probabilidad

de supervivencia que evoluciona bajo matrices completamente aleatorias no es autopromediable en ninguna escala de tiempo [92]. Lo mismo sucede con los modelos de espín en el régimen caótico [92, 93] y lejos de este [94].

No obstante, en [95] se lograron varios avances en el problema de autopromedio de la probabilidad de supervivencia para estados de Gibbs abriendo el sistema a un entorno de desfase energético. Utilizando matrices aleatorias, se demostró que las fluctuaciones en los valores de la probabilidad de supervivencia se reducen y se asegura el autopromedio después de la saturación de la dinámica.

Estructura

El capítulo 2 se enfoca en introducir la teoría de matrices aleatorias o RMT como una herramienta fundamental en los estudios de MBL, se definen los conceptos importantes como caos cuántico, localización y fase MBL. El capítulo 3 expone los diversos modelos de matrices aleatorias y sistemas físicos que serán objeto de análisis. El capítulo 4 se introduce la probabilidad de supervivencia y todos sus detalles relevantes. El capítulo 5 se enfoca en la generalización de la probabilidad de supervivencia, se estudian propiedades estáticas, se realiza un extenso análisis sobre correlaciones de las componentes de los eigenestados del sistema y sus efectos sobre la distribución de energía del sistema y se realizan estudios sobre puntos críticos de transición. Además estudiamos la evolución de la probabilidad de supervivencia generalizada sobre modelos físicos seguido de un extenso estudio del carácter multifractalidad en la dinámica del sistema. Los resultados de este capítulo se provienen de [96]. El capítulo 6 habla sobre una propuesta experimental para detectar eficientemente caos en sistemas cuánticos de muchos cuerpos cuyos resultados son producto de [97]. Finalmente el capítulo 7 se estudian los efectos de someter a los sistemas cuánticos de muchos cuerpos a entorno de desfase energético cuyos resultados provienen de [98]. Nuestro trabajo culmina con conclusiones generales en el capítulo 8.

Capítulo 2

Herramientas de teoría de matrices aleatorias para estudiar sistemas cuánticos de muchos cuerpos

Las herramientas matemáticas y conceptuales de RMT han sido fundamentales en el análisis de las correlaciones espectrales de sistemas cuánticos de muchos cuerpos [13, 14].

La estructura espectral de los sistemas cuánticos y el caos clásico se estudió en un contexto de matrices completamente aleatorias resultando en la conjetura de Bohigas-Giannoni-Schmit (GBS) la cual establece que, en sistemas cuánticos cuya contraparte clásica es caótica, las correlaciones espectrales siguen las predicciones de alguno de los ensambles de la teoría de matrices aleatorias (RMT), dependiendo de las simetrías del sistema [99]. En contraste, la conjetura de Berry-Tabor establece que, en sistemas cuánticos integrables, los niveles de energía se distribuyen de manera estadísticamente independiente y siguen una distribución de Poisson [100].

Las matrices completamente aleatorias constituyen un punto de partida crucial para obtener resultados analíticos que sirven como referencia en el estudio de modelos más realistas [91]. Aunque la RMT no reproduce la complejidad intrínseca de los sistemas cuánticos de muchos cuerpos, donde predominan interacciones de carácter más local, ofrecen un marco teórico sólido para analizar las propiedades asociadas al caos cuántico.

2.1. Matrices aleatorias

Las matrices aleatorias son matrices completamente llenas de números aleatorios y sujetas únicamente a restricciones que reflejan las simetrías del sistema que se busca describir [14, 41, 101]. Este enfoque, introducido por Wigner [102] y refinado por Dyson [103], fue utilizado con gran éxito para modelar los espectros de núcleos pesados, sistemas intrínsecamente complejos en los que los detalles precisos de las interacciones se tratan de manera estadística y se consideran irrelevantes [104]. Sorprendentemente, este método produjo resultados notables ya que coincidían con los datos experimentales de núcleos de átomos pesados reales y con el tiempo, se extendió al estudio de otros sistemas complejos.

Existen diferentes tipos de ensambles de matrices aleatorias, cada uno de ellos se clasifican según las simetrías que satisfacen [103]. En particular, para sistemas que poseen simetría de inversión temporal e invarianza ante rotaciones espaciales, se emplean matrices del así llamado ensamble ortogonal gaussiano (GOE, por sus siglas en inglés) [14, 41, 85].

Dado que los sistemas físicos que estudiaremos poseen simetrías como las de las matrices de GOE, a continuación mencionamos cómo se construyen las matrices de GOE.

2.2. Ensamble gaussiano ortogonal

El ensamble de GOE [101] está compuesto por matrices reales y simétricas de dimensión $D \times D$ completamente llenas de números aleatorios provenientes de una distribución gaussiana con media cero y varianza dada por

$$\langle H_{n,m}^2 \rangle = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 1/2, & n \neq m, \end{cases} \quad (2.1)$$

El modelo no es físico ya que no considera la estructura específica de los sistemas realistas como interacciones de corto y largo alcance o características espectrales al tratar todas las interacciones como números aleatorios pero permite derivaciones analíticas que pueden servir como referencia para los estudios de sistemas cuánticos caóticos realistas de muchos cuerpos. Este ensamble será recurrente en la investigación llevada a cabo. Los detalles de estos se discutirán en las secciones siguientes.

2.3. Estadística espectral

En el estudio de la teoría RMT y MBL, la densidad de estados (DoS) es la distribución de energía del sistema y permite observar la estructura global del espectro. La DoS se define como,

$$\rho(E) = \sum_n \delta(E - E_n). \quad (2.2)$$

En el caso particular de matrices aleatorias del tipo GOE, la densidad de estados promedio (obtenida tras un promedio y en el límite de dimensión infinita) está dada por la ley del semicírculo [101]:

$$\rho^{GOE}(E) = \frac{2}{\pi\epsilon} \sqrt{1 + \left(\frac{E}{\epsilon}\right)^2}, \quad (2.3)$$

con 2ϵ la longitud del espectro. La DoS nos permite identificar el carácter universal del espectro a través del análisis de sus correlaciones espectrales, como la repulsión de niveles.

2.3.1. Distribución de espaciamientos consecutivos

Una propiedad fundamental de las matrices completamente aleatorias y una de las características distintivas del caos cuántico es la fuerte repulsión entre niveles vecinos en el espectro energético, es decir, lo que implica que la probabilidad de encontrar niveles muy cercanos entre sí es baja o dicho de otro modo los niveles de energía evitan cruzarse. Esta repulsión se describe mediante la distribución de los espaciamientos medio entre niveles de energía, $P(s)$, donde $s_n = E_{n+1} - E_n$ y $\hat{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$ con $\hat{H}$ el hamiltoniano que representa al sistema, representa el espaciamiento medio entre las energías adyacentes [101].

Para calcular la distribución $P(s)$ es necesario realizar antes un reescalamiento de los eigenvalores, conocido como desdoblamiento del espectro, este garantiza que el espaciado promedio entre los niveles reescalados sea igual a uno [41, 105, 106]. Para las matrices de GOE, la distribución $P(s)$ está dada por:

$$P(s) = \frac{\pi}{2} s e^{-\pi s^2/4}. \quad (2.4)$$

A esta distribución se le conoce como distribución de Wigner y caracteriza una repulsión lineal, $P(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow 0$ y refleja que los niveles no se pueden acercar arbitrariamente debido a las correlaciones del espectro energético. Por otro lado, para valores grandes de s , $P(s)$ decae de forma gaussiana ya que el sistema tiende a distribuir sus niveles de manera relativamente homogénea de modo que niveles de energía tan espaciados son poco probables. Decimos que un sistema cuántico de muchos cuerpos es caótico si su estadística espectral coincide con la estadística espectral de alguno de los ensambles de la teoría de matrices aleatorias que son GOE, GUE y GSE. aleatorias [13, 14, 41].

Esta distribución contrasta con la correspondiente a sistemas integrables, donde el espectro energético no está correlacionado, no existe repulsión entre los niveles y la estadística de niveles sigue una distribución de Poisson:

$$P(s) = e^{-s}. \quad (2.5)$$

El análisis de $P(s)$ se ha convertido en una herramienta clave para distinguir entre sistemas caóticos y sistemas integrables esto en el contexto de matrices aleatorias, proporcionando una conexión directa entre las propiedades espectrales y la dinámica del sistema [107]. De manera alternativa, es posible analizar las correlaciones de corto alcance del espectro energético utilizando las razones entre espaciamientos consecutivos, r_n [108, 109], definida como:

$$r_n = \min \left(\tilde{r}_n, \frac{1}{\tilde{r}_n} \right), \quad \text{donde} \quad \tilde{r}_n = \frac{E_{n+1} - E_n}{E_n - E_{n-1}}. \quad (2.6)$$

Esta medida tiene la ventaja de no requerir el desdoblamiento del espectro, esto la hace particularmente útil en sistemas donde el desdoblamiento es complicado o no está bien definido. La distribución $P(\tilde{r})$ permite una comparación más directa y transparente con los resultados experimentales [110] en comparación con la distribución tradicional $P(s)$. Por esta razón, esta cantidad ha ganado popularidad en estudios recientes y ha sido ampliamente empleada en diversas investigaciones sobre MBL [46, 107, 111], en estudios sobre gravitación [112, 113] o en redes neuronales artificiales [114].

Más aún, el análisis del promedio de r_n , $\langle r \rangle$, puede ser empleado para identificar la transición de un sistema entre una estadística de Wigner-Dyson o bien un régimen caótico a otra con una estadística de Poisson es decir un régimen integrable o localizado, proporcionando una herramienta eficiente para caracterizar la naturaleza del espectro energético en diferentes regímenes. Para matrices de GOE se tiene $\langle r \rangle^{GOE} \sim 0.53590$ y para sistemas que cuya estadística de niveles coincida con una estadística de Poisson se tiene $\langle r \rangle^P \sim 0.38629$ [109].

2.4. Medidas de localización

Dado un estado $|\Psi\rangle$, la descomposición espectral de este es $|\Psi\rangle = \sum_{n=1} c_n |\psi_n\rangle$ donde $c_n = \langle \psi_n | \Psi \rangle$ son las proyecciones del estado $|\Psi\rangle$ en la eigenbase $\{|\psi_n\rangle\}_{n=1}^D$ y D es la dimensión del espacio de Hilbert. Los estudios enfocados en la transición de una fase extendida a una localizada de sistemas desordenados [115, 116] establecen que los eigenestados en la transición se denominan multifractales o estados extendidos pero no ergódicos y son caracterizados por una familia de exponentes llamados dimensiones generalizadas D_q [117, 118]. En este contexto, los estados $|\Psi\rangle$ multifractales se observan extendidos pero se concentran sobre una región finita del espacio de Hilbert y las probabilidades $|c_n|^2$ (que representan la distribución de $|\Psi\rangle$ en la base del hamiltoniano) exhiben correlaciones no

triviales. Las dimensiones generalizadas D_q se asocian con el escalamiento de la razón inversa de participación generalizada IPR_q como

$$\langle \text{IPR}_q \rangle \sim D^{-D_q(q-1)} . \quad (2.7)$$

donde q un número real positivo actúa como un factor de peso en la forma en que se analizan la distribución de las componentes $|c_n|$, $\langle \dots \rangle$ denota promedio sobre realizaciones y

$$\text{IPR}_q = \sum_{n=1}^D |c_n|^{2q} . \quad (2.8)$$

El caso particular con $q = 2$ obtenemos,

$$\text{IPR} = \sum_{n=1}^D |c_n|^4 . \quad (2.9)$$

Esta cantidad es razón inversa de participación o IPR por sus siglas en inglés es la vía típica para cuantificar como un estado inicial se dispersa en alguna base [119, 120]. Por construcción el valor del IPR depende de la base elegida. Para estados extendidos en el espacio de Hilbert se tiene ($|c_n|^2 \sim 1/D$). Si los eigenestados están fuertemente localizados, pocos términos de la suma en la Ec. (2.9) serán distintos de cero, esto implica que $\text{IPR} \sim 1$. En el caso extremo de un estado completamente localizado se tiene $\text{IPR} = 1$. Ahora, si el sistema se encuentra en la fase caótica, el resultado del IPR sera similar al de matrices aleatorias y por tanto $\text{IPR} \sim 1/D$, es decir los eigenestados están extendidos. En particular, para matrices aleatorias de GOE se tiene [79, 85].

$$\text{IPR}_{\text{GOE}} = \frac{3}{D+2} \quad (2.10)$$

Similar al caso general, el IPR escala con respecto a la dimensión del espacio de Hilbert igual a

$$\langle \text{IPR} \rangle \sim D^{-D_2} , \quad (2.11)$$

donde el exponente D_2 es conocido como la dimensión de correlación. El exponente D_2 es fundamental en los estudios de transiciones de fase de sistemas cuánticos y mide las complejas correlaciones de los eigenestados en la fase crítica [121]. El valor de D_2 ofrece información sobre la localización de los estados del sistema,

$$\begin{cases} 1 , & \text{estados ergódicos} \\ 0 < D_2 < 1 , & \text{estados extendidos pero no ergódicos} \\ 0 , & \text{estados localizados.} \end{cases} \quad (2.12)$$

En particular, se tiene que $D_2 = 1$ para matrices de GOE [21].

Alternativamente, podemos medir la multifractalidad por medio de la dimensión de correlación espectral $\tilde{D}_2$ mediante el método box-counting calculando la función $\beta(l)$. Esta función representa la probabilidad de que dos eigenestados, seleccionados con su probabilidad correspondiente a partir de la descomposición espectral del estado $|\Psi\rangle$, tengan una diferencia de energía menor o igual que l . Para obtener $\tilde{D}_2$ numéricamente, podemos calcular la función $\beta(l)$ dividiendo el espectro normalizado de energía en intervalos B_i , de longitud l , donde [71, 72, 115]

$$\beta(l) = \sum_{i=1}^{N_B(l)} \left(\sum_{E_n \in B_i} |c_n|^2 \right)^2 \sim l^{\tilde{D}_2} \quad (2.13)$$

Donde la suma interna corresponde a sumar cada $|c_n|^2$ cuya energía E_n se encuentra en cada intervalo B_i de longitud $0 < l \leq 1$. La segunda suma corre sobre cada intervalo B_i de longitud l que resulta de dividir el espectro energético normalizado en B_i intervalos siendo $N_B(l)$ el número total de intervalos. Para $l=1$ implica que todas las componentes $|c_n|^2$ se encuentran en un solo intervalo de longitud $l=1$ de tal forma que $\beta(1)=1$.

El valor de $\beta(l)$ depende del nivel de localización de las componentes $|c_n|^2$. Si el sistema está completamente extendido, las componentes $|c_n|^2$ son $|c_n|^2 \sim 1/D$ con D la dimensión del sistema. Al dividir el espectro normalizado de energía en B_i intervalos de longitud l con $0 < l \leq 1$, el número de energías que caen en el intervalo sera similar a lD , es decir

$$\left(\sum_{E_n \in B_i} |c_n|^2 \right)^2 \sim \left(\frac{lD}{D} \right)^2 = l^2. \quad (2.14)$$

La suma restante se efectúa sobre el numero de intervalos posibles $N_B(l)$ donde $N_B(l) \sim 1/l$, entonces

$$\beta(l) \sim \sum_{i=1}^{N_B(l)} l^2 \sim \frac{1}{l} l^2 \sim l, \quad (2.15)$$

de modo que $\beta(l) \sim l$ con $\tilde{D}_2 = 1$ para sistemas completamente extendidos, por ejemplo matrices aleatorias de GOE. Si el sistema está completamente localizado, solo una componente $|c_n| = 1$ y todas las demás son cero. La suma sobre todas los intervalos $N_B(l)$ serán iguales a cero a excepción de aquel intervalo B_i donde $|c_n| = 1$ entonces

$$\beta(l) = 1, \quad (2.16)$$

de modo que $\tilde{D}_2 = 0$ para el caso completamente localizado.

2.5. Breve introducción hipótesis de termalización de sistemas de muchos cuerpos

Uno de los retos de la mecánica estadística es ofrecer una teoría matemática precisa para describir el comportamiento térmico de sistemas cuánticos de muchas partículas. Los primeros desarrollos teóricos incluyeron el estudio de gases ideales de fermiones y bosones, y condujeron a predicciones notables como el fenómeno de condensación de Bose-Einstein. En décadas más recientes, el interés se ha desplazado hacia el entendimiento de cómo y cuándo un sistema cuántico cerrado alcanza un estado de equilibrio térmico a partir de un estado puro lo cual requirió extender el concepto de ergodicidad al dominio cuántico [2].

Consideremos una observable $\hat{\mathcal{O}}$ y un estado inicial $|\Psi(0)\rangle$, el valor esperado bajo evolución unitaria de esta observable es:

$$\langle \hat{\mathcal{O}}(t) \rangle = \langle \Psi(0) | e^{i\hat{H}t} \hat{\mathcal{O}} e^{-i\hat{H}t} | \Psi(0) \rangle = \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^2 \mathcal{O}_{n,n} + \sum_{n \neq m}^D c_n^{(0)} c_m^{(0)*} \mathcal{O}_{n,m} e^{-i(E_n - E_m)t}, \quad (2.17)$$

donde $\mathcal{O}_{n,m} = \langle \psi_n | \hat{\mathcal{O}} | \Psi_m \rangle$ son los elementos de matriz de $\hat{\mathcal{O}}$ en la representación de energía y $c_n^{(0)} = \langle \psi_n | \Psi \rangle$ la proyección del estado inicial sobre la base de energía. Para que el sistema alcance un estado de equilibrio, consideremos el promedio a tiempos muy largos de $\langle \hat{\mathcal{O}}(t) \rangle$. Partiendo de la Ec. (2.17), y considerando el promedio en el límite de tiempo infinito, si el sistema no presenta degeneraciones (como ocurre en el caso de matrices aleatorias), el valor esperado fluctuara alrededor del promedio de tiempo infinito $\overline{\mathcal{O}}$ una vez que alcanza su estado de equilibrio en el tiempo t_E , y está dado por

$$\overline{\mathcal{O}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_E}^{t_E+T} \langle \hat{\mathcal{O}}(t) \rangle dt = \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^2 \mathcal{O}_{n,n}, \quad (2.18)$$

resultando en el llamado ensamble diagonal, esto dado a que solo los elementos de la diagonal del operador $\mathcal{O}$ en la representación de energía aparecen. Otra consideración necesaria es que las fluctuaciones decrezcan con el tamaño del sistema, para ello los productos $c_n^{(0)} c_m^{(0)*}$ y las componentes $\mathcal{O}_{n,m}$ en la Ec. (2.17) deben ser pequeños y las diferencias $E_n - E_m \neq 0$ (como ocurre en el caso de matrices aleatorias).

Se dice que un sistema termaliza si cumple las condiciones necesarias para alcanzar el estado de equilibrio, y si las fluctuaciones de $\overline{\mathcal{O}}$ a tiempos muy largos alrededor del valor predicho por el ensamble microcanónico son muy pequeñas [13, 107]. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$|\overline{\mathcal{O}} - \langle \mathcal{O} \rangle_{MC}| < \delta, \delta \ll 1, \quad (2.19)$$

donde,

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{MC} = \frac{1}{D_{E^{(0)}, \delta E}} \sum_{\substack{n=1 \\ |E^{(0)} - E_n| < \delta E}}^D \mathcal{O}_{n,n} \quad (2.20)$$

y $D_{E^{(0)}, \delta E}$ es el número de estados cuyas energías caen en un intervalo δE alrededor de la energía del estado inicial con energía $E^{(0)}$. El valor de δE debe elegirse lo suficientemente pequeño para que la observable no varíe significativamente dentro del intervalo $(E^{(0)} - \delta E, E^{(0)} + \delta E)$, pero suficientemente grande para contener un número adecuado de estados ($D_{E^{(0)}, \delta E} \gg 1$) que permita realizar un promedio representativo [107].

Para RMT, la independencia estadística entre las componentes $|c_n^{(0)}|^2$ con $\mathcal{O}_{n,n}$ implica

$$\overline{\langle \mathcal{O} \rangle} = \langle \mathcal{O} \rangle_{MC} . \quad (2.21)$$

Estas condiciones describen lo propuesto originalmente por Deutsch en [2] como teorema ergódico cuántico, el cual establece que, para ciertos sistemas cuánticos de muchos cuerpos con espectro no degenerado y sin simetrías adicionales, los elementos diagonales del observable $\mathcal{O}$ en la base de energía, $\mathcal{O}_{n,n}$, dependen de la energía E_n , y los elementos no diagonales $\mathcal{O}_{n,m}$ (con $n \neq m$) son bastante pequeños comparados con el tamaño del sistema. Como consecuencia, se cumple que

$$\overline{\langle \mathcal{O} \rangle} \approx \langle \mathcal{O} \rangle_{MC} , \quad (2.22)$$

lo que implica la termalización del sistema, de ahí que aquellos sistemas físicos que muestren una estadística espectral comparable con alguno de los ensambles de la RMT se dice que el sistema se encuentra en una fase ergódica o caótica pero solo en el contexto de matrices aleatorias.

Inicialmente se esperaba que este teorema sea válido para sistemas físicos interactuantes, sin embargo existen varios sistemas por ejemplo sistemas unidimensionales que no cumplen con el teorema, por ejemplo el problema de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou [122, 123] un sistema clásico que no termaliza ya que la no linealidad de las ecuaciones de movimiento (que podría causar caos clásico) no es suficiente para lograr la equipartición de energía o el “quantum Newton’s cradle” [124] en donde se muestra que el sistema no termaliza, esto debido a que es integrable. En el caso de matrices aleatorias, llegar al estado de equilibrio es sencillo ya que las componentes de los eigenestados de RMT son números completamente aleatorios no correlacionados, y por construcción, los eigenestados que participan en la evolución del estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ están extendidos en todo el espacio de Hilbert, es decir, las probabilidades son $|c_n^{(0)}|^2 \sim 1/D$. Esto no es una condición para cumplir con el teorema ergódico, solo es necesario que los eigenestados que participan en la evolución se mantengan estadísticamente alrededor de ese valor. En el caso sistemas realistas con interacciones las fluctuaciones de $\overline{\mathcal{O}}$ disminuyen exponencialmente con el tamaño del sistema [125].

Existen muchos otros ejemplos que refutan el teorema ergódico cuántico, lo que lo convierte el teorema en una hipótesis. Los esfuerzos por describir el fenómeno de termalización en sistemas

cuánticos interactuantes de muchos cuerpos se han condesando en una generalización del teorema ergódico cuántico llamada la Hipótesis de Termalización de Estados [126] (ETH por sus siglas en inglés). Describir el proceso de termalización en estos sistemas es un reto y un problema abierto en la mecánica estadística [85, 86, 127] pero no es tema central en esta tesis, no obstante en la investigación que se llevo a cabo se hacen uso de estos conceptos y de hecho algunos de los resultados están relacionados con ellos.

2.6. Localización en sistemas de muchos cuerpos

El fenómeno de localización de Anderson es uno de los fenómenos físicos mas interesantes de física de materia condensada. El fenómeno fue introducido por P. W. Anderson en [3], donde se explica como los electrones pueden estar localizados por un potencial aleatorio. Para comprender el fenómeno [5, 7, 107], usaremos un modelo tridimensional de enlace fuerte escrito como

$$\hat{H} = -t \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle}^L \left(C_{\mathbf{r}}^{\dagger} C_{\mathbf{r}'} + C_{\mathbf{r}} C_{\mathbf{r}'}^{\dagger} \right), \quad (2.23)$$

donde L es el número de sitios en la red, la suma sobre $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle$ es una suma sobre todos los sitios vecinos, t es el parámetro de salto (o hopping) que representa la probabilidad de que la partícula se mueva de un sitio $\mathbf{r}$ al sitio vecino $\mathbf{r}'$, $C_{\mathbf{r}}^{\dagger}$ y $C_{\mathbf{r}}$ son los operadores de creación y aniquilación que actúan en el sitio $\mathbf{r} = (x, y, z)$ con x, y y z e indican las coordenadas de un sitio en una red tridimensional. Este modelo describe fermiones que se mueven libremente en una red discreta, por ejemplo electrones en una red cristalina sin impurezas o átomos ultrafríos en redes ópticas [128], los cuales son simulaciones cuánticas de redes cristalinas usando átomos enfriados a temperaturas extremadamente bajas.

Es posible resolver el modelo y obtener sus energías y sus eigenestados, la solución al modelo son las conocidas ondas de Bloch [129]. Si se considera un término que corresponde a un potencial que actúa en cada sitio de la red, el modelo de la Ec. (2.23) obtenemos el modelo de Anderson

$$\hat{H} = -t \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle}^L \left(C_{\mathbf{r}}^{\dagger} C_{\mathbf{r}'} + C_{\mathbf{r}} C_{\mathbf{r}'}^{\dagger} \right) + \sum_{\mathbf{r}}^L U_{\mathbf{r}} C_{\mathbf{r}}^{\dagger} C_{\mathbf{r}}, \quad (2.24)$$

donde $U_{\mathbf{r}}$ es potencial aleatorio en el sitio $\mathbf{r}$ que representa algún tipo de desorden. La introducción del potencial desordenado generó un notable cambio en el comportamiento del sistema. Los estudios de Anderson concluyeron que para una red tridimensional o de mayor dimensión exhibe una transición a la localización después de un valor crítico de desorden $U_c = 16.5$ [130], donde para magnitudes de desorden débiles, $U < U_c$, los eigenestados se encuentran extendidos en todo el espacio de Hilbert [131], pero justo en el punto crítico $U_c = 16,5$ no se encuentran ni extendidos ni

localizados [130, 132].

Con un desorden mucho más fuerte, $U_c < U$, las funciones de onda $\phi(\mathbf{r})$ están todas exponencialmente localizadas alrededor de una posición inicial $\mathbf{r}_0$ igual a

$$\phi(\mathbf{r}) \sim e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|/l}, \quad (2.25)$$

donde l es la longitud de localización la cual disminuye cuando los estados están localizados, es decir, la función de onda es distinta de cero solo en un rango muy limitado de sitios.

En un estado localizado, las partículas quedan restringidas a una región limitada del espacio, lo que reduce significativamente su capacidad de movimiento a través de la red. En el caso extremo, cuando el desorden alcanza una magnitud lo suficientemente alta, las partículas no logran moverse a lo largo de la red, lo que provoca un fenómeno conocido como localización de Anderson. La estadística de niveles asociada al modelo descrito en la Ec. (2.24) sigue una distribución de Poisson, en este caso, la ausencia de correlaciones entre los niveles de energía se debe al fenómeno de localización, lo que sitúa al sistema en una fase caracterizada por estados localizados, comúnmente denominada fase localizada.

Se tiene conocimiento que la transición extendida-localizada del modelo de la Ec. (2.24) no existe para redes 2D y 1D, para estas dimensionalidades los eigenestados permanecen localizados independientemente de la magnitud del desorden [133]. No obstante en un arreglo unidimensional donde se permite que las partículas interactúen la transición existe [108]. El hamiltoniano que representa un sistema unidimensional de L fermiones con interacciones entre primeros vecinos es

$$\hat{H} = -t \sum_{i=1}^L \left(C_i^\dagger C_{i+1} + C_i C_{i+1}^\dagger \right) - t \sum_{i=1}^L n_i n_{i+1} + \sum_{i=1}^L U_i n_i, \quad (2.26)$$

donde $n_i = C_i^\dagger C_i$ es el operador de número e i denota el sitio. La principal diferencia del hamiltoniano de la Ec. (2.26) con el hamiltoniano de la Ec. (2.24) es el término $\sum_i n_i n_{i+1}$ es cual representa una interacción de dos partículas que ocupan simultáneamente los sitios i e $i+1$. Aquí la interacción de las partículas se da como una contribución a la energía total del sistema dependiendo de la ocupación de dos sitios vecinos. El sistema unidimensional que representa la Ec. (2.26) ahora representa un sistemas de muchas partículas y muestra una transición de una fase extendida, la cual es controlada por la magnitud de desorden U_i a una fase localizada de ahí que a esta última fase se le llame fase localizada de muchas partículas o MBL por sus siglas en inglés. Este nuevo fenómeno permitió el desarrollo de un nuevo campo de investigación en la física de materia condensada así como la emergente información cuántica y física de sistemas complejos.

Capítulo 3

Matrices aleatorias y modelos físicos

Estudiamos sistemas cuánticos de muchos cuerpos descritos por el hamiltoniano

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad (3.1)$$

donde $\hat{H}_0$ corresponde a un hamiltoniano inicial no perturbado y $\hat{V}$ es una fuerte perturbación que aleja al sistema del equilibrio. Consideramos estados iniciales que cuyas energías $E^{(0)} = \langle \Psi(0) | \hat{H} | \Psi(0) \rangle$ son cercanas a cero a menos que se indique lo contrario.

Estudiamos la dinámica de un quench, es decir, preparamos el sistema en un estado inicial y por medio de un parámetro de control, generamos a un cambio repentino en el sistema, lo que da lugar a una nueva dinámica gobernada por un hamiltoniano diferente. Nos centramos en cambio en estados iniciales experimentalmente accesibles que evolucionan bajo sistemas cuánticos realistas de muchas partículas.

En los subsecuentes capítulos, se investigan distintos hamiltonianos $\hat{H}$ que representan diferentes sistemas según se requieran en cada aspecto de la investigación.

3.1. Matrices aleatorias de bandas

Las matrices de GOE han demostrado ser muy útiles para detectar caos en sistemas físicos que presentan invarianza ante rotaciones e inversión temporal, no obstante GOE no muestra ningún tipo de transición de fase como algunos sistemas físicos que si lo tienen. Uno de los ensambles de matrices aleatorias que muestran una transición de una fase cuya estadística espectral es comparable

con GOE a una fase cuya estadística espectral corresponde a una distribución de tipo Poisson, típica de sistemas integrables, es conocido como matrices aleatorias de bandas o power-law band random matrices (PBRM por sus siglas en inglés). Los elementos de matriz del ensemble PBRM [117,118,134] de dimensión $D \times D$ son números aleatorios provenientes de una distribución gaussiana con media cero y varianza

$$\langle H_{n,m}^2 \rangle = \begin{cases} 1/2, & n = m, \\ \left(1 + (|n - m|/b)^{2\alpha}\right)^{-1}, & n \neq m, \end{cases} \quad (3.2)$$

donde $\alpha \in (0, \infty)$ es un parámetro de control y el parámetro b es el ancho de banda que sirve como parámetro de control útil en los estudios de criticidad. El modelo muestra una transición de fase determinada por el valor de α . Para $\alpha < 1$, el sistema tiene una estadística espectral de Wigner-Dyson es decir el sistema está en un régimen caótico, mientras que para $\alpha > 1$, la estadística espectral coincide con la distribución de Poisson, por tanto decimos que el sistema se encuentra en el régimen integrable. El punto crítico se encuentra en $\alpha = 1$ [118,135]. Este ensemble ha sido ampliamente estudiado en el contexto de la transición en [118,135] incluyendo resultados analíticos y en el contexto de multifractalidad [117,118,135]. En caso particular de $\alpha \rightarrow 0$, obtenemos matrices de GOE.

3.2. Ensemble Rosenzweig-Porter

El último ensemble de matrices aleatorias a estudiar es el así llamado ensemble de Rosenzweig-Porter o RPE por sus siglas en inglés. El RPE es un ensemble de matrices aleatorias que a diferencia del PBRM, tiene dos puntos críticos de transición, es decir, muestra una fase intermedia entre un régimen caótico y uno localizado lo cual lo hace muy útil en el estudio de sistemas físicos que tienen un comportamiento similar. El RPE se introdujo por primera vez para explicar las estadísticas espectral de los átomos pesados [136]. Una matriz simétrica y real de dimensión $D \times D$ de RPE tiene elementos aleatorios de una distribución gaussiana con media cero y varianza

$$\langle H_{n,m}^2 \rangle = \begin{cases} 1, & n = m, \\ \frac{1}{2D\zeta}, & n \neq m, \end{cases} \quad (3.3)$$

donde el parámetro de control del modelo es $\zeta \in \mathbb{R}$. El RPE es esencialmente un ensemble de Poisson perturbado por GOE, por lo tanto, un ensemble deformado [137–139] que imita cómo las simetrías de un sistema integrable representado por el ensemble de Poisson se rompen gradualmente a medida que ζ disminuye desde el infinito. El RPE alberga tres fases distintas: una fase caótica ($\zeta < 1$), una fase de estados extendidos pero no ergódicos ($1 < \zeta < 2$), y una fase integrable ($\zeta > 2$) [120,140–142] con $\zeta_{c1,2} = 1, 2$ los puntos críticos de la transición.

3.3. Modelo unidimensional de Heisenberg de partículas de espín-1/2 con desorden

Como uno de los principales modelos físicos que se trataran en esta tesis, consideramos el modelo de Heisenberg unidimensional de partículas de espín-1/2 con desorden en cada sitio. Este es el modelo paradigmático utilizado en estudios de localización de muchos cuerpos [5, 143–145]. El hamiltoniano de este modelo es

$$\hat{H} = \sum_{k=1} h_k \hat{S}_k^z + J \sum_{k=1} \left(\hat{S}_k^x \hat{S}_{k+1}^x + \hat{S}_k^y \hat{S}_{k+1}^y + \hat{S}_k^z \hat{S}_{k+1}^z \right), \quad (3.4)$$

que representa una cadena de L partículas de espín-1/2 con interacciones entre primeros vecinos donde $\hat{S}^{x,y,z} = \hat{\sigma}^{x,y,z}/2$ son los operadores de espín-1/2, $\hat{\sigma}^{x,y,z}$ las matrices de Pauli, L es el tamaño de la cadena de partículas espín-1/2, J es la fuerza de acoplamiento y h_k son números aleatorios independientes y uniformemente distribuidas en $[-h, h]$, donde h es la magnitud del desorden aplicado a cada sitio. Cada uno de los términos del hamiltoniano describen una parte fundamental del sistema. El término de interacción $\hat{S}_k^x \hat{S}_{k+1}^x + \hat{S}_k^y \hat{S}_{k+1}^y$ se le denomina término "flip-flop" mueve el k -ésimo espín orientado hacia arriba (identificado como una excitación) a lo largo de la cadena de L espines. El término $\sum_{k=1} \hat{S}_k^z \hat{S}_{k+1}^z$ representa interacciones de tipo Ising entre espines vecinos, contribuyendo positivamente a la energía total del sistema si dos espines vecinos son paralelos o contribuyendo negativamente en el caso contrario. El término $\sum_{k=1} h_k \hat{S}_k^z$ representa un campo magnético aleatorio en la dirección aplicado en cada k -ésimo espín. El sistema conserva la magnetización total en la dirección z , $\hat{S}_{\text{tot}}^z = \sum_{k=1}^L \hat{S}_k^z$, por tanto, el número total de espines arriba (o la magnetización total en z) es una cantidad conservada. Eso significa que se puede descomponer el espacio de Hilbert en sectores de magnetización fija. Trabajaremos en subespacio más grande para el cual $\hat{S}_{\text{tot}}^z = \sum_{k=1}^L \hat{S}_k^z = 0$ cuya dimensión es $D = L!/((L/2)!)^2$. El modelo puede considerar condiciones de contorno periódicas $\hat{S}_{L+1} = \hat{S}_1$ (el límite de la primera suma es L) o bien condiciones de contorno abiertas (el límite de la primera suma es $L - 1$).

En ausencia de desorden, $h = 0$, el modelo es integrable y solucionable mediante el ansatz de Bethe [146]. Cuando la intensidad del desorden es $h \lesssim J$, el sistema es caótico, presentando así eigenvalores correlacionados donde su estadística espectral es comparable con matrices de GOE [147–149]. Para $h \gg J$, el espectro energético muestra una estadística de Poisson [149] que sugieren localización.

Aún no existe consenso sobre la ubicación del punto crítico h_c , pero varios esfuerzos han conducido a la estimación $h_c \gtrsim 3.5$ [150–155], que incluye estimaciones obtenidas a partir de tamaños de sistemas finitos. Aunque existe un debate sustancial sobre la existencia de MBL en el límite termodinámico abordamos tiempos finitos y tamaños de sistemas para los cuales las características de MBL se predijeron originalmente y se observaron experimentalmente, como, por ejemplo, en [10, 108] y

[12, 156, 157], respectivamente.

Para estudiar la dinámica, se prepara el sistema en un estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ que es un estado propio de $\hat{H}_0 = \sum_{k=1} h_k \hat{S}_k^z + J \sum_{k=1} \hat{S}_k^z \hat{S}_{k+1}^z$, que representa la parte no perturbada del hamiltoniano total $\hat{H}$. Estos estados iniciales tienen en cada sitio un espín que apunta hacia arriba o hacia abajo en la dirección z , como el estado Néel, $|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \dots\rangle$, y se pueden preparar experimentalmente [9, 12, 158].

Caso de una excitación

De forma particular, partiendo de la Ec. (3.4), el modelo sin interacciones es,

$$\hat{H} = \sum_{k=1}^L h_k (\hat{S}_k^z + \mathbb{I}) + J \sum_{k=1}^{L-1} (\hat{S}_k^x \hat{S}_{k+1}^x + \hat{S}_k^y \hat{S}_{k+1}^y), \quad (3.5)$$

donde h_k son números aleatorios distribuidos uniformemente en $[-W, W]$. Trabajaremos en el sector con $\hat{S}_{\text{Tot}}^z = (2 - L)/2$ y dimensión $D = L$, es decir, el subespacio de una sola excitación que son eigenestados de $\hat{S}_{\text{Tot}}^z$ con un solo espín apuntando hacia arriba. A diferencia del hamiltoniano de la Ec. (3.4), el hamiltoniano de la Ec. (3.5) no considera el término de interacciones tipo Ising $\sum_k \hat{S}_k^z \hat{S}_{k+1}^z$ el cual describe una interacción entre espines vecinos, ya que su contribución a la energía total depende del estado conjunto de cada par de sitios adyacentes. Al omitir las interacciones de tipo Ising significa que una excitación $|\uparrow\rangle$ en la cadena de L espines se propagará en un medio desordenado sin experimentar ningún tipo de interacción. En el límite termodinámico, el sistema en la Ec. (3.5) exhibe localización de Anderson para cualquier fuerza de desorden finito [3] con una longitud de localización para eigenestados lejos de los colas del espectro de energía dada por $l \sim 6,5653/W^2$ [159]. Para investigar tamaños de sistemas finitos, uno puede tomar la longitud de localización reescalada $\xi = 6,5653/(W^2 L)$ como parámetro.

