Tesis de Licenciatura

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Sobre Inducción y Recursión

Autor
Martha Angélica Romano Carrillo

Para la obtención del título de
licenciatura en matemáticas

Dirigido por
Iván Martínez Ruíz y Alejandro Ramírez Páramo
Octubre 2025

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas *para el que guste leer esta tesis ♡*

Agradecimientos

Haber seguido este camino de ir probando migajas del gran pancillo que es la matemática fue de las experiencias más bonitas y enriquecedoras para mí. Desde el día uno de esta travesía me encontré con seres maravillosos que me inspiraron amor y pasión y no precisamente sólo por las mates :). Conocí a mi gran amor Edwin, la estrellita brillosita a la que le debo todo el universo, a todos mis amigos y profesores con los que estaré eternamente en deuda. Y claro, nada de esto hubiera sido de no ser por los que ya estaban antes de empezar este recorrido que ocupan un lugarsote en mi alma y corazón. Gracias a mi hermosa familia que me lo ha dado todo. En fin... ¡muchas gracias, gracias infinitas y mágicas a todos!. Los amo.

Índice

Introducción

Como bien sabemos la inducción en matemáticas es un método general de prueba. A través de la historia la inducción matemática ha sido de gran ayuda para contribuir a muchos resultados en la matemática. Se sospecha que fue en el Parménides, de Platón del 370 a.C. donde quizá se hallen los primeros rastros de lo que es una explicación implícita de prueba inductiva. Mientras que la huella más antigua de inducción matemática se puede encontrar en la demostración de Euclides sobre la infinitud de los números primos y en la de Bhaskara I usando su método cíclico. El matemático Al-Karaji introdujo una demostración implícita de la inducción matemática. Sin embargo ninguno de estos antiguos matemáticos explicitó la hipótesis inductiva, fue el filósofo y matemático Blaise Pascal quien estableció la primera formulación explícita sobre el principio de inducción que también emplearía el matemático Jakob Bernoulli y que a partir de entonces se haría un método más popular. Pero la llegada del tratamiento de carácter riguroso y sistemático fue con los matemáticos George Boole, Augustus De Morgan, Charles Sanders Peirce, Giuseppe Peano y Richard Dedekind.

Romantizando al principio de inducción podemos hacer alusión a él como una escalera que nos dejará subir tan alto como deseamos mientras subamos el primer escalón y de ese al siguiente y así sucesivamente. Esto de alguna forma hace representación de cómo consideraba el matemático Poincaré a la inducción matemática y por lo cual significaba mucho para él, ya que según sus palabras: "la contradicción nos impresionará más si abrimos un libro cualquiera de matemáticas; en cada página el autor anunciará la intención de generalizar una proposición ya conocida. ¿Es que, acaso, el método matemático procede de lo particular a lo general? entonces, ¿cómo puede llamársele deductivo? en fin, si la ciencia del número fuera puramente analítica, o pudiera deducirse analíticamente de un pequeño número de juicios sintéticos, pareciera que un espíritu suficientemente potente podría apreciar de una ojeada todas las verdades; ¡qué digo!, podría también esperarse que un día se inventara para expresarlas un lenguaje bastante simple para que

así se revelaran inmediatamente a una inteligencia ordinaria. Si uno se rehúsa a admitir estas consecuencias, es preciso aceptar entonces que el razonamiento matemático tiene por sí mismo una especie de virtud creadora y que, por consiguiente se distingue del silogismo." "Para llegar a eso es preciso necesariamente ir de lo particular a lo general, ascendiendo uno o varios escalones. El procedimiento analítico 'por construcción' no nos obliga a descender, pero nos deja en el mismo nivel. No podemos elevarnos sino por la inducción matemática, única que nos puede enseñar algo nuevo. Sin la ayuda de esta inducción, diferente en cierto sentido de la inducción física, pero fecunda como ella, la construcción sería impotente para crear la ciencia."
Años más tarde el matemático Bertrand Russell daría su opinión acerca de ello:"El uso de la inducción matemática en demostraciones era, en el pasado, un misterio. No parecía haber ninguna duda razonable de que era un método de prueba válido, pero nadie sabía muy bien por qué era válido. Algunos creían que se trataba realmente de un caso de inducción, en el sentido en que se usa esa palabra en lógica. Poincaré lo consideraba un principio de suma importancia, mediante el cual se podía condensar en un solo argumento un número infinito de silogismos. Ahora sabemos que todas esas opiniones son erróneas y que la inducción matemática es una definición, no un principio."

Lo que este trabajo pretende es dar una justificación rigurosa en teoría de conjuntos y cálculo proposicional de la inducción matemática y también del método general de definición conocido como "recursión" pues la recursión y la inducción están estrechamente relacionadas: la recursión es una forma de definir funciones que dependen de sus valores anteriores, y se puede demostrar que la definición produce una única función usando inducción. "Recursión" se usa en el sentido de 'definición por recursión' o 'definición por inducción' , es decir, definir una función f para el argumento x usando los valores previamente definidos. Los significados actuales de recursión y recursivo derivan del verbo 'recurrere' en su sentido de 'volver una cosa al lugar de donde salió'. Una recursión es un procedimiento que define un conjunto o una función y al definirlo apela a elementos de dicho conjunto o a valores de la función.

Este trabajo está organizado en tres partes, en el primer capítulo veremos los teoremas genéricos de inducción y recursión, en el segundo capítulo veremos los teoremas de inducción y recursión en cálculo proposicional y por último, el tercer capítulo será sobre los teoremas de inducción y recursión en teoría de conjuntos.

Capítulo 1

Teoremas genéricos de inducción y recursión

Para comenzar estamos planeando hacer una breve demostración del Principio de inducción para conjuntos $(B, \mathcal{F})-$inductivos, para ello veremos lo siguiente.

Definición 1. *Una relación f es llamada función si $(a,b) \in f$ y $(a,c) \in f$ implica que $b = c$ para cualesquiera a, b, c.*

En otras palabras, una relación f es una función si y solo si para todo $a \in domf$ hay exactamente un b tal que $(a,b) \in f$.Este único b es llamado valor de f en a y es usualmente denotado por $f(a)$; aunque en algunas ocasiones es muy conveniente la notación f_a.
Si f es una función con $domf = A$ y $ranf \subseteq B$, entonces $f = \{(a, f(a)) : a \in A\}$ y es costumbre emplear la notación $f : A \longrightarrow B$ para denotar la función f;o de manera más precisa:
$f : A \longrightarrow B$
$a \mapsto f(a)$

Definición 2. *Sea U un conjunto (no vacío). Diremos que f es una operación $n-$aria en U, si f es una función de U^n en U.*

Dado $n \in \mathbb{N}$, denotamos $\mathcal{F}_U^n$ a la colección de operaciones n-arias sobre un conjunto dado, U, y empleamos $\mathcal{F}_U$ para denotar al conjunto $\bigcup\{\mathcal{F}_U^n : n \in \mathbb{N}\}$

Mostraremos ejemplos de funciones definidas que son operaciones $n-arias$ sobre algún conjunto:

Ejemplo 1. *Sea*
f:$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(a,b,c) \mapsto a(b+c)$

Queremos probar que f es operación 3-aria entonces tiene que cumplir con la ***Definición*** *1 y con la* ***Definición*** *2. Primero chequemos que satisface la* ***Definición*** *1. Nuestro dominio es $\mathbb{R}^3$, entonces si nosotros tomamos $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, a está en $\mathbb{R}$, b está en $\mathbb{R}$ y c está en $\mathbb{R}$. Sabemos que $\mathbb{R}$ es cerrado bajo la suma. Como $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces $(b+c) \in \mathbb{R}$. Sabemos que $\mathbb{R}$ también es cerrado bajo el producto. Como $(b+c) \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, $a(b+c) \in \mathbb{R}$. Por lo tanto para todo $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a(b+c) \in \mathbb{R}$. Por lo tanto f es una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$. Ahora veamos si cumple la* ***Definición*** *2. Sabemos que $\mathbb{R}$ es un conjunto no vacío y f es una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ por lo tanto f es una función $3-aria$ en $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 2. *Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{P}(X)$ el conjunto potencia de X; es decir, $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$. Consideremos*
$f : \mathcal{P}(X)^3 \longrightarrow \mathcal{P}(X)$
$(A,B,C) \mapsto A \cap (B \cup C)$

Comprobemos que cumple con la ***Definición*** *1. Por definición de producto cartesiano* $\mathcal{P}(X)^3 = \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) = \{(A,B,C) : A \in \mathcal{P}(X), B \in \mathcal{P}(X), C \in \mathcal{P}(X)\}$

Veamos que f es función. Una relación f es función si y sólo si para todo $a \in \mathrm{dom} f$ hay exactamente un b tal que $(a,b) \in f$. En este caso tomamos (A,B,C) del $\mathrm{dom} f$ que es $\mathcal{P}(X)^3$ entonces $A,B,C \subseteq \mathcal{P}(X)$, sabemos que la unión de subconjuntos de X es otro subconjunto de X y la intersección de subconjuntos de X también es subconjunto de X. Por lo tanto existe un $D = A \cap (B \cup C)$ subconjunto de X por ende $A \cap (B \cup C) \subseteq \mathcal{P}(X)$. Por lo tanto f es función de $\mathcal{P}(X)^3$ a $\mathcal{P}(X)$ y una operación $3-aria$ sobre $\mathcal{P}(X)$.

Definición 3. *Sean X y U conjuntos tales que $X \subseteq U$ y sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_U$. Decimos que X es $\mathcal{F}$-cerrado si para todo $f \in \mathcal{F}$, para todo a en $X, f(a)$ es una operación en X y lo vamos a denotar como $f|_X$*

Veamos ejemplos de si un conjunto es $\mathcal{F}-$cerrado o no.

Ejemplo 3. *Sea $U = \mathbb{R}$ y tomemos al conjunto $\mathbb{N}$. Consideremos el siguiente conjunto de operaciones $\mathcal{F} = \{f_+, f_-\}$ donde f_+ y f_- son definidas como a continuación:*

$f_+ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(a,b) \mapsto (a+b)$

y

$f_- : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(a, b) \mapsto (a - b)$

Para que $\mathbb{N}$ *sea* $\mathcal{F}$*-cerrado,* $f_+|_\mathbb{N}$ *y* $f_-|_-$ *deben ser operaciones en* $\mathbb{N}$. *Puesto que la suma de dos enteros es un entero, evidentemente* $f_+|_\mathbb{N}$ *es una operación en* $\mathbb{N}$. *Sin embargo, si* $f_-|_\mathbb{N}((2,3)) = -1 \notin \mathbb{N}$*; luego,* $\mathbb{N}$ *no es* $\mathcal{F}$*-cerrado.*

Ejemplo 4. *Sea* $U = \mathbb{R}$*, tomemos a* $\mathbb{Z}$ *y veamos que es* $\mathcal{F}$*-cerrado con* $\mathcal{F} = \{f_+, f_-\}$ *donde*

$f_+ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(a, b) \mapsto (a + b)$

y

$f_- : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(a, b) \mapsto (a - b)$

Sabemos que $\mathbb{Z}$ *es cerrado bajo las operaciones* f_+ *y* f_-. *Por lo tanto* $\mathbb{Z}$ *es* $\mathcal{F}$*-cerrado.*

Ejemplo 5. *Sea* $U = \mathbb{R}$*, tomemos nuevamente a* $\mathbb{Z}$ *y ahora consideremos a* $\mathcal{F} = \{f_\cdot, f_/\}$*, donde*

$f_\cdot : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(a, b) \mapsto (a \cdot b)$

y

$f_/ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(a, b) \mapsto (\frac{a}{b})$

$\mathbb{Z}$ no es $\mathcal{F}$-cerrado, pues si tomamos a $2, 3$ de $\mathbb{Z}$, $f_/(2, 3) = \frac{2}{3}$ entonces $f_/(2, 3)$ no está en $\mathbb{Z}$.

Ejemplo 6. *Sea $U = \mathbb{R}$, tomemos a $\mathbb{Q}$ y veamos que es $\mathcal{F}$-cerrado con $\mathcal{F} = \{f_., f_/\}$ donde*

$f_. : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$(a, b) \mapsto (a \cdot b)$

y

$f_/ : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$(a, b) \mapsto (\frac{a}{b})$

como para todo a, b positivos en $\mathbb{Q}$, $f.$ y $f_/$ están en $\mathbb{Q}$ entonces $\mathbb{Q}$ es $\mathcal{F}$-cerrado.

Como habíamos quedado, ya que vimos lo que es una operación $n-aria$ sobre algún conjunto y un conjunto $\mathcal{F}-$cerrado ahora sí vamos a exponer la definición de que un conjunto sea $(B, \mathcal{F})-$inductivo y con ello algunos ejemplos de conjuntos $(B, \mathcal{F})-$inductivos.

