



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Familias Normales, el Gran Teorema de Picard
y Algunas de sus Consecuencias

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

por

Gabriel Martínez Ramos

Asesorado por

Dra. Patricia Domínguez Soto

Puebla Pue.
Noviembre, 2019

Índice general

Introducción	4
Capítulo 1. Preliminares	7
1.1. Espacios Métricos	7
1.2. El plano complejo como espacio métrico	19
1.3. Funciones de variable compleja y continuidad	21
1.4. Sucesiones y Series de Funciones Complejas	23
1.5. Funciones Holomorfas	25
1.6. Integración Compleja	28
1.7. Singularidades y su clasificación	30
Capítulo 2. Familias Normales y el Gran Teorema de Picard	35
2.1. El espacio de funciones holomorfas	35
2.2. Familias Normales	37
2.3. Teorema de Picard	43
Capítulo 3. Aplicaciones	49
3.1. Dinámica Holomorfa	49
3.2. Ecuaciones funcionales y sus soluciones	54
Conclusión	61
Bibliografía	63

Introducción

En dinámica compleja, una función trascendente entera es una función entera (analítica en todo \mathbb{C}) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, donde ∞ es una singularidad esencial. La n -ésima iteración de una función f , se define como la composición de ella misma n -veces y se denota $f^{\circ n} = f \circ \dots \circ f$. La órbita hacia adelante generada por un valor $z_0 \in \mathbb{C}$ bajo f se define como el conjunto

$$\mathcal{O}^+(z_0) := \{f^n(z_0) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Una de las claves para comprender el comportamiento bajo iteración de un punto arbitrario del plano complejo yace en la comprensión del conjunto de puntos cuya órbita no converge en compactos a una órbita neutral o atrayente. En 1906, Fatou describe en sus notas a este conjunto, el cual hoy se conoce como el conjunto de Julia.

Una manera posible de estudiar el conjunto de Julia era directamente vía operaciones, pero las dificultades de este método fueron impresionantes, ya que para n muy grande y un z_0 arbitrario los cálculos para $f^n(z_0)$ eran abrumadores. Afortunadamente, esto fue resuelto gracias a un joven matemático francés, Paul Montel, quien, durante el periodo en pausa del desarrollo de la la dinámica compleja, la cual seguía las notas de Fatou de 1906, puso los toques finales con su teoría de familias normales.

La teoría de Montel sobre familias normales es muy poderosa porque en las primeras décadas del siglo XX Montel aplicó su teoría a una variedad de tópicos sobre la teoría de las funciones complejas. Sin embargo, Montel no aplicó su teoría para estudiar iteración de funciones. Ésto fue hecho por primera vez de manera independiente por Fatou y Julia al rededor de 1917. El propio Montel parecía sorprendido con el papel que su teoría jugaba en los estudios de Fatou y Julia. En su libro *Familles Normales*, él hizo el siguiente comentario sobre el uso de sus teorías en la que llamó *trabajos notables de Fatou y Julia*:

“Una de las mas importantes aplicaciones de la teoría de familias normales se encuentra en el estudio de la iteración de funciones analíticas y la solución de las ecuaciones funcionales para las que están relacionadas.”

(Montel, Paul: *Familles Normales*, 1927: 213)

Antes de la aparición del artículo de Montel en 1912, el Teorema de Picard generó un gran número de artículos por parte de prominentes matemáticos tales como Borel, Schottky, Lando, Paul Léavy, Constantin Carathéodory y Ernst Lindelöf. Montel consideró su estudio de

la teoría de Picard por ser una de las más importantes aplicaciones de su teoría de familias normales.

El Teorema grande de Picard enuncia que una función definida alrededor de una singularidad esencial toma todos los valores complejos un número infinito de veces, a excepción, posiblemente, de a lo más un valor.

Este resultado juega un papel importante en el estudio de las funciones trascendentes enteras. Por ejemplo, obsérvese que el Teorema grande de Picard asegura tres casos posibles sobre una función trascendente entera: la función toma todos los valores complejos, omite un valor complejo o existe un valor el cual es tomado un número finito de veces. Una pregunta interesante a resolver sería: ¿es posible conocer las funciones trascendentes enteras que omiten un solo valor y qué valor omite?

Resolver ésta pregunta es de interés importante porque si se deseara garantizar la existencia de soluciones de una ecuación funcional, donde la función en cuestión es trascendente entera, tendríamos que fijarnos en el valor que no omite la función, si es que existe. Como obtendremos una infinidad de soluciones dentro de cualquier entorno de ∞ , otra pregunta interesante sería la siguiente: ¿es posible construir una sucesión de soluciones de la ecuación funcional que se acerquen a ∞ ? Ya que el Teorema grande de Picard vale para funciones con singularidad esencial, de manera general, preguntamos si es posible construir una sucesión de soluciones de una ecuación funcional convergente a la singularidad.

Por otro lado, al estudiar la iteración de una función trascendente entera nos encontramos con el problema de conocer la clase de la función que resulta al componer dos funciones trascendentes enteras. Resulta que el Teorema grande de Picard entra en juego al resolver este problema.

Nuestro interés en este trabajo de tesis es estudiar el Teorema grande de Picard, demostrarlo y utilizarlo para resolver las preguntas anteriores. Daremos un vistazo a la teoría de familias normales para comprender la demostración que Montel realizó utilizando su Criterio Fundamental de Normalidad, prueba vigente del Teorema grande de Picard.

1 | Preliminares

En este capítulo se presentan los conceptos básicos que servirán de apoyo para definir familias normales en el Capítulo 2. Se asume que el lector conoce los temas expuestos en este capítulo, por lo que si existe inquietud sobre la prueba de algún teorema puede revisar en alguna de las siguientes referencias: [1], [4], [5], [6], [7], [13], [14], [15], [16] y [18].

SECCIÓN 1.1 Espacios Métricos

Denotemos por \mathbb{R} al conjunto de los números reales y con \mathbb{R}^+ al conjunto de todos los reales no negativos como es usual.

Una *métrica* o *función distancia* en un conjunto X no vacío es una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisface los siguientes axiomas para cualesquiera $x, y, z \in X$:

- (i) $d(x, y) = 0$ si, y sólo si $x = y$.
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$. (Propiedad de simetría)
- (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, x)$. (Desigualdad del triángulo)

Si X es un conjunto y d es una métrica en X , entonces a la pareja (X, d) se le llama un *espacio métrico*.

Ejemplos 1.1. (a) La función $e : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida como:

$$e((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) := \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$$

es una métrica en \mathbb{R}^n llamada *métrica euclidiana* o *usual*. Así, (\mathbb{R}^n, e) es un espacio métrico.

(b) Sea (X, d) un espacio métrico. La función $g : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida como:

$$g(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad (1.1)$$

es también una métrica en X . Observe que para cada $x, y \in X$, la función g satisface las propiedades (i) y (ii) de la definición porque g depende de la métrica d . Sólo falta ver que g satisface la desigualdad del triángulo. En efecto, para cada $x, y, z \in X$ se tiene:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \\ &= 1 - \frac{1}{1 + d(x, y)} \\ &\leq 1 - \frac{1}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\ &= \frac{d(x, z) + d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\ &= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \\ &\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)} \\ &= g(x, z) + g(z, y), \end{aligned}$$

por lo tanto, g es una métrica para X , y por ende, (X, g) es un espacio métrico.

Los espacios métricos constituyeron la primera clase de espacios abstractos a la cual varias nociones y resultados relacionados a espacios euclidianos pudieron ser generalizadas. Los espacios métricos fueron introducidos por M. Fréchet en 1906.

Dado un espacio métrico (X, d) es posible considerar una colección de subconjuntos que tiene particular importancia. El conjunto

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

se define como *bola abierta* o *entorno abierto* con centro en x y de radio r . A partir de las bolas abiertas en (X, d) definimos los conjuntos abiertos.

Definición 1.2. Un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) es abierto si para cada $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$.

De acuerdo con el Ejemplo 1.1(b), la métrica g depende de la métrica d , si nos preguntamos cómo son los abiertos en (X, g) , la respuesta la da el siguiente lema.

Lema 1.3. Sea (X, d) un espacio métrico, si tomamos la métrica g para X , definida en el Ejemplo 1.1(b), se tiene que todo abierto en (X, d) es un abierto en (X, g) e inversamente.

Es posible construir conjuntos abiertos a partir de un conjunto dado en un espacio métrico, la siguiente definición nos proporciona información para generarlos.

Definición 1.4. Sea E un subconjunto de un espacio métrico (X, d) .

- (1) El *interior* de E , denotado por $\text{int}(E)$, es la unión de todos los abiertos contenidos en E . A los puntos que pertenecen a $\text{int}(E)$ les llamaremos *puntos interiores* de E .
- (2) El *exterior* de E , denotado por $\text{ext}(E)$, es el conjunto de puntos interiores de $X \setminus E$. Es decir, $\text{ext}(E) := \text{int}(X \setminus E)$.

El interior de un conjunto satisface las siguientes propiedades.

Proposición 1.5. Para cualesquiera A, B subconjuntos de un espacio métrico (X, d) , se tiene:

- (a) $\text{int}(A)$ es abierto en X .
- (b) $\text{int}(A)$ es el mayor de los abiertos que está contenido en A .
- (c) Si $A \subseteq B$, entonces $\text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$.
- (d) A es abierto en X si, y sólo si $\text{int}(A) = A$.
- (e) $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$.

Ahora, denotaremos por \mathcal{T}_d al conjunto de todos los abiertos de (X, d) . Esta colección satisface las siguientes propiedades:

- (a) Los subconjuntos \emptyset y X pertenecen a \mathcal{T}_d .
- (b) La intersección de dos elementos en \mathcal{T}_d pertenece a \mathcal{T}_d .
- (c) La unión de cualquier colección de subconjuntos abiertos en (X, d) es también un elemento de \mathcal{T}_d .

Gracias a estas propiedades es posible definir un concepto más general que los espacios métricos: los espacios topológicos.

Definición 1.6. Sea X un conjunto no vacío. Una *topología* en X es una familia \mathcal{T} de subconjuntos de X que satisface las siguientes propiedades:

- (a) El conjunto vacío \emptyset y X pertenecen a \mathcal{T} .
- (b) Si $A, B \in \mathcal{T}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{T}$.
- (c) Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\cup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

Si \mathcal{T} es una topología en X , entonces la pareja (X, \mathcal{T}) se llama *espacio topológico* y a los elementos que pertenecen a la topología \mathcal{T} reciben el nombre de *subconjuntos abiertos* de X .

De esta manera, (X, \mathcal{T}_d) es un espacio topológico y a \mathcal{T}_d se le llama topología inducida por la métrica d . Por ésta razón se dice que todo espacio métrico es un espacio topológico; sin embargo, existen espacios topológicos que no son espacios métricos. Además, muchos de los conceptos y resultados relacionados con espacios métricos son extendidos a espacios topológicos. Por ende, hay resultados de espacios topológicos los cuales pueden escribirse en términos de espacios métricos. En nuestro caso enunciaremos algunos conceptos y resultados desde el enfoque topológico, a saber, que se pueden aplicar a espacios métricos, esto con el fin de usar las misma terminología de otros autores.

Como ya es sabido, en un espacio métrico, las bolas abiertas son conjuntos abiertos. Además, para cada dos puntos diferentes x y y de un espacio métrico es posible construir dos bolas abiertas $B(x, r_1)$ y $B(y, r_2)$ con intersección vacía. Los espacios topológicos que satisfacen la propiedad anterior se les conoce como *espacios de Hausdorff*, por ende, los espacios métricos son espacios de Hausdorff.

Un concepto de gran utilidad para el análisis de las propiedades topológicas locales de un espacio es el concepto de vecindad de un punto.

Definición 1.7. Sea x un punto que pertenece a un espacio topológico (X, \mathcal{T}) . Un subconjunto V de X es una *vecindad* de x en el espacio (X, \mathcal{T}) si existe un abierto A que satisfaga $x \in A \subseteq V$. A la colección de vecindades de x en X , lo denotamos $\mathcal{V}(x)$, se le conoce como *sistema de vecindades* de x en (X, \mathcal{T}) .

Intuitivamente, el sistema de vecindades $\mathcal{V}(x)$ de un punto x determina el comportamiento de la topología alrededor del punto. De la definición anterior se desprende que un subconjunto abierto no vacío es una vecindad de cada uno de sus puntos. Así, podemos caracterizar a los conjuntos abiertos a partir de vecindades.

Proposición 1.8. *Un subconjunto A de un espacio métrico (X, \mathcal{T}) es abierto si, y sólo si para cada $x \in A$, existe una vecindad $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V \subseteq A$.*

Sucesiones

El concepto de *sucesión* es de suma importancia porque con él definiremos en el Capítulo 2 el concepto de familia normal. Recordemos que una *sucesión* de puntos en un espacio métrico (X, d) es una función $x : \mathbb{N} \rightarrow X$. La sucesión $n \mapsto x_n$ será representada por $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Luego, dada una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X y sea $y : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función inyectiva, definimos una *subsucesión* de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ como la composición de $x \circ y : \mathbb{N} \rightarrow X$, denotamos $(x \circ y)(k) = x_{n_k}$. Así, escribimos a las subsucesiones como $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d) decimos que *converge* a un punto $x \in X$ si para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ para cualquier $n \geq N$, denotaremos $x_n \rightarrow x$. Cuando una sucesión satisface lo anterior se dice que la sucesión es *convergente*, en caso contrario se dice que es *divergente*. Además, el punto x al que converge una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es único, por lo que denotamos $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Podemos expresar el concepto de convergencia de sucesiones en espacios métricos mediante conjuntos abiertos como sigue.

Teorema 1.9. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en (X, d) converge a $x \in X$ si, y sólo si para cada abierto A que contiene a x , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para cada $n \geq N$.

Se sabe que si una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio métrico (X, d) es convergente, entonces toda subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ no trivial (que se toman términos distintos de la sucesión) es convergente, y además converge al mismo punto que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sin embargo, el recíproco a este resultado no es, en general, necesariamente verdadero ya que hay sucesiones no convergentes que admiten subsucesiones convergente. Por ejemplo, la sucesión $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ no es convergente; y sea la subsucesión $\{(-1)^{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, ésta es convergente.

En la familia de todas las sucesiones en un espacio métrico, conviene distinguir aquellas, que llamaremos de Cauchy, que poseen la propiedad de que sus términos se van acercando unos a otros tanto como se desee. Tales sucesiones son más generales, pero estrechamente relacionadas con las convergentes.

Definición 1.10. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en (X, d) es de *Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para cualesquiera $n, m \geq N$.

Se sabe que en espacios métricos toda sucesión convergente es de Cauchy, como consecuencia toda sucesión convergente es un ejemplo de sucesiones de Cauchy. El recíproco, en general, es falso porque existen sucesiones de Cauchy no convergentes. Por ejemplo, consideremos $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ con la métrica inducida por el valor absoluto y la sucesión $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$, que es de Cauchy, dicha sucesión no converge en X . Por otro lado, existen espacios métricos en los que el recíproco es verdadero, es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente. Un ejemplo de este tipo de espacios es \mathbb{R} con la métrica usual. Éstos espacios se conocen como espacios métricos *completos*.

Se entiende que en un espacio completo todas las sucesiones convergentes y de Cauchy son equivalentes, es decir, en espacios completos toda sucesión es convergente si, y sólo si es de Cauchy.

Si (X, d) es un espacio métrico, entonces (X, g) , donde g es como en el Ejemplo 1.1 (b), también es un espacio métrico. Además, se satisface que toda sucesión de Cauchy en (X, d) es una sucesión de Cauchy en (X, g) e inversamente. En consecuencia, (X, d) es completo si, y sólo si (X, g) es completo.

Como bien mencionamos anteriormente, dado un espacio métrico (X, d) , la colección \mathcal{T}_d consta solamente de los subconjuntos abiertos de X . Sin embargo, el complemento de un abierto no necesariamente es abierto. Esto da paso a la siguiente definición.

Definición 1.11. Un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) se dice que es cerrado si, y sólo si $X \setminus A \in \mathcal{T}_d$.

De acuerdo a esta definición, los conceptos de conjuntos abiertos y cerrados son duales. Comprender esta dualidad es importante porque muchos de los conceptos y resultados relacionados con conjuntos abiertos pueden escribirse en términos de conjuntos cerrados gracias a las leyes de De Morgan para conjuntos.

Se sabe que conjunto $\overline{B(x, r)} := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ con $x \in X$ y $r > 0$ es un conjunto cerrado. A dicho conjunto se le conoce como *entorno cerrado* con centro en x y de radio r . A

la colección de entornos cerrados con centro en x , denotado por $\overline{B(x)}$, se conoce como *base de entornos cerrados alrededor* de x en X .

Cuando tenemos un espacio métrico (X, d) y un subconjunto E de X , podemos definir los puntos que están adheridos a E de la siguiente manera.

Definiciones 1.12. (1) Sea E un subconjunto de un espacio métrico (X, d) , se dice que $x \in X$ es *punto límite* o de *acumulación* de E si para cada vecindad V de x en (X, d) contiene algún punto de E diferente de x . Es decir, x es un punto de acumulación de E si $V \cap E \setminus \{x\} \neq \emptyset$ para cada $V \in \mathcal{V}(x)$.

(2) Al conjunto de puntos de acumulación se le conoce como *conjunto derivado* de E y se denota por $\text{der}(E)$.

(3) A los puntos de E que no son de acumulación se les conoce como *puntos aislados*.

Hay una relación estrecha entre los puntos de acumulación y las sucesiones de conjuntos, esta es que podemos caracterizar a los puntos de acumulación mediante sucesiones y se enuncia como sigue.

Proposición 1.13. Sean E un subconjunto de un espacio métrico (X, d) y $x \in X$. Entonces x es un punto de acumulación de E si, y sólo si existe una sucesión no trivial en E que converge a x .

El siguiente resultado es una consecuencia de la proposición anterior.

Corolario 1.14. Si E es un subconjunto cerrado de un espacio métrico (X, d) y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en E que converge al punto x , entonces $x \in E$.

Sea sabe que dado un subconjunto E de un espacio métrico (X, d) , $\text{der}(E)$ es cerrado. Un conjunto en el que todos sus puntos son de acumulación, es decir, $E = \text{der}(E)$, se dice que es un conjunto *perfecto*. En espacios topológicos, a los conjuntos perfectos se les define como los conjuntos que son cerrados y todos sus puntos son de acumulación porque no necesariamente el derivado de un conjunto es cerrado.

Por otro lado, gracias a una equivalencia, algunos autores definen a los conjuntos cerrados como aquellos que contienen a su derivado. Obsérvese que es posible caracterizar a los conjuntos cerrados como la unión del conjunto con su derivado, en base esta idea, al igual que los conjuntos abiertos, podemos generar conjuntos cerrados, como sigue.

Definición 1.15. Sea E un subconjunto de un espacio métrico (X, d) . La *cerradura* de E es el conjunto $\text{cl}(E) := E \cup \text{der}(E)$.

Se puede pensar que tanto los puntos de E como los de $\text{der}(E)$ son los únicos puntos de X que parecen estar “pegados” a E , es por esta razón que a los puntos de la cerradura también se les conoce como *puntos de adherencia* de E . Además, $\text{cl}(E)$ es cerrado, mediante dualidad podemos reescribir las propiedades del interior de un conjunto de la Proposición 1.5 en términos de la cerradura de un conjunto.

En consecuencia, si V es una vecindad de x en un espacio métrico (X, d) , entonces $\text{cl}(V)$ es cerrado, además sigue siendo una vecindad de x . A el conjunto $\text{cl}(V)$ se le conoce como *vecindad cerrada* de x en X y a la colección de vecindades cerradas de x , denotemos por $\overline{\mathcal{V}(x)}$, se le llama *sistema de vecindades cerrado* de x en X .

Existe una forma de caracterizar a los puntos de adherencia de un conjunto E mediante vecindades y al mismo mediante sucesiones, como sigue:

Proposición 1.16. Sean (X, d) un espacio métrico y E subconjuntos de X . Entonces, los siguientes incisos son equivalentes:

- (a) $x \in \text{cl}(E)$.
- (b) Todo subconjunto abierto que contiene a x tiene intersección no vacía con E .
- (c) Existe una sucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en E que converge a x .

Recordemos que dados (X, d) un espacio métrico y $E \subset X$. Un punto $x \in X$ es un *punto frontera* de E si cualquier vecindad V de x satisface $V \cap E \neq \emptyset$ y $V \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$. El conjunto de puntos frontera de E se llama *frontera* de E , denotado por $\text{fr}(E)$.

Los conjuntos frontera cumplen las siguientes propiedades.