El sistema de la Ec. (3.5) no es caótico, pero si la longitud de localización es mayor que el tamaño del sistema, los niveles de energía están correlacionados y muestran una distribución de Wigner-Dyson [160–162]. A pesar de ser solo un efecto de tamaño finito, estas correlaciones espectrales también se manifiestan dinámicamente [161] y luego podrían detectarse experimentalmente.

3.4. Modelo de Aubry-André

Cuando el potencial en el hamiltoniano (3.4) corresponde al llamado potencial cuasiperiódico de Harper [39],

$$h_k = h \cos(2\pi\beta k + \phi), \quad (3.6)$$

el modelo se conoce como el modelo de Aubry-André con interacciones. Fijamos $\beta = (\sqrt{5} - 1)/2$, el inverso de la proporción áurea, ϕ es una fase arbitraria que consideraremos como un número aleatorio distribuido uniformemente entre 0 y 2π , con la intención de para realizar promedios en diferentes realizaciones del modelo. Se ha sugerido que, para el modelo de Aubry-André interactuante, existe una región crítica en $h_{c_1} \lesssim h \lesssim h_{c_2}$ de estados extendidos pero no ergódicos, entre una fase ergódica y una localizada, con $h_{c_1} \sim 0.7$ y $h_{c_2} \sim 1.7$ [163]. Para el caso con interacciones trabajamos en el subespacio con $\hat{S}_{\text{Tot}}^z = 0$ de dimensión igual a $D = L!/[(L/2)!]^2$.

Ademas estudiaremos el modelo de Aubry-André sin interacciones que corresponde al hamiltoniano de la Ec. (3.5) pero con h_k igual al potencial de Harper de la Ec. (3.6). La conocida autodualidad con la representación en el espacio de Fourier del modelo de Aubry-André no interactuante revela el punto crítico en $h_c = 2$ entre las fases extendida y localizada. Para el modelo de Aubry-André no interactuante, trabajamos en el sector con $\hat{S}_{\text{Tot}}^z = (2 - L)/2$ y dimensión $D = L$, es decir, el subespacio de eigenestados de $\hat{S}_{\text{Tot}}^z$ con un solo espín apuntando hacia arriba.

3.5. Modelo de Ising desordenado con campo transversal e interacciones de largo alcance

El siguiente modelo a analizar es una cadena de L partículas de espín-1/2 con interacciones de largo alcance con desorden, como las que se lograron experimentalmente con trampas de iones [158, 164, 165]. El modelo tiene desorden en cada sitio y condiciones de contorno abiertas, que se describen mediante el hamiltoniano

$$\hat{H}_{\text{LR}} = \sum_{k=1}^L (B + D_k) \hat{S}_k^z + 4 \sum_{j < k} \frac{J}{(k-j)^\alpha} \hat{S}_j^x \hat{S}_k^x, \quad (3.7)$$

donde B indica un campo magnético constante en la dirección transversal, D_k se distribuye uniformemente dentro de $[-W, W]$, y α controla el rango de la interacción espín-espín. Para $W = B = 0$, $\hat{H}_{\text{LR}}$ describe el modelo de vidrio de espín de Sherrington-Kirkpatrick [166], mientras que el límite de interacción de rango infinito ($\alpha = 0$) da lugar al modelo de Lipkin-Meshkov-Glick, el cual es un sistema ideal para estudiar fenómenos como la transición de fase cuántica en estados excitados [167–169] y las cicatrices cuánticas [170].

El hamiltoniano $\hat{H}_{\text{LR}}$ se descompone en dos sectores de simetría, uno abarcado por configuraciones de espín con un número impar de espines ascendentes en la dirección z y el otro con un número par de espines ascendentes. Para maximizar nuestro acceso al centro del espectro, utilizamos el sector con un número par de espines ascendentes cuando $L/2$ es par, y el sector impar en caso contrario. Los estados iniciales son nuevamente estados de producto $\hat{S}_{\text{Tot}}^z$, que son accesibles experimentalmente.

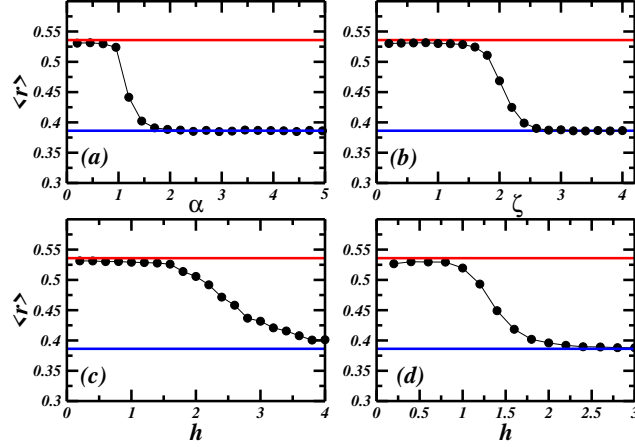


Figura 3.1: Se muestra resultados numéricos de $\langle r \rangle$ (Ec. (2.6)) versus la magnitud del parámetro de control para matrices aleatorias de PBRM de dimensión $D = 12000$ (a), matrices aleatorias de RPE de dimensión $D = 12000$ (b), el modelo de Heisenberg con desorden para una cadena de $L = 16$ partículas con $D = 12870$ (c) y el modelo de Aubry-André con interacciones para una cadena de $L = 16$ partículas de dimensión $D = 12870$ (d) . Las líneas color rojo indican el valor teórico de GOE, $\langle r \rangle^{\text{GOE}} \approx 0.53590$ y las líneas azules el valor teórico para el caso integrable $\langle r \rangle^{\text{P}} \approx 0.38629$. Las puntos color negro corresponden a los resultados numéricos y las líneas color negro son líneas de guía. Los promedios se realizaron sobre 50 matrices para cada modelo.

Para ilustrar la transición de los modelos de matrices aleatorias y sistemas físicos más recurrentes en nuestro trabajo de investigación recurrimos a estudiar la Ec. (2.6) la cual ofrece información sobre la fase en la que se encuentra cada uno de los sistemas con respecto al valor de su respectivo parámetro de control. La Fig. 3.1 muestra el promedio $\langle r \rangle$ para dos modelos de matrices aleatorias el PBRM y RPE y dos sistemas físicos, el modelo de Aubry-André con interacciones y el modelos de Heisenberg con desorden. En la Fig. 3.1 (a), los resultados $\langle r \rangle$ para el PBRM se mantienen cerca del valor de $\langle r \rangle^{\text{GOE}} \sim 0.53590$, lo que implica que para $\alpha < 1$ la estadística espectral coincide con una estadística de Wigner-Dyson y el sistema se encuentra en la fase extendida, $\langle r \rangle$ cae abruptamente alrededor de $\alpha_c = 1$ y para $1 < \alpha$, $\langle r \rangle$ es similar a $\langle r \rangle^{\text{P}} \sim 0.38629$ indicando que el sistema está en la fase localizada. Para RPE, la Fig. 3.1 (b) se aprecia como $\langle r \rangle \sim \langle r \rangle^{\text{GOE}}$ para $\zeta \lesssim 1$, se puede observar como $\langle r \rangle$ disminuye mostrando una fase intermedia que termina en $2 \lesssim \zeta_{c2}$, después el sistema pasa a una fase localizada pues se obtiene $\langle r \rangle \sim \langle r \rangle^{\text{P}}$. Para los sistemas físicos, comenzamos con el modelo de Heisenberg con desorden Fig. 3.1 (c), para $h \sim 2$, $\langle r \rangle \sim \langle r \rangle^{\text{GOE}}$, para $2 < h$, $\langle r \rangle$ muestra una región de transición donde $4 < h$, $\langle r \rangle \sim \langle r \rangle^{\text{P}}$ indicando que el sistema se encuentra en la fase localizada o MBL. En el caso del modelo de Aubry-André con interacciones en Fig. 3.1 (d), para $h < 1$, $\langle r \rangle \sim \langle r \rangle^{\text{GOE}}$, para $1 < h < 2$, $\langle r \rangle$ muestra una transición donde $\langle r \rangle \rightarrow \langle r \rangle^{\text{P}}$ indicando que el sistema se aproxima a la fase localizada o MBL.

Capítulo 4

Probabilidad de supervivencia

La probabilidad de supervivencia es una cantidad dinámica típica en los estudios de localización en sistemas con interacciones y es accesible al estudiar la dinámica en experimentos de iones atrapados y átomos súper fríos [158, 164]. Dado un estado inicial $|\Psi(0)\rangle$, la evolución unitaria es $|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^D c_n^{(0)} |\psi_n\rangle$ donde $\hat{H} |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle$ y $c_n^{(0)} = \langle \psi_n | \Psi(0) \rangle$, la proyección del estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ en la eigenbase de energía, la probabilidad de recuperar un estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ a cierto tiempo t y está dada por

$$\begin{aligned} SP(t) &= |\langle \Psi(0) | \Psi(t) \rangle|^2 \\ &= \left| \sum_n |c_n^{(0)}|^2 e^{-iE_n t} \right|^2 \\ &= \sum_{n \neq m}^D |c_n^{(0)}|^2 |c_m^{(0)}|^2 e^{-i(E_n - E_m)t} + \sum_n^D |c_n^{(0)}|^4, \end{aligned} \quad (4.1)$$

La Ec. (4.1) es la así llamada probabilidad de supervivencia. Si el sistema no presenta muchas degeneraciones, cuando $t \rightarrow \infty$, el primer término de la Ec. (4.1) se desvanece y la probabilidad de supervivencia se satura y su valor coincide con $\overline{SP} = \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^4$, es decir el IPR del estado inicial, denotado como $\text{IPR}^{(0)}$. La probabilidad de supervivencia contiene mucha información sobre el sistema, para mostrarlo, podemos escribir la $SP(t)$ como

$$SP(t) = \left| \int \rho_0(E) e^{-iEt} dE \right|^2, \quad (4.2)$$

que es la transformada de Fourier de una función de energía igual a

$$\rho_0(E) = \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^2 \delta(E - E_n), \quad (4.3)$$

la cuál corresponde a la densidad de estados ponderada por las componentes $|c_n^{(0)}|^2$, esta función lleva por nombre densidad local de estados o LDoS por sus siglas en inglés.

La varianza σ de la distribución de energía del estado inicial es

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \langle \Psi(0) | \hat{H}^2 | \Psi(0) \rangle - \langle \Psi(0) | \hat{H} | \Psi(0) \rangle^2 \\ &= \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^2 E_n^2 - \left(\sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^2 E_n \right)^2 = \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^2 (E_n - E_0)^2\end{aligned}\quad (4.4)$$

donde E_0 es el valor esperado de la energía con respecto al estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ igual a

$$E_0 = \langle \Psi(0) | \hat{H} | \Psi(0) \rangle = \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^2 E_n. \quad (4.5)$$

La utilidad de σ como un indicador de la transición del sistema se mostrará en las siguientes secciones. La probabilidad de supervivencia exhibe diferentes comportamientos a diferentes escalas de tiempo, en esta primera sección se analizan las siguientes: el régimen de tiempos cortos, donde se observa un decaimiento cuadrático, y el régimen intermedio, donde puede surgir un decaimiento exponencial o gaussiano seguido de un decaimiento como ley de potencias. La expansión en series de Taylor de la Ec. (4.1) para tiempos cortos $t \ll \sigma^{-1}$, se obtiene un decaimiento cuadrático igual a

$$\begin{aligned}SP(t) &= \left| \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^2 e^{-iE_n t} \right|^2 = \left| e^{-iE_0 t} \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^2 e^{-i(E_n - E_0)t} \right|^2 \\ &= |e^{-iE_0 t}|^2 \left| \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^2 (1 - i(E_n - E_0)t - (E_n - E_0)^2 t^2 / 2 + \dots) \right|^2 \\ &= \left| 1 - i \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^2 (E_n - E_0)t - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^2 (E_n - E_0)^2 t^2 + \dots \right|^2,\end{aligned}\quad (4.6)$$

el término lineal se desvanece por la Ec. (4.5). Continuando con la expansión y usando la Ec. (4.4)

$$\begin{aligned}SP(t) &= \left| 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^2 (E_n - E_0)^2 t^2 + \dots \right|^2 \\ &= 1 - \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^2 (E_n - E_0)^2 t^2 + O(t^4) \\ &= 1 - \sigma^2 t^2 + O(t^4),\end{aligned}\quad (4.7)$$

resultando en un decaimiento cuadrático en el tiempo igual a

$$SP(t) \approx 1 - \sigma^2 t^2, \quad (4.8)$$

el cual es independiente del modelo.

Después del decaimiento cuadrático la probabilidad de supervivencia tendrá un comportamiento que se debe a la forma de la LDoS. Para matrices aleatorias de GOE, la LDoS es semicircular e igual a la Ec. (2.3), la $SP_{\text{GOE}}(t)$ es la transformada de Fourier de la Ec. (4.2) que es igual a

$$SP_{\text{GOE}}(t) = \frac{\mathcal{J}_1^2(2\sigma t)}{(\sigma t)^2}, \quad (4.9)$$

donde $\mathcal{J}_1$ es una función de Bessel de primer tipo [61, 85, 171].

A diferencia del caso RMT, para sistemas realistas, la $\langle SP(t) \rangle$ se comporta diferente. En sistemas cuánticos de muchos cuerpos con interacciones entre dos partículas, el decaimiento inicial cuadrático está presente para tiempos $t \ll \sigma^{-1}$, después, la $\langle SP(t) \rangle$ decae de acuerdo a la forma de la densidad de estados, la cual es gaussiana [41] y cuando el sistema se perturba lejos del equilibrio es decir, preparando el sistema en un estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ y por medio de un parámetro de control, generamos a un cambio repentino en el sistema, lo que da lugar a una nueva dinámica gobernada por un hamiltoniano diferente, la LDoS continua gaussiana [53, 61]. Siguiendo la Ec. (4.2), la transformada de Fourier de una distribución gaussiana resulta en una función gaussiana, por tanto el decaimiento de la probabilidad de supervivencia es igual a

$$\langle SP(t) \rangle = e^{-\sigma^2 t^2} \quad (4.10)$$

El decaimiento de la Ec. (4.10) ocurre tanto en los regímenes extendidos como localizados [61, 69, 171, 172].

A tiempos largos la $\langle SP(t) \rangle$ exhibe un decaimiento como ley de potencias $\propto t^{-\gamma}$ el cual tiene su origen en las propiedades de la LDoS, el valor del exponente γ se vuelve clave en los estudios de la dinámica del sistema. Los estudios sobre el origen del decaimiento como ley de potencias iniciaron con Khalfin [62] quien demostró que, debido a la existencia de una cota inferior en el espectro de energía E_{low} de cualquier sistema cuántico, el decaimiento de la probabilidad de supervivencia no puede ser estrictamente exponencial a tiempos largos. En su lugar, el sistema presenta una reconstrucción parcial del estado inicial, lo que conduce a un decaimiento con comportamiento de ley de potencias, a este comportamiento se le conoce como efecto Khalfin.

El decaimiento como ley de potencias puede ser derivado analíticamente vía la expansión asintótica a tiempos $\sigma^{-1} \ll t$ de la transformada de Fourier de la Ec. (4.2) de la función LDoS de la Ec. (4.3)

como se reporta en [85]. Si $\lim_{E \rightarrow E_{\text{low}}} \rho_0(E) > 0$ entonces $\langle SP(t) \rangle \propto t^{-2}$. De forma general, sobre las colas del espectro, $\rho_0(E) \sim (E - E_{\text{low}})^\eta$ con $0 < \eta < 1$, se tiene $\langle SP(t) \rangle \propto t^{-2(\eta+1)}$, de tal manera que para sistemas realistas con interacciones entre dos cuerpos la LDoS es gaussiana y el exponente del decaimiento es $\gamma = 2$, en cambio para matrices aleatorias de GOE cuya LDoS es semicircular se obtiene $\gamma = 3$. Podemos probar rápidamente que la envolvente de las oscilaciones de $SP_{\text{GOE}}(t)$ producto de los ceros de la función de Bessel $\mathcal{J}_1$ decae como $\propto t^{-3}$ al realizar una expansión asintótica a tiempos $\sigma^{-1} \ll t$ de la Ec. (4.9) y considerando $\mathcal{J}_\nu(x) \rightarrow \sqrt{2/\pi x} \cos(x - \nu\pi/2 - \pi/4)$ nos permite obtener

$$SP_{\text{GOE}}(1 \ll \sigma t) \rightarrow \frac{1}{\pi \sigma^3 t^3} \cos^2(2\sigma t - \pi/4) \sim \frac{1}{2\pi \sigma^3 t^3} \quad (4.11)$$

por lo tanto $\langle SP_{\text{GOE}}(t) \rangle \propto t^{-3}$.

Por otra parte el decaimiento como ley de potencias es inducido por las correlaciones presentes en eigenestados no caóticos típicas de sistemas desordenados con o sin interacciones [20, 71, 72, 85] que presentan un fase localizada donde el exponente resultante de la ley de potencia es menor que el exponente resultante de los límites de energía [69].

Se ha encontrado similitud (bajo ciertas condiciones [20]) del exponente γ con la dimensión de correlación D_2 obtenida mediante el análisis de escalamiento de la razón inversa de participación o IPR de la Ec. (2.9) vía la función de correlación $C(t)$ de $\langle SP(t) \rangle$ tanto en sistemas cuánticos desordenados interactuantes [20] como en sistemas cuasiperiódicos sin interacciones [71]. Una discusión más profunda de esto se llevara a cabo en la sección correspondiente.

4.1. Indicadores de caos cuántico de muchos cuerpos en la dinámica del sistema

Como se expone en la sección anterior, la $\langle SP(t) \rangle$ muestra un diversos comportamientos a diferentes escalas de tiempo cuyo origen se debe a la estructura de las componentes de los eigenestados, la estructura de la distribución de energía así como el régimen en el que el sistema se encuentre. El espectro energético por sí solo tiene un enorme impacto sobre el desarrollo de la dinámica para tiempos largos que se observa en el decaimiento como ley de potencias, no obstante sus efectos se observan aún después del decaimiento como ley de potencias. El análisis del efecto de las correlaciones espectrales en la dinámica del sistema nos lleva a estudiar las escalas de tiempo a tiempos muy largos.

Sabemos que, en el contexto de matrices aleatorias, si la estadística espectral de un sistema cuántico es comparable con la de alguno de los ensambles de matrices aleatorias, se dice que el sistema es caótico. Que esto suceda significa que el sistema posee un espectro energético correlacionado. Las correlaciones del espectro energético se pueden detectar en la evolución temporal del sistema por

medio de una estructura pendiente-mínimo-rampa-plateau denominado como hoyo de correlaciones. Este enfoque tiene sus ventajas en experimentos enfocados en los estudios de dinámica con acceso limitado o prácticamente nulo al espectro energético. Una propuesta para detectar caos en sistemas cuánticos de muchos cuerpos vía la eficiente detección del hoyo de correlaciones se discute en el Cap.6.

Para estudiar la dinámica cuántica a temperatura finita [107] es posible estudiar la probabilidad de supervivencia $\langle SP(t) \rangle$ sobre estados de Gibbs. Un estado de Gibbs describe el estado de equilibrio de un sistema cuántico a temperatura finita, y se define como

$$|\Psi_\beta(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}} \sum_{n=1}^D e^{-\beta E_n/2} |\psi_n\rangle, \quad (4.12)$$

con $Z = \sum_m e^{-\beta E_m}$ y $\beta = (k_B T)^{-1}$, con T la temperatura y k_B la constante de Boltzmann, D es la dimensión del espacio de Hilbert y E_n representa los eigenvalores del sistema. La $SP(t)$ para un estado de Gibbs se escribe como

$$SP^{\beta \neq 0}(t) = |\langle \Psi_\beta(0) | e^{-iHt} | \Psi_\beta(0) \rangle|^2 \quad (4.13)$$

$$= \left| \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n - iE_n t} \right|^2 \quad (4.14)$$

$$= \frac{1}{Z^2} \sum_{n,m=1}^D e^{-\beta(E_n + E_m)} e^{-i(E_n - E_m)t}, \quad (4.15)$$

por tanto las componentes $|c_n^{(0)}|^2$ coincidirán con los factores de Boltzmann

$$f(E_n) = \frac{e^{-\beta E_n}}{\sum_m e^{-\beta E_m}}. \quad (4.16)$$

Considerando promedios y para el caso de una temperatura infinita, $\beta = 0$, la Ec. (4.1) se obtiene una nueva cantidad igual a

$$\text{SFF}(t) = \frac{1}{D^2} \left\langle \sum_{m,n} e^{i(E_m - E_n)t} \right\rangle, \quad (4.17)$$

donde $\langle \cdot \rangle$ indica un promedio sobre el ensamble. Esta cantidad se conoce como el factor de forma espectral [101] denotada como $\text{SFF}(t)$. La $\text{SFF}(t)$ captura correlaciones de corto y largo alcance en el espectro de energía, lo que proporciona un diagnóstico completo del caos cuántico. Esta cantidad también se ha utilizado para cuestionar la existencia de una fase localizada de muchas partículas [46]. Para matrices aleatorias de GOE, una expresión analítica de $\langle \text{SFF}(t) \rangle$ ha sido derivada y es igual a [87, 91]

$$\langle \text{SFF}_{\text{GOE}}(t) \rangle \simeq \frac{\mathcal{J}_1^2(2\sigma t)}{(\sigma t)^2} - \frac{1}{D} b_2 \left(\frac{\sigma t}{2D} \right) + \frac{1}{D}, \quad (4.18)$$

con $\mathcal{J}_1$ una función de Bessel de primer tipo y $b_2(t)$ es una función denominada “función de correlación de dos niveles” [101] y esta función describe el hoyo de correlaciones y es igual a

$$b_2(t) = \begin{cases} 1 - 2|t| + |t| \ln(2|t| + 1), & \text{si } |t| \leq 1 \\ -1 + |t| \ln\left(\frac{2|t|+1}{2|t|-1}\right), & \text{si } |t| > 1. \end{cases} \quad (4.19)$$

En la Fig. 4.1, se muestra el promedio del factor de forma espectral sobre un ensamble de matrices aleatorias de GOE. El primer término en la Ec. (4.18) representa un decaimiento como ley de potencias, esta exhibe oscilaciones características de la función de Bessel, cuya envolvente decae como una ley de potencias $\propto t^{-3}$, como se ve en la Fig. 4.1.

El decaimiento en la Fig. 4.1 se extiende hasta que $\langle SFF_{GOE}(t) \rangle$ alcanza un valor mínimo al tiempo t_{Th}^{GOE} llamado el tiempo de Thouless. Para matrices de GOE el tiempo de Thouless t_{Th}^{GOE} es

$$t_{Th}^{GOE} = \frac{\sqrt{D}}{\sigma} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/4} = \left(\frac{12}{\pi} \right)^{1/4}. \quad (4.20)$$

etiquetado como t_{dip} en Fig. 4.1. El valor mínimo de $\langle SFF_{GOE}(t) \rangle$ es, $\langle SFF_{GOE}(t_{Th}^{GOE}) \rangle \approx 2/D$ (véase [87]). Después del mínimo continua una rampa, que se identifica como la región por debajo del valor de saturación (plateau) en $1/D$. El inicio de la rampa es a t_{Th}^{GOE} y el final de la rampa es al tiempo de Heisenberg, t_H , y están marcados con líneas verticales en la Fig. 4.1. El intervalo donde $SFF(t_{Th}^{GOE})$ se encuentra por debajo del plateau corresponde al hoyo de correlaciones.

Generalmente usar estados de Gibbs para estudiar la dinámica experimentalmente no es muy común, en lugar de ello se recurre estudiar la probabilidad de supervivencia de un estado inicial vía la dinámica de un quench. Entonces, para matrices de GOE la expresión analítica del promedio de la probabilidad de supervivencia es [91]

$$\langle SP(t) \rangle = \frac{1 - \langle \overline{SP} \rangle}{D - 1} \left[D \frac{\mathcal{J}_1^2(2\sigma t)}{(\sigma t)^2} - b_2\left(\frac{\sigma t}{2D}\right) \right] + \langle \overline{SP} \rangle. \quad (4.21)$$

En sistemas físicos cuánticos caóticos de muchas partículas con simetría ante inversión temporal el decaimiento de la envolvente continua hasta que $\langle SP(t) \rangle$ alcanza un valor mínimo que continua hasta alcanzar la saturación a tiempos $t \rightarrow \infty$. Esta región de valores mínimos es una corresponde al hoyo de correlaciones. La aparición de este es considerado un indicador de caos en sistemas físicos, por tanto su análisis es crucial para el entendimiento de la dinámica del sistema. En sistemas físicos cuánticos caóticos de muchas partículas con simetría ante inversión temporal la $\langle SP(t) \rangle$ alcanza un valor mínimo en un tiempo $t_{Th}^{GOE} \propto D^{2/3}/\sigma$ [87], después del cual surge la rampa. La rampa es descrita por la función $b_2(t)$ en la Ec. (4.19), y persiste hasta el tiempo de Heisenberg, $t_H \propto D/\sigma$ [87]. En los modelos físicos con desorden, el tiempo del mínimo también se conoce como tiempo de Thouless. En sistemas caóticos de muchos cuerpos, $t_{Th}^{GOE} \ll t_H$, mientras que para los sistemas que se acercan a una fase localizada, $t_{Th}^{GOE}/t_H \rightarrow 1$. El uso de esta relación para describir la

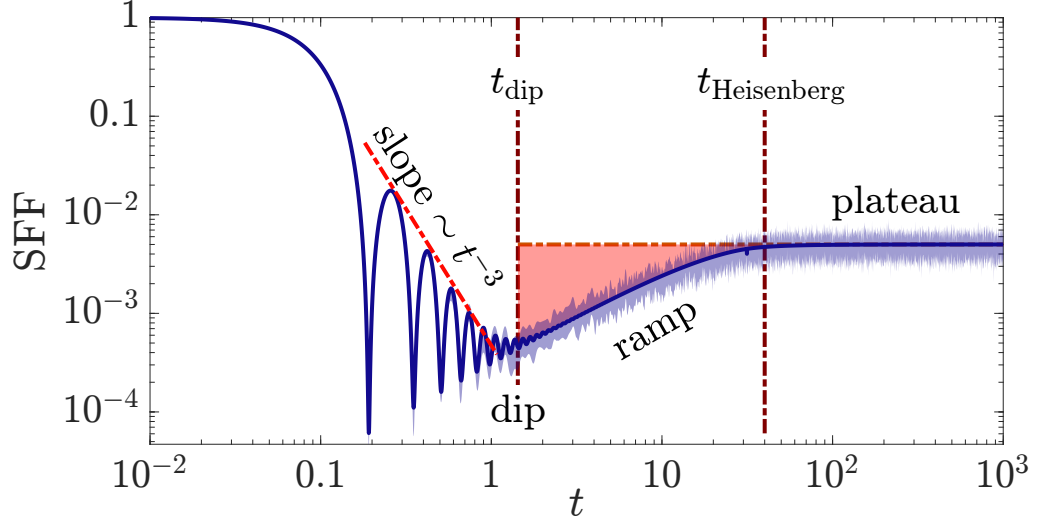


Figura 4.1: Factor de forma espectral para matrices de GOE de dimensión $D = 200$. Los elementos de las matrices tienen $\langle \hat{H}_{n,m} \rangle = 0$, $\langle \hat{H}_{n,m}^2 \rangle = 1/2$ para $i \neq j$, y $\langle \hat{H}_{n,n}^2 \rangle = 1$, de modo que $\sigma \sim \sqrt{D/2}$. La línea sólida oscura es la expresión analítica en la Ec. (4.18) y la curva sombreada es el promedio sobre el ensamble. Las líneas discontinuas verticales marcan el comienzo y el final de la rampa del hoyo de correlaciones. El promedio de SSF fue obtenido con un ensamble de 100 matrices aleatorias GOE.

transición extendida-localizada se discutió para sistemas cuánticos desordenados de muchos cuerpos en [46, 87].

Por último, más allá de t_H , si el sistema no exhibe muchas degeneraciones, la probabilidad de supervivencia promedio exhibe pequeñas fluctuaciones alrededor de su promedio de tiempo infinito

$$\overline{SP} = \left\langle \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^4 \right\rangle = \langle \text{IPR}^0 \rangle, \quad (4.22)$$

que coincide con el valor del IPR del estado inicial.

Capítulo 5

Probabilidad de supervivencia generalizada

Motivados por los estudios de multifractalidad a través del IPR generalizado, se define una versión generalizada de la probabilidad de supervivencia, con el fin de capturar aspectos dinámicos más sutiles de la estructura espectral. Esta generalización resulta especialmente útil para caracterizar fases críticas o multifractales, donde las medidas convencionales no son suficientemente sensibles. Definimos la probabilidad de supervivencia generalizada como

$$SP_q(t) = \frac{1}{\mathcal{N}_q^2} \left| \sum_{\alpha=1}^D |c_n^{(0)}|^q e^{-iE_n t} \right|^2 = \left| \int \rho_q(E) e^{-iE_n t} dE \right|^2, \quad (5.1)$$

donde $\mathcal{N}_q$ es una constante de normalización introducida para conservar la probabilidad e igual a

$$\mathcal{N}_q = \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^q, \quad (5.2)$$

donde $q \geq 0$ es un número real y

$$\rho_q(E) = \frac{1}{\mathcal{N}_q} \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^q \delta(E_n - E) \quad (5.3)$$

es la LDoS generalizada (gLDoS) cuyas respectivas media y varianza son

$$E_q^{(0)} = \frac{1}{\mathcal{N}_q} \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^q E_n \quad \text{y} \quad \sigma_q^2 = \frac{1}{\mathcal{N}_q} \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^q (E_n - E_q^{(0)})^2. \quad (5.4)$$

Si $q = 2$ recuperamos la expresión original de la probabilidad de supervivencia como se define en Ec. (4.2). Para $q = 0$, Ec. (5.1) coincide con el factor de forma espectral [101]. Se puede ver de

la Ec. (5.1) podemos obtener la probabilidad de supervivencia generalizada calculando la transformada de Fourier de la gLDoS. Por tanto comenzamos nuestro estudio examinando la forma de $\rho_q^{(0)}(E)$. Estudiamos sistemas cuánticos de muchos cuerpos descritos por el hamiltoniano de la Ec. (3.1).

El primer modelo a estudiar son matrices aleatorias GOE de la Ec. (2.1) y será considerado como nuestro modelo de referencia. Como modelo físico, consideramos el modelo de Heisenberg 1D con desorden (Ec. (3.4)) que es ampliamente utilizado en estudios de localización de muchos cuerpos [5, 143–145]. Suponemos condiciones de contorno periódicas y fijamos la magnitud del acoplamiento igual a $J = 1$. Para tamaños finitos, el sistema muestra estadísticas de nivel comparables a las matrices aleatorias de GOE cuando $h \sim 0.5$, mientras que la repulsión de niveles energéticos se desvanece para $h > 1$.

5.1. LDoS generalizada

La Fig. 5.1 muestra la LDoS generalizada para una sola matriz de GOE y diferentes valores de q . Se observa que la gLDoS tiene una forma semicircular típica de las matrices completamente aleatorias, además, el ancho de la distribución se conserva y es independiente del valor de q . Este comportamiento es debido a que todos los eigenestados de matrices de GOE se encuentran normalizados. Para valores $q < 1$, todas las componentes $|c_n^{(0)}|$ participan en la construcción de la distribución llenando casi por completo la envolvente de la Ec. (2.3). Para valores de $q > 1$, las componentes más grandes $|c_n^{(0)}|$ contribuyen en la construcción de la distribución cuyos efectos se observan como picos en la distribución en la Fig. 5.1 (c) y Fig. 5.1 (d), además, se puede observar que el ancho de la distribución se conserva no depende el valor q . En el caso de matrices aleatorias del GOE, las componentes $|c_n^{(0)}|^2$ se comportan, en promedio, como variables aleatorias independientes con una distribución gaussiana de varianza $1/D$. Entonces las componentes $|c_n^{(0)}|^q$ se comportan como números aleatorios no correlacionados que fluctúan alrededor del valor promedio $\overline{|c_n^{(0)}|^q} \sim 1/\sqrt{D^q}$, y se pueden reemplazar en la Ec. (5.3). Entonces se obtiene que la gLDoS para las matrices GOE coincide con la densidad normalizada de estados $P(E) = D^{-1} \sum_n \delta(E_n - E)$. Por lo tanto, para las matrices aleatorias GOE, tenemos que

$$\rho_q^{\text{GOE}}(E) = \frac{1}{\pi\sigma_q} \sqrt{1 - \left(\frac{E}{2\sigma_q}\right)^2}, \quad (5.5)$$

donde la desviación estándar $\sigma_q = \sqrt{D/2}$. En la Fig. 5.3 (a), confirmamos que σ_q es constante para GOE.

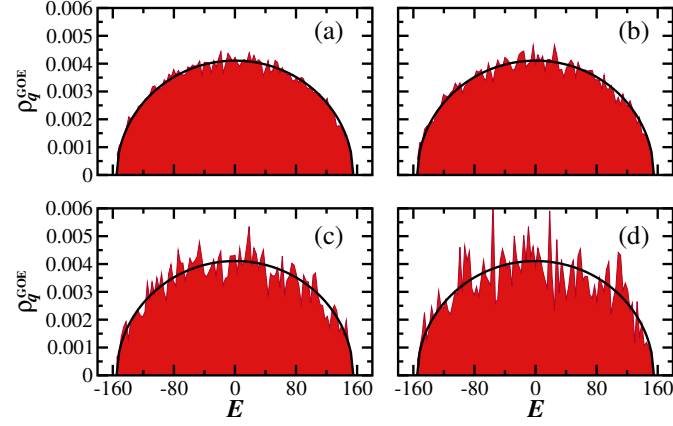


Figura 5.1: Densidad local de estados generalizada para matrices GOE. Para (a) $q = 0.5$, (b) $q = 1.0$, (c) $q = 2.0$ y (d) $q = 3.0$. Las áreas sombreadas son resultados numéricos las curvas sólidas corresponden a la Ec. (5.5). Se considera una única matriz y un único estado inicial. El tamaño de la matriz es $D = 12,000$.

Para sistemas cuánticos físicos de muchos cuerpos con interacciones de dos cuerpos, la densidad de estados es gaussiana [41, 173]. Por lo tanto, la forma esperada del LDoS para un sistema perturbado lejos del equilibrio y para un estado inicial tomado en el centro del espectro, también es gaussiana, como se confirma para el modelo de Heisenberg en la Fig. 5.2 (c) para el caso estándar $q = 2.0$ con $h = 0.5$.

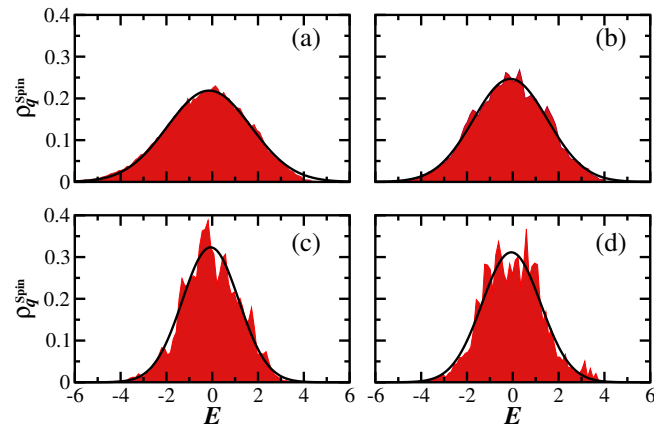


Figura 5.2: Densidad local de estados generalizada para el modelo de Heisenberg con $h = 0.5$ para (a) $q = 0.5$, (b) $q = 1.0$, (c) $q = 2.0$ y (d) $q = 3.0$. Las áreas sombreadas son resultados numéricos y las curvas sólidas representan la expresión gaussiana en la Ec. (5.6). Se considera una única realización de desorden. El tamaño del sistema es $L = 16$ con $D = 12,870$.

A pesar de que la forma gaussiana de la distribución se mantiene para diferentes valores

de q

$$\rho_q^{\text{Spin}}(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_q^2}} \exp \left[-\frac{(E - E_q^{(0)})^2}{2\sigma_q^2} \right], \quad (5.6)$$

La figura 5.2 muestra que, a diferencia del caso GOE, para el modelo de Heisenberg el ancho σ_q depende de q . A medida que q aumenta y la contribución de las componentes $|c_n^{(0)}|^q$ más grandes se amplifica, el ancho de $\rho_q^{\text{Spin}}(E)$ se vuelve más pequeño. Esto indica que las contribuciones de las componentes en las colas de la distribución de energía del estado inicial, donde los estados ergódicos son inexistentes, desaparecen.

La dependencia del ancho de la gLDoS con q , incluso dentro del régimen ergódico, revela el grado de ergodicidad de los sistemas físicos. Esto significa que los eigenestados de los sistemas físicos no son vectores aleatorios como en el caso de las matrices aleatorias. Cómo definir estados caóticos en sistemas realistas se discute en [42, 43, 52, 174–177]. Estos resultados agregan a estos estudios una forma de cuantificar el nivel de ergodicidad en comparación con matrices aleatorias.

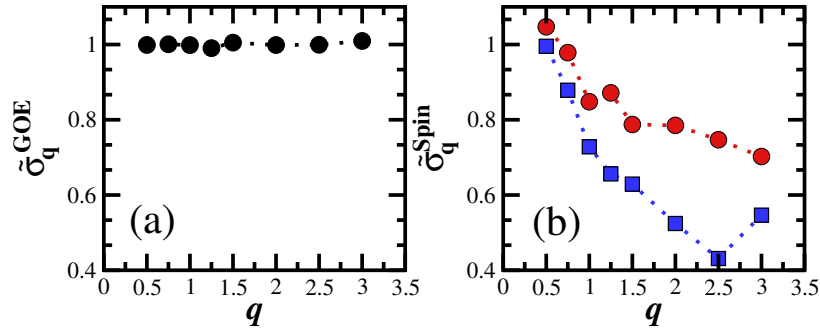


Figura 5.3: Desviación estándar de gLDoS normalizado por la desviación estándar de DoS para (a) matrices GOE, $\tilde{\sigma}_q^{\text{GOE}} = \sigma_q^{\text{GOE}}/\sigma_{\text{DOS}}^{\text{GOE}}$, y (b) el modelo de Heisenberg, $\tilde{\sigma}_q^{\text{Spin}} = \sigma_q^{\text{Spin}}/\sigma_{\text{DOS}}^{\text{Spin}}$, con $h = 0.5$ (círculos) y $h = 2.0$ (cuadrados) en función de q . Cada punto es un promedio de 10 realizaciones de desorden y un estado inicial con energía $E_0 \sim 0$. Las líneas punteadas son guías. $D = 12,000$ para GOE y $D = 12,870$ ($L = 16$) para el modelo de Heisenberg.