Definición 4. *Sean B y U conjuntos tales que $B \subseteq U$ y sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_U$. Un subconjunto $X \subseteq U$ es $(B, \mathcal{F})$-inductivo si las condiciones siguientes se satisfacen:*

1. *$B \subseteq X$.*
2. *X es $\mathcal{F}$-cerrado.*

Ejemplo 7. *Sean U un conjunto, B subconjunto de U y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_U$ una colección de operaciones sobre U, entonces U es $(B, \mathcal{F})-$inductivo. Pues $U \subseteq U$, $B \subseteq U$ y U es $\mathcal{F}$-cerrado.*

Ejemplo 8. *Sean $U = \mathbb{Z}, B = \{1\}$ y $\mathcal{F} = \{s\}$ donde s es la operación sucesor $s(r) = r+1$. Entonces $\mathbb{N}$ es $(\{1\}, \{\mathcal{F}\})$-inductivo, pues $1 \in \mathbb{N}$ y si $r \in \mathbb{N}, r + 1 \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 9. *Sean $U = \mathbb{R}$, $B = \{1\}, \mathcal{F} = \{f, g\}$ donde las funciones f y g son las funciones siguientes $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la función definida como sigue $f(x, y) = x \cdot y$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $g(x) = x + 1$. Entonces $\mathbb{N}$ es $(\{1\}, \mathcal{F})$-inductivo, pues $1 \in \mathbb{N}$; si $m, n \in \mathbb{N}$ entonces $m \cdot n \in \mathbb{N}$ y si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$.*

Para el ejemplo siguiente sabemos que $\mathbb{N}$ es el mínimo conjunto inductivo en el sentido usual.

Ejemplo 10. *Ahora sean* $U = \mathbb{N}, B = \{1\}, f(n) = n + 1$.
Si $A \subseteq \mathbb{N}$ *es* $(\{1\}, \{f\})$*-inductivo, implica que* $1 \in A$ *y si* $n \in A$*, entonces* $f(n) = n+1 \in A$*; es decir si* $n \in A$*, entonces* $n + 1 \in A$*. Entonces acabamos de ver también que* A *es inductivo en el sentido usual. De aquí que* $\mathbb{N} = A$.

Ejemplo 11. *Sean* $U = \mathbb{R}, B = \{1\}, \mathcal{F} = \{s, p\}$*, donde* s *es la operación sucesor* $s(r) = r + 1$ *y* p *es la operación predecesor* $p(r) = r - 1$*. Entonces* $\mathbb{Z}$ *es* $(\{1\}, \{\mathcal{F}\})$*- inductivo, pues* $1 \in \mathbb{Z}$ *y si* $r \in \mathbb{Z}, r + 1 \in \mathbb{Z}$ *y* $r - 1$ *también.*

En álgebra, un conjunto generador de un grupo G es un subconjunto B de G tal que todo elemento de G puede ser expresado como el producto de un número finito de elementos de B y de sus inversos.

Ejemplo 12. *Sea* $G = \langle G, \cdot, e\rangle$ *un grupo generado por un conjunto* $B \subseteq G$ *de generadores,* $\mathcal{F} = \{\cdot\}$*. Entonces* G *es* $(B, \mathcal{F})-$ *inductivo, pues claramente* B *es subconjunto de* G *y* G *es* $\mathcal{F}-$ *cerrado pues* G *es un grupo con la operación* $\{\cdot\}$.

Para el último ejemplo veamos las siguientes definiciones:

Definición 5. *Una función* f *es una función polinomial si* $f(x)$ *es un polinomio; es decir, si* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$*, donde los coeficientes* $a_0, a_1, ..., a_n$ *son números reales y los exponentes son enteros no negativos.*

Un par de ejemplos de funciones polinomiales:

* Veamos que $f(x) = 6x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x$ es una función polinomial, pues $6x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x$ es un polinomio.

** $g(x) = 5x^3 + 4x^2 - 2x$ es función polinomial pues $5x^3 + 4x^2 - 2x$ es un polinomio.

Un par de ejemplos de funciones no polinomiales

* Veamos que $h(x) = 4x^{\sqrt{2}} + 3x + 1$ no es una función polinomial porque raíz cuadrada de dos no es un número entero entonces $4x^{\sqrt{2}} + 3x + 1$ no es un polinomio.

** $j(x) = 3x^e + 7x^\pi$ no es una función polinomial porque e y π no son enteros por lo tanto $j(x)$ no es un polinomio.

Definición 6. *Una función algebraica es una función que se puede expresar en términos de sumas finitas, diferencias, productos, cocientes o raíces de funciones polinomiales*

Ejemplos de funciones algebraicas:

- $f(x) = \frac{5x^4 - 2x^3 + x(x+5)}{2x^2 + x}$ es una función algebraica porque es un cociente de polinomios.

- $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 2$ es una función algebraica porque es un polinomio.

- $f(x) = 3x^e + 7x^\pi$ no es una función algebraica porque $f(x)$ no es función polinomial.

Ejemplo 13. *Sea A un conjunto no vacío de números reales. Ahora vamos a denotar:*

- *U_A al conjunto de funciones con dominio en A y rango contenido en el conjunto de los números reales. Es decir $U_A = \{f | f : A \to \mathbb{R}\}$*

- *$B = \{I | I : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R},$ para toda $x(I(x) = x)\} \cup \{C_r | C_r : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R},$ para toda $x \in A(C_r(x) = r), r \in \mathbb{R}\}$, que son la función identidad y la función constante r (donde el subíndice r que empleamos en "C_r"nos indica la constante r).*

- *$\mathcal{F}$ ={suma de funciones, multiplicaciones de funciones, división de funciones, extracción de raíz de funciones}, conjunto de operaciones sobre U_A.*

Ahora tomemos de U_A el conjunto de las funciones algebraicas $\mathbb{A}$ y veamos que es $(B, \mathcal{F})-$inductivo:

I) Primero chequemos que $B \subseteq \mathbb{A}$.Notemos que la función identidad: $I(x) = x$ que podemos ver como $I(x) = ax^0 = a$ es la forma de un polinomio de grado cero y que también la función constante r que por cada r en $\mathbb{R}$ $C_r(x) = r$ de igual manera tiene forma de un polinomio de grado cero, tenemos entonces que ambas son funciones y son polinomios entonces son funciones polinomiales y por lo tanto son funciones algebraicas y como B es subconjunto de U_A son funciones algebraicas con dominio en A y rango en $\mathbb{R}$. Por lo tanto $B \subseteq \mathbb{A}$.

II) $\mathbb{A}$ es $\mathcal{F}-$cerrado pues como $\mathbb{A}$ es subconjunto de U_A son funciones algebraicas con dominio en A y rango en $\mathbb{R}$ y por definición sabemos que las funciones algebraicas se expresan en términos de sumas, diferencias, productos, cocientes o raíces de funciones.

Por I) y II) $\mathbb{A}$ es $(B, \mathcal{F})-$inductivo.

Buscamos demostrar el Principio de inducción para conjuntos $(B, \mathcal{F})-$inductivos y veremos que este principio nos dirá que si un conjunto es $(B, \mathcal{F})-$inductivo entonces el menor de estos estará contenido en ese conjunto $(B, \mathcal{F})-$inductivo, por lo que surgirá la duda de ¿cuál es el menor conjunto $(B, \mathcal{F})-$inductivo?

Lema 1. *Sean U y B conjuntos tales que $B \subseteq U$ y sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_U$. Entonces*

1. $\mathcal{C} = \{I \subseteq U : I$ *es* $(B, \mathcal{F})$*-inductivo*$\} \neq \emptyset$

2. $\bigcap \mathcal{C}$ *es un conjunto* $(B, \mathcal{F})$*-inductivo.*

Demostración. Para 1 : $\mathcal{C}$ no es vacío porque U es un conjunto $(B, \mathcal{F})$-inductivo, pues $B \subseteq U$ y U es $\mathcal{F}$-cerrado.

Para 2 : Dado que para todo $I \in \mathcal{C}$, se cumple que I es $(B, \mathcal{F})$-inductivo, tenemos que $B \subseteq I$, entonces $B \subseteq \bigcap\{I \subseteq U : I \in \mathcal{C}\} = \bigcap \mathcal{C}$. Por lo tanto $B \subseteq \cap \mathcal{C}$.

Resta probar que $\cap \mathcal{C}$ es $\mathcal{F}$-cerrado. Sea $f \in \mathcal{F}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f : U^m \to U$. Sean $x_1, ..., x_m \in \bigcap \mathcal{C}$, entonces, para todo $I \in \mathcal{C}$, tenemos que $x_1, ..., x_m \in I$; luego dado que cada $I \in \mathcal{C}$ es inductivo, obtenemos que $f(x_1, ..., x_m) \in I$, para cada $I \in \mathcal{C}$. Así que $f(x_1, ..., x_m) \in \bigcap \mathcal{C}$. Por lo tanto $\bigcap \mathcal{C}$ es $(B, \mathcal{F})$-inductivo. ∎

Definición 7. *Sean $U, B, \mathcal{F}$ y $\mathcal{C}$ como en el lema anterior, llamamos generado por $\mathcal{F}$ sobre B a $\bigcap \mathcal{C}$ que es el menor conjunto $(B, \mathcal{F})-$inductivo y lo denotamos como B^*.*

Ha llegado el momento de citar el Principio de Inducción para conjuntos $(B, \mathcal{F})-$inductivos con su respectiva demostración y un ejemplo empleándolo.

Teorema 1. *Principio de Inducción (para conjuntos (B, $\mathcal{F}$)-inductivos).* *Sean $U, B, \mathcal{F}$ y $\mathcal{C}$ como en el lema anterior, si $X \subseteq U$ es $(B, \mathcal{F})$-inductivo entonces $B^* \subseteq X$.*

Demostración. En efecto si X es $(B, \mathcal{F})$-inductivo, entonces $X \in \mathcal{C}$, entonces $\cap \mathcal{C} \in X$. Por lo tanto $B^* \subseteq X$. ∎

Ejemplo:

Ejemplo 14. *Sean $X \subseteq \mathbb{N}$ inductivo en el sentido usual, $B = \{1\}$ y $\mathcal{F} = \{f\}$; donde $f(n) = n+1$. Veamos que X es $(B, \mathcal{F})$-inductivo. Como X es inductivo, entonces $1 \in X$. Por lo tanto $B \subseteq X$. Luego si $n \in X$, entonces dado que X es inductivo tenemos que $n+1 \in X$, pero $n+1 = f(n)$; luego, $f(n) \in X$. Por lo tanto para todo $n \in X$, $f(n) \in X$. Con todo X es $(B, \mathcal{F})$-inductivo. Aún más, claramente si $X \subseteq \mathbb{N}$ es $(B, \mathcal{F})$-inductivo entonces X es inductivo en el sentido de la definición usual.*

NOTACIÓN: Dados U, B y $\mathcal{F}$ como antes. Dado $X \subseteq U$, denotamos $X^{\mathcal{F}} = \bigcup\{f(X) : f \in \mathcal{F}\}$.

Definición 8. *Dados U, B y $\mathcal{F}$ como antes, definimos la clausura $(B, \mathcal{F})$-inductiva, denotada B_*, como $B_* = \bigcup\{B_n | n \in \mathbb{N}\}$; donde, para cada $n \in \omega$,*

1. $B_0 = B$
2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = B_n \cup B_n^{\mathcal{F}}$*

Teorema 2. *Dados U, B y $\mathcal{F}$ como antes, entonces: $B^* = B_*$.*

Demostración. Demostremos que:

- $B^* \subseteq B_*$
- $B_* \subseteq B^*$

Probemos primero

- $B^* \subseteq B_*$

Por el ***Teorema 1 Principio de Inducción (para conjuntos (B, $\mathcal{F}$)-inductivos)*** es suficiente con verificar que B_* es $(B, F)-$inductivo.
Veamos que $B \subseteq B_*$. Dado que $B_* = \bigcup\{B_n : n \in \omega\}$, tenemos que $B_0 \subseteq \bigcup\{B_n : n \in \omega\}$ y $B_0 = B$, entonces $B \subseteq B_*$.

Ahora vereos que B_* es $\mathcal{F}$-cerrado. Sea $f \in \mathcal{F}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ de tal forma que $f : U^m \to U$. Ahora sean $x_1, ..., x_m$ elementos de B_*. Para cada j en $i, ..., m$, existe n_j en ω tal que x_j en B_{n_j}. Sea $m_0 = \text{máx}\{n_j : j \in i, ..., m\}$, entonces $B_{n_j} \subseteq B_{m_0}$; luego, $x_j \in B_{m_0}$, para cada $1 \leq j \leq m$; así que $f((x_1, ..., x_m)) \in B_{m_0}^{\mathcal{F}} \subseteq B_{m_0+1} \subseteq B_*$. Por lo tanto B_* es $\mathcal{F}$-cerrado.