Proposición 1.17. Para subconjuntos E, A y B de un espacio métrico (X, d) son ciertas las siguientes propiedades:

- (a) $\text{fr}(\emptyset) = \emptyset$.
- (b) $\text{fr}(E) = \text{fr}(X \setminus E)$.
- (c) $\text{fr}(\text{fr}(E)) \subseteq \text{fr}(E)$.
- (d) $\text{fr}(A \cap B) \subseteq [\text{cl}(A) \cap \text{fr}(B)] \cup [\text{fr}(A) \cap \text{cl}(B)]$.
- (e) $\text{cl}(E) = E \cup \text{fr}(E)$.
- (f) $\text{int}(E) = E \setminus \text{fr}(E)$.

Se dice que un conjunto E de un espacio métrico (X, d) es *fronterizo* si $\text{int}(E) = \emptyset$, de manera equivalente se dice que es fronterizo si $E = \text{fr}(E)$.

Se sabe que en \mathbb{R} con la topología usual se satisface que para cada par $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, existe un $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$. Esta propiedad se conoce como densidad de \mathbb{Q} en \mathbb{R} y se dice que \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} . Esta idea se generaliza a subconjuntos de espacios métricos y se extiende a espacios topológicos. Formalmente se define a los conjuntos densos de la siguiente manera.

Definición 1.18. Un subconjunto D de un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es *denso* en X si $\text{cl}(D) = X$.

Intuitivamente un subconjunto D es denso en un espacio topológico X si dado un punto x de X es posible encontrar puntos de D tan “ceranos” a x como queramos. Esto último es cierto por la Proposición 1.16(b).

Funciones

Intuitivamente, una función f definida sobre un espacio topológico X y con valores en otro espacio Y , es continua en un punto $x_0 \in X$ si manda puntos cercanos a x_0 en puntos cercanos a $f(x_0)$. Si (X, d_X) y (Y, d_Y) son espacios métricos y si $x_0 \in X$ y $f : X \rightarrow Y$ es una función, entonces diremos que f es *continua* en x_0 si dado cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ siempre que $d_X(x, x_0) < \delta$. Una función $f : X \rightarrow Y$ entre espacios métricos es *continua* en X , o simplemente continua, si f es continua en cada punto x de X .

Podemos expresar el concepto función continua entre espacios métricos usando la noción exclusiva de conjunto abierto como sigue.

Teorema 1.19. *Una función $f : X \rightarrow Y$ es continua en el punto $x \in X$ si, y sólo si para cada abierto A que contiene a $f(x)$, existe un abierto B que contiene a x tal que $\text{Im}_f(B) \subseteq A$.*

A partir del Teorema 1.19 se extiende el concepto de continuidad de una función a espacios topológicos. Además, cuando f es continua y tiene inversa continua se dice que la función f es un *homeomorfismo* entre espacios topológicos. Si existe un homeomorfismo entre espacios topológicos X y Y , entonces se dice X y Y son homeomorfos, denotamos $X \cong Y$. Cuando dos espacios topológicos X y Y son homeomorfos, se consideran como objetos equivalentes en la clase de espacios topológicos, y podemos intercambiar uno por otro en nuestros discursos y argumentos sin que las conclusiones se alteren. Como se mencionó, ellos son el mismo objeto topológico ya que la estructura topológica de uno se copia con precisión sobre la estructura del segundo por medio de homeomorfismo. Así, se dice que la topología es el estudio de las propiedades que se preservan bajo homeomorfismos.

Cabe mencionar que en ese teorema se usa la notación $f[B]$ para denotar al conjunto que contiene las imágenes $f(x)$ para cada punto $x \in B$, dicho conjunto se llama *imagen* de B bajo f . La notación es válida, pues la función f es bien definida en todo X y si B es un subconjunto de X , entonces la función f es bien definida en B . Cabe aclarar al lector que esta notación es utilizada por algunos autores (véase [4]); sin embargo, nosotros usaremos la notación $\text{Im}_f(B)$ para denotar la imagen de un subconjunto B de X bajo f .

Por otro lado, si X y Y son espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ es una función entre espacios métricos. Podemos caracterizar la continuidad mediante sucesiones como: *Sea $x_0 \in X$. Entonces f es continua en x_0 si sólo si para cada una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X convergente a x_0 se satisface que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ en Y es convergente a $f(x_0)$.*

Como se mencionó anteriormente, si $x_0 \in X$ y $f : X \rightarrow Y$ es continua en x_0 . Entonces dado $\epsilon_0 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon_0$ siempre que $d_X(x, x_0) < \delta$. Ahora bien, es claro que δ depende de ϵ_0 , pero también es cierto que, en general, δ depende de x_0 . Por lo que no podemos decir que δ es invariante para cada valor x_0 de X para un ϵ_0 elegido.

Un concepto importante y más fuerte que la continuidad antes mencionada es la *continuidad uniforme*, y se define como sigue.

Definición 1.20. *Una función $f : X \rightarrow Y$ entre espacios métricos es *uniformemente continua* en X si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\rho(f(x), f(y)) < \epsilon$, para cada $x, y \in X$ tales que $d(x, y) < \delta$.*

A diferencia de la primera continuidad definida, en la continuidad uniforme el δ sólo depende del valor de ϵ y es independiente del punto en cuestión. Es evidente que toda función uniformemente continua en X es continua en X . Sin embargo, el recíproco es falso. Lo cual revela que la continuidad uniforme es más fuerte que el primer tipo de continuidad definido anteriormente.

Por otra parte, nosotros queremos definir la continuidad y la continuidad uniforme sobre un subconjunto E de X . Para hacerlo definiremos el concepto de *subespacio métrico*, en esencia un subespacio métrico es un espacio métrico que vive dentro de otro. Para definirlos necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 1.21. *Supongamos que E es un subconjunto de un espacio métrico (X, d_X) y sea $d_{|_E} : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $d_{|_E}(x, y) := d_X(x, y)$ para cada $x, y \in E$. Entonces $(E, d_{|_E})$ es un espacio métrico, además dado un subconjunto F de $(E, d_{|_E})$ es abierto si, y sólo si existe un abierto A en (X, d_X) tal que $F = E \cap A$.*

En este resultado se enuncia que dado un subconjunto E de X se puede construir un espacio métrico en el cual la métrica de E es la misma que la de X solo que restringida a elementos de E . A la métrica $d_{|_E}$ definida en la proposición anterior se le llama *métrica heredada* por X . Además, la Proposición 1.21 nos caracteriza a los abiertos del nuevo espacio métrico $(E, d_{|_E})$. Así, se define formalmente a los subespacios métricos de la siguiente forma.

Definición 1.22. Sean E es un subconjunto de un espacio métrico (X, d_X) y $d_E : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $d_E(x, y) := d_X(x, y)$ para cada $x, y \in E$. Diremos que el espacio (E, d_E) es un *subespacio métrico* (o simplemente *subespacio*) de X .

De esta manera, decimos que una función $f : E \subseteq (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ es continua en un subconjunto E si lo es en el sentido de espacios métricos, viendo a E como espacio métrico con la métrica heredada $d_{|_E}$. De manera análoga, definimos la continuidad uniforme de un subconjunto E de X .

Como ya mencionamos anteriormente, un espacio métrico X con la topología inducida por la métrica d es un espacio topológico. De acuerdo a la Proposición 1.21, podemos definir a la colección de abiertos en $(E, d_{|_E})$ como:

$$\mathcal{T}_{|_E} := \{E \cap A : A \in \mathcal{T}_d\}$$

En general, para cada subconjunto E de un espacio topológico (X, \mathcal{T}) a la colección $\mathcal{T}_{|_E}$ se le conoce como *topología relativa* en E respecto a (X, \mathcal{T}) . Así, $\mathcal{T}_{|_E}$ es la topología relativa para el espacio métrico E respecto a X . Además, esta topología es generada por la métrica heredada $d_{|_E}$.

Se esperaría que los subespacios métricos hereden propiedades de los espacios métricos donde están contenidos; no obstante, esto no necesariamente ocurre. Por ejemplo, no podemos decir que si un espacio es completo, entonces todo subespacio métrico es también completo. Sin embargo, hay condiciones para que la completitud se herede, veamos la siguiente afirmación.

Afirmación 1.23. *Sea (X, d) un espacio métrico completo y E un subconjunto X . Entonces, $(E, d_{|_E})$ es un espacio completo si, y sólo si E es cerrado en X .*

En \mathbb{C} muchos de los resultados de analiticidad e integración se extienden a una clase de conjuntos abiertos que, geoméricamente hablando, tienen “huecos” ya que aparecen puntos donde no es posible derivar (como en las funciones racionales). A esta clase de conjuntos se les llama *dominios* o *regiones*. Para definir a los dominios empecemos por ver qué es un espacio.

Definición 1.24. Un espacio métrico (X, d) es *conexo* si los únicos subconjuntos de X en ser tanto abiertos como cerrados son \emptyset y X .

Intuitivamente el concepto de conexidad es la de ser “una sola pieza”. Por otro lado, algunos autores definen a los espacios conexos como aquellos espacios en los que dados dos puntos podemos unirlos mediante una poligonal, o bien, que son espacio que no es posible separarlos en dos abiertos ajenos y no vacíos. Los espacios conexos son de gran importancia por ser muy ricos en sus propiedades. De manera natural, se dice que un conjunto es *conexo* en X si como subespacio es un espacio conexo. Por otra parte, se cumple que si $D \subseteq E \subseteq X$ se tiene que D es conexo en $(E, d|_E)$ si, y sólo si D es conexo en (X, d) . Un subconjunto D de (X, d) es una *componente* de X si es un conjunto conexo maximal de X . Esto es, D es un conexo y no hay un conjunto conexo de X que contenga propiamente a D . Ahora, definimos lo que es una región como sigue.

Definición 1.25. Sea subconjunto D de un espacio métrico (X, d) . Se dice que D es una *región* o un *dominio* en X si es abierto y conexo.

El siguiente resultado nos menciona el comportamiento de las funciones continuas sobre conexos.

Teorema 1.26. Si (D, d_D) es un espacio conexo y $f : (D, d_D) \rightarrow (X, d_X)$ es una función continua, entonces $f[D]$ es conexo en X .

Compacidad

Los conjuntos compactos juegan un papel importante en la teoría de familias normales porque al definir la convergencia sucesiones en el espacio de funciones holomorfas basta con que la sucesión sea uniformemente convergente en cada compacto del abierto sobre el que se define el espacio de funciones holomorfas. De ahí, la importancia de incluirlos. Empecemos por definirlos formalmente.

Definiciones 1.27. (1) Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. A la familia $\{G_\alpha\}$ de subconjuntos en X se le llamará *recubrimiento* o *cubierta* de X si se satisface $X = \cup_\alpha G_\alpha$. Si además cada uno de los elementos de $\{G_\alpha\}$ es un subconjunto abierto de X , entonces a $\{G_\alpha\}$ se le llamará *cubierta abierta* de X . Por otro lado, si $\{G_\alpha\}$ es una cubierta de X y $\{F_\beta\}$ es una subcolección de $\{G_\alpha\}$, diremos que $\{F_\beta\}$ es una *subcubierta* de $\{G_\alpha\}$ si $\cup_\beta F_\beta = X$. Un recubrimiento es finito si está formado por una cantidad finita de subconjuntos de X .

(2) Se dice que un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es *compacto* si todo recubrimiento abierto de X admite un subcubierta abierta finita. Es decir, para cada cubierta abierta $\{G_\alpha\}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X = \cup_{k=1}^N G_{\alpha_k}$.

(3) Sea K un subconjunto de X , entonces K es *compacto* si K con la topología relativa $\mathcal{T}|_K$ es un espacio topológico compacto.

(4) Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es *localmente compacto* si para cada $x \in X$ admite un sistema de vecindades compacta. Es decir, cada uno de los elementos del sistema es un subconjunto compacto.

A continuación unos ejemplos.

Ejemplos 1.28. (a) En \mathbb{R} , con la métrica usual, los intervalos cerrados son compactos.

(b) Sea x un punto de un espacio métrico X , la cerradura de una bola abierta $\text{cl}(B(x, r))$, con $r > 0$, es un conjunto compacto.

(c) En \mathbb{R}^n , la familia $V(x) = \{B(x, r) : r > 0\}$, con $x \in \mathbb{R}^n$, es un sistema de vecindades. Entonces, la familia $\bar{V}(x) = \{\bar{B}(x, r) : r > 0\}$ es un sistema de vecindades compacto, por (b). Así, \mathbb{R}^n es un espacio localmente compacto.

Los conjuntos acotados juegan un papel importante en el análisis real porque mediante ellos se puede caracterizar a los conjuntos compactos en \mathbb{R}^n dotado con la métrica euclidiana, por ello incluimos la siguiente definición.

Definición 1.29. Un subconjunto E de un espacio métrico (X, d) es *acotado* si existen $M > 0$ y $x_0 \in X$ tales que $d(x, x_0) \leq M$ para cualesquier $x \in E$.

La siguiente proposición nos permite caracterizar a los subconjuntos compactos de un espacio topológico. La prueba es inmediata, pues se utiliza la topología relativa de un conjunto en un espacio topológico.

Proposición 1.30. Sea K un subconjunto de un espacio topológico (X, \mathcal{T}) . Entonces, K es compacto si, y sólo si para toda colección $\{G_\alpha\}$ de abiertos en X tal que $K \subset \cup_\alpha G_\alpha$, existe una subcolección finita de $\{G_{\alpha_k}\}_{k=1}^N$, para algún $N \in \mathbb{N}$, tal que $K \subset \cup_{k=1}^N G_{\alpha_k}$.

Al igual que la completitud, la propiedad de compacidad no se hereda, el siguiente teorema se enuncia las condiciones para heredar la compacidad.

Teorema 1.31. Todo subconjunto cerrado C de un espacio topológico compacto (X, \mathcal{T}) es compacto.

Sin embargo, el recíproco no es válido en general. No obstante, en espacios métricos el inverso al teorema anterior es válido y no solo eso, se tiene que el conjunto es acotado. Veamos el siguiente teorema.

Teorema 1.32. Si K es un subconjunto compacto de un espacio métrico (X, d) , entonces K es cerrado y acotado.

En general, si un subconjunto de un espacio métrico es cerrado y acotado no necesariamente es compacto porque que si $X = \mathbb{R}$ y definimos la métrica $d(x, y) := \min\{1, |x - y|\}$. Luego, $C = [0, +\infty)$ es un conjunto cerrado y acotado bajo esta métrica, pero no es compacto si tomamos como cubierta a $F = \{(n - 1, n) : n \in \mathbb{N}\}$ no es posible encontrar una subcobertura que contenga a C . Sin embargo, si tomamos a \mathbb{R} con la métrica usual se verifica que el recíproco es verdadero. Es decir, el Teorema 1.32 y su recíproco son válidos.

Anteriormente se mencionó que todo subconjunto cerrado en un espacio métrico completo es compacto. Sin embargo, los conjuntos compactos satisfacen la propiedad de completitud sin

necesidad de estar en un espacio completo. En general, todo espacio métrico compacto es un espacio completo. No obstante, la suficiencia es falsa. Como consecuencia, si X es compacto, entonces todo conjunto infinito tiene límite en X . Por otra parte se cumple que si $K \subseteq E \subseteq X$, entonces K es compacto en $(E, d|_E)$ si, y sólo si K es compacto en (X, d)

Ahora, veremos una manera de caracterizar a los conjuntos compactos de un espacio métrico en general.

Definición 1.33. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $K \subseteq X$, decimos que K es *secuencialmente compacto* si dada una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en K , existe una subsucesión convergente a un punto de K .

Por ejemplo, en \mathbb{R} con la topología usual inducida por la métrica euclidiana, el intervalo $(0, 1)$ no es secuencialmente compacto pues la sucesión $\{1/n\}_{n=2}^{\infty}$ converge a 0, pero $0 \notin (0, 1)$. Aunque $(0, 1)$ no es secuencialmente compacto sí es relativamente compacto porque satisface las condiciones de la siguiente afirmación.

Afirmación 1.34. Un subconjunto K de un espacio métrico (X, d) es relativamente compacto si, y sólo si de toda sucesión de elementos de K se puede extraer una subsucesión convergente en (X, d) (a un elemento no necesariamente en K).

Observación 1.35. De acuerdo con la Afirmación 1.34, todo conjunto secuencialmente compacto A en un espacio métrico (X, d) es relativamente compacto en (X, d) , el recíproco no es verdadero, en general. Entonces, es inmediato que si $\text{cl}(A)$ es secuencialmente compacto, entonces A es relativamente compacto. Por otro lado, suponemos que A es relativamente compacto y si de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ cualesquiera de elementos en $\text{cl}(A)$ se toman sólo los términos de la sucesión que pertenecen a A , entonces construimos una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $a_{n_k} \in A$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Ya que A es relativamente compacto, existe una subsucesión de $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente en (X, d) . Como $A \subseteq \text{cl}(A)$ y por el Corolario 1.14, ésa nueva subsucesión es convergente en $\text{cl}(A)$. Por lo tanto, si A es relativamente compacto, $\text{cl}(A)$ es secuencialmente compacto.

Un resultado importante de los conjuntos secuencialmente compactos es el Lema de Lebesgue y se enuncia como sigue.

Lema 1.36 (Lebesgue). Sean (X, d) un espacio métrico, $K \subseteq X$ un subconjunto secuencialmente compacto y $\{G_\alpha\}$ un recubrimiento abierto de K , entonces existe $r > 0$ tal que para cada $x \in K$ existe α_x de modo que $B(x, r) \subseteq G_{\alpha_x}$, a $r > 0$ se le llama número de Lebesgue del recubrimiento.

El siguiente resultado nos permite caracterizar a los conjuntos compactos mediante subconjuntos secuencialmente compactos de un espacio métrico.

Teorema 1.37 (Heine-Borel-Lebesgue). Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) K es compacto.
- (b) Todo subconjunto infinito de K , tiene un punto de acumulación en K .
- (c) K es secuencialmente compacto.

En \mathbb{R}^n con la métrica usual, se caracteriza a los conjuntos compactos como aquellos que son cerrados y acotados. Este resultado se enuncia como el Teorema de Heine-Borel. El Teorema 1.37 propone una caracterización más general que el Teorema de Heine-Borel pues lo satisfacen todos los espacios métricos. La demostración del Teorema de Heine-Borel-Lebesgue se encuentra en [6] y [15].

De acuerdo con la Observación 1.35 y el Teorema 1.37, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.38. *Sea K un subconjunto de un espacio métrico (X, d) . Entonces, K es relativamente compacto si, y sólo si $\text{cl}(K)$ es compacto.*

Para finalizar esta sección, anteriormente se mencionó que si una función entre espacios métricos es uniformemente continua entonces es continua. Además, se mencionó que el recíproco es falso. El siguiente resultado nos enuncia bajo qué condiciones el recíproco es verdadero.

Teorema 1.39. *Sean K un espacio compacto y $f : (K, d_K) \rightarrow (X, d_X)$ una función entre espacios métricos continua en K , entonces $f[K]$ es un espacio compacto y f es uniformemente continua en K .*

SECCIÓN 1.2

El plano complejo como espacio métrico

Como sabemos el conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ con la métrica euclidiana es un espacio métrico, con las operaciones de adición y producto por escalares definidas por:

$$\begin{aligned}(x, y) + (a, b) &= (x + a, y + b), \\ \alpha(x, y) &= (\alpha x, \alpha y),\end{aligned}$$

donde $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Es un espacio vectorial de dimensión 2 bajo \mathbb{R} .

En \mathbb{R}^2 definamos el siguiente producto:

$$(x, y) \cdot (a, b) = (xa - yb, xb + ya),$$

con esta operación (\mathbb{R}^2, \cdot) es un grupo conmutativo con elemento neutro $(1, 0)$ es el neutro para el producto, y cada (x, y) , no ambos x, y nulos, admite un inverso de la siguiente forma:

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Por ende $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ es un campo al que llamaremos *campo de los números complejos*, y lo identificaremos por \mathbb{C} .

Ahora, definimos el monomorfismo de campos $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ como $\phi(x) = (x, 0)$, con esto podemos identificar a \mathbb{R} con una parte de \mathbb{C} y escribiremos $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$, haciendo la identificación $a = (a, 0)$.

Este hecho nos permite tener una representación de los números complejos vistos como un espacio vectorial sobre el campo de los números reales,

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

Si denotamos a $i := (0, 1)$, tendremos que

$$(x, y) = x + iy.$$

Lo que nos permite identificar a \mathbb{C} de la siguiente forma:

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\},$$

con esta nueva notación podemos definir un isomorfismo $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde $\Phi(x + iy) = (x, y)$, y podemos concluir que \mathbb{C} está identificado con \mathbb{R}^2 , de esta manera \mathbb{C} recibe el nombre de *plano complejo*. Del isomorfismo es claro que para cada $z \in \mathbb{C}$ hay un único punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, donde el número x se llama *parte real* de z , y se denota por $\operatorname{Re}(z)$, y a y se llama *parte imaginaria* de z , y se denota por $\operatorname{Im}(z)$. Con este ajuste, el plano cartesiano se le llama *plano complejo*, donde el eje x es el *eje real* y el eje y es el *eje imaginario*.