La Fig. 5.3 se muestra los resultados para σ_q que está normalizada por la desviación estándar de la densidad de estados (DoS) como una función de q para el modelo GOE [Fig. 5.3 (a)] y el modelo de Heisenberg [Fig. 5.3 (b)]. Se considera una única realización con un estado inicial con $E_0 \sim 0$. La curva recta en la Fig. 5.3 (a) indica la presencia de estados completamente ergódicos en todo el espectro, mientras que en la Fig. 5.3 (b) $\tilde{\sigma}_q^{\text{Spin}}$ decae claramente a medida que q aumenta. Esto sucede en el caso del modelo de espines en la región ergódica con $h = 0,5$ (círculos), donde los estados no ergódicos se concentran en los bordes del espectro, y más abruptamente en el caso con $h = 2$ (cuadrados), donde es probable que los estados no ergódicos se encuentren también lejos de

los bordes del espectro.

La abrupta caída de $\tilde{\sigma}_q^{Spin}$ con respecto a q para $h = 2$ se hace evidente en la Fig. 5.4, donde se muestra $\rho_q(E)$ para diferentes valores de q . Cuando $q \leq 1$ [Fig. 5.4 (a)-(b)], la forma del LDoS está fragmentada, mientras que para $q > 1$ [Fig. 5.4 (c)-(d)], esta estructura está casi borrada y $\rho_q(E)$ indica un alto grado de localización.

Para sistemas de tamaño finito, varios estudios numéricos respaldaron que los eigenestados del mo-

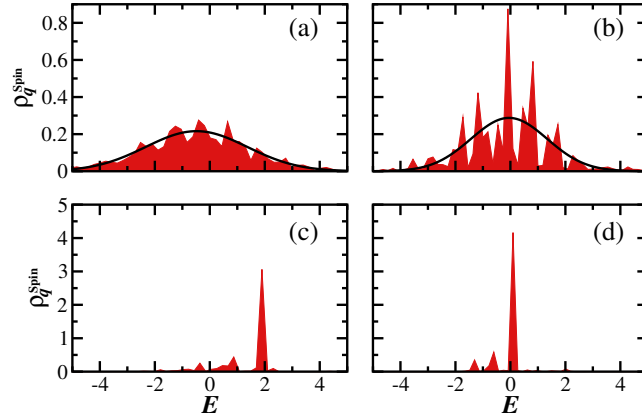


Figura 5.4: Densidad local de estados generalizada para el modelo de Heisenberg con $h = 2.0$ para (a) $q = 0.5$, (b) $q = 1.0$, (c) $q = 2.0$ y (d) $q = 3.0$. Las áreas sombreadas son resultados numéricos y las curvas sólidas representan la expresión gaussiana, Ec. (5.6). Se considera una única realización y un estado inicial con energía $E_0 \sim 0$. El tamaño del sistema es $L = 16$ con $D = 12870$.

delo de espín con desorden deberían volverse multifractales en su transición a la fase localizada de muchas partículas [20, 37, 156, 178–180], aunque esto no se ha confirmado en el límite termodinámico [181]. Los patrones observados en la Fig. 5.4 (a)-(b) también sugieren multifractalidad.

En la siguiente sección exploramos el comportamiento de σ_q para diferentes modelos de matrices aleatorias y sistemas físicos.

5.2. Análisis de σ_q como un indicador de la transición deslocalización-localización de sistemas cuánticos de muchos cuerpos

La Fig. 5.3 muestra la dependencia de σ_q respecto a q para los regímenes extendido y localizado para el modelo de Heisenberg con desorden. Estos resultados muestran que, para el modelo de Heisenberg con desorden, incluso dentro de la región extendida, σ_q depende de q lo cual contrasta

con los resultados de matrices completamente aleatorias de GOE. Por tanto decidimos explorar el comportamiento de σ_q ya que esta cantidad exhibe diferentes comportamientos dependiendo del régimen en el que se encuentre el sistema y puede proveer de información adicional sobre la transición del mismo.

Comenzamos nuestro estudio analizando la dependencia de σ_q con respecto a q para tres modelos del Cap. 3. El primero de ellos corresponde a matrices completamente aleatorias de bandas o PBRM de la Ec. (3.2) de dimensión D , fijamos el ancho de banda $b = 1$ y α es el parámetro de control; El segundo modelo corresponde a matrices aleatorias de RPE de dimensión D y el parámetro de control es ζ . El modelo físico a estudiar es el modelo de Aubry-André considerando interacciones y sin interacciones, en ambos casos, fijamos la constante de acoplamiento $J = 1$ y h es el parámetro de control. Se estudia el modelo de Aubry-André sin interacciones en el subespacio de una sola excitación de dimensión $D = L$ y para el caso interactuante se estudia sobre el subespacio donde $\hat{S}_{\text{Tot}}^z = 0$ de dimensión $D = L!/((L/2)!)^2$, los estados iniciales son estados de $\hat{H}_0$ como se indica en Sec. 3.3.

5.3. Resultados

5.3.1. Modelos de matrices aleatorias

La Fig. 5.5 muestra las curvas de $\langle \sigma_q \rangle$ versus q para matrices de PBRM en (a) y para matrices de RPM en (b) donde $\langle \dots \rangle$ denotan promedio sobre realizaciones y estados iniciales. Cada curva en cada panel corresponde a diferentes valores de α para el PRBM y de ζ para el RPM. En ambos paneles se muestra una curva segmentada verde que corresponde al valor $\sigma_{GOE} = \sqrt{D/2}$ el cual no depende del valor de q (Fig. 5.3). En el caso de PBRM obtenemos matrices de GOE cuando $\alpha \rightarrow 0$ se obtiene el caso GOE y para matrices de RPE cuando $\zeta \rightarrow 0$ también se obtienen matrices de GOE.

Para el caso PBRM (Fig. 5.5 (a)) las curvas de $\langle \sigma_q \rangle$ versus q para α pequeños que están representados por las curvas de tonos rojos se mantienen constantes y paralelas para q pequeños, no obstante, a medida que q aumenta más allá del caso estándar $q = 2$ se observa una ligera curvatura que se acentúa a medida que α aumenta, es decir, cuando el modelo se encuentra en la fase extendida las curvas $\langle \sigma_q \rangle$ exhiben una dependencia débil con respecto a q , no obstante, para valores grandes de q , $\langle \sigma_q \rangle$ magnifica ciertas correlaciones entre las componentes $|c_n^{(0)}|^q$ que se observan como una ligera curvatura sobre las curvas de $\langle \sigma_q \rangle$ versus q o en picos sobre la gLDoS (Fig. 5.3) cuando el sistema comienza a pasar a la fase localizada. Para valores grandes de α (curvas en tonos azules), las curvas de $\langle \sigma_q \rangle$ se alejan del valor σ_{GOE} y las curvas se aproximan entre ellas, esto es debido a

que las proyecciones del estado inicial sobre los eigenestados están más localizados, es decir, menos componentes $|c_n^0|^q$ contribuyen a la distribución de energía y las componentes pequeñas desaparecen para grandes valores de q , este efecto se magnifica para valores grandes de q exhibiendo una curvatura más evidente.

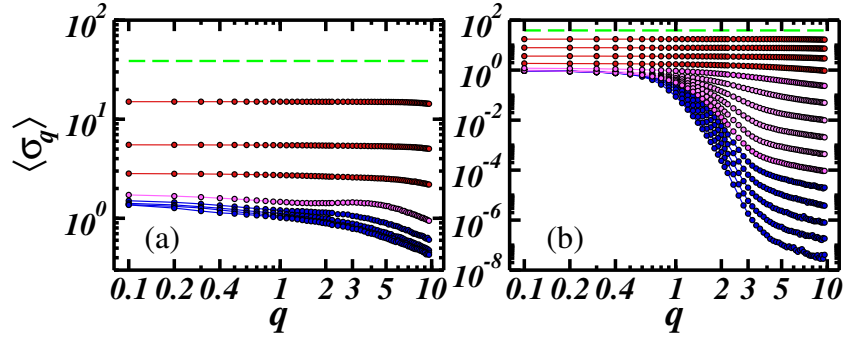


Figura 5.5: Curvas de $\langle \sigma_q \rangle$ versus q para diferentes valores del parámetro de control para el modelo PRBM (a) y el modelo RPE (b) para matrices de dimensión $D = 12000$ en ambos casos. Para ambos modelos los incrementos en los parámetros de control α (PBRM) y ζ (RPE) al igual que q son crecimientos logarítmicos. Para ambos modelos las curvas de $\langle \sigma_q \rangle$ versus q comienzan en $\alpha, \zeta = 0.1$. Las curvas en tonos rojos corresponden a $\alpha, \zeta < 1$ y las curvas en tonos azules corresponden a $1 < \alpha, \zeta$. Las líneas discontinuas verdes indica el valor teórico para GOE $\sigma_{\text{GOE}} = \sqrt{D/2}$. Los promedios se calculan sobre 10^4 muestras para cada punto. Los resultados se muestran en escala logarítmica.

Los resultados del RPE se encuentran en el panel (b) de la Fig. 5.5. Las curvas de $\langle \sigma_q \rangle$ versus q para pequeños valores de ζ (curvas de tonos rojos) se mantienen constantes, paralelas y muy cerca del valor σ_{GOE} incluso para valores de grandes de q , cuando ζ aumenta, las curvas de $\langle \sigma_q \rangle$ comienzan a exhibir una evidente curvatura que se magnifica al crecer ζ (curvas en tonos rosas). Para valores grandes de ζ (curvas en tonos azules) las curvas de $\langle \sigma_q \rangle$ se aproximan entre ellas y muestran amplias curvaturas. De forma similar al caso PBRM, $\langle \sigma_q \rangle$ muestran la transición del modelo a una fase extendida caracterizada por curvas de $\langle \sigma_q \rangle$ con una leve dependencia con q y que muestran una curvatura cuando el modelo entra a la fase intermedia, ya que en la fase localizada, se puede observar como las componentes $|c_n^{(0)}|^q$ son tan pequeñas que no contribuyen en nada a la distribución de energía pues se observa $\langle \sigma_q \rangle \sim \mathcal{O}(10^{-8})$ para $2 \leq q$ en la fase localizada (curvas en tonos azules).

5.3.2. Sistemas físicos

Los resultados para el modelo de Aubry-André (AAM) sin y con interacciones se muestran en la Fig. 5.6. El caso no interactuante se estudia en el subespacio de una sola excitación con dimensión $D = L$ y los resultados de las curvas de $\langle \sigma_q \rangle$ versus q se muestran en la Fig. 5.6 (a) donde la línea segmentada verde corresponde al resultado analítico con $h = 0$ para cualquier valor de q .

Los resultado analíticos con $h = 0$ se pueden obtener estudiando la estructura de la matriz hamiltoniana en ausencia de desorden de los modelos de espines sin interacciones [161]. La matriz tiene la misma estructura que una matriz de Toeplitz con todos sus elementos iguales a cero a excepción de las dos diagonales adyacentes a la diagonal principal cuyos elementos son iguales a $1/2$. Es posible obtener los eigenestados y energías analíticamente, donde los eigenvalores de energía vienen dados por

$$E_n = \cos\left(\frac{n\pi}{L+1}\right), n = 1, 2, \dots, L, \quad (5.7)$$

mientras que los eigenestados son

$$|\psi_n\rangle = \sum_{m=1}^L \left(\frac{2}{L+1}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{nm\pi}{L+1}\right) |m\rangle. \quad (5.8)$$

En la Ec. (5.8), n etiqueta el sitio n -ésimo de la cadena. Con los eigenestados y sus energías, el valor de σ_q se obtiene directamente. Partiendo de la ecuación (5.3) y considerando que el modelo de Aubry-André no interactuante tiene $E_q^{(0)} = 0$, la varianza generalizada se reduce a

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{\mathcal{N}_q} \sum_{n=1}^L |c_n^m|^q E_n^2. \quad (5.9)$$

Donde, usando la Ec. (5.8), se obtiene $c_m^n = c_n^{m*} = \langle m|\psi_n\rangle = [2/(L+1)]^{1/2} \sin[nm\pi/(L+1)]$. Se puede demostrar explícitamente que, para $n \geq 2$, la Ec. (5.9) converge a $1/2$, independientemente de q . Por lo tanto, se obtiene el valor límite para la desviación estándar generalizada cuando $h = 0$, $\sigma_q = 1/\sqrt{2}$, que se muestra en la figura 5.6 (a) mediante la curva segmentada verde. Para el caso especial $n = 1$, la Ec. (5.9) conduce trivialmente a $\sigma_q = 1/(2+q)^{1/2}$. En la Fig. 5.6 panel (a) del caso no interactuante, se observa como las curvas $\langle\sigma_q\rangle$ versus q , para h pequeñas (curvas en tonos rojos), comienzan muy próximas entre si y cercanas al valor teórico $\sigma_q^{h=0}$. A medida que h aumenta (curvas en tonos azules), las curvas se separan una de otra y se curvan hasta converger al valor de $q = 2$, después de este valor de q todas las curvas decaen, lentamente para pequeños valores de h y rápidamente para valores grandes de h .

El comportamiento de las curvas casi planas de $\langle\sigma_q\rangle$ se puede explicar para la fase extendida. Para h muy pequeñas, podemos separar la información de las componentes $|c_n^{(0)}|^q$ de la información del espectro de energía como:

$$\begin{aligned} \rho_q(E) &= \frac{1}{\mathcal{N}_q} \sum_{n=1}^D |c_n^0|^q \delta(E - E_n) \\ &= \frac{\overline{|c_n^0|^q}}{\mathcal{N}_q} \sum_{n=1}^D \delta(E - E_n), \end{aligned} \quad (5.10)$$

obteniendo una constante que depende de q por la densidad de estados DoS. La varianza de la DoS solo depende del tamaño del sistema, al mantenerlo fijo en ese caso para $L = 3000$ la varianza solo

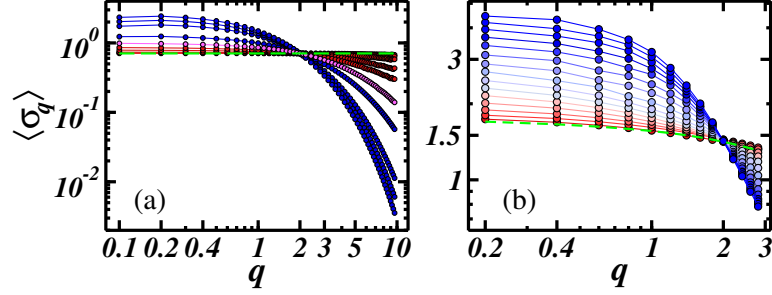


Figura 5.6: Promedio $\langle \sigma_q \rangle$ versus q para diferentes valores del parámetro de control h para el modelo AAM sin interacciones de dimensión $D = L = 3000$ (a) y el modelo AAM con interacciones de tamaño $L = 16$ con dimensión $D = 12870$ (b). Para ambos modelos los incrementos en los parámetros de control h y al igual que q son crecimientos logarítmicos. Para ambos modelos las curvas de $\langle \sigma_q \rangle$ versus q comienzan en $h = 0.1$. Las curvas en tonos rojos corresponden a $h < 1$ y las curvas en tonos azules corresponden a $1 < h$. Las líneas discontinuas verdes indica el valor teórico para el AAM sin interacciones $\sigma_q^{h=0} = 1/\sqrt{2}$ en (a) y el resultado numérico de σ_q con $h = 0$ para el AAM con interacciones en (b). Los promedios se calculan sobre 10^4 muestras para cada punto. Los resultados se muestran en escala logarítmica.

depende del valor de q , por lo tanto, la diferencia entre los valores de $\langle \sigma_q \rangle$ se debe al valor de $|\overline{c_n^{(0)}}|^q$ solo en la fase extendida (curvas en tonos rojos).

Para ambos casos del modelo de Aubry-André, la convergencia de todas las curvas de $\langle \sigma_q \rangle$ en el valor de $q = 2$ se debe a que $\langle \sigma_q \rangle$ es independiente de la magnitud del parámetro de control h para $q = 2$ que corresponde al caso estándar. Para probarlo, podemos reescribir la Ec. (4.4) como

$$\sigma^2 = \sum_{n \neq (0)} |\langle \Psi_n | \hat{H} | \Psi(0) \rangle|^2, \quad (5.11)$$

con $\hat{H}_0 |\Psi_n\rangle = \epsilon_n |\Psi_n\rangle$, $|n\rangle$ estado propio de $\hat{H}_0$, por tanto $\sigma = \sigma_{q=2}$ se construye sin considerar la parte diagonal del hamiltoniano total $\hat{H}$, que es donde se encuentra la información de h , por tanto, para ambos casos del modelo del Aubry-André, $\langle \sigma_{q=2} \rangle$ no depende de h . Por ultimo, se puede observar como la curvatura de $\langle \sigma_q \rangle$ para valores de grandes de h es más notoria a medida que q aumenta.

Los resultados para el Aubry-André con interacciones se muestran en la Fig. 5.6 panel (b) y son similares al caso sin interacciones. Nuevamente, las curvas de $\langle \sigma_q \rangle$ versus q para h pequeñas (curvas en tonos rojos) se mantienen cerca de la curva numérica $h = 0$ y se mantienen paralelas entre ellas. A medida que h aumenta (las curvas en tonos azules) $\langle \sigma_q \rangle$ crecen y se curvan hasta converger en $q = 2$. Después de $q = 2$ las curvas decrecen rápidamente a medida que h aumenta. El comportamiento de $\langle \sigma_q \rangle$ para el modelo de Aubry-André con interacciones se explica de forma similar al caso no interactuante. En la región extendida, para puntos $q < 2$, las componentes el valor de $\langle \sigma_q \rangle$ dependen de $|\overline{c_n^{(0)}}|^q$ y de forma similar para $2 < q$. A medida que el sistema transita, para

$q < 2$, muchas de las componentes $|c_n^{(0)}|^q$ contribuyen en la distribución de energía como se observa en la Fig. 5.4, para $2 < q$, solo las componentes más grandes $|c_n^{(0)}|^q$ participan en la construcción de gLDoS. Por tanto, la cantidad $\langle \sigma_q \rangle$ muestra cualitativamente la transición de una fase extendidas a una localizada de sistemas cuánticos de muchos cuerpos.

En ambos casos del modelo Aubry-André, la curvatura de $\langle \sigma_q \rangle$ se comporta diferente con respecto a los resultados de los modelos de matrices aleatorias. Motivados por esto, en la siguiente sección estudiaremos la información que puede proporcionarnos la curvatura de $\langle \sigma_q \rangle$ sobre la transición de los modelos de matrices aleatorias y sistemas físicos.

5.3.3. Curvatura de $\langle \sigma_q \rangle$

La curvatura de una curva bidimensional representada por una función $f(q)$ se define mediante

$$\kappa = \left| \frac{d^2 f}{dq^2} \right| \left[1 + \left(\frac{df}{dq} \right)^2 \right]^{-3/2}. \quad (5.12)$$

Mide la desviación de una curva respecto a una línea recta en un punto específico. La teoría predice $\kappa = 0$ para una línea recta, mientras que $\kappa = 1$ para una circunferencia. En los paneles de la Fig. 5.7 mostramos el promedio de κ , $\bar{\kappa}$, en todos los puntos versus α, ζ o h , según el modelo. En la práctica, para calcular $\bar{\kappa}$, ajustamos cada curva de $\langle \sigma_q \rangle$ de la Fig. 5.6 con un polinomio de orden 4, $f(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + a_3 q^3 + a_4 q^4$, aplicamos la Ec. (5.12) para obtener κ en cada punto asociado a un valor de q y, finalmente, el promedio. En todos los casos, el promedio $\bar{\kappa}$ aumenta a medida que el parámetro de control respectivo a cada modelo aumenta desde cero hasta el punto crítico predicho.

La Fig. 5.7 muestra el promedio de las curvaturas $\bar{\kappa}$ para los cuatro modelos versus el parámetro de control correspondiente. Los resultados para el PBRM en (a) donde las curvas para $q < 2$ (azul) y $2 \leq q$ (verde) muestran un punto de inflexión en $\alpha_c = 1$, después de este punto la curva azul decae y muestra algunas oscilaciones, no obstante la curva verde decae y parece saturarse, más aún, la curva del promedio sobre todo q (rojo) también muestra un punto de inflexión en $\alpha_c = 1$ y sigue la misma tendencia de la curva verde ($2 \leq q$). Para el RPE en (b) el comportamiento es aún más interesante. Se observa como la curva azul ($q < 2$) cruza el primer punto de transición en $\zeta_{c_1} = 1$, luego crece rápidamente y después de $\zeta_{c_2} = 2$, el segundo punto crítico, esta decae. La curva verde ($2 \leq q$) sigue un comportamiento similar pero la curva roja (promedio sobre todo q) muestra ahora dos puntos de inflexión justo en los puntos críticos para el modelo RPE.

En el caso de los modelos físicos, panel (c) para el AAM sin interacciones, las curvas para $q < 2$ (azul) crece, pasando por el punto crítico en $h = 2$ y no exhibe ningún punto de inflexión, la curva para $2 \leq q$ (verde) crece y en $h = 2$ aparece un punto de inflexión, la curva del promedio sobre todo q (rojo) tiene el mismo punto de inflexión en $h = 2$. Por último, para el AAM con interacciones, la curva azul crece y en $h = 1.7$ se muestra un punto de inflexión, contrario a la curva

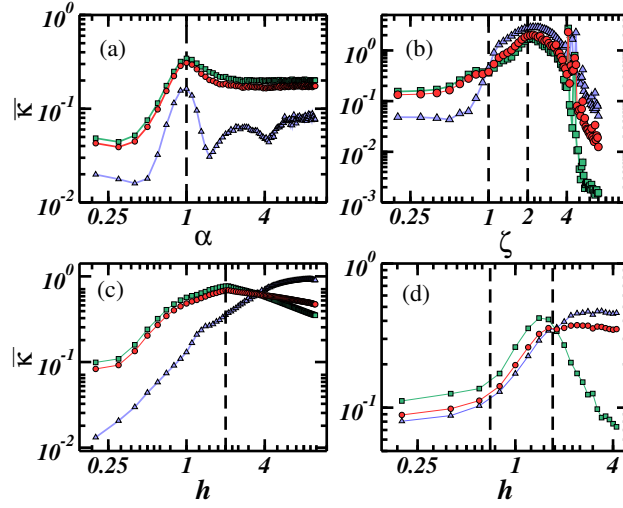


Figura 5.7: Curvatura promedio $\bar{\kappa}$ versus el parámetro de control para matrices aleatorias de PBRM (a), matrices aleatorias de RPE (b), el modelo de Aubry-André sin interacciones (c) y el modelo de Aubry-André con interacciones (d). Los triángulos azules representan los promedios de $\bar{\kappa}$ sobre puntos $q < 2$. Los cuadrados verdes representan los promedios de $\bar{\kappa}$ sobre puntos $2 \leq q$. Las líneas continuas sirven de guía. Los círculos rojos representan el promedio de $\bar{\kappa}$ sobre todos los puntos de q . Las líneas discontinuas verticales marcan la ubicación de las estimaciones de los puntos críticos para cada modelo.

verde que no está claro si muestra algún comportamiento particular sobre los puntos críticos pero el comportamiento es similar al de la curva azul para $h < 1.7$. La curva roja muestra dos puntos de inflexión en los puntos donde se reportan los puntos críticos de transición en $h = 0.7$ y $h = 1.7$.

Nuestros análisis para el promedio de la curvatura $\bar{\kappa}$ sobre los dos modelos de matrices aleatorias y el caso del modelo físico interactuante y no interactuante muestran puntos de inflexión localizados en los puntos críticos de transición de cada modelo. Los análisis sobre la curvatura de $\langle \sigma_q \rangle$ complementan nuestros estudios sobre la gLDoS donde se propone a $\langle \sigma_q \rangle$ como una cantidad que puede ser usada como un indicador de la transición del sistema. Aún más, esta puede ser útil en los estudios para determinar puntos de transición de fase mediante el análisis de la curvatura de $\langle \sigma_q \rangle$.

5.4. Evolución de la probabilidad generalizada de supervivencia bajo el modelo GOE: Expresión analítica

De acuerdo a la Ec. (5.1), la probabilidad de supervivencia promediada sobre un ensamble de estados iniciales y realizaciones aleatorias se escribe como

$$\langle SP_q(t) \rangle = \left\langle \frac{1}{\mathcal{N}_q^2} \sum_{n \neq m} |c_n^{(0)}|^q |c_m^{(0)}|^q e^{-i(E_n - E_m)t} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{\mathcal{N}_q^2} \sum_n |c_n^{(0)}|^{2q} \right\rangle, \quad (5.13)$$

donde $\langle \dots \rangle$ denota el promedio. El segundo término del lado derecho corresponde al promedio de tiempo infinito, $\overline{SP}_q$, de la probabilidad de supervivencia generalizada. Es posible obtener una expresión para el valor de saturación $\overline{SP}_q$ para matrices aleatorias de GOE ya que $c_n^{(0)}$ son números aleatorios de una distribución gaussiana, estas componentes siguen una distribución de Porter-Thomas [117, 182] igual a

$$P(|c_n^{(0)}|^2) = \sqrt{\frac{D}{2\pi|c_n^{(0)}|^2}} e^{-\frac{D}{2}|c_n^{(0)}|^2}, \quad (5.14)$$

con $x = |c_n^{(0)}|^2$. Calculando los q momentos con $x = |c_n^{(0)}|^2$ obtenemos

$$\mathbb{E}[x^q] = \int_0^\infty x^q \sqrt{\frac{D}{2\pi x}} e^{-\frac{D}{2}x} dx, \quad (5.15)$$

usando un cambio de variable igual a $u = Dx/2$ obtenemos

$$\mathbb{E}[x^q] = \sqrt{\frac{D}{2\pi}} \frac{2}{D} \left(\frac{2}{D}\right)^{q-1/2} \int_0^\infty u^{q-1/2} e^{-u} du \quad (5.16)$$

$$= \left(\frac{2}{D}\right)^q \Gamma\left(q + \frac{1}{2}\right), \quad (5.17)$$

donde Γ es la función Gamma. Análogamente, obtenemos $\mathbb{E}[x^{q/2}] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{D}\right)^{q/2} \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)$, considerando que $\sum_n |c_n^{(0)}|^{2q} = \sum_n \mathbb{E}[x^q] = D\mathbb{E}[x^q]$ obtenemos

$$\overline{SP}_q = \frac{1}{\mathcal{N}_q^2} \sum_n |c_n^{(0)}|^{2q} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(q + \frac{1}{2}\right)}{D \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}. \quad (5.18)$$

Dado que para las matrices aleatorias los eigenvalores y los eigenestados son estadísticamente independientes, podemos separa la información de estos como

$$\langle SP_q(t) \rangle = \left\langle \frac{1}{\mathcal{N}_q^2} \sum_{n \neq m} |c_n^{(0)}|^q |c_m^{(0)}|^q \right\rangle \left\langle e^{-i(E_n - E_m)t} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{\mathcal{N}_q^2} \sum_n |c_n^{(0)}|^{2q} \right\rangle, \quad (5.19)$$

La probabilidad se conserva, $\langle SP_q(t=0) \rangle = 1$, entonces de la Ec. (5.19),

$$1 = \left\langle \frac{1}{\mathcal{N}_q^2} \sum_{n \neq m} |c_n^{(0)}|^q |c_m^{(0)}|^q \right\rangle + \overline{SP}_q.$$

Utilizando (ver detalles en [183] y el apéndice de [87])

$$\left\langle e^{-i(E_n - E_m)t} \right\rangle = \frac{1}{D-1} \left[D \frac{\mathcal{J}_1^2(2\sigma t)}{(\sigma t)^2} - b_2 \left(\frac{\sigma t}{2D} \right) \right], \quad (5.20)$$

y

$$\left\langle \frac{1}{\mathcal{N}_q^2} \sum_{n \neq m} |c_n^{(0)}|^q |c_m^{(0)}|^q \right\rangle = 1 - \overline{SP}_q, \quad (5.21)$$

obtenemos la expresión analítica

$$\langle SP_q(t) \rangle = \frac{1 - \langle \overline{SP}_q \rangle}{D-1} \left[D \frac{\mathcal{J}_1^2(2\sigma t)}{(\sigma t)^2} - b_2 \left(\frac{\sigma t}{2D} \right) \right] + \langle \overline{SP}_q \rangle. \quad (5.22)$$

Nótese que usamos $\sigma_q = \sigma$ ya que σ_q es constante para matrices de GOE. El comportamiento a distintas escalas de tiempo de $\langle SP_q(t) \rangle$, tiene similitud con $\langle SP(t) \rangle$ ya que $\langle SP_2(t) \rangle = \langle SP_q(t) \rangle$. El comportamiento inicial corresponde a una función de Bessel de primer tipo, $\mathcal{J}_1$, ya que es la transformada de Fourier de la distribución semicircular de la gLDoS y corresponde al primer término del lado derecho de la Ec. (5.22). La $\langle SP_q(t) \rangle$ muestra oscilaciones con los enésimos ceros que ocurren cuando el estado inicial encuentra dinámicamente un estado ortogonal en $t_n \sim (\pi n + \sqrt{2}/2)/2\sigma$ con $n = 1, 2, \dots$, la envolvente de las oscilaciones decaen como t^{-3} . El segundo término en el lado derecho de la Ec. (5.22), es la función de correlación de dos niveles $b_2(t)$ (Ec. (4.19)) que se manifiesta en $\langle SP_q(t) \rangle$ como una estructura de valores mínimos por debajo de la saturación hasta el valor $\langle \overline{SP}_q \rangle$.

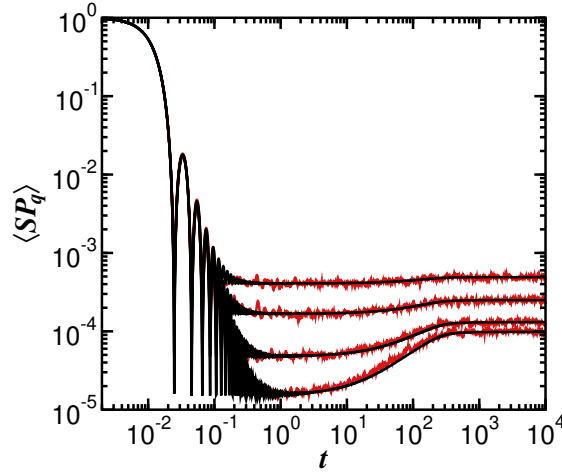


Figura 5.8: Evolución de la probabilidad de supervivencia generalizada para matrices de GOE para diferentes valores de q . Las curvas rojas son resultados numéricos y las negras corresponden a la expresión analítica en la Ec. (5.22). De abajo hacia arriba, $q = 0.5, 1.0, 2.0$ y 3.0 . El tamaño de las matrices es $D = 12000$. Los promedios son sobre 10^4 muestras.

En la Fig. 5.8, comparamos los resultados numéricos para $\langle SP_q(t) \rangle$ con la expresión analítica en la Ec. (5.22). La correspondencia es excelente. El hecho de que σ_q para el modelo GOE sea

independiente de q (ver Fig. 5.1 y Fig. 5.3) se hace evidente una vez más en la Fig. 5.8, donde las curvas para diferentes valores de q coinciden en tiempos cortos, capturando las oscilaciones de la función de Bessel hasta el valor mínimo de $\langle SP_q(t) \rangle$.

5.4.1. Tiempo del mínimo del hoyo de correlaciones

Para derivar la escala de tiempo, $t_{\text{Th}}^{\text{GOE}}$, donde $\langle SP_q(t) \rangle$ alcanza el mínimo del hoyo de correlaciones, necesitamos encontrar el punto donde se cruzan el primer y el segundo término de la Ec. (5.22). Siguiendo la referencia [87], obtenemos la expansión de tiempo largo del primer término en la Ec. (5.22) y expandimos $b_2(t)$ para tiempos cortos. Combinando ambos en la derivada de $\langle SP_q(t) \rangle$ obtenemos

$$t_{\text{Th}}^{\text{GOE}} = \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/4} \frac{\sqrt{D}}{\sigma} = \left(\frac{12}{\pi} \right)^{1/4}. \quad (5.23)$$

Para obtener el valor mínimo de $\langle SP_q(t) \rangle$ en el hoyo de correlaciones, evaluamos la Ec. (5.22) en $t_{\text{Th}}^{\text{GOE}}$, resultando en

$$\begin{aligned} \langle SP_q(t) \rangle|_{t=t_{\text{Th}}^{\text{GOE}}} &\approx \frac{1 - \langle \overline{SP}_q \rangle}{D - 1} \left[\frac{D}{\pi(\sigma t_{\text{Th}}^{\text{GOE}})^3} - \left(1 - \frac{\sigma}{D} t_{\text{Th}}^{\text{GOE}} \right) \right] + \langle \overline{SP}_q \rangle \\ &\approx \frac{1 - \langle \overline{SP}_q \rangle}{D - 1} (-1) + \langle \overline{SP}_q \rangle. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Finalmente, usando la Ec. (5.18) para $\langle \overline{SP}_q \rangle$ obtenemos

$$\langle SP_q(t) \rangle|_{t=t_{\text{Th}}^{\text{GOE}}} \approx \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(q + \frac{1}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)^2}{D \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)^2}. \quad (5.25)$$

Para el caso particular de $q = 2$, la Ec. (5.25) conduce al valor $2/D$ obtenido previamente en la Ref. [87].

5.5. Evolución de la probabilidad de supervivencia generalizada bajo el modelo de espín

En la Fig. 5.9, comparamos la evolución de $\langle SP_q(t) \rangle$ bajo el modelo de espín para diferentes valores de q . En ambos paneles, Fig. 5.9 (a) para $h = 0.5$ y Fig. 5.9 (b) para $h = 2$, el decaimiento inicial está determinado por la envolvente del gLDoS, como se ve en la Ec. (5.1). Dado que según la Fig. 5.2 y la Fig. 5.4, la forma de la distribución es gaussiana, se ve en la Fig. 5.9 que

$$\langle SP_q(t) \rangle = \exp(-\sigma_q^2 t^2) \quad (5.26)$$

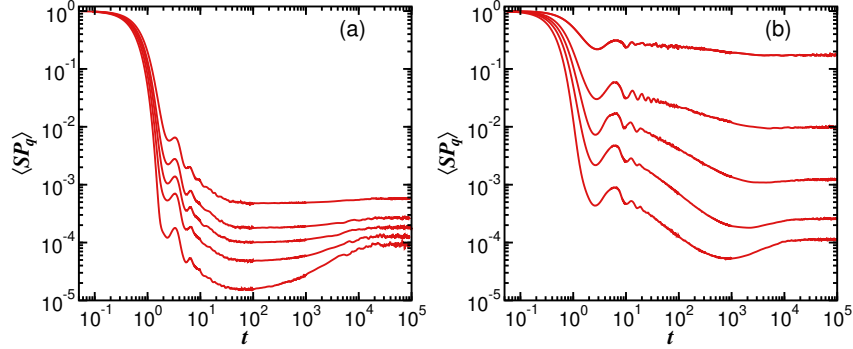


Figura 5.9: Probabilidad de supervivencia generalizada para el modelo de Heisenberg (a) $h=0.5$ y (b) $h=2$ para diferentes valores de q . De abajo a arriba, $q=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ y 3.0 . El tamaño del sistema es $L=16$. Se realizaron promedios sobre 3×10^4 muestras.

para $t \lesssim \sigma_q$. La dependencia de σ_q respecto de q se aprecia en la Fig. 5.9 (a) y es evidente en la Fig. 5.9 (b).

Más allá del comportamiento gaussiano, surge un decaimiento como ley de potencias

$$\langle SP_q(t) \rangle \propto t^{-\gamma_q}. \quad (5.27)$$

Dado que el gLDoS para el modelo caótico en la Fig. 5.2 presenta colas gaussianas para cualquier q , esperamos el mismo exponente de la ley de potencia para todas las curvas en la Fig. 5.9 (a), que es de hecho lo que sugieren las líneas casi paralelas durante el comportamiento algebraico. En cambio, en la Fig. 5.9 (b), resulta claro que γ_q disminuye a medida que q aumenta y el mínimo del hoyo de correlaciones tarda más en alcanzarse. En este caso, el comportamiento de la ley de potencia refleja las correlaciones entre los componentes del estado inicial, que se mejoran para valores mayores de q , este efecto es interesante, su análisis profundo y mejor entendimiento se deja en la siguiente sección.

5.6. Evidencias del carácter multifractal en la dinámica del sistema

La Fig. 5.9 muestra como el exponente generalizado del decaimiento como ley de potencias de $\langle SP_q(t) \rangle$, γ_q , depende del valor de q revelando como las correlaciones espectrales juegan un papel importante en el desarrollo de la dinámica fuera de equilibrio. Deseamos enfocar nuestra atención en el decaimiento como ley de potencias del caso estándar $q=2$ de la probabilidad de supervivencia. Para ello, podemos suavizar el promedio $\langle SP(t) \rangle$ mediante la función de correlación que se define

como:

$$C(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \langle SP(\tau) \rangle d\tau \quad (5.28)$$

Se sabe que para el modelo de Harper no pateado y pateado para estados localizados, críticos y extendidos, así como en las cadenas de Fibonacci [71], $C(t)$ exhibe un decaimiento de ley de potencia como $C(t) \sim t^{-\delta}$ donde δ coincide con la dimensión de correlación espectral $\tilde{D}_2$ de la Ec.(2.13), lo que indica que las propiedades multifractales de los eigenestados desempeñan un papel crucial en la dinámica fuera del equilibrio de estos sistemas unidimensionales no interactuantes.