Con todo, concluimos que B_* es $(B, \mathcal{F})$-inductivo.

Probemos ahora

- $B_* \subseteq B^*$

Notemos que el hecho de que B^* es $(B, \mathcal{F})$-inductivo, tenemos que $B \subseteq B^*$. Vamos a desmotrar, por inducción, que para todo $n \in \mathbb{N}$, $B_n \subseteq B^*$.

Supongamos ahora que para $n = m$ se cumple que $B_m \subseteq B^*$. Por demostrar que

$B_{m+1} \in B^*$. Como B^* es $(B, \mathcal{F})$-inductivo, entonces B^* es $\mathcal{F}$-cerrado; luego, para cada $f \in \mathcal{F}$, tenemos que $f(B_m) \subseteq B^*$. De aquí que $B_m^{\mathcal{F}} \subseteq B^*$, así que $B_{m+1} = B_m \cup B_m^{\mathcal{F}} \subseteq B^*$.

Con todo, $B_* \subseteq B^*$.

Como $B^* \subseteq B_*$ y $B_* \subseteq B^*$ entonces $B^* = B_*$. ■

Supongamos que C está generado a partir del conjunto $B = \{a, b\}$ por la operación binaria f y la operación unaria g. $\mathcal{F} = \{f, g\}$. Recordemos la definición de B_n, para $n \in \mathbb{N}$. Entonces $C = B^* = B_*$.

Estaremos empleando el siguiente par de funciones: s, el operador sucesor $s(n) = n + 1$ y p, el operador predecesor $p(n) = n - 1$.

Como habíamos mencionado la recursión y la inducción están estrechamente relacionadas: mientras la recursión proporciona el mecanismo constructivo para definir funciones u objetos, la inducción asegura que tales definiciones son correctas. La recursión permite la definición rigurosa de funciones fundamentales y facilita la formalización de estructuras básicas sirviendo como pilar de sistemas axiómaticos. Chequemos el siguiente ejemplo para tener una idea más clara de la importancia de la recursión.

Ejemplo 15. *Recordemos el par de funciones: s, el operador sucesor $s(n) = n + 1$ y p, el operador predecesor $p(n) = n - 1$.*

Consideremos la función $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que:

- $h(0) = 0$

- $h(s(n)) = h(n) + 1$
- $h(p(n)) = h(n) + 2$

Y además:

- $\mathbb{Z}$ *está generado por* $\{s, p\}$ *sobre* 0.

- *Vamos a tomar las funciones:*
  - $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *tal que* $f(m) = m + 1$
  - $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *tal que* $g(m) = m + 2$
  - $c : \{0\} \to \mathbb{Z}$ *tal que* $c(0) = 0$.

s y p son inyectivas y generan a $\mathbb{Z}$ sobre $\{0\}$. Entonces $h(0) = c(0)$ y $h(s(n)) = f(h(n))$ y $h(p(n)) = g(h(n))$. Entonces ¿h está bien definida?

Obsérvemos que $h(2) = h(s(1)) = h(1) + 1 = 1 + 1 = 2$
pues $h(1) = h(s(0)) = f(h(0)) = f(c(0)) = f(0) = 0 + 1 = 1$ pero $h(1) = h(p(2)) = g(h(2)) = g(2) = 2 + 2 = 4$ y $1 \neq 4$ Observemos que $s(0) = 1 = p(2)$. También $h(0) = 0$ y $h(0) = h(p(1)) = g(h(1)) = g(1) = 1 + 2 = 3$ por lo tanto $h(0) = 3$!
Por lo tanto h no está bien definida.

Ahora introduciremos las siguientes definiciones y el siguiente lema:

Definición 9. *Sea J una familia de conjuntos, denotamos a la unión de J como $\bigcup J$ y $\bigcup J = \{x |$ hay un $T \in J$ tal que $x \in J\}$.*

Definición 10. *Las funciones f y g son llamadas compatibles si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in (dom(f) \cap dom(g))$. Un conjunto $\mathcal{F}$ se llama sistema compatible de funciones si cualesquiera dos elementos de $\mathcal{F}$ son funciones compatibles.*

Lema 2. *si $\mathcal{F}$ es un sistema compatible de funciones, entonces:*

1. *$\bigcup \mathcal{F}$ es una función.*
2. *$dom(\bigcup \mathcal{F})$ e $im(\bigcup \mathcal{F})$.*
3. *Para cada $f \in \mathcal{F}$, se cumple que $(\bigcup \mathcal{F}) = f(x)$.*

Demostración.

1. Demostremos que $\bigcup \mathcal{F}$ es una función:
   Supongamos que para todo $f, g \in \mathcal{F}$ y todo $x \in (dom(f) \cap dom(g))$ se tiene que $f(x) = g(x)$. Queremos probar que $\bigcup \mathcal{F}$ es función, es decir: si $(x, y) \in \bigcup \mathcal{F}$ y $(x, z) \in \bigcup \mathcal{F}$, entonces $y = z$. Si $(x, y) \in \bigcup \mathcal{F}$ entonces existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $(x, y) \in f$, es decir $x \in dom(f)$ y $y = f(x)$. De igual modo, $(x, z) \in \bigcup \mathcal{F}$ implica que existe $g \in \mathcal{F}$ con $x \in dom(g)$ y $z = g(x)$. Entonces $x \in (dom(f) \cap dom(g))$, y por la hipótesis $f(x) = g(x)$, por lo tanto $y = z$. Esto prueba que $\bigcup \mathcal{F}$ asigna a cada x como máximo un valor, es decir, $\bigcup \mathcal{F}$ es función.

2. $dom(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} dom(\mathcal{F})$:
   Primero recordemos que si R es una relación, $dom(R) = \{x : existe (x, y) \in R\}$.
   Demostremos primero que $dom(\bigcup \mathcal{F}) \subseteq \bigcup_{f \in \mathcal{F}} dom(\mathcal{F})$.
   Sea $x \in dom(\bigcup \mathcal{F})$. Entonces por definición existe y tal que $(x, y) \in \bigcup \mathcal{F}$. Por pertenencia a la unión, existe $f \in \mathcal{F}$ con $(x, y) \in f$. De eso se sigue que $x \in dom(f)$. Por lo tanto $dom(\bigcup \mathcal{F}) \subseteq \bigcup_{f \in \mathcal{F}} Dom(\mathcal{F})$.
   Ahora demostremos que $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} dom(\mathcal{F}) \subseteq dom(\bigcup \mathcal{F})$. Sea $x \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} Dom(\mathcal{F})$. Entonces existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $x \in dom(f)$. Por definición de dominio existe y con $(x, y) \in f$. Pero $f \subseteq \bigcup \mathcal{F}$, así que $(x, y) \in \bigcup \mathcal{F}$, lo que implica que $x \in dom(\bigcup \mathcal{F})$. De ahí sigue que $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} dom(\mathcal{F}) \subseteq dom(\bigcup \mathcal{F})$.
   Como $dom(\bigcup \mathcal{F}) \subseteq \bigcup_{f \in \mathcal{F}} dom(\mathcal{F})$ y $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} dom(\mathcal{F}) \subseteq dom(\bigcup \mathcal{F})$ entonces $dom \bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} dom(\mathcal{F})$.
   $Im(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} Im(\mathcal{F})$:
   Primero demostremos que $Im(\bigcup \mathcal{F}) \subseteq \bigcup_{f \in \mathcal{F}} Im(\mathcal{F})$. Supongamos que $y \in Im(\bigcup \mathcal{F})$. Entonces existe x tal que $(x, y) \in \bigcup \mathcal{F}$. Por la definición de unión existe $f \in \mathcal{F}$ con $(x, y) \in f$. En particular $y \in Im(f)$, así que $y \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} Im(f)$.
   Ahora demostremos que $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} Im(\mathcal{F}) \subseteq Im(\bigcup \mathcal{F})$:
   Sea $y \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}} Im(\mathcal{F})$. Entonces existe $f \in \mathcal{F}$ y algún x tal que $(x, y) \in f$. Como $f \subseteq \bigcup \mathcal{F}$, tenemos que $(x, y) \in \bigcup \mathcal{F}$ y por lo tanto $y \in Im(\bigcup \mathcal{F})$.
   Como $Im(\bigcup \mathcal{F}) \subseteq \bigcup_{f \in \mathcal{F}} Im(\mathcal{F})$ y $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} Im(\mathcal{F}) \subseteq Im(\bigcup \mathcal{F})$.Por lo tanto $Im(\bigcup \mathcal{F}) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} Im(\mathcal{F})$.

3. Para cada $f \in \mathcal{F}$, se cumple que $(\bigcup \mathcal{F})(x) = f(x)$:
   Sean x_1, x_2 tales que $x_1 = x_2$ con $x_1 \in dom(f)$ para $f \in \mathcal{F}$ y $x_2 \in dom(g)$ para $g \in \mathcal{F}$. Como $x_1 \in dom(f)$ entonces $(x_1, f(x)) \in f \subseteq \bigcup \mathcal{F}$ y $x_2 \in dom(g)$entonces $(x_2, g(x_2)) \in g \subseteq \bigcup \mathcal{F}$. Entonces $\bigcup \mathcal{F}(x_1) = f(x_1)$ y $\bigcup \mathcal{F}(x_2) = g(x_2)$. Pero $x_1 \in (dom(f) \cap dom(g)), x_2 \in (dom(f) \cap dom(g))$ y f, g son compatibles entonces $f(x_1) = g(x_2)$.Entonces $\bigcup \mathcal{F}(x_1) = f(x_1) = \bigcup \mathcal{F}(x_2) = g(x_2)$. Por lo tanto para

$x \in dom(f), \bigcup \mathcal{F} = f(x)$ para $f \in \mathcal{F}$.

$\blacksquare$

Definición 11. *Sean U, B y $\mathcal{F}$ como antes. Sea $C \subseteq U$, decimos que C está libremente generado por $\mathcal{F}$ sobre B si y solo si $C = B^*$ y*

I) *Para toda $f \in \mathcal{F}$ (pongamos de n argumentos) f es $1-1$ respecto a C es decir,*

$$si \begin{cases} x_1, ..., x_n \in C \\ y_1, ..., y_n \in C \end{cases}$$

$$y \; f(x_1, ..., x_n) = f(y_1, ..., y_n) \; entonces \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n = y_n \end{cases}$$

II) *Las imágenes de cualquiera dos $f, g \in \mathcal{F}$ con $f \neq g$, en C son disjuntas entre sí:*
Si $f \neq g$ (pongamos f de n argumentos y g de m argumentos) $f, g \in \mathcal{F}$ y $x_1, ..., x_n \in C$, $y_1, ..., y_m \in C$, entonces $f(x_1, ..., x_n) \neq g(y_1, ..., y_m)$

III) *La imagen de cualquier $f \in \mathcal{F}$ es disjunta de B:*
Si $f \in \mathcal{F}$(pongamos de n argumentos) y $x_1, ..., x_n \in C$ entonces $f(x_1, ..., x_n) \notin B$.

Ejemplos

Ejemplo 16. *Sean $U = \mathbb{R}$, $C = \mathbb{N}$, $B = \{0\}$ y $\mathcal{F} = \{s\}$. Veamos que C está libremente generado por $\mathcal{F}$ sobre B.*

Probemos i). Tomemos $k, m \in \mathbb{N}$ con $k \neq m$, entonces $(s(k)) = k + 1$ y $(s(m)) = m + 1$, pero si $(s(k)) = (s(m))$, entonces $k + 1 = m + 1$ por lo que $k = m$; lo que es una contradicción porque habíamos supuesto $k \neq m$. Luego, si $k \neq m$ con $k, m \in \mathbb{N}$, entonces $(s(n)) \neq (s(m))$. Por lo tanto s es inyectiva. Por lo tanto se cumple i).

Probemos ii) Como s es la única operación se cumple ii) pues no hay otra operación generadora con la cual comparar.

Probemos iii) 0 *no es un sucesor de ningún número natural por lo tanto se cumple iii).*

Por lo tanto por i),ii) y iii) se cumple que sea $C = \mathbb{N}$ *está libremente generado por* $\mathcal{F} = \{s\}$ *sobre* $B = \{0\}$.

Ejemplo 17. *Consideremos* $U = \mathbb{R}, C = \mathbb{Z}, \mathcal{F} = \{s, p\}$ *y* $B = \{0\}$. *Veamos que* C *no está libremente generado por* $\mathcal{F}$ *sobre* B.