En general, para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definimos el punto $\bar{z} = x - iy$ en plano llamado *conjugado* de z . Para $z, w \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad \overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}, \text{ con } z \neq 0.$$

También se sigue que

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

De acuerdo a la identificación anterior definimos lo que se conoce como módulo de un número complejo.

Definición 1.40. Sea $z \in \mathbb{C}$, se define su *módulo* o *valor absoluto* por

$$|z| := \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2}.$$

Ahora podemos dotar a \mathbb{C} de una estructura de espacio métrico.

Considérese la siguiente función distancia $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $d(z, w) := |z - w|$ para cada $z, w \in \mathbb{C}$. Esta métrica se conoce como la métrica euclidiana o usual en \mathbb{C} . Así, (\mathbb{C}, d) forma un espacio métrico. En este caso se define $D(z, r) := B(z, r)$ con $z \in \mathbb{C}$ y para algún $r > 0$ y se llama *disco abierto* en \mathbb{C} . Todo abierto se puede expresar como unión de discos abiertos.

Los dominios o regiones, como bien se mencionó en la Sección 1.1, son conjuntos que son abiertos y conexos. Los conexos son conjuntos que no son separados esto es que podemos hallar un camino dentro del conjunto por el cual unir dos puntos del mismo.

De acuerdo con el Teorema 1.37 los conjuntos compactos son conjuntos cerrados y acotados, esto es, conjuntos en los que puedes hallar un disco que lo cubra y que tiene complemento abierto, una propiedad particular de \mathbb{R}^n , este resultado se le conoce simplemente como Teorema de Heine-Borel. Además, \mathbb{C} es un espacio métrico completo y localmente compacto.

Como comentario, ya que podemos generar un espacio topológico a partir de un espacio métrico y que (\mathbb{C}, d) no es un espacio compacto, aplicando el Teorema de Alexandroff (véase [4] y [18]) podemos construir una compactación de \mathbb{C} agregándole un elemento que no esté en el conjunto, en este caso ∞ . De esta manera el plano complejo se extiende. Al conjunto $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se llama *plano complejo extendido*. Además, se tiene que la esfera de Riemann (esfera unitaria) S^2 con la topología relativa de \mathbb{R}^3 es homeomorfa a \mathbb{C}_∞ con la topología que se define en el Teorema de Alexandroff mediante *proyección estereográfica*, obteniendo el homeomorfismo $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow S^2$ definido por:

$$f(z) := \begin{cases} \left(\frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}, \frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \right) & \text{si } z \in \mathbb{C}; \\ (0, 0, 1) & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

No es posible generar la topología del plano extendido \mathbb{C}_∞ mediante una métrica euclidiana. Porque si existiera una métrica $d : \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{R}^+$ que genere a la topología de \mathbb{C}_∞ . En particular se tendría que $d(n, \infty) \rightarrow 0$ si, y sólo si $n \rightarrow \infty$, pero $n = d(n, 0) \leq d(0, \infty) + d(\infty, n) \leq d(0, \infty) + M$ para todo $n \geq n_0$, de modo que el conjunto \mathbb{N} estaría acotado superiormente, y esto es una contradicción.

Dado que f es un homeomorfismo de espacios compactos podemos construir una métrica para \mathbb{C}_∞ a la que llamaremos *métrica cordal* y está definida de forma explicita como:

$$\chi(z, w) := \begin{cases} \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} & \text{si } z, w \in \mathbb{C}; \\ \frac{2}{1+|z|^2} & \text{si } z \in \mathbb{C}, w = \infty; \\ 0 & \text{si } z = w = \infty. \end{cases}$$

SECCIÓN 1.3

Funciones de variable compleja y continuidad

Una función compleja de variable compleja es una función $f : G \rightarrow H$, donde G y H son subconjuntos de \mathbb{C} . De manera análoga a \mathbb{R} , G representa el dominio de f y H el codominio

de f , denotamos $\text{Cod}[f]$. Nuestro interés recae en funciones cuyo dominio es una región en \mathbb{C} y el codominio es \mathbb{C} mismo. Es decir, funciones que toman valores de una región sobre \mathbb{C} .

A partir de este momento el termino dominio se usará en el sentido de un conjunto conexo y abierto, salvo que se diga lo contrario, se le pide al lector poner atención en ésto, ya que se coincide con la terminología usada por otros autores.

Sean G un subconjunto de \mathbb{C} y $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ una función de valores complejos en G , entonces para cada $z \in G$ existe un único $w \in \mathbb{C}$ tal que $z \mapsto w$, de esta manera decimos que w es la imagen de z y denotamos $w := f(z)$. El conjunto de todas las imágenes $\text{Im}_f(G) = \{f(z) : z \in G\}$ se le llama *conjunto imagen* en G bajo f o simplemente *imagen* en G . Por otro lado, si $H \subseteq \mathbb{C}$ tal que $H \cap \text{Im}_f(G) \neq \emptyset$, entonces existe al menos un $z \in G$ tal que $f(z) \in H$, por lo que podemos definir el conjunto $\text{Pr}_f(H) := \{z \in G : f(z) \in H\}$, a este conjunto se le llama *conjunto preimagen* de H bajo f o simplemente *preimagen* de H . Es claro que $\text{Im}_f(G) \subseteq \mathbb{C}$ y $\text{Pr}_f(H) \subseteq G$ para cada $H \subseteq \mathbb{C}$.

De acuerdo a la identificación, mencionada en la Sección 1.2, se escribe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, para $z = x + iy \in G$, donde $u(x, y), v(x, y)$ son funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} .

Definición 1.41. Dados una función compleja $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ y un punto $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$. Decimos que f tiene *límite* $w_0 \in \mathbb{C}$ en z_0 si, y sólo si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se satisface $|f(z) - w_0| < \epsilon_0$ siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$.

Como se mencionó en la caracterización del Teorema 1.19. Se dice que una función de variable compleja f es *continua* en $z \in G$ si, y sólo si para cada abierto U de \mathbb{C} que contiene a $f(z)$, existe un abierto V de \mathbb{C} que contiene a z tal que $\text{Im}_f(V) \subseteq U$. Adicionalmente se tiene la siguiente definición.

Definición 1.42. Sean G un subconjunto en \mathbb{C} y $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ una función, f es *continua* en G si para cada abierto U de \mathbb{C} , existe un abierto V de \mathbb{C} tal que $\text{Pr}_f(U) = G \cap V$.

Obsérvese que en la Definición 1.42 se enuncia que una función de valores complejos en G es continua en G si todo abierto de \mathbb{C} tiene preimagen abierta en G (recordemos que G es un subespacio métrico de \mathbb{C}). Además si U es un abierto en \mathbb{C} que no intersecta con G , entonces $\text{Pr}_f(U) = \emptyset$, pero por el Teorema ??, el conjunto vacío es un abierto en G . Así, nuestra afirmación anterior tiene sentido. De manera equivalente, se dice que una función f es continua si lo es en todo punto de G . Como \mathbb{C} es un espacio métrico con la métrica usual, definimos la continuidad uniforme en un subconjunto de \mathbb{C} .

Definición 1.43. Sea G un subconjunto en \mathbb{C} y $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ una función, se dice que f es uniformemente continua en G si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(w)| < \epsilon$, para cada $z, w \in G$ tales que $|z - w| < \delta$.

De acuerdo con el Teorema 1.39, relacionamos la continuidad de conjuntos con la continuidad uniforme y escribimos su versión en \mathbb{C} .

Teorema 1.44. Sea $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ una función de valores complejos en K . Si f es continua en K y K es compacto en \mathbb{C} , entonces $\text{Im}_f(K)$ es compacto en \mathbb{C} y, además, f es uniformemente continua en K .

SECCIÓN 1.4

Sucesiones y Series de Funciones Complejas

Retomando las ideas del Sección 1.1 sobre convergencia de sucesiones en espacios métricos, se dice que una sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a z_0 si para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - z_0| < \epsilon$, para cada $n \geq N$. Se dice que z_0 es el *límite* de la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Escribimos $z_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, porque el límite es único. De la identificación, vista en la Sección 1.2, una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números complejos es convergente si, y sólo si las sucesiones de números reales $\{\operatorname{Re}(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\operatorname{Im}(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ son convergentes.

De la Definición 1.10 de la Sección 1.1, se dice que una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$ se cumple $|z_m - z_n| < \epsilon$. Como en \mathbb{R} toda sucesión de Cauchy es convergente, se concluye que una sucesión de Cauchy en \mathbb{C} es convergente. Por lo que \mathbb{C} con la métrica euclidiana forman un espacio métrico completo. Por otro lado, al igual que \mathbb{R}^n con la métrica usual, en \mathbb{C} se satisface el Teorema de Bolzano-Weierstrass, el cual se enuncia como sigue.

Teorema 1.45 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sucesión acotada en \mathbb{C} contiene una subsucesión convergente.*

De manera análoga a la sucesión de números complejos, una sucesión de funciones complejas definidas en un conjunto G es una colección $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} := \{f_n : G \rightarrow \mathbb{C} : n \in \mathbb{N}\}$. Si la sucesión de funciones converge en cada punto $z \in G$, se dice que la sucesión converge *puntualmente* en G , y la función $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$, para cada $z \in G$, es llamada *función límite* de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, denotamos por $f_n \xrightarrow{p} f$.

Una sucesión de funciones complejas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas en un subconjunto G de \mathbb{C} se dice que *converge uniformemente* en G a una función f , denotamos por $f_n \xrightarrow{u} f$, si para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se cumple $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ para cada $z \in G$.

Evidentemente convergencia uniforme implica convergencia puntual. El siguiente criterio nos permite verificar si una sucesión de funciones converge uniformemente.

Teorema 1.46 (Criterio de Cauchy). *Una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones complejas, definidas en G , converge uniformemente en G si sólo si para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m, n \geq N$ se cumple $|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$, para cada $z \in G$.*

Muchas veces preguntamos sobre las propiedades que satisface la función límite de una sucesión de funciones, entre ellas la continuidad. El siguiente Teorema resuelve esa pregunta.

Teorema 1.47. *Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones complejas continuas en G que converge uniformemente en G a una función f , entonces f es continua en G .*

Gracias al Teorema 1.47 podemos definir el espacio de funciones continuas y acotadas en un subconjunto de \mathbb{C} . Se dice que una función $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ es acotada en G si, y sólo si existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para cada $z \in G$. Extendemos esta definición a una sucesión de funciones como sigue.

Definición 1.48. Una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones complejas, definidas en G , se dice que es *acotada* en G si existe $M > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in G$, se tiene que $|f_n(z)| \leq M$.

Ahora, si G es un subconjunto de \mathbb{C} , el conjunto $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ representa al conjunto de funciones complejas definidas en G que son continuas y acotadas. La acotabilidad es redundante cuando G es compacto (véase Teorema 1.32), entonces $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ consta de todas las funciones complejas continuas en G .

A cada $f \in \mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ se le asocia una *norma suprema*

$$\|f\| := \sup_{z \in G} |f(z)|. \quad (1.2)$$

A partir de ella se define la métrica $\varphi : \mathcal{C}(G, \mathbb{C}) \times \mathcal{C}(G, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\varphi(f, g) := \|f - g\|$ para cada $f, g \in \mathcal{C}(G, \mathbb{C})$. De aquí, $(\mathcal{C}(G, \mathbb{C}), \varphi)$ es un espacio métrico.

Así, decimos que una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $(\mathcal{C}(G, \mathbb{C}), \varphi)$ converge a $f \in (\mathcal{C}(G, \mathbb{C}), \varphi)$ si, y sólo si para cada $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se cumple $\varphi(f_n, f) < \epsilon$ siempre que $n \geq N$.

El siguiente Teorema nos relaciona la convergencia uniforme de una sucesión de funciones complejas antes definida con las sucesiones convergentes en $(\mathcal{C}(G, \mathbb{C}), \varphi)$.

Teorema 1.49. *Una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ es convergente si, y sólo si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en G .*

Aplicando el Criterio de Cauchy (véase Teorema 1.46), el Teorema 1.47 y el Teorema 1.49, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 1.50. *$(\mathcal{C}(G, \mathbb{C}), \varphi)$ es un espacio métrico completo.*

De esta manera queda estipulado que toda sucesión de funciones continuas y acotadas en un conjunto G es convergente si, y sólo si es de Cauchy en $(\mathcal{C}(G, \mathbb{C}), \varphi)$.

Ahora, definiremos a las funciones analíticas, estas funciones son de suma importancia en este trabajo porque el objetivo es estudiar a las funciones trascendentes enteras, dichas funciones son en esencia analíticas. Para ello, empecemos por estudiar a las series de funciones.

Dada una sucesión de funciones complejas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, definidas en G , la suma $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se llama *serie de funciones compleja*. Para algún natural N , la suma $\sum_{n=1}^N f_n$ es la N -ésima suma parcial o suma parcial. Si definimos $S_N := \sum_{n=1}^N f_n$, S_N es una función compleja con dominio G , entonces construimos la sucesión $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ de sumas parciales de funciones.

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión infinita de funciones definidas en $G \subseteq \mathbb{C}$. Si $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ converge en un punto $z \in G$, entonces se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge en z y se denota $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$. Si $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ converge en cada punto de G , entonces decimos que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge en G .

Obviamente, el tipo de convergencia descrito arriba es una convergencia puntual. Ahora, Recordemos que una serie de funciones complejas $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absolutamente en G si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ converge puntualmente en G . Además, si una serie de funciones es absolutamente convergente, entonces la serie es convergente puntualmente.

Existen varios criterios para determinar la convergencia de series que pueden consultarse en [13].

En esencia decimos que una serie converge uniformemente si la respectiva sucesión de sumas parciales converge uniformemente.

Definición 1.51. Sean $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en \mathbb{C} y $z_0 \in \mathbb{C}$. La serie de funciones

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

es llamada *serie de potencias*.

En seguida enunciamos el siguiente resultado que abre paso al estudio de las funciones analíticas.

Teorema 1.52 (Convergencia de series de potencias). *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ una serie de potencias. Existe un único número $R \geq 0$, posiblemente $+\infty$, llamado radio de convergencia, tal que si $|z - z_0| < R$, entonces la serie converge, y si $|z - z_0| > R$, entonces la serie diverge. Además, la convergencia es uniforme y absoluta sobre cada disco cerrado en $D(z_0, R)$.*

Definición 1.53. Sea G un subconjunto abierto en \mathbb{C} . La función $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es *analítica* si para cualesquiera $z_0 \in G$, existe $r > 0$ con $B(z_0, r) \subseteq G$ y una serie de potencias (centrada en z_0) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ que converge en $B(z_0, r) \subseteq G$ tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ para cada $z \in B(z_0, r)$.

Es fácil verificar que las funciones e^z y $\text{sen}(z)$ son analíticas para cada $z \in \mathbb{C}$. Una función que es analítica en todo \mathbb{C} se llama *función entera*.

SECCIÓN 1.5

Funciones Holomorfas

El concepto de *función holomorfa* es el análogo de función diferenciable en \mathbb{R} . Más adelante veremos que las funciones holomorfas y las analíticas (definidas en la Sección 1.4) son las mismas, por esta razón éstos conceptos se utilizan indistintamente en muchos resultados y enunciados de algunos autores.

Sea $G \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. La función $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es *diferenciable*, en el sentido complejo, en $z_0 \in G$ si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. El límite se denota por $f'(z_0)$. Se dice que f es diferenciable en G si es diferenciable para todo $z \in G$. Si una función $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en $w \in G$, entonces es continua en w . Además, una función $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es *holomorfa* en G si es diferenciable para todo $z \in G$.

Si f es holomorfa en G , entonces la función $f' : G \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $z \mapsto f'(z)$ para cada $z \in G$ es bien definida. A la función f' se llama *función derivada* o la *derivada* de f . También se denota por df/dz . Además, si f es una función holomorfa en algún subconjunto abierto G de \mathbb{C} , entonces la función $1/f$ es holomorfa en puntos $z \in G$ tales que $f(z) \neq 0$ y, además,

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{1}{f^2}.$$

Cuando f y g son holomorfas en algún abierto G de \mathbb{C} y para algunos $a, b \in \mathbb{C}$ constantes se satisface que la linealidad $af + bg$ es holomorfa en G y además

$$(af + bg)' = af' + bg'.$$

Por otra parte, tenemos la fórmula de Leibniz

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Al igual que en \mathbb{R} podemos hallar la derivada de la composición de dos funciones, este resultado se conoce como la *regla de la cadena* y se enuncia como sigue.

Teorema 1.54 (Regla de la cadena). Sean $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ y $g : H \rightarrow \mathbb{C}$ funciones holomorfas en G y H , respectivamente, y supongamos que $\text{Im}_f(G) \subseteq H$, entonces la función $g \circ f$ también es holomorfa y

$$\frac{d}{dz}(g \circ f) = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dz}$$

La prueba a este Teorema puede consultarse en [13].

Recordemos que la función $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ de valores complejos sobre G puede escribirse como

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

donde $z = x + iy \in G$, entonces la *matriz jacobiana* de f se define como la matriz de las derivadas parciales dada por

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix}$$

en cada punto $(x, y) \in G$. De análisis real, tenemos que f es diferenciable si, y sólo si tiene derivadas parciales continuas. En \mathbb{C} se necesita una condición adicional. Los siguientes dos resultados relacionan la holomorfía y las derivadas parciales.

Teorema 1.55 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann). Sean G un conjunto abierto en \mathbb{C} y $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces, si $f(z) = \text{Re}(f(z)) + i\text{Im}(f(z)) = u(x, y) + iv(x, y)$, se tiene

$$\partial_x u = \partial_y v \quad y \quad \partial_y u = -\partial_x v \tag{1.3}$$

Las Ecuaciones (1.3) son llamadas *Ecuaciones de Cauchy-Riemann*.

La prueba del Teorema 1.55 anterior puede revisarse en [1]. El recíproco a dicho Teorema es falso. Para que sea verdadero se agrega una hipótesis que las derivadas parciales sean continuas y que satisfacen las Ecuaciones (1.3). Así, el resultado se enuncia como sigue.

Teorema 1.56. Sean G un conjunto abierto en \mathbb{C} y $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. La función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa en G si las cuatro derivadas parciales $\partial_x u$, $\partial_y u$, $\partial_x v$, $\partial_y v$ existen, son continuas y satisfacen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann en cada punto de G .

De lo anterior, si f es holomorfa en G , entonces para cada $z = x + iy \in G$ escribimos

$$f'(z) = \partial_x u + i\partial_x v = \partial_y v - i\partial_y u.$$

Ahora, si tomamos una serie de potencias convergente alrededor de un punto $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

donde sea $R > 0$ su radio de convergencia, entonces f es holomorfa en el disco $D(z_0, R)$ y

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1},$$

donde el radio de convergencia para ésta serie también es R . Más aún, los coeficientes a_n están dados por $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$. En consecuencia podemos decir que las funciones analíticas en un abierto G son holomorfas en G . Resulta que el recíproco de la última implicación es verdadero, por lo que las funciones analíticas y las holomorfas son las mismas. De manera formal enunciamos la equivalencia como sigue.

Teorema 1.57. *Sea G un subconjunto abierto de \mathbb{C} . Entonces, una función f es analítica en G si, y sólo si f es holomorfa en G .*

Véase [14] para la demostración del Teorema 1.57. De ahora en adelante las palabras holomorfa y analítica se usarán indistintamente. Con esto en mente se enuncia uno de los resultados más importantes de la variable compleja.

Teorema 1.58 (Convergencia de Weierstrass). *Sean G un abierto en \mathbb{C} y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones analíticas definidas en G . Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en cada compacto de G a una función f , entonces f es analítica en G . Además, la sucesión $\{f_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f^{(k)}$ (derivada de orden k) puntualmente en G y uniformemente en cada compacto de G , para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Observaciones 1.59. (a) En el Teorema 1.58 no se supone convergencia uniforme en todo abierto G porque podemos construir sucesiones que converjan uniformemente en cada compacto de G y no en todo el abierto, véase contraejemplo en [13].

(b) Aunque podemos probar la convergencia puntual, ésta no es suficiente para garantizar la analiticidad de la función límite, ya que aplicando el Teorema de Runge, de la teoría de la aproximación racional de funciones, se puede construir una sucesión de polinomios la cual converja puntualmente a una función discontinua, véase contraejemplo en [9].

La prueba de Teorema 1.58 depende del Teorema de Morera y del Teorema de la Fórmula Integral de Cauchy, véase su demostración en [14].

Ahora, al igual que el Teorema de Convergencia de Weierstrass, enunciamos el Teorema de Hurwitz que nos relaciona los ceros de un sucesión de funciones analíticas con la función límite.