Si calculamos la función de correlación de la expresión analítica para $\langle SP_{\text{GOE}}(t) \rangle$ para matrices de GOE obtenemos:

$$C_{\text{GOE}}(t) = \frac{1 - \overline{SP}}{D - 1} \left(\frac{1}{t} DC_1(2\sigma t) - C_2 \left(\frac{\sigma t}{2D} \right) \right) + \overline{SP} \quad (5.29)$$

donde

$$\frac{C_1(2\sigma t)}{t} = \frac{8}{3} \mathcal{J}_0^2(2\sigma t) - \frac{4}{3\sigma t} \mathcal{J}_0(2\sigma t) \mathcal{J}_1(2\sigma t) + (-1 + 8\sigma^2 t^2) \frac{1}{3\sigma^2 t^2} \mathcal{J}_1^2(2\sigma t) \quad (5.30)$$

y

$$C_2(x) = B_1(x)\Theta(x - 1) + B_2(x)\Theta(1 - x) \quad (5.31)$$

donde

$$B_1(x) = \frac{5}{4}(1 - x) + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{8x} \right) \ln(1 + 2x), \quad (5.32)$$

$$B_2(x) = \frac{1}{2x}(1 - x) + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{8x} \right) \ln \left(\frac{1 + 2x}{2x - 1} \right), \quad (5.33)$$

y $x = \sigma t/2D$. Realizando un análisis similar como se muestra en el Cap. 4, se puede demostrar que la $C(t)$ de $\langle SP(t) \rangle$ muestra un decaimiento como ley de potencias igual a

$$C_{\text{GOE}}(t) \sim t^{-1}, \quad (5.34)$$

es decir, el exponente del decaimiento como ley de potencias de $C_{\text{GOE}}(t)$ coincide con el valor de la dimensión de correlación $D_2 = \tilde{D}_2 = 1$ (con D_2 la dimensión de correlación de la Ec. 2.11) para el caso GOE. Además, la Fig. 5.10 muestra los resultados numéricos y analíticos de $\langle SP(t) \rangle$ y $C(t)$ donde la correspondencia entre las curvas son excelentes. Se puede observar como $C(t)$ borra por completo la aparición del hoyo de correlaciones, el cual es una manifestación directa de las correlaciones espectrales, no obstante, en la saturación, $C(t)$ coincide con el valor del IPR del estado inicial como sucede con $\langle SP(t) \rangle$. Debido a que el decaimiento como ley de potencias de $SP_{\text{GOE}}(t) \sim t^{-3}$ (Cap. 4) y $C_{\text{GOE}}(t) \sim t^{-1}$ podemos decir que $C(t)$ promedia los efectos de la correlaciones espectrales y su exponente del decaimiento como ley de potencias δ es igual a la dimensión de correlación $D_2 = \tilde{D}_2 = 1$ para matrices de GOE. Estos resultados nos motivan a estudiar como el carácter multifractal de los eigenestados del sistema se involucra en la evolución

temporal de sistemas cuánticos de muchas partículas interactuantes que muestran una transición de una fase extendida a una localizada. Para ello estudiaremos la dinámica por medio de $\langle SP(t) \rangle$ y su función de correlación $C(t)$ y el carácter multifractal será cubierto por medio del cálculo de la dimensión de correlación espectral $\tilde{D}_2$ mediante el método box-counting de la Ec.(2.13).

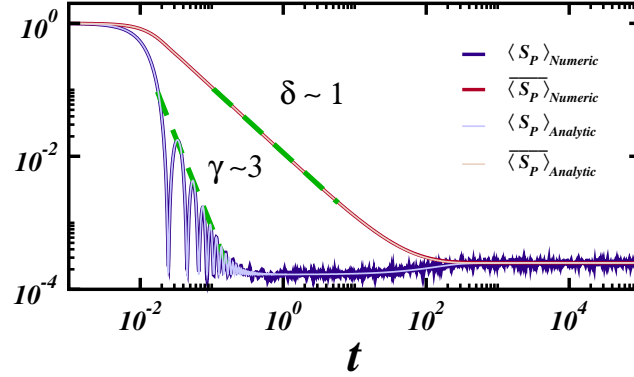


Figura 5.10: Expresión analítica para la probabilidad de supervivencia $\langle SP_{\text{GOE}}(t) \rangle$ de Ec. (4.21) (azul claro), resultados numéricos (azul oscuro), expresión analítica para la función de correlación $C_{\text{GOE}}(t)$ de Ec. (5.29) (rojo oscuro) y resultados numéricos (rojo claro) para matrices de GOE de dimensión $D = 12\,000$.

5.7. Resultados

5.7.1. Modelos de matrices aleatorias

Comenzamos nuestros análisis con modelos de matrices aleatorias de PBRM (3.2). El PBRM es relevante en estudios de multifractalidad al fijar el sistema en su punto crítico de transición $\alpha_c = 1$ y variar únicamente b , podemos modificar la naturaleza de los estados [184–186], pasando de una multifractalidad débil ($1 \ll b$), que corresponde a estados extendidos, a una multifractalidad fuerte o localizada ($b \ll 1$) [184, 185]. El siguiente modelo es el RPE (Ec. (3.3)), al exhibir una fase intermedia caracterizada por estados multifractales lo que lo hace excelente para estudiar los efectos de la multifractalidad sobre la dinámica del sistema.

Los cuatro paneles de la izquierda de la Fig. 5.11 muestra $\langle SP(t) \rangle$ y $C(t)$ para matrices de PBRM con diferentes valores de b con $\alpha_c = 1$. La región de decaimiento de la ley de potencia en $\langle SP(t) \rangle$ es amplia y crece a medida que b aumenta lo que significa que los estados dejan de ser menos localizados a ser más extendidos, además, el decaimiento de $C(t)$ se muestra paralelo al decaimiento de $\langle SP(t) \rangle$.

Los cuatro paneles de la derecha en la Fig. 5.11 muestra $\langle SP(t) \rangle$ y $C(t)$ para matrices de RPE con

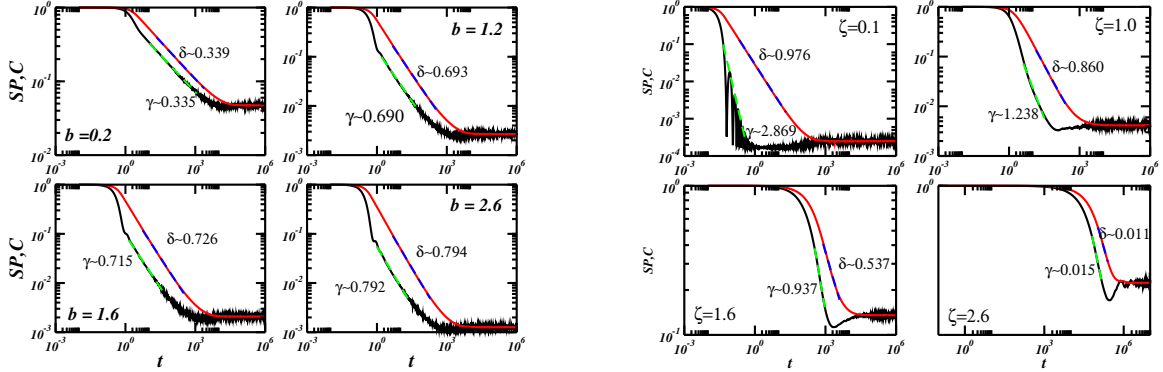


Figura 5.11: $\langle SP(t) \rangle$ (curvas color negro) y $C(t)$ (curvas rojas) para el matrices de PBRM (cuatro paneles a la izquierda) y matrices de RPE (cuatro paneles a la derecha) para diferentes valores del ancho de banda b y el parámetro de control ζ respectivamente. Las líneas discontinuas verdes representan ajustes en la región de decaimiento de la ley de potencia para $\langle SP(t) \rangle$ y las líneas discontinuas azules corresponden lo mismo para $C(t)$. La dimensión $D = 12000$ en ambos casos. Para obtener $\langle SP(t) \rangle$ se tomaron promedios sobre realizaciones y estados iniciales resultando en 10^4 datos estadísticos. Nos centramos en obtener los ajustes sobre la envolvente de las oscilaciones. Los ajustes en $C(t)$ se realizan en una ventana temporal similar a la región de decaimiento por ley de potencia de $\langle SP(t) \rangle$.

diferentes valores de ζ . En el régimen extendido, $\zeta \sim 0$, $\langle SP(t) \rangle$ exhibe las oscilaciones típicas del GOE y $C(t)$ decae como t^{-1} , pero al igual que el caso GOE, el hoyo de correlaciones desaparece, entonces $C(t)$ además de promediar las fluctuaciones en la dinámica, también promedia y elimina las contribuciones del espectro de energía del sistema. En la región intermedia ($1 < \zeta < 2$), $\langle SP(t) \rangle$ pierde las oscilaciones de la fase extendida, el hoyo de correlaciones prácticamente desaparece y la región de decaimiento por ley de potencia disminuye y comienza a fusionarse con la saturación.

El recuadro en la Fig. 5.12 muestra la relación $\beta(l)$ versus l de la Ec. (2.13) para matrices PBRM con diferentes anchos de banda b y $\alpha = \alpha_c = 1$. La pendiente de $\beta(l)$ es bastante clara; no hay oscilaciones y aumenta a medida que b aumenta. Para valores pequeños de b , se observa cómo $\beta(l)$ parte de un valor constante hasta que crece, es decir, el estado inicial es más localizado. Este comportamiento se hace más evidente para valores mayores de b . La Fig. 5.12 muestra la comparación entre los tres exponentes. Los resultados muestran una buena concordancia entre γ , δ y $\tilde{D}_2$; Estos exponentes crecen rápidamente y los resultados muestran la primera evidencia de que $\delta = \tilde{D}_2$ y $\delta = \gamma$ para cualquier valor de b para $\alpha_c = 1.0$, el punto crítico para el PBRM.

En el recuadro de la Fig. 5.13 se muestra la relación entre $\beta(l)$ y l para matrices de RPE. Las curvas se saturan para valores grandes de l y las curvas crecen lentamente a medida que ζ aumenta. La Fig. 5.13 muestra la comparación entre los tres exponentes. A diferencia del PBRM, para el caso de RPE, γ de $\langle SP(t) \rangle$ no coincide con ningún otro exponente hasta entrar en la fase localizada. El exponente γ decae rápidamente a $\zeta \sim 1$, y posteriormente disminuye más lentamente hasta coincidir

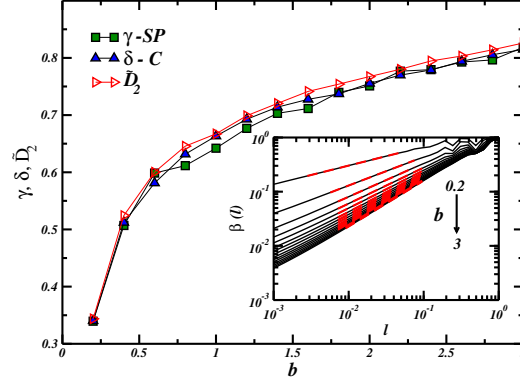


Figura 5.12: La figura principal muestra los exponentes γ , δ y $\tilde{D}_2$ para PBRM para diferentes valores de ancho de banda b con $\alpha = \alpha_c = 1$. Los exponentes γ y δ se obtuvieron del decaimiento como ley de potencias de promedios de $\langle SP(t) \rangle$ y $C(t)$ sobre estados iniciales y realizaciones resultando en 10^4 datos estadísticos. El tamaño del sistema es $D = 12000$. $\tilde{D}_2$ se obtuvo mediante ajuste de la ecuación 2.13. El recuadro corresponde a la función $\beta(l)$ versus l de la Ec. (2.13), consideramos promedios sobre estados iniciales y realizaciones resultando en 10^4 datos estadísticos, los resultados se muestran en escala logarítmica para diferentes valores de ancho de banda b , las líneas rojas discontinuas corresponden a ajustes sobre las curvas. Para los ajustes, nos concentramos en las regiones donde el comportamiento es más lineal.

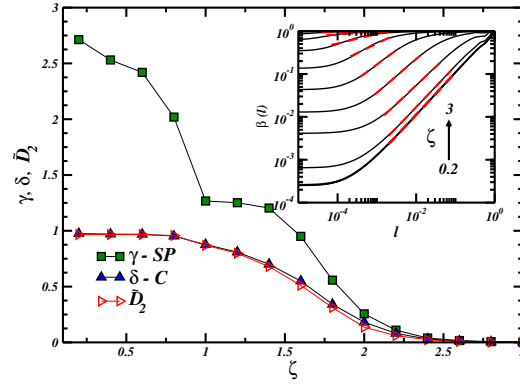


Figura 5.13: La figura principal muestra los exponentes γ , δ y $\tilde{D}_2$ para RPE con respecto a diferentes valores de ζ . Los exponentes γ y δ se obtuvieron del decaimiento como ley de potencias de promedios de $\langle SP(t) \rangle$ y $C(t)$ sobre estados iniciales y realizaciones resultando en 10^4 datos estadísticos. El tamaño del sistema es $D = 12000$. $\tilde{D}_2$ se obtuvo mediante ajuste de la Ec. (2.13). El recuadro muestra las curvas para $\beta(l)$ versus l de la Ec. (2.13), consideramos promedios sobre estados iniciales y realizaciones resultando en 10^4 datos estadísticos, los resultados se muestran en escala logarítmica para diferentes valores del parámetro de control ζ , las líneas rojas discontinuas corresponden a ajustes sobre las curvas. Para los ajustes, nos concentramos en las regiones donde el comportamiento es más lineal.

con δ y $\tilde{D}_2$. El exponente γ tiene un comportamiento interesante, ya que parece decrecer más lentamente a medida que el sistema entra en la fase intermedia. El exponente γ muestra claramente

cuando el sistema abandona la fase extendida en $\zeta_{c_1} = 1$, este decrece en la fase intermedia y se acerca a los demás exponentes δ de $C(t)$ y $\tilde{D}_2$ justo por $\zeta_{c_2} = 2$ el final de la fase intermedia. Los exponentes δ y $\tilde{D}_2$ muestran una excelente correspondencia para todos los valores de ζ . La excelente correspondencia entre δ y $\tilde{D}_2$ para ambos modelos de matrices aleatorias indica la manifestación del carácter multifractal en la evolución temporal del sistema indicando que en sistemas que transitan de una fase extendida a una localizada, la estructura multifractal de los eigenestados son relevantes. Por otra parte, los resultados para el modelo de GOE indican que $\gamma_{\text{GOE}} = 3$ y $\delta_{\text{GOE}} = 1$ y los resultados de las Fig. 5.12 y Fig. 5.13 indican que $\gamma \neq \delta$ en la región extendida donde aparece el hoyo de correlaciones y $\gamma \sim \delta$ en la región localizada donde la estructura del hoyo de correlaciones desaparece, por tanto, podemos decir que γ contiene tanto la información de las correlaciones espectrales como la estructura de los componentes de los eigenestados de tal forma que a medida que el los sistemas de matrices aleatorias salen de la fase extendida, el carácter multifractal de los eigenestados se vuelve cada vez más importante en la evolución temporal del sistema. Ahora, extendemos nuestros análisis a sistemas físicos de partículas de espín 1/2 con interacciones.

5.7.2. Sistemas físicos

Como sistemas físicos, estudiamos el modelo de Aubry-André interactuante donde se considera el potencial de Harper (Ec. (3.6)), trabajos previos identifican una fase intermedia entre $h = 0.7$ y $h = 1.7$ caracterizada por estados multifractales, lo que hace este modelo ideal para nuestro análisis previos. El segundo modelo es el modelo de Heisenberg con desorden (Ec. (3.4)), el posible estimado valor de punto crítico es $h_c \gtrsim 3.5$ [150–155], que incluye estimaciones obtenidas a partir de tamaños de sistemas finitos, no obstante el debate sobre la existencia de una fase MBL en el límite termodinámico lleva a pensar que una fase intermedia con estados multifractales en un efecto de tamaño finito y no una característica intrínseca de la transición. Por tanto una caracterización del nivel de multifractalidad en la dinámica del sistema es importante. Para ambos modelos fijamos $J = 1$ y condiciones de frontera abiertas. Trabajamos en el subespacio más grande para el cual $\hat{S}_{\text{Tot}}^z = 0$ de dimensión $D = L!/((L/2)!)^2$. El parámetro de control para ambos modelos es h .

Los cuatro paneles de la izquierda de la Fig. 5.14 muestra $\langle SP(t) \rangle$ y $C(t)$ para el modelo interactuante de Aubry-André con diferentes valores de h . Se puede observar un claro decaimiento de la ley de potencia en tiempos intermedios para ambas cantidades. Similar al caso de GOE, la desaparición del hoyo de correlaciones en $C(t)$ es notable dentro de la fase extendida donde se obtiene $\delta \sim 1$ y $\gamma \sim 1.6$. En la región intermedia ($0.7 < h < 1.7$), observamos cómo se reduce la región de decaimiento de la ley de potencia donde reaparecen oscilaciones en $SP(t)$ que se acentúan a medida que h se incrementa, $C(t)$ nota este efecto y se manifiesta como un pequeño bulto donde empieza el decaimiento como ley de potencias. Este comportamiento se puede ver como una competencia

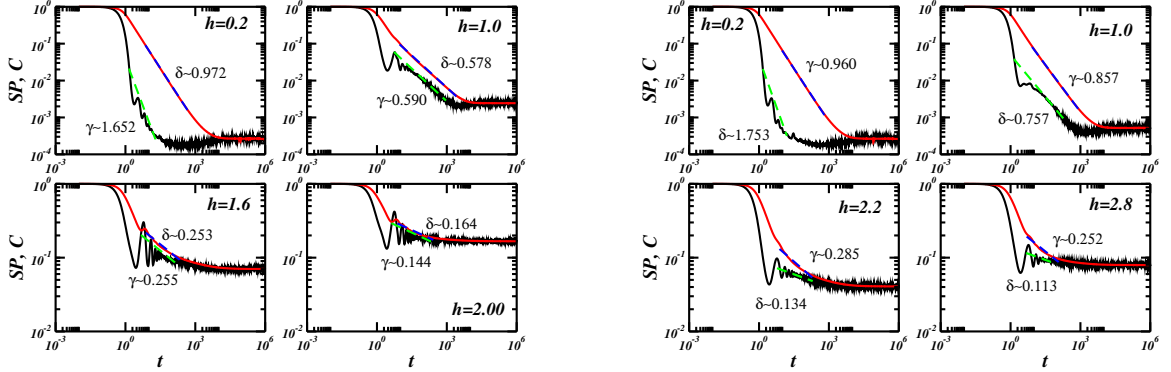


Figura 5.14: $\langle SP(t) \rangle$ (curvas negras) y $C(t)$ (curvas rojas) para el modelo de Aubry-André con interacciones (cuatro paneles a la izquierda) y el modelo de Heisenberg con desorden (cuatro paneles a la derecha) para diferentes valores de h . Las líneas discontinuas verdes representan ajustes en la región de decaimiento de la ley de potencia para $\langle SP(t) \rangle$ y las líneas discontinuas azules corresponden lo mismo para $C(t)$. El tamaño del sistema es $L = 16$ con dimensión $D = 12870$ en ambos modelos. Para obtener $\langle SP(t) \rangle$ se tomaron promedios sobre realizaciones y estados iniciales resultando en 10^4 datos estadísticos. Nos centramos en obtener los ajustes sobre la envolvente de las oscilaciones. Los ajustes en $C(t)$ se realizan en una ventana temporal similar a la región de decaimiento por ley de potencia de $\langle SP(t) \rangle$.

entre las correlaciones energéticas y las correlaciones de las componentes del estado inicial sobre los eigenestados a medida que el sistema transita. En la región intermedia δ y γ disminuyen y se mantiene menor que 1 y son más pequeñas cuando el sistema está en la fase localizada

Los cuatro paneles de la derecha en la Fig. 5.14 muestra $\langle SP(t) \rangle$ y $C(t)$ para el modelo de Heisenberg con desorden con diferentes valores de h con $h_c \sim 3.5$ como un estimado de punto crítico. Similar al modelo de Aubry-André con interacciones, en la región extendida ($h < 1$), el decaimiento es claro con $\delta \sim 1$ y $\gamma \sim 1.7$ donde el hoyo de correlaciones desaparece en $C(t)$. Después de $1 < h$ sobre la región de decaimiento de la ley de potencia, las oscilaciones se atenúan a medida que el sistema abandona la región extendida y aumentan a medida que el sistema entra en la fase localizada.

El recuadro en la Fig. (5.15) muestra la función $\beta(l)$ de la Ec. (2.13) para el modelo de Aubry-André con interacciones. El exponente $\tilde{D}_2$ disminuye muy rápidamente al aumentar h , por lo que el exponente $\tilde{D}_2$ tiende a cero cuando el sistema se adentra mucho en la región localizada. La Fig. (5.15) muestra una comparación entre los exponentes γ de $\langle SP(t) \rangle$, δ de $C(t)$, el exponente $\tilde{D}_2$ de la Ec. (2.13) para el modelo de Aubry-André con interacciones. El exponente γ se mantiene muy por encima de 1.0 con respecto a los demás exponentes para $h < 0.5$, incluso en la fase extendida, pero decae rápidamente. Se aprecia una buena correspondencia entre δ y $\tilde{D}_2$ en general, para todo valor de h , lo que significa que cuando el sistema pasa de la fase extendida a una fase localizada, las propiedades multifractales de los eigenestados se hacen presentes en la dinámica del sistema.

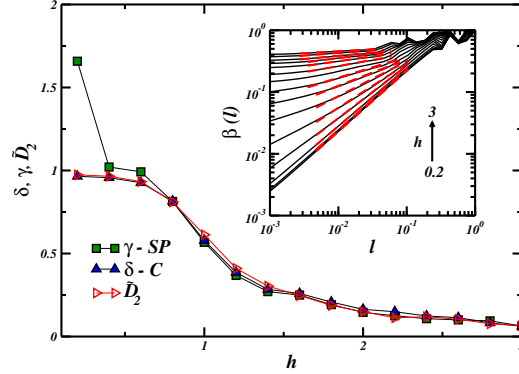


Figura 5.15: La figura principal muestra los exponentes γ, δ y $\tilde{D}_2$ con respecto a h para el modelo de Aubry-André con interacciones para diferentes valores de h . Los exponentes γ y δ se obtuvieron del decaimiento como ley de potencias de promedios de $\langle SP(t) \rangle$ y $C(t)$ sobre estados iniciales y realizaciones resultando en 10^4 datos estadísticos. El tamaño del sistema es $L = 16$ con dimensión $D = 12870$. $\tilde{D}_2$ se obtuvo mediante ajuste de la Ec. (2.13). El recuadro muestra $\beta(l)$ versus l de la Ec. (2.13), consideramos promedios sobre estados iniciales y realizaciones resultando en 10^4 datos estadísticos, los resultados se muestran en escala logarítmica para diferentes valores del parámetro de control h , las líneas rojas discontinuas corresponden a ajustes sobre las curvas. Para los ajustes, nos concentramos en las regiones donde el comportamiento es más lineal.

Se observa que exponente γ de $\langle SP(t) \rangle$ se mantiene lejos de δ y $\tilde{D}_2$ alrededor de $h = 0.50$, pero γ se aproxima a δ y $\tilde{D}_2$ cerca de $h_{c1} = 0.7$ donde comienza la región intermedia de acuerdo a [187]. Dentro de la región intermedia los tres exponentes siguen la misma tendencia durante esta región hasta alcanzar la fase localizada en $h_{c2} = 1.7$.

El recuadro en la Fig. 5.16 muestra la función $\beta(l)$ de la Eq. (2.13) para el modelo de Heisenberg con desorden. A diferencia del caso del modelo de Aubry-André con interacciones, el exponente $\tilde{D}_2$ decrece más lentamente con respecto al valor de h , pero aún tiende a cero para valores grandes de h .

La Fig. 5.16 muestra una comparación entre los exponentes γ de $\langle SP(t) \rangle$, δ de $C(t)$, el exponente $\tilde{D}_2$ de la Ec. (2.13) para el modelo de Heisenberg con desorden. El exponente γ de $\langle SP(t) \rangle$ se encuentra cerca de $\gamma = 2$ para $h < 0.5$ [69, 70] para $L = 16$. A medida que el sistema abandona la fase extendida, decae rápidamente y sigue la misma tendencia que los tres exponentes restantes. De nuevo, se muestra la correspondencia entre δ y $\tilde{D}_2$ y, finalmente, cuando el sistema se aproxima a la fase localizada ($3.5 < h$), los cuatro exponentes siguen la misma tendencia.

Se obtiene entonces que, para sistemas físicos de muchas partículas interactuantes, se muestra como el exponente γ de $\langle SP(t) \rangle$ es distinto de $\tilde{D}_2$ y δ en la fase extendida, como se observó en matrices aleatorias. A medida que el sistema transita, γ decrece y sigue la misma tendencia entre $\tilde{D}_2$ y δ los cuales mantienen una buena correspondencia entre ellos en cada régimen del sistema.

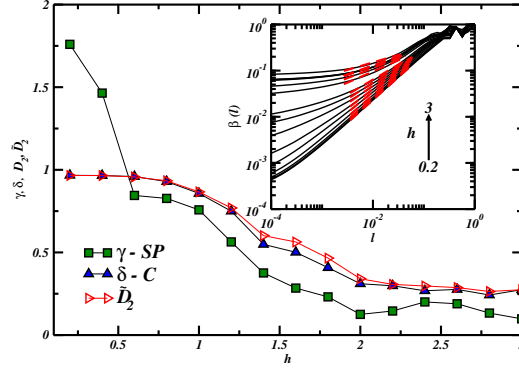


Figura 5.16: La figura principal muestra los exponentes γ, δ y $\tilde{D}_2$ con respecto a h para el modelo de Aubry-André con interacciones. Los exponentes γ y δ se obtuvieron del decaimiento como ley de potencias de promedios de $\langle SP(t) \rangle$ y $C(t)$ sobre estados iniciales y realizaciones resultando en 10^4 datos estadísticos. El tamaño del sistema es $L = 16$ con $D = 12870$. $\tilde{D}_2$ se obtuvo mediante ajuste de la Ec. (2.13). El recuadro muestra $\beta(l)$ vs l de la Ec. (2.13), consideramos promedios sobre estados iniciales y realizaciones resultando en 10^4 datos estadísticos, los resultados se muestran en escala logarítmica para diferentes valores del parámetro de control h , las líneas rojas discontinuas corresponden a ajustes sobre las curvas. Para los ajustes, nos concentramos en las regiones donde el comportamiento es más lineal.

Debido a que $\tilde{D}_2$ y δ miden la multifractalidad de los eigenestados podemos decir que el exponente γ contiene la información de las correlaciones espectrales y al mismo tiempo del carácter multifractal de los eigenestados mostrando evidencia de que las correlaciones espectrales no solo se manifiestan en el hoyo de correlaciones si no también en el exponente γ , cuando su influencia decrece, γ se aproxima a $\tilde{D}_2$ y δ . Tanto en los modelos de matrices aleatorias como en los sistemas físicos se mostró una muy buena correspondencia entre los exponentes δ y $\tilde{D}_2$. La relación directa entre $\tilde{D}_2$ y δ durante la transición del modelo de Heisenberg contribuye al debate sobre la existencia de estados multifractales como un indicador de una fase intermedia de la transición extendida-localizada, respaldado por los resultados de el modelo de Aubry-André con interacciones, nuestros resultados indican que la aparición de los estados multifractales son una característica del sistema en transición en lugar de un efecto de tamaño finito.

5.8. Conclusiones

Se introdujeron los conceptos de probabilidad de supervivencia generalizada, $SP_q(t)$, y densidad de estados local generalizada, $\rho_q(E)$. Se mostró que el ancho de la densidad local de estados generalizada, σ_q , depende de q incluso cuando el sistema cuántico de muchos cuerpos se encuentra profundamente en el régimen caótico, lo que contrasta con las matrices aleatorias, donde σ_q es constante e igual al ancho de la densidad de estados. Los análisis de $\langle \sigma_q \rangle$ mostraron la sensibilidad

a los puntos críticos de transición de modelos de matrices aleatorias y sistemas físicos mostrando cualitativamente la transición extendida-localizada pero sin detectar efectivamente regiones intermedias de transición, no obstante el análisis de la curvatura promedio $\bar{\kappa}$ de las curvas de $\langle\sigma_q\rangle$ vs q mostró puntos de inflexión sobre los puntos críticos de transición detectando efectivamente las fases extendidas, fases localizadas e intermedias con respecto a parámetro de control. Estas virtudes hacen de σ_q una cantidad excepcionalmente interesante en los estudios numéricos orientados a estudiar transiciones similares en sistemas de interés ya que además servir como una herramienta para analizar y cuantificar el nivel de ergodicidad de los estados de los sistemas físicos con respecto a las matrices aleatorias también contribuye a la detección de los puntos críticos de transición.

Se obtiene una expresión analítica para la $\langle SP_q(t) \rangle$ para matrices de GOE, la cuál describe el comportamiento de esta para cualquier escala de tiempo. Se mostró la sensibilidad de la dinámica del sistema al parámetro q .

Para el caso del sistema físico del modelo de Heisenberg con desorden, mostramos que el comportamiento de la ley de potencia que sigue al decaimiento gaussiano de la probabilidad de supervivencia generalizada depende fuertemente de q cuando el sistema está lejos del régimen caótico. Para un valor fijo de la magnitud de desorden, el decaimiento de la ley de potencia se extiende a medida que q aumenta y el exponente de la ley de potencia γ_q disminuye. Esta dependencia de γ_q respecto de q indica la relevancia de las correlaciones entre los eigenestados en el desarrollo de la dinámica. Los resultados del sistema físico revelaron que las correlaciones del espectro energético son bastante relevantes incluso fuera de la región caótica.

Por ultimo nos enfocamos en el estudio del decaimiento como ley de potencias de la $\langle SP(t) \rangle$ de modelos de matrices aleatorias y sistemas físicos. Demostramos una relación directa entre la dimensión multifractal espectral $\tilde{D}_2$ y el exponente del decaimiento como ley de potencias de la función de correlación $C(t)$. Nuestros resultados indican que las características multifractales de eigenestados del sistemas son bastante relevantes en el desarrollo de la dinámica fuera del equilibrio cuando los sistemas transitan de una fase extendida hacia una fase localizada donde el exponente γ se entiende como un indicador del nivel de las correlaciones espectrales y de las correlaciones de las componentes de los eigenestados del sistema. Encontrar la relación directa entre el nivel de multifractalidad en la dinámica del sistema contribuye al debate sobre la existencia de una fase intermedia caracterizada por estados extendidos pero no ergódicos en sistemas cuánticos desordenados.

Capítulo 6

Análisis de correlaciones espectrales para la detección de caos en sistemas cuánticos de muchos cuerpos

El análisis de las estadísticas de niveles es una excelente manera de detectar el caos cuántico de muchos cuerpos en experimentos con acceso al espectro, no obstante, este enfoque no es eficiente en experimentos con átomos fríos [12, 124, 128, 188, 189], trampas de iones [158, 164, 165, 190] y computadoras cuánticas disponibles [191, 192], donde el espectro no es fácilmente accesible y se enfocan en cambio en estudiar la dinámica cuántica de muchas partículas.

En este capítulo proponemos un enfoque para detectar el caos cuántico de muchas partículas adecuado para diferentes plataformas experimentales que estudian la dinámica, incluidas las computadoras cuánticas digitales y analógicas mediante la detección de las correlaciones espectrales que se manifiestan mediante el hoyo de correlaciones en la dinámica. Proponemos el uso de la probabilidad de supervivencia y la función de autocorrelación de espín que se pueden medir experimentalmente y que exhiben la estructura característica del hoyo de correlaciones cuando el sistema es caótico.

Los principales desafíos de nuestra propuesta radican en el valor mínimo del hoyo de correlaciones y la escala de tiempo para su aparición donde el valor mínimo depende de la dimensión del espacio de Hilbert, que a su vez crece exponencialmente con el tamaño de nuestros sistemas

cuánticos de muchos cuerpos. Sin embargo, demostramos que el hoyo de correlaciones puede surgir incluso cuando los sistemas tienen dimensiones muy pequeñas. También proporcionamos un circuito cuántico y comparamos sus resultados para la probabilidad de supervivencia con los resultados numéricos computacionales para el modelo de Heisenberg. Dado que $SP(t)$ es no autopromediable [92,94], trabajamos con el promedio de la probabilidad de supervivencia, $\langle SP(t) \rangle$, para capturar las características subsiguientes de la estructura pendiente-mínimo-rampa-plateau, es decir, el región del mínimo y la rampa.

6.1. Función de autocorrelación de espín

La función de autocorrelación de espín es una observable que detecta el hoyo de correlaciones [87,91]. Esta cantidad se define como

$$I_z(t) = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \langle \Psi(0) | \hat{\sigma}_k^z e^{i\hat{H}t} \hat{\sigma}_k^z e^{-i\hat{H}t} | \Psi(0) \rangle, \quad (6.1)$$

donde L es el número de sitios de las cadenas de espín 1/2 que consideramos y $\hat{\sigma}_k^z$ es el operador de Pauli en la dirección z que actúa en el sitio k . Denotamos el valor asintótico del promedio $\langle I_z(t) \rangle$ como $\overline{I_z}$.

Al igual que la probabilidad de supervivencia, la función de autocorrelación de espín no es local en el tiempo, pero al contrario de la probabilidad de supervivencia, es local en el espacio real. Otra diferencia entre las dos cantidades es que el hoyo de correlaciones se desvanece para la función de autocorrelación de espín a medida que aumenta el tamaño del sistema [89]. Al elegir un estado Néel como estado inicial, $I_z(t)$ se puede medir experimentalmente en átomos fríos [12,189]. En plataformas de RMN, la función de autocorrelación de espín se puede medir directamente para estados inicialmente mixtos [193].

Para ambas cantidades, $\langle SP(t) \rangle$ y $\langle I_z(t) \rangle$, la dinámica debe resolver la naturaleza discreta del espectro para que emerja del hoyo de correlaciones. Esto explica por qué $t_{\text{Th}}^{\text{GOE}}$ y t_H crecen exponencialmente con el tamaño del sistema, lo que hace que la detección del hoyo de correlaciones sea un desafío experimental.

6.2. Resultados: Modelo de Heisenberg de espín-1/2 con desorden

Como primer modelo físico, estudiaremos el modelo unidimensional de Heisenberg con desorden de L partículas de espín 1/2 con interacciones entre primeros vecinos de la Ec. (3.4), donde

h_k son campos magnéticos aleatorios aplicados a cada sitio y son distribuidos uniformemente en $[-W, W]$. Trabajaremos en el subespacio para el cual $\hat{S}_{\text{Tot}}^z = 0$ de dimensión $D = L!/((L/2)!)^2$ tomando como estados iniciales eigenestados de $\hat{H}_0$ con $E_0 \sim 0$ como se indica en la Sec. 3.3. Por último fijamos condiciones de contorno abiertas.

Probabilidad de supervivencia

En la Fig. 6.1(a) y la Fig. 6.1(b), mostramos la evolución del promedio de la probabilidad de supervivencia (Ec. (4.1)) para el modelo de Heisenberg en la fase caótica ($W = 0.5$) y localizada ($W = 3$), respectivamente. Las líneas horizontales punteadas indican el valor de saturación, $\overline{SP}$. El objetivo es identificar una rampa por debajo de $\overline{SP}$ para el sistema en el régimen caótico.

En la Fig. 6.1(a), se muestra que el promedio de la probabilidad de supervivencia $\langle SP(t) \rangle$ la cual exhibe la estructura del hoyo de correlaciones incluso para tamaños de sistema tan pequeños como $L = 6$ y $L = 8$. La estructura es particularmente visible para $L = 6$, porque el tamaño del sistema es tan pequeño que la dinámica no desarrolla el decaimiento como ley de potencias. En este caso, el decaimiento gaussiano, $e^{-\sigma^2 t^2}$, es seguido por la rampa, lo que hace que el hoyo de correlaciones sea bastante evidente. Para $L = 6$, el valor mínimo de $\langle SP(t) \rangle$ en $t_{\text{Th}}^{\text{GOE}}$ es lo suficientemente grande, $\langle SP(t_{\text{Th}}^{\text{GOE}}) \rangle_{\min} \sim \mathcal{O}(10^{-1})$, y $t_{\text{Th}}^{\text{GOE}}$ es lo suficientemente pequeño, $t_{\text{Th}}^{\text{GOE}} \sim \mathcal{O}(10)$, como para estar al alcance de las configuraciones experimentales actuales. Incluso el tiempo de saturación, $t_{\text{H}} \lesssim 10^2$, está en el límite de lo que se puede alcanzar experimentalmente. Sin embargo, se debe tomar en cuenta que no es esencial ejecutar el experimento hasta t_{H} . Para convencerse de que la manifestación del caos ha sido capturado dinámicamente, debería bastar con detectar la rampa, es decir, medir valores de $\langle SP(t) \rangle$ que aumenten consistentemente a medida que pasa el tiempo, siguiendo la rampa descrita por la función $b_2(t)$ en la Ec. (4.19).