C *no está libremente generado por* $\mathcal{F}$ *sobre* B *porque* $ii)$ *de la **definición** 11 no se cumple debido a que las imágenes de* s, p *no son disjuntas entre sí, ya que* $s(2) = 2 + 1 = 3$ *y* $p(4) = 4 - 1 = 3$ *es decir* $s(2) = p(4)$.

Ejemplo 18. *Consideremos* $A \subseteq \mathbb{R}, U_A = \{f | f : A \to \mathbb{R}\}, C =$ *conjunto de las funciones algebraicas* $\mathbb{A}$, $\mathcal{F} =$*{suma de funciones, multiplicaciones de funciones, división de funciones, extracción de raíz de funciones},* $B = \{I | I : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R},$ *para todo* $x\ (I(x) = x)\} \cup \{C_r | C_r : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R},$ *para todo* $x (C_r(x) = x\}$. *Veamos que* C *no está libremente generado por* $\mathcal{F}$ *sobre* B

C *no está libremente generado por* $\mathcal{F}$ *sobre* B *porque no cumple* $i)$ *de la **definición** 11 ya que la suma de funciones no es inyectiva respecto a* $\mathbb{A}$. *Pues si tomamos la función algebráica* $5x^2 + 3x$ *y le sumamos la función algebraica* $3x^2 + 2x$ *es igual a* $8x^2 + 5x$, *pero si tomamos* $6x^2 + x$ *y le sumamos* $2x^2 + 4x$ *también nos da* $8x^2 + 5x$.

Teorema 3. *(**Teorema de recursión**) Sean* U *un conjunto,* $B \subseteq U$, $\mathcal{F}$ *un conjunto de operaciones sobre* U *y* C *un conjunto libremente generado por* $\mathcal{F}$ *sobre* B.
Si V *es un conjunto tal que:*

- *hay* $h : B \to V$
- *para cada* $f \in F$ *de* n *agumentos, hay una* $\hat{f} : V^n \to V$.

Entonces hay una única $h^* : C \to V$ *tal que:*

a) $h^*(b) = h(b)$ *para todo* $b \in B$ *(es decir* $h \subseteq h^*$*).*

b) Para cualquier $f \in \mathcal{F}$(de n argumentos) y cualesquiera $x_1, ..., x_n \in C$
$h^*(f(x_1, ..., x_n)) = \hat{f}(h^*(x_1), ..., h^*(x_n))$.

Dicho algebraicamente: con las mismas hipótesis, cualquier función $h : B \to V$ puede extenderse a un homomorfismo h^*
$h^* : \langle C, \mathcal{F} \rangle \to \langle V, \hat{\mathcal{F}} \rangle$ donde $\hat{\mathcal{F}} = \{\hat{f}/f \in \mathcal{F}\}$.
Dicho con un diagrama;con las mismas hipótesis:

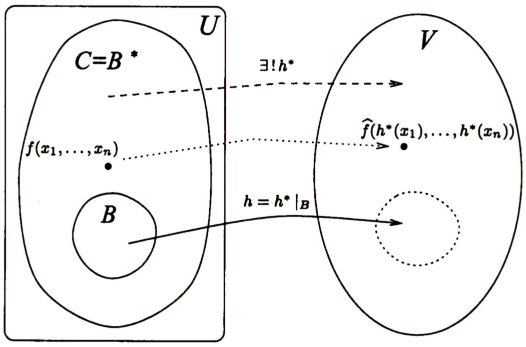

Figura 1.1: *f(operación n−aria sobre U) $\hat{f}$(operación n−aria sobre V)*

Definición 12. *Sean U un conjunto, $B \subseteq U$, $\mathcal{F}$ un conjunto de operaciones sobre U y C un conjunto libremente generado por $\mathcal{F}$ sobre B. Diremos que v es función adecuada si*

1. *v es función, $dom(v) \subseteq C$ e $Im(v) \subseteq V$.*
2. *Si $b \in (B \cap dom(v))$ entonces $v(b) = h(b)$.*
3. *Si $f(x_1, ..., x_n) \in dom(v)$ entonces $x_1, ..., x_n \in dom(v)$ y $v(f(x_1, ..., x_n)) = \hat{f}(v(x_1), ..., \boldsymbol{v}(x_n))$.*

Proposición 1. *Sean U un conjunto, $B \subseteq U$, $\mathcal{F}$ un conjunto de operaciones sobre U y C un conjunto libremente generado por $\mathcal{F}$ sobre B. Si $A = \{v | v$ es una función adecuada $\}$, el conjunto de todas las funciones adecuadas, entonces $h \in A$.*

Demostración.

- Por definición h es función, con $Im(h) = V$ y $dom(h) = B$ pero C es libremente generado por $\mathcal{F}$ sobre B entonces $B \subseteq C$, así $dom(h) \subseteq C$.
- $dom(h) = B$, entonces $(B \cap dom(h)) = (B \cap B) = B$ y si $b \in B$ entonces $h(b) = h(b)$.
- Como C es es un conjunto libremente generado por $\mathcal{F}$ sobre B, $f(x_1, ..., x_n)$ no

puede estar en $dom(h) = B$. Entonces está condición nunca se cumple.

Por lo tanto h es adecuada.

■

Lema 3. *Cualesquiera dos funciones adecuadas son compatibles.*

Demostración. Tomemos $v, w \in A$. Como v y w son funciones adecuadas, $dom(v) \subseteq C$ y $dom(w) \subseteq C$ y queremos ver que son compatibles, es decir,$v(x) = w(x)$ para todo $x \in dom(v) \cap dom(w)$.
Entonces vamos a probar por el ***Teorema 1. Principio de Inducción (para conjuntos (B, $\mathcal{F}$)-inductivos)*** que:

Para todo $x \in C[x \in (dom(v) \cap dom(w))]$ entonces $v(x) = w(x)]$

Vamos a denotar por $\mathcal{M}$ a $\{$Para todo $x \in C[x \in (dom(v) \cap dom(w)]$entonces$v(x) = w(x)\}$

Entonces probemos que $\mathcal{M}$ es $B, \mathcal{F}-$inductivo:

*) Primero veamos que $B \in \mathcal{M}$. Tomemos $x \in B$. Supongamos que $x \in (dom(v) \cap dom(w))$. Como v y w son funciones adecuadas si $x \in (B \cap dom(v))$ entonces $v(x) = h(x)$ y si $x \in (B \cap dom(w)), w(x) = h(x)$ entonces $v(x) = h(x) = w(x)$. Por lo tanto $B \in \mathcal{M}$.

**) Ahora veamos que $\mathcal{M}$ es $\mathcal{F}-$ cerrado. Sean $f \in \mathcal{F}$ de n argumentos y $x_1, ..., x_n$ tales que para todo $i = 1, 2, ..., n$,con $x_i \in (dom(v) \cap dom(w))$ entonces $v(x_i) = w(x_i)$.
Supongamos ahora que $f(x_1, ..., x_n) \in (dom(v) \cap dom(w))$.
Por demostrar $v(f(x_1, ..., x_n) = w(f(x_1, ..., x_n))$.
Como v y w son adecuadas $v(f(x_1, ..., x_n)) = \hat{f}(v(x_1), ..., v(x_n))$ y $w(f(x_1, ..., x_n)) = \hat{f}(w(x_1), ..., w(x_n))$. Además teníamos que para todo $i = 1, ..., n$ con $x_i \in (x_1, ..., x_n) \in (dom(v) \cap dom(w))$ tal que $v(x_i) = w(x_i)$. Entonces $v(f(x_1, ..., x_n)) = w(f(x_1, ..., x_n))$.
Por lo tanto $\mathcal{M}$ es $\mathcal{F}-$cerrado.

Por *) y **) $\mathcal{M}$ es $(B, \mathcal{F})-$inductivo y por el ***Teorema 1. Principio de Inducción (para conjuntos (B, $\mathcal{F}$)-inductivos)*** $B^* \subseteq \mathcal{M}$. Pero $\mathcal{M} \subseteq C$ y $C = B^*$. Entonces $B^* = \mathcal{M}$. Hemos probado que cualesquiera dos funciones adecuadas son compatibles es igual al menor de los conjuntos $(B, \mathcal{F})-$inductivos. Por lo tanto cualesquiera dos funciones adecuadas son compatibles. ■

Lema 4. *La unión arbitraria de funciones adecuadas es una función adecuada.*

Sea $D \subseteq \{v|v \text{ es una función adecuada}\} = A$. Veamos que $\cup D \in A$

Demostración. Demostremos que $\cup D$ cumple con la definición de función adecuada:

1. Veamos primero que $\cup D$ es función,$dom(\cup D) \subseteq C$ e $Im(\cup D) \subseteq V$:
   Como D es un conjunto de funciones adecuadas y por el **Lema 3** sabemos que cualesquiera dos funciones adecuadas son compatibles entonces D es un conjunto de funciones compatibles. Por el **Lema 2** si D es un conjunto de funciones compatibles $\bigcup D$ es función, $dom(\cup D) = \bigcup_{v \in D} dom(v)$ e $Im(\cup D) = \bigcup_{v \in D} Im(v)$. Como v está en D, v es adecuada entonces el $dom(v) \subseteq C$ e $Im(v) \subseteq V$ por lo que $\bigcup_{v \in D} dom(v) \subseteq C$ y $\bigcup_{v \in D} Im(v) \subseteq V$. Así $dom(\cup D) \subseteq C$ e $Im(\cup D) \subseteq C$.

2. Ahora veamos que si $b \in (B \cap dom(\cup D))$ entonces $\cup D(b) = h(b)$.
   Si $v \in D$ entonces $v(b) = h(b)$ para $b \in ((B) \cap dom(v))$ y por el **Lema 2** $\cup D(b) = v(b) = h(b)$ para alguna $v \in D$. Entonces para alguna $v \in D, b \in (B \cap dom(v)), \bigcup D(b) = h(b)$. Por definición de unión esto es para $b \in \bigcup_{v \in D}(B \cap dom(v)), \bigcup D(b) = h(b)$. Pero $\bigcup_{v \in D}(B \cap dom(v)) = B \cap (\bigcup_{v \in D} dom(v)) = (B \cap dom(\bigcup D))$.Por lo tanto para $b \in (B \cap dom(\bigcup D)), \bigcup D(b) = h(b)$.

3. Supongamos que $f(x_1, ..., x_n) \in dom(\bigcup D) = \bigcup_{v \in D} dom(v)$.Así hay $v \in D$ tal que $f(x_1, ..., x_n) \in dom(v)$ y como $v \in A$, tenemos que $x_1, ..., x_n \in dom(v) \subseteq dom(\bigcup D)$ y por el **Lema 2** $UD(x) = f(x)$ para $f \in D$, entonces:
   $\bigcup D(f(x_1, ..., x_n)) = v(f(x_1, ..., x_n))$
   $= \hat{f}(v(x_1), ..., v(x_n))$
   $= \hat{f}(\bigcup D(x_1), ..., \bigcup D(x_n))$.

■

Lema 5. *Para todo $x \in C$, hay una función adecuada v tal que $x \in dom(v)$.*

Demostración. Veamos que $\{x \in C|\ existe\ v \in A(x \in dom(v))\}$ es un conjunto $(B, \mathcal{F})-$inductivo, con lo que contendrá a C y como ya está contenido en C, resulta ser igual a C.

- Veamos que $B \in \{x \in C|\ existe\ v \in A(x \in dom(v))\}$:
  Sea $x \in B$. Como C es libremente generado por $\mathcal{F}$ sobre B, $B \subseteq C$, entonces $x \in C$, ahora por la **proposición 1** sabemos que existe $h \in A$ con $dom(h) = B$. Por lo tanto $x \in dom(h)$.

- Probemos que $\{x \in C|\ existe\ v \in A(x \in dom(v))\}$ es $\mathcal{F}-$cerrado:
  Sean $f \in \mathcal{F}$(de n argumentos) y $x_1, ..., x_n \in C$ tales que para todo $i = 1, ..., n$, existe $v_i \in A$ tal que $x_i \in dom(v_i)$.(H.I).
  Sea $v' = v_1 \cup ... \cup v_n$. Con cada $v_i \in A$. Por el **Lema 4**, $v' \in A$ y además $x_1, ..., x_n \in dom(v') \subseteq C$.
  Ahora consideremos a $v = v' \cup \{\langle f(x_1, ..., x_n), \hat{f}(v'(x_1), ..., v'(x_n))\rangle\}$ y demostremos que $v \in A$.

