



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Visualización de discos de acreción alrededor de agujeros
negros

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADA EN FÍSICA

por

María Magdalena Castro Sam

Asesorada por

Dr. Juan Carlos Degollado Daza

Ana Aurelia Aviles López

Puebla, Pue.
Enero de 2023



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Visualización de discos de acreción alrededor de agujeros
negros

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADA EN FÍSICA

por

María Magdalena Castro Sam

Asesorada por

Dr. Juan Carlos Degollado Daza

Ana Aurelia Aviles López

Puebla, Pue.
Enero de 2023

Título: Visualización de discos de acreción alrededor de agujeros negros

Estudiante: MARÍA MAGDALENA CASTRO SAM

COMITÉ

Dr. Gerardo Torres del Castillo
Presidente

Dra. Mercedes Velázquez Quesada
Secretaria

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Vocal

Dr. Juan Carlos Degollado Daza
Asesor

Ana Aurelia Aviles López
Co-Asesora

Índice general

Resumen	1
Introducción	3
1. Relatividad General y Agujeros Negros	5
1.1. Bases de geometría diferencial	5
1.2. Geodésicas	6
1.3. Tensor de curvatura	8
1.4. Ecuaciones de Einstein	9
1.5. La solución de Schwarzschild	11
1.5.1. Estructura causal	13
1.5.2. Coordenadas de Eddington-Finkelstein	14
2. Movimiento de Partículas de Prueba	17
2.1. Trayectorias de partículas con masa	17
2.1.1. Órbitas circulares	20
2.1.2. Órbitas acotadas no circulares	21
2.2. Trayectorias de partículas con masa en reposo cero	25
2.2.1. El parámetro de impacto	26
2.2.2. Silueta de un agujero negro en vacío	29
3. Visualización de un disco de acreción delgado	37
3.1. Discos de acreción	37
3.2. Visualización de las trayectorias	37
3.2.1. Disco formado por partículas en órbitas circulares	40
3.2.2. Apariencia de las trayectorias acotadas y de precesión	41
3.2.3. Consecuencias observacionales de la precesión para diferentes observadores	43
3.3. Corrimiento al rojo del disco de acreción	44
3.4. Flujo del disco de acreción	48
3.5. Temperatura del disco de acreción	50
4. Conclusiones	55
A. Integrales y Funciones elípticas	57
Bibliografía	59

Resumen

En el presente trabajo se describen los discos de acreción delgados que se forman alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. Como primer acercamiento se estudia la dinámica de partículas nulas en ese espacio tiempo. Para ello, se supone una fuente de luz externa al agujero negro y se analizan las trayectorias de los fotones. Posteriormente se estudia el caso de un disco de acreción delgado alrededor de un agujero negro formado por un fluido sin presión. Se muestra cómo la trayectoria de los fotones que se emiten desde el disco se ve afectada por el campo gravitacional del agujero negro ocasionando que su apariencia cambie para un observador en infinito. Se calculan además, el corrimiento al rojo de los fotones emitidos así como el flujo bolométrico, la temperatura del disco y su proyección en el plano de un observador en infinito.

Introducción

Los agujeros negros son objetos astrofísicos que surgen de manera natural en la descripción de Einstein de la gravedad. En la vecindad de un agujero negro se puede formar una región luminosa que rodea a otra región oscura como consecuencia de las trayectorias de las partículas de luz producidas por una fuente externa que *ilumina* el agujero. Éste bloquea el paso de algunas partículas y deja pasar a otras modificando su trayectoria, generando una silueta. Tal descripción tiene un análogo en la vida cotidiana y se le ha denominado sombra de un agujero negro. La modificación de la trayectoria de las partículas de luz en la vecindad de un agujero negro es, sin embargo, tan grande que las trayectorias se pueden cerrar sobre sí mismas produciendo órbitas circulares.

Para dar una descripción cuantitativa de este tipo de fenómenos es necesario describir las ecuaciones de movimiento de partículas de luz en un espacio tiempo que describe un agujero negro y resolverlas. Las ecuaciones resultantes son un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas que se pueden resolver dando condiciones iniciales adecuadas para describir el fenómeno en cuestión. En este trabajo se describe de forma detallada cómo se obtienen las ecuaciones y cómo se resuelven numéricamente para describir la silueta alrededor de un agujero negro estático.

Puede darse también el escenario en el cual el agujero posea un disco de acreción, es decir, materia circundante orbitando a su alrededor. Debido a los esfuerzos viscosos en el interior del disco, se emitirán partículas de luz y por la presencia del agujero negro su trayectoria se modificará. La trayectoria de los fotones emitidos por el disco que llegan al observador se puede determinar con precisión de forma que se obtiene una visualización del disco de acreción.

Para estudiar la apariencia de un agujero negro es necesario analizar las trayectorias de los fotones alrededor del mismo, las cuales se ven influenciadas por el campo gravitacional del agujero. Este problema ha sido estudiado por Darwin [1].

Las investigaciones sobre la visualización de agujeros negros han cobrado relevancia debido a la aparición de proyectos astronómicos que pretenden observar las inmediaciones de los agujeros negros supermasivos (de millones de veces la masa del Sol) como el Telescopio de Horizonte de Eventos. Con las observaciones es posible obtener información sobre el agujero negro y su entorno, así como la forma en la que la luz se propaga alrededor del mismo.

El propósito del presente trabajo es estudiar la dinámica de partículas de luz alrededor de un agujero negro en dos escenarios. El primero corresponde a tener una fuente de luz externa que emite fotones cuya trayectoria es deformada por el agujero de tal manera que se forma una silueta alrededor del agujero negro y consecuentemente una sombra. El segundo escenario corresponde a tener un disco de acreción alrededor de un agujero negro y considerar que los fotones que se emiten en el disco son afectados por la gravedad del agujero en un espacio tiempo estático.

Una primera aproximación consiste en estudiar la trayectoria de fotones emitidas por partículas que siguen trayectorias circulares alrededor del agujero negro, un caso que ha sido previamente estudiado por Cunningham y Bardeen [2]. A pesar de que las partículas del disco se mueven en trayectorias circulares alrededor del agujero, un observador que esté muy lejos del agujero negro determinará que las trayectorias de luz se modifican fuertemente causando que la forma geométrica del disco se vea modificada. El trabajo está estructurado de la siguiente manera:

Primero se da una descripción del movimiento de fotones alrededor del agujero negro. En el

primer capítulo se discuten aspectos sobre la Relatividad General, conceptos de geometría diferencial y se introduce la noción de geodésicas. Se incluye con una derivación de las ecuaciones de Einstein para relacionar la materia con la curvatura del espacio-tiempo. Se discute la solución de Schwarzschild para las ecuaciones de Einstein y sus propiedades y adicionalmente se discute el cambio a las coordenadas de Eddington-Finkelstein.

El segundo capítulo presenta la dinámica de partículas de prueba alrededor de un agujero negro de Schwarzschild tomando como caso particular el movimiento en el plano ecuatorial. Se realiza un análisis de las trayectorias permitidas dado un potencial para los casos de partículas con masa y sin masa. En particular se describen las órbitas circulares para fotones y se describen órbitas acotadas para partículas con masa.

Posteriormente se estudia la apariencia de la sombra de un agujero negro. Para este análisis suponemos que la región entre el agujero y el observador es vacío, de forma que lo que se aprecia es la luz de los objetos detrás del mismo. Se calcula el ángulo de deflexión que sufren los rayos de luz debido a la curvatura del espacio tiempo.

En el tercer capítulo se aborda el caso de un agujero negro con un disco de acreción delgado a su alrededor, para el cual se supone que sus partículas siguen trayectorias circulares. Dado que la naturaleza curva espacio tiempo provoca la deflexión de la luz que llega al observador, es necesario realizar la transformación entre el sistema del agujero negro y el sistema del observador para conocer el aspecto de lo que éste aprecia desde el infinito. El primer caso que se plantea es el de trayectorias circulares para partículas individuales alrededor del agujero negro. Se revisa el caso de una partícula cuya trayectoria precesa entre dos puntos del potencial. Dado este análisis se obtiene la proyección del disco de acreción en el plano del observador. En particular se presentan imágenes del corrimiento al rojo y el flujo bolométrico del agujero negro basado en el trabajo de la energía emitida por el disco de acreción de Page y Thorne [3]. Adicionalmente se estudia la temperatura del disco para diferentes ángulos de observación.

Capítulo 1

Relatividad General y Agujeros Negros

La Relatividad General es una teoría de gravitación que surge al incorporar los fenómenos gravitatorios en la Relatividad Especial. Para esta teoría la distancia más corta entre dos puntos no son líneas rectas sino las trayectorias de mínima longitud llamadas geodésicas. Además, son las trayectorias que siguen las partículas de máximo tiempo propio. Para este trabajo es conveniente utilizar las llamadas *unidades geométricas* con $c = G = 1$, en donde c es la velocidad de la luz y G la constante de gravitación universal. Establecer estas unidades trae como consecuencia el cambio de unidades en las cuales se mide. El tiempo, por ejemplo, se medirá en unidades de longitud, mientras que la velocidad será una cantidad adimensional. Se utilizará también la notación de Einstein, donde los índices repetidos arriba y abajo indican la suma.

1.1. Bases de geometría diferencial

La descripción de espacios curvos se realiza con las herramientas proporcionadas por la geometría diferencial, por lo que es necesario introducir conceptos que serán de utilidad más adelante.

Dado un espacio vectorial \mathbf{V} , una base del espacio es un subconjunto compuesto de elementos linealmente independientes que generan todo elemento de \mathbf{V} . Cualquier elemento de \mathbf{V} puede escribirse mediante una combinación lineal única de los elementos de la base. La base de un espacio vectorial no es única, para un espacio vectorial de base finita, si el subconjunto de los elementos de la base está formado por n elementos, entonces cualquier subconjunto de n elementos linealmente independientes también forma una base del espacio vectorial, donde el número n es la dimensión de \mathbf{V} .

Al espacio de transformaciones lineales que van de \mathbf{V} a un campo \mathbf{K} se le llama el espacio dual y se denota por \mathbf{V}^* , sus elementos son llamados covectores. Dada una base $\{\mathbf{e}_\mu\}$ del espacio \mathbf{V} , se puede construir una base para \mathbf{V}^* denotada por $\{\mathbf{e}^\mu\}$ tal que la base de \mathbf{V}^* actuando sobre la base de \mathbf{V} cumple la relación:

$$\mathbf{e}^\mu(\mathbf{e}_\nu) = \delta_\nu^\mu . \quad (1.1)$$

En general, los vectores base no son constantes. El cambio de un vector base está dado por las derivadas parciales y se puede escribir en términos de los mismos vectores base mediante los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$, que representan los coeficientes de cambio del vector base y cumplen la relación

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} \mathbf{e}_\alpha = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \mathbf{e}_\mu . \quad (1.2)$$

Las derivadas parciales de vectores respecto a las coordenadas también cambian cuando las bases no son constantes. Para coordenadas arbitrarias se tiene que la derivada covariante del vector V está dada por:

$$\nabla_{\beta} V^{\mu} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\beta}} + V^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} , \quad (1.3)$$

mientras que para un covector estará dada por

$$\nabla_{\beta} V_{\mu} = \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\beta}} - V_{\alpha} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} . \quad (1.4)$$

La ecuación (1.3) se puede escribir en la notación

$$V^{\mu}{}_{;\beta} = V^{\mu}{}_{,\beta} + V^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} , \quad (1.5)$$

donde el punto y coma indican la derivada covariante y la coma la derivada parcial.

Un tensor es un mapeo multilineal de un espacio vectorial a los números reales. Se le llama rango del tensor al número de vectores que toma por argumentos. Las componentes de un tensor de segundo rango en una base definida pueden representarse de forma matricial, sin embargo al ser objetos diferentes no cumplen las mismas propiedades.

El tensor métrico juega un papel importante tanto para Relatividad Especial como para Relatividad General. Éste define una transformación lineal de dos vectores hacia su producto interno:

$$g(u, v) \equiv u \cdot v . \quad (1.6)$$

Las componentes del tensor métrico dependen de la elección de la base:

$$g_{\mu\nu} = g(\mathbf{e}_{\mu}, \mathbf{e}_{\nu}) = \mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\nu} , \quad (1.7)$$

y cumplen la relación

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = \delta_{\alpha}^{\mu} . \quad (1.8)$$

De la definición (1.6) puede verse que $g_{\mu\nu}$ es simétrico:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} , \quad (1.9)$$

la única restricción es que su determinante sea diferente de 0, es decir, $\det g_{\mu\nu} \neq 0$.

El tensor métrico también relaciona las componentes contravariantes y covariantes de los tensores. Para un tensor w se tendrá que

$$g_{\mu\nu} w^{\nu} = w_{\mu} , \quad g^{\mu\nu} w_{\nu} = w^{\mu} . \quad (1.10)$$

A estas operaciones realizadas con el tensor métrico se le conoce como subir o bajar índices.

El tensor métrico es fundamental para describir un espacio-tiempo. El elemento de línea tiene la forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} . \quad (1.11)$$

Mientras que $g_{\mu\nu}$ depende de la elección de coordenadas, ds^2 es un escalar que describe propiedades sobre la estructura del espacio, y es una cantidad invariante ante transformaciones de coordenadas.

1.2. Geodésicas

A pesar de que se pueden describir fuerzas y aceleraciones para marcos de referencia inerciales, la relatividad especial no puede describir la gravedad, ya que para la mecánica newtoniana las fuerzas gravitatorias son instantáneas. Este hecho implica velocidades de propagación de la influencia gravitacional infinita que es incompatible con la relatividad especial.

La solución a este problema parte del principio de equivalencia de Galileo, o principio de equivalencia débil, el cual establece que el movimiento de los objetos en caída libre es independiente de su composición, y sólo depende de su posición y velocidad inicial, es decir, la masa inercial es igual a la masa gravitacional. De esta forma se puede considerar un marco en caída libre como un marco inercial local, en donde no existen los efectos de la gravitación.

Sin embargo, no es posible encontrar un marco inercial en caída libre global, ya que en general un campo gravitatorio no es uniforme y por lo tanto existirían diferencias notables entre los diferentes puntos del espacio. Por lo tanto, se necesita un marco local lo suficientemente pequeño como para que no puedan detectarse las fuerzas gravitacionales no uniformes, llamadas fuerzas de marea, en donde se recuperen las leyes de la física descritas en el espacio-tiempo de Minkowski. Esta afirmación es llamada el principio de equivalencia [4], que establece que un marco en caída libre local es indistinguible de un campo gravitatorio uniforme.

Debido a las fuerzas de marea las trayectorias de las partículas se ven modificadas, por lo que se dice que el espacio-tiempo es curvo y que las partículas se encuentran en caída libre siguiendo geodésicas. Éstas son líneas de mínima (o máxima dependiendo de la signatura de la métrica) longitud dada una superficie o espacio curvo.

En un espacio tiempo la distancia Δs , entre dos puntos a y b está dada por

$$\Delta s = \int_a^b ds , \quad (1.12)$$

donde ds está dado por (1.11). Las trayectorias que siguen las partículas extremizan esta distancia, de modo que es posible derivar las ecuaciones de movimiento a partir de un principio variacional.

Si escribimos

$$\Delta s = \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int \sqrt{g_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\mu}{d\sigma}\right) \left(\frac{dx^\nu}{d\sigma}\right)} d\sigma , \quad (1.13)$$

en donde σ es un parámetro, las trayectorias que sigan las partículas, serán aquellas curvas $x^\mu(\sigma)$ que extremizan Δs es decir, aquellas para las cuales se satisfaga $\delta(\Delta s) = 0$. Este problema variacional es muy parecido al problema variacional de mínima acción para partículas en mecánica clásica, de donde se derivan las ecuaciones de Euler-Lagrange. Ambos problemas son matemáticamente equivalentes si definimos el lagrangiano de las partículas como

$$\mathcal{L}(x^\mu(\sigma), \dot{x}^\mu(\sigma)) = g_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\mu}{d\sigma}\right) \left(\frac{dx^\nu}{d\sigma}\right) , \quad \dot{x}^\mu(\sigma) = \frac{dx^\mu}{d\sigma} . \quad (1.14)$$

Tomar un extremo de la acción

$$\delta \int \mathcal{L}(x^\mu(\sigma), \dot{x}^\mu(\sigma)) d\sigma = 0 , \quad (1.15)$$

implicará las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = 0 . \quad (1.16)$$

A partir de las ecuaciones (1.16) y la identificación (1.14) es posible obtener la ecuación de las geodésicas:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\rho}^\alpha \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} , \quad (1.17)$$

en donde

$$\Gamma_{\nu\rho}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} (g_{\mu\nu,\rho} + g_{\mu\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\mu}) . \quad (1.18)$$

Tanto (1.17) como las ecuaciones de Euler-Lagrange describen las trayectorias de las partículas en espacios curvos.

Las partículas en caída libre siguen trayectorias geodésicas en el espacio-tiempo descrito por el elemento de línea (1.11). Los espacios en donde $ds^2 > 0$ son llamados espacios Riemannianos. En el caso que nos atañe la métrica no está definida positivamente (estos espacios son denominados pseudo-Riemannianos) [5] ya que ds^2 puede ser mayor, menor o igual a cero.

Las partículas masivas poseen trayectorias tipo tiempo y las no masivas trayectorias nulas. Las trayectorias representan las curvas geodésicas cuyo vector tangente es siempre temporal o nulo [6].

Para el caso de las geodésicas tipo tiempo, en términos del vector velocidad se tiene la condición de normalización de la cuadrivelocidad.

$$-1 = u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} . \quad (1.19)$$

Las geodésicas nulas tienen una condición análoga:

$$0 = u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} . \quad (1.20)$$

1.3. Tensor de curvatura

La descripción de la curvatura de un espacio está relacionada con el comportamiento de los vectores en diferentes puntos. En general, no es posible mantener vectores paralelos sobre espacios curvos pues su orientación cambia con respecto a su ubicación sobre una curva sobre el espacio. Este proceso se puede estudiar mediante el transporte paralelo en donde el vector se transporta de un lugar a otro a través de un circuito curvo. El resultado de este procedimiento es el llamado el tensor de curvatura o tensor de Riemann, el cual describe la curvatura del espacio:

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^\sigma_{\nu\beta} \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\nu\alpha} \Gamma^\mu_{\sigma\beta} . \quad (1.21)$$

En un espacio plano el tensor de Riemann se anula

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = 0 . \quad (1.22)$$

En un espacio curvo, las derivadas covariantes no conmutan y la no conmutatividad está medida por las componentes del tensor de Riemann:

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} V^\nu = [\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\nu . \quad (1.23)$$

El tensor de Riemann es simétrico al intercambiar el primer par de índices con el segundo, y antisimétrico al intercambiar los índices correspondientes al primer o segundo par de índices

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta\mu\nu} \\ &= -R_{\nu\mu\alpha\beta} \\ &= -R_{\mu\nu\beta\alpha} . \end{aligned} \quad (1.24)$$

Cumple con la identidad cíclica

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\beta\nu\alpha} = 0 \quad (1.25)$$

y con las identidades de Bianchi

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta;\rho} + R^\mu_{\nu\rho\alpha;\beta} + R^\mu_{\nu\beta\rho;\alpha} = 0 . \quad (1.26)$$

La contracción del primer y tercer índice del tensor de Riemann da lugar a un nuevo tensor conocido como el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\alpha_{\mu\alpha\nu} , \quad (1.27)$$

que en términos de los símbolos de Christoffel está dado por

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\nu\alpha,\mu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\alpha_{\sigma\alpha} - \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} . \quad (1.28)$$

Contrayendo el tensor de Ricci da lugar al escalar de Ricci o escalar de curvatura

$$R \equiv R^\mu_{\mu} . \quad (1.29)$$

1.4. Ecuaciones de Einstein

Las ecuaciones de Einstein describen la relación entre la curvatura del espacio tiempo en presencia de materia y se pueden derivar a partir de un principio variacional. Aunque es posible suponer las ecuaciones de Einstein como un postulado, en los siguientes párrafos mostramos una forma de obtenerlas partiendo de la acción de Einstein-Hilbert acoplado la geometría mínimamente a la materia.

Para comenzar definamos la acción total como la suma

$$S = S_g + S_m \quad (1.30)$$

en donde S_m es la acción de materia y S_g es la acción gravitacional o acción de Einstein-Hilbert [7] y está dada por:

$$S_g = \frac{1}{2\kappa} \int R\sqrt{-g}d^4x , \quad (1.31)$$

en donde $g = \det [g_{\alpha\beta}]$, κ es una constante y $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$, es el tensor de Ricci. La variación de la acción gravitacional estará dada por

$$2\kappa\delta(S_g) = \int \delta [(R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}) \sqrt{-g}] d^4x . \quad (1.32)$$

Aplicando la regla de Leibniz tendremos que

$$2\kappa\delta(S_g) = \int [(\delta R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu})] \sqrt{-g}d^4x + \int R\delta(\sqrt{-g})d^4x . \quad (1.33)$$

Para encontrar la variación de $R_{\mu\nu}$ es conveniente escribir el tensor de Ricci en un sistema de referencia localmente plano, en donde las primeras derivadas se desvanecen. De la ecuación (1.28) se tiene que el tensor de Ricci se puede escribir como

$$R_{\mu\nu} \approx (\Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\lambda) , \quad (1.34)$$

por lo que la variación está dada por

$$\delta R_{\mu\nu} \approx \delta (\Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\lambda) . \quad (1.35)$$

Multiplicando por la métrica inversa se llega a la misma forma del primer término en (1.33)

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \approx A_{,\lambda}^\lambda , \quad (1.36)$$

donde A^λ está dado por

$$A^\lambda = g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\nu . \quad (1.37)$$

Podemos ver que en la ecuación (1.33) es la integral de una divergencia sobre el elemento invariante de volumen ya que en (1.36) el término $A_{,\lambda}^\lambda$ contiene una derivada que se aplica a cada componente. Por el teorema de Gauss se tiene que este término se convertirá en una integral de superficie evaluado en la frontera. Dado que para la acción se pide que no haya variación en las fronteras este término es cero, y la ecuación (1.33) se reduce a

$$2\kappa\delta(S_g) = \int R_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}) \sqrt{-g}d^4x + \int R\delta(\sqrt{-g})d^4x . \quad (1.38)$$

Para encontrar la variación de $\sqrt{-g}$ se requiere de dos resultados. El primero es que el determinante de la métrica se puede escribir como

$$\begin{aligned} \det(g_{\alpha\beta}) &= g \\ &= g_{\alpha\beta} \text{cof}^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.39)$$

donde $\text{cof}^{\alpha\beta}$ es la matriz de cofactores.