El propósito de la Fig. 6.1(b) es hacer evidente que, aunque se pueden encontrar valores de $\langle SP(t) \rangle$ por debajo de la línea de saturación cuando el sistema no es caótico, estos valores no están consistentemente por debajo de $\overline{SP}$ y no están en una rampa descrita por $b_2(t)$ (Ec. (4.19)), por lo que no son causados por la presencia de eigenvalores correlacionados. Elegimos mostrar el caso no caótico con $W \neq 0$ en lugar de $W = 0$ (régimen integrable), porque podríamos suavizar las curvas utilizando promedios sobre realizaciones de desorden, pero la discusión es válida para ambos casos. Debido a su falta de autopromedio, la probabilidad de supervivencia debe promediarse para mostrar el hoyo de correlaciones. En la Fig. 6.1(a), promediamos más de 10 estados iniciales y 50 realizaciones de desorden (verificamos numéricamente que 10 realizaciones aleatorias son suficientes para revelar la rampa). Usamos 10 estados iniciales y 500 realizaciones de desorden en la Fig. 6.1(b). Se necesita un número mucho mayor de realizaciones para la convergencia de los resultados en la fase localizada. Esto se debe a que en el régimen caótico, la varianza relativa de las fluctuaciones de $\langle SP(t) \rangle$ en

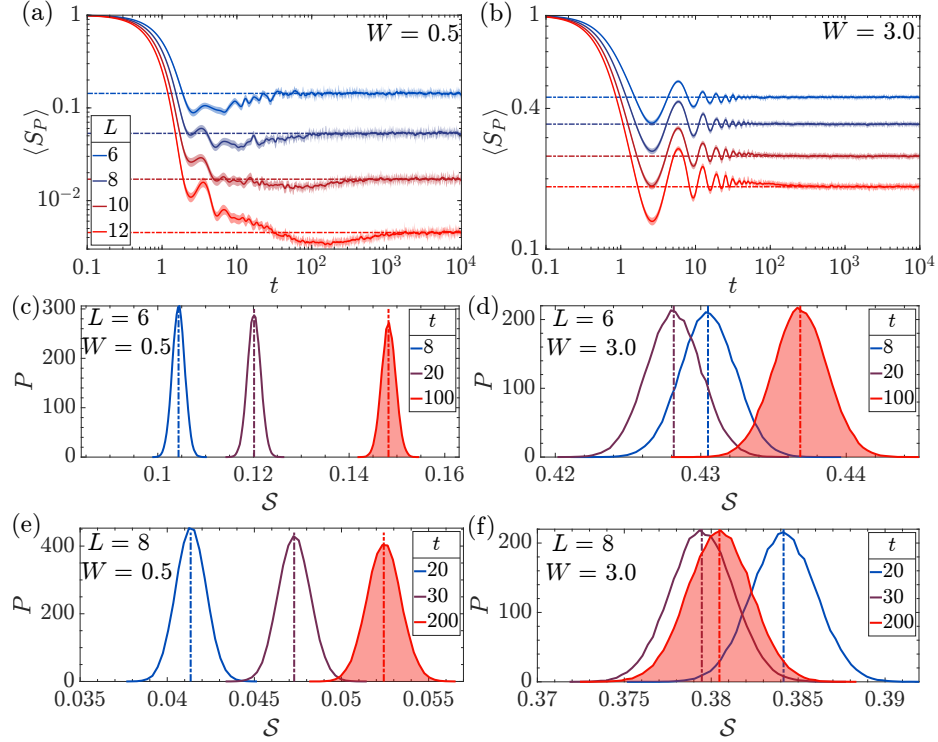


Figura 6.1: (a)-(b) Evolución de la probabilidad de supervivencia bajo el modelo de espín 1/2 de Heisenberg en la Ec. (3.4) en el régimen (a) caótico ($W = 0.5$) y (b) localizado ($W = 3$) para tamaños de sistema L que aumentan de arriba hacia abajo, como lo indica la leyenda en (a). Los resultados son promedios sobre 10 estados iniciales y 50 realizaciones de desorden para $W = 0.5$ ($W = 3$). Todos los datos se suavizan aún más con un running time-averaged a través de 10 puntos consecutivos que dan como resultado las líneas sólidas. El área sombreada alrededor de las líneas denota el intervalo de confianza del 95 % del promedio sobre el ensamble de la probabilidad de supervivencia. Las líneas horizontales de puntos y trazos marcan los valores asintóticos, $\overline{S_P}$. El tiempo está en la unidad de $J = 1$. (c)-(f) Experimento “shot-noise” para la probabilidad de supervivencia con $M = 100$ mediciones para cada estado inicial (10 muestras) y realizaciones de desorden (50 muestras). Distribuciones P de S para diferentes tamaños de sistema, magnitudes de desorden y tiempos como se indica en los paneles. La distribución sombreada se obtiene para un tiempo en la región de saturación. Las líneas verticales marcan los valores promedio $\langle S \rangle$ para los tiempos elegidos.

tiempos largos permanece constante a medida que L aumenta [92], mientras que aumenta con el tamaño del sistema en la fase localizada [94].

Experimento “shot-noise”

Experimentalmente, el promedio de la probabilidad de supervivencia se mide del siguiente modo: se prepara el sistema en un estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ con una energía muy cercana a cero y se deja evolucionar unitariamente durante un tiempo fijo t_0 y para cada realización del desorden se

realiza una medición proyectiva sobre el estado inicial evolucionado, representada por el operador $\hat{P} = |\Psi(0)\rangle \langle \Psi(0)|$. Cada medición corresponde a un “shot” y su resultado puede ser 0 o 1 [95]. Si el resultado es 1 (el sistema sigue en $|\Psi(0)\rangle$) con probabilidad $\langle \Psi(t_0) | \hat{P} | \Psi(t_0) \rangle$ al tiempo t_0 , caso contrario si se obtiene un 0 (el sistema no sigue en $|\Psi(0)\rangle$) con probabilidad $1 - \langle \Psi(t_0) | \hat{P} | \Psi(t_0) \rangle$. Para M número de “shots”, M_1 es el número de veces que se obtiene el resultado 1, donde $0 \leq M_1 \leq M$. Según el postulado de medición de la mecánica cuántica, $\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M_1}{M} = SP(t_0)$, donde $SP(t_0)$ es la probabilidad de supervivencia, como se define en la Ec. (4.1). En un experimento real, M es finito. Repetimos el procedimiento anterior para 10 estados iniciales y 50 realizaciones para obtener el promedio de la probabilidad de supervivencia, $\langle SP(t_0) \rangle$. Para emular el experimento, definimos una variable aleatoria

$$s = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } SP(t_0) \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - SP(t_0) \end{cases} . \quad (6.2)$$

Para cada estado inicial y realización de desorden, la secuencia de M números aleatorios s da un valor $\tilde{S}(t_0) = M_1/M$. Luego definimos $\mathcal{S}(t_0)$ como el promedio de $\tilde{S}(t_0)$ sobre 10 estados iniciales y 50 realizaciones de desorden. Si M es muy grande, entonces $\mathcal{S}(t_0) \rightarrow \langle SP(t_0) \rangle$.

Para una M finita, cada vez que repetimos el procedimiento anterior, obtenemos un valor de $\mathcal{S}(t_0)$ que fluctúa alrededor de $\langle SP(t_0) \rangle$. Esta fluctuación se llama “shot noise” y es proporcional a $1/\sqrt{M}$. La distribución de los valores de $\mathcal{S}(t_0)$ tiene un ancho $\mathcal{K}/\sqrt{M}$, donde $\mathcal{K}$ se puede obtener estudiando el ancho de la distribución de $\mathcal{S}(t_0)$ como una función de M .

La cantidad de “shots” que son experimentalmente viables depende de la plataforma experimental que se utilice. Para identificar el hoyo de correlaciones, la incertidumbre en $\mathcal{S}(t_0)$ debe ser menor que la profundidad del hoyo de correlaciones, $\delta = \langle SP(t_H) \rangle - \langle SP(t_{Th}^{GOE}) \rangle$. Para resolver $\mathcal{S}(t_{Th}^{GOE})$ a partir de $\mathcal{S}(t_H)$ con una certeza del 99,73 %, necesitamos tener $\delta > 3\mathcal{K}/\sqrt{M}$. Con base en este razonamiento, estimamos que $M \sim 40$ para la probabilidad de supervivencia que evoluciona bajo el modelo de Heisenberg con $L = 8$ e incluso menos para $L = 6$. Esto significa que $\mathcal{O}(10^2)$ disparos por estado inicial y realización deberían ser suficientes para separar el mínimo de $\langle SP(t_0) \rangle$ de su valor asintótico correspondiente. Por lo tanto, utilizamos $M = 100$, que debería ser accesible en general para los experimentos actuales.

En las figuras 6.1(c)-(f), mostramos distribuciones de los valores de $\mathcal{S}(t_0)$ para $W = 0.5$ [Figs. 6.1(c),(e)] y $W = 3$ [Figs. 6.1(d),(f)] para $L = 6$ [Figs. 6.1(c),(d)] y $L = 8$ [Figs. 6.1(e),(f)]. Usamos 10 estados iniciales, 50 realizaciones de desorden y $M = 100$, y repetimos el procedimiento 10^5 veces para obtener la densidad de $\mathcal{S}(t_0)$. Las distribuciones se muestran para tres tiempos diferentes. Sus elecciones se basan en los resultados numéricos para la dinámica para $W = 0.5$, de

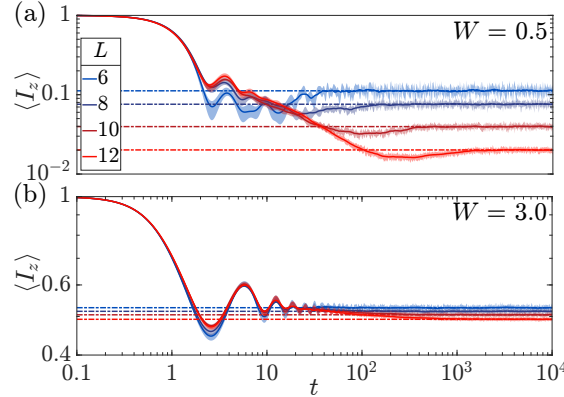


Figura 6.2: Evolución de la función de autocorrelación de espín bajo el modelo de Heisenberg con desorden de la Ec. (3.4) en el régimen (a) caótico ($W = 0.5$) y (b) localizado ($W = 3$) para varios tamaños de sistema L . Promedio y suavizado como en la figura 6.1. Tiempo en la unidad de $J = 1$. Las líneas de puntos y trazos horizontales denotan el valor asintótico $\overline{I_z}$.

modo que el tiempo más corto está cerca del punto donde comienza la rampa, el segundo es un tiempo intermedio en la rampa y el tiempo más grande ya está en la región de la saturación de la dinámica. La distribución para este tiempo más largo está sombreada. Las elecciones de tiempos también tienen el respaldo de la simulación numérica para $W = 3$ para garantizar que los tiempos seleccionados no den la impresión errónea de una rampa en la región localizada.

Se observa que en el régimen caótico [Figs. 6.1(c),(e)], las distribuciones de $\mathcal{S}(t_0)$ están bien separadas, de modo que los valores de la probabilidad de supervivencia en la rampa se pueden identificar de manera confiable contra el valor asintótico, y los promedios de las distribuciones crecen monótonamente a medida que aumenta el tiempo. En contraste, las distribuciones de $\mathcal{S}(t)$ para la fase localizada [Figs. 6.1(d),(f)] se superponen parcialmente, lo que significa que se requeriría un número aún mayor de “shots” ($M > 100$) para distinguir los diferentes valores en el tiempo. Además, el promedio $\langle \mathcal{S}(t_0) \rangle$ no crece monótonamente con el tiempo. En la Fig. 6.1(d), $\langle \mathcal{S}(t_0) \rangle$ para $t = 20$ es menor que para $t = 8$, y en la Fig. 6.1(f), la distribución sombreada, que ya se encuentra en la región de saturación durante un tiempo, tiene $\langle \mathcal{S}(t_0) \rangle$ menor que la del tiempo intermedio elegido. Por lo tanto, en un escenario experimental real, la combinación del conocimiento de las simulaciones numéricas y un conjunto razonable de puntos en el tiempo debería permitir la distinción entre caos y no caos en cadenas con solo $L = 6$ sitios.

Función de autocorrelación de espín

En la Fig. 6.2(a) y la Fig. 6.2(b), mostramos la evolución de la función de autocorrelación de espín promediada para el modelo de Heisenberg en la Ec. (3.4) en la fase caótica ($W = 0.5$) y

localizada ($W = 3$), respectivamente. Los datos se promedian y suavizan como en la Fig. 6.1. De manera similar al caso de la probabilidad de supervivencia, un hoyo de correlaciones es visible en el régimen caótico [Fig. 6.2(a)] incluso para tamaños de sistema pequeños. Sin embargo, a pesar de la ventaja experimental de la función de autocorrelación de espín como una cantidad local, los resultados numéricos presentan mas oscilaciones que para la probabilidad de supervivencia, porque $I_z(t)$ también puede tener valores negativos. Esto significa que, en comparación con la probabilidad de supervivencia, se requeriría un mayor número de mediciones para reproducir experimentalmente los resultados de la Fig. 6.2 y para distinguir la rampa del valor de saturación. En la Fig. 6.2(a) y la Fig. 6.2(b), mostramos la evolución de la función de autocorrelación de espín promedio para el modelo de Heisenberg en la Ec. (3.4) en la fase caótica ($W = 0.5$) y localizada ($W = 3$), respectivamente.

6.2.1. Resultados: Modelo de Ising desordenado con interacciones de largo alcance

El siguiente modelo a realizar es el modelo de Ising desordenado con interacciones de largo alcance representado por el hamiltoniano $\hat{H}_{LR}$ de la Ec.(3.7). Para vincular con el experimento en [158], elegimos $J = 1$, $B = 2$ y $\alpha = 1.1$. Como en el modelo de Heisenberg con desorden, tomamos $W = 0.5$ para acceder al régimen caótico. Trabajaremos en el sector con un número par de espines ascendentes cuando $L/2$ es par. Los estados iniciales son nuevamente estados de producto de $\hat{S}_{\text{Tot}}^z$, que son accesibles experimentalmente.

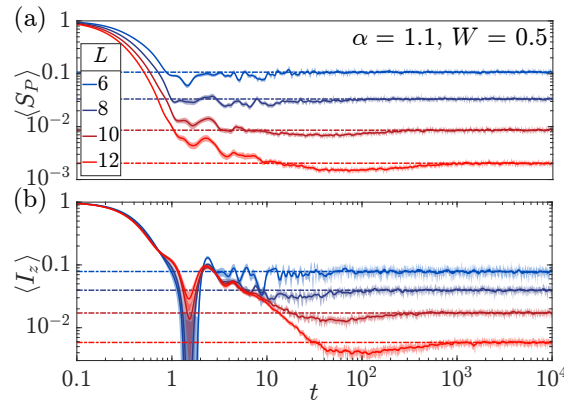


Figura 6.3: Evolución de la función de probabilidad de supervivencia (a) y de la función de autocorrelación de espín (b) bajo el modelo de Ising desordenado con interacciones de largo alcance en la Ec. (3.7) en el régimen caótico con $B = 2$, $W = 0.5$ y $\alpha = 1.1$ para varios tamaños de sistema, L . Los datos se promedian sobre 10 estados iniciales y 50 realizaciones de desorden, y se suavizan aún más con un “running average” (líneas sólidas), como se describe en la figura 6.1. Tiempo en la unidad de $J = 1$. Las líneas horizontales segmentadas denotan los valores asintóticos.

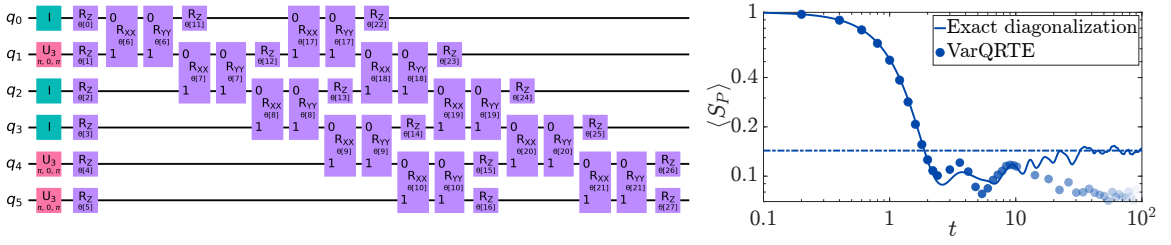


Figura 6.4: El panel izquierdo muestra el circuito cuántico utilizado para obtener la evolución de la probabilidad de supervivencia para el modelo caótico de Heisenberg con $L = 6$ sitios que se muestran en el panel derecho con círculos azul oscuro y azul claro. La simulación incluyó 16384 “shots” por incremento de tiempo y los 6 cúbits fueron seleccionados por la biblioteca Qiskit. La línea sólida se obtiene con diagonalización exacta. La línea horizontal de puntos y trazos indica el valor de saturación de la dinámica exacta.

En la Fig. 6.3, mostramos la evolución del promedio de la probabilidad de supervivencia [Fig. 6.3(a)] y el promedio de la función de autocorrelación de espín [Fig. 6.3(b)] para el modelo de Ising interactuante de largo alcance en la Eq. (3.7) en el régimen caótico ($\alpha = 1.1$, $W = 0.5$). En contraste con el modelo de Heisenberg, el hoyo de correlaciones para $\langle SP(t) \rangle$ se vuelve claramente visible solo cuando $L > 8$ y para $\langle I_z(t) \rangle$, necesita $L \geq 8$, lo que hace que la detección experimental del hoyo de correlaciones sea más desafiante para el modelo de Ising interactuante de largo alcance.

6.3. Circuitos cuánticos y detección de caos en sistemas de muchos cuerpos

Con el análisis de la sección anterior, se concluye que el caso más prometedor para la detección experimental del hoyo de correlaciones es la probabilidad de supervivencia que evoluciona bajo el modelo de Heisenberg con $L = 6$. En esta sección, proporcionamos un circuito cuántico para este caso y lo ejecutamos en el proveedor IBM FakeSherbrooke [194], donde se incluye ruido ¹. Nuestros resultados muestran que el circuito captura el comienzo de la rampa.

El algoritmo cuántico empleado es el algoritmo Variational Quantum Real Time Evolution (VarQRTE) [195]. Los métodos de simulación cuántica variacional consisten en codificar un estado cuántico en un circuito parametrizado y luego mapear su evolución en la evolución de los parámetros que controlan el circuito. El algoritmo VarQRTE, en particular, desarrolla aproximadamente un estado de entrada en un subespacio restringido del espacio de Hilbert total, que se define por el

¹En computación cuántica, el término ruido se refiere a los errores que afectan la evolución del sistema cuántico como la pérdida de coherencia debido a la interacción con el entorno (decoherencia), errores en la aplicación de compuertas cuánticas, y errores de medición. En simulaciones, se suele incluir ruido para aproximar el comportamiento de un procesador cuántico real.

ansatz de parámetros utilizados. En el caso del modelo de Heisenberg, la simetría de preservación de excitaciones del hamiltoniano motiva el uso de un ansatz que preservan las excitaciones, que naturalmente se proporciona en Qiskit en `qiskit.circuit.library.ExcitationPreserving` [196].

El circuito cuántico que utilizamos se muestra en el lado izquierdo de la Fig. 6.4. Siguiendo la notación Qiskit, q_k indica el k -ésimo espín-1/2. En el circuito, $U_3(\pi, 0, \pi) = \sigma_k^x$ invierte el k -ésimo espín e $\mathcal{I}$ es el operador identidad, de modo que nuestro estado inicial tiene 3 espines apuntando hacia arriba en la dirección z y 3 espines apuntando hacia abajo en la dirección z . $R_Z(\theta) = \exp(-i\frac{\theta}{2}\sigma_k^z)$ indica la rotación del k -ésimo espín sobre el eje z . $R_{XX}(\theta) = \exp(-i\frac{\theta}{2}\sigma_k^x\sigma_{k+1}^x)$ y $R_{YY}(\theta) = \exp(-i\frac{\theta}{2}\sigma_k^y\sigma_{k+1}^y)$ involucran solo espines vecinos y ambas compuertas tienen el mismo parámetro para mantener la evolución en el subespacio $\hat{S}^z = 0$.

Usando VarQRTE, la profundidad del circuito cuántico necesario para simular la evolución puede ser seleccionada por el usuario para garantizar que se mantenga dentro de las restricciones del hardware y el ruido. Por lo tanto, los circuitos cuánticos pueden hacerse más superficiales, a costa de disminuir la precisión. Además, la simulación de tiempos largos no requiere circuitos cuánticos tan profundos, como lo exige la Trotterización² [197]. En su lugar, la profundidad de las compuertas del ansatz es fijada al inicio del algoritmo. Por estas razones, VarQRTE es un prometedor algoritmo cuántico ruidoso a escalas intermedias (NISQ, por sus siglas en inglés) para la detección del caos cuántico en sistemas de muchos cuerpos.

El ansatz que utilizamos tiene dos capas (las dos líneas diagonales de compuertas en el circuito) y un entrelazamiento lineal para minimizar la profundidad de la compuerta. El circuito se ejecuta en el proveedor IBM FakeSherbrooke, que imita el correspondiente sistema cuántico IBM ruidoso. A pesar de la limitada profundidad de compuertas del ansatz empleado y la presencia de ruido, la simulación puede detectar el comienzo del hoyo de correlaciones, como se ve en el panel derecho de la Fig. 6.4. Esta figura muestra con círculos azules el resultado producido por el circuito para la evolución de la probabilidad de supervivencia bajo el modelo caótico de Heisenberg, y la línea sólida representa el resultado obtenido con diagonalización exacta. Las curvas coinciden razonablemente bien hasta $t \sim 12$ (círculos azul oscuro), lo que permite capturar el comienzo de la rampa. Más allá de este punto (círculos azul claro), entra en acción el ruido y las curvas divergen. Este resultado es muy alentador. Las formas de mejorar aún más el circuito se discutirán en un próximo artículo.

²Trotterización se refiere a la descomposición de Trotter, un concepto teórico en mecánica cuántica sobre el estudio de la función exponencial sobre operadores no conmutativos.

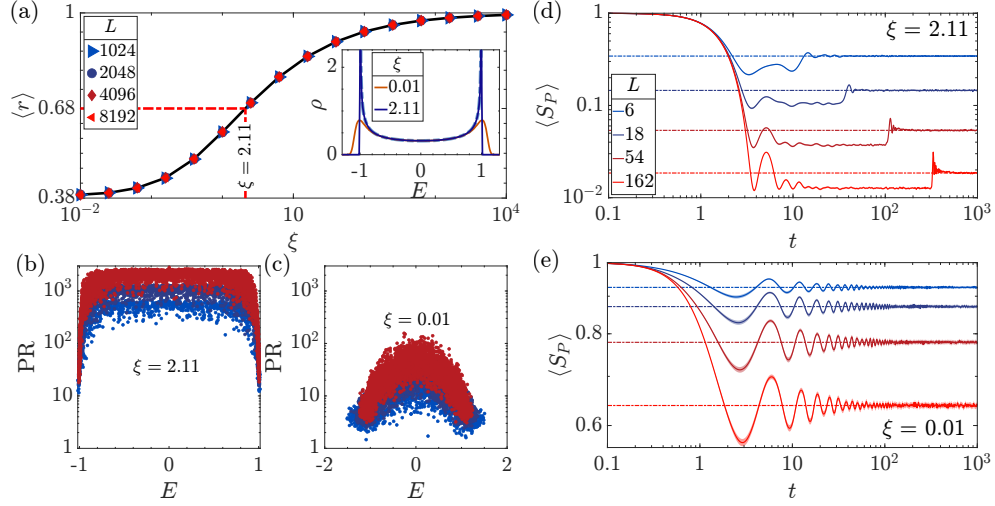


Figura 6.5: Resultados para el modelo de Heisenberg con desorden en la Ec. (3.5) con una sola excitación. (a) Relación promedio de espaciamiento de niveles, $\langle r \rangle$, como una función de $\xi \propto (W^2 L)^{-1}$ para diferentes tamaños de sistema, L . La línea discontinua roja indica el valor $\xi = 2.11$ donde $\langle r \rangle \approx 0.68$, que es la relación promedio observada en GSE. El recuadro muestra la densidad de estados $\rho(E)$ promediada sobre 10^4 realizaciones de desorden para dos valores diferentes de ξ y $L = 8192$; la línea discontinua indica la expresión analítica de la densidad de estados para $\xi \gg 1$. (b)-(c) Relación de participación en función de la energía de una única realización de desorden para (b) $\xi = 2.11$ y (c) $\xi = 0.01$. (d)-(e) Probabilidad de supervivencia para (d) $\xi = 2.11$ y (e) $\xi = 0.01$ para diferentes tamaños de sistema. El estado inicial tiene la excitación en el primer sitio de la cadena. Los datos se promedian sobre 200 realizaciones desordenadas y se suavizan aún más con un promedio de tiempo móvil. El tiempo está en la unidad de $J = 1$. Las líneas horizontales discontinuas punteadas indican los valores asintóticos de $\langle S_P(t) \rangle$.

6.4. Resultados: Caso de una excitación

Para proporcionar un caso más en el que las manifestaciones dinámicas de correlaciones espectrales podrían detectarse experimentalmente con las capacidades disponibles, estudiamos el modelo de Heisenberg con desorden sin interacciones representado por el hamiltoniano de la Ec. (3.5). Trabajaremos en el subespacio de una única excitación de dimensión $D = L$. Realizamos nuestros estudios estáticos con respecto a la longitud de localización reescalada $\xi = 6,5653/(W^2 L)$ como parámetro donde W es la magnitud del desorden aplicado en cada sitio.

La Fig. 6.5(a) proporciona los resultados del análisis de correlaciones de corto alcance realizadas con la relación Eq. 2.6 [108, 109].

La figura muestra el $\langle r \rangle$ promedio sobre r_n para estados en medio del espectro como una función de ξ . A medida que ξ aumenta y la longitud de localización se vuelve más grande que el tamaño del sistema, la distribución de espaciamiento de niveles se mueve de Poisson (ausencia de correlaciones)

a distribuciones que indican una repulsión de niveles cada vez más fuerte, alcanzando estadísticas equivalentes a las del ensamble ortogonal gaussiano (GOE), el ensamble unitario gaussiano (GUE), el ensamble simplético gaussiano (GSE) y más allá (picket-fence).

Cuando $\xi = 2.11$ [línea discontinua en la Fig. 6.5(a)], la razón promedio $\langle r \rangle$ es aproximadamente la correspondiente al caso GSE. Este es el valor que utilizamos para el análisis de la probabilidad de supervivencia, porque entre los ensambles, el GSE conduce a los valores más bajos de $\langle SP(t) \rangle$ por debajo de la línea de saturación de la dinámica. Comparamos los resultados con aquellos para $\xi = 0.11$, para el cual la distribución de espaciamiento de niveles es poissoniana.

La comparación de la razón de participación

$$PR_k = \frac{1}{\sum_{n=1} |c_n^k|^4}, \quad (6.3)$$

como una función de E_n para $\xi = 2.11$ [Fig. 6.5(b)] y $\xi = 0.01$ [Fig. 6.5(c)] corrobora además que el sistema finito en Eq. (3.5) está deslocalizado cuando ξ es grande. Nótese que la densidad de estados, mostrada en el recuadro de Fig. 6.5(a), no es gaussiana como en los sistemas de muchos cuerpos, aunque los estados más deslocalizados siguen siendo aquellos en medio del espectro.

Para investigar la evolución de la probabilidad de supervivencia, preparamos el sistema en un estado inicial donde la excitación está en el primer sitio de la cadena. Esto se hace porque para $W \rightarrow 0$, la forma de la LDoS para este estado es semicircular [161], lo que nos acerca al caso de Fig. 4.1 y debería facilitar la visibilidad del hoyo de correlaciones por debajo de $\overline{SP}$.

Mostramos la evolución del promedio de la probabilidad de supervivencia obtenida para $\xi = 2.11$ en la Fig. 6.5(d) y para $\xi = 0.01$ en la Fig. 6.5(e). El comportamiento en los dos paneles es completamente diferente. La probabilidad de supervivencia en la Fig. 6.5(d) exhibe un “plateau de correlación” en $\langle SP(t) \rangle \sim 2/L$, que está por debajo del plateau de saturación en $\overline{SP} \sim 3/L$ ³, mientras que $\langle SP(t) \rangle$ en la Fig. 6.5(e) simplemente oscila alrededor de $\overline{SP}$.

Los resultados de la Fig. 6.5(d) indican que, aunque la dinámica a largo plazo de la probabilidad de supervivencia del hamiltoniano en la Ec. (3.5) no se describe mediante la función $b_2(t)$ en la Eq. 4.19, como en sistemas caóticos, aún se pueden capturar manifestaciones dinámicas de correlaciones espectrales en sistemas de espín con una sola excitación. En este caso, dado que el tiempo de saturación (Heisenberg) escala linealmente con el tamaño de la cadena ($t_H \propto L/\sigma$, donde $\sigma \sim 1/2$), debería ser viable ejecutar experimentalmente toda la evolución hasta la saturación. Este escenario simple podría servir como un primer paso hacia la detección experimental del caos de muchos cuerpos.

³El espectro de este modelo para $\xi = 2.11$ presenta una combinación de estadísticas similares a GSE, en el caso de correlaciones de corto alcance, y estadísticas similares a GOE para correlaciones de largo alcance. Se ha demostrado analíticamente con matrices aleatorias completas que el valor mínimo de $\langle SP(t) \rangle = 2/(\beta D)$ y el valor de saturación $\overline{SP} = (\beta + 2)/(\beta D + 2)$, donde $\beta = 1, 2, 4$ para GOE, GUE y GSE [79].

6.5. Conclusiones

Añadimos que, tras la publicación en línea de nuestro trabajo, un artículo experimental [198] confirmó la viabilidad de nuestra propuesta. Utilizando un procesador cuántico superconductor e inicializando el sistema en un estado de producto, el grupo pudo detectar el hoyo de correlaciones para el modelo de espín $1/2$ desordenado y un sistema Floquet con 5 espines.

Se mostró que en el caso del modelo de Heisenberg con desorden, el promedio de la probabilidad de supervivencia para una cadena de solo 6 sitios ofrece la mejor perspectiva para la detección del caos cuántico de muchos cuerpos con los recursos experimentales disponibles. Además, nuestro análisis del experimento de “shot noise” para la probabilidad de supervivencia indicó que las mediciones en algunos momentos dentro del hoyo de correlaciones deberían ser suficientes para inferir su presencia. Inspirados por los prometedores resultados obtenidos con la diagonalización exacta, empleamos el algoritmo VarQRTE para simular con un circuito cuántico la evolución temporal de la probabilidad de supervivencia para el modelo Heisenberg de 6 sitios. Usamos un simulador cuántico de IBM para ejecutar el circuito y, a pesar de la presencia de ruido, pudimos capturar el comienzo de la rampa del hoyo de correlaciones, lo que confirma la viabilidad de nuestra propuesta.

La detección de manifestaciones dinámicas de correlaciones espectrales, pero no necesariamente caos cuántico de muchos cuerpos, también podría lograrse con sistemas cuánticos de pocas excitaciones o pocos grados de libertad. Presentamos el caso de un modelo de espín $1/2$ con una sola excitación, donde los eigenvalores correlacionados se deben a efectos de tamaño finito. Estas correlaciones se manifiestan en la dinámica en tiempos más cortos y en valores de probabilidad de supervivencia mayores que los que tenemos para sistemas de muchos cuerpos de la misma longitud. Otro modelo que podría utilizarse para la detección experimental del caos cuántico es el modelo de Dicke, que también exhibe un hoyo de correlaciones [199].

Investigaciones recientes del factor de forma espectral en escenarios de decoherencia energética [25, 27, 95, 98] y hamiltonianos no hermíticos [26, 200] sugieren que las interacciones débiles con el entorno reducen la necesidad de realizar promedios sobre un ensamble. Esto implica que cierto ruido puede ser beneficioso para la detección experimental del hoyo de correlaciones, un tema que merece más investigación.

Capítulo 7

Apertura de sistemas cuánticos de muchos cuerpos: una vía para reducir fluctuaciones dinámicas y mejorar el autopromedio

Una observable $\mathcal{O}$ es autopromediable cuando su varianza relativa [201–209],

$$R_{\mathcal{O}}(t) = \frac{\sigma_{\mathcal{O}}^2(t)}{\langle \mathcal{O}(t) | \mathcal{O}(t) \rangle^2} = \frac{\langle \mathcal{O}^2(t) | \mathcal{O}^2(t) \rangle - \langle \mathcal{O}(t) | \mathcal{O}(t) \rangle^2}{\langle \mathcal{O}(t) | \mathcal{O}(t) \rangle^2}, \quad (7.1)$$

tiende a cero con respecto al aumento del tamaño del sistema, donde $\langle \cdot | \cdot \rangle$ indica el promedio sobre un ensamble, lo que implica que la observable no fluctúa en el límite termodinámico [210]. La presencia de autopromedio es importante porque implica que la cantidad de muestras utilizadas en experimentos y en análisis numéricos puede disminuir a medida que aumenta el tamaño del sistema L y se pueden construir modelos teóricos para describir las propiedades físicas de $\mathcal{O}$ utilizando muestras estadísticamente finitas.

La falta de autopromedio se ha observado en sistemas desordenados en equilibrio, especialmente en la vecindad de puntos críticos, donde las fluctuaciones aumentan notablemente [201–208, 211–219] y complica los análisis de escalamiento en sistemas de localización de muchos cuerpos [37], debido al crecimiento exponencial del espacio de Hilbert con respecto a L , de modo que el número de muestras no se puede reducir a medida que aumenta el tamaño del sistema. El autopromedio también se ha estudiado en sistemas fuera de equilibrio [220–222], y su ausencia se ha observado incluso en régimen caótico en cantidades como el factor de forma espectral $\text{SFF}(t)$ [223–226]. En sistemas caóticos,

SFF(t) revela la estructura del hoyo de correlaciones, donde la ausencia de autopromedio exige realizar promedios sobre un ensamble para revelar la estructura del hoyo de correlaciones.

En el caso de la probabilidad de supervivencia que evoluciona bajo matrices completamente aleatorias se ha demostrado numéricamente y analíticamente que no es autopromediable en ninguna escala de tiempo [92]. Lo mismo sucede con los modelos de espín en el régimen caótico [92, 93] y lejos de este [94]. En [95] se lograron varios avances en el problema de autopromedio de la probabilidad de supervivencia de estados de Gibbs. Utilizando matrices aleatorias, se demostró que las fluctuaciones en los valores de la probabilidad de supervivencia se reducen y se asegura el autopromedio después de la saturación de la dinámica.

En este capítulo se estudian las propiedades de autopromedio de la probabilidad de supervivencia en diferentes escalas de tiempo en sistemas cuánticos abiertos sujetos a un decoherencia energética. Se derivan expresiones analíticas para la varianza relativa de la probabilidad de supervivencia en tiempos cortos y largos, que ayudan a comprender los resultados numéricos.

7.1. Probabilidad de supervivencia en sistemas abiertos

La ecuación maestra de Lindblad

$$\dot{\rho}(t) = -i[H, \rho(t)] + \sum_k \gamma_k \left(L_k \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2} \{L_k L_k^\dagger, \rho\} \right), \quad (7.2)$$

describe la dinámica markoviana de un sistema abierto, donde $\rho(t)$ es la matriz de densidad evolucionada, $\hbar = 1$, H es el hamiltoniano del sistema cuántico aislado, L_k es un operador arbitrario y $\gamma_k \geq 0$. Consideramos procesos de decoherencia energética con $k = 1$, $\gamma_1 = 2\kappa$ y $L_1 = L_1^\dagger = H$, para los cuales la ecuación maestra de Lindblad se escribe como [23–25, 163]

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho(t)] - \kappa [H, [H, \rho(t)]], \quad (7.3)$$

y κ es el nivel de decoherencia que depende de la amplitud de los acoplamientos externos y de las propiedades del entorno. Esta evolución es unital (es decir, el estado de máxima mezcla se mantiene invariante en todo momento) y provoca una disminución monótona de la pureza, $\text{Tr}[\rho(t)^2]$, lo que implica que el estado se vuelve progresivamente más mixto a medida que transcurre el tiempo. En particular, cuando el estado inicial es puro, $\rho(0) = |\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|$, como se considera aquí, la probabilidad de supervivencia para un sistema abierto toma la forma [25, 200]

$$S_P(t) = \langle\Psi(0)|\rho(t)|\Psi(0)\rangle = \text{Tr}[\rho(0)\rho(t)], \quad (7.4)$$

que es la probabilidad de que $\rho(t)$ coincida con el estado inicial $|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|$. La ecuación anterior es equivalente al promedio de la probabilidad de supervivencia $|\langle\Psi(0)|\Psi(t)\rangle|^2$ sobre un ensamble de

estados puros determinado por la matriz de densidad $\rho(t)$ [227, 228]. [Observe que la Ec. (7.4) debe modificarse cuando tanto $\rho(0)$ como $\rho(t)$ son estados mixtos.]

La solución de Eq. (7.3), tomando Eq. (7.4) en cuenta, es [23, 24, 163]

$$\rho(t) = \sum_{n,m=1}^D e^{-i\omega_{nm}t - \kappa\omega_{nm}^2 t} \rho_{nm}(0) |E_n\rangle \langle E_m|, \quad (7.5)$$

donde D es la dimensión del sistema, $\omega_{nm} = E_n - E_m$ y $\rho_{nm}(0) = c_n^{(0)} c_m^{(0)*}$. Esto significa que la probabilidad de supervivencia es

$$SP(t) = \sum_{n,m=1}^D |c_n^{(0)}|^2 |c_m^{(0)}|^2 e^{-i\omega_{nm}t - \kappa\omega_{nm}^2 t}. \quad (7.6)$$

Se analizaron tres posibilidades para los estados iniciales:

(i) Un estado de Gibbs a temperatura infinita, $\beta = 0$, en cuyo caso la probabilidad de supervivencia media coincide con el factor de forma espectral

$$\langle SP^{\beta=0}(t) \rangle = \left\langle \frac{1}{D^2} \sum_{n,m=1}^D e^{-i\omega_{nm}t - \kappa\omega_{nm}^2 t} \right\rangle. \quad (7.7)$$

El promedio $\langle \cdot \rangle$ se realiza sobre 10^4 realizaciones de desorden. La energía de este estado inicial, $E^{(0)} = \langle \Psi(0) | H | \Psi(0) \rangle = \sum |c_n^{(0)}|^2 E_n$, está en la mitad del espectro.

(ii) Un estado de Gibbs a temperatura finita

$$\langle S_P^{\beta \neq 0}(t) \rangle = \left\langle \frac{1}{Z^2} \sum_{n,m=1}^D e^{-\beta(E_n + E_m)} e^{-i\omega_{nm}t - \kappa\omega_{nm}^2 t} \right\rangle. \quad (7.8)$$

El promedio también se realiza sobre 10^4 realizaciones de desorden. Nuestro análisis se realiza para $\beta = 0, 1$. Este estado inicial implica una superposición coherente que se compone predominantemente de eigenestados de baja energía asociados con los valores más grandes de $|c_n^{(0)}|^2 = e^{-\beta E_n} / Z(\beta)$. Esto significa que este estado inicial tiene energía $E^{(0)}$ muy cerca del borde inferior del espectro.