  ♡ Si $x_1, ..., x_n \in (dom(v') \cap dom(\{\langle f(x_1, ..., x_n), \hat{f}(v'(x_1), ..., v'(x_n))\rangle\}))$ entonces $v'(f(x_1, ..., x_n))$ y $\hat{f}(v'(x_1), ..., v'(x_n))$ pero $v'(f(x_1, ..., x_n) = \hat{f}(v'(x_1), ..., v'(x_n))$. Por la **definición 10** v' y $\{\langle f(x_1, ..., x_n), \hat{f}(v'(x_1), ..., v'(x_n))\rangle\}$ son compatibles y como v es la unión de ambas por 1. de el **Lema 2**: v es función y por 2. de el **Lema 2** $dom(v) = dom(v') \cup \{f(x_1, ..., x_n)\} \subseteq C$ e $Im(v) = Im(v') \cup \{\hat{f}(v'(x_1), ..., v'(x_n))\} \subseteq V$.

  ♡ Sabemos que como $v' \in A$. Para todo $b \in (dom(v') \cap B))$ *entonces* $v'(b) = h(b)$. Pero $dom(v') \subseteq dom(v)$ entonces para todo $b \in (dom(v) \cap B)$ entonces $v'(b) = h(b)$ pero por 3. del **Lema 2** $v'(b) = v(b)$ entonces $v(b) = h(b)$.

  ♡ Como el $dom(v) = dom(v') \cup \{f(x_1, ..., x_n)\}$ tenemos dos casos:

    1. Si $g(y_1, ..., y_m) \in dom(v')$. Como $v' \in A$ entonces $y_1, ..., y_m \in dom(v') \subseteq dom(v)$ y por 3. del **Lema 2** $v(g(y_1, ..., y_m)) = v'(g(y_1, ..., y_m)) = \hat{g}(v'(x_1), ...v'(x_m)) = \hat{g}(v(x_1), ...v(x_m))$.

    2. Si $g(y_1, ..., y_n) = f(x_1, ..., x_n)$.Como C está libremente generado por $\mathcal{F}$ sobre B, tenemos en primer lugar que como las operaciones son tales que sus imágenes son iguales, resulta que $g = f$ y $m = n$.
       En segundo lugar, como las operaciones son inyectivas, tenemos $x_1 = y_1, ..., y_n = x_n$ pues $g(y_1, ..., y_n) = g(x_1, ..., x_n)$.
       Así $y_1, ...y_m \in C = dom(v') \subseteq dom(v)$ y:

$$v(g(y_1,...,y_m)) = v'(g(y_1,...,y_m)) =$$
$$\hat{g}(v'(x_1),...v'(x_m)) = \hat{g}(v(x_1),...v(x_m)).$$

$\blacksquare$

Prueba del Teorema 3. (Teorema de recursión):

Existencia: Sea $v = \bigcup A$(la unión de todas las funciones adecuadas). Por **Lema 4** v es adecuada. Por el **Lema 5** $C \subseteq dom(v)$ como $dom(v) \subseteq C$ y $C \subseteq dom(v)$ entonces $dom(v) = C$. Así v es la función que cumple con a) y b), es decir h^* es $v = \bigcup A$.

Unicidad: Sean $v, w \in C \to V$ que cumplan a) y b). Por el **Lema 3** $v = w$.

Así pues $h^* : C \to V$ y por ser adecuada:

a) $h^*(b) = h(b)$ *para todo* $b \in B$(es decir $h \subseteq h^*$).

b) Para cualquier $f \in \mathcal{F}$(de n argumentos) y cualesquiera $x_1, ..., x_n \in C$
$h^*(f(x_1, ..., x_n)) = \hat{f}(h^*(x_1), ..., h^*(x_n))$.

Capítulo 2

Inducción y recursión en cálculo proposicional

2.1. Lenguaje y fórmulas bien formadas

El cálculo proposicional es parte de las bases fundamentales de la lógica matemática porque nos proporciona un lenguaje formal con el cual podemos analizar el razonamiento a partir de proposiciones y conectivos lógicos. En este capítulo presentaremos dicho lenguaje, definiremos las fórmulas bien formadas y mostraremos resultados obtenidos mediante inducción y recursión.

Definición 13. *El lenguaje del cálculo proposicional es un conjunto no vacío $\mathcal{L}$ que consta de los siguientes tipos de elementos:*

- *Una colección numerable $\{p_0, p_1, ..., p_n, ...\}$ de símbolos denominados símbolos proposicionales (o letras proposicionales).*
- *Una colección $\{\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow\}$ de símbolos denominados conectivos lógicos.*
- *Un par de símbolos, denominados símbolos auxiliares o símbolos de agrupación:* $($, $)$

Los conectivos que emplearemos se nombrarán con los nombres usuales:
$\vee$ - *conjunción.*
$\wedge$ - *disyunción.*
$\Rightarrow$ - *implicación.*
$\neg$ - *negación.*
$\Leftrightarrow$ - *equivalencia, doble implicación.*

Introduciremos un símbolo adicional, denotado por $\perp$, que recibirá el nombre de absurdo o contradicción.

Ya que hemos definido el lenguaje formal con el que estaremos trabajando, es necesario determinar cuáles sucesiones finitas de símbolos tendrán relevancia en nuestro estudio. Lo anterior es semejante a la condición de determinar cuáles sucesiones de letras del alfabeto forman palabras con algún significado específico en el idioma español.
Pues bien, como dijimos, vamos a pensar en el conjunto de todas las sucesiones finitas de símbolos de $\mathcal{L}$ y lo vamos a considerar como U, así siguiendo la notación que hemos estado usando, ahora también vamos a definir:

- $B = \{p_0, p_1, ..., p_n, ...\} \cup \{\bot\} \subseteq U$
- $\mathcal{F}_U = \{f_\neg(\varphi) = (\neg\varphi), f_\Box(\varphi, \psi) = (\varphi\Box\psi) \ con \ \Box \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow\}\}$

Como tenemos U y B conjuntos tales que $B \subseteq U$ y además U es $\mathcal{F}-$cerrado, por el Lema 1:

- $\mathcal{C} = \{I \subseteq U : I \text{ es } (B, \mathcal{F})\text{-inductivo}\} \neq \emptyset$
- $\bigcap \mathcal{C}$ es un conjunto $(B, \mathcal{F})$-inductivo.

A $\bigcap \mathcal{C} = B^*$ ahora vamos a llamarlo $\mathcal{FORM}$ y por el ***Teorema 1 Principio de Inducción (para conjuntos (B, $\mathcal{F}$)-inductivos)*** es el menor conjunto $(B, \mathcal{F})-$inductivo y para tener una idea más clara de a qué nos referimos a continuación citaremos la definición de $\mathcal{FORM}$.

Definición 14. *Consideremos el lenguaje $\mathcal{L}$ del cálculo proposicional. Se define el conjunto $\mathcal{FORM}$ como el menor conjunto X (con respecto de la contención usual de conjuntos) que satisface las siguientes propiedades:*

1. *Si p_i es una letra proposicional entonces $p_i \in X$.*
2. *Si $\varphi, \psi \in X$ y $\Box \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow\}$, entonces $(\varphi\Box\psi) \in X$.*
3. *Si $\varphi \in X$, entonces $(\neg\varphi) \in X$.*
4. *$\bot \in X$.*

A los elementos de $\mathcal{FORM}$ se les denomina fórmulas (bien formadas) o proposiciones. En particular, las letras proposicionales reciben el nombre de *fórmulas atómicas.*

Ejemplos:

1. $\varphi = ((\neg p_0) \Rightarrow (p_1 \Rightarrow p_{2_0}))$ y $\rho = (\bot \vee p_{12})$ son fórmulas.

2. $\psi = ((p_2 \Rightarrow ((\neg p_{30})\vee)))$ no es una fórmula.

3. $\varphi = (p_1 \Rightarrow \neg p_3)$ no es una fórmula, pero $\psi = (p_1 \Rightarrow (\neg p_3))$ sí lo es.

Notemos que φ en el ejemplo (3) no es una fórmula únicamente por no incluir un par de símbolos de agrupación que, en el uso común en matemáticas, solemos omitir. Esto es, cuando empleamos símbolos en matemáticas para referirnos a proposiciones en diversas teorías solemos omitir paréntesis cuando ello no produce confusión alguna. Más adelante será posible determinar criterios adecuados para emplear la menor cantidad de símbolos de agrupación al escribir fórmulas bien formadas en lógica proposicional y en cálculo predicativo.

El siguiente resultado es un Principio de Inducción (para el cálculo proposicional), el cual establece que para probar que una propiedad es verificada por todas las proposiciones basta primero probar que cada proposición atómica la satisface y finalmente demostrar que una fórmula satisface la propiedad dada siempre que las fórmulas que componen a la primera verifican dicha propiedad.

Teorema 4. *(Principio de Inducción)*
Sea A una propiedad. Entonces $A(\varphi)$ se cumple para toda fórmula $\varphi \in \mathcal{FORM}$ si:

I) Para cada $i \in \mathbb{N}$ se cumple que $A(p_i)$.

II) Si $\varphi, \psi \in \mathcal{FORM}, A(\varphi), A(\psi)$ y $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ entonces $A((\varphi \Box \psi))$

III) Si $\varphi \in \mathcal{FORM}$ y $A(\varphi)$ entonces $A((\neg\varphi))$.

Demostración. Defínase el conjunto $X = \{\varphi \in \mathcal{FORM} : A(\varphi)\}$. Notemos que se verifica lo siguiente:

I) Toda fórmula atómica pertenece a X.

II) Si $\varphi, \psi \in X$ y $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, entonces $(\varphi \Box \psi) \in X$.

III) Si $\varphi \in X$ entonces $(\neg\varphi) \in X$.

Por definición, se cumple que $X \subseteq \mathcal{FORM}$ y, por la minimalidad de $\mathcal{FORM}$, se sigue que $\mathcal{FORM} \subseteq X$. Se concluye así que $X = \mathcal{FORM}$, con lo cual $A(\varphi)$ ocurre para toda fórmula φ. ■

Cuando se emplea el Principio de Inducción para demostrar que $A(\varphi)$ se cumple para toda fórmula $\varphi \in \mathcal{FORM}$, regularmente indicaremos que la prueba se hace por inducción sobre la complejidad de la fórmula.

Ejemplo:

Toda fórmula tiene una cantidad par de símbolos de agrupación.

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre la complejidad de la fórmula.

I) Sea φ una fórmula atómica, digamos p_i. Entonces φ tiene 0 símbolos de agrupación el cual es un número par.

II) Sea $\gamma = (\varphi \Box \psi)$ y supongamos que φ, ψ son fórmulas en $\mathcal{FORM}$ tales que φ y ψ admiten una cantidad par de símbolos de agrupación, digamos $2n$ y $2m$. Entonces $\gamma = (\varphi \Box \psi)$ tiene $2m + 2n + 2 = 2(m + n + 1)$ símbolos de agrupación.

III) Sea $\varphi \in \mathcal{FORM}$ tal que φ tiene $2n$ símbolos de agrupación, para algún número $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\psi = (\neg\varphi)$ tiene $2n + 2 = 2(n + 1)$ símbolos de agrupación.

Por tanto, por el Principio de Inducción, toda fórmula admite una cantidad par de símbolos de agrupación. ■

Sin duda, el Principio de Inducción es una herramienta muy útil para verificar la validez de propiedades en fórmulas bien formadas. Existe, sin embargo, una forma alternativa, de analizar el comportamiento de la familia de fórmulas bien formadas respecto de ciertas propiedades descomponiendo cada una de ellas en fórmulas más simples y formando con ellas sucesiones de determinada longitud. Esta descomposición resulta útil cuando se desea codificar información relativa a fórmulas.

Definición 15. *Una sucesión finita $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ se denomina una sucesión de formación de φ si cumple:*

- $\varphi_n = \varphi$
- *Para cada $i \in \{1, .., n\}$ ocurre alguna de las siguientes condiciones:*

  I) φ_i es un átomo ó

  II) $\varphi_i = (\varphi_k \Box \varphi_l)$ para algunos $k, l < i$ ó

  III) $\varphi_i = (\neg\varphi_k)$ para algún $k < i$.

Ejemplos:

1) $p_1, p_2, p_3, (\neg p_2), (p_1 \to p_3), ((p_1 \to p_3) \to (\neg p_2)), (\neg((p_1 \to p_3) \to (\neg p_2)))$ es una sucesión de formación de $\varphi = (\neg((p_1 \to p_3) \to (\neg p_2)))$.

2) $p_1, p_2, p_3, ((p_1 \to p_3) \to \neg p_2), (\neg p_2), (\neg((p_1 \to p_3) \to (\neg p_2)))$ no es una sucesión de formación de $\varphi = (\neg((p_1 \to p_3) \to (\neg p_2)))$.

Observación. Conviene notar que si $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ es una sucesión de formación para $\varphi = \varphi_n$ y $i < n$ entonces $\varphi_1, \varphi_2 \cdots, \varphi_i$ es una sucesión de formación para φ_i. Por tanto, cada elemento que pertenece a una sucesión de formación admite, a su vez, una sucesión de formación.