La derivada del determinante con respecto a la métrica está dada por

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}} = \text{cof}^{\alpha\beta} = gg^{\alpha\beta} . \quad (1.40)$$

Para el segundo resultado tomaremos la variación de la contracción de la métrica con su inversa:

$$g_{\alpha\beta}g^{\alpha\sigma} = \delta_{\beta}^{\sigma} \implies \delta(g_{\alpha\beta}g^{\alpha\sigma}) = 0 . \quad (1.41)$$

Aplicando la regla de Leibniz tendremos que

$$\delta g_{\alpha\beta}g^{\alpha\sigma} + g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\sigma} = 0 \implies g^{\alpha\sigma}\delta(g_{\alpha\beta}) = -g_{\alpha\beta}\delta(g^{\alpha\sigma}) . \quad (1.42)$$

Al multiplicar $g_{\sigma\delta}$ por ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\begin{aligned} g_{\sigma\delta}g^{\alpha\sigma}\delta(g_{\alpha\beta}) &= -g_{\sigma\delta}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\sigma} \\ \implies \delta_{\delta}^{\alpha}\delta(g_{\alpha\beta}) &= -g_{\sigma\delta}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\sigma} \\ \implies \delta(g_{\delta\beta}) &= -g_{\sigma\delta}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\sigma} . \end{aligned} \quad (1.43)$$

Con estos resultados se puede obtener la variación de $\sqrt{-g}$:

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}) &= \frac{\partial(\sqrt{-g})}{\partial g_{\alpha\beta}}\delta g_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g_{\alpha\beta}}\delta g_{\alpha\beta} . \end{aligned} \quad (1.44)$$

Utilizando (1.40) tendremos que

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}) &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}g^{\alpha\beta}g\delta g_{\alpha\beta} \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} , \end{aligned} \quad (1.45)$$

y con (1.42) obtenemos finalmente

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{\sqrt{g}}{2}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} . \quad (1.46)$$

La variación de la acción gravitacional implica

$$\begin{aligned} 2\kappa\delta(S_g) &= \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x , \end{aligned} \quad (1.47)$$

en donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein definido como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R . \quad (1.48)$$

Por otro lado, la acción de materia es

$$S_m = \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x , \quad (1.49)$$

donde \mathcal{L}_m es el lagrangiano de materia. La variación δS_m , será de la forma

$$\begin{aligned}\delta S_m &= \int \delta(\mathcal{L}_m \sqrt{-g}) d^4x \\ &= \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} + \mathcal{L}_m \delta(\sqrt{-g}) \right\} d^4x .\end{aligned}\tag{1.50}$$

Utilizando la variación del determinante se tiene que

$$\begin{aligned}\delta S_m &= \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\alpha\beta}} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} + \mathcal{L}_m \left(-\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \right) \right\} d^4x \\ &= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_m g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int -\frac{T_{\alpha\beta}}{2} \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x ,\end{aligned}\tag{1.51}$$

donde $T_{\alpha\beta}$ es el tensor de energía momento

$$T_{\alpha\beta} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\alpha\beta}} + \mathcal{L}_m g_{\alpha\beta} ,\tag{1.52}$$

el cual contiene información sobre el contenido de materia y energía presente.

Con ambas acciones tenemos que

$$\int \left(\frac{1}{2\kappa} G_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} \sqrt{-g} d^4x = 0 .\tag{1.53}$$

Dado que se pide que la variación con respecto a la métrica sea cero, es decir

$$\delta S = \delta S_g + \delta S_m = 0 ,\tag{1.54}$$

se tiene que

$$G_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} .\tag{1.55}$$

La constante κ se puede obtener mediante el límite newtoniano a estas ecuaciones [8], el resultado es $\kappa = 8\pi$.

Las ecuaciones de Einstein toman finalmente la forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu} .\tag{1.56}$$

Las ecuaciones (1.56) dictan la relación entre curvatura y el contenido de materia. Para un espacio-tiempo de cuatro dimensiones son 10 ecuaciones diferenciales cuya solución son las 10 componentes del tensor métrico.

1.5. La solución de Schwarzschild

La resolución de las ecuaciones de Einstein es un problema cuya complejidad requiere de soluciones numéricas en la mayoría de los casos. Sin embargo, existe una solución que puede obtenerse con relativa sencillez al suponer un espacio tiempo vacío, estático y esféricamente simétrico.

Para encontrar este resultado, conocido como la solución de Schwarzschild, suponemos un espacio-tiempo vacío, es decir, $T_{\mu\nu} = 0$. Se requiere también que el espacio-tiempo sea estático, esto implica que las componentes del tensor métrico son independientes de la coordenada temporal por lo que el elemento de línea es invariante bajo la transformación $x^0 \rightarrow -x^0$. Para obtener una

solución esféricamente simétrica a las ecuaciones de Einstein se propone que la métrica tenga la forma

$$ds^2 = -A^2 dt^2 + B^2 dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) , \quad (1.57)$$

donde A y B son funciones a determinar. Para escribir las ecuaciones de Einstein, se deben calcular los tensores de curvatura para la métrica (1.57).

En este caso, sólo hay nueve símbolos de Christoffel diferentes de cero:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{A'}{A} & \Gamma_{00}^1 &= \frac{AA'}{B^2} & \Gamma_{11}^1 &= \frac{B'}{B} \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{B^2} & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r \sin^2 \theta}{B^2} & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta . \end{aligned} \quad (1.58)$$

Las componentes del tensor de Riemann están dadas por:

$$\begin{aligned} R_{110}^0 &= \frac{-A'B' + BA''}{AB} & R_{220}^0 &= \frac{rA'}{AB^2} \\ R_{330}^0 &= \frac{r \sin^2 \theta A'}{AB^2} & R_{010}^1 &= \frac{A(-A'B' + BA'')}{B^3} \\ R_{221}^1 &= -\frac{rB'}{B^3} & R_{331}^1 &= -\frac{r \sin^2 \theta B'}{B^3} \\ R_{020}^2 &= \frac{AA'}{rB^2} & R_{121}^2 &= \frac{B'}{rB} \\ R_{332}^2 &= \left(-1 + \frac{1}{B^2}\right) \sin^2 \theta & R_{030}^3 &= \frac{AA'}{rB^2} \\ R_{131}^3 &= \frac{B'}{rB} & R_{232}^3 &= 1 - \frac{1}{B^2} . \end{aligned} \quad (1.59)$$

Las componentes del tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{A(-rA'B' + B(2A' + rA''))}{rB^3} \\ R_{11} &= \frac{2AB' + rA'B' - rBA''}{rAB} \\ R_{22} &= 1 - \frac{1 + \frac{rA'}{A}}{B^2} + \frac{rB'}{B^3} \\ R_{33} &= \frac{\sin^2 \theta (-rBA' + A(-B + B^3 + rB'))}{AB^3} . \end{aligned} \quad (1.60)$$

Finalmente las componentes independientes del tensor de Einstein G_t^t y G_r^r son

$$\begin{aligned} G_t^t &= \frac{B - B^3 - 2rB'}{B^3 r^2} , \\ G_r^r &= \frac{A - AB^2 + 2rA'}{AB^2 r^2} . \end{aligned} \quad (1.61)$$

Las ecuaciones de Einstein en vacío implican que $G_t^t = 0$ y $G_r^r = 0$. La primera ecuación se puede resolver para B . El resultado es

$$B = \sqrt{\frac{r}{e^{2C_1} + r}} . \quad (1.62)$$

La segunda ecuación implica que $A = C_2/B$, por lo tanto

$$A = C_2 \sqrt{\frac{e^{2C_1} + r}{r}}, \quad (1.63)$$

en donde C_1 y C_2 son constantes de integración. En infinito, el espacio tiempo debe ser asintóticamente plano de forma que $A = B \rightarrow 1$. Por lo tanto $C_2 = 1$.

La segunda constante de integración se encuentra al estudiar el límite newtoniano para el espacio-tiempo de Schwarzschild y corresponde a $C_1 = \ln(-2M)/2$. Finalmente, los coeficientes métricos tienen la forma

$$A = B^{-1} = \sqrt{\frac{-2M}{r} + 1}, \quad (1.64)$$

y elemento de línea resultante es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.65)$$

A pesar que la solución de Schwarzschild corresponde a un espacio vacío, el parámetro M en la expresión de (1.65) representa la masa del cuerpo que produce la deformación en el espacio-tiempo. En el caso de una estrella, la métrica describe el espacio tiempo afuera de la superficie de la misma. Para agujeros negros la métrica describe todo el espacio a excepción de las superficies $r = 0$, y $r = 2M$, que corresponden a singularidades.

La superficie $r = 2M$, conocida como el horizonte de eventos, divide el espacio tiempo en dos regiones. Para un observador que cruza el horizonte desde infinito, la coordenada radial se vuelve temporal, mientras que la coordenada temporal se vuelve radial, por lo que pasado esa superficie es imposible evitar llegar a $r = 0$ que es una singularidad física que no se puede remover con una transformación de coordenadas.

La métrica de Schwarzschild es muy importante como solución de las ecuaciones de Einstein. El *teorema de Birkhoff* establece que en vacío, si un espacio-tiempo es esféricamente simétrico, la única solución a las ecuaciones de Einstein es el espacio-tiempo descrito por la métrica (1.65).

1.5.1. Estructura causal

La estructura causal del espacio-tiempo de Schwarzschild se puede determinar mediante el comportamiento de los conos de luz. Omitiendo dos componentes espaciales por simplicidad, se tiene que el cambio de la componente temporal respecto a la radial estará dado por

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad (1.66)$$

donde lejos de la fuente los conos de luz de los observadores corresponden a los del espacio-tiempo de Minkowski. Conforme se acercan al punto $r = 2M$ los conos de luz comienzan a tener una pendiente más pronunciada. Al llegar al horizonte éstos colapsan, por lo que no es posible obtener información del mismo. Para valores menores a $2M$ el signo de las pendientes cambia, indicando que la coordenada radial se vuelve de naturaleza temporal.

Las singularidades en $r = 0$ y en $r = 2M$ son de naturaleza diferente. La singularidad en $r = 0$ es una singularidad física que no puede eliminarse con un cambio de coordenadas. Por lo otro lado, $r = 2M$, corresponde a una singularidad coordenada que sí puede desaparecer con una elección de coordenadas diferente.

Debido al efecto que la singularidad en $r = 2M$ ejerce en la estructura causal del espacio-tiempo, una elección de coordenadas diferente puede ser de utilidad para estudiar sus propiedades. Por ejemplo el cambio de coordenadas

$$dr_* = \frac{dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad (1.67)$$

donde

$$r_* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) . \quad (1.68)$$

A r_* se le conoce como coordenada tortuga ya que a medida que r se aproxima al valor $2M$, la coordenada r_* tiende a $-\infty$, de forma que nunca llega a la singularidad.

Sustituyendo dr_* en (1.65), el elemento de línea resultante es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) (-dt + dr_*) (dt + dr_*) + r^2 d\Omega^2 . \quad (1.69)$$

Para estudiar el comportamiento de los conos de luz en estas coordenadas se toma en cuenta la parte temporal y espacial

$$0 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) (-dt + dr_*) (dt + dr_*) , \quad (1.70)$$

de forma que

$$\frac{dt}{dr_*} = \pm 1 , \quad (1.71)$$

por lo que con la coordenada r_* los conos de luz tienen la misma forma que los conos de luz en el espacio tiempo de Minkowski.

1.5.2. Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Otras coordenadas útiles para estudiar la estructura causal son las coordenadas de Eddington-Finkelstein. Estas coordenadas permiten obtener más información del espacio porque en estas coordenadas los conos no colapsan en la singularidad en $r = 2M$. Consideramos el cambio de coordenadas para el elemento de línea usual en coordenadas de Boyer-Lindquist (1.65)

$$v = t + r_* , \quad (1.72)$$

de forma que para la coordenada temporal

$$dt^2 = dv^2 - 2dvdr_* + dr_*^2 . \quad (1.73)$$

El elemento de línea resultante es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2 , \quad (1.74)$$

en donde v describe el paso del tiempo. En estas coordenadas la métrica es regular en $r = 2M$.

Las geodésicas nulas radiales siguen trayectorias dadas por

$$0 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv^2 + 2dvdr = - \frac{dv}{dr} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dv}{dr} - 2 \right] , \quad (1.75)$$

por lo que para los conos de luz

$$\frac{dv}{dr} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dv}{dr} = \frac{2}{\left(1 - \frac{2M}{r} \right)} . \quad (1.76)$$

Esto indica que uno de los lados del cono de luz se encuentra sobre las curvas de v constante. Para el otro lado del cono, en el límite $r \rightarrow \infty$, la pendiente de éste será 2, y en el punto $2M$ una línea vertical. Esto permite que los conos no colapsen en la singularidad y se encuentren abiertos en la dirección de la misma, por lo que a estas coordenadas se les llama coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes.

En la región $r < 2M$ la coordenada r decrece a medida que la coordenada v crece, por lo tanto para trayectorias tipo tiempo o tipo luz, una partícula cayendo no podrá evitar la singularidad en $r = 0$ pasado el horizonte de eventos.

Por otro lado el cambio de variable

$$u = t - r_* \tag{1.77}$$

generará el elemento de línea

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2 . \tag{1.78}$$

De manera similar a las coordenadas entrantes se tiene que

$$\frac{du}{dr} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dr} = - \frac{2}{\left(1 - \frac{2M}{r} \right)} , \tag{1.79}$$

donde los conos miran en dirección contraria a la singularidad, por lo tanto las ecuaciones (1.78) corresponden a las coordenadas de Eddington-Finkelstein salientes. Para $du > 0$, la coordenada r es creciente, por lo que para trayectorias causales en la región $r < 2M$, las partículas deben de salir hacia la región asintótica. Las transformaciones de coordenadas en el espacio tiempo de Schwarzschild permiten eliminar las singularidades coordenadas, mientras que el estudio de la estructura causal permite visualizar la forma en que los conos de luz se comportan en dichas coordenadas. Para determinar la trayectorias que siguen las partículas de prueba en el espacio tiempo de Schwarzschild es necesario resolver sus ecuaciones de movimiento, que son las ecuaciones de Euler-Lagrange. Equivalentemente estas ecuaciones corresponden a las geodésicas como se describió en este capítulo.

Capítulo 2

Movimiento de Partículas de Prueba

Para describir la trayectoria de una partícula de masa m en el espacio tiempo de Schwarzschild partimos del Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \left[- \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right]. \quad (2.1)$$

A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.16) se obtienen las ecuaciones de movimiento asociadas para las coordenadas $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$. El lagrangiano (2.1) tiene dos coordenadas cíclicas, la primera corresponde a t

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} \right] = 0, \quad (2.2)$$

y la segunda a ϕ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{d\tau} \left[r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \right] = 0. \quad (2.3)$$

Para la coordenada θ se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \dot{\theta} \right) = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2. \quad (2.4)$$

Debido a la simetría esférica el movimiento está confinado a un solo plano, por lo que podemos escoger el plano ecuatorial con las condiciones iniciales

$$\theta = \pi/2 \quad \text{y} \quad \dot{\theta} = 0, \quad (2.5)$$

por lo que $\ddot{\theta} = 0$ y el movimiento de la partícula quedará confinado al plano $\theta = \pi/2$ en todo momento. En el análisis posterior supondremos, sin pérdida de generalidad que $m = 1$.

2.1. Trayectorias de partículas con masa

Confinar el movimiento al plano ecuatorial utilizando las condiciones (2.5) simplifica la obtención de la ecuación de movimiento para (2.3). Se obtienen las ecuaciones

$$\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} = e = \text{const.} \quad (2.6)$$

y

$$r^2 \dot{\phi} = \ell = \text{const.} \quad (2.7)$$

por lo que las componentes de la cuadrivelocidad \dot{t} y $\dot{\phi}$ estarán dadas por

$$\dot{t} = \frac{e}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \quad (2.8)$$

y

$$\dot{\phi} = \frac{\ell}{r^2} . \quad (2.9)$$

Para el caso de la coordenada r es conveniente utilizar la condición de normalización de la cuadrivelocidad dada por (1.19) de forma que la ecuación para \dot{r} estará dada por

$$-1 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 . \quad (2.10)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.8) y (2.9), la ecuación (2.10) toma la forma

$$1 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{\ell^2}{r^2} . \quad (2.11)$$

Resolviendo para \dot{r}^2 se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{r}^2 &= \frac{e^2 - 1}{2} - \left(-\frac{M}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{M\ell^2}{r^3}\right) \\ &= E - V , \end{aligned} \quad (2.12)$$

la cual es la ecuación radial en la geometría de Schwarzschild con el potencial efectivo

$$V = \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{M}{r} - \frac{M\ell^2}{r^3} \quad (2.13)$$

y energía

$$E = \frac{e^2 - 1}{2} , \quad (2.14)$$

donde e corresponde a la energía del caso newtoniano.

El potencial (2.13) tiene la misma forma que para el caso newtoniano, con diferencia del término extra al final, el cual actúa como corrección relativista. De esta manera las geodésicas tipo tiempo para una partícula satisfacen las condiciones

$$\dot{\phi} = \frac{\ell}{r^2} , \quad (2.15)$$

$$\dot{t} = \frac{e}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \quad (2.16)$$

y

$$\dot{r}^2 = e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\ell^2}{r^2}\right) . \quad (2.17)$$

Utilizando la ecuación (2.15) y el cambio de variable

$$u = \frac{1}{r} \quad (2.18)$$

en la ecuación (2.17), se reescriben las derivadas de r en términos de u

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \dot{u} = -\ell \frac{\dot{u}}{\dot{\phi}} = -\ell \frac{du}{d\phi} \quad (2.19)$$

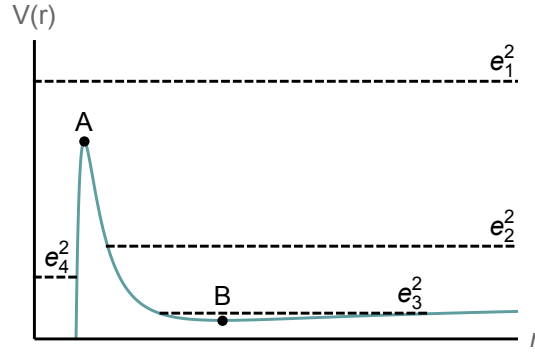


Figura 2.1: Potencial efectivo correspondiente a la ecuación (2.13) con valores $M = 1$ y $\ell = 5$. Las líneas punteadas representan diferentes niveles de energía. Los puntos corresponden a los mínimos y máximos de la función.

para obtener la ecuación radial

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 &= \frac{e^2}{\ell^2} - (1 - 2Mu) \left(\frac{1}{\ell^2} + u^2\right) \\ &= \frac{e^2 - 1}{\ell^2} + \frac{2Mu}{\ell^2} - u^2 + 2Mu^3. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Derivando (2.20) respecto a ϕ obtenemos

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = \frac{M}{\ell^2} - u + 3Mu^2. \quad (2.21)$$

El movimiento de las partículas se puede analizar estudiando el potencial efectivo dado en la ecuación (2.17). Dado que e^2 no puede ser menor que el valor del potencial, \dot{r} debe ser igual o mayor a cero. Por lo tanto las trayectorias están restringidas a los casos donde el potencial es menor a la energía, dependiendo de la región de r donde se encuentre.

La figura 2.1 muestra gráficamente la forma del potencial (con valores $M = 1$ y $\ell = 5$) para el caso de partículas con masa el cual posee un mínimo y un máximo conforme a la ecuación (2.26), indicados por las etiquetas A y B . El mínimo es un punto estable, mientras que el máximo es inestable por lo que cualquier variación resultará en una aceleración que alejará a la partícula del máximo, hacia el infinito o bien hacia el horizonte en $r = 2M$.

Si la partícula posee una energía mayor a la del máximo del potencial, indicado por e_1^2 , el movimiento no se encuentra restringido y puede comenzar su trayectoria desde el infinito. Como su valor es mayor a la del potencial, la partícula llegará directamente al horizonte de eventos. Si la partícula posee una energía menor a la del potencial (caso e_2^2), la partícula alcanzará un radio mínimo en el punto donde el valor de r coincide con el del potencial y no podrá alcanzar regiones de r menores, por lo que la partícula acelera de forma que regresa hacia $r = \infty$.

En el caso e_3^2 , dado que la partícula es colocada entre dos puntos del potencial ésta sólo podrá moverse entre los dos extremos del mismo. El eje de la órbita cambiará gradualmente en cada vuelta, dando lugar a la precesión de su trayectoria, acotada por los dos puntos del potencial, precesando alrededor del centro. Existe otra energía permitida correspondiente a e_4^2 . Al igual que en el caso de e_2^2 , la partícula sólo puede comenzar en la región de r permitida, y al intersectar el potencial efectivo regresa hacia $r = 2M$.

2.1.1. Órbitas circulares

Como se vio en la sección anterior, los casos del máximo y mínimo del potencial corresponden a las órbitas circulares de r constante. Tomando la ecuación radial (2.12) y despejando \dot{r} obtenemos la expresión

$$\dot{r} = \sqrt{e^2 - 1 - 2V} . \quad (2.22)$$

Derivando respecto a τ se tiene que

$$V'(r) = -\frac{V'\dot{r}}{\sqrt{e^2 - 2V}} = -V'\dot{r}\frac{1}{\dot{r}} = -V' . \quad (2.23)$$

Es posible ver que cuando $V' = 0$ no hay aceleración. Ésta es la condición para que la trayectoria de la partícula tenga una órbita circular. Los valores de r para los cuales se tienen órbitas circulares corresponden al mínimo y máximo de la función que se obtienen al derivar respecto a (2.13):

$$V'(r) = \frac{2Mr^2 - 2\ell^2 r + 6M\ell^2}{r^4} \quad (2.24)$$

e igualando a cero

$$Mr^2 - \ell^2 r + 3M\ell^2 = 0 . \quad (2.25)$$

Por lo tanto para este caso las órbitas circulares están dadas por

$$r = \frac{\ell^2}{2M} \left[1 \pm \left(1 - \frac{12M^2}{\ell^2} \right)^{1/2} \right] . \quad (2.26)$$

Las órbitas circulares no son posibles para todos los valores de ℓ y M , es necesario que se cumpla la condición $\ell^2 > 12M^2$. El mínimo y el máximo coinciden en $\ell^2 = 12M^2$, el cual es el valor mínimo para ℓ . Por lo tanto también existe un valor mínimo para partículas con masa correspondiente a $r_{min} = 6M$ para una trayectoria de r constante.