(iii) Un estado inicial obtenido al hacer un quench de un hamiltoniano inicial H_0 hacia un hamiltoniano final $H = H_0 + V$, en cuyo caso el estado inicial posterior al quench es un estado propio de H_0 y la probabilidad de supervivencia promedio es

$$\langle SP^{qch}(t) \rangle = \left\langle \sum_{n,m=1}^D |c_n^{(0)}|^2 |c_m^{(0)}|^2 e^{-i\omega_{nm}t - \kappa\omega_{nm}^2 t} \right\rangle. \quad (7.9)$$

El promedio se realiza sobre $n_d \times n_i = 10^4$ datos distribuidos entre n_d realizaciones de desorden y n_i estados iniciales. Para $L = 8, 10, 12$, $n_d = 1000$, para $L = 14$, $n_d = 500$, y para $L = 16$, $n_d = 200$. Exploramos la dinámica de un quench para estados iniciales con energía en medio y en las colas del espectro.

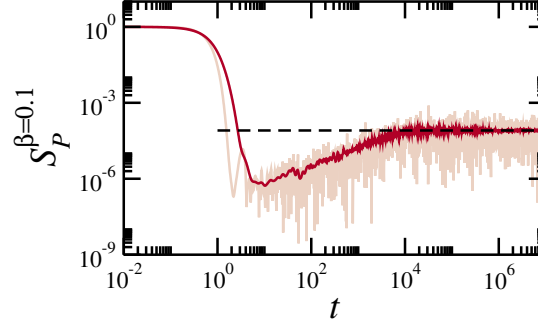


Figura 7.1: Las fluctuaciones dinámicas de la probabilidad de supervivencia disminuyen al abrir el sistema. La figura muestra la evolución completa de la probabilidad de supervivencia para un estado inicial de Gibbs con $\beta = 0,1$ y una única realización de un modelo de espín $1/2$. La curva tenue representa el modelo aislado ($\kappa = 0,0$) y la curva roja es para el sistema abierto ($\kappa = 0,05$). La línea discontinua horizontal da el valor de saturación de la dinámica, que coincide con IPR_0 [Eq. (7.12)]. El tiempo está en unidades del parámetro J del modelo.

Las fluctuaciones temporales de los valores de la probabilidad de supervivencia se reducen abriendo el sistema [23, 25, 95]. Esto se ilustra en la Fig. 7.1, donde consideramos un único estado de Gibbs con $\beta = 0,1$ como estado inicial y una única realización de desorden de un modelo de espín caótico y comparamos la evolución de $SP^{\beta=0,1}(t)$ para el sistema aislado (curva tenue) con la evolución de $SP^{\beta=0,1}(t)$ para el sistema abierto que experimenta decoherencia energética (curva roja). Dado que el modelo es caótico, la probabilidad de supervivencia presenta la típica estructura pendiente-mínimo-rampa-plateau, es decir, el hoyo de correlaciones, debajo de la línea discontinua horizontal que indica la saturación de la dinámica (plateau). Las fluctuaciones se reducen significativamente al abrir el sistema, especialmente durante la rampa hacia el plateau y después de la saturación, lo que debería facilitar la detección experimental del hoyo de correlaciones [229].

En el sistema abierto, los efectos de considerar promedios son inducidos por el entorno. En ambos casos, el de $SP(t)$ que evoluciona en un sistema abierto y el de la probabilidad de supervivencia que evoluciona en un sistema aislado y se promedia sobre un ensamble, $\langle SP(t) \rangle$, la evolución es en efecto no unitaria y se describe mediante un canal cuántico mixto-unitario [95].

La cuestión abordada en este trabajo va más allá de la reducción de fluctuaciones lograda con la Eq. (7.6). Queremos saber si, al abrir el sistema, las fluctuaciones relativas, determinadas por $R_{SP}(t)$ en la Eq. (7.1), disminuyen con el tamaño del sistema, asegurando así el autopromedio.

7.2. Varianza relativa de la probabilidad de supervivencia en sistemas abiertos

Las expresiones analíticas para la varianza relativa de la probabilidad de supervivencia en tiempos cortos y largos para el sistema abierto se pueden obtener de la siguiente manera.

Tiempos cortos

Comencemos por la expansión de Taylor de $SP(t)$ para $t \rightarrow 0$. Las potencias impares μ de ω_{nm} se cancelan, porque $\sum_{n,m=1}^N (E_n - E_m)^\mu = 0$. Como $\kappa, t \ll 1$, mantenemos solo los términos proporcionales a $\kappa^j t^k$ con $j + k \leq 4$ y obtenemos

$$\langle SP(t \rightarrow 0) \rangle \approx 1 - \langle a_2 \rangle \left(\kappa t + \frac{t^2}{2} \right) + \langle a_4 \rangle \left(\frac{\kappa^2 t^2}{2} + \frac{\kappa t^3}{2} + \frac{t^4}{24} \right),$$

donde

$$\begin{aligned} a_2 &= \sum_{n,m=1}^D |c_n^{(0)}|^2 |c_m^{(0)}|^2 \omega_{nm}^2, \\ &= 2 \left[\sum_n^D |c_n^{(0)}|^2 E_n^2 - \left(\sum_n^D |c_n^{(0)}|^2 E_n \right)^2 \right] = 2\Gamma^2, \end{aligned} \quad (7.10)$$

Γ es el ancho de la distribución de energía del estado inicial, y

$$a_4 = \sum_{n,m=1}^D |c_n^{(0)}|^2 |c_m^{(0)}|^2 \omega_{nm}^4.$$

Para el promedio de la probabilidad de supervivencia al cuadrado, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle SP(t \rightarrow 0)^2 \rangle &\approx 1 - 2\langle a_2 \rangle \left(\kappa t + \frac{t^2}{2} \right) + \langle a_2^2 \rangle \left(\kappa t + \frac{t^2}{2} \right)^2 \\ &\quad + 2\langle a_4 \rangle \left(\frac{\kappa^2 t^2}{2} + \frac{\kappa t^3}{2} + \frac{t^4}{24} \right). \end{aligned}$$

Esto implica que la varianza relativa en tiempos cortos es aproximadamente

$$R_{SP}(t \rightarrow 0) \approx \sigma_{a_2}^2 \left(\kappa^2 t^2 + \kappa t^3 + \frac{t^4}{4} \right), \quad (7.11)$$

donde la varianza $(\Gamma a_2)^2 = 4\Gamma_{\sigma^2}^2$. El ancho σ de la distribución de energía del estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ depende del número de estados directamente acoplados a él. A medida que el tamaño del sistema crece, el rango de valores de este número también aumenta, por lo que esperamos que Γ_{σ^2} crezca, lo que justifica la falta de autopromedio para la probabilidad de supervivencia en tiempos muy cortos incluso después de abrir el sistema.

Tiempos largos

En el límite $t \rightarrow \infty$, los términos en la suma para la probabilidad de supervivencia en la Ec. (7.6) son cero, a menos que $n = m$, por lo que el promedio a tiempo infinito para $\kappa \neq 0$ o para $\kappa = 0$ da

$$\overline{SP} = \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^4 = \text{IPR}_0. \quad (7.12)$$

Este valor de saturación corresponde al “plateau”, como se muestra en la Fig. 7.1, que es el IPR del estado inicial escrito en la eigenbase de energía.

De manera similar, para $\kappa \neq 0$, la media del cuadrado de la probabilidad de supervivencia

$$\begin{aligned} \overline{SP^2} = & \frac{\sum_{n,m=1}^D |c_n^{(0)}|^2 |c_m^{(0)}|^2 e^{-i\omega_{nm}t - \kappa\omega_{nm}^2 t}}{\sum_{p,q=1}^D |c_p^{(0)}|^2 |c_q^{(0)}|^2 e^{-i\omega_{pq}t - \kappa\omega_{pq}^2 t}}, \end{aligned} \quad (7.13)$$

es distinto de cero para $n = m$ y $p = q$. De acuerdo con la Ec. (7.12), el promedio al tiempo infinito de la varianza relativa de $SP(t)$ está dado entonces por la varianza relativa del IPR_0 del estado inicial

$$\overline{R_{SP}^{\kappa \neq 0}} = \frac{\sigma_{\text{IPR}_0}^2}{\langle \text{IPR}_0 | \text{IPR}_0 \rangle^2}. \quad (7.14)$$

Por lo tanto, el escalamiento de $\overline{R_{SP}^{\kappa \neq 0}}$ con el tamaño del sistema de sistemas abiertos depende del modelo y de los estados iniciales. La Ec. (7.14) es un resultado crucial de este parte de la investigación. Indica que el análisis a largo plazo de las propiedades de autopromedio de la probabilidad de supervivencia en sistemas abiertos se reduce al análisis del comportamiento de autopromedio del estado inicial, es decir, de IPR_0 . Esto significa que las estructuras de los eigenestados que participan en la evolución del estado inicial determinan si se aplica o no el autopromedio.

En el caso particular de los estados de Gibbs iniciales

$$\overline{R_{SP}^{\kappa \neq 0}} = \frac{\left\langle \frac{Z(2\beta)^2}{Z(\beta)^4} \right\rangle - \left\langle \frac{Z(2\beta)}{Z(\beta)^2} \right\rangle^2}{\left\langle \frac{Z(2\beta)}{Z(\beta)^2} \right\rangle^2}, \quad (7.15)$$

lo que significa que para una temperatura infinita

$$\overline{R_{SP}^{\kappa \neq 0}} \rightarrow 0, \quad (7.16)$$

y el autopromedio está garantizado para cualquier sistema. Este no es necesariamente el caso para estados de Gibbs con temperatura finita y para estados iniciales en la dinámica de un quench, como se muestra en las siguientes secciones.

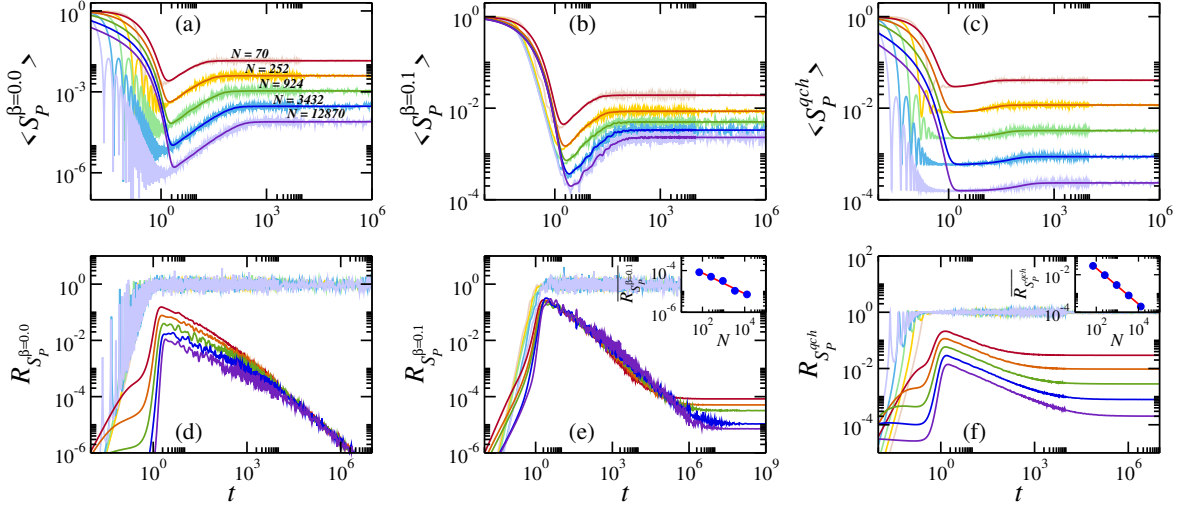


Figura 7.2: Evolución del promedio de la probabilidad de supervivencia: (a) $\langle S_P^{\beta=0,0}(t) \rangle$, (b) $\langle S_P^{\beta=0,1}(t) \rangle$, y (c) $\langle S_P^{qch}(t) \rangle$, y sus varianzas relativas correspondientes: (d) $R_{S_P^{\beta=0,0}}(t)$, (e) $R_{S_P^{\beta=0,1}}(t)$, y (f) $R_{S_P^{qch}}(t)$ para matrices aleatorias GOE. Los colores tenues corresponden al modelo aislado ($\kappa = 0$) y los colores oscuros corresponden al caso abierto ($\kappa = 0.05$). El recuadro de la Fig. 7.2(e) [Fig. 7.2(f)] muestra el análisis de escalamiento para $\overline{R_{S_P^{\beta=0,1}}^{\kappa \neq 0}}$ [$\overline{R_{S_P^{qch}}^{\kappa \neq 0}}$] y la línea roja indica el ajuste $\overline{R_{S_P^{\beta=0,1}}^{\kappa \neq 0}} \approx D^{-0.5}$ [$\overline{R_{S_P^{qch}}^{\kappa \neq 0}} \approx 1.83 D^{-0.96}$], de acuerdo con la expresión analítica en Eq. (7.20)].

Nótese que para el sistema aislado, $\kappa = 0$, el resultado para $\overline{R_{SP}}$ cambia significativamente, porque en la Ec. (7.13) el término para $n = q$ y $m = p$ con $n \neq m$ y $p \neq q$ también es distinto de cero, lo que da

$$\overline{R_{SP}^{\kappa=0}} = \frac{\left\langle \sum_{n \neq m} |c_n^{(0)}|^4 |c_m^{(0)}|^4 \right\rangle}{\left\langle \sum_n |c_n^{(0)}|^4 \right\rangle^2}. \quad (7.17)$$

Esta ecuación conduce a resultados que son completamente diferentes de los de $\kappa \neq 0$ en la ecuación Eq. (7.14). Tomemos, por ejemplo, el caso de $\beta = 0$ y $|c_n^{(0)}|^2 = 1/D$. Tenemos que

$$\overline{R_{SP^{\beta=0}}^{\kappa=0}} = \frac{1/D^2 - 1/D^3}{1/D^2} \approx 1, \quad (7.18)$$

lo cual está en marcado contraste con la varianza relativa cero obtenida en Eq. (7.16).

7.3. Resultados: Matrices aleatorias

En esta sección, analizamos la evolución de la probabilidad de supervivencia bajo matrices completamente aleatorias de GOE (Ec. (2.1)), matrices aleatorias de PBRM (Ec. (3.2)) y matrices

aleatorias de RPE (Ec. (3.3)). Por sus propiedades, estos modelos nos permiten explorar los efectos de abrir el sistema sobre los regímenes extendido y localizado.

Ensamble gaussiano ortogonal

En la Fig. 7.2, mostramos la evolución completa bajo matrices GOE de $\langle SP^{\beta=0}(t) \rangle$ [Fig. 7.2(a)] y su varianza relativa [Fig. 7.2(d)], de $\langle SP^{\beta \neq 0}(t) \rangle$ [Fig. 7.2(b)] y su varianza relativa [Fig. 7.2(e)], y de $\langle SP^{qch}(t) \rangle$ [Fig. 7.2(c)] y su varianza relativa [Fig. 7.2(f)]. Los colores tenues se utilizan para el caso aislado ($\kappa = 0$), y los colores oscuros dan los resultados para el sistema abierto ($\kappa = 0,05$). Además de reducir las fluctuaciones a lo largo de la dinámica, se ve que la decoherencia de energía ralentiza el decaimiento inicial del promedio de la probabilidad de supervivencia en Fig. 7.2(a) y Fig. 7.2(c), suprimiendo las oscilaciones que están asociadas con los colas de la distribución de energía del estado inicial [69, 70]. También se observa que la saturación de la varianza relativa tarda mucho más en ocurrir en las Figs. 7.2(e)-(f) que la saturación de $\langle SP(t) \rangle$ en las Figs. 7.2(a)-(c).

Para tiempos muy cortos, $R_{SP^{\beta=0}}(t \rightarrow 0)$, $R_{SP^{\beta \neq 0}}(t \rightarrow 0)$, y $R_{SP^{qch}}(t \rightarrow 0)$ son muy pequeños, y según la Ec. (7.11), no hay autopromedio para la dinámica aislada o abierta en matrices GOE, ya que $\sigma_{d_2}^2$ crece a medida que D aumenta. Verificamos esto numéricamente, pero no se ve en las escalas de tiempo de las Figs. 7.2(d)-(f).

Para tiempos largos, más allá del hoyo de correlaciones de $\langle SP(t) \rangle$, las varianzas relativas para el ensamble GOE aislado en las Figs. 7.2(d)-(f) tienden a 1 para cualquier D grande. Esto concuerda con la Ec. (7.18) e indica la falta de autopromedio. Esta imagen se invierte para el sistema abierto en los tres casos: $\overline{R_{SP^{\beta=0}}^{\kappa \neq 0}}$ en la Fig. 7.2(d) tiende a cero, como se justifica con la derivación de la Ec. (7.16), y tanto $\overline{R_{SP^{\beta \neq 0}}^{\kappa \neq 0}}$ como $\overline{R_{SP^{qch}}^{\kappa \neq 0}}$ son $\propto 1/D$, lo que indica un “súper” autopromedio [92], como se muestra en los recuadros de las figuras 7.2(e)-(f).

El comportamiento $\overline{R_{SP^{qch}}^{\kappa \neq 0}} \propto 1/D$ se puede explicar utilizando Eq. (7.14) y el hecho de que $c_n^{(0)}$ son números aleatorios gaussianos que satisfacen $\sum_n |c_n^{(0)}|^2 = 1$. Teniendo en cuenta que los diferentes eigenestados de las matrices GOE son estadísticamente independientes, tenemos que $\langle |c_n^{(0)}|^4 |c_m^{(0)}|^4 \rangle = \langle |c_n^{(0)}|^4 \rangle \langle |c_m^{(0)}|^4 \rangle$ para $n \neq m$, lo que lleva a

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\text{IPR}_0}^2 &= \left\langle \sum_{n,m=1}^D |c_n^{(0)}|^4 |c_m^{(0)}|^4 \right\rangle - \left\langle \sum_{n=1}^D |c_n^{(0)}|^4 \right\rangle \left\langle \sum_{m=1}^D |c_m^{(0)}|^4 \right\rangle \\
 &= \sum_{n,m=1}^D \left[\langle |c_n^{(0)}|^4 |c_m^{(0)}|^4 \rangle - \langle |c_n^{(0)}|^4 \rangle \langle |c_m^{(0)}|^4 \rangle \right] \\
 &= \sum_{n=1}^D \left[\langle |c_n^{(0)}|^8 \rangle - \langle |c_n^{(0)}|^4 \rangle^2 \right] \sim \mathcal{O}(N^{-3}).
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

Al mismo tiempo, $\langle \text{IPR}_0 \rangle \sim 3/D$, por lo que

$$\overline{R_{SP^{qch}}^{\kappa \neq 0}} \propto 1/D, \quad (7.20)$$

como se confirma en el recuadro de la Fig. 7.2(f). Los resultados contrastantes para $\overline{R_{SP}}$ para sistemas cerrados y abiertos también se pueden entender a partir del análisis de la distribución de los valores de $SP(t)$ en tiempos posteriores a la saturación de la dinámica. Para el sistema aislado, la distribución es exponencial, por lo que el ancho coincide con la media [93] y $\overline{R_{SP}^{\kappa=0}} = 1$. Al abrir el sistema, la distribución se aproxima a una función delta para $SP^{\beta=0}(t \rightarrow \infty)$, gaussiana para $SP^{\beta=0,1}(t \rightarrow \infty)$, y tipo Fréchet para $SP^{qch}(t \rightarrow \infty)$, por lo que el ancho puede disminuir con respecto a la media, lo que permite el decaimiento de la varianza relativa a medida que D aumenta.

También es importante destacar el comportamiento de la varianza relativa en la región del hoyo de correlaciones. En la escala de tiempo en la que comienza la rampa, $R_{SP}(t)$ aumenta hasta sus valores más altos para los modelos aislados y abiertos porque $\langle SP(t) \rangle$ alcanza su valor mínimo. Más allá de este punto, $R_{SP}^{\kappa \neq 0}(t)$ disminuye monótonamente (hasta la saturación), mientras que $R_{SP}^{\kappa=0}(t)$ se satura a 1. En pocas palabras, aparte de tiempos muy cortos, el autopromedio se mantiene a lo largo de la evolución de los sistemas abiertos en Fig. 7.2(d) y Fig. 7.2(f). En Fig. 7.2(e), donde el estado inicial está demasiado cerca del borde del espectro, la descomposición de $R_{SP^{\beta=0,1}}^{\kappa \neq 0}(t)$ con D es evidente solo después de la saturación. Profundizamos la discusión sobre cómo $R_{SP}^{\kappa \neq 0}(t)$ puede depender de la elección del estado inicial en las próximas dos secciones.

Matrices aleatorias de bandas

Estudiaremos el autopromedio de la probabilidad de supervivencia en matrices de PBRM (3.2). Para este modelo $\alpha \in (0, \infty)$ es un parámetro de control y muestra una transición de fase determinada por el valor de α . Para $\alpha < 1$, el sistema está en el régimen caótico (deslocalizado), mientras que para $\alpha > 1$, el sistema está en el régimen localizado.

En las Figs. 7.3(a)-(b), mostramos resultados para la varianza relativa de la probabilidad de supervivencia de PBRM en la fase deslocalizada [$\alpha = 0,3$ en la Fig. 7.3(a)] y en la fase localizada [$\alpha = 3$ en la Fig. 7.3(b)]. Consideramos el caso de la dinámica de quench, donde el hamiltoniano inicial H_0 es la parte diagonal del PBRM. Los estados iniciales tienen energía $E^{(0)}$ en el medio del espectro. Los colores tenues son para el sistema aislado y los colores oscuros son para el sistema abierto.

En la fase deslocalizada del modelo PBRM abierto, hay falta de autopromedio solo en tiempos muy cortos, de acuerdo con la Ec. (7.11), pero pronto las curvas se cruzan, asegurando el autopromedio a lo largo de la dinámica. El análisis de escalamiento en el recuadro de la Fig. 7.3(a) indica que $\overline{R_{SP^{qch}}^{\kappa \neq 0}} \propto D^{-0,9}$, similar a lo que se encontró para el modelo GOE en el recuadro de la Fig. 7.2(f).

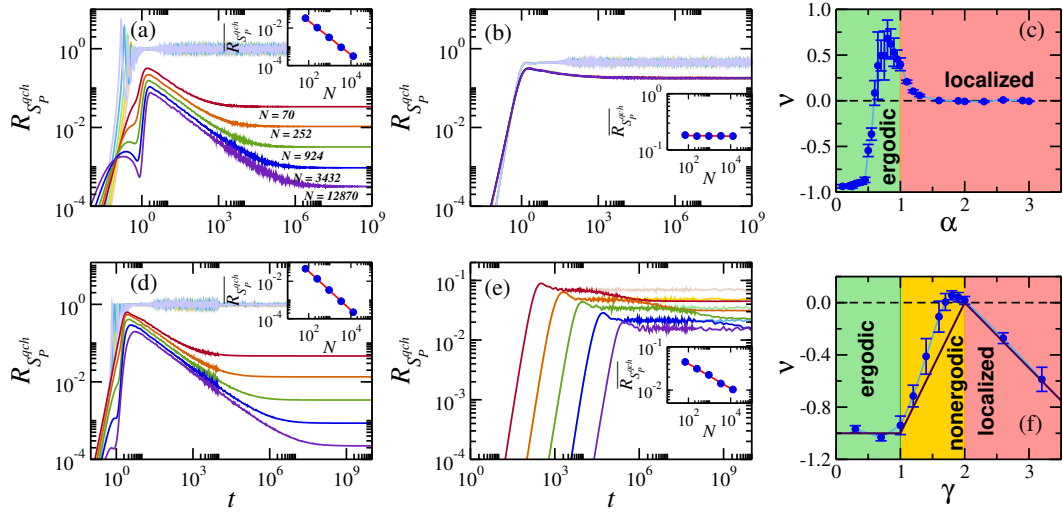


Figura 7.3: Evolución completa de $R_{SP}^{qch}(t)$ de la dinámica de un quench para (a,b) PBRM y (d,e) el RPE. Los paneles (a,d) son para el régimen deslocalizado ($\alpha = 0,3$, $\gamma = 0,7$) y los paneles (b,e) son para el régimen localizado ($\alpha = 3,0$, $\gamma = 2,6$). Los colores tenues son para el modelo aislado y los colores oscuros son para el modelo abierto. El análisis de escalamiento en el recuadro del panel (a) da el ajuste $\overline{R_{SP}^{qch}}^{\kappa \neq 0} = 1,52 D^{-0,90}$, en el panel (d) $\overline{R_{SP}^{qch}}^{\kappa \neq 0} = 3,83 D^{-1,0}$, y en el panel (e) $\overline{R_{SP}^{qch}}^{\kappa \neq 0} = 0,15 D^{-0,29}$. El panel (c) para el modelo PBRM [panel (f) para el RPE proporciona el exponente ν obtenido a partir del análisis de escala de $\overline{R_{SP}^{qch}}^{\kappa \neq 0} \propto D^\nu$ en función del parámetro de control α y γ respectivamente. La línea azul delgada en los paneles (c) y (f) son guías, la línea marrón gruesa en el panel (f) corresponde a la Ec. (7.22).

Los resultados para la fase localizada en la Fig. 7.3(b) son muy diferentes de la fase deslocalizada. Aunque las fluctuaciones relativas se reducen al abrir el sistema, $R_{SP^{qch}}^{\kappa \neq 0}(t) < R_{SP^{qch}}^{\kappa=0}(t)$, la varianza relativa para $\kappa \neq 0$ no disminuye a medida que D aumenta. El recuadro en la Fig. 7.3(b) deja en claro que $\overline{R_{SP^{qch}}^{\kappa \neq 0}}$ como función de D es aproximadamente constante. Esto contrasta con el caso de un estado de Gibbs con $\beta = 0,1$, para el cual $\overline{R_{SP^{\beta=0,1}}^{\kappa \neq 0}}$ en la fase localizada disminuye con D (no se muestra). Estos diferentes comportamientos indican el papel importante del estado inicial y los diversos grados de fluctuaciones en diferentes partes del espectro.

En la Fig. 7.3(c), analizamos la dependencia de las propiedades de autopromedio de $SP^{qch}(t)$ en el parámetro de control α . Nos centramos en los estados iniciales en el medio del espectro y la varianza relativa después de la saturación. Realizamos un análisis de escalamiento de

$$\overline{R_{SP^{qch}}^{\kappa \neq 0}} \propto D^\nu \quad (7.21)$$

y muestra ν como una función de α . Si $\nu \geq 0$, entonces $SP^{qch}(t \rightarrow \infty)$ no es autopromediable, y es autopromediable en caso contrario. La Figura 7.3(c) confirma que el autopromedio se cumple para estados iniciales con $E^{(0)} \sim 0$ solo en el régimen deslocalizado. Observamos el siguiente comportamiento:

- (i) El exponente $\nu < 0$ para $\alpha \lesssim 1/2$, donde PBRM es similar al caso GOE [117].
- (ii) A medida que α se acerca al punto crítico $\alpha_c = 1$, vemos que ν crece significativamente, lo que indica una fuerte falta de autopromedio. Esto es consistente con las expectativas de que, en un punto crítico, las estructuras de los estados varían considerablemente. El exponente ν alcanza su máximo cerca del punto de transición de deslocalización-localización.
- (iii) El valor de ν luego disminuye en la fase localizada. Para $1 < \alpha \lesssim 3/2$, donde se observa una dinámica superdifusiva en un tiempo corto, ν sigue siendo positivo. El exponente $\nu \rightarrow 0$ para $\alpha > 3/2$, donde la falta de autopromedio puede atribuirse a las colas de la ley de potencia de los eigenestados localizados.

Ensamble Rosenzweig-Porter

Estudiaremos las características del autopromedio en matrices de RPE (Ec. (3.3)) donde etiquetaremos el parámetro de control del modelo como $\gamma \in \mathbb{R}$. Este ensamble muestra una transición de una fase ergódica (caótica) ($\gamma < 1$) a una fase extendida no ergódica que tiene eigenestados multifractales ($1 < \gamma < 2$), y una fase localizada ($\gamma > 2$) [120, 140–142]. Estas transiciones de fase se han explorado experimentalmente en resonadores de microondas [230]. Se han observado fases multifractales no triviales similares a las del RPE en otros modelos de matrices aleatorias [231–238] y sistemas desordenados de muchos cuerpos [9, 239, 240]. En las Figs. 7.3(d)-(e), mostramos resultados para la varianza relativa de la probabilidad de supervivencia del RPE en la fase ergódica [$\gamma = 0,7$ en la Fig. 7.3(d)] y en la fase localizada [$\gamma = 2,6$ en la Fig. 7.3(e)]. Consideramos la dinámica de

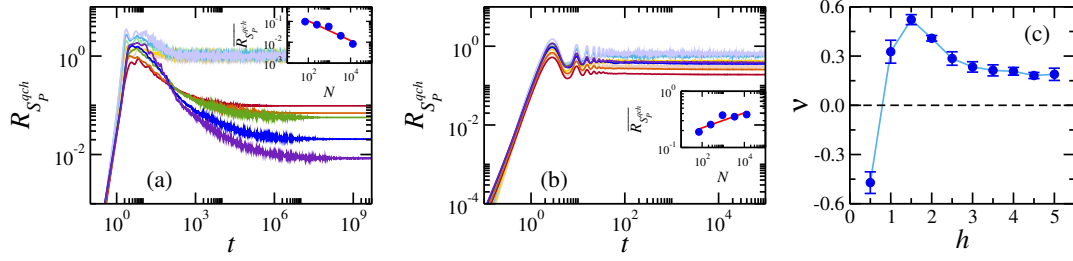


Figura 7.4: Evolución completa de $R_{SP}^{qch}(t)$ bajo el modelo de Heisenberg con desorden en (a) el régimen caótico ($h = 0,5$) y (b) el régimen localizado ($h = 5,0$). Los colores tenues corresponden al modelo aislado y los colores oscuros al modelo abierto. De arriba a abajo en tiempos largos en (a), las líneas oscuras corresponden a los siguientes tamaños de sistema: $L = 8 \rightarrow D = 70$, $L = 10 \rightarrow D = 252$, $L = 12 \rightarrow D = 924$, $L = 14 \rightarrow D = 3432$ y $L = 16 \rightarrow D = 12870$. El análisis de escala en el recuadro del panel (a) da el ajuste $\overline{R_{SP}^{qch}}^{\kappa \neq 0} = 0,92 D^{-0,47}$, y en el panel (b) $\overline{R_{SP}^{qch}}^{\kappa \neq 0} = 0,12 D^{0,13}$. El panel (c) da la potencia ν , obtenida a partir del análisis de escala de $\overline{R_{SP}^{qch}}^{\kappa \neq 0} \propto D^\nu$, como una función de la magnitud del desorden h .

un quench, donde el estado inicial proviene de la parte diagonal del RPE y tiene energía $E^{(0)}$ en el medio del espectro. Los colores tenues son para el modelo aislado y los colores oscuros son para el sistema abierto.

Los resultados para el régimen ergódico de RPE en la Fig. 7.3(d) son análogos a los del modelo PBRM en la Fig. 7.3(a), es decir, al abrir el sistema caótico, inducimos autopromedio y en tiempos largos $\overline{R_{SP}^{qch}}^{\kappa \neq 0} \propto 1/D$, como en el caso de GOE. Menos esperados son los resultados en la fase localizada en la Fig. 7.3(e), donde el autopromedio se cumple para todas las escalas de tiempo mostradas en la figura, incluso para el modelo aislado. Además, los efectos de la decoherencia energética en $R_{SP}^{qch}(t)$ se desarrollan solo en tiempos muy largos que aumentan a medida que D aumenta. Esto sugiere que las estructuras de los eigenestados a diferentes energías son muy similares en la fase localizada del RPE. Los resultados del análisis de escalamiento en la Ec. (7.21) para varios valores de γ se dan en la Fig. 7.3(f) e indican que

$$\nu \approx \begin{cases} -1, & \gamma \leq 1, \\ \gamma - 2, & 1 < \gamma < 2, \\ 1 - \gamma/2, & \gamma \geq 2. \end{cases} \quad (7.22)$$

De este modo, tenemos la siguiente imagen:

(i) En el régimen ergódico ($\gamma < 1$), los eigenestados en el centro del espectro son como vectores aleatorios y la varianza relativa asintótica escala como $1/D$, similar a GOE, por lo que $\nu \approx -1$.

(ii) En el régimen no ergódico de RPE ($1 < \gamma < 2$), la porción principal del espectro

consiste en eigenestados con $\langle \text{IPR} \rangle \propto D^{-D_2}$, donde D_2 es la dimensión de correlación fractal dado por $D_2 \approx 2 - \gamma$ [120]. De manera similar, la probabilidad de supervivencia asintótica de los estados iniciales en el medio del espectro escala como D^{-D_2} [241]. Encontramos numéricamente que la varianza relativa asintótica también escala aproximadamente como D^{-D_2} , por lo tanto $\nu \approx \gamma - 2$.

(iii) En $\gamma = 2$, donde RPE exhibe una transición de fase de segundo orden de la fase deslocalizada a la fase localizada, la longitud de correlación diverge siguiendo una ley de potencias y la densidad de las longitudes de localización en el centro del espectro se vuelve invariante de escala. Por lo tanto, la varianza de IPR es $\mathcal{O}(1)$ mientras que el IPR en sí también es $\mathcal{O}(1)$, lo que lleva a $\nu \approx 0$. De manera similar a lo que se observa para el PBRM en la Fig. 7.3(c), en el punto de transición de deslocalización-localización, la decoherencia de energía no puede imponer el autopromedio.

(iv) En el régimen localizado ($\gamma > 2$), la dimensión $D_2 = 0$ [120], por lo que la media asintótica de la probabilidad de supervivencia es $\mathcal{O}(1)$, mientras que la fluctuación en el IPR_0 está dictada por los pequeños componentes en la cola de los estados, lo que lleva a $\nu \approx 1 - \gamma/2$. En consecuencia, $\nu < 0$, lo que indica la presencia de autopromedio.

En resumen, al abrir el sistema, la probabilidad de supervivencia para los estados iniciales en el medio del espectro se vuelve autopromediable para el modelo PBRM y el RPE en el régimen caótico. El método falla en el punto crítico de transición de localización para ambos sistemas y en la fase localizada para el modelo PBRM.

7.4. Resultados: Modelo de Heisenberg de partículas de espín-1/2

El análisis del autopromedio realizado anteriormente para diferentes tipos de matrices aleatorias sienta las bases para el estudio del autopromedio en modelos físicos. En particular, las discusiones anteriores anticipan diferencias en las fases ergódicas y no ergódicas y una posible dependencia de la energía de los estados iniciales.

Consideramos el modelo Heisenberg unidimensional de espín 1/2 con desorden en cada sitio (Ec. (3.4)), que se ha investigado ampliamente en el contexto de la localización de muchos cuerpos tanto teórica como experimentalmente [12, 45, 143, 145, 150, 242]. Fijamos $J = 1$, h_k son números aleatorios distribuidos uniformemente en $[-h, h]$ y h es la magnitud del desorden, con h el parámetro de control y se utilizan condiciones de contorno abiertas.

Comenzamos el análisis del autopromedio en Sec. 7.4 con estados iniciales con energía $E^{(0)}$ en la mitad del espectro. Se consideran varios valores de h .

Resultados: Estados iniciales en el centro del espectro

En las Figs. 7.4(a)-(b), mostramos la varianza relativa de la probabilidad de supervivencia para el modelo de espín 1/2 desordenado en el régimen caótico [Fig. 7.4(a)] y en la fase localizada [Fig. 7.4(b)], donde el estado inicial tiene energía $E^{(0)}$ en el medio del espectro. Los colores tenues son para el modelo aislado y los colores oscuros son para el sistema abierto.

En lo profundo del régimen caótico ($h \lesssim 1$), los resultados son comparables a los de las matrices aleatorias en la Fig. 7.2(f) y en la Fig. 7.3(a,d). Los resultados siguen la imagen genérica, es decir, en la fase caótica y para estados iniciales proyectados en eigenestados de energía caótica, la probabilidad de supervivencia en las escalas de tiempo del hoyo de correlaciones y más allá se vuelve autopromediable si abrimos el sistema a un entorno de decoherencia. Sin embargo, observe que ν es negativo en el recuadro de la Fig. 7.4(a), pero no llega a -1 como en GOE. Esto se debe a que incluso los eigenestados altamente excitados en el medio del espectro no son ergódicos en el sentido de la medida de Haar [45].

El inicio del autopromedio podría facilitar la detección experimental del hoyo de correlaciones [229], ya que en presencia de un entorno de decoherencia, se podría reducir la cantidad de estados iniciales y realizaciones de desorden para los estudios experimentales. Pero la fuerza del decoherencia no debería ser demasiado grande para evitar la supresión del hoyo de correlaciones [163].

En la fase localizada, las fluctuaciones son grandes y no se logra el autopromedio a través del entorno. El escenario es incluso peor que en el modelo PBRM de la Fig. 7.3(b), ya que para el modelo de espín de la Fig. 7.4(b), $R_{SPqch}^{\kappa \neq 0}(t)$ aumenta con D . Este comportamiento también se muestra para el valor asintótico de la varianza relativa en el recuadro de la Fig. 7.4(b). En función de los tamaños de sistema disponibles, no podemos decir si $\overline{R_{SPqch}^{\kappa \neq 0}}$ convergerá eventualmente a $\overline{R_{SPqch}^{\kappa=0}}$, pero los resultados apuntan a las dificultades asociadas con el análisis numérico de la localización de muchos cuerpos. El problema no es solo el espacio de Hilbert exponencialmente grande en L sino también las grandes fluctuaciones con las que uno tiene que lidiar [37].

En la Fig. 7.4(c), se muestra ν obtenido con la Eq. (7.21) como una función de la fuerza del desorden h . Existe un paralelismo con el análisis para el modelo PBRM en la Fig. 7.3(c), en el sentido de que ambos modelos no muestran autopromedio fuera del régimen caótico, pero los resultados son peores para el modelo de espín. En este caso, $\nu > 0$ para cualquier $h > 1$, mientras que para el modelo PBRM, $\nu > 0$ solo en la vecindad del punto crítico.