Proposición 2. *Toda fórmula $\varphi \in \mathcal{FORM}$ admite una sucesión de formación. Más aún $\varphi \in \mathcal{FORM}$ si y sólo si φ admite una sucesión de formación.*

Demostración. Veamos primero que toda fórmula bien formada φ admite una sucesión de formación. Probaremos lo anterior por inducción sobre la complejidad de la fórmula. Si φ es una fórmula atómica, entonces φ es, por definición, una sucesión de formación de φ. Supongamos ahora que $\varphi = (\gamma \Box \psi)$ y que γ, ψ admiten sucesiones de formación $\gamma_1, \cdots, \gamma_m$ y $\psi_1, \cdots, \psi_l$ respectivamente. No es difícil demostrar que $\gamma_1, \cdots, \gamma_m, \psi_1, \cdots, \psi_l, (\gamma \Box \psi)$ es una sucesión de formación de φ.

Defínase ahora $\mathcal{A} = \{\varphi : \varphi \text{ admite una sucesión de formación}\}$. Por lo anterior, se cumple que $\mathcal{FORM} \subseteq \mathcal{A}$. Resta probar que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{FORM}$. Probaremos por inducción sobre la longitud n de una sucesión de formación $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_n$ de φ, que φ es una fórmula bien formada. En efecto, si $n = 1$ entonces $\varphi_1 = \varphi$ y φ es una fórmula atómica. Supongamos ahora que para todo $n < k$, φ es una fórmula siempre que $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ es una sucesión de formación de φ de longitud n y probemos que si $\varphi_1, \cdots \varphi_k$ es una sucesión de formación de φ, entonces $\varphi \in \mathcal{FORM}$. Por definición, se cumple que φ_k es un átomo, o $\varphi_k = \varphi_i \Box \varphi_j$, donde $i, j < k$ y $\Box \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow\}$, o bien $\varphi_k = (\neg \varphi_i)$ para alguna $i < k$. Si φ_k es fórmula atómica, no hay algo que probar. Por otro lado , si $\varphi_k = (\varphi_i \Box \varphi_j)$, con $i, j < k$ y $\Box \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow\}$, entonces se cumple que φ_i y φ_j admiten sucesiones de formación de longitud i y j respectivamente. Luego, por hipótesis inductiva, se cumple que $\varphi_i, \varphi_j \in \mathcal{FORM}$, lo cual implica que $(\varphi_i \Box \varphi_j) \in \mathcal{FORM}$. Finalmente, si $\varphi = (\neg \varphi_i)$ para alguna $i < k$ entonces, análogo al caso anterior, φ_i admite una sucesión de formación de longitud $i < k$, lo cual implica que $\varphi_i \in \mathcal{FORM}$, concluyendo así que $\varphi \in \mathcal{FORM}$. $\blacksquare$

Si bien toda fórmula bien formada admite una sucesión de formación, esta no es única. De hecho, dada una sucesión de formación de longitud n para una fórmula φ, es posible obtener una sucesión de formación para la misma fórmula de cualquier longitud mayor que n. Para ello, basta introducir tantas fórmulas atómicas como sean necesarias al inicio de la sucesión. Un ejercicio interesante consiste en obtener la sucesión de formación de la menor longitud posible para una fórmula dada. Dicha sucesión contendrá la información suficiente para determinar a qué fórmula corresponde.

Existe una forma alternativa de demostrar que $A(\varphi)$ es válida para todo $\varphi \in \mathcal{FORM}$, la cual consiste en demostrar por inducción sobre el número de conectivos. El siguiente resultado justifica la validez de dicha forma de demostración.

Teorema 5. *(Principio de inducción sobre el número de conectivos)*
Sea A una propiedad. Entonces $A(\varphi)$ se cumple para toda fórmula en $\mathcal{FORM}$ si:

I) $A(\varphi)$ para toda fórmula φ con 0 conectivos (fórmula atómica).

II) Si $A(\psi)$ para toda fórmula $\psi \in \mathcal{FORM}$ con a lo más k conectivos y $\varphi \in \mathcal{FORM}$ es tal que φ tiene $k+1$ conectivos, entonces $A(\varphi)$.

Entonces $A(\varphi)$ ocurre para toda fórmula bien formada φ.

Demostración. Definamos el conjunto $X = \{\varphi \in \mathcal{FORM} : A(\varphi)\}$. Notemos que se verifica lo siguiente:

I) Toda fórmula atómica pertenece a X.

II) Supongamos $\psi \in X$ con a lo más k conectivos(H.I.).Consideremos $\varphi \in \mathcal{FORM}$ con a lo más $k+1$ conectivos. Podemos ver a φ como $(\psi_1 \Box \psi_2)$ con $\Box \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \neg, \Leftrightarrow\}$ y ψ_1, ψ_2 con a lo más k conectivos, pero por (H.I.) $\psi_1 \in X$ y $\psi_2 \in X$, entonces $\varphi \in X$.

Por definición se cumple que $X \subseteq \mathcal{FORM}$ y por la minimalidad de $\mathcal{FORM}$, se sigue que $\mathcal{FORM} \subseteq X$. Se concluye así que $X = \mathcal{FORM}$, con lo cual $A(\varphi)$ ocurre para toda fómula φ.

■

2.1.1. El Principio de Recursión

Nos interesa establecer un resultado que permita definir recursivamente propiedades en la familia de fórmulas bien formadas, partiendo de la definición de tales propiedades en las fórmulas más elementales y extendiendo la definición para fórmulas con mayor complejidad.

Teorema 6 (*Definición por Recursión*).
Sean A un conjunto no vacío y consideren funciones $H_\neg : A \longrightarrow A$, $H_\Box : A \times A \longrightarrow A$, para cada $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, y $H_{At} : \{p_n : n \in \omega\} \longrightarrow A$ una función del conjunto de fórmulas atómicas en A. Entonces existe una única función $F : \mathcal{FORM} \longrightarrow A$ que cumple:

- *$F(\varphi) = H_{At}(\varphi)$ si φ es una fórmula atómica.*
- *$F((\varphi\Box\psi)) = H_\Box(F(\varphi), F(\psi))$.*
- *$F(\neg\varphi) = H_\neg(F(\varphi))$.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, diremos que una función G es una n-aproximación si $G : \mathcal{FORM}_n \longrightarrow A$, donde $\mathcal{FORM}_n = \{\varphi \in \mathcal{FORM} : \varphi \text{ tiene a lo más } n \text{ conectivos}\}$, y satisface:

- $G(p_k) = H_{At}(p_k)$ para cada fórmula atómica.
- $G((\varphi\Box\psi)) = H_\Box(G(\varphi), G(\psi))$ si $(\varphi\Box\psi) \in \mathcal{FORM}_n$.
- $G((\neg\varphi)) = H_\neg(G(\varphi))$ si $(\neg\varphi) \in \mathcal{FORM}_n$.

Recursivamente construyamos una sucesión $\{F_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ de funciones tales que para cada $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ se cumple que F_n es una n-aproximación y $F_{n+1} \upharpoonright \mathcal{FORM}_n = F_n$. Defínase $F_0 = H_{At}$ y supongamos que hemos definido F_n con las propiedades requeridas.

Defínase ahora $F_{n+1} : \mathcal{FORM}_{n+1} \longrightarrow A$ de tal forma que $F_{n+1}(\varphi) = F_n(\varphi)$ si $\varphi \in \mathcal{FORM}_n$. Ahora, si γ es una fórmula con $n+1$ conectivos y es de la forma $\gamma = (\neg\varphi)$, defínase $F_{n+1}(\gamma) = H_\neg(F_n(\varphi))$. Finalmente, si γ tiene $n+1$ conectivos y $\gamma = (\varphi\Box\psi)$, defínase $F_{n+1}(\gamma) = H_\Box(F_n(\varphi), F_n(\psi))$.

Existencia: Sea $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} F_n$. F está bien definida y si $\varphi \in \mathcal{FORM}_n$, entonces $F(\varphi) = F_n(\varphi)$. Ahora verifiquemos que F cumple:

- Si φ es atómica, entonces $\varphi \in \mathcal{FORM}_0$ y $F(\varphi) = F_0(\varphi) = H_{At}(\varphi)$.
- Sea $\gamma = (\varphi\Box\psi)$ con $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Supongamos $\varphi, \psi \in \mathcal{FORM}_n$. Entonces $\gamma \in \mathcal{FORM}_{n+1}$. Por definición de F_{n+1}, $F_{n+1}(\gamma) = H_\Box(F_n(\varphi), F_n(\psi))$. Así $F(\gamma) = F_{n+1}(\gamma) = H_\Box(F_n(\varphi), F_n(\varphi)) = H_\Box(F(\varphi), F(\psi))$

- Sea $\gamma = (\neg\varphi)$. Si $\varphi \in \mathcal{FORM}_n$, entonces $\gamma \in \mathcal{FORM}_{n+1}$, $F_{n+1}(\gamma) = H_\neg(F_n(\varphi))$. Así $F(\gamma) = F_{n+1}(\gamma) = H_\neg(F_n(\varphi)) = H_\neg(F(\varphi))$.

Unicidad: Supongamos que F^* es otra función con las propiedades establecidas en la proposición. Consideremos el conjunto $X = \{\varphi \in \mathcal{FORM} : F(\psi) = F^*(\psi)\}$. Si p_k es una fórmula atómica entonces $F(p_k) = H_{At}(p_k) = F^*(p_k)$, con lo cual $p_k \in X$. Ahora, supongamos que $\varphi \in X$. Entonces $F((\neg\varphi)) = H_\neg(F(\varphi)) = H_\neg(F^*(\varphi)) = F^*((\neg\varphi))$, lo cual implica que $(\neg\varphi) \in X$. Finalmente, si $\varphi, \psi \in X$ y $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, entonces $F((\varphi\Box\psi)) = H_\Box(F(\varphi), F(\psi)) = H_\Box(F^*(\varphi), F^*(\psi)) = F^*((\varphi\Box\psi))$. Lo anterior implica que $(\varphi\Box\psi) \in X$. Con todo lo anterior, se concluye que $X = \mathcal{FORM}$ y por tanto $F = F^*$.
■

Los siguientes son ejemplos de definiciones que se pueden establecer a partir del Principio de definición por recursión (en cada caso convendrá determinar cuáles son las funciones asociadas al conjunto de fórmulas atómicas y a cada uno de los conectivos).

Definición 16. *Se define el rango de una fórmula φ, denotado por $Rank(\varphi)$, de forma recursiva como sigue:*

- $Rank(\varphi) = 0$ *si φ es átomo.*
- $Rank((\varphi\Box\psi)) = máx\{Rank(\varphi), Rank(\psi)\} + 1$
- $Rank((\neg\varphi)) = Rank(\varphi) + 1$.

En este caso, el conjunto A es $\mathbb{N} \cup \{0\}$ y las funciones que se emplean para aplicar el Teorema de Recursión son:

$$
\begin{aligned}
H_{At} : \{p_n : n \in \omega\} &\longrightarrow A \\
p_n &\longmapsto 0 \\
H_\Box : A \times A &\longrightarrow A \\
(n, m) &\longmapsto máx\{n, m\} + 1 \\
H_\neg : A &\longrightarrow A \\
n &\longmapsto n + 1
\end{aligned}
$$

Definición 17. *Se define recursivamente el conjunto $Sub(\varphi)$ de subfórmulas de cada fórmula φ como sigue:*

(i) $Sub(\varphi) = \{\varphi\}$ *si φ es una fórmula atómica.*

(ii) $Sub((\varphi_1\Box\varphi_2)) = Sub(\varphi_1) \cup Sub(\varphi_2) \cup \{(\varphi_1\Box\varphi_2)\}$.

(iii) $Sub((\neg\varphi)) = Sub(\varphi) \cup \{(\neg\varphi)\}$.

Por tanto, una fórmula ψ es subfórmula de una fórmula φ si coincide con dicha fórmula o bien es subfórmula de alguna fórmula a partir de la cual se define φ empleando algún conectivo.

Ejemplo: Si $\varphi = (\neg(x_1 \to x_3) \to (\neg x_2))$, entonces $\rho_0 = (\neg x_2), \rho_1 = (x_1 \to x_3)$ y $\rho_2 = x_2$ son subfórmulas de φ mientras que $\varphi = (x_3 \to (\neg(x_2))$ no lo es.