Se puede demostrar que la descripción de las órbitas circulares en la geometría de Schwarzschild tienen la misma forma que la tercera ley de Kepler. Despejando la ecuación (2.25) para ℓ^2/r^2 obtenemos

$$\frac{\ell^2}{r^2} = \frac{M/r}{1 - \frac{3M}{r}} . \quad (2.27)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (2.17) igualada a cero se tiene que

$$e^2 = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2}{1 - \frac{3M}{r}} , \quad (2.28)$$

de forma que se puede determinar la energía y momento angular de una partícula en una órbita circular al especificar el radio.

Utilizando las ecuaciones (2.15) y (2.16) se encuentra la velocidad aparente de un objeto que gira vista desde infinito:

$$\Omega^2 = \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \frac{\dot{\phi}^2}{\dot{t}^2} = \frac{\ell^2/r^4}{e^2 / \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} = \frac{M}{r^3} . \quad (2.29)$$

Despejando M , tenemos que

$$M = \Omega^2 r^3 , \quad (2.30)$$

la cual coincide con la tercera ley de Kepler.

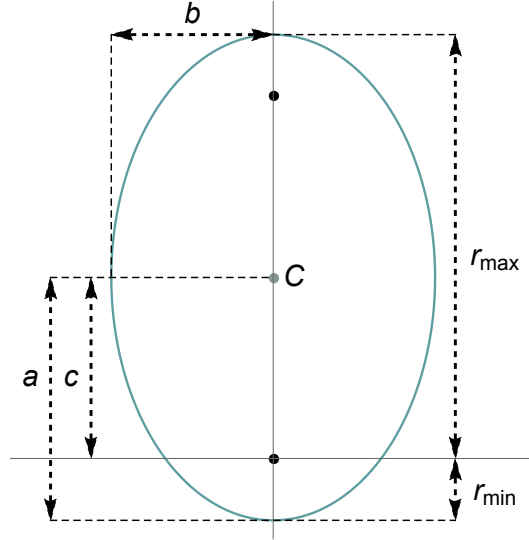


Figura 2.2: Elipse con uno de los focos en el origen. Los puntos negros corresponden a los focos y el punto gris C corresponde al centro de la elipse. Las distancias entre los puntos opuestos de la elipse corresponden al eje mayor ($2a$) y al eje menor ($2b$).

2.1.2. Órbitas acotadas no circulares

Las órbitas acotadas entre dos puntos del potencial no poseen formas circulares, asemejan elipses que precesan alrededor de uno de los focos que está situado en el origen y cuyo eje va cambiando de dirección con cada vuelta.

La figura 2.2 muestra las diferentes partes de una elipse. Ésta posee dos focos (indicados en negro) los cuales son equidistantes del centro C (el punto gris). La suma de las distancias de los focos a cualquier punto sobre la elipse es constante. La excentricidad \tilde{e} de la elipse está definida como la razón entre la semidistancia focal c (la distancia del centro al foco) y el semieje mayor a (la distancia del centro de la elipse al uno de los extremos del eje mayor).

Podemos graficar las trayectorias al integrar la ecuación (2.21) con el potencial y las condiciones iniciales. Por las relaciones (2.18) y (2.19) las condiciones iniciales estarán dadas por

$$u_0 = \frac{1}{r} \quad \text{y} \quad u'_0 = -\frac{r}{\ell}, \quad (2.31)$$

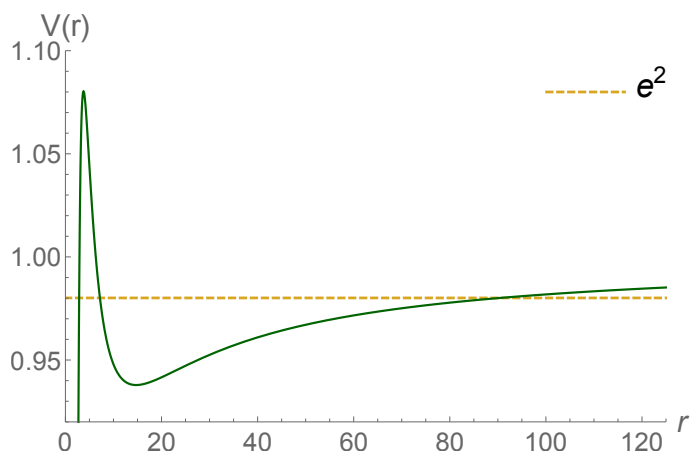
que determinan la trayectoria de la partícula y dependerán del valor inicial de r que se escoja. La figura 2.3 muestra la precesión de la partícula, que se coloca entre los dos extremos del pozo de potencial en $r_0 = 30$, de forma que la órbita precesa dando vueltas alrededor del agujero negro como se aprecia en 2.3b. Las líneas punteadas indican los extremos del potencial correspondientes a la figura 2.3a, respectivamente los puntos $r = 7.1854$ (en rojo) y $r = 90.458$ (en azul), más allá de los cuales son regiones prohibidas para la trayectoria de la partícula.

Las órbitas acotadas también pueden parametrizarse de manera semejante al caso newtoniano en términos de cantidades correspondientes a la excentricidad de la elipse y el semi-lado recto, como señalan Osburn et al. [9]. Dado que el agujero negro se encuentra en uno de los focos, nombrando a los puntos de retorno del potencial r_{min} y r_{max} (el periastro y apoastro respectivamente), tendremos que la excentricidad \tilde{e} será:

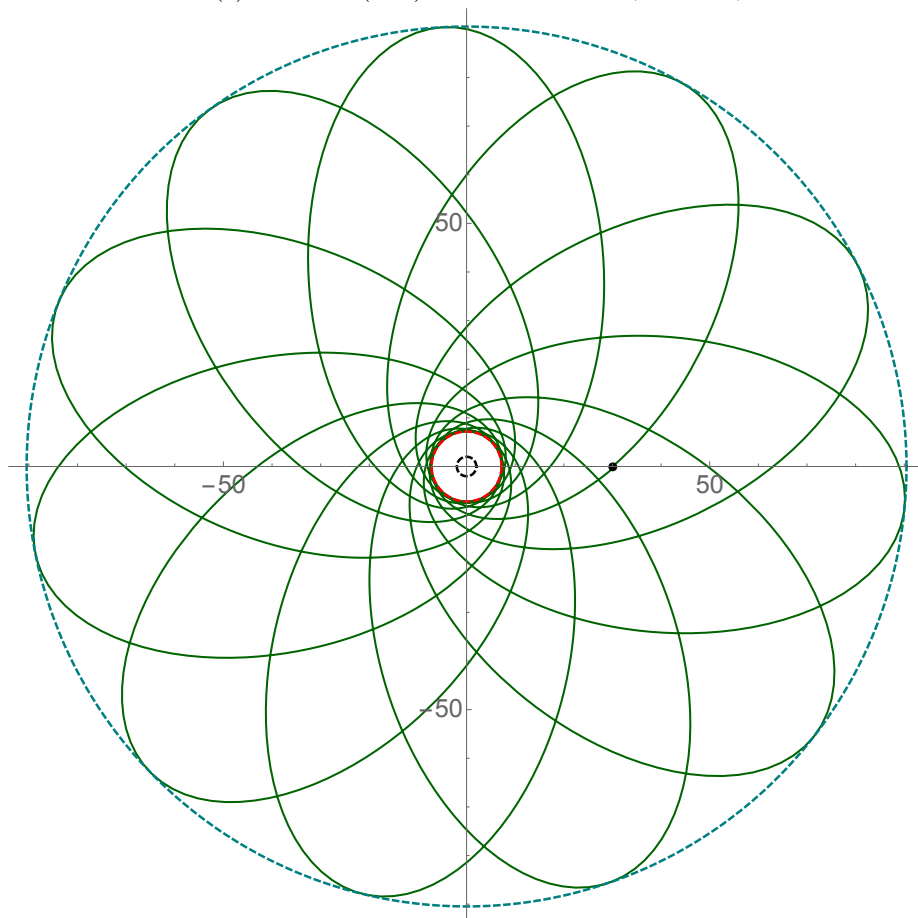
$$\tilde{e} = \frac{c}{a} = \frac{r_m - r_{min}}{r_m} = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}, \quad (2.32)$$

en donde

$$r_m = \frac{r_{max} + r_{min}}{2}. \quad (2.33)$$



(a) Potencial (2.13) con valores $\ell = 4.3$, $e = 0.99$, $M = 1$



(b) $r_0 = 4.5$

Figura 2.3: Precesión una partícula con posición inicial $r_0 = 30$ correspondiente al potencial 2.3a. El punto negro indica la posición inicial de la partícula, la línea punteada negra indica el horizonte de eventos, la roja y la azul indican los puntos de retorno.

Por otro lado, el semi-lado recto p se define como

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_{max}} + \frac{1}{r_{min}} \right), \quad (2.34)$$

donde $r_{max} = a(1 + \tilde{e})$ corresponde al afelio y $r_{min} = a(1 - \tilde{e})$ al perihelio, y se tendrá que

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - \tilde{e}^2} \quad \implies \quad p = a(1 - \tilde{e}^2). \quad (2.35)$$

Dado que estamos interesados en las órbitas acotadas, es necesario tener las raíces u_1 , u_2 y u_3 del polinomio

$$f(u) = \frac{e^2 - 1}{\ell^2} + \frac{2Mu}{\ell^2} - u^2 + 2Mu^3 = 2M(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \quad (2.36)$$

proveniente de la ecuación (2.20) para las partículas tipo con masa en reposo diferente de cero.

De las expresiones para el semi-lado recto se tienen ya dos puntos que corresponden a dos raíces del polinomio. Para la tercera raíz del término cuadrático y el último término se debe cumplir que

$$-u^2(u_1 + u_2 + u_3) = \frac{u^2}{2M} \quad \text{y} \quad u_1 u_2 u_3 = \frac{1 - e^2}{2M\ell^2}. \quad (2.37)$$

De esta forma las raíces serán

$$u_1 = \frac{1}{p}(1 - \tilde{e}^2), \quad u_2 = \frac{1}{p}(1 + \tilde{e}^2) \quad \text{y} \quad u_3 = \frac{1}{2M} - \frac{2}{p}. \quad (2.38)$$

Haciendo uso de la segunda condición en (2.37) y despejando para e obtenemos la expresión

$$e^2 = 1 - \frac{\ell^2}{p^3}(1 - \tilde{e}^3)(p - 4M). \quad (2.39)$$

Cuando comparamos los términos lineales de las expresiones en la ecuación (2.36) obtenemos el valor para ℓ^2 dado por

$$\ell^2 = \frac{M^2 p^2}{Mp - 3M^2 - M^2 \tilde{e}^2}. \quad (2.40)$$

Al sustituir en la ecuación (2.39) obtenemos

$$e = \left[\frac{(p - M)^2 - 4M\tilde{e}}{p(p - 3M - M\tilde{e}^2)} \right]^{1/2} \quad (2.41)$$

y definiendo \tilde{p} como

$$\tilde{p} = \frac{p}{M} = \frac{2r_{max}r_{min}}{M(r_{max} + r_{min})}, \quad (2.42)$$

se puede utilizar la definición (2.42) y la expresión (2.40) para obtener el resultado

$$\ell = \frac{M\tilde{p}^2}{\sqrt{\tilde{p} - 3 - \tilde{e}^2}}. \quad (2.43)$$

Finalmente, utilizando las ecuaciones

$$\tilde{p} = \frac{2r_{max}r_{min}}{M(r_{max} + r_{min})} \quad \text{y} \quad \tilde{e} = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}} \quad (2.44)$$

se tendrán dos expresiones para e y ℓ en términos de \tilde{p} y \tilde{e}

$$e = \sqrt{\frac{(\tilde{p} - 2)^2 - 4\tilde{e}^2}{\tilde{p}(\tilde{p} - 3 - \tilde{e}^2)}} \quad \text{y} \quad \ell = \frac{\tilde{p}M}{\sqrt{\tilde{p} - 3 - \tilde{e}^2}}, \quad (2.45)$$

donde las órbitas son acotadas cuando $\tilde{e} < 1$ y $\tilde{p} > 6 + 2\tilde{e}$. Un ejemplo se muestra en la imagen 2.4 que corresponde a una órbita acotada de acuerdo a las expresiones presentadas donde los puntos de retorno corresponden a los puntos $r_{min} = 8$ y $r_{max} = 40$.

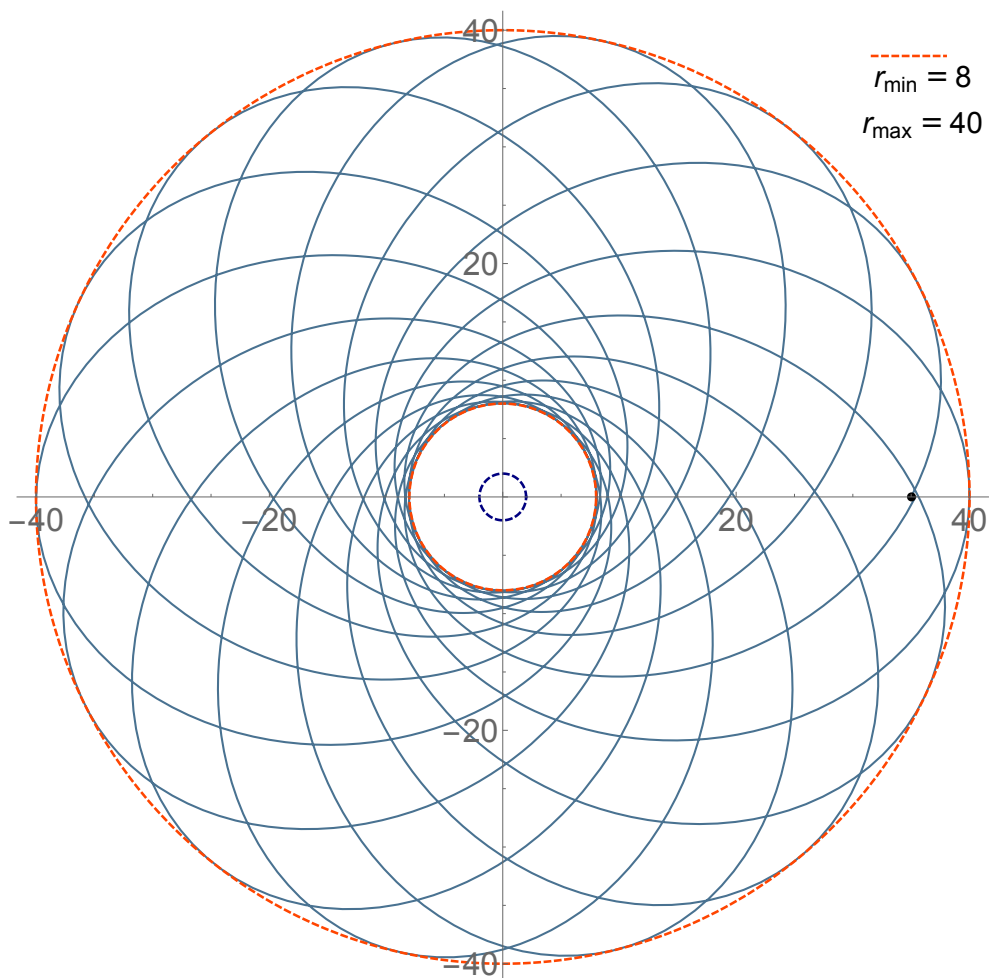


Figura 2.4: Órbita acotada de una partícula de acuerdo a las expresiones (2.44) y (2.45) con puntos de retorno $r_{min} = 8$ y $r_{max} = 40$, indicados por las líneas punteadas naranjas. El punto de partida es $r = 35$. La línea azul oscuro representa el horizonte de eventos.

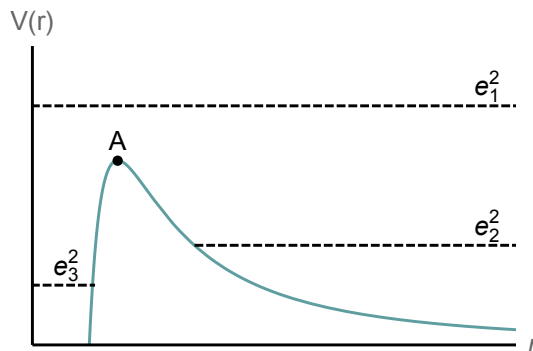


Figura 2.5: Potencial efectivo correspondiente a la ecuación (2.48) con valores $M = 1$ y $\ell = 5$. Las líneas punteadas representan diferentes niveles de energía. El punto A corresponde al máximo de la función.

2.2. Trayectorias de partículas con masa en reposo cero

En el caso de las partículas sin masa las ecuaciones que rigen su movimiento tienen la misma forma para las coordenadas cíclicas t y ϕ , dadas por (2.8) y (2.9) respectivamente. La condición de normalización de la cuadrivelocidad para los fotones dada por (1.20) da como resultado

$$0 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2. \quad (2.46)$$

Volviendo a confinar el movimiento al plano $\theta = \pi/2$ y sustituyendo las expresiones para \dot{t} y $\dot{\phi}$ se tendrá que

$$\dot{r}^2 = e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\ell^2}{r^2}, \quad (2.47)$$

donde el potencial efectivo está dado por

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\ell^2}{r^2}. \quad (2.48)$$

Utilizando de nuevo el cambio de variable (2.18) y su derivada (2.19), obtenemos la ecuación radial

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2Mu^3 - u^2 + \frac{1}{b^2}, \quad (2.49)$$

donde la cantidad $b = \ell/e$ es conocida como el parámetro de impacto.

El término que contiene a u^3 en la ecuación (2.49) puede interpretarse como una corrección relativista, ya que si se omite la solución para las trayectorias corresponde al caso newtoniano.

Derivando la ecuación (2.49) respecto a ϕ se obtiene

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = -u + 3Mu^2. \quad (2.50)$$

Las trayectorias correspondientes al potencial (2.47) para las partículas sin masa, en la figura 2.5, siguen la misma dinámica que aquellas correspondientes a la figura 2.1, con la diferencia de la ausencia de trayectorias acotadas que precesan, dado que el potencial (2.48) no posee un mínimo, como se puede ver en la figura 2.5. Por lo tanto para este caso no existen trayectorias que precesan.

En el caso de las partículas sin masa, el potencial efectivo correspondiente a la ecuación (2.48) sólo posee un máximo, correspondiente a $r = 3M$ sin importar el valor para ℓ :

$$V'(r) = \frac{6M\ell^2 - 2\ell^2 r}{r^4} \implies 3M\ell^2 - \ell^2 r = 0 \implies r = 3M, \quad (2.51)$$

por lo tanto, sólo en $r = 3M$ existen órbitas circulares. Las figuras 2.7 y 2.6 muestran diferentes trayectorias para el caso de los fotones al integrar la ecuación (2.50). La figura 2.7a representa la gráfica para el potencial (2.48). En este caso el potencial $V(r)$ coincide con el valor de la energía en los puntos $r = 2.36959$ y $r = 4.45336$. La partícula es colocada en el punto $r_0 = 4.5$, cuya trayectoria puede verse en la figura 2.7b correspondiente a la integración numérica de la ecuación (2.50), cuyas condiciones iniciales también corresponden a las ecuaciones (2.31).

Dado que el máximo del potencial es un punto inestable, las trayectorias son muy sensibles a los valores iniciales. Mientras que una partícula puesta en este punto dará vueltas alrededor del agujero negro, como se muestra en la figura 2.6b, cualquier desplazamiento mínimo generará una trayectoria diferente. En la figura 2.6c, donde el fotón se encuentra en el punto $r_0 = 2.9999$, la partícula da una vuelta para finalmente caer hacia el horizonte de eventos, mientras que en 2.6d, que corresponde a un fotón colocado en el punto $r_0 = 3.0006$ da una vuelta para alejarse del agujero negro. La figura 2.7 muestra una trayectoria para el caso de los fotones donde la partícula se aleja.

El potencial efectivo $V(r)$, dado por (2.48), se encuentra graficado en la figura 2.7a. Éste coincide con el valor de la energía en los puntos $r = 2.36959$ y $r = 4.45336$. La partícula es colocada en el punto $r_0 = 4.5$. Su trayectoria puede verse en la figura 2.7b.

2.2.1. El parámetro de impacto

El parámetro de impacto juega un papel importante en el análisis del movimiento de las partículas sin masa. Analizarlo es equivalente a hablar de sus trayectorias.

Utilizando las ecuaciones (2.47) y (2.15) para $\dot{\phi}$ elevada al cuadrado obtenemos

$$\frac{\dot{r}^2}{\dot{\phi}^2} = \frac{e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{\ell^2/r^4}, \quad (2.52)$$

que finalmente puede transformarse en la ecuación

$$\left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\phi} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) = \frac{1}{b^2}, \quad (2.53)$$

la cual dicta la trayectoria de los fotones. El segundo término del lado izquierdo puede interpretarse como un potencial newtoniano

$$V_{eff} = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right). \quad (2.54)$$

Al sustituir el punto máximo del potencial, $r = 3M$, en (2.54) podemos encontrar el valor crítico V_c .