La comparación entre Fig. 7.3(c), Fig. 7.3(f), y Fig. 7.4(c) alimenta la especulación sobre el papel de ν en el estudio de la localización de muchos cuerpos. Por ejemplo, de manera similar al PBRM y RPE, el exponente ν para el modelo de espín desordenado también alcanza un valor máximo en un punto que podría estar asociado con una transición. Sin embargo, dados los tamaños limitados de los sistemas disponibles para estudios numéricos, es difícil profundizar en este tema.

Resultados: Estados iniciales en las colas del espectro

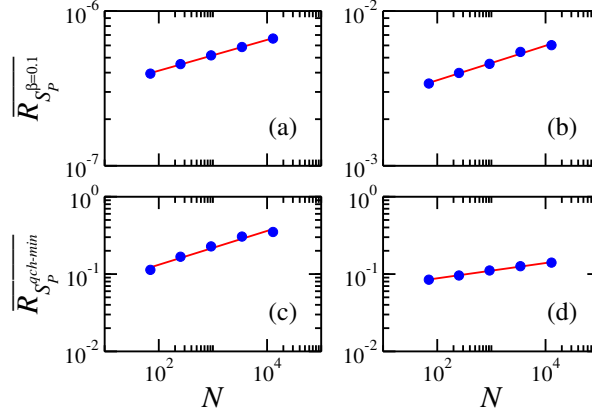


Figura 7.5: Promedio a tiempo infinito de la varianza relativa, (a,b) $\overline{R_{S_P^{\beta=0.1}}^{\kappa \neq 0}}$ y (c,d) $\overline{R_{S_{Pqch-min}}^{\kappa \neq 0}}$, en función del tamaño del espacio de Hilbert. La evolución se realiza bajo el modelo de Heisenberg con desorden en (a,c) el régimen caótico y (b,d) la fase localizada. Contrariamente a la Fig. 7.4, el estado inicial en la dinámica del quench tiene la energía más baja. Los ajustes son: (a) $\overline{R_{S_P^{\beta=0.1}}^{\kappa \neq 0}} = 2,5 \times 10^{-7} D^{0,10}$ (b) $\overline{R_{S_P^{\beta=0.1}}^{\kappa \neq 0}} = 2,3 \times 10^{-3} D^{0,10}$ (c) $\overline{R_{S_{Pqch-min}}^{\kappa \neq 0}} = 4,7 \times 10^{-2} D^{0,22}$, y (d) $\overline{R_{S_{Pqch-min}}^{\kappa \neq 0}} = 5,7 \times 10^{-2} D^{0,09}$.

Motivados por la discusión en la Sec. 7.3 sobre el diferente comportamiento con d de $\overline{R_{S_{Pqch}}^{\kappa \neq 0}}$ (energía del estado inicial en el medio del espectro) y $\overline{R_{S_{P^{\beta=0.1}}}^{\kappa \neq 0}}$ (energía del estado inicial en el borde inferior del espectro) para el modelo PBRM en la fase localizada, ahora investigamos cómo los resultados presentados en la Fig. 7.4 para el modelo de espín se ven afectados por la elección de los estados iniciales. Para este estudio, consideramos solo estados iniciales con energías muy bajas, por lo que nos referimos a la varianza relativa asintótica obtenida para la dinámica del quench como $\overline{R_{S_{Pqch-min}}^{\kappa \neq 0}}$.

En la Fig. 7.5, presentamos un análisis de escala del promedio de tiempo infinito de la varianza relativa para el estado inicial de Gibbs con $\beta = 0,1$ para el modelo de espín en la fase caótica [Fig. 7.5(a)] y localizada [Fig. 7.5(b)] y para el estado inicial extinguido en la parte de menor energía del espectro para el modelo de espín en la fase caótica [Fig. 7.5(c)] y localizada [Fig. 7.5(d)]. Todos los paneles manifiestan una falta de autopromedio. El exponente ν es pequeño pero positivo en todos los casos. El peor escenario ocurre en el régimen caótico para la dinámica del quench en el borde del espectro [Fig. 7.5(c)]. Las correlaciones espectrales como en la teoría de matrices aleatorias y los eigenestados caóticos solo están presentes en la mayor parte del espectro de los sistemas cuánticos caóticos de muchos cuerpos, mientras que los bordes exhiben estados con estructuras altamente fluctuantes [105, 243]. Esto está relacionado con la densidad de estados de los sistemas de muchos cuerpos con acoplamientos de dos cuerpos, que es gaussiana [173], lo que implica

que los estados más cercanos a los bordes están más localizados.

7.5. Conclusiones

Abrir los sistemas cuánticos de muchos cuerpos a un entorno con decoherencia de energía tienen efecto en reducir las fluctuaciones dinámicas lo que motivo a estudiar el autopromedio en la probabilidad de supervivencia en los sistemas físicos.

Se mostró que en matrices completamente aleatorias de GOE, abrir el sistema garantiza el autopromedio para cualquier estado inicial, mientras que en matrices de PBRM y matrices aleatorias de Rosenzweig-Porter, donde existe una transición a una fase localizada, no se logra el autopromedio para su respectivo punto crítico. Además, para matrices de PBRM, la probabilidad de supervivencia continua siendo no autopromediable en la fase localizada debido al decaimiento de las colas de la distribución de energía de los eigenestados localizados. De acuerdo con los resultados anteriores, la probabilidad de supervivencia se vuelve autopromediable al abrir el modelo de espines 1/2 con desorden en el régimen caótico y para estados iniciales en la mitad del espectro. Cualquier cambio en el régimen o en el estado inicial puede afectar el resultado. El autopromedio no se cumple para ningún estado inicial cuando el modelo de espines deja de ser caótico, y lo mismo sucede incluso en el régimen caótico si el estado inicial está lejos de la mitad del espectro.

La capacidad de asegurar el autopromedio en tiempos largos está directamente determinada por las estructuras de los eigenestados en la región del espectro de la energía del estado inicial. Esto se debe a que la varianza relativa asintótica de la probabilidad de supervivencia en sistemas abiertos, $\overline{R_{SP}^{\kappa \neq 0}}$, coincide con la varianza relativa del IPR del estado inicial [véase la Ec. (7.14)]. La falta de autopromedio indica que las estructuras de los estados varían significativamente, como sucede en los puntos críticos. Por lo tanto, el comportamiento de $\overline{R_{SP}^{\kappa \neq 0}}$ nos ayuda a investigar la estructura de los eigenestados en diferentes partes del espectro y una fuerte falta de autopromedio sugiere la presencia de puntos críticos. El análisis en este capítulo indica que abrir ligeramente el sistema a un entorno con una decoherencia de energía debería ayudar con la detección experimental del caos cuántico de muchos cuerpos en sistemas complejos fuera de equilibrio [229]. Esto se debe a que el entorno asegura el autopromedio en las escalas de tiempo donde emerge el hoyo de correlaciones.

Capítulo 8

Conclusiones

El objetivo principal de esta tesis fue contribuir efectivamente en la comprensión de la dinámica cuántica fuera del equilibrio en sistemas cuánticos de muchos cuerpos. Nos enfocamos en el estudio de la probabilidad de supervivencia como una observable que contiene bastante información sobre las correlaciones espectrales y las correlaciones dinámicas del sistema. Propusimos la generalización de la probabilidad ($SP_q(t)$) de supervivencia y de la densidad local de estados (gLDoS) cuyas propiedades permitieron profundizar en el entendimiento sobre la dinámica cuántica. En particular la $SP_q(t)$ permitió observar la relevante contribución de las correlaciones de las componentes de los eigenestados sobre la dinámica del sistema. Se analizó la desviación estándar de la densidad de estados generalizada gLDoS, $\langle\sigma_q\rangle$ y se propone como una cantidad útil para estudiar la transición extendida-localizada de sistemas cuánticos de muchas partículas. El estudio de la dinámica vía la $SP_q(t)$ reveló los efectos de las correlaciones espectrales fuera de la fase extendida. El estudio del decaimiento como ley de potencias de $SP_q(t)$ dio lugar a los análisis del carácter multifractal de los eigenestados vía la función de correlación $C(t)$ estableciendo una conexión cuantitativa con la multifractalidad, caracterizada por la dimensión de correlación D_2 y la dinámica del sistema. Nuestros resultados demostraron que la estructura de las componentes de los eigenestados son relevantes en el desarrollo de la dinámica. Nuestros resultados indican que es posible estudiar las características multifractales ahora sobre la dinámica de una función de correlación generalizada y extender nuestros estudios de multifractalidad en sistemas de mayor dimensionalidad.

Además se propone la detección del hoyo de correlaciones como un indicador de caos en sistemas cuánticos de muchos cuerpos. Dicha propuesta fue estudiada en diversos modelos y cantidades dinámicas con bastante éxito, mismo que reflejó al ser verificada en un circuito cuántico y experimentalmente en un arreglo de cúbits superconductores lo que refuerza la relevancia y aplicabilidad de nuestras contribuciones. Por último se mostró que la característica del autopromedio depende

de la selección del estado inicial según sea el modelo y en que fase se encuentra. La naturaleza del estado inicial y del régimen en que cada modelo se encuentra se refleja de inmediato en el comportamiento de $SP(t)$. Motivados por estos resultados, nuestra atención se encuentra dirigida a estudiar las características multifractales de los eigenestados en sistemas abiertos así como sus efectos con la dinámica del sistema vía la función de correlación.

Por tanto nuestros resultados motivan a profundizar en el estudio de la dinámica en sistemas cuánticos de muchos cuerpos fuera de equilibrio tanto en entornos aislados como abiertos.

Cada capítulo, aunque concluyente, deja muchas preguntas abiertas y dan pie a continuar con nuevas discusiones. Todos los resultados discutidos aquí han contribuido exitosamente en el estudio de la dinámica cuántica, a los estudios de multifractalidad y algunos de ellos dirigidos al campo experimental y al estudio de sistemas abiertos. Finalmente estos resultados han sido reportados en revistas especializadas.

Apéndice A

Multifractalidad en cadenas de Fibonacci

Nos interesa estudiar un modelo de Fibonacci como una cadena de L fermiones no interactuantes, descrito por el hamiltoniano,

$$H = \sum_{k=1}^{L-1} J_{k,k+1} \left[a_k^\dagger a_{k+1} + a_k a_{k+1}^\dagger \right] + \sum_{k=1}^L t_k a_k^\dagger a_k \quad (\text{A.1})$$

donde $a_k^\dagger, a_k$ son los operadores de creación y aniquilación respectivamente de un fermión en el sitio k y t_k es un potencial binario en el sitio donde $t_k = (t_A, t_B)$ y la cadena de valores en los L sitios se obtiene aplicando repetidamente la regla de sustitución de Fibonacci, dada por

$$\begin{aligned} t_A &\rightarrow t_A t_B \\ t_B &\rightarrow t_A \end{aligned}$$

y $J_{k,k+1}$ una energía de acoplamiento discreta y se modula de acuerdo con la secuencia de Fibonacci anterior. Trabajaremos sobre el modelo diagonal de Fibonacci donde,

$$\begin{aligned} J_{k,k+1} &= J = 1, \\ t_k &= \begin{cases} t_A \\ t_B \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Para este modelo, podemos elegir $t_A = -t_B = V$ y $t_A/t_B = V$, donde V funcionará como nuestro parámetro de control. Estudiaremos la evolución temporal de un estado inicial $|\Psi(0)\rangle$ mediante el desplazamiento cuadrático medio [244, 245],

$$\Delta x^2(t) = \sum_{k=1}^D (k - D/2)^2 |\langle \Psi(0) | \Psi_k(t) \rangle|^2 \quad (\text{A.3})$$

Donde nuestro estado inicial es un estado con una energía en el medio del espectro. La dependencia temporal de la Ec. (A.3) es

$$\Delta x^2(t) \sim t^\epsilon \quad (\text{A.4})$$

donde $\epsilon = 0$ implica localización, $\epsilon = 2$ denota una fase extendida. Estudios previos en [71] indican la conexión inmediata del exponente multifractal $\tilde{D}_2$ de la Ec. (2.13) con el exponente δ del decaimiento como ley de potencias de la función de correlación $C(t)$ de $SP(t)$ para cadenas de Fibonacci de secuencia igual $t_A = -t_B = V$ y el modelo no interactuante de Aubry-André.

A.1. Resultados

Comenzamos nuestro análisis reproduciendo algunos resultados de [71] y [244, 245] para el modelo diagonal de Fibonacci. La Fig. A.1 muestra el desplazamiento cuadrático medio. En el panel (a), para $t_A = -t_B = V$, obtuvimos los resultados reportados en [244, 245], donde el exponente ϵ de $\Delta x^2(t)$ indica que el sistema está en régimen extendido para $V \rightarrow 0$ y que el sistema entra a la fase localizada para $1.4 \lesssim V$. Añadimos resultados para el modelo diagonal de Fibonacci, pero esta vez modificamos la secuencia en la cadena de Fibonacci, como $t_A = V * t_B$, lo que generó un comportamiento interesante en ϵ . En esta ocasión, parece que desplazamos los regímenes del sistema; ahora el sistema presenta un régimen extendido para $V = 1$. Observamos que un cambio en la secuencia de la cadena de Fibonacci afecta el comportamiento del sistema con respecto a V . Por lo tanto, decidimos explorar ambos tipos de secuencia para el modelo diagonal de Fibonacci.

La Fig. A.2 muestra los resultados numéricos para la probabilidad de supervivencia $SP(t)$ (Ec. (4.1))

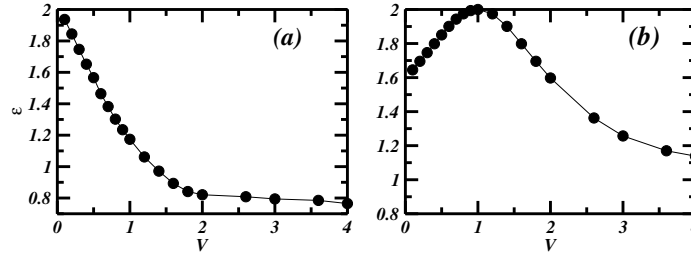


Figura A.1: Exponente ϵ del desplazamiento cuadrático medio $\Delta x^2(t)$ de un estado inicial cuya energía se encuentra en el centro del espectro del modelo diagonal de Fibonacci con $D = 1001$ sitios frente a diferentes valores de V . El panel (a) corresponde a la secuencia $t_A = -t_B = V$ y (b) a la secuencia $t_A = V * t_B$ con $t_B = 1$.

y su función de correlación $C(t)$ para una única realización del modelo diagonal de Fibonacci con una secuencia igual a $t_A = -t_B = V$. Los ajustes para obtener el exponente γ del decaimiento como ley de potencias de $SP(t)$ se realizaron sobre el running-average de $SP(t)$ (curvas color negro). Podemos observar que la región del decaimiento como ley de potencias es amplia y clara. El exponente aumenta

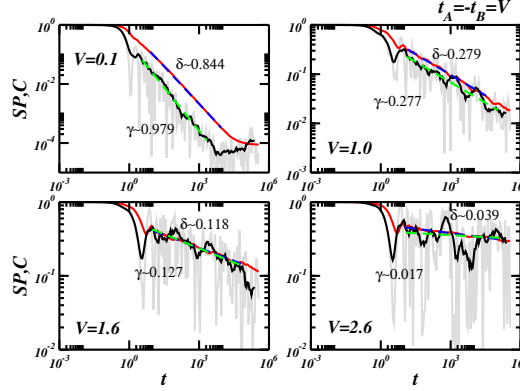


Figura A.2: $SP(t)$ y $C(t)$ para el modelo diagonal de Fibonacci con una secuencia igual a $t_A = -t_B = V$ para diferentes valores del parámetro de control V . Las curvas grises corresponden a los resultados numéricos de $SP(t)$, las curvas de color negro son resultado de un running average sobre SP y las curvas rojas son para $C(t)$. Los ajustes para obtener el exponente γ del decaimiento como ley de potencias de $SP(t)$ se realizaron sobre el running-average y sobre la misma región de tiempo se obtuvo el exponente δ del decaimiento como ley de potencias para $C(t)$. Las líneas discontinuas verdes representan ajustes en la región de decaimiento de la ley de potencia para $SP(t)$ y las líneas discontinuas azules son ajustes sobre a $C(t)$. El tamaño del sistema es $D = 17711$ y se ha realizado una sola realización. Nuestro estado inicial es aquel cuya energía se encuentra en el centro del espectro.

a medida que V aumenta. También podemos observar que, a medida que el sistema entra en la región localizada, el ruido aumenta, pero el decaimiento se observa claramente.

El recuadro de la Fig. A.3 muestra el comportamiento de la función Ec. 2.13 con respecto a l , tomamos los ajustes en una región $l \rightarrow 0$ y donde se exhibe un comportamiento lineal con pendiente positiva, en este caso y para l pequeña el crecimiento de la Ec. 2.13 es claro. Observamos como la función $\beta(l)$ inicia con una pendiente cercana a 1 y se va haciendo cada vez más horizontal conforme V aumenta, es decir, el exponente $\tilde{D}_2$ se acerca a cero, lo cual es esperado de una cantidad que mide la estructura de los eigenestados del sistema pero es importante notar que $\tilde{D}_2 \sim 0.8479$ para la región extendida como reporta [71], en este sistema tenemos este límite superior y no coincide con $\tilde{D}_2 = 1$ para GOE, sin embargo, el análisis dinámico por $\Delta x^2(t)$ se obtiene un exponente $\epsilon = 2$ en este régimen.

La Fig. A.3 es una reproducción de los resultados de [71] y muestra una comparación entre los exponentes γ de $SP(t)$, δ de $C(t)$ obtenidos mediante un ajuste como en Fig. A.2 y el exponente $\tilde{D}_2$ obtenido por Ec. 2.13. Observamos que no hay correspondencia entre γ y δ y $\tilde{D}_2$ para valores $h < 0.5$. El origen de γ dentro de la fase extendida se debe a las colas del espectro de energía, fuera de esta región se cree que su decaimiento se atribuye a las propiedades multifractales de los eigenestados del sistema. Por lo tanto, ni δ ni $\tilde{D}_2$ no detectan las contribuciones de las correlaciones del espectro de energía dentro de la región extendida. Se observa inmediatamente una correspondencia entre

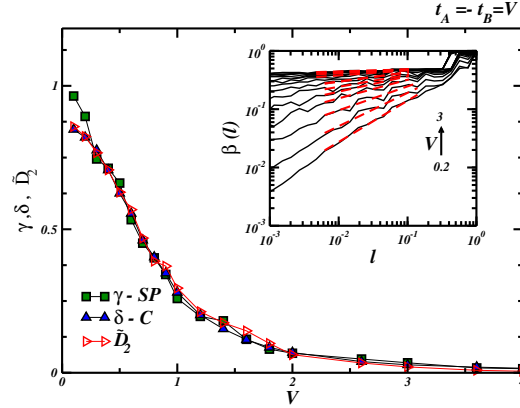


Figura A.3: La figura principal muestra los exponentes γ, δ y $\tilde{D}_2$ con respecto a V para el modelo diagonal de Fibonacci con una secuencia igual a $t_A = -t_B = V$. Los exponentes γ y δ se obtuvieron mediante $SP(t)$ y $C(t)$ para una realización con un tamaño de sistema $D = 17711$. $\tilde{D}_2$ se obtuvo mediante el ajuste de la Ec. (2.13). En el recuadro se muestra el comportamiento de la Ec. (2.13) para el modelo diagonal Fibonacci con una secuencia igual a $t_A = -t_B = V$ para diferentes valores de V (líneas color negro). Los resultados comienzan en $V=0.2$ con incrementos de 0.2 hasta $V=3$. Las líneas rojas son ajustes sobre $\beta(l)$ (Ec. (2.13)). El tamaño del sistema es $D = 17711$ y se ha tomado una realización. Nuestro estado inicial es aquel cuya energía está en el centro del espectro.

δ y $\tilde{D}_2$. Esto significa que δ mide la estructura de los componentes del estado inicial según la distribución del espectro de energía. Esta figura muestra la primera conexión de la multifractalidad con la dinámica del sistema ya que $\tilde{D}_2$ se relaciona directamente con el exponente δ a través de la función de correlación de $C(t)$. Podríamos afirmar que la correspondencia entre γ, δ y $\tilde{D}_2$ indica que las correlaciones del espectro de energía dejan de ser relevantes para valores de $0,5 < h$, pero existen.

La Fig. A.4 muestra los resultados numéricos la probabilidad de supervivencia $SP(t)$ (líneas grises) y su función de correlación $C(t)$ para una única realización del modelo diagonal de Fibonacci con una secuencia igual a $t_A = V * t_B$ fijando $t_B = 1.0$. El exponente γ del decaimiento como ley de potencias de $SP(t)$ se obtuvieron del running-average de $SP(t)$ (curvas color negro). Se observa que $SP(t)$ y $C(t)$ se comportan, en general, muy bien para todos los valores de V ; la región del decaimiento como ley de potencias es clara amplia como para obtener un buen ajuste. El comportamiento de $SP(t)$ para esta secuencia es mucho menos ruidoso que el de la secuencia anterior de la Fig. A.2, por lo que resulta más conveniente al estudiar los decaimientos. Sin embargo, los resultados de la Fig. A.1 muestran cómo el cambio de secuencia tiene efectos importantes en la transición del sistema de una fase a otra. Estos efectos se reflejan en la dinámica, donde el sistema alcanza la fase localizada para valores muy grandes de V . Observamos que el exponente δ crece a medida que V crece. El recuadro de la Fig. A.5 muestra el comportamiento de la función Eq.2.13 con respecto a l para el modelo Fibonacci diagonal para la secuencia $t_A = V * t_B$ con $t_B = 1$. Tomamos los ajustes en una región $l \rightarrow 0$ y donde se exhibe un comportamiento lineal con pendiente positiva, en este caso y para l

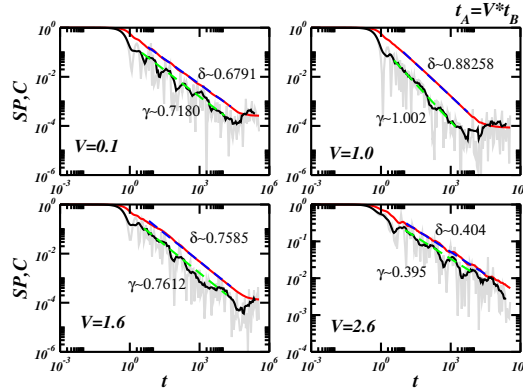


Figura A.4: $SP(t)$ y $C(t)$ para el modelo diagonal de Fibonacci con una secuencia igual a $t_A = V * t_B$ para diferentes valores del parámetro de control V . Las curvas grises corresponden a los resultados numéricos de $SP(t)$, las curvas de color negro son resultado de un running-average sobre SP y las curvas rojas son para $C(t)$. Los ajustes para obtener el exponente γ del decaimiento como ley de potencias de $SP(t)$ se realizaron sobre el running-average y sobre la misma región de tiempo se obtuvo el exponente δ del decaimiento como ley de potencias para $C(t)$. Las líneas discontinuas verdes representan ajustes en la región de decaimiento de la ley de potencia para $SP(t)$ y las líneas discontinuas azules son ajustes sobre a $C(t)$. El tamaño del sistema es $D = 17711$ y se ha realizado una sola realización. Nuestro estado inicial es aquel cuya energía se encuentra en el centro del espectro.

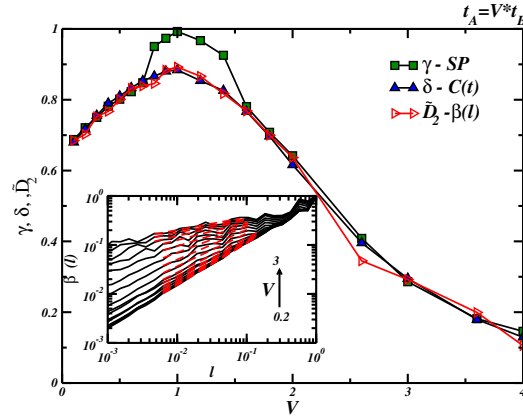


Figura A.5: La figura principal muestra los exponentes γ, δ y $\tilde{D}_2$ con respecto a V para el modelo diagonal de Fibonacci con una secuencia igual a $t_A = V * t_B$ con $t_B = 1$. Los exponentes γ y δ se obtuvieron mediante $SP(t)$ y $C(t)$ para una realización con un tamaño de sistema $D = 17711$. $\tilde{D}_2$ se obtuvo mediante el ajuste de la Ec. (2.13). En el recuadro se muestra el comportamiento de la Ec. (2.13) para el modelo diagonal Fibonacci con una secuencia igual a $t_A = V * t_B$ con $t_B = 1$ para diferentes valores de V (líneas color negro). Los resultados corresponden a puntos de V comenzando en $V = 0.2$ con incrementos de 0.2 hasta $V = 3$. Las líneas rojas son ajustes sobre $\beta(l)$ (Ec. (2.13)). El tamaño del sistema es $D = 17711$ y se ha tomado una realización. Nuestro estado inicial es aquel cuya energía está en el centro del espectro.

pequeño el crecimiento de Ec.(2.13) es claro. Aquí podemos observar los efectos que tiene cambiar la secuencia sobre $\tilde{D}_2$. El comportamiento de la pendiente de $\beta(l)$ para $V = 1$ es más grande que para cualquier valor de V .

La Fig. A.5 muestra una comparación entre los exponentes γ de $SP(t)$, δ de $C(t)$ y el exponente $\tilde{D}_2$ de la Ec. 2.13 para el modelo diagonal de Fibonacci con una secuencia igual a $t_A = V * t_B$ con $t_B = 1,0$. Debido al cambio en la secuencia de Fibonacci, la transición del sistema se ha desplazado, revelando una región de deslocalización más amplia que en la Fig. A.3.

Por lo tanto, las propiedades del espectro, así como la estructura de los componentes del estado inicial del sistema, dependen del cambio de la secuencia de Fibonacci. Se observa cómo el exponente γ de $SP(t)$ se aproxima a D_2 alrededor de $V = 1$, caso similar al de la Fig. A.3 para $V < 0,5$. Existe una muy buena correspondencia entre $\tilde{D}_2$ y δ para cada valor de V y γ, δ y $\tilde{D}_2$ para cada valor de V fuera de la región alrededor de $V = 1$. Esta configuración de la secuencia de Fibonacci nos permite extender la región de transición del modelo. Esta figura confirma lo anterior para el modelo diagonal de Fibonacci con la secuencia $t_A = -t_B = V$, independientemente de la secuencia $\delta = \tilde{D}_2$ y $\tilde{D}_2 \neq 1$, incluso dentro de la región extendida. El exponente γ solo coincide con δ y $\tilde{D}_2$ fuera de la región extendida lo que indica que γ contiene información sobre las correlaciones espectrales y la estructura de los eigenestados.

Bibliografía

- [1] Jens Eisert, M. Friesdorf, and C. Gogolin. Quantum many-body systems out of equilibrium. *Nat. Phys.*, 11:124–130, 2015.
- [2] J. M. Deutsch. Quantum statistical mechanics in a closed system. *Phys. Rev. A*, 43:2046, 1991.
- [3] P. W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 109:1492, 1958.
- [4] A. Polkovnikov. Microscopic diagonal entropy and its connection to basic thermodynamic relations. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 326:486, 2011.
- [5] R. Nandkishore and D.A. Huse. Many-body localization and thermalization in quantum statistical mechanics. *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, 6:15, 2015.
- [6] Maksym Serbyn, Z. Papić, and Dmitry A. Abanin. Local conservation laws and the structure of the many-body localized states. *Phys. Rev. Lett.*, 111:127201, 2013.
- [7] Dmitry A. Abanin, Ehud Altman, Immanuel Bloch, and Maksym Serbyn. Colloquium: Many-body localization, thermalization, and entanglement. *Rev. Mod. Phys.*, 91:021001, May 2019.
- [8] Jae yoon Choi, Sebastian Hild, Johannes Zeiher, Peter Schauß, Antonio Rubio-Abadal, Tarik Yefsah, Vedika Khemani, David A. Huse, Immanuel Bloch, and Christian Gross. Exploring the many-body localization transition in two dimensions. *Science*, 352(6293):1547–1552, 2016.
- [9] David J. Luitz, Nicolas Laflorencie, and Fabien Alet. Many-body localization edge in the random-field Heisenberg chain. *Phys. Rev. B*, 91:081103, 2015.
- [10] D. M. Basko, I. L. Aleiner, and B. L. Altshuler. Metal-insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states. *Ann. Phys.*, 321:1126, 2006.
- [11] N. Y. Yao, C. R. Laumann, S. Gopalakrishnan, M. Knap, M. Müller, E. A. Demler, and M. D. Lukin. Many-body localization in dipolar systems. *Phys. Rev. Lett.*, 113:243002, 2014.

- [12] Michael Schreiber, Sean S. Hodgman, Pranjali Bordia, Henrik P. Lüschen, Mark H. Fischer, Ronen Vosk, Ehud Altman, Ulrich Schneider, and Immanuel Bloch. Observation of many-body localization of interacting fermions in a quasirandom optical lattice. *Science*, 349:842–845, 2015.
- [13] T. Guhr, A. Mueller-Gröeling, and H. A. Weidenmüller. Random matrix theories in quantum physics: Common concepts. *Phys. Rep.*, 299:189, 1998.
- [14] V. E. Kravtsov. Random matrix theory: Wigner-dyson statistics and beyond. (lecture notes of a course given at sissa (trieste, italy)), 2012.
- [15] H. A. Bethe, *Z. Phys.* **71**, 205 (1931); M. Karbach and G. Müller, *Comput. Phys.* **11**, 36 (1997).
- [16] W. X. Zhang, P. Cappellaro, N. Antler, B. Pepper, D. G. Cory, , V. V. Dobrovitski, C. Ramanathan, and L. Viola. NMR multiple quantum coherences in quasi-one-dimensional spin systems: Comparison with ideal spin-chain dynamics. *Phys. Rev. A*, 80:052323, 2009.
- [17] K. R. Thurber, A. W. Hunt, T. Imai, and F. C. Chou. ^{17}O NMR study of $q=0$ spin excitations in a nearly ideal $s=1/2$ 1d Heisenberg antiferromagnet, Sr_2CuO_3 , up to 800 K. *Phys. Rev. Lett.*, 87:247202, 2001.
- [18] H. Glimmer, S. Wessel, J. Schmiedmayer, and L. Santos. Ultracold atoms in optical lattices with random on-site interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 95:170401, Oct 2005.
- [19] Daniel Greif, Thomas Uehlinger, Gregor Jotzu, Leticia Tarruell, and Tilman Esslinger. Short-range quantum magnetism of ultracold fermions in an optical lattice. *Science*, 340:1307–1310, 2013.
- [20] E. J. Torres-Herrera and Lea F. Santos. Dynamics at the many-body localization transition. *Phys. Rev. B*, 92:014208, 2015.
- [21] E. J. Torres-Herrera and Lea F. Santos. Extended nonergodic states in disordered many-body quantum systems. *Annalen der Physik*, 529(7):1600284–n/a, 2017. 1600284.
- [22] J. Goold, T. Fogarty, N. Lo Gullo, M. Paternostro, and Th. Busch. Orthogonality catastrophe as a consequence of qubit embedding in an ultracold Fermi gas. *Phys. Rev. A*, 84:063632, 2011.
- [23] Allan Tameshtit and J. E. Sipe. Survival probability and chaos in an open quantum system. *Phys. Rev. A*, 45:8280–8283, Jun 1992.

- [24] Adolfo del Campo and Tadashi Takayanagi. Decoherence in Conformal Field Theory. *JHEP*, 2020(170):170, Feb 2020.
- [25] Zhenyu Xu, Aurelia Chenu, Tomaž Prosen, and Adolfo del Campo. Thermofield dynamics: Quantum chaos versus decoherence. *Phys. Rev. B*, 103:064309, Feb 2021.
- [26] Apollonas S. Matsoukas-Roubeas, Federico Roccati, Julien Cornelius, Zhenyu Xu, Aurélia Chenu, and Adolfo del Campo. Non-Hermitian Hamiltonian deformations in quantum mechanics. *J. High Energy Phys.*, 2023(1):60, Jan 2023.
- [27] Apollonas S. Matsoukas-Roubeas, Tomaž Prosen, and Adolfo del Campo. Quantum chaos and coherence: Random parametric quantum channels, 2023.
- [28] N.S. Krylov and V.A. Fock. On the uncertainty relation between time and energy. *J. Phys. USSR*, 11:112 – 120, 1947.
- [29] N.S. Krylov and V. Fock. On two interpretations of the uncertainty relations between energy and time. *JETP*, 17:93–107, 1947.
- [30] V. A. Fock. Criticism of an attempt to disprove the uncertainty relation between time and energy. *Soviet Physics JETP*, 15:784, 1962.
- [31] Alfréd Rényi et al. On measures of entropy and information. In *Proceedings of the fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability*, volume 1, pages 547–561. Berkeley, California, USA, 1961.
- [32] Ferdinand Evers and Alexander D. Mirlin. Anderson transitions. *Rev. Mod. Phys.*, 80:1355–1417, 2008.
- [33] F. Wegner. Inverse participation ratio in $2 + \varepsilon$ dimensions. *Z. Phys. B*, 36:209, 1980.
- [34] C. M. Soukoulis and E. N. Economou. Fractal character of eigenstates in disordered systems. *Phys. Rev. Lett.*, 52:565–568, Feb 1984.
- [35] Y. Y. Atas, E. Bogomolny, O. Giraud, and G. Roux. Distribution of the ratio of consecutive level spacings in random matrix ensembles. *Phys. Rev. Lett.*, 110:084101, Feb 2013.
- [36] Y. Y. Atas and E. Bogomolny. Calculation of multi-fractal dimensions in spin chains. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 372(2007), 2013.
- [37] Andrei Solórzano, Lea F. Santos, and E. Jonathan Torres-Herrera. Multifractality and self-averaging at the many-body localization transition. *Phys. Rev. Research*, 3:L032030, Jul 2021.

- [38] Saúl Pilatowsky-Cameo, David Villaseñor, Miguel A. Bastarrachea-Magnani, Sergio Lerma-Hernández, Lea F. Santos, and Jorge G. Hirsch. Identification of quantum scars via phase-space localization measures. *Quantum*, 6:644, Feb 2022.
- [39] P G Harper. Single band motion of conduction electrons in a uniform magnetic field. *Proceedings of the Physical Society. Section A*, 68(10):874, oct 1955.
- [40] S. Aubry and G. André. Analyticity breaking and anderson localization in incommensurate lattices. *Annals of the Israel Physical Society*, 3:133, 1980.
- [41] T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey, and S. S. M. Wong. Random-matrix physics – spectrum and strength fluctuations. *Rev. Mod. Phys.*, 53:385, 1981.
- [42] V. Zelevinsky, B. A. Brown, N. Frazier, and M. Horoi. The nuclear shell model as a testing ground for many-body quantum chaos. *Phys. Rep.*, 276:85–176, 1996.
- [43] F. Borgonovi, F. M. Izrailev, L. F. Santos, and V. G. Zelevinsky. Quantum chaos and thermalization in isolated systems of interacting particles. *Phys. Rep.*, 626:1, 2016.
- [44] Luca D’Alessio, Yariv Kafri, Anatoli Polkovnikov, and Marcos Rigol. From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics. *Advances in Physics*, 65(3):239–362, 2016.
- [45] D. Luitz and Y. Bar Lev. The ergodic side of the many-body localization transition. *Ann. Phys.(Berlin)*, 529(7):1600350, 2017.
- [46] Jan Šuntajs, Janez Bonča, Tomaž Prosen, and Lev Vidmar. Quantum chaos challenges many-body localization. *Phys. Rev. E*, 102:062144, Dec 2020.
- [47] G. Casati, B. V. Chirikov, I. Guarneri, and F. M. Izrailev. Quantum ergodicity and localization in conservative systems: the wigner band random matrix model. *Phys. Lett. A*, 223:430, 1996.
- [48] Y. V. Fyodorov, O. A. Chubykalo, F. M Izrailev, and G. Casati. Wigner random banded matrices with sparse structure: Local spectral density of states. *Phys. Rev. Lett.*, 76:1603–1606, Mar 1996.
- [49] C. A. Bertulani and V. G. Zelevinsky. Excitation of multiphonon giant resonance states in relativistic heavy-ion collisions. *Nuc. Phys. A*, 568:931–952, 1994.
- [50] C. H. Lewenkopf and V. G. Zelevinsky. Single and multiple giant resonances: Counterplay of collective and chaotic dynamics. *Nucl. Phys. A*, 569:183c, 1994.

- [51] Njema Frazier, B. Alex Brown, and Vladimir Zelevinsky. Strength functions and spreading widths of simple shell model configurations. *Phys. Rev. C*, 54:1665–1674, 1996.
- [52] V. V. Flambaum and F. M. Izrailev. Statistical theory of finite Fermi systems based on the structure of chaotic eigenstates. *Phys. Rev. E*, 56:5144, 1997.
- [53] V. V. Flambaum and F. M. Izrailev. Excited eigenstates and strength functions for isolated systems of interacting particles. *Phys. Rev. E*, 61:2539, 2000.
- [54] V. V. Flambaum. Time dynamics in chaotic many-body systems: Can chaos destroy a quantum computer? *Aust. J. Phys.*, 53:489 – 497, 2000.
- [55] V. V. Flambaum and F. M. Izrailev. Unconventional decay law for excited states in closed many-body systems. *Phys. Rev. E*, 64:026124, 2001.
- [56] V. V. Flambaum and F. M. Izrailev. Entropy production and wave packet dynamics in the fock space of closed chaotic many-body systems. *Phys. Rev. E*, 64:036220, 2001.
- [57] V. K. B. Kota and R. Sahu. Structure of wave functions in (1+2)-body random matrix ensembles. *Phys. Rev. E*, 64:016219, Jun 2001.
- [58] V. K. B. Kota. *Lecture Notes in Physics, vol. 884*. Springer, Heidelberg, 2014.
- [59] L. F. Santos, F. Borgonovi, and F. M. Izrailev. Chaos and statistical relaxation in quantum systems of interacting particles. *Phys. Rev. Lett.*, 108:094102, 2012.
- [60] L. F. Santos, F. Borgonovi, and F. M. Izrailev. Onset of chaos and relaxation in isolated systems of interacting spins-1/2: energy shell approach. *Phys. Rev. E*, 85:036209, 2012.
- [61] E. J. Torres-Herrera, M Vyas, and Lea F. Santos. General features of the relaxation dynamics of interacting quantum systems. *New J. Phys.*, 16:063010, 2014.
- [62] L. A. Khal'fin. Contribution to the decay theory of a quasi-stationary state. *Sov. Phys. JETP*, 6:1053, 1958.
- [63] I. Ersak. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 9:263, 1969.
- [64] G. N. Fleming. A unitarity bound on the evolution of nonstationary states. *Il Nuovo Cimento*, 16:232, 1973.
- [65] P.L. Knight. Interaction hamiltonians, spectral lineshapes and deviations from the exponential decay law at long times. *Phys. Lett. A*, 61(1):25 – 26, 1977.