Teorema 1.60 (Hurwitz). Si una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones analíticas converge uniformemente en cada compacto de G a una función f en G , y si para todo $z \in G$ $f_n(z) \neq 0$, entonces $f(z) \neq 0$ para cada $z \in G$ o f es la función nula en G .

Para cerrar esta sección, de acuerdo el Teorema 1.57, si f es una función holomorfa en G , entonces f puede expresarse como una serie de potencias convergente alrededor de un punto $z_0 \in G$. Es decir,

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad (1.4)$$

A la serie de la Ecuación (1.4) es llamada *serie de Taylor* o *expansión de Taylor* de f alrededor de z_0 . Además, dicha serie es única alrededor de z_0 .

SECCIÓN 1.6

Integración Compleja

Una función compleja con valores en un intervalo cerrado $[a, b]$ de \mathbb{R} es una función $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $h(t) := u(t) + iv(t)$, donde u, v se asumen funciones de variable real continuas en el intervalo cerrado.

Una *curva o contorno continuo* en \mathbb{C} es una función continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, donde $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ se llaman punto inicial y punto final de γ , respectivamente. Se denomina *traza o trayectoria* de la curva a su imagen $\text{Im}_{\gamma}([a, b])$. La curva γ es *continuamente diferenciable*, C^1 , en $[a, b]$ si $u'(t)$ y $v'(t)$ existen en los abiertos (a, b) y son continuas en $[a, b]$. La curva es C^1 a trozos si podemos dividir el intervalo $[a, b]$ en un número finito de subintervalos $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ tales que $\gamma(t)$ es continuamente diferenciable en cada subintervalo cerrado $[a_k, a_{k+1}]$.

Una curva se dice que es *simple* si γ es inyectiva en su intervalo de definición, es decir, la curva no pasa por un mismo punto dos veces. Una curva es *cerrada* si los puntos inicial y final de γ son iguales. Una curva *cerrada simple* es una curva γ tal que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ si, y sólo si $t_1 = t_2$ ó $t_1 = a$ y $t_2 = b$, es decir, cerrada y simple a la vez. Salvo que se diga lo contrario, se asumirá que las curvas son continuas, suaves a trozos y C^1 a trozos.

Definición 1.61. Sean $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva y $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja definida en subconjunto abierto G de \mathbb{C} , donde $\gamma[a, b] \subset G$, definimos la *integral* de f a lo largo de γ como

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Definición 1.62. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un curva cerrada. El índice de γ respecto a $z_0 \notin \text{Im}_{\gamma}([a, b])$ se define por

$$I(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Definición 1.63. Dos curvas cerradas $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow G$ con $G \subset \mathbb{C}$ son *homotópicas* (como curvas cerradas) en G si existe una función continua $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow G$ tal que para cada $s \in [0, 1]$, $t \mapsto H(t, s)$ es una curva cerrada; para $s = 0$ esta curva es igual a γ_1 y para $s = 1$, es igual a γ_2 .

Teorema 1.64 (Cauchy-Goursat). *Si f es analítica en una región G , f' continua sobre y dentro de la curva γ , entonces*

$$\int_{\gamma} f = 0.$$

Teorema 1.65 (Fórmula de la Integral de Cauchy). *Si $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica en G , $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ una curva cerrada homotópica a un punto $z_0 \notin \text{Im}_{\gamma}([a, b])$, entonces*

$$I(\gamma, z_0)f(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Aplicando el Teorema 1.65 se puede demostrar la suficiencia del Teorema 1.57.

Teorema 1.66 (Fórmula Integral de Cauchy para derivadas). *Si $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en G , entonces todas las derivadas de f sobre G existen. Además, para $z_0 \in G$ y cualesquiera curva cerrada γ en G homotópica a un punto en G con $z_0 \notin \text{Im}_{\gamma}([a, b])$, tenemos*

$$I(\gamma, z_0)f^{(k)}(z_0) := \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde $f^{(k)}$ denota la k -ésima derivada de f .

Definición 1.67. Sean G un abierto en \mathbb{C} , $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en G y $a \in G$, definimos $M(f, a, r) := \max\{|f(z)| : z \in C(a, r)\}$, donde $C(a, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$.

Teorema 1.68 (Desigualdad de Cauchy). *Si G es un subconjunto abierto de \mathbb{C} , $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en G , $a \in G$ y $\text{cl}(D(a, r)) \subset G$, entonces*

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} (M(f, a, r)), \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Recordemos que una función f definida y analítica en todo el plano complejo \mathbb{C} se llama función entera.

Teorema 1.69 (Liouville). *Si f es una función entera y existe M , constante, tal que $|f(z)| \leq M$ para cada $z \in \mathbb{C}$, entonces f es constante.*

El Teorema anterior puede enunciarse de la siguiente forma: si f es una función entera y acotada, entonces es constante. De aquí, no hay funciones holomorfas y acotadas en todo \mathbb{C} que las constantes. De aquí que si f es entera y no constante, entonces su imagen es un conjunto denso en \mathbb{C} .

Teorema 1.70 (Teorema Fundamental del Álgebra). *Si $p(z)$ un polinomio de grado n con constantes en \mathbb{C} , entonces la ecuación $p(z) = 0$ tiene n de soluciones complejas (contando multiplicidad).*

En consecuencia, un polinomio de grado n toma todo valor complejo un número finito de veces.

Teorema 1.71 (Morera). *Sea f una función continua en un dominio G . Si $\int_{\gamma} f = 0$, para toda curva cerrada γ en G , entonces f es analítica, y $f = F'$, donde F es una función analítica en G .*

El Teorema 1.71 también es conocido como el recíproco parcial del Teorema de Cauchy (Teorema 1.64). Obsérvese que el dominio G puede ser simplemente o múltiplemente conexo.

El siguiente resultado es llamado el Principio del Módulo Máximo. En [6] puede encontrar tres versiones de este resultado.

Teorema 1.72 (Principio del Módulo Máximo). *Si f es una función analítica en un dominio G de \mathbb{C} y $z_0 \in G$ con $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para toda $z \in G$, entonces f es constante.*

El Principio del módulo máximo enuncia que si f es una función analítica no constante en un dominio G y continua en $\text{cl}(G)$, entonces el máximo de los módulos se toma en la frontera. Además, si agregamos la condición de que la función f no se anula en $\text{cl}(G)$, entonces el mínimo de los módulos existe y también se toma en la frontera.

SECCIÓN 1.7

Singularidades y su clasificación

Un *punto singular* o *singularidad* de una función $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ es un punto $z_0 \in G$ donde la función f no es analítica. Las series de Taylor nos permiten encontrar una expresión en series de potencias convergentes, alrededor de z_0 , para $f(z)$ cuando f es holomorfa en todo un disco alrededor de z_0 . Sin embargo, no se aplica a funciones como $1/z$ o e^z/z^2 alrededor de $z = 0$ porque éstas no son analíticas en $z = 0$. Para tales funciones existe otra expresión, llamada *expansión de Laurent*. Esta expresión es particularmente importante en el estudio de los puntos singulares de una función y nos conduce a otro resultado fundamental del análisis complejo: El Teorema de Residuo.

Teorema 1.73 (Expansión de Laurent). *Sean $r_1 \geq 0$, $r_2 > r_1$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ y considere la región $A = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Se admite que $r_1 = 0$ o $r_2 = \infty$ (o ambos). Sea f analítica en la región A . Entonces, podemos escribir*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (1.5)$$

donde ambas series en el lado derecho de la ecuación, convergen absolutamente en A y uniformemente en cualquier conjunto de forma $B(z_0, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}$ donde $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$. Si γ es un círculo alrededor de z_0 con radio r , con $r_1 < r < r_2$, entonces los coeficientes están dados por:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta \quad n = 1, 2, \dots$$

La serie para f en la Ecuación (1.5), es llamada *serie de Laurent* o *expansión de Laurent* alrededor de z_0 en el anillo A . La parte $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$ se conoce como *parte analítica* de la serie de Laurent, y al resto se le conoce como *parte principal*. Cualquier expansión convergente puntualmente de f de esta forma es igual a la expansión de Laurent; en otras palabras, la expansión de Laurent es única. Véase [13] para revisar la demostración del Teorema 1.73.

Obsérvese que no podemos hacer $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ como se hace en las expansión de Taylor porque $z_0 \notin A$. Las ecuaciones para a_n y b_n del Teorema 1.73 no son muy prácticas para calcular la serie de Laurent de una función dada. Se pueden usar técnicas para obtener algunas expansiones de la forma deseada y la unicidad de la expansión garantizará que ésta es la forma deseada (véase [13]).

Sean G un conjunto abierto de \mathbb{C} y $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ de variable compleja. Entonces f tiene una *singularidad aislada* en $z_0 \in G$ si existe $r > 0$ tal que f está bien definida y es analítica en $D^\circ(z_0, r) := D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, esto es, que el disco $D(z_0, r)$ no encierre puntos singulares distintos a z_0 . El conjunto $D^\circ(z_0, r)$ se llama *vecindad agujereada* de z_0 . Así, si z_0 es una singularidad aislada de f , entonces su expansión de Laurent es de la forma

$$f(z) = \cdots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots \quad (1.6)$$

Llamaremos a b_1 el *residuo* de f en z_0 . El cálculo del residuo de una función es de suma importancia porque con él podemos calcular integrales de curvas alrededor de una singularidad aisladas. En el Capítulo 4 de [13] se muestran técnicas para calcular residuos y, además, se enuncia el Teorema del Residuo.

Las singularidades aisladas se clasifican de la siguiente forma: Sea f una función analítica en un dominio G con una singularidad aislada en z_0 .

(1) z_0 es una *singularidad removible* o *evitable* si se satisface alguna de las siguientes propiedades:

- a) f es acotada en una $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, para algún $r > 0$.
- b) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe.
- c) $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$.

(2) z_0 es un polo de orden n si podemos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ tal que se satisfaga alguna de siguientes condiciones:

- a) Existe una constante $M > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z - z_0|^n}.$$

- b) $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = c$, para algún $c \neq 0$.
- c) $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{n+1} f(z) = 0$.
- d) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

Si $n = 1$ entonces z_0 es llamado *polo simple*.

(3) z_0 es una *singularidad esencial* de f si z_0 no es removible ni es polo, o bien, si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

- a) La expansión de Laurent de $f(z)$ contiene una infinidad de términos en su parte principal.
- b) Existen $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ y dos sucesiones $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}, \{z'_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergentes a z_0 tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w_1 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) = w_2.$$

- c) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ no existe en \mathbb{C}_{∞} .

Para ilustrar las definiciones anteriores clasificamos las singularidades de las siguientes funciones.

Ejemplos 1.74. (a) La función $f(z) = \frac{z^2 \operatorname{sen}(z)}{z}$ tiene una singularidad removible en $z_0 = 0$.

(b) La función $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ tiene un polo de orden 2 en $z_0 = 0$.

(c) La función $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ tiene una singularidad esencial en $z_0 = 0$.

(d) Si f tiene una singularidad esencial en 0, entonces para cada $a \in \mathbb{C}$ se cumple que la función $g(z) := f(z - a)$ tiene una singularidad esencial en a . En efecto, ya que f tiene una singularidad esencial en 0, existe $r > 0$ tal que f es analítica en $D^{\circ}(0, r)$ y la parte principal de la serie de Laurent contiene una infinidad de términos. Así, para cada $a \in \mathbb{C}$, la expansión de Laurent para $g(z)$ en $D^{\circ}(a, r)$ existe y tiene una cantidad infinita de términos en su parte principal.

(e) Si f tiene una singularidad no removible en z_0 , entonces e^f tiene una singularidad esencial en z_0 .

Ahora, todo abierto que contenga a ∞ en el plano extendido puede ser generado por los conjuntos $B(\infty, r) := \{z : |z| > r\} \cup \{\infty\}$, con $r > 0$. Notemos que una vecindad agujereada de ∞ es $D^{\circ}(\infty, r) = B(\infty, r) \setminus \{\infty\}$, además $D^{\circ}(\infty, r) \subseteq \mathbb{C}$. Con esto en mente podemos estudiar el tipo de singularidad que es ∞ para alguna función.

Para ello, procedemos como sigue. Supongamos que $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica en G y que, para algún $r > 0$, $G \supseteq D^{\circ}(\infty, r)$. Definimos $g : \{z : 0 < |z| < 1/r\} \rightarrow \mathbb{C}$ por $g(z) := f(1/z)$. Entonces decimos que:

- a) f tiene una singularidad removible en ∞ si, y sólo si g tiene una singularidad removible en 0;
- b) f tiene un polo en ∞ si, y sólo si g tiene un polo en 0;
- c) f tiene una singularidad esencial en ∞ si, y sólo si g tiene una singularidad esencial en 0.

Recordemos que una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es entera si es analítica en todo \mathbb{C} . Entonces, tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Por el Teorema de Liouville (véase Teorema 1.69) podemos deducir que ∞ es una singularidad evitable para funciones constantes. El recíproco es evidente.

Caso 2. f es un polinomio no constante si, y sólo si $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)| = +\infty$, es decir, f tiene un polo en ∞ .

Caso 3. f no es polinomial (trascendente) si, y sólo si f tiene una singularidad esencial en ∞ .

En ejemplos prácticos, muchas singularidades son polos. No es difícil mostrar, en general, que si f tiene un polo en z_0 (de orden n) entonces $|f(z)| \rightarrow +\infty$ conforme $z \rightarrow z_0$. Sin embargo, en el caso de una singularidad esencial, $|f|$ no se aproximará, en general, a ∞ cuando $z \rightarrow z_0$. De hecho, aplicando el Gran Teorema de Picard podemos confirmar lo antes mencionado. Más aún, existe una versión más simple del Gran Teorema de Picard con el cual podemos argumentar lo antes mencionado (véase [13] para su demostración).

Teorema 1.75 (Casorati-Weierstrass). *Sea $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ una función con una singularidad esencial aislada en $z_0 \in G$ y sea $w \in \mathbb{C}$. Entonces, existe una sucesión de puntos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ en G convergente a z_0 y, además, la sucesión $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a w .*

Observese que si $z_0 \in G$ es una singularidad esencial aislada de f . Entonces, tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Si $z_0 \neq \infty$ y para dos números positivos arbitrarios ϵ y r , se cumple que dado $w \in \mathbb{C}$ se cumple que la desigualdad $|f(z) - w| < \epsilon$ ocurre para algunos puntos $z \in D^\circ(z_0, r)$.

Caso 2. Si $z_0 = \infty$, entonces la misma propiedad mencionada en el inciso anterior ocurre para cualquier vecindad agujerada de ∞ dada, es decir, $D^\circ(\infty, r)$, para algún $r > 0$ arbitrario.

En otras palabras, las imágenes de algunos puntos de una vecindad agujerada de una singularidad esencial aislada z_0 se acercan arbitrariamente a un número complejo dado w . Inmediatamente tenemos que la imagen de $D^\circ(z_0, r)$ es un conjunto denso en el plano complejo \mathbb{C} . Esto es,

$$\text{cl}(D^\circ(z_0, r)) = \mathbb{C}.$$

Lo mencionado anteriormente es otra versión de el Teorema 1.75. Mas aún, dado $M > 0$ se cumple que la desigualdad $|f(z)| > M$ ocurre para algunos puntos $z \in D^\circ(z_0, r)$. Es decir, si tomamos una función $f : G \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, el Teorema de Casorati-Weierstrass es verdadero, con $G \subseteq \mathbb{C}$ o $G \subseteq \mathbb{C}_\infty$. Véase [7] para la prueba de esta versión del Teorema 1.75.

Definición 1.76. Una función entera se dice que es *trascendente entera* si tiene una singularidad esencial en ∞ .

Como se vio anteriormente las funciones polinomiales no son trascendentes enteras.

Definición 1.77. Sean G un abierto en \mathbb{C} . Una función $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es *meromorfa* en G si la función f es holomorfa en G excepto en polos.

Decimos que una función f es meromorfa en ∞ si la función $f(1/z)$ es meromorfa en alguna vecindad del 0 , en el sentido de la definición de arriba. Así, las funciones polinomiales y las racionales son funciones meromorfas en ∞ y \mathbb{C}_∞ , respectivamente. Por otro lado, toda función meromorfa f en \mathbb{C}_∞ es racional.

2

Familias Normales y el Gran Teorema de Picard

La teoría de familias normales juega un papel central en el desarrollo de la teoría de funciones variables complejas. Por ejemplo el Teorema de mapeo de Riemman y resultados como los Teoremas de Picard y de Schottky no serían posibles sin ésta teoría. Además, en dinámica holomorfa el conjunto de Fatou de una función es definido a partir de las familias normales, así como los puntos repulsivos y atractores de una función dependen de ésta teoría. Uno de nuestros objetivos posteriores es estudiar la iteración de funciones trascendentes enteras, como se mostró en la Sección 1.7, ∞ es una singularidad esencial para éste tipo de funciones y una propiedad interesante para éstas es aquella que nos garantiza que la función va tomar todos los valores complejos un número infinito de veces, salvo a lo más una excepción. Es en este punto donde intervine el Gran Teorema de Picard. En este Capítulo definimos y enunciamos las propiedades importantes de las familias normales, asimismo el Teorema de Montel y el Gran Teorema de Picard. Las pruebas de algunos resultados podrán revisarse en [1], [5], [6], [7], [8], [17], [18].

SECCIÓN 2.1

El espacio de funciones holomorfas

En la Sección 1.4 se denotó el espacio de funciones continuas y acotadas como $(\mathcal{C}(G, \mathbb{C}), \varphi)$. Se mostró que el espacio es completo. Sin embargo, este espacio solo incluye aquellas que son acotadas. Se desea construir un espacio que contenga a todas las funciones continuas de G en \mathbb{C} sin excepción y estudiar su estructura de espacio métrico.

Sean G un subconjunto abierto en \mathbb{C} y (Ω, d) un espacio métrico completo. Denotamos por $C(G, \Omega)$ a la familia de todas las funciones continuas (análogo a lo visto anteriormente) de G en Ω . Esta colección no es vacía porque contiene a las funciones constantes, y es posible que solo contenga funciones constantes. Como \mathbb{C} con la métrica usual $|\cdot|$ forman un espacio métrico completo, nuestro interés recae cuando $\Omega = \mathbb{C}$. Así, se define a $C(G, \mathbb{C})$ como la familia de todas las funciones continuas de G en \mathbb{C} (incluyendo a todas la funciones continuas posi-

bles). Esta colección contiene elementos que no solo son constantes. De hecho, las funciones analíticas en G están incluidas.

Recordemos que una *exhaución* de G es una sucesión de compactos $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ que es creciente y cuya unión es G .

Definimos $\rho : C(G, \mathbb{C}) \times C(G, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ como:

$$\rho(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\varphi_n(f, g)}{1 + \varphi_n(f, g)}, \quad (2.1)$$

donde $\varphi_n(f, g) := \sup_{z \in K_n} |f(z) - g(z)|$, para cada $f, g \in C(G, \mathbb{C})$ y $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una exhaución de G . Dicha exhaución es independiente de quien sea G y cada compacto K de G esta contenido en algún compacto de la exhaución .

Resulta que $(C(G, \mathbb{C}), \rho)$ forma un espacio métrico completo. Como se vio en el Teorema de convergencia de Weierstrass para funciones holomorfas la convergencia uniforme se da en compactos y no en todo el conjunto abierto. Esta interesante propiedad no solo es verdadera en ese resultado. Resulta que la convergencia de una sucesión en $(C(G, \mathbb{C}), \rho)$ es equivalente a la convergencia uniforme en compactos de un abierto G . Este resultado abre paso a la siguiente definición.

Definición 2.1. Una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge uniformemente en compactos de un abierto G a una función f decimos que converge *normalmente* o *localmente uniformemente* a f en G y denotamos $f_n \xrightarrow{N} f$.

De esta manera, el Teorema de convergencia de Weierstrass se puede enunciar como sigue: *Si una sucesión de funciones analíticas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a una función f normalmente en G , entonces f es analítica. Más aún, $f_n^{(k)} \xrightarrow{N} f^{(k)}$.*

Definición 2.2. Sea $\mathcal{H}(G)$ el conjunto de todas las funciones holomorfas de G en \mathbb{C} .

Observese que $\mathcal{H}(G) \subset C(G, \mathbb{C})$ por lo que $\mathcal{H}(G)$ con la métrica heredada como subconjunto de $C(G, \mathbb{C})$ se construye un subespacio métrico. De acuerdo con [6], $\mathcal{H}(G)$ es un subespacio cerrado de $C(G, \mathbb{C})$, y por ende, es completo. Además, si $f_n : G \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica en G , para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente sobre compactos de G a $f(z)$, entonces $f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$.