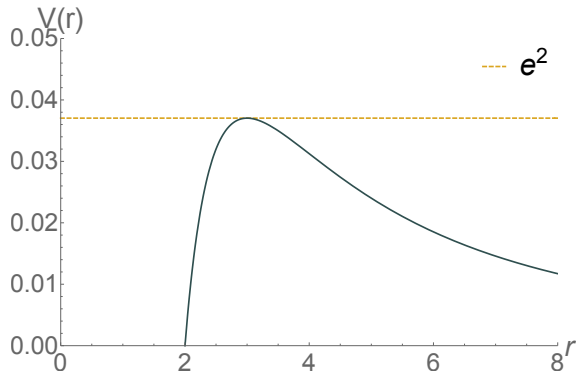
Existe también un valor crítico para el parámetro de impacto b_c , el cual se deriva de sustituir el punto máximo del potencial en la ecuación (2.49). Estos dos valores están dados por

$$V_c = \frac{1}{27M^2} \quad \text{y} \quad b_c = 3\sqrt{3}M. \quad (2.55)$$

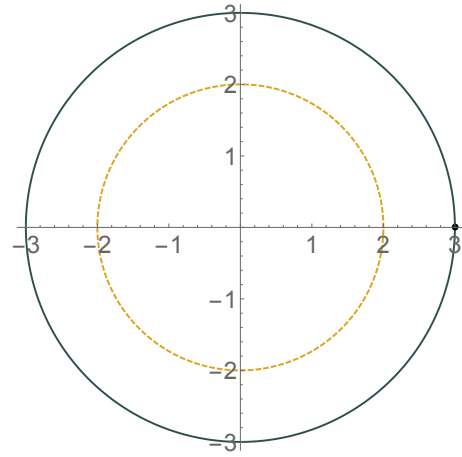
Observando la ecuación (2.53) se puede notar que la partícula sólo puede alcanzar un punto a una distancia r solamente si

$$b \leq \{V(r)\}^{-1/2}, \quad (2.56)$$

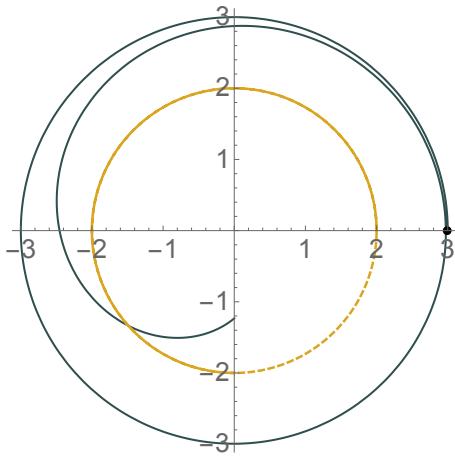
por lo tanto la trayectoria de los fotones está restringida.



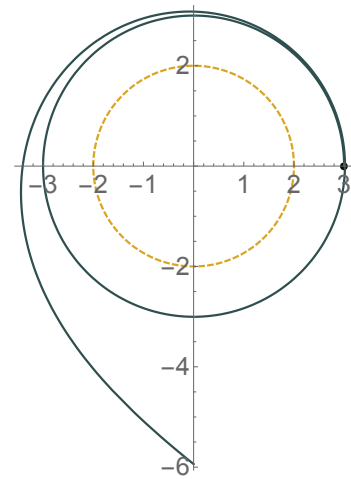
(a) Potencial (2.48) con valores $\ell = 1$, $E = 1/27$, $M = 1$



(b) $r_0 = 3$



(c) $r_0 = 2.99999$



(d) $r_0 = 3.00006$

Figura 2.6: Trayectorias de fotones cuando la energía corresponde al máximo del potencial. La figura 2.6b representa la trayectoria circular inestable mientras que 2.6c y 2.6d corresponden a trayectorias cerca del punto máximo $r = 3M$. El punto negro indica la posición inicial r_0 de la partícula.

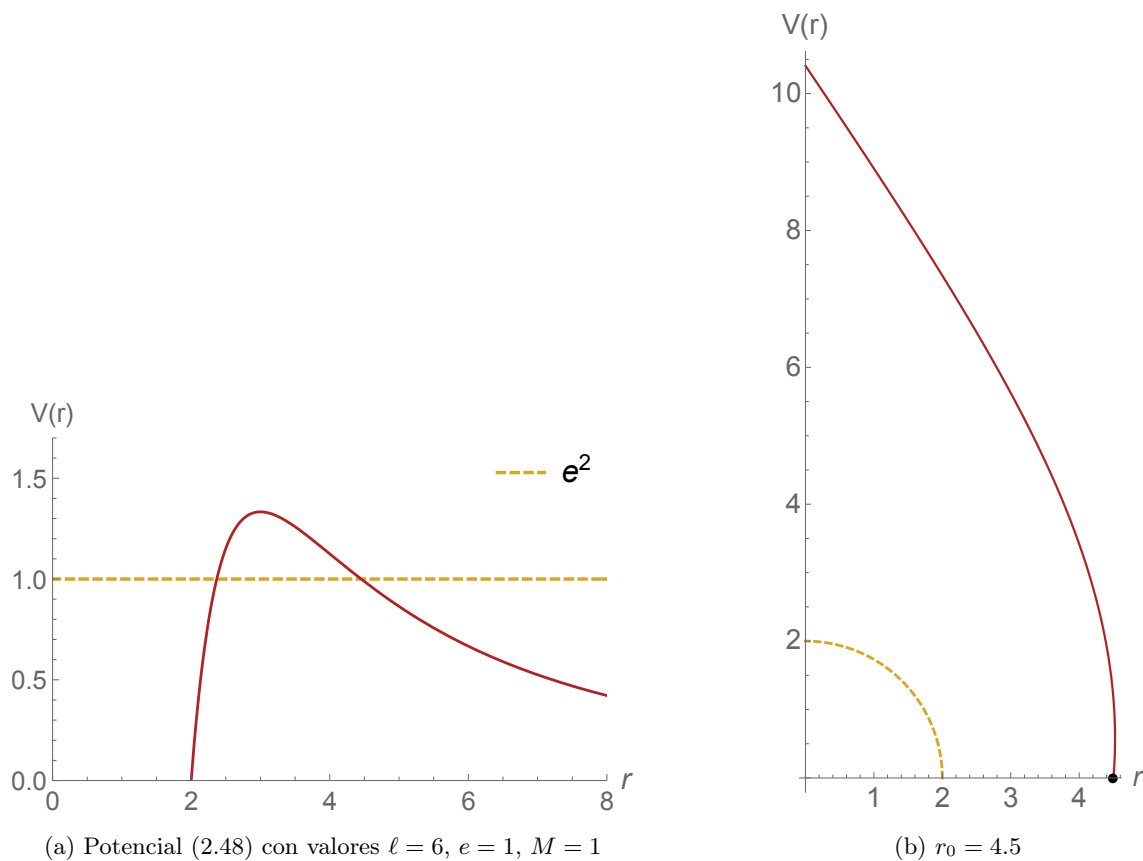


Figura 2.7: Trayectoria de un fotón de acuerdo al potencial (2.48), en donde (a) es el potencial con valores $\ell = 6$, $e = 1$ y $M = 1$, mientras que en (b) se ilustra la trayectoria correspondiente al potencial. La posición inicial de la partícula es $r_0 = 4.5$. En la figura está indicado por un punto negro.

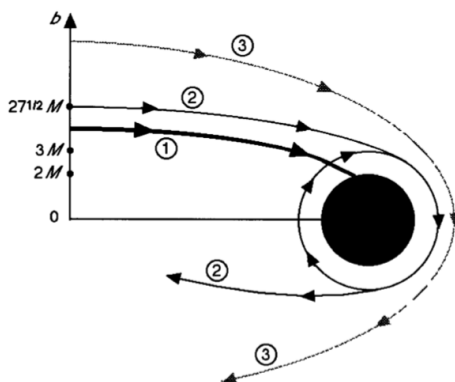


Figura 2.8: Trayectoria del fotón dado un parámetro de impacto b [10].

La figura 2.8 muestra trayectorias de las partículas de acuerdo al parámetro de impacto dado. Para valores de b menores que el valor crítico los fotones son capturados, como indica la trayectoria 1. La trayectoria 2 indica el caso donde el valor del parámetro de impacto es el parámetro de impacto crítico $b = b_c$. En este caso el fotón se mantiene en una órbita circular en $r = 3M$. Al tratarse de una órbita inestable, el fotón puede caer hacia el agujero negro o alejarse. Finalmente, si el valor de b es mayor que b_c , la trayectoria de los fotones es modificada pero no son capturados por el agujero negro, como se ve indicado por la trayectoria 3.

2.2.2. Silueta de un agujero negro en vacío

En esta sección analizaremos la sombra de un agujero negro iluminado por una fuente externa. Algunos de los fotones provenientes de la fuente son capturados por el agujero negro produciendo una región oscura para un observador (pues no hay fotones que le lleguen) y otros fotones llegan al observador pero son deflectados por la presencia del agujero negro produciendo una silueta luminosa alrededor de la región oscura.

Dado que existe una región a partir de la cual las partículas no pueden escapar del agujero, es imposible conocer su apariencia. Sin embargo, al estudiar las trayectorias de la luz a sus alrededores es posible conocer su silueta. Tal similitud con la región que tapa un objeto impidiendo que los fotones lleguen a ella es la razón a la cual se le denomina sombra del agujero negro [11].

A partir de la ecuación radial de las trayectorias para las partículas sin masa (2.49), definimos el polinomio $G(u)$ como

$$G(u) = u^3 - \frac{u^2}{2M} + \frac{1}{2Mb^2}. \quad (2.57)$$

Nombraremos las raíces de (2.57) como u_1 , u_2 y u_3 y supondremos que $u_1 < u_2 < u_3$. Las raíces del polinomio $G(u)$ presentan los siguientes casos de acuerdo al valor del parámetro de impacto:

$$\begin{aligned} b > b_c : u_1 &\leq 0 < u_2 < u_3 \\ b = b_c : u_1 &= -\frac{1}{6M}, \quad u_2 = u_3 = \frac{1}{3M} \\ b < b_c : u_1 &\leq 0, u_2, \text{ y } u_3 \text{ el complejo conjugado} \end{aligned} \quad (2.58)$$

El caso de interés es el de $b > b_c$, puesto que las órbitas de interés son aquellas que llegan al sistema del observador el cual se encuentra en infinito. Escogemos $u = 1/P$ como una de las soluciones, en donde P corresponde al periastro de la órbita. Factorizando para encontrar las raíces del polinomio

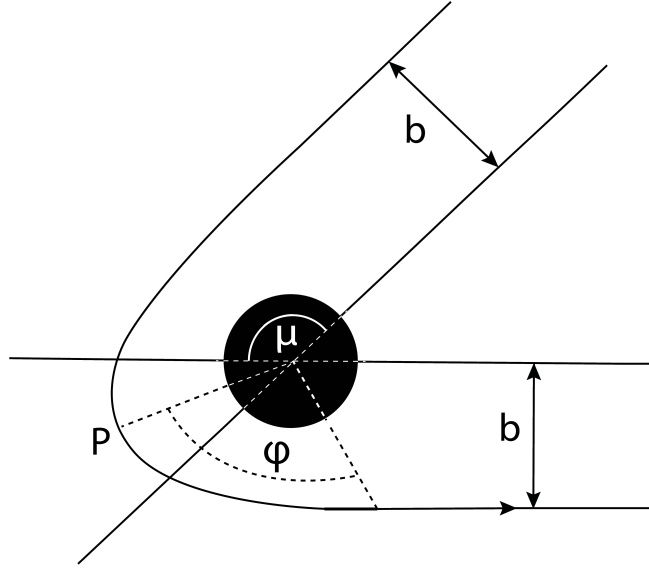


Figura 2.9: Trayectoria de un fotón con parámetro de impacto b . Se trata de una trayectoria de dispersión en la que el fotón no es atrapado por el potencial del agujero negro y sale con el mismo parámetro de impacto.

$G(u)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 G(u) &= u^3 - \frac{u^2}{2M} + \frac{1}{2Mb^2} \\
 &= \left(u - \frac{1}{P}\right) \left\{ u^2 + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2M}\right)u + \frac{1}{P^2} - \frac{1}{2MP} \right\} \\
 &= \left(u - \frac{1}{P}\right) \left(u - \frac{P-2M-Q}{4MP}\right) \left(u - \frac{P-2M+Q}{4MP}\right),
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

en donde $Q^2 = (P-2M)(P+6M)$. De esta forma las raíces están dadas por

$$u_1 = -\frac{Q-P+2M}{4MP}, \quad u_2 = \frac{1}{P} \quad \text{y} \quad u_3 = \frac{Q+P-2M}{4MP}. \tag{2.60}$$

De esta operación también se obtiene una expresión para el parámetro de impacto en términos del periastro

$$b^2 = \frac{P^3}{P-2M}. \tag{2.61}$$

Por lo tanto dado un valor de P , se puede obtener un valor para b y viceversa.

Haciendo uso de las expresiones anteriores podemos calcular el ángulo de deflexión que sufrirá la trayectoria del fotón ilustrada en la figura 2.9. La partícula posee un parámetro de impacto b y dirección inicial indicada por el ángulo μ . Debido a la simetría del problema no es necesario calcular la desviación total. El ángulo de desviación ϕ representa sólo la mitad del ángulo total recorrido, como lo muestra la figura 2.9, donde se puede ver que

$$\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\mu = \phi. \tag{2.62}$$

Este ángulo se encuentra al integrar la ecuación (2.49). Suponiendo que el observador se encuentra

en infinito y por lo tanto, $r \gg M$, el valor final para ϕ estará dado por

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2M}} \int \frac{du}{(G(u))^{1/2}} . \quad (2.63)$$

Cualquier integral que contenga una expresión polinomial de tercer o cuarto grado en el denominador de una fracción puede ser reducida a la forma de una integral elíptica. Por lo tanto para resolver (2.63) es conveniente llevarla a la forma de la integral elíptica Jacobiana de primera clase, siguiendo el procedimiento que describe Baker [12]. Una breve explicación sobre las integrales elípticas de primera clase se da en el Apéndice A.

La ecuación (2.63) debe integrarse para los valores positivos de u y $G(u)$, por lo que el límite de integración corresponde a los valores entre u_2 y 0, que corresponden a una trayectoria con periastro P .

Dado que utilizar la variable u puede resultar confuso, cambiaremos el nombre la variable por x :

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2M}} \int_0^{u_2} \frac{dx}{(G(x))^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2M}} \int_0^{u_2} \frac{dx}{\left(x^3 - \frac{x^2}{2M} + \frac{1}{b^2}\right)^{1/2}} . \quad (2.64)$$

De la factorización previamente hecha en (2.59) la integral toma la forma

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2M}} \int_0^{u_2} \frac{dx}{\{(x - u_1)(x - u_2)(x - u_3)\}^{1/2}} . \quad (2.65)$$

Utilizando el cambio de variable $x = y^2 + \frac{P-2M-Q}{4MP}$ se tiene que

$$\phi = \frac{2}{\sqrt{2M}} \int_{a_1}^{a_2} \frac{dy}{\left\{\left(y^2 - \frac{P^2-6MP-QP}{4MP^2}\right)\left(y^2 - \frac{2Q}{4MP}\right)\right\}^{1/2}} , \quad (2.66)$$

donde $a_1 = \sqrt{\frac{2M-P+Q}{4MP}}$ y $a_2 = \sqrt{\frac{6MP-P^2+QP}{4MP^2}}$.

Factorizamos el radical para que tome la forma $\sqrt{R(1+my^2)(1+ny^2)}$ donde R es una constante. Aplicando los cambios de variable $y' = y\sqrt{-m}$ y $k^2 = n/m$ tendremos que la integral será

$$2(P/Q)^{1/2} \int_{a_3}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} , \quad (2.67)$$

donde $a_3 = \sqrt{\frac{Q-P+2M}{Q-P+6M}}$ y $k = \sqrt{\frac{Q-P+6M}{2Q}}$.

Finalmente aplicando el cambio de variable $y' = \sin \phi'$

$$\phi = 2(P/Q)^{1/2} \int_{\zeta_\infty}^{\pi/2} \frac{d\phi'}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi'}} , \quad (2.68)$$

con el cual las integrales (2.67) y (2.68) son equivalentes y poseen la forma de integrales elípticas de primera clase. La ecuación (2.68) será finalmente:

$$\begin{aligned} \phi &= 2(P/Q)^{1/2} \int_{\zeta_\infty}^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 x)^{-1/2} dx \\ &= 2(P/Q)^{1/2} \left\{ \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 x)^{-1/2} dx - \int_0^{\zeta_\infty} (1 - k^2 \sin^2 x)^{-1/2} dx \right\} \\ &= 2(P/Q)^{1/2} \{K(k) - F(\zeta_\infty, k)\} , \end{aligned} \quad (2.69)$$

Movimiento de Partículas de Prueba
2.2 Trayectorias de partículas con masa en reposo cero

donde $F(\zeta_\infty, k)$ es la integral elíptica de módulo k con argumento ζ_∞ tal que

$$\sin^2 \zeta_\infty = \frac{Q - P + 2M}{Q - P + 6M} \quad (2.70)$$

y $K(k)$ corresponde a la integral elíptica completa con módulo k .

El resultado newtoniano descrito por Schutz [13] se obtiene al desestimar el término cúbico. Recordando que la ecuación (2.49) es la que rige el movimiento de los fotones, se tendrá que

$$r \sin(\phi_0 - \mu) = b, \quad (2.71)$$

donde ϕ_0 es el ángulo inicial. Para valores de P tales que $P \gg M$, se tiene que

$$r \gg M \implies 1 \gg Mu, \quad (2.72)$$

ya que P es un valor específico de r relacionado con el cambio de variable $u = 1/r$.

Con el cambio de variable $u = v(1 + Mv)$, y utilizando (2.72) de modo que los términos de grado superior a v^2 sean despreciables, la ecuación (2.49) se convierte en

$$\frac{d\phi}{dv} = \frac{(1 + 2Mv)}{\left(\frac{1}{b^2} - v^2\right)^{1/2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{b^2} - v^2\right)^{1/2}} + \frac{2Mv}{\left(\frac{1}{b^2} - v^2\right)^{1/2}}, \quad (2.73)$$

la cual puede integrarse para obtener el resultado

$$\phi = C_1 + C_2 + \arcsin(bv) - 2M \left(\frac{1}{b^2} - v^2\right)^{1/2}. \quad (2.74)$$

Para determinar las constantes tendremos que C_1 es el ángulo inicial, como en el caso de la ecuación (2.71), por lo que $C_1 = \mu$. Para obtener C_2 es necesario aplicar la condición de frontera (el límite $r \rightarrow \infty$), por lo tanto tendremos que $v \rightarrow 0$ y $\phi \rightarrow \phi_0$, de modo que $C_2 = 2M/b$. La solución toma la forma

$$\phi = \mu + \frac{2M}{b} + \arcsin(bv) - 2M \left(\frac{1}{b^2} - v^2\right)^{1/2}. \quad (2.75)$$

Cuando el fotón está en la posición $v = 1/b$ alcanza el valor de r más pequeño. Esto ocurre en el ángulo

$$\phi = \mu + \frac{2M}{b} + \frac{\pi}{2}, \quad (2.76)$$

en ese punto el fotón ha recorrido un ángulo $\frac{\pi}{2} + \frac{2M}{b}$. Por simetría, pasa por un ángulo del mismo tamaño mientras se aleja del agujero negro, por lo que pasa por un ángulo de valor total $\pi + \frac{4M}{b}$, ya que si el fotón se moviera en línea recta, el ángulo con el cual pasaría al lado del agujero negro sería π , si embargo debido al efecto de lente gravitacional el fotón se verá desviado y habrá un ángulo de deflexión de su trayectoria. De esta forma la desviación total del rayo desde $P \rightarrow \infty$ será $\mu \sim 4M/b$. Para la ecuación (2.61), el límite $P \rightarrow \infty$ da como resultado $b \sim P$. Por lo tanto tendremos que el ángulo será

$$\mu \sim \frac{4M}{P}. \quad (2.77)$$

La fórmula para la deflexión de la luz en un campo gravitacional lleva al límite de Rutherford para la sección eficaz, la cual se define como la razón del número de partículas dispersadas en un ángulo sólido $d\Omega$ por unidad de tiempo entre la intensidad incidente del haz.

Debido a la simetría alrededor del eje del rayo incidente, el elemento del ángulo sólido puede ser escrito como

$$d\Omega = 2\pi \sin \mu d\mu. \quad (2.78)$$

De forma que expresión para la sección eficaz puede ser escrita como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \mu} \left| \frac{db}{d\mu} \right|, \quad (2.79)$$

que es el número de partículas por unidad del ángulo sólido que llegan al observador, en este caso

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{16M^2}{\mu^4}, \quad (2.80)$$

que es independiente de la energía de los fotones incidentes.