-
- [66] L. Fonda, G. C. Ghirardi, and A. Rimini. Decay theory of unstable quantum systems. *Rep. Prog. Phys.*, 41:587, 1978.
- [67] A. Erdélyi. Asymptotic expansions of fourier integrals involving logarithmic singularities. *J. Soc. Indust. Appr. Math.*, 4:38, 1956.
- [68] K. Urbanowski. General properties of the evolution of unstable states at long times. *Eur. Phys. J. D*, 54(1):25–29, 2009.
- [69] Marco Távora, E. J. Torres-Herrera, and Lea F. Santos. Inevitable power-law behavior of isolated many-body quantum systems and how it anticipates thermalization. *Phys. Rev. A*, 94:041603, Oct 2016.
- [70] Marco Távora, E. J. Torres-Herrera, and Lea F. Santos. Power-law decay exponents: A dynamical criterion for predicting thermalization. *Phys. Rev. A*, 95:013604, Jan 2017.
- [71] R. Ketzmerick, G. Petschel, and T. Geisel. Slow decay of temporal correlations in quantum systems with cantor spectra. *Phys. Rev. Lett.*, 69:695–698, Aug 1992.
- [72] Bodo Huckestein and Ludwig Schweitzer. Relation between the correlation dimensions of multifractal wave functions and spectral measures in integer quantum Hall systems. *Phys. Rev. Lett.*, 72:713–716, 1994.
- [73] Bodo Huckestein and Rochus Klesse. Wave-packet dynamics at the mobility edge in two- and three-dimensional systems. *Phys. Rev. B*, 59:9714–9717, Apr 1999.
- [74] Eduardo Jonathan Torres-Herrera and Lea F. Santos. Dynamical manifestations of quantum chaos: correlation hole and bulge. *Phil. Trans. R. Soc. A.*, 375:20160434–20160434, 2017.
- [75] Luc Leviandier, Maurice Lombardi, Rémi Jost, and Jean Paul Pique. Fourier transform: A tool to measure statistical level properties in very complex spectra. *Phys. Rev. Lett.*, 56:2449–2452, Jun 1986.
- [76] J. P. Pique, Y. Chen, R. W. Field, and J. L. Kinsey. Chaos and dynamics on 0.5 ~ 300 ps time scales in vibrationally excited acetylene: Fourier transform of stimulated-emission pumping spectrum. *Phys. Rev. Lett.*, 58:475–478, Feb 1987.
- [77] T. Guhr and H.A. Weidenmüller. Correlations in anticrossing spectra and scattering theory. analytical aspects. *Chem. Phys.*, 146:21 – 38, 1990.
- [78] U. Hartmann, H.A. Weidenmüller, and T. Guhr. Correlations in anticrossing spectra and scattering theory: Numerical simulations. *Chem. Phys.*, 150(3):311 – 320, 1991.

- [79] Y. Alhassid and R. D. Levine. Spectral autocorrelation function in the statistical theory of energy levels. *Phys. Rev. A*, 46:4650–4653, Oct 1992.
- [80] M. Lombardi and T. H. Seligman. Universal and nonuniversal statistical properties of levels and intensities for chaotic rydberg molecules. *Phys. Rev. A*, 47:3571–3586, May 1993.
- [81] Laurent Michaille and Jean-Paul Pique. Influence of experimental resolution on the spectral statistics used to show quantum chaos: The case of molecular vibrational chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 82:2083–2086, Mar 1999.
- [82] T. Gorin, Tomaz Prosen, and Thomas H. Seligman. A random matrix formulation of fidelity decay. *New J. Phys.*, 6:20, 2004.
- [83] Y. Alhassid, Yan V. Fyodorov, T. Gorin, W. Ihra, and B. Mehlige. Fano interference and cross-section fluctuations in molecular photodissociation. *Phys. Rev. A*, 73:042711, Apr 2006.
- [84] F Leyvraz, A García, H Kohler, and T H Seligman. Fidelity under isospectral perturbations: a random matrix study. *J. Phys. A*, 46(27):275303, 2013.
- [85] E. J. Torres-Herrera, J. Karp, M. Távora, and L. F. Santos. Realistic many-body quantum systems vs. full random matrices: Static and dynamical properties. *Entropy*, 18:359, 2016.
- [86] Eduardo Jonathan Torres-Herrera and Lea F. Santos. Signatures of chaos and thermalization in the dynamics of many-body quantum systems. *The European Physical Journal Special Topics*, 227(15):1897–1910, 2019.
- [87] Mauro Schiulaz, E. Jonathan Torres-Herrera, and Lea F. Santos. Thouless and relaxation time scales in many-body quantum systems. *Phys. Rev. B*, 99:174313, May 2019.
- [88] S. Lerma-Hernández, D. Villaseñor, M. A. Bastarrachea-Magnani, E. J. Torres-Herrera, L. F. Santos, and J. G. Hirsch. Dynamical signatures of quantum chaos and relaxation time scales in a spin-boson system. *Phys. Rev. E*, 100:012218, Jul 2019.
- [89] Talía L. M. Lezama, E. Jonathan Torres-Herrera, Francisco Pérez-Bernal, Yevgeny Bar Lev, and Lea F. Santos. Equilibration time in many-body quantum systems. *Phys. Rev. B*, 104:085117, Aug 2021.
- [90] Lea F. Santos, Francisco Pérez-Bernal, and E. Jonathan Torres-Herrera. Speck of chaos. *Phys. Rev. Res.*, 2:043034, Oct 2020.
- [91] E. J. Torres-Herrera, Antonio M. García-García, and Lea F. Santos. Generic dynamical features of quenched interacting quantum systems: Survival probability, density imbalance, and out-of-time-ordered correlator. *Phys. Rev. B*, 97:060303, Feb 2018.

- [92] Mauro Schiulaz, E. Jonathan Torres-Herrera, Francisco Pérez-Bernal, and Lea F. Santos. Self-averaging in many-body quantum systems out of equilibrium: Chaotic systems. *Phys. Rev. B*, 101:174312, May 2020.
- [93] E. Jonathan Torres-Herrera, Isaías Vallejo-Fabila, Andrei J. Martínez-Mendoza, and Lea F. Santos. Self-averaging in many-body quantum systems out of equilibrium: Time dependence of distributions. *Phys. Rev. E*, 102:062126, Dec 2020.
- [94] E. Jonathan Torres-Herrera, Giuseppe De Tomasi, Mauro Schiulaz, Francisco Pérez-Bernal, and Lea F. Santos. Self-averaging in many-body quantum systems out of equilibrium: Approach to the localized phase. *Phys. Rev. B*, 102:094310, Sep 2020.
- [95] Apollonas S. Matsoukas-Roubeas, Mathieu Beau, Lea F. Santos, and Adolfo del Campo. Unitarity breaking in self-averaging spectral form factors. *Phys. Rev. A*, 108:062201, Dec 2023.
- [96] David A. Zarate-Herrada, Lea F. Santos, and E. Jonathan Torres-Herrera. Generalized survival probability. *Entropy*, 25(2), 2023.
- [97] Adway Kumar Das, Cameron Cianci, Delmar G. A. Cabral, David A. Zarate-Herrada, Patrick Pinney, Saúl Pilatowsky-Cameo, Apollonas S. Matsoukas-Roubeas, Victor S. Batista, Adolfo del Campo, E. Jonathan Torres-Herrera, and Lea F. Santos. Proposal for many-body quantum chaos detection. *Phys. Rev. Res.*, 7:013181, Feb 2025.
- [98] Isaías Vallejo-Fabila, Adway Kumar Das, David A. Zarate-Herrada, Apollonas S. Matsoukas-Roubeas, E. Jonathan Torres-Herrera, and Lea F. Santos. Reducing dynamical fluctuations and enforcing self-averaging by opening many-body quantum systems. *Phys. Rev. B*, 110:075138, Aug 2024.
- [99] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Phys. Rev. Lett.*, 52:1, 1984.
- [100] M. V. Berry. *J. Phys. A*, 10:2083, 1977.
- [101] M. L. Mehta. *Random Matrices*. Academic Press, Boston, 1991.
- [102] E. P. Wigner. Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. *Ann. Math.*, 62:548, 1955.
- [103] Freeman J. Dyson. The threefold way. algebraic structure of symmetry groups and ensembles in quantum mechanics. *J. Math. Phys.*, 3(6):1199–1215, 1962.
- [104] E. P. Wigner. in conference on neutron physics by time-of-flight. *Oak Ridge National Laboratory Report*, 2309:59, 1957.

-
- [105] L. F. Santos and M. Rigol. Onset of quantum chaos in one-dimensional bosonic and fermionic systems and its relation to thermalization. *Phys. Rev. E*, 81:036206, 2010.
- [106] A. Gubin and L. F. Santos. Quantum chaos: An introduction via chains of interacting spins $1/2$. *Am. J. Phys.*, 80:246–251, 2012.
- [107] Luca D’Alessio, Yariv Kafri, Anatoli Polkovnikov, and Marcos Rigol. From quantum chaos and eigenstate thermalization to statistical mechanics and thermodynamics. *Advances in Physics*, 65(3):239–362, 2016.
- [108] Vadim Oganesyan and David A. Huse. Localization of interacting fermions at high temperature. *Phys. Rev. B*, 75:155111, 2007.
- [109] Y. Y. Atas and E. Bogomolny. Multifractality of eigenfunctions in spin chains. *Phys. Rev. E*, 86:021104, Aug 2012.
- [110] P. Roushan, C. Neill, J. Tangpanitanon, V. M. Bastidas, A. Megrant, R. Barends, Y. Chen, Z. Chen, B. Chiaro, A. Dunsworth, A. Fowler, B. Foxen, M. Giustina, E. Jeffrey, J. Kelly, E. Lucero, J. Mutus, M. Neeley, C. Quintana, D. Sank, A. Vainsencher, J. Wenner, T. White, H. Neven, D. G. Angelakis, and J. Martinis. Spectroscopic signatures of localization with interacting photons in superconducting qubits. *Science*, 358(6367):1175–1179, 2017.
- [111] Christian Gogolin and Jens Eisert. Equilibration, thermalisation, and the emergence of statistical mechanics in closed quantum systems. *Rep. Prog. Phys.*, 79(5):056001, 2016.
- [112] Antonio M. García-García, Lucas Sá, and Jacobus J. M. Verbaarschot. Symmetry classification and universality in non-hermitian many-body quantum chaos by the sachdev-ye-kitaev model. *Phys. Rev. X*, 12:021040, May 2022.
- [113] Gustavo J. Turiaci and Edward Witten. $N=2$ jt supergravity and matrix models. *Journal of High Energy Physics*, 2023(12):3, 2023.
- [114] Dong-Ling Deng, Xiaopeng Li, and S. Das Sarma. Quantum entanglement in neural network states. *Phys. Rev. X*, 7:021021, May 2017.
- [115] C Castellani and L Peliti. Multifractal wavefunction at the localisation threshold. *J. Phys. A*, 19(8):L429, 1986.
- [116] Michael Schreiber and Heiko Grussbach. Multifractal wave functions at the anderson transition. *Phys. Rev. Lett.*, 67:607–610, Jul 1991.

- [117] Alexander D. Mirlin, Yan V. Fyodorov, Frank-Michael Dittes, Javier Quezada, and Thomas H. Seligman. Transition from localized to extended eigenstates in the ensemble of power-law random banded matrices. *Phys. Rev. E*, 54:3221–3230, Oct 1996.
- [118] Imre Varga and Daniel Braun. Critical statistics in a power-law random-banded matrix ensemble. *Phys. Rev. B*, 61:R11859–R11862, May 2000.
- [119] F. M. Izrailev. Simple models of quantum chaos: Spectrum and eigenfunctions. *Phys. Rep.*, 196:299–392, 1990.
- [120] V E Kravtsov, I M Khaymovich, E Cuevas, and M Amini. A random matrix model with localization and ergodic transitions. *New J. Phys.*, 17(12):122002, 2015.
- [121] Yan V. Fyodorov and Alexander D. Mirlin. Strong eigenfunction correlations near the anderson-localization transition. *Phys. Rev. B*, 55:R16001–R16004, Jun 1997.
- [122] E. Fermi, J. Pasta, and S. Ulam. Studies of nonlinear problems. Technical report, Los Alamos Scientific Laboratory, 1955. Manuscript published in 1955.
- [123] G. Berman and Felix Izrailev. The fermi-pasta-ulam problem: Fifty years of progress. *Chaos (Woodbury, N.Y.)*, 15:15104, 04 2005.
- [124] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss. A quantum Newton’s cradle. *Nature*, 440:900, 2006.
- [125] Pablo R. Zangara, Axel D. Dente, E. J. Torres-Herrera, Horacio M. Pastawski, An ‘Iucci, and Lea F. Santos. Time fluctuations in isolated quantum systems of interacting particles. *Phys. Rev. E*, 88:032913, 2013.
- [126] M. Srednicki. The approach to thermal equilibrium in quantized chaotic systems. *J. Phys. A*, 32:1163, 1999.
- [127] E. J. Torres-Herrera, D. Kollmar, and L. F. Santos. Relaxation and thermalization of isolated many-body quantum systems. *Phys. Scr. T*, 165:014018, 2015.
- [128] Sebastian Hild, Takeshi Fukuhara, Peter Schauß, Johannes Zeiher, Michael Knap, Eugene Demler, Immanuel Bloch, and Christian Gross. Far-from-equilibrium spin transport in Heisenberg quantum magnets. *Phys. Rev. Lett.*, 113:147205, Oct 2014.
- [129] J. J. Sakurai and Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
- [130] Olaf Schenk, Matthias Bollhöfer, and Rudolf A. Römer. On large-scale diagonalization techniques for the anderson model of localization. *SIAM Review*, 50(1):91–112, 2008.

-
- [131] B. Kramer and A. MacKinnon. Localization: theory and experiment. *Rep. Prog. Phys.*, 56:1469, 1993.
 - [132] A. D. Mirlin and F. Evers. Multifractality and critical fluctuations at the Anderson transition. *Phys. Rev. B*, 62:7920–7933, Sep 2000.
 - [133] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan. Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 42:673–676, Mar 1979.
 - [134] V. E. Kravtsov and K. A. Muttalib. New class of random matrix ensembles with multifractal eigenvectors. *Phys. Rev. Lett.*, 79:1913–1916, Sep 1997.
 - [135] Imre Varga. Fluctuation of correlation dimension and inverse participation number at the anderson transition. *Phys. Rev. B*, 66:094201, Sep 2002.
 - [136] Norbert Rosenzweig and Charles E. Porter. Repulsion of energy levels in complex atomic spectra. *Phys. Rev.*, 120:1698–1714, Dec 1960.
 - [137] J. X. de Carvalho, M. S. Hussein, M. P. Pato, and A. J. Sargeant. Symmetry-breaking study with deformed ensembles. *Phys. Rev. E*, 76:066212, Dec 2007.
 - [138] Adway Kumar Das and Anandamohan Ghosh. Chaos due to symmetry-breaking in deformed Poisson ensemble. *J. Stat. Mech.*, 2022(6):063101, 2022.
 - [139] Adway Kumar Das and Anandamohan Ghosh. Transport in deformed centrosymmetric networks. *Phys. Rev. E*, 106:064112, Dec 2022.
 - [140] Cécile Monthus. Multifractality of eigenstates in the delocalized non-ergodic phase of some random matrix models: Wigner-Weisskopf approach. *J. Phys. A*, 50(29):295101, jun 2017.
 - [141] M Pino, J Tabanera, and P Serna. From ergodic to non-ergodic chaos in Rosenzweig-Porter model. *J. Phys. A*, 52(47):475101, oct 2019.
 - [142] Per von Soosten and Simone Warzel. Non-ergodic delocalization in the Rosenzweig-Porter model. *Lett. Math. Phys.*, 109(4):905–922, 2019.
 - [143] L. F. Santos, G. Rigolin, and C. O. Escobar. Entanglement versus chaos in disordered spin systems. *Phys. Rev. A*, 69:042304, 2004.
 - [144] L. F. Santos, M. I. Dykman, M. Shapiro, and F. M. Izrailev. Strong many-particle localization and quantum computing with perpetually coupled qubits. *Phys. Rev. A*, 71:012317, 2005.

- [145] F. Dukesz, M. Zilbergerts, and L. F. Santos. Interplay between interaction and (un)correlated disorder in one-dimensional many-particle systems: delocalization and global entanglement. *New J. Phys.*, 11:043026, 2009.
- [146] H. A. Bethe. On the theory of metal i. eigenvalues and eigenfunctions of a linear chain of atoms. *Z. Phys.*, 71:205–217, 1931.
- [147] Ph. Jacquod and D. L. Shepelyansky. Emergence of quantum chaos in finite interacting fermi systems. *Phys. Rev. Lett.*, 79:1837–1840, Sep 1997.
- [148] Y. Avishai, J. Richert, and R. Berkovitz. Level statistics in a Heisenberg chain with random magnetic field. *Phys. Rev. B*, 66:052416, 2002.
- [149] L. F. Santos. Integrability of a disordered Heisenberg spin-1/2 chain. *J. Phys. A*, 37:4723–4729, 2004.
- [150] Arijeet Pal and David A. Huse. Many-body localization phase transition. *Phys. Rev. B*, 82:174411, 2010.
- [151] Timothy C. Berkelbach and David R. Reichman. Conductivity of disordered quantum lattice models at infinite temperature: Many-body localization. *Phys. Rev. B*, 81(22), June 2010.
- [152] Jonas A. Kjäll, Jens H. Bardarson, and Frank Pollmann. Many-body localization in a disordered quantum Ising chain. *Phys. Rev. Lett.*, 113:107204, 2014.
- [153] Trithep Devakul and Rajiv R. P. Singh. Early breakdown of area-law entanglement at the many-body delocalization transition. *Phys. Rev. Lett.*, 115:187201, 2015.
- [154] Elmer V. H. Doggen, Frank Schindler, Konstantin S. Tikhonov, Alexander D. Mirlin, Titus Neupert, Dmitry G. Polyakov, and Igor V. Gornyi. Many-body localization and delocalization in large quantum chains. *Phys. Rev. B*, 98:174202, Nov 2018.
- [155] Piotr Sierant, Maciej Lewenstein, and Jakub Zakrzewski. Polynomially filtered exact diagonalization approach to many-body localization. *Phys. Rev. Lett.*, 125(15):156601, 2020.
- [156] Thomas Kohlert, Sebastian Scherg, Xiao Li, Henrik P. Lüschen, Sankar Das Sarma, Immanuel Bloch, and Monika Aidelsburger. Observation of many-body localization in a one-dimensional system with a single-particle mobility edge. *Phys. Rev. Lett.*, 122(17), may 2019.
- [157] Ming Gong, Gentil D. de Moraes Neto, Chen Zha, Yulin Wu, Hao Rong, Yangsen Ye, Shaowei Li, Qingling Zhu, Shiyu Wang, Youwei Zhao, Futian Liang, Jin Lin, Yu Xu, Cheng-Zhi Peng, Hui Deng, Abolfazl Bayat, Xiaobo Zhu, and Jian-Wei Pan. Experimental characterization of the quantum many-body localization transition. *Phys. Rev. Res.*, 3:033043, Jul 2021.

-
- [158] J. Smith, A. Lee, P. Richerme, B. Neyenhuis, P. W. Hess, P. Hauke, M. Heyl, D. A. Huse, and C. Monroe. Many-body localization in a quantum simulator with programmable random disorder. *Nat. Phys.*, 12:907, 2016.
- [159] FM Izrailev, S Ruffo, and L Tessieri. Classical representation of the one-dimensional anderson model. *J. Phys. A*, 31(23):5263, 1998.
- [160] S. Sorathia, F. M. Izrailev, V. G. Zelevinsky, and G. L. Celardo. From closed to open one-dimensional anderson model: Transport versus spectral statistics. *Phys. Rev. E*, 86:011142, Jul 2012.
- [161] E. Jonathan Torres-Herrera, J. A. Méndez-Bermúdez, and Lea F. Santos. Level repulsion and dynamics in the finite one-dimensional anderson model. *Phys. Rev. E*, 100:022142, Aug 2019.
- [162] Ahmed A. Elkamshishy and Chris H. Greene. Observation of wigner-dyson level statistics in a classically integrable system. *Phys. Rev. E*, 103:062211, Jun 2021.
- [163] Zhenyu Xu, Luis Pedro García-Pintos, Aurélia Chenu, and Adolfo del Campo. Extreme decoherence and quantum chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 122:014103, Jan 2019.
- [164] P. Jurcevic, B. P. Lanyon, P. Hauke, C. Hempel, P. Zoller, R. Blatt, and C. F. Roos. Quasi-particle engineering and entanglement propagation in a quantum many-body system. *Nature*, 511:202–205, 2014.
- [165] Philip Richerme, Zhe-Xuan Gong, Aaron Lee, Crystal Senko, Jacob Smith, Michael Foss-Feig, Spyridon Michalakis, Alexey V. Gorshkov, and Christopher Monroe. Non-local propagation of correlations in quantum systems with long-range interactions. *Nature*, 511(7508):198–201, 2014.
- [166] K. Binder and A. P. Young. Spin glasses: Experimental facts, theoretical concepts, and open questions. *Rev. Mod. Phys.*, 58:801–976, Oct 1986.
- [167] Lea F. Santos, Marco Távora, and Francisco Pérez-Bernal. Excited-state quantum phase transitions in many-body systems with infinite-range interaction: Localization, dynamics, and bifurcation. *Phys. Rev. A*, 94:012113, Jul 2016.
- [168] Pavel Cejnar, Pavel Stránský, Michal Macek, and Michal Kloc. Excited-state quantum phase transitions. *J. Phys. A*, 54(13):133001, mar 2021.
- [169] Nicolò Defenu, Alessio Leroose, and Silvia Pappalardi. Out-of-equilibrium dynamics of quantum many-body systems with long-range interactions, 2023.

-
- [170] Alessio Lerose, Tommaso Parolini, Rosario Fazio, Dmitry A. Abanin, and Silvia Pappalardi. Theory of robust quantum many-body scars in long-range interacting systems, 2023.
- [171] E. J. Torres-Herrera and Lea F. Santos. Quench dynamics of isolated many-body quantum systems. *Phys. Rev. A*, 89:043620, 2014.
- [172] E. J. Torres-Herrera and Lea F. Santos. Local quenches with global effects in interacting quantum systems. *Phys. Rev. E*, 89:062110, 2014.
- [173] J. B. French and S. S. M. Wong. Validity of random matrix theories for many-particle systems. *Phys. Lett. B*, 33:449, 1970.
- [174] V. V. Flambaum, A. A. Gribakina, G. F. Gribakin, and M. G. Kozlov. Structure of compound states in the chaotic spectrum of the ce atom: Localization properties, matrix elements, and enhancement of weak perturbations. *Phys. Rev. A*, 50:267–296, 1994.
- [175] V. V. Flambaum, G. F. Gribakin, and F. M. Izrailev. Correlations within eigenvectors and transition amplitudes in the two-body random interaction model. *Phys. Rev. E*, 53:5729–5741, 1996.
- [176] V. V. Flambaum, F. M. Izrailev, and G. Casati. Towards a statistical theory of finite Fermi systems and compound states: Random two-body interaction approach. *Phys. Rev. E*, 54:2136–2139, 1996.
- [177] Fausto Borgonovi, I Guarnieri, F. M. Izrailev, and G. Casati. Chaos and thermalization in a dynamical model of two interacting particles. *Phys. Lett. A*, 247:140–144, 1998.
- [178] A. De Luca and A. Scardicchio. Ergodicity breaking in a model showing many-body localization. *Europhys. Lett.*, 101:37003, 2013.
- [179] David J. Luitz, Fabien Alet, and Nicolas Laflorencie. Universal behavior beyond multifractality in quantum many-body systems. *Phys. Rev. Lett.*, 112(5), Feb 2014.
- [180] Xiaopeng Li, Sriram Ganeshan, J. H. Pixley, and S. Das Sarma. Many-body localization and quantum nonergodicity in a model with a single-particle mobility edge. *Phys. Rev. Lett.*, 115(18), Oct 2015.
- [181] Nicolas Macé, Fabien Alet, and Nicolas Laflorencie. Multifractal scalings across the many-body localization transition. *Phys. Rev. Lett.*, 123(18), Oct 2019.
- [182] C. E. Porter and R. G. Thomas. Fluctuations of nuclear reaction widths. *Phys. Rev.*, 104:483–491, Oct 1956.

-
- [183] L. F. Santos and E. J. Torres-Herrera. Analytical expressions for the evolution of many-body quantum systems quenched far from equilibrium. *AIP Conference Proceedings*, 1912(1):020015, 2017.
- [184] J. A. Méndez-Bermúdez, A. Alcázar-López, and Imre Varga. Multifractal dimensions for critical random matrix ensembles. *Europhysics Letters*, 98(3):37006, may 2012.
- [185] M. Carrera-Núñez, A.M. Martínez-Argüello, and J.A. Méndez-Bermúdez. Multifractal dimensions and statistical properties of critical ensembles characterized by the three classical wigner–dyson symmetry classes. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 573:125965, 2021.
- [186] Giuseppe De Tomasi and Ivan M. Khaymovich. Non-hermiticity induces localization: Good and bad resonances in power-law random banded matrices. *Phys. Rev. B*, 108:L180202, Nov 2023.
- [187] Shenglong Xu, Xiao Li, Yi-Ting Hsu, Brian Swingle, and S. Das Sarma. Butterfly effect in interacting aubry-andre model: Thermalization, slow scrambling, and many-body localization. *Phys. Rev. Res.*, 1:032039, Dec 2019.
- [188] Adam M. Kaufman, Alexander Lukin M. Eric Tai, Matthew Rispoli, Robert Schittko, Philipp M. Preiss, and Markus Greiner. Quantum thermalization through entanglement in an isolated many-body system. *Science*, 353:794, 2016.
- [189] Pranjal Bordia, Henrik P. Lüschen, Sean S. Hodgman, Michael Schreiber, Immanuel Bloch, and Ulrich Schneider. Coupling identical one-dimensional many-body localized systems. *Phys. Rev. Lett.*, 116:140401, 2016.
- [190] Florian Kranzl, Stefan Birnkammer, Manoj K. Joshi, Alvis Bastianello, Rainer Blatt, Michael Knap, and Christian F. Roos. Observation of magnon bound states in the long-range, anisotropic heisenberg model. *Phys. Rev. X*, 13:031017, Aug 2023.
- [191] IBM Q. [https://www.research.ibm.com/ibm-q/..](https://www.research.ibm.com/ibm-q/)
- [192] Adam Smith, M. S. Kim, Frank Pollmann, and Johannes Knolle. Simulating quantum many-body dynamics on a current digital quantum computer. *npj Quantum Inf.*, 5(1):106, Nov 2019.
- [193] Pai Peng, Bingtian Ye, Norman Y. Yao, and Paola Cappellaro. Exploiting disorder to probe spin and energy hydrodynamics. *Nature Physics*, 19(7):1027–1032, 2023.

-
- [194] Fakesherbrooke device simulator. https://docs.quantum.ibm.com/api/qiskit/0.44/qiskit.providers.fake_provider.FakeSherbrooke, 2024.
- [195] Xiao Yuan, Suguru Endo, Qi Zhao, Ying Li, and Simon C. Benjamin. Theory of variational quantum simulation. *Quantum*, 3:191, October 2019.
- [196] Excitation preserving ansatz, 2024. <https://docs.quantum.ibm.com/api/qiskit/0.24/qiskit.circuit.library.ExcitationPreserving>.
- [197] Physics Claire Kluber. Trotterization in quantum theory, 2025.
- [198] Hang Dong, Pengfei Zhang, Ceren B. Dağ, Yu Gao, Ning Wang, Jinfeng Deng, Xu Zhang, Jiachen Chen, Shibo Xu, Ke Wang, Yaozu Wu, Chuanyu Zhang, Feitong Jin, Xuhao Zhu, Aosai Zhang, Yiren Zou, Ziqi Tan, Zhengyi Cui, Zitian Zhu, Fanhao Shen, Tingting Li, Jiarun Zhong, Zehang Bao, Hekang Li, Zhen Wang, Qiujiang Guo, Chao Song, Fangli Liu, Amos Chan, Lei Ying, and H. Wang. Measuring the spectral form factor in many-body chaotic and localized phases of quantum processors. *Phys. Rev. Lett.*, 134:010402, Jan 2025.
- [199] D Villaseñor, S Pilatowsky-Cameo, M A Bastarrachea-Magnani, S Lerma-Hernández, L F Santos, and J G Hirsch. Quantum vs classical dynamics in a spin-boson system: manifestations of spectral correlations and scarring. *New J. Phys.*, 22(6):063036, June 2020.
- [200] Julien Cornelius, Zhenyu Xu, Avadh Saxena, Aurélia Chenu, and Adolfo del Campo. Spectral filtering induced by non-Hermitian evolution with balanced gain and loss: Enhancing quantum chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 128:190402, May 2022.
- [201] S. Wiseman and E. Domany. Lack of self-averaging in critical disordered systems. *Phys. Rev. E*, 52:3469, 1995.
- [202] A. Aharony and A. B. Harris. Absence of Self-Averaging and Universal Fluctuations in Random Systems near Critical Points. *Phys. Rev. Lett.*, 77:3700, 1996.
- [203] S. Wiseman and E. Domany. Finite-Size Scaling and Lack of Self-Averaging in Critical Disordered Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 81:22, 1998.
- [204] T. Castellani and A. Cavagna. Spin-glass theory for pedestrians. *J. Stat. Mech. Th. Exp.*, 2005(05):P05012, 2005.
- [205] A. Malakis and N. G. Fytas. Lack of self-averaging of the specific heat in the three-dimensional random-field Ising model. *Phys. Rev. E*, 73:016109, 2006.
- [206] S. Roy and S. M. Bhattacharjee. Is small-world network disordered? *Phys. Lett. A*, 352:13, 2006.

-
- [207] C. Monthus. Random Walks and Polymers in the Presence of Quenched Disorder. *Lett. Math. Phys.*, 78:207, 2006.
- [208] A. Efrat and M. Schwartz. Lack of self-averaging in random systems - Liability or asset? *Phys. A Stat. Mech. Appl.*, 414:137, 2014.
- [209] M. Łobejko, J. Dajka, and J. Łuczka. Self-averaging of random quantum dynamics. *Phys. Rev. A*, 98:022111, Aug 2018.
- [210] S. A. Gredeskul and L. A. Pastur. Works of I. M. Lifshitz on disordered systems. *J. Stat. Phys.*, 38(1):25–36, Jan 1985.
- [211] C. A. Müller and D. Delande. Disorder and interference: localization phenomena, 2016. Les Houches 2009 - Session XCI: Ultracold Gases and Quantum Information, C. Miniatura, L.-C. Kwek, M. Ducloy, B. Gremaud, B.-G. Englert, L.F. Cugliandolo, A. Ekert, eds. (Oxford University Press, Oxford 2011); arXiv:1004.0915.
- [212] M. Serbyn, Z. Papić, and D. A. Abanin. Thouless energy and multifractality across the many-body localization transition. *Phys. Rev. B*, 96:104201, 2017.
- [213] L. Pastur and V. Slavin. Area Law Scaling for the Entropy of Disordered Quasifree Fermions. *Phys. Rev. Lett.*, 113:150404, 2014.
- [214] A. Milchev, K. Binder, and D. W. Heermann. Fluctuations and lack of self-averaging in the kinetics of domain growth. *Z. Phys. B Condensed Matter*, 63(4):521, 1986.
- [215] J.-P. Bouchaud and A. Georges. Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications. *Phys. Rep.*, 195(4):127, 1990.
- [216] T. Akimoto, E. Barkai, and K. Saito. Universal Fluctuations of Single-Particle Diffusivity in a Quenched Environment. *Phys. Rev. Lett.*, 117:180602, 2016.
- [217] A. Russian, M. Dentz, and P. Gouze. Self-averaging and weak ergodicity breaking of diffusion in heterogeneous media. *Phys. Rev. E*, 96:022156, 2017.
- [218] T. Akimoto, E. Barkai, and K. Saito. Non-self-averaging behaviors and ergodicity in quenched trap models with finite system sizes. *Phys. Rev. E*, 97:052143, 2018.
- [219] W.F. Wreszinski and O. Bolina. A self-averaging “order parameter” for the Sherrington-Kirkpatrick spin glass model. *J. Stat. Phys.*, 116:1389, 2004.
- [220] Grégoire Ithier and Florent Benaych-Georges. Dynamical typicality of embedded quantum systems. *Phys. Rev. A*, 96:012108, Jul 2017.

-
- [221] B. Mukherjee. Floquet topological transition by unpolarized light. *Phys. Rev. B*, 98:235112, 2018.
- [222] Jonas Richter, Dennis Schubert, and Robin Steinigeweg. Decay of spin-spin correlations in disordered quantum and classical spin chains. *Phys. Rev. Res.*, 2:013130, Feb 2020.
- [223] N. Argaman, F.-M. Dittes, E. Doron, J. P. Keating, A. Yu. Kitaev, M. Sieber, and U. Smilansky. Correlations in the actions of periodic orbits derived from quantum chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 71:4326–4329, Dec 1993.
- [224] Bruno Eckhardt and Jörg Main. Semiclassical form factor of matrix element fluctuations. *Phys. Rev. Lett.*, 75:2300–2303, Sep 1995.
- [225] R. E. Prange. The spectral form factor is not self-averaging. *Phys. Rev. Lett.*, 78:2280–2283, Mar 1997.
- [226] Petr Braun and Fritz Haake. Self-averaging characteristics of spectral fluctuations. *J. Phys. A*, 48(13):135101, mar 2015.
- [227] Richard Jozsa. Fidelity for mixed quantum states. *J. Mod. Opt.*, 41(12):2315–2323, 1994.
- [228] M. Carrera-Núñez, A. M. Martínez-Argüello, J. M. Torres, and E. J. Torres-Herrera. Onset of universality in the dynamical mixing of a pure state. *J. Phys. A*, 55(45):455303, Oct 2022.
- [229] Adway Kumar Das, Cameron Cianci, Delmar G. A. Cabral, David A. Zarate-Herrada, Patrick Pinney, Saúl Pilatowsky-Cameo, Apollonas S. Matsoukas-Roubeas, Victor S. Batista, Adolfo del Campo, E. Jonathan Torres-Herrera, and Lea F. Santos. Proposal for many-body quantum chaos detection, 2024.
- [230] Xiaodong Zhang, Weihua Zhang, Jiongning Che, and Barbara Dietz. Experimental test of the Rosenzweig-Porter model for the transition from Poisson to Gaussian unitary ensemble statistics. *Phys. Rev. E*, 108:044211, Oct 2023.
- [231] P. A. Nosov, I. M. Khaymovich, and V. E. Kravtsov. Correlation-induced localization. *Phys. Rev. B*, 99:104203, Mar 2019.
- [232] P. Cizeau and J. P. Bouchaud. Theory of Lévy matrices. *Phys. Rev. E*, 50:1810–1822, Sep 1994.
- [233] Anton G. Kutlin and Ivan M. Khaymovich. Emergent fractal phase in energy stratified random models. *SciPost Phys.*, 11:101, 2021.

-
- [234] Weichen Tang and Ivan M Khaymovich. Non-ergodic delocalized phase with Poisson level statistics. *Quantum*, 6:733, 2022.
- [235] Vedant R. Motamarri, Alexander S. Gorsky, and Ivan M. Khaymovich. Localization and fractality in disordered Russian Doll model. *SciPost Phys.*, 13:117, 2022.
- [236] Adway Kumar Das and Anandamohan Ghosh. Nonergodic extended states in the β ensemble. *Phys. Rev. E*, 105:054121, May 2022.
- [237] Adway Kumar Das, Anandamohan Ghosh, and Ivan M. Khaymovich. Absence of mobility edge in short-range uncorrelated disordered model: Coexistence of localized and extended states. *Phys. Rev. Lett.*, 131:166401, Oct 2023.
- [238] Adway Kumar Das, Anandamohan Ghosh, and Ivan M. Khaymovich. Robust nonergodicity of the ground states in the β ensemble. *Phys. Rev. B*, 109:064206, Feb 2024.
- [239] David J. Luitz, Ivan M. Khaymovich, and Yevgeny Bar Lev. Multifractality and its role in anomalous transport in the disordered XXZ spin-chain. *SciPost Phys. Core*, 2:6, 2020.
- [240] M. Pino, V. E. Kravtsov, B. L. Altshuler, and L. B. Ioffe. Multifractal metal in a disordered Josephson junctions array. *Phys. Rev. B*, 96:214205, Dec 2017.
- [241] G. De Tomasi, M. Amini, S. Bera, I. M. Khaymovich, and V. E. Kravtsov. Survival probability in Generalized Rosenzweig-Porter random matrix ensemble. *SciPost Phys.*, 6:14, 2019.
- [242] Piotr Sierant, Maciej Lewenstein, Antonello Scardicchio, Lev Vidmar, and Jakub Zakrzewski. Many-body localization in the age of classical computing, 2024.
- [243] E. J. Torres-Herrera and Lea F. Santos. Effects of the interplay between initial state and Hamiltonian on the thermalization of isolated quantum many-body systems. *Phys. Rev. E*, 88:042121, 2013.
- [244] Hisashi Hiramoto and Shuji Abe. Dynamics of an electron in quasiperiodic systems. i. fibonacci model. *Journal of the Physical Society of Japan*, 57(1):230–240, 1988.
- [245] Cecilia Chiaracane, Francesca Pietracaprina, Archak Purkayastha, and John Goold. Quantum dynamics in the interacting fibonacci chain. *Phys. Rev. B*, 103:184205, May 2021.