Ejemplo:

Considere el conjunto $A = \{0, 1\}$ y sea $H_{At} : \{p_n : n \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \{0, 1\}$ una función arbitraria. Defínanse las siguientes funciones:

$$H_\wedge : A \times A \; A$$
$$(x, y) \longmapsto \textit{mín}\{x, y\}$$
$$H_\vee : A \times A \longrightarrow A$$
$$(x, y) \longmapsto \textit{máx}\{x, y\}$$
$$H_\to : A \times A \longrightarrow A$$
$$\{x, y\} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y \\ 0 & \text{si } x > y \end{cases}$$
$$H_\leftrightarrow : A \times A \longrightarrow A$$
$$\{x, y\} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$
$$H_\neg : A \longrightarrow A$$
$$x \longmapsto 1 - x$$

Por el Teorema de Recursión existe una única función $F : \mathcal{FORM} \longrightarrow \{0, 1\}$ que extiende a H^0_{At}. Luego, cada asignación de valores de 0 y 1 a las fórmulas atómicas determina una función que asigna a cada fórmula bien formada el valor 0 o 1. Luego, en una tabla de verdad de una fórmula dada φ se representan todas las posibles funciones del conjunto de átomos que son subfórmulas de φ en el conjunto $\{0, 1\}$ de valores de verdad y el valor que le asigna a φ la extensión de cada una de estas asignaciones.

Para concluir esta sección enunciamos el siguiente resultado, el cual permite demostrar por inducción sobre el rango de una fórmula.

Teorema 7 (*Principio de Inducción sobre el rango*).
Sea $A(x)$ una propiedad. Si para cada fórmula φ ocurre que $A(\psi)$ para toda fórmula de rango $Rank(\psi) < Rank(\varphi)$ implica $A(\varphi)$, entonces $A(\varphi)$ para toda fórmula $\varphi \in \mathcal{FORM}$.

Demostración. Mostremos que inducción en φ e inducción en $Rank(\varphi)$ son equivalentes. Primero vamos a usar la siguiente notación para la inducción sobre el rango: $\varphi < \psi(\varphi \leq \psi)$ para $r(\varphi) < r(\psi)(r(\varphi) \leq r(\psi))$. Así para todo $\psi \leq \varphi A(\varphi)$ significa $A(\psi)$ vale para todo ψ con rango como máximo $r(\varphi)$.

El teorema quedaría: para todo $\varphi($ *para todo* $\psi < \varphi, A(\psi)$ *entonces* $A(\varphi))$ *entonces para todo* $\varphi A(\varphi)$

Vamos a mostrar que el Principio de Inducción sobre el rango se sigue del Principio de inducción.

Sea para todo $\varphi($ *para todo* $\psi < \varphi, A(\psi)$ *entonces* $A(\varphi))$ **(1.1.1)**.

Por demostrar para todo $\varphi, A(\psi)$. Sea $B(\varphi) =$ *para todo* $\psi \leq \varphi A(\psi)$. Ahora mostremos para todo $\varphi, B(\varphi)$ por inducción en φ.

1. Para φ atómico. Para todo $\psi < \varphi, A(\psi)$ es verdadero, entonces por 2.1.1 $A(\varphi)$. Por lo tanto, $A(\psi)$ vale para todo ψ con $Rank \leq 0$.Por lo tanto $B(\varphi)$.

2. $\varphi = \varphi_1 \square \varphi_2$. Hipótesis inductiva: $B(\varphi_1), B(\varphi_2)$.Sea p cualquier proposición con $r(p) = r(\varphi) = n + 1$(para un n adecuado). Debemos mostrar que p y todas las proposiciones con rango menor que $n + 1$ tienen la propiedad A. Como $r(\varphi) =$ $\max\{r(\varphi_1), r(\psi_2)\}+1$, φ_1 o ψ_2 tiene $Rank\ n$, digamos φ_1. Ahora para un arbitrario ψ con $r(\psi) \leq n$, tenemos que $\psi \leq \varphi_1$. Entonces, por $B(\varphi_1), A(\psi)$. Esto muestra que para todo $\psi < p, A(\psi)$, por lo que, por 2.1.1, $A(p)$. Esto demuestra $B(\varphi)$.

3. $\varphi = \neg\varphi_1$. Probemos $B(\neg\varphi_1)$. Es decir para todo $\psi \leq \varphi_1, A(\psi) : B(\neg\varphi_1)$. Usaremos la hipótesis inductiva $B(\varphi_1)$:para todo $\psi \leq \varphi_1, A(\psi)$ y el supuesto 2.1.1:
   Para todo $\phi(($ *para todo* $x < \phi, A(x))$ *entonces* $A(\phi))$
   Sea $n = r(\varphi_1)$. Entonces $r(\neg\varphi_1) = n + 1$. Tomemos una ψ cualquiera con $r(\psi) \leq r(\neg\varphi_1) = n + 1$. Debemos ver $A(\psi)$. Consideremos dos casos:

   ♡ Cuando $r(\psi) \leq n$. Entonces $r(\varphi) \leq r(\varphi_1)$, o sea $\psi \leq \varphi_1$. Por $B(\varphi_1)$ se tiene que $A(\psi)$.

   ♡ $r(\psi) = n + 1$. Basta mostrar que para todo $x < \psi, A(x)$,para aplicar 2.1.1. Pero si $x < \psi$, entonces $r(x) < r(\varphi) = n + 1$, así que $r(x) \leq n = r(\varphi_1)$. Por lo tanto $x \leq \varphi_1$ y por $B(\varphi_1)$, se cumple $A(x)$. Concluimos que para todo $x < \psi, A(x)$ y por 2.1.1, $A(\psi)$.

■

Capítulo 3

Inducción y recursión en conjuntos

La teoría de conjuntos proporciona el marco axiomático en el que se formalizan gran parte de los conceptos matemáticos. En este contexto, la inducción y la recursión encuentran una formulación rigurosa que nos permite comprender sus fundamentos.

Axioma 1. *(De Remplazo) Sea $p(x, y)$ una propiedad tal que para todo x existe un único y tal que $p(x, y)$ se verifica.*

Para todo conjunto A, existe un conjunto B tal que para todo $x \in A$, existe $y \in B$ para el cual $p(x, y)$ se verifica.

Empleando el esquema de comprensión, podemos ver al conjunto B del axioma anterior como sigue:

$$B = \{y : p(x, y) \text{ se verifica para algún } x \in A\}$$

Diremos que $p(x, y)$ es una propiedad de remplazo, si para todo x existe un único y tal que $p(x, y)$ se verifica.

Convención: Diremos que F es una *clase-función*, si existe una propiedad de remplazo, $p(x, y)$, de tal manera que para cada x, $F(x)$ denota al único y tal que $p(x, y)$ se verifica. Esto es, $F(x) = y$.

De la convención anterior tenemos que si $p(x, y)$ es una propiedad de remplazo y F denota a la clase-función, entonces el esquema de axioma de remplazo aplicado al conjunto A y a $p(x, y)$, establece que existe un conjunto B tal que para todo $x \in A$, $F(x) \in B$. Esto es, el esquema de axioma de remplazo nos dice que la clase función sobre los elementos del conjunto A, se puede remplazar o expresar como un conjunto de parejas ordenadas; a saber: $f_A = \{(x, y) \in A \times B : p(x, y)\}$. En este caso, nos referimos a f_A como función de remplazo. Observemos que la función de remplazo, f_A está unívocamente determinada por A.

Observación 1. *Observe que para cada $x \in A$, $f_A(x) = y = F(x)$*

Notación: Sean F una clase-función y A un conjunto, usamos f_A para denotar a la función de remplazo determinada por F y un conjunto dado A.

Definición 18. *Sea G una clase-función. Diremos que t es un cálculo de longitud α basado en G, si t es una función con dominio $\alpha+1$ tal que para todo $\beta \leq \alpha$, $t(\beta) = G(t|\beta)$.*

Lema 6. *Sean G una clase función y α un ordinal. Si t un cálculo de longitud α, entonces t es único.*

Demostración. Supongamos que h es un cálculo de longitud α basado en G. Entonces $dom(t) = \alpha + 1 = dom(t)$. De modo que resta probar que para todo $\beta \leq \alpha$, $h(\beta) = t(\beta)$.

Por inducción sobre α. Supongamos que para todo $\beta < \alpha$, $h(\beta) = t(\beta)$. Por demostrar que $h(\alpha) = t(\alpha)$. Por hipótesis de inducción tenemos que $h|\alpha = t|\alpha$; luego, dado que G es una clase-función, tenemos que $G(h|\alpha) = G(t|\alpha)$. De donde $h(\alpha) = t(\alpha)$. Por tanto $h = t$. ■

Lema 7. *Sean G una clase-función y α un ordinal. Si t es un cálculo de longitud α basado en G, entonces para todo $\beta \in \alpha$, $t|(\beta + 1)$ es un cálculo de longitud β basado en G.*

Demostración. Sea $\beta \in \alpha$. y denotemos h a la restricción de t a $\beta + 1$. Dado que $dom(h) = \beta + 1$, resta probar que para todo $\rho \leq \beta$, $h(\rho) = G(h|\rho)$. Notemos que para todo $\rho \leq \beta$, $h(\rho) = t(\rho)$. De aquí que si $\rho \leq \beta$, entonces $h|\rho = t|\rho$; luego, como G es clase-función, tenemos que $G(h|\rho) = G(t|\rho)$. Así, si $\rho \leq \beta$, entonces $h(\rho) = t(\rho) = G(t|\rho) = G(h|\rho)$. Por tanto $h(\rho) = G(h|\rho)$. La prueba está completa. ■

De los dos lemas previos tenemos el siguiente.

Teorema 8. *Sean G una clase función y t_i cálculos de longitud α_i, basados en G, para $i \in 1, 2$. Entonces t_1 y t_2 son funciones compatibles.*

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $\alpha_1 < \alpha_2$. Del Lema 7 tenemos que $t_2|(\alpha_1 + 1)$ es un cálculo de longitud α_1 basado en G. Luego, por el Lema 6, tenemos que $t_1 = t_2|(\alpha_1 + 1)$. Por tanto t_1 y t_2 son compatibles. ■

Corolario 1. *Sean G una clase función y T un conjunto no vacío. Si para cada $t \in T$, t es un cálculo basado en G, entonces $\bigcup T$ es función.*

Demostración. Como cada $t \in T$ es una relación, $\bigcup T$ es una relación. Para ver que $\bigcup T$ es función basta probar unicidad de la imagen:
Supongamos que $(x, y_1) \in \bigcup T$ y $(x, y_2) \in \bigcup T$. Entonces existen $t_1, t_2 \in T$ tales que $(x, y_1) \in t_1$, $(x, y_2) \in t_2$. Por hipótesis, t_1 y t_2 son cálculos basados en G. Por el Teorema 8, dos cálculos basados en la misma G son compatibles; en particular, coinciden en la intersección de sus dominios. Como x pertenece a ambos dominios, se tienes que $t_1(x) = t_2(x)$, es decir, $y_1 = y_2$. Luego para cada x hay a lo sumo un y con $(x, y) \in \bigcup T$, por lo tanto $\bigcup T$ es función. ■

Teorema 9. (*Recursión transfinita*) *Sean G una clase-función y $p(x, y)$ la propiedad:*

x es un ordinal y $y = t(x)$ para algún, t, cálculo de longitud x basado en G o bien, x no es un ordinal y $y = \emptyset$.

Entonces

1. *$p(x, y)$ es una propiedad de remplazo.*
2. *Sea F la clase-función determinada por $p(x, y)$. Para cualquier ordinal α, la función de remplazo $f_{(\alpha+1)}$, satisface que $f_{(\alpha+1)}(\alpha) = G(f_{(\alpha+1)}|\alpha)$.*

Demostración. Sea x un conjunto, por demostrar que existe un único y tal que $p(x, y)$ se verifica. Tenemos dos casos:

1) x no es un ordinal. En este caso tomamos $y = \emptyset$ y así tenemos que y es único y $p(x, y)$ se cumple.

2) x es un ordinal. En este caso, debemos mostrar que existe un único cálculo de longitud x basado en G.

Para verificar que 2) se cumple, haremos uso del principio de inducción transfinita. Notemos que por el Lema 6, es suficiente demostrar que

$*$) Para todo ordinal α, existe un cálculo de longitud α basado en G.

La prueba de esta afirmación es por inducción sobre α. De donde, nuestra hipótesis de inducción es:

$(H.I.)$ Para todo $\beta < \alpha$ existe un cálculo de longitud β basado en G.

Notemos que la propiedad $q(x, y)$: x es un ordinal, $x \in \alpha$ y y es un cálculo de longitud x basado en G o x es un ordinal y $x \notin \alpha$ y $y = \emptyset$ o bien x no es un ordinal y $y = \emptyset$, es una propiedad de remplazo. El esquema de axioma de remplazo aplicado a $q(x, y)$ y $A = \alpha$, nos dice que existe el conjunto siguiente:

$$T = \{t_\beta : \beta < \alpha\}.$$

Por el Teorema 8, T es un sistema compatible de funciones. Así que por el Corolario anterior, $t = \bigcup T$ es una función y $dom(t) = \alpha$. Observemos, además, que para cada $\beta < \alpha$, $t|\beta = t_\beta|\beta$.