El valor crítico de P corresponde a $P = 3M$. En este caso se dan las relaciones:

$$b = b_c, \quad Q = 3M, \quad k = 1 \quad \text{y} \quad \zeta_\infty = \sin^{-1} \left(\frac{1}{3} \right). \quad (2.81)$$

Para analizar el comportamiento de $P \sim 3M$ se perturba una cantidad δ :

$$P = 3M + M\delta = M(3 + \delta). \quad (2.82)$$

Realizando una expansión de Taylor para el parámetro de impacto se obtiene:

$$\begin{aligned} b &\approx 3\sqrt{3}M + \frac{\sqrt{3}(P - 3M)^2}{2M} \\ &= b_c + \frac{\sqrt{3}}{2M}(\delta M)^2 \\ &= b_c + \frac{M\sqrt{3}}{2}\delta^2 \\ &= b_c + \delta b. \end{aligned} \quad (2.83)$$

La aproximación para Q será

$$Q \approx M \left(3 + \frac{5}{3}\delta \right), \quad (2.84)$$

y para k^2

$$k^2 \approx 1 - \frac{4}{9}\delta + \frac{20}{81}\delta^2. \quad (2.85)$$

Definiendo la cantidad

$$k_p^2 = 1 - k^2, \quad (2.86)$$

se tendrá que

$$k_p \approx \frac{2}{3}\delta^{1/2}. \quad (2.87)$$

La aproximación para el módulo k en la ecuación (2.86) da como resultado

$$k = \sqrt{1 - k_p^2} \approx 1 - \frac{1}{2}k_p^2. \quad (2.88)$$

Junto con el límite para ζ_∞ de las expresiones (2.81) se obtiene numéricamente una aproximación para la integral elíptica

$$F(y, k) \approx \ln \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) \quad (2.89)$$

y para la integral elíptica completa

$$K(k) \approx \ln \left(\frac{4}{k_p} \right) = \left(\frac{2^2}{k_p} \right). \quad (2.90)$$

Movimiento de Partículas de Prueba
2.2 Trayectorias de partículas con masa en reposo cero

Realizando una expansión en serie de la expresión (2.88) y tomando la parte real también se obtiene otra aproximación dada por

$$K(k) \approx \ln \left(\frac{2^{5/2}}{k_p} \right) . \quad (2.91)$$

De las expresiones anteriores y sustituyendo para la ecuación (2.69) se obtiene

$$\phi_\infty = \ln \left(\frac{2^q}{2(1+\sqrt{3})^2} \frac{3^{9/4}}{2^{1/2}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\delta b}{M} \right) , \quad (2.92)$$

donde q corresponde a los valores $q = 2$ o $q = 5/2$ de las aproximaciones dadas en (2.90) o (2.91). Por lo tanto se tendrá que

$$\begin{aligned} 2\phi_\infty &= \ln \left(\frac{2^q}{2(1+\sqrt{3})^2} \frac{3^{9/4}}{2^{1/2}} \right)^2 - \ln \left(\frac{\delta b}{M} \right) \\ \implies \ln \left(\frac{\delta b}{M} \right) &= \ln \left(\frac{2^q}{2(1+\sqrt{3})^2} \frac{3^{9/4}}{2^{1/2}} \right)^2 - 2\phi_\infty . \end{aligned} \quad (2.93)$$

Utilizando la ecuación (2.62) obtenemos la expresión

$$\frac{\delta b}{M} = \left(\frac{2^q}{2(1+\sqrt{3})^2} \frac{3^{9/4}}{2^{1/2}} \right)^2 e^{-\pi} e^{-\mu} . \quad (2.94)$$

Para el caso $q = 2$ la relación para la ecuación (2.83) será

$$b_{q=2} = 5.19695M + 3.4823Me^{-\mu} \quad (2.95)$$

y para $q = 5/2$

$$b_{q=5/2} = 5.19695M + 13.9291Me^{-\mu} . \quad (2.96)$$

Las partículas que se aproximan al agujero negro con una dirección dada por el ángulo μ también incluyen a las partículas con ángulos $\mu + 2n\pi$. Por ejemplo, para el caso de $b_{q=2}$, se tendrían los siguientes parámetros de impacto:

$$\begin{aligned} b_0 &= b_c + 3.4823Me^{-\mu} && \text{(cero vueltas)} \\ b_1 &= b_c + 3.4823Me^{-(\mu+2\pi)} && \text{(una vuelta)} \\ \dots & && \\ b_n &= b_c + 3.4823Me^{-(\mu+2n\pi)} && \text{(} n \text{ vueltas)} \\ \dots & && \\ b_\infty &= b_c && \text{(vueltas infinitas) ,} \end{aligned} \quad (2.97)$$

los cuales describen el número de vueltas que describen las partículas a medida que el parámetro de impacto se encuentra más cerca. La figura 2.10 muestra las trayectorias de los fotones alrededor del agujero negro utilizando las expresiones para $b_{q=2}$, correspondientes a b_1 y, análogamente, las expresiones de $b_{q=5/2}$ para diferentes valores de n . La partícula se acerca con un parámetro de impacto cercano al valor crítico y un ángulo de inclinación μ (como se indicó en la figura 2.9), y a medida que se acerca más, da un número de vueltas antes de salir hacia el infinito indicado por las ecuaciones (2.97). En el caso de que la partícula se acerque al agujero negro con el valor $b = b_c$ la partícula dará infinitas vueltas alrededor del agujero, acercándose asintóticamente al valor de la órbita circular.

De las relaciones (2.97), es posible ver que la contribución n -ésima a la sección eficaz es proporcional a

$$\frac{db_n}{d\mu} = -3.4823Me^{-(\mu+2n\pi)} . \quad (2.98)$$

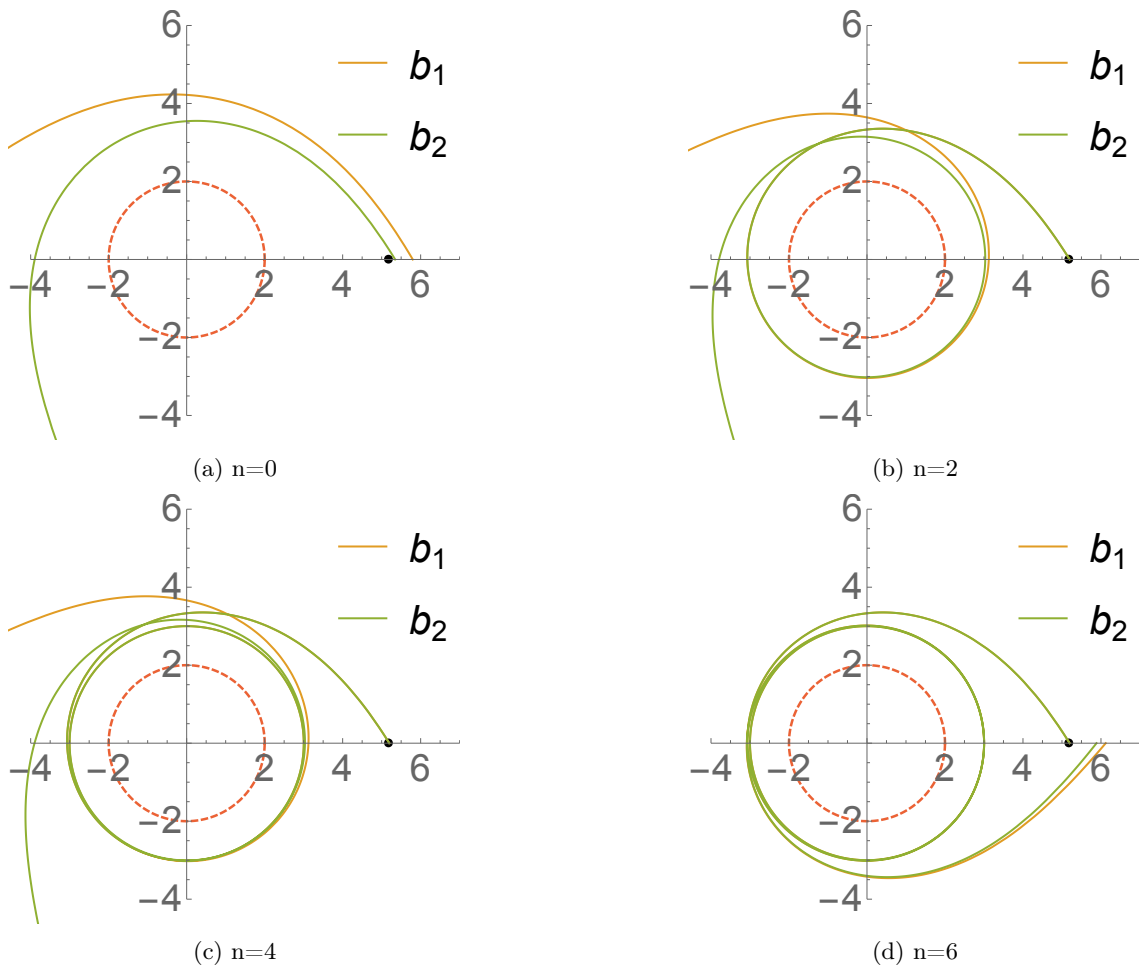


Figura 2.10: Comportamiento de las trayectorias de los fotones alrededor del agujero negro cuando su parámetro de impacto es cercano al valor crítico, expresado en las ecuaciones (2.97), para los casos $q = 2$ y $q = 5/2$ en donde n es el número de vueltas, cuando la partícula se acerca con un ángulo de inclinación $\mu = \pi$. El punto negro indica el valor de b_c .

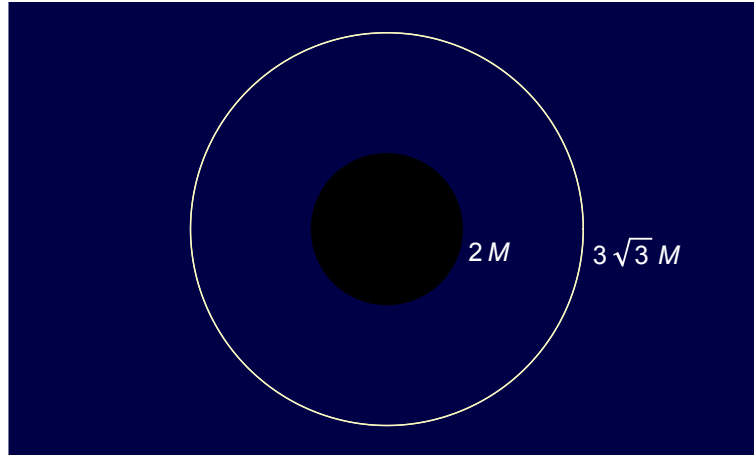


Figura 2.11: Tamaño observado de un agujero negro ($r = 3\sqrt{3}M$) de acuerdo a los fotones que pueden escapar con respecto al horizonte de eventos ($r = 2M$).

Como la contribución total de los circuitos es proporcional a

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\pi} = \frac{1}{1 - e^{-2\pi}}, \quad (2.99)$$

la contribución para $n \geq 2$ es despreciable.

Dado el análisis de esta sección vemos que el efecto gravitacional del agujero sobre la luz procedente de otras fuentes curva su trayectoria. Para el caso de los fotones, sabemos que su trayectoria depende solamente del parámetro de impacto b , y concluimos que las trayectorias que nos interesan son aquellas mayores al parámetro de impacto crítico b_c . Con ayuda de la expresión (2.57) obtuvimos una expresión para el ángulo de deflexión de la trayectoria.

Los rayos pueden deformarse hasta el punto de mantenerse en trayectorias circulares alrededor del agujero, dando más vueltas conforme se vayan acercando al valor de b_c . Suponiendo que no hay fuentes de luz entre el observador y el agujero negro el observador verá una región oscura en el cielo correspondiente a la sombra [14]. Debido que todo rayo menor al parámetro de impacto crítico no podrá escapar de la influencia gravitacional del agujero negro, el borde que se observa estará en $b_c = 3\sqrt{3}M = 5.19695M$.

La figura 2.11 ilustra la diferencia de tamaños entre el horizonte de eventos (en negro) y el tamaño de la región de la sombra que verá el observador (en azul). Ésta cuenta con un diámetro mínimo de $10.38M$, el cual corresponde a diferentes trayectorias de los fotones con diversos radios y luminosidad. El parámetro de impacto crítico b_c corresponde a los rayos que dan vueltas infinitas alrededor del agujero negro. Los rayos con parámetros cercanos dan distintos números de vueltas dependiendo su cercanía a b_c y realizan más vueltas alrededor conforme b se acerca a este valor, como describen las expresiones (2.97). De la expresión (2.98) es posible observar que la luminosidad decrece exponencialmente en las trayectorias internas, de forma que la trayectoria externa es la más luminosa.

Capítulo 3

Visualización de un disco de acreción delgado

En el capítulo anterior discutimos el movimiento de las partículas de Schwarzschild y la apariencia de la sombra de un agujero negro en el vacío. Existe otro caso en el cual el agujero negro posee materia orbitando a su alrededor, formando un disco de acreción. El propósito de este capítulo es estudiar la apariencia de un disco de acreción delgado así como algunas de sus propiedades.

3.1. Discos de acreción

Un disco de acreción alrededor de un agujero negro se forma por la acreción constante de materia. Los escenarios más estudiados sobre el origen del disco corresponden a dos casos. El primero consiste en un sistema binario en donde una de las estrellas colapsa en un agujero negro, de forma que la otra estrella comienza a ceder masa, generando acreción alrededor de ambos objetos. En el segundo escenario el disco de acreción es generado por el colapso de una estrella con materia a su alrededor. Al ocurrir el colapso la materia forma el disco influenciada por el efecto gravitacional del agujero. Existen diferentes mecanismos que causan que el disco pierda energía y momento angular, de forma que las partículas orbitan alrededor del agujero en trayectorias casi circulares acercándose lentamente a la órbita estable interior y posteriormente hacia el agujero [15].

La acreción libera energía que contribuye a la luminosidad del objeto y depende de la tasa de acreción \dot{M} , como describen Frank et al. [16]. Esta acreción genera altas temperaturas en la materia alrededor del objeto, por lo tanto las ecuaciones que describen esta materia corresponden a las de un fluido, el cual puede ser gas o plasma.

La mayoría de los modelos analíticos de discos de acreción suponen estacionariedad y simetría axial para la materia alrededor del disco [17]. Estos modelos utilizan dos variables para describir las cantidades físicas: la distancia radial al centro r y la distancia vertical sobre el plano ecuatorial z . Para el caso de los discos delgados se tiene que $z/r \ll 1$, por lo que se considera como una superficie en el plano ecuatorial. En este estudio nos enfocaremos en un disco de acreción delgado y nuestra descripción se basa en la descripción individual de cada partícula que constituye el disco. Supondremos que el disco de acreción es delgado con grosor despreciable respecto a M y que se encuentra en el plano ecuatorial.

3.2. Visualización de las trayectorias

Primero estudiaremos las trayectorias circulares con $r = \text{cte}$ de partículas puntuales alrededor de un agujero negro. Calcularemos las trayectorias de las partículas sin masa emitidas por las

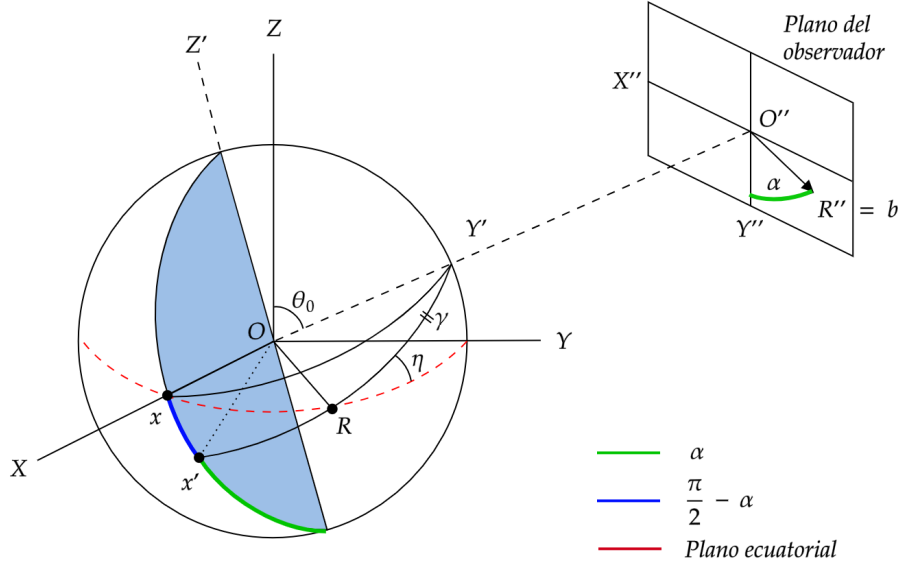


Figura 3.1: Relación entre los diferentes sistemas de referencia, el sistema del agujero negro (X, Y, Z) y el plano del observador (X'', Y'') .

partículas alrededor del agujero negro y mostraremos la forma con la que llegan al sistema de un observador en infinito. Utilizamos el sistema coordenado propuesto por Luminet [18] correspondiente a la figura 3.1. El plano del observador se encuentra a una distancia $r \gg M$, fijo en el ángulo de visión θ_0 y en $\phi_0 = 0$, correspondiente al plano ZOY .

Un punto sobre la trayectoria circular alrededor del agujero tiene coordenadas $R = (r, \phi)$, en donde la medición del ángulo comienza desde el eje Y . Los fotones que desprende el disco de acreción comienzan su trayectoria desde el punto R en dirección a OO'' , es decir, hacia el plano del observador $O''X''Y''$, llegando al punto R'' . Dado que el observador está en reposo y prácticamente situado en el infinito, el punto R'' corresponde al parámetro de impacto b , ya que sabemos que éste es la distancia entre la partícula y la línea recta que pasa por el origen del agujero negro.

El plano del observador y el plano marcado en azul en el sistema del agujero negro son paralelos. Por lo tanto el ángulo α que se forma con el eje $O''Y''$ corresponde al complemento del ángulo que forman los puntos x y x' . De esta manera obtenemos las coordenadas en el plano del observador (b, α) , y variando ϕ se obtiene la forma aparente $b(r) = b(r, \alpha)$. Las relaciones entre los ángulos involucrados se deducen directamente de la trigonometría esférica:

$$\cos \alpha = \frac{\cot \phi \cos \theta_0}{\sin \gamma} = \cos \phi \cos \theta_0 (1 - \sin^2 \theta_0 \cos^2 \phi)^{-1/2} \quad (3.1)$$

$$\cos \gamma = \cos \alpha (\cos^2 \alpha + \cot^2 \theta_0)^{-1/2} . \quad (3.2)$$

En el capítulo anterior encontramos una solución para el ángulo de la trayectoria de un fotón al resolver la ecuación (2.63). Este procedimiento da como resultado (2.68), con el límite de integración de 0 a $u = 1/r$:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2M}} \int_0^{1/r} (G(x))^{-1/2} dx = 2 \left(\frac{P}{Q} \right)^{1/2} \{F(\zeta_r, k) - F(\zeta_\infty, k)\} , \quad (3.3)$$

en donde

$$k^2 = \frac{Q - P + 6M}{2Q}, \quad \sin^2 \zeta_\infty = \frac{Q - P + 2M}{Q - P + 6M} \quad \text{y} \quad \sin^2 \zeta_r = \frac{Q - P + 2M + 4MP/r}{Q - P + 6M}. \quad (3.4)$$

Despejando de (3.3) el término $F(\zeta_r, k)$ obtenemos

$$F(\zeta_r, k) = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{P}{Q} \right)^{1/2} + F(\zeta_\infty, k). \quad (3.5)$$

Dado que $F(\zeta_r, k)$ tiene la forma de una función elíptica de Legendre, ζ_r se transforma en

$$\begin{aligned} \zeta_r &= \text{am} \left\{ \frac{\gamma}{2} \left(\frac{P}{Q} \right)^{1/2} + F(\zeta_\infty, k) \right\} \\ \Rightarrow \sin^2 \zeta_r &= \sin^2 \text{am} \left\{ \frac{\gamma}{2} \left(\frac{P}{Q} \right)^{1/2} + F(\zeta_\infty, k) \right\} \\ &= \text{sn}^2 \left\{ \frac{\gamma}{2} \left(\frac{P}{Q} \right)^{1/2} + F(\zeta_\infty, k) \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Una explicación sobre las funciones elípticas se puede encontrar en el Apéndice A.

Despejando $1/r$ de $\sin^2 \zeta_r$ y utilizando las demás relaciones en (3.4) se obtiene la ecuación

$$\frac{1}{r} = -\frac{Q - P + 2M}{4MP} + \frac{Q - P + 6M}{4MP} \text{sn}^2 \left\{ \frac{\gamma}{2} \sqrt{Q/P} + F(\zeta_\infty, k) \right\}, \quad (3.7)$$

en donde γ se calcula con la ecuación (3.2). La ecuación (3.7) describe las trayectorias de los fotones emitidos por las partículas que orbitan alrededor del agujero negro y llegan al observador en infinito.

Al obtener P para un valor específico de r y de α , se puede calcular el valor del parámetro de impacto b al utilizar la expresión (2.61), con lo que se obtiene la relación $b = b(r, \alpha)$ que describe las trayectorias que se verán en el plano del observador.

En el límite newtoniano $b = P$ y $\text{sn} \sim \sin$, por lo que (3.7) se reduce a

$$b = r \sin \gamma = r \left(1 + \tan^2 \theta_0 \cos^2 \alpha \right)^{-1/2}, \quad (3.8)$$

la cual es la forma de la ecuación de una elipse en coordenadas polares.

La elipse descrita por (3.8) tiene una excentricidad $\tan \theta_0$, con semi-eje mayor a_+ y semi-eje menor a_- correspondientes a

$$a_+ = r \quad \text{y} \quad a_- = \frac{r}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_0}}. \quad (3.9)$$

Puede darse también el caso de que los fotones al ser emitidos den más vueltas alrededor del agujero antes de salir hacia el plano del observador. En este caso para las imágenes de orden $(1+n)$, en donde n corresponde al número de vueltas, la ecuación (3.7) debe sustituirse por

$$2n\pi - \gamma = 2(P/Q)^{1/2} \{ 2K(k) - F(\zeta_\infty, k) - F(\zeta_r, k) \}. \quad (3.10)$$

Siguiendo el procedimiento análogo para obtener la ecuación (3.7) se obtiene

$$\frac{1}{r} = -\frac{Q - P + 2M}{4MP} + \frac{Q - P + 6M}{4MP} \text{sn}^2 \left\{ \frac{\gamma - 2n\pi}{2} \sqrt{Q/P} + 2K(k) - F(\zeta_\infty, k) \right\}. \quad (3.11)$$

El observador detectará dos grupos de imágenes. El primer grupo corresponde a los fotones con coordenadas (b, α) las cuales llamaremos imágenes primarias y el segundo a las imágenes secundarias con coordenadas $(b, \alpha + n\pi)$.

3.2.1. Disco formado por partículas en órbitas circulares

Utilizaremos las ecuaciones desarrolladas en la sección anterior para determinar la apariencia de las trayectorias de las partículas que forman el disco en el plano del observador. Éste se encuentra en infinito y tiene un ángulo de visión θ_0 como lo indica la figura 3.1. El caso que trataremos en primer lugar es considerar que las partículas del disco siguen órbitas circulares, es decir $r = \text{cte}$. Las partículas alrededor del disco emiten fotones los cuales llegan al plano observador.

Suponiendo un valor fijo para el radio de la órbita, se sustituye ese valor en la ecuación (3.7) igualada a cero:

$$\frac{1}{r} + \frac{Q - P + 2M}{4MP} - \frac{Q - P + 6M}{4MP} \text{sn}^2 \left\{ \frac{\gamma}{2} \sqrt{Q/P} + F(\zeta_\infty, k) \right\} = 0. \quad (3.12)$$

Dado que el único valor no disponible en la ecuación (3.12) es el valor de P , es necesario buscar la raíz de forma numérica. En este caso se utilizó el programa Mathematica y su función `FindRoot`. Una vez que se obtiene el valor de P se utiliza la ecuación (2.61) para obtener un valor de b . Para el caso de las imágenes secundarias el procedimiento es análogo y se utiliza la ecuación (3.11).