Ahora, se dice que una familia \mathcal{F} de $\mathcal{H}(G)$ es *uniformemente acotada* en G si existe un número $M > 0$ tal que para cada $f \in \mathcal{F}$ se cumple que $|f(z)| \leq M$, para todo $z \in G$. Es decir, toda función de la familia es acotada en G y, además, toda función que pertenece a la familia posee la misma cota. Una familia \mathcal{F} de $\mathcal{H}(G)$ es *localmente acotada* si para cada compacto K de G , existe $M(K) > 0$ finito tal que para todo $f \in \mathcal{F}$ se tiene $|f(z)| \leq M(K)$, para toda $z \in K$, esto es, \mathcal{F} es uniformemente acotado en K . A esta clase de familias también se les conoce como familias *localmente uniformemente acotadas* en G . Alternativamente \mathcal{F} es una familia localmente acotada si y sólo si existe un compacto K de G tal que $\sup_{z \in K} \{|f(z)| : f \in \mathcal{F}\}$ existe.

Para culminar esta sección, otro concepto importante en desarrollo de la teoría de familias normales, es el concepto de equicontinuidad. Montel en su trabajo de 1907 se dio cuenta que

toda familia de funciones analíticas localmente acotada es equicontinua y con ello implicar que la familia es normal. Dicho resultado es conocido como el Teorema de Montel. Por ello, enunciamos la definición de equicontinuidad.

Definición 2.3. Una familia \mathcal{F} en $\mathcal{H}(G)$ es *equicontinua* en un punto $z_0 \in G$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para $|z - z_0| < \delta$ se satisface que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

Se dice que una familia \mathcal{F} es equicontinua sobre un subconjunto E de G si para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para todo $z, w \in E$ y $|z - w| < \delta$ se cumple que $|f(z) - f(w)| < \epsilon$, para cada $f \in \mathcal{F}$. Una familia \mathcal{F} en $\mathcal{H}(G)$ que es equicontinua en cada punto de G es equicontinua en cada compacto de G . La prueba de este último resultado puede revisarse en [18].

Como se mencionó, la relación entre acotación local y equicontinuidad es el siguiente.

Teorema 2.4. Una familia localmente acotada \mathcal{F} en $\mathcal{H}(G)$ es equicontinua en subconjuntos compactos de G .

Otra importante consecuencia de la acotación local es demostrada en la siguiente versión sencilla del Teorema de Vitali-Porter.

Teorema 2.5. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión localmente acotada de funciones analíticas en G tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z) \in \mathbb{C}$, para cada $z \in G$, entonces $f_n \xrightarrow{N} f$ en G y f es analítica en G .

Las pruebas correspondientes a los Teorema 2.3 y 2.5 se pueden revisar en [17].

SECCIÓN 2.2

Familias Normales

Los trabajos de Montel sobre familias normales se iniciaron en 1907. El término *normal* apareció hasta su trabajo de 1911 en la revista *Comptes Rendus*. El tratado final sobre el tema fue escrito hasta 1946. Aunque nuestro principal interés sobre el tema en esta tesis recae en el estudio de funciones analíticas, esta teoría se puede extender a familias de funciones definidas en otros espacios, por ejemplo, donde el dominio y el codominio de la función sean superficies de Riemann.

En adelante, asumimos que G es un dominio en el sentido de abierto y conexo, salvo que se diga lo contrario. Algunos resultados son verdaderos en el caso de que G solo sea abierto con una variación en los enunciados (véase [6]). Para facilidad de notación reescribimos a las sucesiones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} := \{f_n\}$, asumiendo que el recorrido de n es en el conjunto de los números naturales \mathbb{N} . Sea f una función analítica G , a los conjuntos imagen y preimagen de f los escribiremos como $f[G]$ y $f^{-1}[G]$, respectivamente, salvo que se diga lo contrario.

Definición 2.6. Una familia \mathcal{F} en $\mathcal{H}(G)$ es *normal* en G si para cada sucesión $\{f_n\}$ de \mathcal{F} contiene, o bien una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ convergente a una función límite f uniformemente en cada subconjunto compacto de G o bien convergente uniformemente a ∞ en cada compacto de G .

Observaciones 2.7. (a) Por un lado, la función límite f es una función holomorfa por el Teorema 1.58. Por otro lado, diremos que la sucesión $\{f_n\}$ *divergente normalmente* o *converge*

normalmente a ∞ en G , denotamos $f_n \xrightarrow{N} \infty$. Esto es, para cada compacto K de G y constante $M > 0$, $|f_n(z)| > M$ para todo $z \in K$, para algún n (el cual depende de K y M) suficientemente grande. Para una sucesión $\{f_n\}$ determinada, ambas alternativas pueden ocurrir.

- (b) Toda sucesión de funciones convergente normalmente a una función f o a ∞ en un dominio G es normal en G .
- (c) Una familia es normal si toda sucesión $\{f_n\}$ de \mathcal{F} converge normalmente a una función f en G .
- (d) La convergencia a ∞ puede sustituirse por: *cada sucesión de la forma $\left\{\frac{1}{f_n}\right\}$ contiene una subsucesión convergente a la función 0 normalmente en G .*
- (e) Algunos autores omiten la convergencia a ∞ de la Definición 2.6; sin embargo, ésta nos permite una mejor comprensión del tema y una gran compatibilidad con la normalidad de familias de funciones meromorfas, pues estas definen la convergencia normal utilizando la métrica cordal del plano extendido.

Para ilustrar las idea de normalidad presentamos los siguientes ejemplos.

Ejemplos 2.8. (a) Sean $L := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$, $R := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ y $\mathcal{F} := \{e^{nz}\}$. Mostrar que la familia \mathcal{F} es normal en L y R pero no en todo \mathbb{C} .

Solución: En efecto, notemos que la $L_n := \{z \in \mathbb{C} : -(n+1) \leq \operatorname{Re}(z) \leq -\frac{1}{n+1}, |\operatorname{Im}(z)| \leq n\}$ y $R_n := \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{n+1} \leq \operatorname{Re}(z) \leq n+1, |\operatorname{Im}(z)| \leq n\}$ son exhaustiones de L y R respectivamente.

Por un lado, para $\epsilon > 0$ y n , proponemos $N > \frac{|\log \epsilon|}{\max_{z \in L_n} \operatorname{Re}(z)}$, entonces para $m > N$ y $z \in L_n$ tenemos que

$$\begin{aligned} m \max_{z \in L_n} \operatorname{Re}(z) < |\log \epsilon| &\implies m \operatorname{Re}(z) < \log \epsilon \\ &\implies e^{m \operatorname{Re}(z)} < \epsilon \\ &\implies |e^{mz}| < \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, cada sucesión no trivial de \mathcal{F} converge normalmente a 0 en L . Por ende, la familia \mathcal{F} es normal en L .

Por otro lado, para $M > 0$ y n , proponemos a $N > \frac{|\log M|}{\min_{z \in R_n} \operatorname{Re}(z)}$, entonces se tiene que $|e^{mz}| > M$, para $m > N$ y $z \in R_n$. Es decir, la sucesión diverge en cada compacto de R . En consecuencia, toda sucesión no trivial es divergente en cada compacto de R . Esto es, la familia \mathcal{F} es normal en R .

Para culminar, consideremos el compacto $K := \left\{\frac{i}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ en \mathbb{C} . Sea $M_0 = \frac{1}{2}$, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $z_m = \frac{i}{2^m}$ tal que $|e^{2^m z_m}| \geq M_0$. Es decir, la sucesión $\{e^{nz}\}$ no converge uniformemente en K . Esto es, que la familia \mathcal{F} no es normal en \mathbb{C} .

- (b) La familia $\mathcal{F} := \{z^n\}$ es normal en todo $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Tomamos en cuenta que dentro del disco unitario, la sucesión convergen normalmente a 0. Y por fuera converge normalmente a ∞ .

Recordemos que para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ todo disco abierto $D(z, r)$ es conexo. Así, decimos que una familia \mathcal{F} es normal en $z_0 \in G$, donde G es un dominio, si es normal en alguna vecindad de z_0 . Con esto en mente enunciaremos la siguiente afirmación.

Afirmación 2.9. *Una familia normal de funciones analíticas \mathcal{F} es normal en un dominio G si, y sólo si \mathcal{F} es normal en cada punto de G*

Véase la demostración en [17]. Esto nos permite establecer a la propiedad de normalidad como una propiedad local.

Ahora, estipulamos que una familia de funciones analíticas \mathcal{F} es normal en ∞ si la correspondiente familia $\mathcal{G} := \{g : g(z) = f(\frac{1}{z})\}$ es normal en $z = 0$. Por lo tanto, \mathcal{F} es normal en ∞ significa que es normal en alguna vecindad de ∞ , $D(\infty, R)$ con $R > 0$. Esto nos permite definir a una familia normal \mathcal{F} en un dominio G en \mathbb{C}_∞ y contiene a ∞ . En el caso de tomar una familia sobre un dominio en \mathbb{C}_∞ que no contiene a ∞ para verificar que es normal basta con ver que cumple las condiciones de la Definición 2.6.

Observese que la normalidad de una familia \mathcal{F} de funciones analíticas en un dominio G es *conformemente invariante*. Esto es, si $\phi(\zeta) = z$ es un mapeo conforme uno a uno de G' a G , entonces la familia $\mathcal{G} := \{g = f \circ \phi : f \in \mathcal{F}\}$ es normal en G' si, y sólo si \mathcal{F} es normal en G . Como la normalidad también es una propiedad local, ésto nos permite limitar nuestras contemplaciones de normalidad al disco unitario, cuando esa conveniente hacerlo.

El siguiente resultado forma parte de las raíces de la teoría de familias normales, dicho resultado es conocido como Teorema de Arzelà-Ascoli.

Teorema 2.10 (Arzelà-Ascoli). *Si una sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas converge uniformemente sobre un compacto K a una función límite f , entonces $\{f_n\}$ es equicontinua en K , y f es continua. Inversamente, si $\{f_n\}$ es equicontinua y localmente acotada en G , entonces se puede extraer una subsucesión de $\{f_n\}$ la cual converge normalmente en G a una función límite (continua) f .*

Véase la demostración del Teorema 2.10 en [6]. Como se mencionó en la Sección 2.1, una familia de funciones analíticas que es localmente acotada es equicontinua (véase Teorema 2.3). Luego, para cada sucesión dentro de esa familia es posible extraer una subsucesión que converja normalmente a una función, en este caso, analítica. Así, tenemos el siguiente resultado el cual es uno de los más importantes de la Teoría de Montel.

Teorema 2.11 (Montel). *Si \mathcal{F} es una familia localmente acotada de funciones analíticas en un dominio G , entonces \mathcal{F} es una familia normal en G .*

Demostración. Elegimos un subconjunto denso numerable $\{z_n\}$ en G . Sea $\{f_n\}$ una sucesión en \mathcal{F} y considérese la sucesión de números complejos $\{f_n(z_1)\}$. Por hipótesis, $|f_n(z_1)| < M$ para algún $M > 0$ y cada $n \in \mathbb{N}$. Esta sucesión acotada de números complejos contiene una subsucesión convergente por la propiedad de Bolzano-Weierstrass, digamos:

$$f_{n_1}^{(1)}(z_1), f_{n_2}^{(1)}(z_1), f_{n_3}^{(1)}(z_1), f_{n_4}^{(1)}(z_1), \dots,$$

esto es, $\{f_{n_k}^{(1)}\}$ converge en z_1 . En el punto z_2 , como la sucesión $\{f_{n_k}^{(1)}(z_2)\}$ de números complejos es acotada, podemos extraer una subsucesión convergente

$$f_{n_1}^{(2)}(z_2), f_{n_2}^{(2)}(z_2), f_{n_3}^{(2)}(z_2), f_{n_4}^{(2)}(z_2), \dots$$

Así, $\{f_{n_k}^{(2)}\}$ converge en z_2 y z_1 . Continuando de esta manera se obtienen las subsucesiones $\{f_{n_k}^{(p)}\}$ las cuales son convergentes en z_1, z_2, \dots, z_p , para cada $p \in \mathbb{N}$. Tomando la sucesión diagonal $\{f_{n_k}^{(k)}\}$, tenemos que converge en cualquier z_n .

Procedemos a mostrar que la sucesión diagonal converge uniformemente en subconjuntos compactos. Renombramos la sucesión $\{g_k\} = \{f_{n_k}^{(k)}\}$. Sea K un compacto en G y $\epsilon > 0$. Por ser \mathcal{F} una familia localmente acotada entonces es equicontinua en K , existe $\delta = \delta(\epsilon, K) > 0$ tal que

$$|g_n(z) - g_n(z')| < \frac{\epsilon}{3}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

donde $z, z' \in K$ y $|z - z'| < \delta$. La compactación de K también implica que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{k_0} D(z_k, \delta)$, tras posiblemente renombrar los puntos z_1, z_2, \dots, z_{k_0} . Entonces hay un entero N tal que para $n, m \geq N$ que implica

$$|g_n(z_k) - g_m(z_k)| < \frac{\epsilon}{3},$$

para $k = 1, \dots, k_0$.

Finalmente, para cada $z \in K$, $z \in D(z_k, \delta)$ para algún $1 \leq k \leq k_0$, y

$$\begin{aligned} |g_n(z) - g_m(z)| &\leq |g_n(z) - g_n(z_k)| + |g_n(z_k) - g_m(z_k)| + |g_m(z_k) - g_m(z)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Concluimos que $\{g_n\}$ converge uniformemente sobre K a una función analítica, por el Teorema 1.58, y la prueba está completa. ■

Observaciones 2.12. (a) Aplicando el Teorema de Arzelá-Ascoli junto con la Convergencia de Weierstrass la prueba del Teorema de Montel es inmediata.

(b) El subyacente dominio G del Teorema de Montel también puede permitirse estar en \mathbb{C}_∞ , lo cual es conveniente, por ejemplo, en el estudio de grupos discretos. En efecto, las funciones $g(z) = (\frac{1}{z})$ son uniformemente acotadas en un disco $D(0, \frac{1}{R})$ para un $R > 0$ suficientemente grande, y por tanto, constituye una familia normal ahí. Entonces \mathcal{F} es normal en ∞ y así en todo G .

(c) El Teorema de Montel es válido en cualquier conjunto abierto en \mathbb{C}_∞ porque sus componentes solo son contables en número y el teorema puede aplicarse sucesivamente en cada uno. La afirmación se sigue al tomar una sucesión diagonal y observando que cualquier subconjunto compacto se encuentra solo finitamente en muchas componentes.

Como observamos en la definición de normalidad hay dos casos de convergencia. En el caso de que una familia sea normal por el primer caso, es decir, que toda sucesión contenga una subsucesión normalmente convergente a una función analítica diremos que la familia es *normal-analítica* en G . En el segundo caso, es decir que toda sucesión contenga una subsucesión que diverge normalmente en G , diremos que la familia es *normal-infinito*, esto con el fin de usar una terminología más cómoda. Con esto en mente podemos enunciar la siguiente equivalencia.

Teorema 2.13. Sea \mathcal{F} una familia en $\mathcal{H}(G)$. \mathcal{F} es *normal-analítica* en G si, y sólo si \mathcal{F} es localmente acotada.

Demostración. De acuerdo a la demostración del Teorema de Montel, la suficiencia es verdadera. Veamos la prueba de la necesidad. Supongamos por contradicción que \mathcal{F} es una familia que no es localmente acotada y que es normal-analítica, entonces hay al menos un disco cerrado D en G tal que para cada entero positivo n , existe una función $f_n \in \mathcal{F}$ y un punto $z_n \in D$ con

$$|f_n(z_n)| > n.$$

Una subsucesión, $\{f_{n_k}\}$, entonces converge uniformemente en D a una función analítica f , i.e., para algún $k_0 \in \mathbb{N}$ y $k \geq k_0$ se cumple

$$|f_{n_k} - f(z)| < 1, \quad \text{para cada } z \in D.$$

Por lo tanto, tomando $M = \max_{z \in D} |f(z)|$ existe, y

$$|f_{n_k}(z)| \leq 1 + M, \quad \text{para cada } z \in D,$$

lo que contradice el hecho que $|f_{n_k}(z_{n_k})| \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$. ■

Algunas veces nos preguntamos qué ocurre con la normalidad de la correspondiente familia de derivadas de una familia normal. El siguiente ejemplo muestra que podemos tener familias normales sin que la correspondiente familia de derivadas sea normal.

Ejemplo 2.14. Consideremos la familia $\mathcal{F} := \{nz : n \in \mathbb{N}\}$ la cual no es normal en ningún conjunto que contenga al origen porque si tomamos el disco unitario $D(0,1)$, entonces para cada $z \neq 0$, $nz \xrightarrow{p} \infty$ y cuando $z = 0$, $nz \xrightarrow{p} 0$. Definamos

$$\phi_n(z) := \frac{nz^2}{2} + n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Entonces, para cada $z \in U$, donde U es una vecindad del 0,

$$|\phi_n(z)| \geq n - \left| \frac{nz^2}{2} \right| \geq \frac{n}{2}$$

y así $\{\phi_n\}$ es normal en U , pero $\{\phi'_n\}$ no lo es.

El siguiente resultado nos proporciona las condiciones para que la correspondiente familia de derivadas de una familia normal sea normal.

Proposición 2.15. Si \mathcal{F} es una familia normal de funciones analíticas en un dominio G . Si para algún $z_0 \in G$ el conjunto $\mathcal{F}(z_0) := \{f(z_0) : f \in \mathcal{F}\}$ es acotado en \mathbb{C} , entonces las siguientes afirmaciones son válidas:

- (a) \mathcal{F} es una familia localmente acotada en G ;
- (b) $\mathcal{F}' := \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ es localmente acotada y normal en G .

Como mencionamos en la Sección 2.1, $\mathcal{H}(G)$ con la métrica heredada por el espacio de funciones continuas es un subespacio métrico, la familias normales juegan un papel importante en la estructura de este espacio métrico. Obsérvese que la Definición 2.6 se parece a la definición de los conjuntos secuencialmente compactos, si sólo se cumple la el primer caso, es decir, sea una familia normal-analítica, véase la Definición 1.33, salvo que no se requiere que el límite de la subsucesión esté en \mathcal{F} . Por otro lado, de acuerdo con la Afirmación 1.34, la definición de familia normal-analítica se enuncia de la siguiente forma: *Una familia \mathcal{F} en $\mathcal{H}(G)$ es normal-analítica en G si es un subconjunto relativamente compacto en $\mathcal{H}(G)$* . Además, se sigue del Teorema 1.38 que una familia \mathcal{F} en $\mathcal{H}(G)$ es normal-analítica en G si, y sólo si tiene cerradura compacta. De esta manera, por la equivalencia, tenemos que toda familia de funciones en $\mathcal{H}(G)$ es compacta si, y sólo si es una familia cerrada en $\mathcal{H}(G)$ y localmente acotada en G . Así, hemos estipulado un análogo al Teorema de Heine-Borel de \mathbb{R}^n para el espacio de funciones holomorfas en G .

Para ilustrar lo antes mencionado presentamos algunos ejemplos.

Ejemplos 2.16. (a) Si $\mathcal{F} := \{f_\alpha \text{ analítica en } U : f_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(\alpha)} z^n, |c_n^{(\alpha)}| \leq M\}$, entonces

$$|f_\alpha(z)| \leq \frac{M}{1-r}$$

para $|z| \leq r < 1$, implica que \mathcal{F} es normal en U . Fácilmente se ve que \mathcal{F} es compacto.

(b) Si $\mathcal{F} := \{f \text{ analítica en } G : |f(z) - a| > m\}$ para algún $a \in \mathbb{C}$ fijo, $m > 0$, entonces la familia $\mathcal{G} := \{g(z) := \frac{1}{f(z)-a} : f \in \mathcal{F}\}$ satisface $|g(z)| < \frac{1}{m}$ en G , y por lo tanto normal. Afirmamos que \mathcal{F} es normal en G . En efecto, sea $\{f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ y consideremos la correspondiente sucesión $\{g_n\} \subseteq \mathcal{G}$; podemos extraer una subsucesión $\{g_{n_k}\}$ la cual converge normalmente a una función analítica g . Esta subsucesión le corresponde alguna sucesión $\{f_{n_k}\}$. Aplicando el Teorema de Hurwitz, tenemos que $g_{n_k}(z) \neq 0$ para cada $z \in G$ y también $g(z) \neq 0$ en todo G o g es la función nula.

Supongamos que $g(z) \neq 0$ en G . Ya que $f(z) = a + \frac{1}{g(z)}$, tenemos

$$f(z) - f_{n_k}(z) = \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g_{n_k}(z)} = \frac{g_{n_k}(z) - g(z)}{g(z)g_{n_k}(z)}.$$

Si K es un compacto en G , entonces $|g(z)| > \alpha > 0$ para $z \in K$. Por otro lado, tomando k suficientemente grande, dado $0 < \epsilon < \alpha$,

$$|g_{n_k}(z) - g(z)| < \epsilon, \quad z \in K.$$

Como una consecuencia $|g_{n_k}(z)| > \alpha - \epsilon$, y

$$|f(z) - f_{n_k}(z)| < \frac{\epsilon}{\alpha(\alpha - \epsilon)},$$

para k suficientemente grande, $z \in K$. Por tanto, $g(z) \neq 0$ en todo G , tenemos que \mathcal{F} es normal en G .