Al utilizar `FindRoot` en el caso de las imágenes secundarias la función encuentra raíces imaginarias. Por lo tanto se utiliza una forma alternativa de γ a partir de un corte arbitrario, que para este caso corresponde a $\alpha = \pi/4$. Para el caso $|\alpha| < \pi/4$ se utiliza la expresión

$$\gamma = \arccos(\sin \theta_0) + \frac{1}{2} \cos \theta_0 \sin \theta_0 \alpha^2 \quad (3.13)$$

y para $|\alpha| \geq \pi/4$

$$\gamma = \arccos \frac{\cos \alpha \sin \theta_0}{\sqrt{\cos^2 \alpha \sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0}}. \quad (3.14)$$

La operación de encontrar la raíz P y posteriormente encontrar el parámetro de impacto a través de la ecuación (2.61) se puede encapsular en una función (en este caso se utilizó `Module`). De esta forma se obtiene una expresión paramétrica resultante para b que se grafica como $(-b \sin \alpha, -b \cos \alpha)$, ya que α comienza a variar desde la parte negativa del eje Y'' en el plano del observador, como muestra el sistema coordenado 3.1.

Para las imágenes secundarias, dado que tienen coordenadas $(b, \alpha + \pi)$, se grafican sin el signo negativo de las imágenes primarias, empezando en la parte positiva del eje Y'' y graficándose como $(b \sin \alpha, b \cos \alpha)$.

Dado que la figura es simétrica respecto al eje $O''Y''$, α se graficó de $-\pi$ a π . El ángulo α es una función monótona creciente de ϕ y existe una relación uno a uno entre las dos variables, así que solamente se varió el ángulo α en la ecuación (3.2) que relaciona este ángulo con γ . Por lo tanto la trayectoria se grafica en el plano del observador en términos de α , el ángulo de visión θ_0 y el radio r .

El resultado se puede apreciar en la figura 3.2 que muestra los fotones emitidos por las partículas alrededor del disco correspondientes al ángulo de visión $\theta_0 = 4\pi/9$ para diferentes valores de r a partir de las ecuaciones (3.7) y (3.11). Las imágenes primarias están indicadas con las líneas azul oscuro y las secundarias a las líneas punteadas azul claro.

Más proyecciones de las trayectorias se pueden ver en la figura 3.3 donde se muestran para diferentes ángulos de visión θ_0 . Se puede apreciar que si el observador se posiciona en ángulos cercanos a $\theta_0 = 0$ (completamente paralelo al plano ecuatorial), la imagen que se observa es circular. A medida que el observador se sitúa cada vez más cerca del $\theta_0 = \pi/2$ (perpendicular al plano ecuatorial) la figura se distorsiona más, y las imágenes secundarias son más visibles. Conforme el observador se aproxime al plano ecuatorial, la forma del disco de acreción observada adquiere una forma cada vez menos esférica.

La deformación del disco de acreción se debe al efecto gravitacional que tiene el agujero negro sobre las trayectorias de los fotones salientes, permitiendo ver el disco en su totalidad. Por otra parte, las imágenes secundarias corresponden a los fotones salientes de la parte inferior del agujero

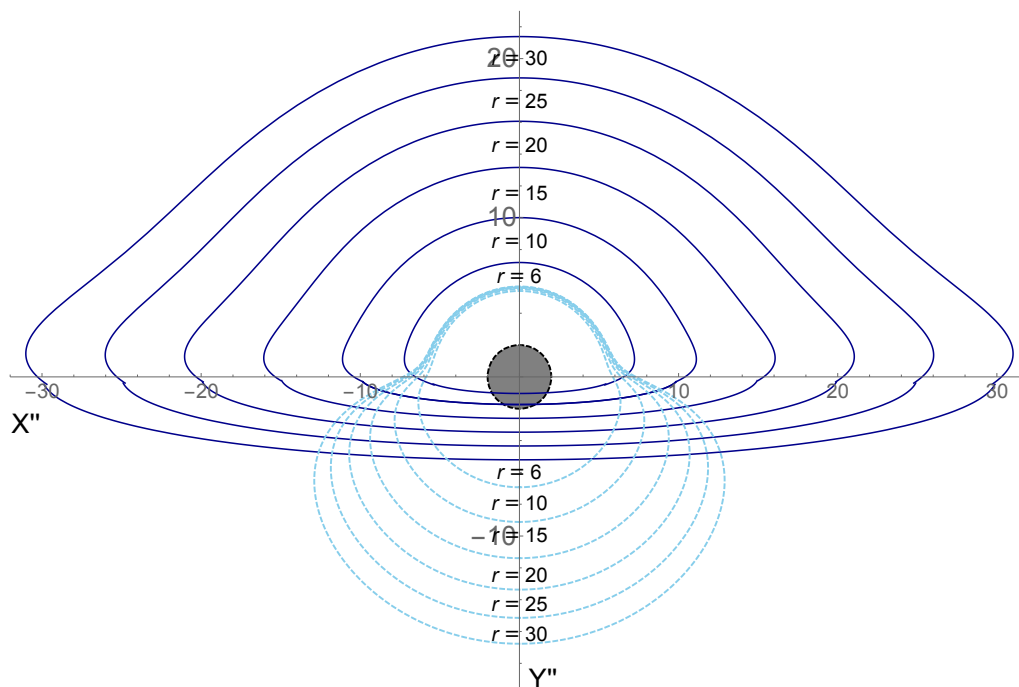


Figura 3.2: Plano del observador $X''Y''$. Se muestran las trayectorias circulares ($r = \text{cte.}$) a un ángulo $\theta_0 = 4\pi/9$, es decir, 10 grados por encima del plano ecuatorial, a $r = 6, 10, 15, 20, 25, 30$. Las líneas azul oscuro corresponden a las imágenes primarias y las líneas en azul claro a las secundarias.

negro cuyas trayectorias se ven modificadas también por el efecto de la curvatura de forma que son visibles en el plano del observador. Este efecto está ilustrado en la imagen 3.4. Tanto en la figura 3.2 como en 3.3, la línea en la parte inferior de las curvas no es totalmente continua. Esto se debe a que Mathematica genera un error al calcular b en esta región ya que el valor de b corresponde a b_c al acercarse al valor de $P = 3M$. Esto se corrigió al graficar por secciones, sustituyendo esta región por la función correspondiente al límite newtoniano (3.8).

Debido a que Mathematica es un lenguaje de alto nivel, al aumentar la complejidad de las operaciones se vuelve más difícil para el programa realizarlas. Por lo tanto las imágenes de las siguientes secciones se realizaron con Fortran90. Éste es un lenguaje que permite alto rendimiento en el cómputo científico. Al utilizar Fortran90 el tiempo de compilación se redujo significativamente de aproximadamente 45 minutos a segundos para cada figura.

El código utiliza el método de Brent para encontrar la raíz y la sustitución del límite newtoniano también se realiza en este código. Para calcular las integrales elípticas se utiliza el algoritmo creado por Fukushima [20]. Como resultado se obtiene un archivo que contiene los valores de b y α , el cual se graficó en Python.

3.2.2. Apariencia de las trayectorias acotadas y de precesión

Las figuras presentadas en la sección anterior corresponden al caso específico de la ecuación (3.7) cuando $r = \text{cte}$, en donde las partículas alrededor del agujero negro se mueven en órbitas circulares. Es posible extender nuestro estudio para partículas que tienen trayectorias más generales dentro del disco. En particular podemos describir las trayectorias acotadas que siguen las partículas en el espacio tiempo de Schwarzschild como las descritas en la sección 2.1.2.

Podemos obtener la imagen de la trayectoria de una partícula que se mueve entre dos puntos del potencial. Mediante la ecuación (2.17) se determinan los valores para la energía e y el momento

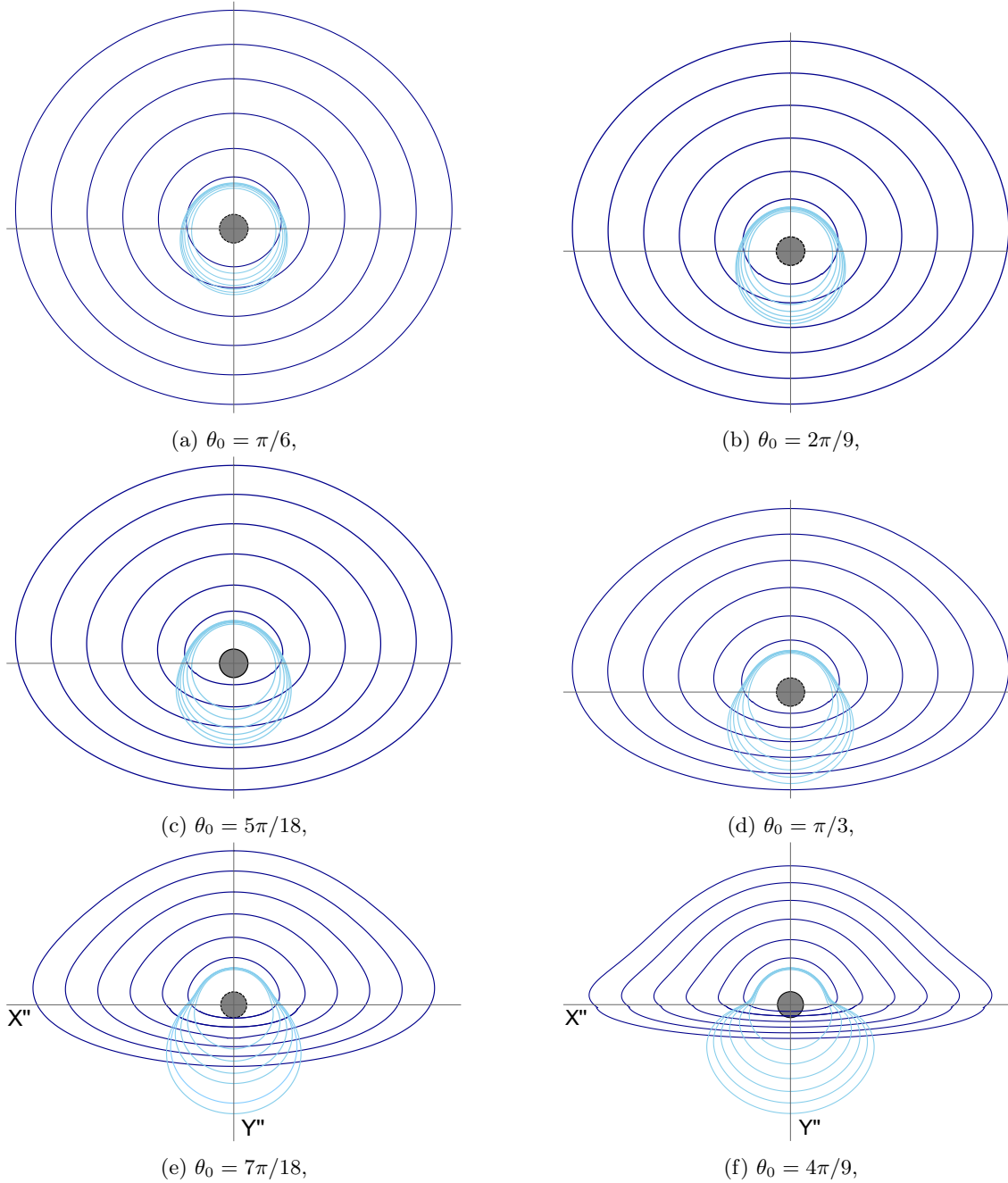


Figura 3.3: Trayectorias circulares para diferentes ángulos de visión vistas desde el plano del observador para los radios $r = 6, 10, 15, 20, 25, 30$. Las líneas azul oscuro corresponden a las imágenes primarias y las líneas en azul claro a las secundarias.

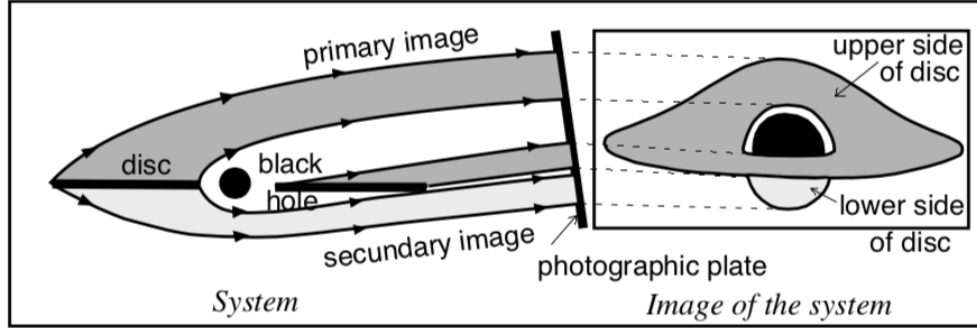


Figura 3.4: Trayectorias de los fotones debido al efecto gravitacional del agujero negro [19].

angular ℓ . Posteriormente se utiliza la ecuación que describe el movimiento de las partículas con masa (2.21), la cual se puede expresar como el sistema de ecuaciones

$$\frac{du}{d\phi} = u' , \quad (3.15)$$

$$\frac{du'}{d\phi} = \frac{M}{\ell^2} - u' + 3M(u')^2 .$$

Al obtener u se puede encontrar la trayectoria con el cambio de variable $u = 1/r$. La resolución numérica de este sistema se realizó en Fortran90 y se utilizó el método de Runge-Kutta de cuarto orden. La sustitución del límite newtoniano se hizo a mano para cada vuelta de la órbita en específico. Finalmente junto con las ecuaciones (3.7) y (2.61) se puede obtener la relación $b = b(\alpha, P)$.

La trayectoria de una partícula en una órbita acotada se puede observar en la figura 3.5 para diferentes ángulos de visión. En este caso la partícula tiene energía $e = 0.98$ y momento angular $\ell = 4.3$, y su trayectoria precesa entre los radios $r = 7.75$ y $r = 56.58$. Como sucede en el caso de las trayectorias de r constante, la trayectoria observada se distorsiona más a medida que el plano del observador se posiciona en $\theta_0 = \pi/2$.

3.2.3. Consecuencias observacionales de la precesión para diferentes observadores

La precesión del perihelio de la partícula se puede medir al estudiar el cambio en el ángulo α (en el plano del observador) con respecto al cambio en ϕ (en el sistema del agujero negro). Partiendo de la ecuación (3.1) se tiene

$$\alpha = \arccos \left[\frac{\cos \phi \cos \theta_0}{(1 - \sin^2 \theta_0 \cos^2 \phi)^{1/2}} \right] . \quad (3.16)$$

El cambio en α estará dado por $d\alpha = \alpha'(\phi)d\phi$ en donde

$$\alpha'(\phi) = \frac{\cos \theta_0 \sin \phi (\csc^2 \theta_0 - \cot^2 \phi \sin^2 \theta_0)}{(1 - \cos^2 \phi \sin^2 \theta_0)^{3/2}} . \quad (3.17)$$

La figura 3.6 muestra el comportamiento del factor del lado derecho de la ecuación (3.17), donde es posible ver que la precesión se puede medir con más facilidad cuando ϕ se aproxima a $\phi = n\pi$,

pues es donde el cambio en α se amplifica. Es posible apreciar que el cambio es mayor conforme el ángulo de observación se acerca al plano ecuatorial. Esto quiere decir que conforme el valor se acerca a $\theta_0 = \pi/2$ el cambio en $\phi = n\pi$ es más pronunciado mientras que al acercarse a la región de $\theta_0 = \pi/4$ el cambio es pequeño e imperceptible. Por lo tanto si se quisiera medir la precesión de un objeto alrededor de un agujero negro, dependiendo del ángulo del observador, se puede obtener una medición de casi 6 veces la precesión en el sistema de referencia del agujero (en el caso de $\theta_0 = 4\pi/9$).

Encontramos el cambio en la precesión de las órbitas calculando la tasa de cambio del ángulo ϕ respecto a r , como describe Guidry [21] al utilizar la ecuación de la energía (2.12) y la conservación para el momento angular (2.9) se obtiene que el cambio $\Delta\phi$ está dado por

$$\Delta\phi \approx 6\pi \frac{M^2}{\ell^2} . \quad (3.18)$$

Podemos obtener una expresión en términos de r con ayuda de la ecuación (2.27). Despejando para ℓ^2 , tenemos que

$$\ell^2 = \frac{Mr}{1 - \frac{3M}{r}} . \quad (3.19)$$

Para el caso de una estrella no relativista [13] se puede utilizar la aproximación newtoniana en donde $r \gg M$:

$$\ell^2 \approx Mr , \quad (3.20)$$

con la cual podemos obtener el cambio en la precesión de objetos como Mercurio, el cual considerando $r = 5.55 \times 10^7$ km y $M = 1.47$ km en unidades geométricas se tendrá que el cambio estará dado por 4.99×10^{-7} radianes por órbita. Una órbita se completa en 0.24 años de forma que el cambio será de 0.43 segundos por año. Por lo tanto el cambio que se mide es de 43 segundos por siglo.

Este caso es importante para establecer la comparativa del efecto gravitacional que ejercería el agujero negro sobre un objeto, por lo que suponemos que éste tiene una masa solar y el objeto que precesa a su alrededor se encuentra a una distancia igual que la de Mercurio al Sol. El cambio del ángulo ϕ está dado por

$$\Delta\phi \approx 6\pi \frac{M}{r} \left(1 - \frac{3M}{r} \right) . \quad (3.21)$$

Utilizando la ecuación (3.17) es posible calcular la precesión que se mediría en el sistema del observador. Dado que la función $\alpha'(\phi)$ está indefinida en $\phi = n\pi$ evaluamos la función para un número muy cercano a $\phi = \pi$. Obtenemos que para el caso de $\theta_0 = 4\pi/9$ y $\phi = 0.9999\pi$ toma un valor de $\alpha' = 5.75877$ de forma que el cambio en la precesión que un observador lejano verá en los puntos en donde es más notorio el cambio será de 2.87512×10^{-6} radianes por segundo o 247 segundos por siglo, suponiendo que la órbita se completa en el mismo tiempo que la del caso newtoniano.

3.3. Corrimiento al rojo del disco de acreción

Las figuras generadas en las secciones anteriores no toman en cuenta las propiedades físicas, solamente describen la trayectoria observada seguiría la partícula dado un radio constante o que precesa sobre el plano ecuatorial. En esta sección estudiaremos el caso del corrimiento al rojo del disco de acreción y obtendremos su proyección sobre el plano del observador $X''Y''$. Primero obtendremos una expresión para corrimiento al rojo de los fotones emitidos por el disco de acreción.

Considerando un fotón emitido por una partícula orbitando alrededor del agujero negro, el fotón posee energía que corresponde a la proyección del 4-momento del fotón p_μ sobre la 4-velocidad u^μ de la partícula emisora

$$E_{em} = p_\mu u^\mu = p_t u^t + p_\phi u^\phi = p_t u^t \left(1 + \Omega \frac{p_\phi}{p_t} \right) , \quad (3.22)$$

Visualización de un disco de acreción delgado
3.3 Corrimiento al rojo del disco de acreción

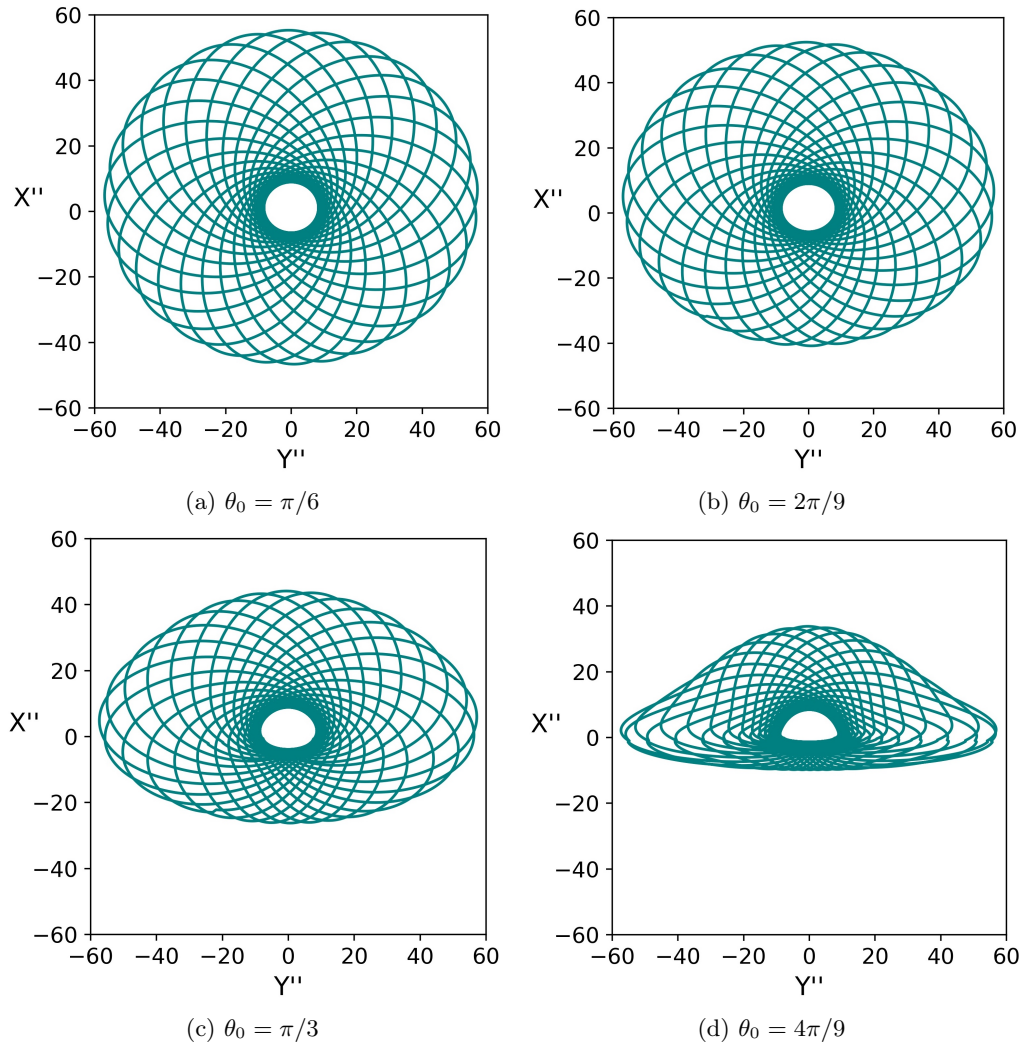


Figura 3.5: Precesión de la trayectoria de una partícula vista desde el observador en infinito a diferentes ángulos. La precesión corresponde al caso $e = 0.98$, $\ell = 4.3$, precesando entre los puntos del potencial ubicados en $r = 7.75$ y $r = 56.58$.

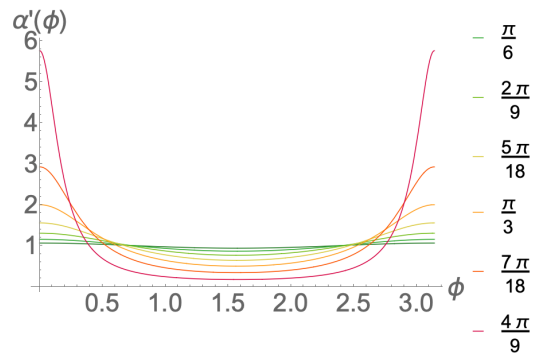


Figura 3.6: Comportamiento de la función (3.6) que describe el cambio en α para diferentes valores de θ_0 .

donde $\Omega = u^t/u^\phi$, es la velocidad angular de la partícula alrededor del agujero negro.

Las componentes p_t y p_ϕ del fotón se conservan a lo largo de sus trayectorias hasta alejarse del agujero negro, y son la energía del fotón E_{obs} , la cual se obtiene al realizar la proyección entre los vectores de momento correspondientes a los sistemas de referencia en el cual se miden.

La cantidad p_ϕ/p_t corresponde al parámetro de impacto respecto al eje z . Esta cantidad en el sistema de referencia del observador corresponde a la proyección de b sobre el eje z . Como se aprecia en el sistema de referencia 3.1, para una partícula que parte del punto R se puede ver que:

$$\frac{p_\phi}{p_t} = b \cos \eta = b \sin \theta_0 \sin \alpha . \quad (3.23)$$

Para obtener la imagen de la proyección partiremos del sistema de referencia 3.1, en donde el disco de acreción se situará en el plano ecuatorial, y analizaremos el corrimiento al rojo de un fotón emitido en un punto r . Por lo tanto las componentes de la velocidad de r y θ son nulas, y al utilizar la condición de normalización de la cuadrivelocidad (1.19) obtendremos:

$$\begin{aligned} -1 &= u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} \\ &= (u^t)^2 g_{tt} + 2u^t u^\phi g_{t\phi} + (u^\phi)^2 g_{\phi\phi} \\ &= (u^t)^2 (g_{tt} + 2\Omega g_{t\phi} + \Omega^2 g_{\phi\phi}) , \end{aligned} \quad (3.24)$$

por lo que la componente t de la 4-velocidad es

$$u^t = (-g_{tt} - 2\Omega g_{t\phi} - \Omega^2 g_{\phi\phi})^{-1/2} . \quad (3.25)$$

De esta forma el corrimiento al rojo de un fotón emitido por la partícula será

$$\begin{aligned} 1 + z &= \frac{E_{em}}{E_{obs}} = u^t (1 + \Omega b \cos \eta) \\ &= (1 + \Omega b \cos \eta) (-g_{tt} - 2\Omega g_{t\phi} - \Omega^2 g_{\phi\phi})^{-1/2} . \end{aligned} \quad (3.26)$$

Se demostró previamente en el Capítulo 3 que las órbitas circulares en la geometría de Schwarzschild obedecen una ley de potencias que coincide con la tercera ley de Kepler, por lo tanto Ω tiene el valor correspondiente de $\Omega = (M/r^3)^{1/2}$. Las componentes relevantes de la métrica son

$$g_{t\phi} = 0, \quad g_{tt} = -\frac{1 - 2M}{r} \quad \text{y} \quad g_{\phi\phi} = r^2 , \quad (3.27)$$

con lo que (3.26) se reduce a

$$1 + z = \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{M}{r^3}\right)^{1/2} b \sin \theta_0 \sin \alpha\right] , \quad (3.28)$$

la cual proporciona una expresión para el corrimiento al rojo z .

Utilizamos (3.7) para las trayectorias de los fotones provenientes del disco y (3.28) para obtener el corrimiento al rojo. Con estas ecuaciones obtenemos las proyecciones correspondientes a z constante a diferentes grados de inclinación con respecto al sistema del disco de acreción.

Los resultados mostrados en la figura 3.7 presentan la proyección de la función (3.28) en el plano del observador. Las figuras muestran un corrimiento al azul en la parte izquierda y corrimiento al rojo en la derecha, de forma que la rotación del disco es en sentido contrario de las manecillas del reloj. Las proyecciones de la izquierda corresponden a las imágenes primarias mientras que las de la derecha corresponden a las imágenes secundarias, las cuales se grafican con la ecuación (3.11).

Tanto las figuras del corrimiento al rojo como las de las siguientes secciones se realizaron mediante Python utilizando las funciones `scipy.interpolate.griddata` y `matplotlib.pyplot.imshow`. Para el caso del corrimiento al rojo se realizó una paleta de color utilizando el código proporcionado por Halpuka [22]. Se definió el color negro del fondo y se creó una figura para poner encima utilizando los puntos de $r = 6$ correspondiente al radio menor, ya que la función `scipy.interpolate.griddata` al generar un color continuo entre todos los puntos también lo generó para el centro.

Visualización de un disco de acreción delgado
 3.3 Corrimiento al rojo del disco de acreción

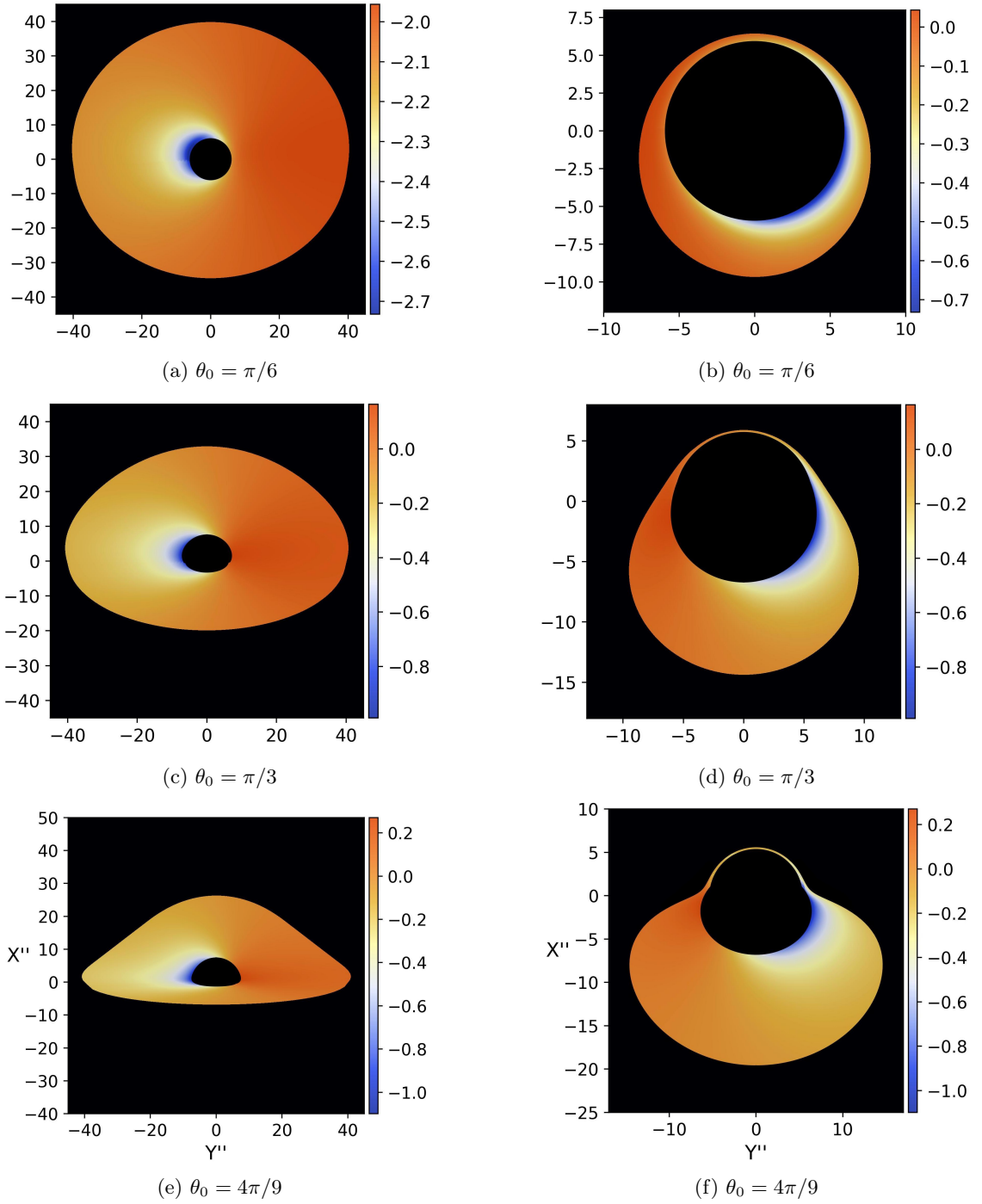


Figura 3.7: Corrimiento al rojo en el plano del observador. Las figuras se muestran a diferentes inclinaciones del plano, donde las imágenes de la izquierda corresponden a las imágenes primarias y las de la derecha a las secundarias.

3.4. Flujo del disco de acreción

Es posible también calcular el flujo de radiación del disco de acreción. El flujo radiado por el disco depende de la distancia del observador y la luminosidad intrínseca, mientras más lejos se encuentra el objeto, éste es menos brillante. Esta magnitud está orientada perpendicularmente a la trayectoria de los fotones que llegan al plano del observador, de forma que se puede obtener una imagen de la apariencia del disco para un observador lejano. Para este caso utilizaremos una expresión para el flujo bolométrico, que es la energía lumínica total (emisión de fotones) observada en todas las longitudes de onda por unidad de área por unidad de tiempo, como describen Carroll y Ostlie [23].

Page y Thorne [3] modelan el flujo del disco de acreción partiendo del modelo newtoniano para discos de Shakura y Sunyaev [24] y obtienen una expresión relativista del flujo bolométrico para un disco de acreción delgado en el plano ecuatorial. El cálculo es realizado a partir de las leyes de conservación de la masa en reposo, momento angular y energía. Para analizar la estructura del disco suponen que el espacio tiempo en donde se encuentra el agujero negro es estacionario, axialmente simétrico y asintóticamente plano.

El espacio es simétrico respecto al plano ecuatorial, de forma que la métrica cerca de este plano es

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\psi} (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\mu} dr^2 + dz^2 \quad (3.29)$$

en donde ν , ψ , μ y ω son funciones de r .

El disco se encuentra sobre el plano ecuatorial y es delgado de forma que el grosor del disco Δz cumpla que

$$\Delta z = 2h \quad \text{y} \quad \Delta z \ll r, \quad (3.30)$$

en donde h es la altura sobre el plano ecuatorial.

Se hace la suposición de que existe un tiempo Δt en el cual el cambio en la geometría del espacio tiempo es ignorable. Para este Δt se debe cumplir que el flujo de masa es grande comparada con la masa que se encuentra entre r y $2r$ para cualquier valor de r .

Es necesario definir el promedio para una función, ya que se utilizará en las siguientes suposiciones. Para una función arbitraria Ψ su promedio estará dado por

$$\langle \Psi(z, r) \rangle \equiv (2\pi\Delta t)^{-1} \int_0^{\Delta t} \int_0^{2\pi} \Psi(t, r, z, \phi) d\phi dt. \quad (3.31)$$

La cuadrivelocidad del marco de referencia local de la materia en un punto P_0 corresponde a $u^\mu(P_0)$. Al promediar la masa sobre ϕ , Δt y z se tiene que

$$\tilde{u}^\mu(r) = \frac{1}{\Sigma} \int_{-H}^{+H} \langle \rho_0 u^\mu \rangle dz, \quad (3.32)$$

en donde ρ_0 es la densidad de la masa en reposo en el marco de referencia local y H corresponde a la mitad del grosor del disco de acreción en el tiempo Δt . La cantidad Σ corresponde a la densidad de la superficie promediada sobre z

$$\Sigma(r) = \int_{-H}^{+H} \langle \rho_0 \rangle dz. \quad (3.33)$$

El tensor de energía-momento con respecto a la cuadrivelocidad u descompuesto algebraicamente es

$$T_{\mu\nu} = \rho_0(1 + \Pi)u_\mu u_\nu + t_{\mu\nu} + u_\mu q_\nu + u_\nu q_\mu, \quad (3.34)$$

en donde Π es la energía interna específica, $t_{\mu\nu}$ corresponde al tensor de energía en el marco de reposo y es un tensor simétrico de segundo rango ortogonal a u_μ y q_ν es el vector de flujo de energía ortogonal a u^μ .

La radiación proveniente del disco es generada por la masa de las partículas que se encuentran a altas temperaturas debido a las colisiones entre ellas. La presión generada dentro del disco es suficientemente pequeña de forma que las trayectorias se muevan en geodésicas circulares cada una con un momento angular diferente dentro del fluido. Por lo tanto suponemos que la materia del disco se mueve en órbitas circulares y definimos la cuadrivelocidad de una geodésica en el plano ecuatorial como $w^\mu(r) \simeq \tilde{u}^\mu(r)$. Este tipo de trayectoria posee energía en el infinito E , momento angular L y velocidad angular Ω dados por

$$\begin{aligned} E &= -w_t(r) \\ L &= w_\phi(r) \\ \Omega(r) &= \frac{w^\phi}{w^t} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Toda la energía saliente del disco es originada por fotones. El flujo de calor dentro del disco y la transferencia de momento de los fotones entre sus partes son despreciables, con excepción de la dirección vertical, es decir, la única dirección que se toma en cuenta es $z = \pm H$. Las componentes temporales, radiales y azimutales de $t_{\mu\nu}$ y de $q_{\mu\nu}$ son cero.

Con estas suposiciones es posible calcular el flujo bolométrico de fotones (luminosidad) para el disco de acreción. Su expresión final en términos de la tasa de acreción hacia el agujero negro \dot{M}_0 , es [3]:

$$F(r) = \frac{\dot{M}_0}{4\pi} e^{-\nu+\psi+\mu} f, \tag{3.36}$$

en donde f corresponde a

$$\begin{aligned} f &= -\Omega_{,r}(E - \Omega L)^{-2} \int_{r_{ms}}^r (E - \Omega L)L_{,r} dr \\ &= -\frac{w_{,r}^t}{w_\phi} \int_{r_{ms}}^r \frac{w_{\phi,r}}{w^t} dr, \end{aligned} \tag{3.37}$$

en donde r_{ms} es el radio de la última órbita estable.

En particular Novikov y Thorne [25] utilizan este modelo para dar una expresión relativista del flujo bolométrico para un disco el espacio-tiempo de Kerr, que describe la geometría de un agujero negro con momento angular por unidad de masa a . Esta expresión para el flujo en unidades de energía por tiempo propio τ por área está dada por

$$F = \frac{3\dot{M}_0}{8\pi x^4} \frac{M}{x^2} \frac{f}{B C^{1/2}}, \tag{3.38}$$

en donde

$$B = 1 + \frac{a_*}{x^{3/2}} \tag{3.39}$$

y

$$C = 1 - \frac{3}{x} + \frac{2a_*}{x^{3/2}}. \tag{3.40}$$

Page y Thorne describen de manera explícita la ecuación para f :

$$\begin{aligned} f &= \frac{1 + a_* x^{-3}}{(1 - 3x^{-2} + 2a_* x^{-3})^{1/2}} \frac{1}{x} \left[x - x_0 - \frac{3}{2} a_* \ln \left(\frac{x}{x_0} \right) - \frac{3(x_1 - a_*)^2}{x_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \ln \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3(x_2 - a_*)^2}{x_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \ln \left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \right) - \frac{3(x_3 - a_*)^2}{x_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \ln \left(\frac{x - x_3}{x_0 - x_3} \right) \right] \end{aligned} \tag{3.41}$$

con

$$a_* = \frac{a}{M}, \quad x = \left(\frac{r}{M}\right)^{1/2} \quad \text{y} \quad x_0 = \left(\frac{r_{ms}}{M}\right)^{1/2}. \quad (3.42)$$

Las variables x_1 , x_2 y x_3 corresponden a las raíces del polinomio

$$x^3 - 3x + 2a_* = 0. \quad (3.43)$$

Cuando el valor de a es nulo la solución de Kerr se reduce a la métrica de Schwarzschild. Por lo tanto al anular este parámetro de la ecuación (3.41) podemos obtener una expresión del flujo bolométrico para el caso que nos interesa. Para $a = 0$ la ecuación (3.43) se convierte en

$$x^3 - 3x = 0 \quad (3.44)$$

y las raíces del polinomio corresponden a

$$x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{3}. \quad (3.45)$$

La expresión para el flujo bolométrico en el espacio-tiempo de Schwarzschild estará dada por

$$F = \frac{3M\dot{M}}{8\pi} \frac{1}{(r-3)r^{5/2}} \left[\sqrt{r} - \sqrt{6} + \frac{3}{2\sqrt{3}} \log \left\{ \frac{(\sqrt{r} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{3})}{(\sqrt{r} - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{3})} \right\} \right], \quad (3.46)$$

donde \dot{M} es la tasa de acreción.

El flujo observado F_0 difiere al del flujo intrínseco en un factor $(1+z)$ elevado a la cuarta potencia:

$$F_0 = \frac{F}{(1+z)^4}, \quad (3.47)$$

en donde el flujo F corresponde a la ecuación (3.46).

El factor $(1+z)^4$ corresponde a las diferentes contribuciones al corrimiento al rojo. Una potencia de $(1+z)$ se deriva de la pérdida de energía de cada fotón debido al corrimiento al rojo, otra debido a la tasa menor de fotones detectada debido a la dilatación del tiempo y dos potencias debido a la corrección relativista a las mediciones del ángulo sólido tal como lo deriva con detalle Ellis en [26].

Graficamos (3.47) en unidades de flujo máximo F_{max} . Calculando el máximo de la función (3.46), se tiene que el flujo es máximo cuando $r^* \sim 9.55$ por lo tanto flujo máximo estará dado por

$$F_{max} \sim 1.14589 \times 10^{-4} \times \frac{3M\dot{M}}{8\pi}. \quad (3.48)$$

De esta manera se grafica la distribución de flujo del disco de acreción para diferentes ángulos de visión del observador, como muestra la figura 3.8. El flujo se encuentra en unidades de energía por tiempo por área y valor para el flujo está normalizado con el flujo máximo.

3.5. Temperatura del disco de acreción

Una vez obtenido el flujo podemos encontrar la temperatura del disco de acreción suponiendo que el disco se comporta como un cuerpo negro. Cualquier cuerpo con una temperatura por encima del cero absoluto emitirá luz en diferentes longitudes de onda. Un emisor de radiación térmica ideal es aquel que absorbe toda la energía y la emite de nuevo siguiendo la forma de la radiación de cuerpo negro. A una temperatura T este cuerpo emite un espectro continuo en todas las longitudes de onda, con una longitud de onda máxima la cual comienza a disminuir conforme aumenta la temperatura pasado este máximo.

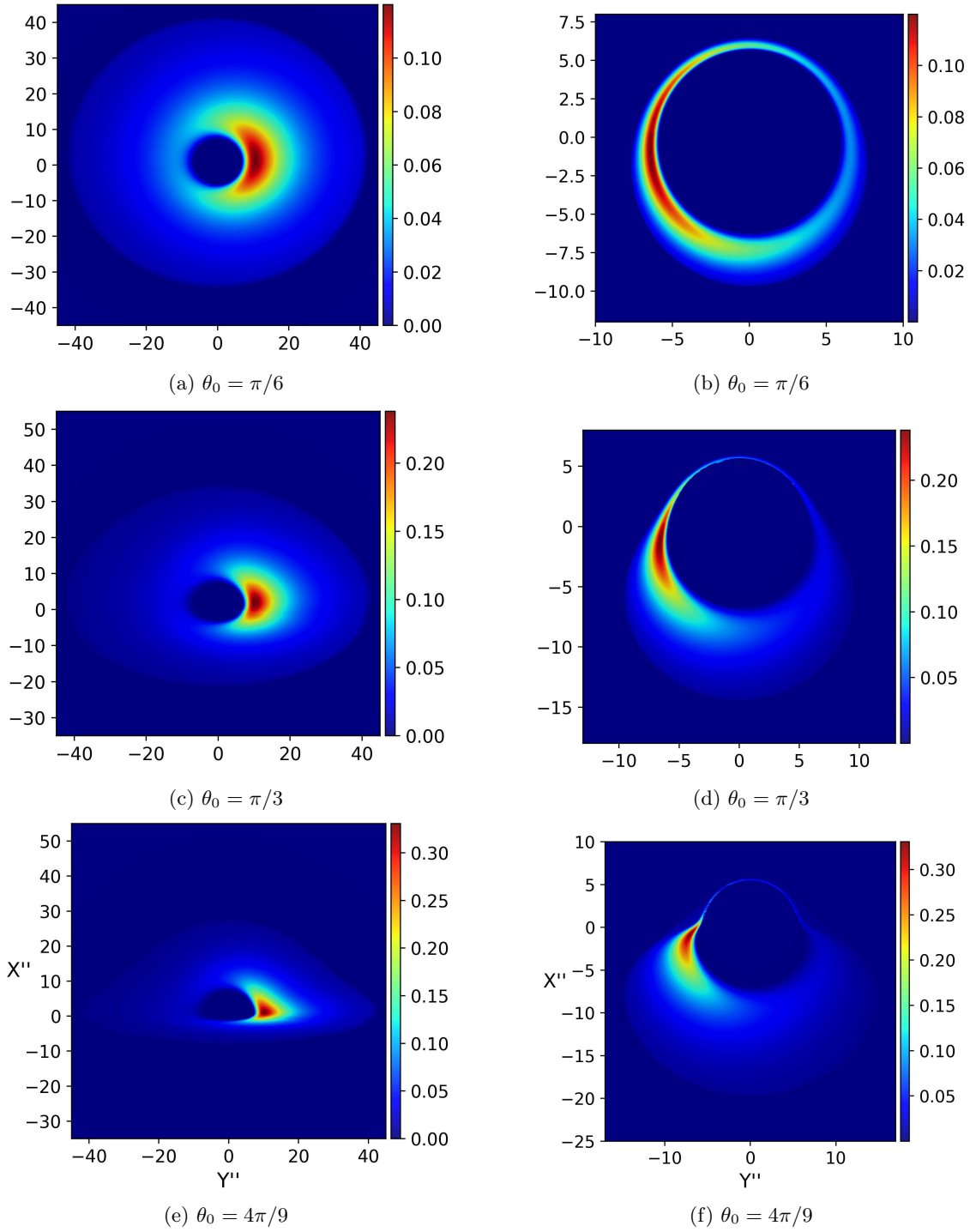


Figura 3.8: Flujo bolométrico en el plano del observador, normalizado con el flujo máximo en unidades de energía por tiempo por área F_0/F_{max} . Las figuras se muestran a diferentes inclinaciones del plano, donde las imágenes de la izquierda corresponden a las imágenes primarias y las de la derecha a las secundarias.