Cuando g es la función nula, tenemos que $|g_{n_k}(z)| < \epsilon$ para k suficientemente grande, $z \in K$. Así,

$$|f_{n_k}(z)| = \left| \frac{1}{g_{n_k}(z)} + a \right| > \frac{1}{\epsilon} - |a| \rightarrow \infty$$

para ϵ tan pequeño como sea posible. Por tanto, $\{f_n\}$ converge uniformemente a ∞ en K , y por ende, tenemos que \mathcal{F} es normal en G . Se sigue que \mathcal{F} es normal pero no compacta en $\mathcal{H}(G)$.

Desde este punto de vista, de acuerdo con el Teorema de Montel, toda sucesión $\{f_n\}$ en $\mathcal{H}(G)$ localmente acotada contiene una subsucesión uniformemente convergente en $\mathcal{H}(G)$. Este último, es un análogo al Teorema de Bolzano-Weierstrass de \mathbb{R}^n . Por esta razón, se dice que las familias normales son una generalización del Teorema de Bolzano-Weierstrass en $\mathcal{H}(G)$.

En 1912 Montel presentó su *Critère fondamental* para que una familia de funciones analíticas sea normal. El criterio fundamental de normalidad (FNT por sus siglas en inglés) tiene varias consecuencias de largo alcance que son de suma importancia en la teoría de funciones de variable compleja, como por ejemplo el Gran Teorema de Picard. La demostración de FNT se puede revisar en [17].

Teorema 2.17 (Criterio Fundamental de Normalidad). *Si \mathcal{F} es una familia en $\mathcal{H}(G)$ la cual omite dos valores fijos a y b en \mathbb{C} , entonces \mathcal{F} es normal en G .*

Recordemos que la familia formada por la sucesión $\{e^{nz}\}$ no es normal en \mathbb{C} . Por FNT se tiene que el número de valores omitidos no puede ser dos.

Observación 2.18. Si G es un dominio el cual incluye a ∞ , entonces las funciones $f(\frac{1}{z})$ para $f \in \mathcal{F}$ omite a y b en el disco $D(0, \frac{1}{R})$ para algún R suficientemente grande y constituye una familia normal de funciones analíticas ahí. Se sigue que \mathcal{F} es normal en ∞ , y por lo tanto en todo G .

SECCIÓN 2.3

Teorema de Picard

El Teorema de E. Picard fue una revelación en su momento y causó un gran interés en la investigación de la Teoría de Funciones. La prueba original utilizó la función modular elíptica, la cual está conectada con el criterio fundamental de normalidad (FNT), esta última se emplea en la demostración actual del teorema. Montel tuvo la brillante idea de reemplazar una propiedad particular de una función por una familia de funciones que posean la misma propiedad en una sucesión de dominios. Este método fue explotado posteriormente de manera más eficiente por Julia y el mismo Montel en una serie de tópicos diferentes.

En la Sección 1.7 enunciamos el Teorema de Casorati-Weierstrass (véase Teorema 1.75) del cual podemos decir que dada una familia de funciones analíticas \mathcal{F} en G con una singularidad esencial aislada z_0 y sea $D^\circ(z_0, r)$ es una vecindad agujereada de z_0 , entonces para cada $f \in \mathcal{F}$ se cumple que $f[D^\circ(z_0, r)]$ es denso en \mathbb{C} . El Teorema de Casorati-Weierstrass es una versión sencilla del Gran Teorema de Picard. De hecho, enuncia que si f tiene una singularidad esencial

en z_0 , entonces $f[D^\circ(z_0, r)] = \mathbb{C}$ con la posibilidad de un agujero. Más aún, f toma cada valor complejo en el disco agujereado $D^\circ(z_0, r)$ un número infinito de veces.

El corolario del Teorema 1.75 enuncia que si f es una función entera, entonces $f[\mathbb{C}]$ es denso en \mathbb{C} (si f es un polinomio, entonces $f[\mathbb{C}] = \mathbb{C}$). Además, se tiene que $f[\mathbb{C}]$ es el plano complejo completo con una posible excepción. Este resultado se conoce como el Pequeño Teorema de Picard. Por ejemplo, la función $f(z) = e^z$ no toma los valores 0 ni ∞ . Así, el número de puntos que f evita en \mathbb{C}_∞ es dos; es claro que f solo evita un punto en \mathbb{C} . Por otro lado, la función $g(z) = 2 + (z^2 + 1)e^{\text{sen}(z)}$ no omite ningún punto de \mathbb{C} pero el valor 2 se toma dos veces.

Recordemos que dada una función $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ y dado $w \in \mathbb{C}$ podemos definir el conjunto preimagen de w bajo f como:

$$f^{-1}[\{w\}] := \{z \in G : f(z) = w\}.$$

Por simplicidad denotaremos $f[w] := f^{-1}[\{w\}]$. Luego, dado $w \in \mathbb{C}$, decimos que un punto $z_0 \in G$ es llamado un w -punto de la función f si $f(z_0) = w$. Esto es, $z_0 \in f^{-1}[w]$.

Un valor $w \in \mathbb{C}$ es llamado un *valor omitido* de una función $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ si la ecuación $f(z) - w = 0$ no tiene soluciones en G . Es decir, un valor $w \in \mathbb{C}$ tal que el conjunto de w -puntos de f es vacío. Un valor $w \in \mathbb{C}$ es llamado un *valor excepcional de Picard* de f si la ecuación $f(z) - w = 0$ tiene un conjunto finito de soluciones. Es decir, $\text{card}(f^{-1}[w]) < +\infty$. Es claro que todo punto omitido es excepcional de Picard. El conjunto de valores excepcionales de Picard se denota por $\mathcal{P}(f)$. Por ejemplo, el conjunto de 0-puntos de la función exponencial e^z es vacío, por ende, 0 es un valor excepcional de Picard de la función exponencial.

Por otra parte, se puede pensar que puntos singulares son puntos excepcionales. Es falso que esto suceda, por ejemplo, la función $g(z) = \text{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$ tiene una singularidad en 0; sin embargo, para $z = \frac{1}{k\pi}$, con $k \in \mathbb{Z}$, la función g toma el valor 0. Inversamente, tomando la función $g(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$, 0 es un punto excepcional de g pero no es singular.

A continuación enunciamos formalmente el Pequeño Teorema de Picard.

Teorema 2.19 (Pequeño Teorema de Picard). *Si f es una función entera la cual omite dos valores entonces f es constante.*

Demostración. Supongamos que f es una función entera no constante y que omite dos valores $a, b \in \mathbb{C}$. Consideremos la familia de discos $D_n := D(0, 2^n)$, con $n = 0, 1, 2, \dots$, y definimos las funciones

$$f_n(z) = f(2^n z)$$

las cuales también son enteras. Luego, $f_n[D_1] = f[D_{n+1}]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, y se sigue que la sucesión $\{f_n\}$ omite los valores a y b en D_1 . Por FNT, tenemos que $\{f_n\}$ es normal en D_1 . Como $f_n(0) = f(0)$, para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, del Teorema 2.15 se tiene que $\{f_n\}$ es acotada en el disco compacto $\text{cl}(D_0) \subseteq D_1$. Concluimos que f es acotada en \mathbb{C} , y por ende, idénticamente constante por el Teorema de Liouville. Esto contradice que f no sea constante, por lo el resultado se sigue. ■

El Teorema 2.19 se puede enunciar de la siguiente manera: *Toda función entera no constante toma cualquier valor complejo finito, a excepción, posiblemente de un valor.*

Como comentario el Teorema 2.19 puede ser considerado como una mejora de el Teorema de Cauchy-Liouville la cual se podría estipular como sigue: *Los valores que toma una función entera no constante recaen en una porción ilimitada de el plano complejo.* Otros autores nombran el Teorema 2.19 como **Teorema Pequeño de Picard**.

Ahora proveemos el Gran Teorema de Picard de 1879. Para su demostración utilizaremos la teoría de Montel.

Teorema 2.20 (Gran Teorema de Picard). *Supongamos que f es una función analítica que tiene una singularidad esencial en z_0 . Entonces, en una vecindad de z_0 la función f toma todos los valores complejos, a lo más, posiblemente, una excepción, un número infinito de veces.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, asumimos que $z_0 = 0$ es una singularidad esencial de f . Asimismo, supongamos por contradicción que existen dos valores a y b los cuales f omite en un disco agujereado $D^\circ(z_0, r)$, con $r > 0$. Entonces la familia de funciones \mathcal{F} definida por

$$f_n(z) = f\left(\frac{z}{2^n}\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

son analíticas en la sucesión de anillos $A_n = \{z : \frac{r}{2^n} < |z| < \frac{r}{2^{n-1}}\}$ con $n = 1, 2, \dots$. Para cada n , f_n toma en el anillo A_1 los mismos valores que f en el anillo A_{n+1} . Por ello \mathcal{F} es una sucesión de funciones analíticas en A_1 y que no toman los valores a o b en A_1 . Ya que \mathcal{F} es normal en A_1 (por FNT), existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge uniformemente a una función analítica F en la circunferencia $C_\rho = \{z : |z| = \rho\}$, para algún $\frac{r}{2} < \rho < r$, o diverge de manera uniforme en A_1 .

Si F es analítica en C_ρ , entonces $\{f_{n_k}\}$ es localmente acotada en C_ρ . Es decir, que

$$|f_{n_k}(z)| \leq M, \quad |z| = \rho, \quad k = 1, 2, \dots,$$

pero entonces

$$|f(z)| \leq M, \quad |z| = \frac{\rho}{2^{n_k}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

esto es, f está acotada sobre una sucesión de círculos concéntricos que convergen al origen. Por el Principio de módulo máximo, $|f(z)| \leq M$ en la región formada por dos círculos concéntricos cualesquiera. Como consecuencia,

$$|f(z)| \leq M, \quad 0 < |z| \leq \frac{\rho}{2^{n_1}},$$

luego se sigue que f tiene una singularidad removible en z_0 .

Por otro lado, si $\{f_{n_k}\}$ diverge normalmente en A_1 , entonces la familia $\left\{\frac{1}{f_{n_k}-a}\right\}$ converge uniformemente en el interior de un subconjunto compacto de A_1 a la función nula. Como el caso anterior, podemos concluir que la función $g(z) = \frac{1}{f(z)-a}$ está acotada sobre una vecindad agujereada del origen, y por tanto f tiene una singularidad removible o un polo en el origen, de nuevo una contradicción.

Finalmente, si hay dos valores, digamos α y β , que son tomados solo un numero finito de veces por f , entonces en alguna vecindad agujereada suficientemente pequeño del origen, f omitiría α , β y el resultado se sigue. ■

Otros autores nombran el Teorema 2.20 como *Teorema grande de Picard*.

La conclusión del Teorema 2.20 enuncia que el número de puntos excepcionales de Picard para una función f con singularidad esencial es, a lo más 1. Esto implica que f no puede tener dos puntos omitidos ni dos puntos que se tomen un número finito de veces. O bien, un punto omitido y un punto que se tome un número finito de veces.

Como comentario, observese que en la demostración del Gran Teorema de Picard el Criterio fundamental de normalidad implica el Gran Teorema de Picard. Una pregunta natural es que si el Gran Teorema Picard implica el Criterio de normalidad. La resupuesta la da Zalcman en su artículo "*Normal families: new perspectives*" publicado en 1998 en la revista Bull. Amer. Math. Soc. Utilizando Teoría de familias normales para funciones meromorfas, el Teorema de Marty, el lema de Zalcman y, claro está, el Gran Teorema de Picard.

Del Teorema 2.20 se desglosan la siguiente consecuencia.

Corolario 2.21. *Si f tiene una singularidad aislada en z_0 y si existen dos números complejos los cuales f se toman un número finito de veces en un disco agujerado $D^\circ(z_0, r)$, entonces z_0 es un polo o una singularidad removible.*

Por otro lado, el Teorema pequeño de Picard se sigue directamente del Gran Teorema de Picard y el Teorema fundamental del Álgebra, pero, de hecho, con una conclusión más fuerte. El siguiente resultado lo nombraremos *Pequeño Teorema de Picard reforzado*.

Corolario 2.22 (Pequeño Teorema de Picard reforzado). *Sea f una función entera no constante. Entonces, las siguientes son verdaderas:*

- (a) *Si f es un polinomio, entonces f toma cada valor de \mathbb{C} un número finito de veces.*
- (b) *Si f no es polinomial, entonces f toma cada valor de \mathbb{C} , salvo, posiblemente, a lo sumo una excepción, un número infinito de veces.*

Demostración. El inciso (a) se sigue del Teorema Fundamental del Álgebra. Para probar (b), considere la función $g(z) = f(1/z)$. Ya que f no es un polinomio, g tiene una singularidad esencial en 0. El resultado se sigue del Gran Teorema de Picard. ■

Recordemos que una función trascendente entera es una función entera no polinomial, inmediatamente se sigue el siguiente resultado.

Corolario 2.23. *Toda función trascendente entera f toma cualesquier valor finito complejo, a excepción, posiblemente, de uno, un número infinito de veces.*

Del Ejemplo 1.73 (d), dada una función trascendente entera f y $z_0 \in \mathbb{C}$ se tiene que z_0 es una singularidad esencial de $g(z) = f\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$. Así, podemos decir que para cada $z_0 \in \mathbb{C}$, existe una función g tal que z_0 es una singularidad esencial de g . Más aún, para cualesquier vecindad agujerada $D^\circ(z_0, r)$, con $r > 0$, la función g toma todos los valores complejos con excepción posiblemente de un valor. Lo que implica que para cualesquier conjunto $E \subseteq \mathbb{C}$ que no contenga puntos excepcionales de Picard satisface que $g^{-1}[E] \subseteq D^\circ(z_0, r)$.

De acuerdo con la teoría de funciones enteras, es posible expresar una función entera como producto infinito. Se sabe que una función analítica f en región simplemente conexa G que no

se anula en G , es de la forma $f(z) = e^{h(z)}$, para cada $z \in G$, donde h es una función analítica en G . Así, si f es una función entera decimos que f no toma el valor 0 si, y sólo si existe una función entera $h(z)$ tal que $f(z) = e^{h(z)}$, para cada $z \in \mathbb{C}$. Es decir, las únicas funciones que omiten a 0 son las composiciones con la función exponencial. En general, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.24. *Sea f una función trascendente entera. Entonces, f omite un valor w_0 si, y sólo si existen una constante no nula α y una función entera no constante h tales que*

$$f(z) = w_0 + \alpha e^{h(z)}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}. \quad (2.2)$$

Algo más general, es cuando la función toma un valor un número finito de veces, es decir, si f entera es una función que se anula un número finito de veces, entonces existe un polinomio p que se anula el mismo número de veces (contando multiplicidad) y una función entera h tal que $f(z) = p(z)e^{h(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Véase la prueba en [8].

Con esta herramienta enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 2.25. *Sea f una función trascendente entera. Entonces, f toma un valor w_0 un número finito n de veces si, y sólo si existe un polinomio de grado n y una función entera no constante h tal que*

$$f(z) = w_0 + p(z)e^{h(z)}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}. \quad (2.3)$$

Se puede demostrar que la necesidad es verdadera y, además, que h es un polinomio. En la suficiencia, h no necesariamente debe ser un polinomio. De acuerdo a éste resultado, afirmamos que las únicas funciones trascendentes enteras que toman un valor un número finito de veces son las que tienen la forma de la ecuación (2.3). Hay que tomar en cuenta que el valor w_0 puede ser omitido en alguna vecindad muy cercana de ∞ . En el Capítulo 3 mostraremos que las funciones de la forma de la Ecuación (2.2) o de la forma de la Ecuación (2.3) son funciones trascendentes enteras.

Además, como observación las funciones de la forma $f(z) = w_0 + p(z)e^{h(z)}$, donde h tiene una singularidad no removible en z_0 , tienen una singularidad esencial en z_0 , por el Ejemplo 1.73 (e) y aplicando expansión de Laurent en una vecindad agujereada de z_0 . Se sigue que f posiblemente tome a w_0 un número finito de veces, o puede omitirlo, en alguna vecindad de z_0 , para saberlo basta con resolver la ecuación $p(z) = 0$.

Para culminar este Capítulo, observemos que de la demostración del Teorema 2.20, se puede obtener una proposición más general. Si para la sucesión $f_n(z) = f\left(\frac{z}{2^n}\right)$ introducimos los anillos $B_n = \{z : \frac{r}{2^{n+4}} < |z| < \frac{r}{2^n}\}$, con $n = 0, 1, 2, \dots$, que se interceptan unos con otros. Se puede mostrar que la familia de funciones $\{f_n\}$ no puede ser normal en el anillo B_0 .

Así, se deduce, por la propiedad local de normalidad, que en el anillo existe al menos un punto a tal que en cualquier entorno del mismo la familia $\{f_n\}$ no es normal. Ahora, tomamos $D(a, \epsilon)$ un entorno arbitrariamente pequeño de a . Como la familia $\{f_n\}$ no es normal en este entorno, las funciones de esta familia toman en el mismo todos los valores finitos, a excepción, posiblemente de uno. Es decir, para cualesquiera valor valor finito w , a excepción, posiblemente de un valor w_0 , existen funciones f_{n_k} de indice arbitrariamente grandes, que toman el valor w en cierto punto z_k perteneciente al entorno dado. Obsérvese que

$$f_{n_k}(z) = f\left(\frac{z}{2^{n_k}}\right)$$

y designado $a_k = \frac{z_k}{2^{n_k}}$, obtenemos

$$f(a_k) = w$$

Es claro que la sucesión $\{a_k\}$ converge a $z = 0$ y está contenida dentro del ángulo limitado por los rayos que parten del punto $z = 0$ y son tangentes a la circunferencia que limita el entorno dado. Como el punto a está fijo y ϵ es arbitrariamente pequeño, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.26 (Teorema de Julia). *Para cada punto singular z_0 de una función analítica f , existe al menos un rayo, $\arg(\zeta - z_0) = \theta$, que parte de z_0 , tal que en cualquier sector $\theta - \epsilon < \arg(z - z_0) < \theta + \epsilon$, f toma, un número infinito de veces, todo valor complejo con a lo más una excepción.*

El Teorema 2.26 es una presición del Gran Teorema de Picard. El Teorema de Picard no dice cómo están situados los w -puntos de la función f en un entorno del punto singular esencial, mientras que el Teorema de Julia afirma que para cualquier w , a excepción, posiblemente, de uno, un conjunto infinito de w -puntos se agrupa en las proximidades de cierto rayo. El rayo mencionado en el Teorema de Julia se llama *rayo de Julia* en honor al científico quien los descubrió.

Si tomamos una función trascendente entera f , entonces en el plano existen puntos, distintos del origen tales que la familia de funciones $f_n(z) = f(2^n z)$ no es normal. Entonces, f toma todos sus valores una infinidad de veces con a lo más de una posible excepción en el sector $\theta - \epsilon < \arg(z) < \theta + \epsilon$. Así, dentro de ese sector hay una infinidad de w -puntos de f , a excepción, posiblemente, de uno.

Ejemplo 2.27. Consideremos la función exponencial $f(z) = e^z$. Esta posee dos rayos de Julia, dirigidos por las partes positiva y negativa del eje imaginario. En efecto, si $w \neq 0$, entonces las raíces de la ecuación $e^z = w$ son

$$z_k = \text{Log}_k(w) = \log |w| + i \arg(w) + 2k\pi i.$$

Supongamos, para precisar, que k es positivo. Como la tangente del ángulo formado por el vector z_k y la dirección positiva del eje imaginario es igual a

$$\frac{\log |w|}{\arg(w) + 2k\pi}$$

esta última tiende a cero cuando k crece indefinidamente. De aquí, se deduce que los puntos z_k , comenzando desde uno de ellos en adelante, pertenecen a cualquier sector $\theta - \epsilon < \arg(z) < \theta + \epsilon$ y $\text{Im}(z) > 0$. Para k negativo se obtiene un resultado similar. Obsérvese que todos los puntos del eje imaginario son tales que la familia $\{e^{2^n z}\}$ no es normal.

3

Aplicaciones

En el presente capítulo utilizaremos las herramientas expuestas en los capítulos anteriores para estudiar la naturaleza de un sistema dinámico discreto generado por una función trascendente entera. El estudio de este tipo de sistemas dinámicos se inicia con el trabajo de Fatou en 1926. Además, estudiaremos una aplicación del Gran Teorema de Picard a la Teoría de ecuaciones, demostrando el Teorema de Casorati-Weiersstrass (véase Teorema 1.75) y sus equivalencias.