Si suponemos que el agujero negro emite radiación como un cuerpo negro entonces podemos encontrar su temperatura con la ley de Stefan-Boltzmann, la cual establece que la energía total emitida por un cuerpo negro en el tiempo es proporcional a T^4 de forma que

$$F = \sigma T^4 , \quad (3.49)$$

donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann cuyo valor es

$$\sigma = 5.67037 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} . \quad (3.50)$$

Al igual que el flujo bolométrico, la temperatura también posee correcciones relativistas al ser determinada por un observador lejano (T_0). Las correcciones son inversas a la primera potencia del corrimiento al rojo gravitacional como expresan Fukue y Tokoyama [27], dadas por

$$T_0 = \frac{T}{1 + \tilde{z}} , \quad (3.51)$$

donde el factor $1 + \tilde{z}$ es el corrimiento al rojo. De esta forma utilizando la ecuación (3.51) se puede obtener la distribución de la temperatura del disco de acreción en el plano del observador.

Análogamente al caso del flujo, la temperatura se calcula en términos de la temperatura máxima T_{max} y se tendrá que

$$\sigma T_{max}^4 \sim 1.14589 \times 10^{-4} \times \frac{3M\dot{M}}{8\pi} . \quad (3.52)$$

Finalmente obtenemos un valor para la temperatura máxima dado por

$$T_{max} = 9.04121 \times 10^{-17} \frac{\dot{M}^{1/4}}{M_0^{1/2}} K , \quad (3.53)$$

donde M_0 es la masa de agujero negro en términos de la masa del Sol y \dot{M} la tasa de acreción.

Las imágenes de la figura 3.9 corresponden a la proyección de la temperatura sobre el plano del observador, en donde la temperatura se encuentra normalizada con la temperatura máxima. La temperatura decrece exponencialmente desde el punto máximo en la región interna del disco hacia las regiones externas de mayor radio debido al comportamiento de las ecuaciones del flujo (3.47) y temperatura (3.49).

Las gráficas presentadas de corrimiento al rojo, flujo bolométrico y temperatura presentan asimetría en el disco. Las imágenes se encuentran distorsionadas debido al corrimiento al rojo asociado a la rotación del disco horizontalmente y el efecto gravitacional del agujero negro que distorsiona las trayectorias de la luz verticalmente.

La asimetría horizontal se ve en la región más brillante del disco, la cual se encuentra de un lado mientras que hay una región menos brillante del lado contrario. Esto es debido a que la radiación de un lado se encuentra aumentada por el corrimiento al rojo, mientras que otra es reducida. La parte más brillante en el caso de las imágenes del corrimiento al rojo se encuentra en el lado contrario a las imágenes del flujo y temperatura ya que la ecuación del flujo (3.47) no es monótona y por lo tanto cambia la orientación. La asimetría vertical se debe al efecto gravitacional que curva las trayectorias de los fotones, provocando que las trayectorias de los fotones salientes de parte de atrás del disco se vean modificadas llegando así al observador.

Esta asimetría también se puede ver con las imágenes secundarias, las cuales corresponden a los fotones de la parte inferior del disco. Como hemos visto en las figuras presentadas, la deformación en la forma del disco es más notoria conforme el observador se posiciona perpendicularmente al plano ecuatorial.

Visualización de un disco de acreción delgado
 3.5 Temperatura del disco de acreción

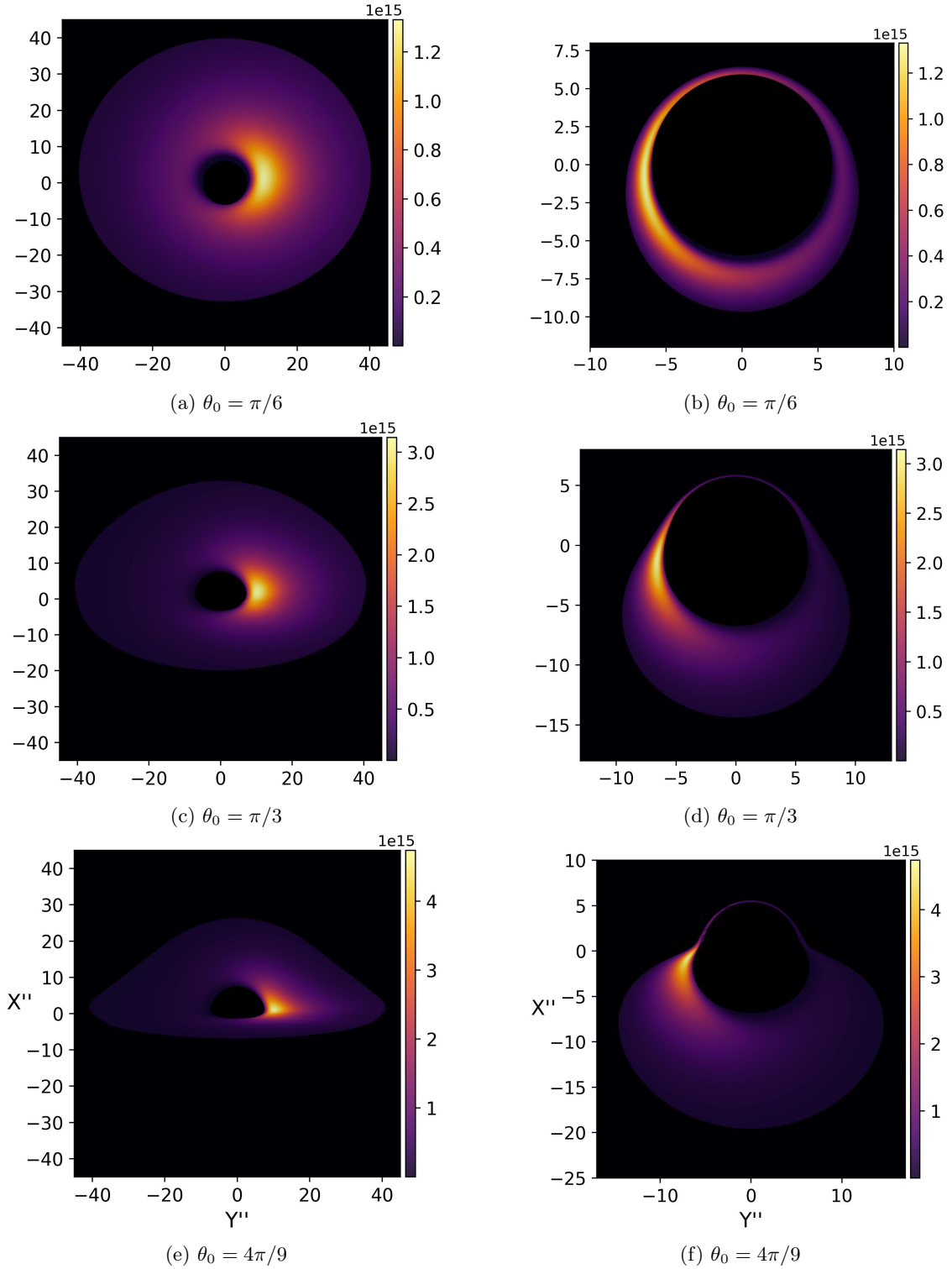


Figura 3.9: Temperatura del disco de acreción en el plano del observador normalizada con la temperatura máxima T_0/T_{max} . Las figuras se muestran a diferentes ángulos de observación. Las imágenes de la izquierda corresponden a las imágenes primarias y las de la derecha a las secundarias.

Capítulo 4

Conclusiones

En el presente trabajo se estudió la apariencia de un agujero negro en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Se abordó el caso de la sombra de un agujero negro en el vacío y posteriormente se consideró un disco de acreción delgado sobre el plano ecuatorial alrededor del agujero negro. Como primer paso revisamos las herramientas de geometría diferencial para trabajar en Relatividad General así como algunos de los conceptos físicos que fundamentan la teoría, tales como las geodésicas en los espacios curvos. Finalmente dedujimos las ecuaciones de Einstein que relacionan la materia con el espacio-tiempo.

Desarrollamos los cálculos para llegar a la solución de Schwarzschild que describe un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico. La solución la expresamos originalmente en coordenadas de Boyer-Lindquist y exploramos las propiedades de este espacio. De igual manera exploramos las propiedades del espacio-tiempo utilizando un cambio de coordenadas tipo Eddington-Finkelstein que permiten un mejor análisis de las trayectorias de los fotones en la vecindad del horizonte de eventos.

Posteriormente analizamos el comportamiento de partículas de prueba en el espacio de Schwarzschild. Partimos de la descripción lagrangiana de las ecuaciones de movimiento para encontrar el potencial efectivo equivalente que dicta la trayectoria tanto de partículas con masa como de partículas sin masa. Mostramos que para este espacio existen órbitas circulares estables que reproducen el comportamiento newtoniano pero también existen órbitas circulares inestables, que no tienen una contraparte newtoniana. Analizamos el caso de las órbitas circulares estables así como el movimiento de trayectorias acotadas para las partículas con masa. En el caso relativista a diferencia del caso newtoniano las órbitas acotadas no se cierran sobre sí mismas produciendo un fenómeno de precesión. Señalamos que las trayectorias que precesan pueden parametrizarse en términos de la excentricidad y el semi-lado recto. En el caso newtoniano éstas órbitas dibujan elipses.

Para las partículas sin masa analizamos la inestabilidad de la órbita circular y exploramos las trayectorias en términos del parámetro de impacto b y obtenemos una expresión que relaciona b con el periastro de la órbita. Calculamos la desviación que sufre un fotón debido a la influencia gravitacional del agujero negro cuando se aproxima desde infinito. Encontramos expresiones que determinan el parámetro de impacto de las trayectorias dado un ángulo de aproximación μ cerca del límite $P = 3M$, es decir, cuando el periastro se acerca a la mínima órbita estable.

Al sustituir la órbita estable $3M$ para las partículas sin masa en el potencial efectivo encontramos un valor para el potencial crítico así como para el parámetro de impacto crítico b_c , el cual determina que partículas llegan al observador, dado que todo rayo menor a b_c no puede llegar al observador sino que su trayectoria lo llevará inevitablemente al agujero negro. Por lo tanto un observador lejano verá las trayectorias de las partículas orbitando alrededor del agujero con un radio correspondiente al valor del parámetro de impacto crítico $r = 5.19M$. Este radio corresponde a la sombra del agujero negro en un espacio-tiempo de Schwarzschild sin materia a su alrededor.

Desarrollamos una hoja de Mathematica para resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales que describen la órbita de las partículas, así como para determinar la posición aparente. Notamos que el cómputo en Mathematica requería muchos recursos computacionales y optamos por utilizar otro lenguaje, Fortran90 debido a su capacidad para efectuar cálculos de forma más eficiente. La visualización se realizó en Python para obtener una mejor representación de las imágenes. El código de Fortran fue escrito explícitamente para determinar la forma de las trayectorias en el sistema de referencia de un observador lejano resolviendo numéricamente la ecuación de visualización. Gracias a este código pudimos producir las imágenes de las trayectorias de forma eficiente y modelar de mejor forma el disco de acreción. Una parte esencial en la nueva implementación en Fortran fue que se utilizó una biblioteca extra para calcular las funciones elípticas de forma eficiente.

Analizamos el caso de un disco de acreción delgado sobre el plano ecuatorial alrededor del agujero negro. Primero obtenemos las imágenes para los fotones emitidos por partículas orbitando a diferentes radios alrededor del agujero negro. Estas imágenes corresponden a lo que vería un observador lejano, en donde el cambio de coordenadas del sistema de referencia del agujero al sistema del observador que se utiliza es el propuesto por Luminet. En el plano del observador se observan dos grupos de imágenes, las primarias correspondientes a la parte superior del disco y las secundarias correspondientes a parte la inferior del disco. También exploramos el caso de las trayectorias acotadas vistas en el plano del observador y estudiamos la precesión de las órbitas obteniendo a una expresión para el cambio del ángulo de precesión.

Estudiamos las propiedades del disco de acreción utilizando el modelo propuesto por Novikov y Thorne que supone que las partículas se mueven en geodésicas circulares alrededor del agujero negro. Calculamos el corrimiento al rojo de los fotones que se emiten desde la superficie del disco. Realizamos figuras que muestran el corrimiento al rojo en el plano del observador utilizando diferentes valores para el ángulo de observación. Obtenemos también imágenes que muestran la apariencia del flujo bolométrico para un observador en infinito para diferentes ángulos de observación, en donde el flujo está normalizado con el flujo máximo. Concluimos que el disco de acreción emite la radiación como un cuerpo negro (en el sentido termodinámico) y por lo tanto podemos obtener su temperatura a través de la ley de Steffan-Boltzman. Luego graficamos un mapa de temperatura del disco en el plano del observador.

El efecto gravitacional sobre la curvatura del espacio tiempo genera efectos de gran interés sobre la visualización que percibe un observador lejano. Las imágenes obtenidas que se aprecian en el marco de referencia del observador son asimétricas tanto horizontalmente como verticalmente. La primera se debe al corrimiento al rojo asociado a la rotación del disco lo cual provoca que el observador aprecie un lado del disco más brillante que otro. La asimetría vertical se debe al efecto de curvatura que produce el agujero negro, la cual curva la trayectoria de la luz de forma que es posible para el observador ver toda la superficie del disco en la imagen primaria. El efecto gravitacional también hace posible ver la parte inferior del disco de acreción en la forma de las imágenes secundarias.

La visualización de discos de acreción, por lo tanto, es un problema que cobra relevancia sobre todo a raíz de los recientes trabajos sobre las imágenes obtenidas de discos de acreción, las cuales nos permiten estudiar diferentes propiedades de los agujeros negros como su masa y momento angular, además de que constituyen evidencias observacionales de la validez de la relatividad general.

Apéndice A

Integrales y Funciones elípticas

Las integrales elípticas son aquellas de la forma

$$V = \int F(t, R) dt \quad (\text{A.1})$$

en donde $F(X, R)$ es una función racional cuyo radical es de la forma

$$R = \sqrt{At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E} \quad (\text{A.2})$$

y A, B, C, D y E con coeficientes constantes.

Las integrales que poseen esta forma, ya tengan exponentes de cuarto o tercer grado, pueden ser reducidas a una función elíptica, las cuales tienen tres formas comunes:

$$\begin{aligned} I_1(y, k) &= \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \\ I_2(y, k) &= \int_0^y \frac{t^2 dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \\ I_3(y, a, k) &= \int_0^y \frac{dt}{(t^2+a)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

que son denominadas integrales de primer, segundo y tercer orden respectivamente. Un análisis más a fondo sobre las integrales y su forma de resolución puede ser encontrado en [12].

Para el caso que nos atañe nos concentramos en las integrales elípticas de primer clase:

$$\begin{aligned} z(y) &= \int_0^y \frac{dt}{(1-t^2)(1-k^2t^2)^{1/2}} = F(y, k) \\ z(\theta) &= \int_0^\theta \frac{d\theta'}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta'}} = F(\theta, k) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

en donde la primera expresión es conocida como la forma de Jacobi y la segunda como la forma de Legendre, la cual se obtiene al utilizar el cambio de variable $t = \sin \theta$. A k se le denomina el módulo de la integral. Cuando $\theta = \pi/2$ la función F se escribe como

$$K(k) \equiv F\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \quad (\text{A.5})$$

a la cual se le llama integral elíptica completa, de otra forma se dice que es una integral elíptica incompleta.

La resolución de las integrales elípticas requiere de soluciones numéricas. Es posible utilizar los métodos comunes de integración, sin embargo estos requieren demasiado tiempo de computo y resultan poco convenientes de usar. Por lo tanto para el cálculo numérico de las integrales se utilizó el algoritmo desarrollado por Fukushima e Ishizaki [28], en el cual calcula las integrales elípticas incompletas con una precisión de 14 dígitos.

Definimos también la amplitud correspondiente al argumento z para ambos casos

$$\begin{aligned} y(z) &= am(z, k) = am(z) \\ \theta(z) &= am(z, k) = am(z) . \end{aligned} \tag{A.6}$$

Es posible invertir las funciones elípticas así como se hace con las funciones trigonométricas. Éstas son las llamadas funciones elípticas de Jacobi y se obtienen al invertir la integral elíptica incompleta de primera clase. Invertir la función elíptica en la forma de Legendre $z(\theta) = F(\theta, k)$ resulta en la amplitud de z , esto es

$$F^{-1}(\theta, k) = \theta(z) = am(z, k) , \tag{A.7}$$

mientras que invertir la forma de Jacobi $z(y) = F(y, k)$ nos lleva a la definición

$$sn(z, k) \equiv y = \sin \theta = \sin am(z) \tag{A.8}$$

donde sn recibe por nombre el seno de Jacobi. El coseno de Jacobi puede definirse análogamente. Las últimas dos igualdades relacionan las integrales de Jacobi y Legendre.

Bibliografía

- [1] Charles Galton Darwin. The gravity field of a particle. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 249(1257):180–194, 1959.
- [2] C.T. Cunningham and James M. Bardeen. The optical appearance of a star orbiting an extreme kerr black hole. *The Astrophysical Journal*, 183:237–264, 1973.
- [3] Don N. Page and Kip S. Thorne. Disk-Accretion onto a Black Hole. Time-Averaged Structure of Accretion Disk. *Astrophys. J.*, 191:499–506, 1974.
- [4] Sean M. Carroll. Lecture notes on general relativity. *arXiv preprint gr-qc/9712019*, 1997.
- [5] Michael Paul Hobson, George P. Efstathiou, and Anthony N. Lasenby. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [6] Subrahmanyan Chandrasekhar. *The mathematical theory of black holes*, volume 69. Oxford University Press, 1998.
- [7] Robert M. Wald. *General relativity*. Chicago, University of Chicago Press, 1984.
- [8] Ray d’Inverno. *Introducing Einstein’s relativity*. Clarendon Press, 1992.
- [9] Thomas Osburn, Niels Warburton, and Charles R Evans. Highly eccentric inspirals into a black hole. *Physical Review D*, 93(6):F064024, 2016.
- [10] Edwin F. Taylor and John Archibald Wheeler. *Exploring black holes*, volume 98. Addison Wesley Longman San Francisco, CA, 2000.
- [11] Volker Perlick and Oleg Yu Tsupko. Calculating black hole shadows: review of analytical studies. *Physics Reports*, 947:1–39, 2022.
- [12] Arthur Latham Baker. *Elliptic Functions: An Elementary Text-book for Students of Mathematics*. J. Wiley & sons, 1906.
- [13] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [14] Oleg Yu Tsupko. Notes on analytical treatment of black hole shadow. *International Journal of Modern Physics D*, 27(10):1844020, 2018.
- [15] James B. Hartle. *Gravity: An introduction to Einstein’s general relativity*. American Association of Physics Teachers, 2003.
- [16] Juhan Frank, Andrew King, Derek Raine, et al. *Accretion power in astrophysics*. Cambridge University Press, 2002.
- [17] Marek A. Abramowicz and P. Chris Fragile. Foundations of black hole accretion disk theory. *Living Reviews in Relativity*, 16(1):1–88, 2013.

- [18] J. P. Luminet. Image of a spherical black hole with thin accretion disk. *Astron. Astrophys.*, 75:228–235, 1979.
- [19] Jean-Pierre Luminet. An Illustrated History of Black Hole Imaging Personal Recollections (1972-2002). 2019.
- [20] Toshio Fukushima. Fast computation of jacobian elliptic functions and incomplete elliptic integrals for constant values of elliptic parameter and elliptic characteristic. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 105(1):245–260, 2009.
- [21] Mike Guidry. *Modern general relativity: black holes, gravitational waves, and cosmology*. Cambridge University Press, 2019.
- [22] Kerry Halupka. Beautiful custom colormaps with matplotlib, Jul 2020. <https://towardsdatascience.com/beautiful-custom-colormaps-with-matplotlib-5bab3d1f0e72>.
- [23] Bradley W. Carroll Dale A. Ostlie. *An Introduction to Modern Astrophysics Carroll Ostlie Second Edition*. Pearson, 2014.
- [24] Ni I. Shakura and Rashid Alievich Sunyaev. Black holes in binary systems. observational appearance. *Astronomy and Astrophysics*, 24:337–355, 1973.
- [25] I.D. Novikov and Kip S. Thorne. Astrophysics of black holes. In *Black holes*. Science Publishers, Inc, 1973.
- [26] George F.R. Ellis. Republication of: Relativistic cosmology. *General Relativity and Gravitation*, 41(3):581–660, 2009.
- [27] Jun Fukue and Takushi Yokoyama. Color photographs of an accretion disk around a black hole. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 40(1):15–24, January 1988.
- [28] Toshio Fukushima and Hideharu Ishizaki. Numerical computation of incomplete elliptic integrals of a general form. *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy*, 59:237–251, 07 1994.