SECCIÓN 3.1

Dinámica Holomorfa

La clase de funciones trascendentes enteras \mathcal{E}

Como se definió en la Sección 1.7, una función entera que no es polinomial es *trascendente entera*. Ahí mismo, se mostró que son las únicas funciones que tienen ∞ como única singularidad y además es esencial. En la Sección 2.3 probamos algunas consecuencias del Gran Teorema de Picard y el Teorema de Julia.

Definimos el conjunto de funciones trascendentes enteras, denotado por \mathcal{E} , como:

$$\mathcal{E} := \{f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ es trascendente entera}\}$$

El conjunto \mathcal{E} forma una clase de funciones que pertenecen al conjunto de funciones holomorfas. A continuación exponemos algunos ejemplos de funciones en la clase \mathcal{E} .

Ejemplos 3.1. (a) $f(z) = \alpha e^z$, con $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

(b) $g(z) = \alpha \cos(\alpha z)$, con $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

(c) $h(z) = \alpha \operatorname{sen}(z)$, con $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Podemos preguntarnos acerca de la composición de funciones trascendentes enteras. El siguiente resultado nos enuncia que bajo la composición de funciones de \mathcal{E} es cerrado.

Proposición 3.2. *Si $f, g \in \mathcal{E}$, entonces $f \circ g \in \mathcal{E}$.*

Demostración. Sean f y g funciones trascendentes enteras, entonces aplicando la regla de la cadena $f \circ g$ es entera. Veamos que ∞ es una singularidad esencial de $f \circ g$. En efecto, Sean $v, v' \notin \mathcal{P}(f)$, con $v \neq v'$. Por el Teorema 2.20, hay un número infinito de soluciones w_1, w_2, \dots , para la ecuación $f(w) = v$ y un número infinito de soluciones w'_1, w'_2, \dots , para la ecuación $f(w') = v'$, donde $w_n \neq w'_n$. Luego, dados $w_{n_1}, w'_{n_2} \notin \mathcal{P}(g)$, para las ecuaciones $g(z) = w_{n_1}$ y $g(z) = w'_{n_2}$ existen las sucesiones $\{z_k^{(n)}\}$ y $\{z'_k{}^{(n)}\}$ de soluciones convergentes a ∞ tales que $\{g(z_k^{(n)})\}$ y $\{g(z'_k{}^{(n)})\}$ convergen a w_{n_1} y w'_{n_2} , respectivamente, este resultado se demostrará en la Sección 3.2. Así, $f(g(z_k^{(n)})) \rightarrow v$ y $f(g(z'_k{}^{(n)})) \rightarrow v'$ cuando $k \rightarrow \infty$. Se sigue que ∞ es una singularidad esencial de $f \circ g$. ■

Obsérvese que al componer dos funciones trascendentes enteras, ∞ sigue siendo una singularidad esencial, es decir, la singularidad se preserva. Esto no ocurre en general cuando componemos funciones con singularidades esenciales distintas. Por ejemplo, si $f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{e^z+1}\right)$, los puntos $z_k = (2k-1)\pi i$, con $k \in \mathbb{N}$, son singularidades aisladas de f , pero ∞ ya no es una singularidad aislada. Sin embargo, cuando componemos funciones con la misma singularidad esencial en z_0 , la composición tiene una singularidad esencial en z_0 , la prueba es la misma que de la Proposición 3.2.

De manera general, dada una función g con una singularidad no removible en z_0 y f es una función trascendente entera, entonces $f \circ g$ tiene una singularidad esencial en z_0 . Recordemos que una función con singularidad tipo polo en ∞ es un polinomio. Se tiene que si g es un polinomio, entonces $f \circ g$ es trascendente entera. Por ejemplo, la función $\operatorname{sen}(\lambda z^2)$, para algún $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, es trascendente entera.

Más aún, usando la expansión de Laurent alrededor de ∞ podemos demostrar que si f es una función trascendente entera, g un polinomio o una función trascendente entera y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, con $\alpha \neq 0$, entonces las funciones $f + \beta$, $\alpha f + \beta g$ y $f \cdot g$ son trascendentes enteras. Con esto, podemos concluir que la clase de funciones trascendentes enteras \mathcal{E} es cerrado bajo la adición, el producto, el producto por escalar no nulo y la composición. Así, podemos concluir que toda función de la forma:

$$f(z) = w_0 + p(z)e^{h(z)},$$

donde p es un polinomio y h es una función entera, es trascendente entera.

Punto fijo de iteración de funciones

Sea X un conjunto no vacío y $f : X \rightarrow X$ una función (en general, decimos que f es un *endomorfismo* en X). Definimos la n -ésima iterada de f , denotada por $f^{\circ n}$, de manera inductiva mediante $f^{\circ n} = f \circ f^{\circ n-1}$, para $n \geq 2$, $f^{\circ 1} = f$ y $f^{\circ 0} = \operatorname{id}_X$. Nuestro interés recae cuando $X = \mathbb{C}$ y f es trascendente entera. Así, la n -ésima iterada de f es una función trascendente entera.

A la pareja (X, f) se le llama *sistema dinámico discreto* generado por f .

Para entender un sistema dinámico generado por las iteradas de f se debe comprender la convergencia de todas las órbitas hacia adelante en términos de sus condiciones iniciales, es decir, entender el comportamiento asintótico conforme n crece hacia infinito. Entiéndase por *órbita hacia adelante* generada por un valor inicial z_0 al conjunto:

$$\mathcal{O}^+(z_0) := \{z_n = f^{\circ n}(z_0) : n \in \mathbb{N}\}$$

Definición 3.3. Dada una función $f \in \mathcal{E}$ y sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Decimos que z_0 es un *punto periódico* de orden n de f si n es el menor natural que cumple que $f^{\circ n}(z_0) = z_0$.

Si z_0 es un punto periódico de orden n , entonces $\mathcal{O}^+(z_0)$ es llamada una *órbita periódica* o *ciclo*. Además, si $n = 1$, es decir, $f(z_0) = z_0$, entonces diremos que z_0 es un *punto fijo* de f . La existencia de puntos fijos para funciones trascendentes enteras fue probado por Beker en su trabajo llamado *The existence of fix-points of entire functions* de 1960.

Ejemplo 3.4. La función $f(z) = \alpha e^z - \alpha$, con $\alpha \neq 0$, es una función trascendente entera. Obsérvese que $f(z) = \alpha(e^z - 1)$ y que $f(0) = 0$. Es decir, $z_0 = 0$ es un punto fijo de f

Sin embargo, no toda función trascendente entera tiene puntos fijos, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.5. La función $f(z) = e^z + z$ es trascendente entera. Si la función f tuviera al menos un punto fijo z_0 se debe satisfacer que $e^{z_0} + z_0 = z_0$, esto implica que $e^{z_0} = 0$ para algún $z_0 \in \mathbb{C}$ lo cual es falso.

Observese de los dos ejemplos anteriores, para que f tenga punto fijos es necesario que 0 no sea un punto omitido de Picard de la función $g(z) = f(z) - z$. Y esto solo sucede si f no es de la forma $f(z) = \alpha e^{h(z)} + z$, para cada $z \in \mathbb{C}$, donde $\alpha \neq 0$ y h es alguna función entera. Lo cual nos motiva enunciar la siguiente proposición.

Proposición 3.6. Sea f una función trascendente entera. Entonces las siguientes propiedades son validas:

- (a) f no tiene puntos fijos si, y sólo si existen una constante no nula α y una función entera no constante h tales que

$$f(z) = \alpha e^{h(z)} + z, \tag{3.1}$$

para cada $z \in \mathbb{C}$.

- (b) f tiene un número finito de puntos fijos si, y sólo si existen un polinomio p de grado $n \geq 1$ y una función entera no constante h tales que

$$f(z) = p(z)e^{h(z)} + z, \tag{3.2}$$

para cada $z \in \mathbb{C}$.

De este modo, se concluye que las funciones que no tienen la regla de correspondencia como en (3.1) y (3.2) tienen una infinidad de puntos fijos. Además, obsérvese que de acuerdo a la definición de punto periódico, podemos utilizar Proposición 3.6 para determinar la existencia de dichos puntos.

Ahora, si $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto periódico de orden n , al número $\lambda = (f^{\circ n})'(z_0)$ es llamado el *multiplicador* de z_0 . Algunas veces necesitamos referirnos al tipo de dinámica que se presenta en ∞ . En base a esto, si $f \in \mathcal{E}$, decimos que el multiplicador λ de ∞ es

$$\lambda_\infty := \frac{1}{(f^{\circ n})'(0)}.$$

Gracias al multiplicador podemos clasificar a los puntos periódicos de la siguiente forma:

- (1) súper atractor si $|\lambda| = 0$;
- (2) Atractor si $|\lambda| < 1$;
- (3) Repulsor si $|\lambda| > 1$;
- (4) indiferente:
 - (a) Racional si $\lambda^n = 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$, es decir λ es raíz de la unidad;
 - (b) Irracional si $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, donde $\theta \in \mathbb{I}$.

Resulta que los puntos atractores y repuslores conectan con la Teoría de Montel de familias normales, veamos el siguiente resultado.

Teorema 3.7. *Sea z_0 un punto fijo y f una función holomorfa en una vecindad V de z_0 . Entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

- (a) Si z_0 es atractor, entonces la familia de iteradas $\{f^{\circ n}\}$ de f es normal en z_0 ;
- (b) Si z_0 es repulsor, entonces la familia de iteradas $\{f^{\circ n}\}$ de f no es normal en z_0 .

Demostración. Sea z_0 un punto fijo y consideremos el disco $D(z_0, R)$, para algún $R > 0$. Entonces:

- (a) Tomemos ϵ tal que $0 < \epsilon < 1 - |\lambda|$, entonces existe algún $R > r > 0$ tal que para cada $|z - z_0| < r$ se tiene que

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \epsilon.$$

De la desigualdad se sigue

$$\left| \frac{f(z) - z_0}{z - z_0} \right| < |\lambda| + \epsilon < 1.$$

Hagamos $|\lambda| + \epsilon = \rho$. Así, $|f(z) - f(z_0)| < \rho|z - z_0| < r$. Aplicando f a la última desigualdad, obtenemos

$$|f(f(z)) - z_0| < \rho|f(z) - z_0| < \rho^2|z - z_0| < \rho^2 r.$$

Siguiendo este proceso, inductivamente tenemos que

$$|f^{\circ n}(z) - z_0| < \rho^n r \rightarrow 0,$$

cuando $n \rightarrow \infty$ porque $\rho < 1$. La convergencia es uniforme en el disco $D(z_0, r)$ por la elección inicial de $|z - z_0| < r$. Por lo tanto, $\{f^{\circ n}\}$ es normal en z_0 .

(b) Supóngase que la familia de funciones iteradas $\{f^{\circ n}\}$ es normal en alguna disco $D(z_0, r)$, con $r \leq R$. Entonces, $f^{\circ n}(z_0) = z_0$, para toda n . Se sigue que $f^{\circ n}$ no converge a ∞ en z_0 .

Por lo tanto, existe alguna subsucesión $\{f^{\circ n_k}\}$ de $\{f^{\circ n}\}$ que converge normalmente a una función holomorfa g en z_0 .

Así, por la Convergencia de Weierstrass, tenemos que $|(f^{\circ n_k})'(z_0)| \rightarrow |g'(z_0)|$, pero

$$|(f^{\circ n_k})'(z_0)| = |\lambda|^{n_k} \rightarrow \infty$$

cuando $k \rightarrow \infty$ porque $|\lambda| > 1$, lo cual contradice que $|(f^{\circ n_k})'(z_0)| \rightarrow |g'(z_0)|$. Por lo tanto, la familia de iteradas $\{f^{\circ n}\}$ de f no es normal en z_0 . ■

Recordemos que en el Ejemplo 3.3 la función $f(z) = \alpha(e^z - 1)$, con $\alpha \neq 0$, tiene un punto fijo en $z_0 = 0$. Luego, $|\lambda| = |\alpha|$. Si $|\alpha| < 1$, entonces $z_0 = 0$ es un punto atractor, es decir, la familia de iteradas $\{f^{\circ n}\}$ es normal en $z_0 = 0$. Si $|\alpha| > 1$, entonces z_0 es repulsor, y por ende, la familia de iteradas $\{f^{\circ n}\}$ de f no es normal en z_0 .

Esto último motiva definir los famosos conjuntos de Fatou y Julia de Dinámica Holomorfa.

Definición 3.8. El conjunto de Fatou, denotado por \mathcal{F}_f , para la clase de funciones trascendentes enteras \mathcal{E} se define como:

$$\mathcal{F}_f := \{z \in \mathbb{C} : \{f^{\circ n}\} \text{ está bien definida y es normal en } z\}.$$

El conjunto de Julia, denotado por \mathcal{J}_f , es el complemento del conjunto de Fatou, esto es

$$\mathcal{J}_f := \mathbb{C} \setminus \mathcal{F}_f.$$

En términos de familias normales el conjunto de Julia es el conjunto de puntos de \mathbb{C} donde la sucesión de iteradas $f^{\circ n}$ no es normal. Estos conjuntos se definen de mismo modo para otras clases de funciones.

De este modo, todo punto periódico atractor de una función f es de Fatou y todo punto periódico repulsor es de Julia.

Los conjuntos de Fatou y Julia cumplen, en general, las siguientes propiedades.

- (1) \mathcal{F}_f es abierto y \mathcal{J}_f es cerrado.
- (2) \mathcal{F}_f y \mathcal{J}_f son completamente invariantes. Es decir, $f[\mathcal{F}_f] \subseteq \mathcal{F}_f$ y $f^{-1}[\mathcal{F}_f] \subseteq \mathcal{F}_f$. Análogo para \mathcal{J}_f .

Más aún, si f tiene valores omitidos, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_f &= f^{-1}[\mathcal{F}_f] = f[\mathcal{F}_f] \cup (\mathcal{P}(f) \cap \mathcal{F}_f) \\ \mathcal{J}_f &= f^{-1}[\mathcal{J}_f] = f[\mathcal{J}_f] \cup (\mathcal{P}(f) \cap \mathcal{J}_f) \end{aligned}$$

- (3) $\mathcal{F}_{f^{\circ n}} = \mathcal{F}_f$ y $\mathcal{J}_{f^{\circ n}} = \mathcal{J}_f$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
- (4) Si $z_0 \in \mathcal{J}_f$ y $z_0 \notin \mathcal{P}(f)$, entonces $\mathcal{J}_f = \text{cl}(\{z \in \mathbb{C} : f^{\circ n}(z) = z_0, n \in \mathbb{N}\})$.

- (5) El conjunto de puntos periódicos repulsivos es denso en el conjunto de Julia.
 (6) El conjunto de Julia es no vacío y perfecto.

Como el conjunto de Fatou de una función trascendente entera es abierto es posible hablar de sus componentes conexas. Con ello, si D es una componente conexa de Fatou y la sucesión de iteradas $\{f_{|D}^{\circ n}\}$ es localmente acotada, entonces $\text{cl}(\{f_{|D}^{\circ n}\})$ es un compacto en $\mathcal{H}(D)$.

SECCIÓN 3.2

Ecuaciones funcionales y sus soluciones

De acuerdo con el Teorema Fundamental del Álgebra, el número de soluciones de una ecuación que involucra un polinomio es finito. Sin embargo, cuando involucramos funciones con singularidad esencial podemos encontrar una infinidad de soluciones. Es por esta razón que se dice que el Teorema de Picard es una Extensión del Teorema Fundamental del Álgebra.

En la demostración de Proposición 3.2, el cual enuncia que bajo composición la clase \mathcal{E} es cerrada, se menciona que la solución de una ecuación $f(z) = w$ tiene una infinidad de soluciones tan cercanas a ∞ como se desee, claro, siempre que w no sea un punto excepcional de Picard.

Por ejemplo, para la ecuación

$$\text{sen}\left(\frac{1}{z^2 + 1}\right) = w,$$

donde w es un número complejo dado. Las soluciones están dadas por:

$$\begin{aligned} z_{1_n} &= \left[\frac{1}{-i \log(\sqrt{1 - w^2 + iw}) + 2\pi n i} - 1 \right]^{1/2}, \\ z_{2_n} &= - \left[\frac{1}{-i \log(\sqrt{1 - w^2 + iw}) + 2\pi n i} - 1 \right]^{1/2}, \\ z_{3_n} &= (-1)^n \left[\frac{1}{-i \log(\sqrt{1 - w^2 + iw})} - 1 \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

tomando la rama principal de logaritmo y una raíz cuadrada donde sea continua. Obsérvese que para la función $f(z) = \text{sen}\left(\frac{1}{z^2 + 1}\right)$ tiene dos singularidades esenciales, $z_1 = i$ y $z_2 = -i$. Además, las sucesiones z_{1_n} y z_{2_n} convergen a z_1 y z_2 , respectivamente; pero la sucesión z_{3_n} no converge ni contiene una subsucesión que converja a alguna de las singularidades.

Del mismo modo, tomando $g(z) = e^z$, para cada $w \neq 0$, la ecuación

$$g(z) = w,$$

tiene soluciones de la forma:

$$z_n = \log(w) + 2\pi ni.$$

Obsérvese que las soluciones se acercan a ∞ , cuando $n \rightarrow \infty$, y que, en este caso, $w \notin \mathcal{P}(g)$. Esto motiva el siguiente resultado.

Lema 3.9. *Si f es una función con singularidad esencial en z_0 y $w \notin \mathcal{P}(f)$, entonces existe una sucesión de soluciones de la ecuación $f(z) = w$ que converge a z_0 .*

Demostración. Sean $w \notin \mathcal{P}(f)$ y $D^\circ(z_0, r)$, con $r > 0$, un disco agujereado de z_0 . Luego, por el gran Teorema de Picard la ecuación $f(z) = w$ tiene una infinidad de soluciones en $D^\circ(z_0, r)$. Tomamos una solución en ese disco, digamos z_1 . Análogamente, tenemos una infinidad de soluciones en el disco $D^\circ(z_0, r/2)$, tomemos uno distinto a z_1 y denotemoslo por z_2 . De manera iterativa, podemos tomar una solución z_n en el disco agujereado $D^\circ(z_0, r/2^n)$ tal que $z_n \neq z_j$, para cada $j = 1, 2, \dots, n - 1$. Así, construimos la sucesión de soluciones $\{z_n\}$ la cual satisface

$$0 < |z_n - z_0| < \frac{r}{2^n} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Se sigue que la sucesión es acotada. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión de soluciones $\{z_{n_k}\}$ convergente. Así, tenemos que

$$|z_{n_k} - z_0| < \frac{r}{2^{n_k}} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

Esto es, la subsucesión $\{z_{n_k}\}$ converge a z_0 . Así, el resultado queda probado. ■

Con este resultado la Proposición 3.2 queda probada. Obsérvese que, de acuerdo a la demostración del Lema 3.9, en un disco agujereado arbitrario $D^\circ(z_0, r)$ es posible construir una sucesión de soluciones que converge a la singularidad y que esté contenida en $D^\circ(z_0, r)$.

Teorema de Casorati-Weierstrass

En la Sección 1.7 enunciamos el Teorema de Casorati-Weierstrass (véase Teorema 1.75). Con el cual inmediatamente se prueba que la imagen en un disco agujerado de z_0 bajo una función con singularidad esencial en z_0 es densa en \mathbb{C} . Algunos autores mencionan que estos dos resultados son equivalentes; sin embargo, no lo demuestran. Por otro lado, las pruebas de estos resultados utilizan propiedades de las singularidades aisladas. A continuación utilizaremos el Gran Teorema de Picard y el Lema 3.9 para probar la equivalencia.

Teorema 3.10 (Casotari-Weierstrass (Versión precisa)). *Si f es una función con singularidad esencial en z_0 , entonces $\text{cl}(f[D^\circ(z_0, r)]) = \mathbb{C}$, para cualquier $r > 0$.*

Demostración. Sean $w \in \mathbb{C}$ y $r > 0$. Basta mostrar que w es un punto de acumulación de $f[D^\circ(z_0, r)]$. Para ello, tomemos V un vecindad de w . Luego, para $w_1 \in V$, con $w_1 \notin \mathcal{P}(f)$ y $w_1 \neq w$, por el Gran Teorema de Picard, existe $z_1 \in D^\circ(z_0, r)$ tal que $f(z_1) = w_1$. Esto es,

$$w_1 \in V \cap f[D^\circ(z_0, r)] \setminus \{w_0\}.$$

Así, w es un punto de acumulación de $f[D^\circ(z_0, r)]$. ■

Un resultado inmediato es el siguiente.

Corolario 3.11. *Si f una función con singularidad esencial en z_0 , entonces para todo $w \in \mathbb{C}$ y cualesquiera $\epsilon > 0$ y $R > 0$ se cumple que $|f(z) - w| < \epsilon$, para algún $z \in D^\circ(z_0, R)$.*

Observese que el Teorema 3.10 y su Corolario son equivalentes. A continuación mostraremos que el Teorema 1.75 y el Teorema 3.10 son equivalentes.

Teorema 3.12. *Sea f una función con singularidad esencial en z_0 . Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

- (a) *Para cada $r > 0$ se cumple $\text{cl}(f[D^\circ(z_0, r)]) = \mathbb{C}$.*
- (b) *Para cada $w \in \mathbb{C}$, existe una sucesión $\{z_n\}$ que converge a z_0 tal que la sucesión $\{f(z_n)\}$ converge a w .*

Demostración. Basta probar que (a) implica (b). Sean $w \in \mathbb{C}$ y $r > 0$. Luego, existe una sucesión $\{w_n\}$ que converge a w , donde $w_n = f(z_n)$, con $z_n \in D^\circ(z_0, r)$. Por el Lema 3.9, salvo para alguna ecuación, digamos $f(z) = w_{n_0}$, existe una sucesión de soluciones convergente $\{z_m^{(n)}\}$, con $m \neq n_0$, que converge a z_0 contenida en $D^\circ(z_0, r)$. Es claro que

$$|z_m^{(n)} - z_0| < r, \quad \text{con } m \neq n_0.$$

Por ende,

$$|z_n^{(n)} - z_0| < r, \quad \text{con } n \neq n_0.$$

Es decir, la sucesión diagonal $\{z_n^{(n)}\}$ es acotada. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión $\{z_{n_k}^{(n_k)}\}$ convergente. Luego, dado $0 < \epsilon < r$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $k, l \geq N$ se cumple

$$|z_{n_k}^{(n_k)} - z_{n_l}^{(n_l)}| < \epsilon/2.$$

Después, tomado $k_0 \geq N$ suficientemente grande, se satisface que $|z_{n_{k_0}}^{(n_{k_0})} - z_0| < \epsilon/2$. Se sigue que $|z_{n_k}^{(n_k)} - z_{n_{k_0}}^{(n_{k_0})}| < \epsilon/2$, para cada $k \geq k_0$.

Así, para cada $k \geq k_0$, se satisface:

$$\left| z_{n_k}^{(n_k)} - z_0 \right| \leq \left| z_{n_k}^{(n_k)} - z_{n_{k_0}}^{(n_{k_0})} \right| + \left| z_{n_{k_0}}^{(n_{k_0})} - z_0 \right| < \epsilon$$

De este modo $\{z_{n_k}^{(n_k)}\}$ converge a z_0 . Tomamos la respectiva subsucesión de imágenes $w_k = f(z_{n_k}^{(n_k)})$ la cual converge a w . Con lo que se demuestra el resultado. ■

El Teorema de Casorati-Weierstrass es una forma modificada del Gran Teorema de Picard. El siguiente ejemplo ilustra una relación de ambos Teoremas.

Antes recordemos que en análisis complejo, el Teorema de la función abierta establece que si G es un dominio del plano complejo \mathbb{C} y $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa no-constante, entonces f es una función abierta (es decir, f envía subconjuntos abiertos de G a los subconjuntos abiertos de \mathbb{C}).

Ejemplo 3.13. Sea f una función entera. Supongamos que para cada $w \in \mathbb{C}$, $f(z) = w$ tiene a lo más una solución, i. e., f es univalente (uno a uno). Probar que $f(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$ constantes.

Solución. Supongamos que f no es constante en \mathbb{C}_∞ . Por el Teorema de la función abierta, la imagen del disco $D(0, 1)$ es abierto bajo f (f es analítica ahí). Así, $D(f(0), r) \subseteq f[D(0, 1)]$ para algún $r > 0$. Esto implica que para todo z fuera del disco $D(0, 1)$ la función f no está contenida en $D(f(0), r)$. Por tanto en la vecindad $1 < |z| < \infty$ de ∞ tenemos que $|f(z) - f(0)| \geq r$.

Por tanto, del recíproco del Teorema de Casorati-Weierstrass, ∞ no es una singularidad esencial de f . Nuestras definiciones sobre singularidades nos dicen que la expansión de Laurent de f debe ser de la forma $\sum_{n=0}^N a_n z^n$ porque f es entera. Por lo tanto, f es un polinomio, y como f es uno a uno, a lo más es de grado uno. Esto es, existen $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $f(z) = az + b$. ■

Obsérvese que aplicando el Corolario 2.20 del Gran Teorema de Picard en el disco $1 < |z| < \infty$, se sigue que ∞ no es una singularidad esencial. Por hipótesis f no es constante. Por tanto, f es un polinomio. Del Teorema fundamental del álgebra y como f es univalente, f es un polinomio de grado uno. Esta es otra forma de resolver el ejemplo de arriba.

Método para hallar valores excepcionales de Picard

En la Sección 3.1 mostramos que una función trascendente entera f tiene puntos fijos si 0 no es un punto omitido de $f(z) - z$. Gracias a las formas de las Ecuaciones (2.2) y (2.3), vistas en la Sección 2.3. Se determinó cuándo 0 es un punto excepcional de Picard. De acuerdo a los Teoremas 2.23 y 2.24, podemos determinar cuándo un punto es excepcional de Picard de una función entera trascendente. Para solucionar una ecuación que involucra funciones trascendentes enteras debemos fijarnos en los puntos excepcionales de dicha función. Véase la siguiente Tabla.

Función	Valores excepcionales de Picard
$f(z) = w_0 + \alpha e^{h(z)}$	w_0 es omitido en \mathbb{C}
$f(z) = w_0 + p(z)e^{h(z)}$	w_0 es tomado a lo más $\text{grad}(p)$ veces en \mathbb{C}
$f(z) = \text{sen}(z)$	No tiene valores excepcionales de Picard
$f(z) = \text{cos}(z)$	No tiene valores excepcionales de Picard
$f(z) = \text{senh}(z)$	No tiene valores excepcionales de Picard
$f(z) = \text{cosh}(z)$	No tiene valores excepcionales de Picard

Tabla 3.1: Funciones trascendentes enteras y sus valores excepcionales de Picard.

Ahora, nuestro interés es conocer los valores excepcionales de Picard de una función con singularidad esencial finita z_0 . Por ejemplo, supongamos que queremos conocer los valores excepcionales de la función $f(z) = 2 + \frac{e^{1/z}}{z^2}$. Si se hace $g(z) = 2 + z^2 e^z$ y $h(z) = \frac{1}{z}$, entonces $f = g \circ h$, claramente, f tiene una única singularidad esencial en $z_0 = 0$. Luego, la función g toma el valor 2 solo una vez en $z_1 = 0$. Pero h omite a 0. Por lo tanto, 2 es un valor omitido de f .

En este ejemplo observamos dos cosas. Por un lado, la función g es trascendente entera y la función h tiene un polo en $z_0 = 0$. Además, la composición tiene una singularidad esencial en $z_0 = 0$. Por otro lado, 2 es un punto excepcional no omitido de Picard de la función g , pero al componer 2 es un punto omitido de f .

Recordemos que una función f definida y analítica en \mathbb{C} excepto en polos es una función meromorfa. Por ejemplo, la función h del ejemplo anterior es meromorfa.

Consideremos f es trascendente entera y g una función meromorfa con polo en z_0 , entonces $g(z) \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow z_0$. De este modo, la función $f \circ g$ no tiene límite cuando $z \rightarrow z_0$. Es decir, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(g(z))$ no existe. Por tanto, la función $f \circ g$ tiene una singularidad esencial en z_0 . Del mismo modo, si g tiene una singularidad esencial en z_0 el resultado se sigue.

Por otra parte, la función $f(z) = w_0 + p(z)e^{h(z)}$, donde p es un polinomio no constante y h tiene un polo en z_0 . Aplicando el desarrollo de serie de Laurent y por lo de arriba, f tiene una singularidad esencial en z_0 . Además, w_0 es un punto excepcional de Picard no omitido de f . Pero f no es composición de una función trascendente entera y una meromorfa. Con esto se concluye que no todas las funciones con singularidades esenciales tienen la forma de la composición antes mencionada.

Hablando de funciones meromorfas, existe una versión del Pequeño Teorema de Picard para este tipo de funciones, el cual se enuncia como sigue.

Teorema 3.14 (Pequeño Teorema de Picard para funciones meromorfas). *Toda función meromorfa no constante toma cualquier valor complejo, a excepción, posiblemente, de dos valores.*

De este Teorema se enuncia que una función meromorfa a lo más omite dos valores. En el caso de funciones enteras no constantes, a lo más omite un valor. Para este tipo de funciones, no tenemos una versión del Gran Teorema de Picard, salvo si la función es trascendente meromorfa (funciones meromorfas que tienen al menos un polo que no es un valor omitido y además tienen a ∞ como singularidad esencial, véase [18]). La prueba del resultado anterior se encuentra en [18].

Ahora, para hallar puntos excepcionales de Picard de funciones cuya composición esta formada por una función trascendente entera y una función meromorfa. Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.15. *Sea f un función trascendente entera y g una función meromorfa. Si v es un punto omitido de g y $f(v)$ está bien definida, entonces $f(v)$ es un candidato a ser un valor omitido de $f \circ g$.*

Como se vio en el ejemplo, 0 era un valor omitido de $1/z$ y $f(0) = 2$ es un punto omitido. Pero no siempre esto sucede. Por ejemplo, para $f(z) = \text{sen}(1/z)$, tenemos que $f(0) = 0$, pero 0 no es punto excepcional de f porque la función sen no tiene puntos excepcionales. Por ende, 0 es tomado una infinidad de veces. Así, $1/z$ tomará los valores $n\pi$, con $n \in \mathbb{N}$, una vez. Es

decir, 0 es tomado una infinidad de veces por el valor f . Lo mismo ocurre en el caso de que g se una función con singularidad esencial. Esto último motiva el siguiente resultado.

Teorema 3.16 (Método para hallar valores excepcionales de Picard).

Sea f una función trascendente entera y g una función meromorfa con polo en z_0 o con singularidad esencial en z_0 . Entonces $f \circ g$ tiene una singularidad esencial en z_0 y se sigue alguna de las siguientes propiedades.

(1) Si $\mathcal{P}(f) = \emptyset$, entonces $\mathcal{P}(f \circ g) = \emptyset$.

(2) Sea $v \in \mathcal{P}(f)$. Entonces, se cumple una de las siguientes:

(1.1) Si f omite a v , entonces $f \circ g$ omite a v .

(2.2) Si f toma un número finito de veces a v , entonces:

(2.2.1) si para cada $w \in f^{-1}[v]$, g omite a w , entonces $f \circ g$ omite a v ;

(2.2.2) si existe $w \in f^{-1}[v]$ tal que g no omite, entonces $f \circ g$ toma al menos una vez a v .

Demostración. Sean f una función trascendente entera y g una función meromorfa con polo en z_0 . Luego, $f \circ g$ tiene una singularidad esencial en z_0 . Sea $D^\circ(z_0, r)$ un disco agujereado de z_0 . Aplicando el Gran Teorema de Picard y el Pequeño Teorema de Picard para funciones meromorfas es claro que si $\mathcal{P}(f) = \emptyset$, entonces $\mathcal{P}(f \circ g) = \emptyset$. Por otro lado, si $v \in \mathcal{P}(f)$, tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Si f omite a v , entonces para cada $w \in \mathbb{C}$ se cumple $f(w) \neq v$. Luego, no podemos encontrar un valor $z \in D^\circ(z_0, r)$ tal que $f(g(z)) = v$. Por lo tanto, v es un valor omitido de $f \circ g$.

Caso 2. Si f toma el valor v un número n de veces, entonces existen $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ tales que $v = f(w_k)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que g omite dos valores a, b y supongamos que $n = 2$, además $w_1 = a$ y $w_2 = b$. Entonces, no es posible encontrar un valor $z \in D^\circ(z_0, r)$ tal que $f(g(z)) = v$. Es decir, $f \circ g$ omite a v .

Por otro lado, supongamos que existe w_{k_0} que no es omitido por g . Así, tenemos al menos $z_{k_0} \in D^\circ(z_0, r)$ tal que $w_{k_0} = g(z_{k_0})$. De este modo, $f(g(z_{k_0})) = v$, esto es, $f \circ g$ toma al menos una vez.

El caso donde g es una función con singularidad esencial en z_0 se demuestra del mismo modo. Así, el resultado se sigue. ■

Obsérvese que para determinar con exactitud los valores excepcionales de Picard para $f \circ g$ depende de la forma que tenga la función g y quién(es) es(sean) su(s) valor(es) omitido(s). Para ilustrar la aplicación del resultado veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplos 3.17. (a) Sea $h(z) = -i + \sec^2(z)e^{\tan(z)}$. Determinar sus singularidades esenciales, sus valores excepcionales de Picard y clasificarlos si es que existen.

Solución. Recordemos que $\sec^2(z) = 1 + \tan^2(z)$. Luego, $f(z) = -i + (z^2 + 1)e^z$ es trascendente entera, donde f toma a $v_0 = -i$ en $w_1 = -i$ y $w_2 = i$. Por otro lado, hagamos $g(z) = \tan(z)$, la función g tiene polos simples en $z_n = (2n + 1)\pi/2$. Después, $h(z) = f(g(z))$ y h tiene singularidades esenciales en z_n . Ahora, sea $D^\circ(z_n, r)$ una vecindad agujereada de z_n , como g no toma los valores $-i$ e i , se tiene que h omite a $v_0 = -i$ en $D^\circ(z_n, r)$. ■

- (b) Consideremos la función real $h(x) = \sqrt[x-1]{x+1}$, para $x \neq 1$ y $x > -1$. ¿Qué se puede decir acerca de las raíces de la ecuación $h(x) = y_0$, donde $y_0 \in \mathbb{R}$?

Solución. Obsérvese que podemos escribir $h(x) = e^{\frac{\log(x+1)}{(x-1)^2}}$. Aquí se ve que h no toma valores no positivos y es continua en $D = (-1, 1) \cup (-1, +\infty)$. Luego, por un lado, $h(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow -1^+$ y $h(x) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow +\infty$. Por otro lado, $h(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow -1$. Así, podemos decir que para $0 < y$, la ecuación $h(x) = y$ tiene al menos una solución real.

Ahora, mediante complexificación, hagamos $h(z) = e^{\frac{\log(z+1)}{(z-1)^2}}$. Sean $f(z) = e^z$ y $g(z) = \frac{\log(z+1)}{(z-1)^2}$, tomando la rama principal del logaritmo. La función g tiene un único polo en $z_0 = 1$ de orden dos. Así, h tiene una singularidad esencial en $z_0 = 1$. Luego, la función f omite a 0. Por lo tanto, h omite a 0. Es decir, la ecuación $h(z) = 0$ no tiene solución en \mathbb{C} .

De esta manera, la ecuación $y = h(z)$, donde $y < 0$, tiene una infinidad de soluciones en $D^\circ(1, 2)$ no reales. Del mismo modo, en todo \mathbb{C} .

En conclusión, para $y > 0$, la ecuación $h(x) = y$ tiene soluciones, usando derivada se puede mostrar que tiene a lo más dos soluciones. Si complexificamos, entonces $h(z) = y$ tiene una infinidad de soluciones tan cercanas a $z_0 = 1$ como se desee. Para $y < 0$, la ecuación $h(x) = y$ no tiene soluciones reales, pero sí complejas. Del mismo modo, una infinidad tan cercanas como se desee de $z_0 = 1$. Y para el caso $y = 0$, la ecuación $h(x) = 0$ no tiene soluciones reales ni complejas. ■

Para finalizar observemos que si conmutamos la composición, es decir, si queremos hallar los valores excepcionales de Picard de $g \circ f$ bajo las suposiciones del método, este no es suficiente para hallarlos. Por ejemplo, si queremos hallar valores de Picard de $h(z) = \frac{1}{e^z + 1}$. Tomando $g(z) = 1/z$ y $f(z) = e^z + 1$, tenemos $h = g \circ f$. Además, g omite solo a 0, pero h omite a 0 y a 1. Por otro lado, las singularidades de h son de la forma $z_k = (2k + 1)\pi i$, con $k \in \mathbb{Z}$, observe que las singularidades z_k de h no son singularidades esenciales sino polos.

Conclusión

Gracias a la teoría de Montel sobre familias normales es posible comprender la Teoría de Picard y como consecuencia obtener resultados importantes sobre el comportamiento de la clase de funciones trascendentes enteras y la clase de funciones meromorfas.

En el capítulo 2 mostramos que la cerradura de toda familia normal-analítica es compacta en el espacio $\mathcal{H}(G)$ e inversamente. Además que generalizan el Teorema de Bolzano-Weierstrass de análisis real en el espacio de funciones analíticas. Con ayuda del Criterio Fundamental de Normalidad demostramos el Gran Teorema de Picard que juega un papel importante en estudio de funciones con singularidad esencial.

Con el Gran Teorema de Picard, se dieron las condiciones para que se pueda construir una sucesión de soluciones de una ecuación funcional que sea convergente a la singularidad esencial.

Gracias al teorema de Picard es posible caracterizar a las trascendentes enteras de acuerdo al punto excepcional que esta posea. Con esto conocemos las funciones que omiten puntos y toman valores un número finito de veces. Además, utilizando esta propiedad podemos conocer a simple vista las funciones que tienen puntos fijos en la teoría de iteraciones de funciones trascendentes enteras.

Al respecto, con ayuda del Gran Teorema de Picard, probamos que la clase de funciones trascendentes enteras es cerrado bajo composición de funciones, lo que nos permite iterar funciones trascendentes enteras y estudiar sistemas dinámicos holomorfos discretos.

De manera general, es posible hacer composición de funciones con la singularidad esencial idéntica, la resultante es una función con la misma singularidad esencial.

Como se vio en el capítulo 3, mediante una clasificación, los puntos fijos nos proporcionan información sobre la convergencia de la sucesión de iteradas de una función analítica. Esto motiva a definir los conjuntos de Fatou y Julia que se conocen en Dinámica Holomorfa.

Por otro lado, mediante composiciones hablamos del comportamiento de las soluciones de ecuaciones funcionales. Mostramos un método con el que podremos hallar valores excepcionales de una función que involucra singularidades esenciales. Esto último es de gran ayuda porque nos proporciona información sobre la existencia de las soluciones y dónde encontrarlas.

Bibliografía

- [1] AHLFORS, Lars: *Complex analysis*. 3rd ed. New York : McGraw-Hill, 1966.
- [2] ALEXANDER, Daniel S.: *A History of Complex Dynamics: From Schröder to Fatou and Julia*. Vol. 24. USA : Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] BEARDON, Alan F.: *Iteration of rational functions: Complex analytic dynamical systems*. Vol. 132. New York : Springer Science & Business Media, 2000.
- [4] CASARRUBIAS, Fidel & TAMARIZ, Angel: *Elementos de Topología General*. 2da ed. México : Aportaciones Matemáticas, 2012.
- [5] CASTILLO, Carlos I.: *Funciones de variable compleja con aplicaciones a la teoría de números*. – url: <https://www.uv.es/ivorra/Libros/Libros.htm>
- [6] CONWAY, John B.: *Functions of One Complex Variable*. Vol. I. USA : Springer Science & Business Media, 1996.
- [7] GONZALEZ, Mario O.: *Classical Complex Analysis*. New York : Marcel Dekker, Inc., 1991.
- [8] GONZALEZ, Mario O.: *Complex analysis: selected topics*. New York : Marcel Dekker, Inc., 1991.
- [9] GREENE, Robert E. & KRANTZ, Steven G.: *Function theory of one complex variable*. 3rd ed. USA : American Mathematics Society, 2006.
- [10] HUA, Xin-Hua & YANG, Chung-Chun: *Dynamics of transcendental functions*. New Delhi : Gordon and Breach Publishers, 1998.
- [11] IRIBARREN, Ignacio L.: *Topología de espacios métricos*. México : Limusa-Wiley, 1984.
- [12] MARKUSHEVICH, A. I.: *Theory of functions of a complex variable*. 1977
- [13] MARSDEN, Jerrold E. et al.: *Basic Complex Analysis*. 3rd. ed. New York : Macmillan, 1999.
- [14] NOGUCHI, Junjiro: *Introduction to complex analysis*. Vol. 168. USA : Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 1998.
- [15] PIÑEYRO, Pedro José H.: *Topología y Ampliación de la Topología: Espacios compactos*. 2000. – url: <http://www.um.es/docencia/pherrero/compactos.pdf>

- [16] RUDIN, Walter: *Principles of mathematical analysis*. Vol. 3. 3rd ed. New York : McGraw-hill, 1964.
- [17] SCHIFF, Joel L.: *Normal families*. New York : Springer Verlag, 1993.
- [18] SOTO, Patricia D. & HERNANDEZ, Valente C.: *Monografía: Dinámica holomorfa*. México : Textos Científicos BUAP, 2014.