Sea $t_\alpha = t \cup \{(\alpha, G(t))\}$. Es claro que t_α es una función y que $dom(t_\alpha) = \alpha + 1$.

Afirmación 2. Para cada $\beta \leq \alpha$, $t_\alpha(\beta) = G(t_\alpha|\beta)$.

En efecto, tenemos dos casos:

1. $\beta = \alpha$. Notemos que $t_\alpha|\alpha = t$ y dado que G es clase función, tenemos que $G(t) = G(t_\alpha|\alpha)$, y por tanto $t_\alpha(\alpha) = G(t_\alpha|\alpha)$.
2. $\beta < \alpha$. Claramente, por un lado $t_\alpha(\beta) = t_\beta(\beta)$ y, por otro lado, $t_\alpha|\beta = t_\beta|\beta$. Luego, dado que G es clase función, tenemos que $G(t_\alpha|\beta) = G(t_\beta|\beta)$, así que $t_\alpha(\beta) = t_\beta(\beta) = G(t_\beta|\beta) = G(t_\alpha|\beta)$, es decir, $t_\alpha(\beta) = G(t_\alpha|\beta)$.

De la Afirmación 2, tenemos que t_α es un cálculo (único) de longitud α.

Así que $p(x, y)$ es, en efecto, una propiedad de remplazo. Sea F la case función determinada por $p(x, y)$.

Observemos que si α es un ordinal, entonces por el esquema de axioma de remplazo aplicado a $p(x, y)$ y $\alpha + 1$, tenemos que existe un conjunto B de tal forma que $f_{(\alpha+1)} = \{(\beta, y) \in (\alpha + 1) \times B : p(\beta, y)\}$ es función.

Afirmación 3: $f_{(\alpha+1)} = t_\alpha$. Claramente $dom(f_{(\alpha+1)}) = dom(t_\alpha)$. Ahora, notemos que para cada $\beta \in \alpha+1$, $f_{(\alpha+1)}(\beta) = y$; donde y es el único tal que $p(\beta, y)$ se verifica; luego, dado que β es ordinal, tenemos que $y = t_\beta(\beta) = t_\alpha(\beta)$ (porque los cálculos son compatibles dos a dos). De donde $f_{(\alpha+1)}(\beta) = t_\alpha(\beta)$. La afirmación esta probada.

De la afirmación anterior obtenemos que $t_\alpha|\alpha = f_{(\alpha+1)}|\alpha$ y como G es clase-función, tenemos que $G(t_\alpha|\alpha) = G(f_{(\alpha+1)}|\alpha)$. Luego, $f_{(\alpha+1)}(\alpha) = G(t_\alpha|\alpha) = G(f_{(\alpha+1)}|\alpha)$; esto es, $f_{(\alpha+1)}(\alpha) = G(f_{(\alpha+1)}|\alpha)$. La prueba está completa. ■

Observación 2. *Por la Nota 1, de ahora en adelante, haremos un abuso de notación. Cuando usemos la clase-función F dada por el teorema de recursión, emplearemos únicamente a F, en lugar de las funciones de remplazo asociadas; por ejemplo:*

1. *la conclusión* 2.*, del Teorema de recursión (Teorema 9) quedaría como sigue:*

   Para cualquier ordinal α, $F(\alpha) = G(F|\alpha)$.

2. *La Afirmación* 3*, en la prueba del Teorema 9, queda de la manera siguiente:*

   Para cada ordinal α, $F|(\alpha+1) = t_\alpha$.

Teorema 10. *(Teorema de recursión, segunda versión) Sean $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ y $\mathbf{G}_3$ clase-funciones y sea $\mathbf{G}$ la clase función definida como sigue $\mathbf{G}(x) = y$ si y sólo si,*

(a) $x = \emptyset$ y $y = \mathbf{G}_1(\emptyset)$,

(b) *x es función y $dom(x) = \alpha + 1$ para algún ordinal α* y $y = \mathbf{G}_2(x(\alpha))$,

(c) *x es una función, $dom(x) = \alpha$ para algún ordinal límite $\alpha \neq 0$* y $y = \mathbf{G}_3(x)$,

(d) *x no es de ninguna de las formas anteriores y $y = \emptyset$.*

Entonces la propiedad $\mathbf{P}(x, y)$ definida por: x es un ordinal y $y = t(x)$ para un cálculo t de longitud x basado en $\mathbf{G}$, o bien, x no es ordinal y $y = \emptyset$, define una clase-función $\mathbf{F}$ que cumple:

1. $\mathbf{F}(0) = \mathbf{G}_1(\emptyset)$,
2. $\mathbf{F}(\alpha+1) = \mathbf{G}_2(\mathbf{F}(\alpha))$, *para todo ordinal α,*
3. $\mathbf{F}_(\alpha) = \mathbf{G}_3(\mathbf{F}|\alpha)$, *para todo ordinal límite $\alpha \neq \emptyset$.*

Demostración. Es suficiente verificar que la clase función F, dada por el Teorema 9, satisface las condiciones 1., 2. y 3.

Notemos que $F(0) = G(F|0)$; puesto que $F|0 = \emptyset$ y G es clase-función, tenemos que $G(F|0) = G(\emptyset)$ y por tanto, $G(\emptyset) = G_1(\emptyset)$. Así, $F(0) = G_1(\emptyset)$. Lo cual nos dice que F satisface 1.

Sea α un ordinal. Por demostrar que $F(\alpha + 1) = G_2(F(\alpha))$. Sabemos que $F(\alpha + 1) = G(F|(\alpha+1))$. Por la Afirmación 3., en la prueba del Teorema 9, tenemos que $F|(\alpha+1) = t_\alpha$; luego, $F|(\alpha + 1)$ es una función tal que $dom(F|(\alpha + 1))$; luego, $G(F|(\alpha + 1)) = G_2(F(\alpha))$.

Ahora veremos que si $\alpha \neq 0$ es un ordinal límite, entoneces $F(\alpha) = G_3(F(\alpha)$. Notemos que $F(\alpha) = G(F|\alpha)$. Puesto que (por la Afirmación 3., en la prueba del Teorema 9) $F|\alpha = t_\alpha|\alpha$, tenemos que $F|\alpha$ es una función tal que $dom(F|\alpha) = \alpha$; así que $G(F|\alpha) = G_3(F|\alpha)$. Por tanto $F(\alpha) = G_3(F|\alpha)$. ■

A continuación presentamos las versiones paramétricas de las dos versiones del teorema de recursión transfinita.

Si $F(z, x)$ es una clase-función en dos variables, escribiremos $F_z(x)$, en lugar de $F(z, x)$. Claramente, para cada z fijo, $F_z(x)$ es una clase-función en una variable. Si F está definida por $Q(z, x, y)$, entonces entendemos por $F_z[A]$ y $F_z|A$, denotan a los conjuntos:

1. $F_z[A] = \{y|Q(z, x, y)$ para algún $x \in A\}$, y

2. $F_z|A = \{(x, y)|Q(z, x, y)$ para algún $x \in A\}$.

Definición 19. *Sea G una clase-función de dos variables. Diremos que t es un cálculo de longitud α basado en G y z, si t es una función con dominio $\alpha + 1$ tal que para todo $\beta \leq \alpha$, $t(\beta) = G(z, t|\beta)$.*

Los cálculos de longitud α basados en G y z, comparten las mismas propiedades que satisfacen los cálculos de la Definición 18.

Las pruebas de los dos resultados siguientes son similares (por no decir idénticas) a las dadas para las versiones no paramétricas del teorema de recursión.

Teorema 11. (*Recursión transfinita, paramétrica*) *Sean G una clase-función de dos variables y $Q(z,x,y)$ la propiedad:*

x es un ordinal y $y = t(x)$ para algún, t, cálculo de longitud x basado en G y z o bien, x no es un ordinal y $y = \emptyset$.

Entonces

1. *$Q(z,x,y)$ es una propiedad de remplazo.*
2. *Sea F la clase-función determinada por $Q(z,x,y)$. Para cualquier ordinal α, $F(z,\alpha) = G(z, F_z|\alpha)$.*

Teorema 12. *Sean $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ y $\mathbf{G}_3$ clase-funciones en dos variables y sea $\mathbf{G}$ la clase función definida como sigue $\mathbf{G}(z,x) = y$ si y sólo si,*

1. *$x = \emptyset$ y $y = \mathbf{G}_1(z,\emptyset)$,*
2. *x es función y $dom(x) = \alpha + 1$ para algún ordinal α y $y = \mathbf{G}_2(z, x(\alpha))$,*
3. *x es una función, $dom(x) = \alpha$ para algún ordinal límite $\alpha \neq 0$ y $y = \mathbf{G}_3(z,x)$,*
4. *x no es de ninguna de las formas anteriores y $y = \emptyset$.*

Entonces la propiedad $\mathbf{P}(z,x,y)$ definida por: x es un ordinal y $y = t(x)$ para un cálculo t de longitud x basado en $\mathbf{G}$ y z, o bien, x no es ordinal y $y = \emptyset$, define una clase-función $\mathbf{F}_z$ que cumple:

1. *$\mathbf{F}_z(0) = \mathbf{G}_1(z,\emptyset)$,*
2. *$\mathbf{F}_z(S(\alpha)) = \mathbf{G}_2(z, \mathbf{F}_z(\alpha))$, para todo ordinal α,*
3. *$\mathbf{F}_z(\alpha) = \mathbf{G}_3(z, \mathbf{F}_z|\alpha)$.*

Consideremos ahora las clase-funciones $G_1(z,x) = z$, $G_2(z,x) = s(x)$ y $G_3(z,x) = \sup(ran(x))$. Tomemos, ahora, G y F como en el Teorema 12. Entonces, para cualesquiera β y α ordinales, se cumple que:

1. $F_\beta(0) = G_1(\beta,\emptyset) = \beta$.
2. $F_\beta(\alpha+1) = G_2(\beta, F_\beta(\alpha)) = s(F_\beta(\alpha))$.
3. Si $\alpha \neq 0$ es un ordinal límite, entonces, $F_\beta(\alpha) = G_3(\beta, F_\beta|\alpha) = \sup(ran(F_\beta|\alpha))$

El hecho de que F es una clase función, nos garantiza la unicidad de $F_\beta(\alpha)$, para cualesquiera ordinales β y α. Por lo tanto, podemos emplear una notación para $F_\beta(\alpha)$. En adelante denotamos $\beta+\alpha$ al ordinal $F_\beta(\alpha)$; es decir, $\beta+\alpha = F_\beta(\alpha)$. Nos referimos a $\beta+\alpha$ como suma de los ordinales β y α. Con esta notación, tenemos que para cuales quiera ordinales β y α:

1. $\beta + 0 = \beta$.

2. $\beta + (\alpha+1) = (\beta+\alpha)+1$, para cualquier α.

3. $\beta+\alpha = \sup\{\beta+\rho : \rho \in \alpha\}$, para $\alpha \neq 0$ límite (observe que $ran(F_\beta|\alpha) = \{F_\beta(\rho) : \rho \in \alpha\} = \{\beta+\rho : \rho \in \alpha\}$).

3.1. Un principio de inducción en bien ordenados

Antes de establecer y demostrar un Teorema de inducción para conjuntos bien ordenados, recoradremos al lector algunas nociones involucradas. Para un estudio más detallado recomendamos revisar la referencia: *Hrbacek,K. & Jech,T.(1999).Introduction to set theory.Marcel Dekker.*

Definición 20. *Una relación R en un conjunto A se llama orden (parcial) si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. El par (A,R) se llama conjunto (parcialmente) ordenado.*

Definición 21. *Un conjunto (parcialmente) ordenado $(W,\leq)$ es bien ordenado si todo subconjunto no vacío de W tiene elemento mínimoo o primer elemento (respecto al orden "$\leq$"). En este caso diremos que $\leq$ es un buen orden para W.*

Sea $(A,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, el segmento inicial determinado por $a \in A$ es el conjunto $U_a = \{x \in A : x < a\}$

Definición 22. *Un isomorfismo entre dos conjuntos bien ordenados $(W_i, \leq_i$, $i \in \{1,2\}$, es una función es una función inyectiva f tal que*

1. *$dom(f) = W_1$, $ran(f) = W_2$, y*

2. *para todo $p_i \in W_1$, $i \in \{1,2\}$ se cumple que $p_1 \leq_1 p_2$ si y solo si $f(p_1) \leq_2 f(p_2)$*

El teorema siguiente establece que dados dos conjuntos bien ordenados existe una manera de compararles. El lector interesado en una demostración puede consultar la referencia: *Hrbacek,K. & Jech,T.(1999).Introduction to set theory.Marcel Dekker..*

Teorema 13. T. *Sean* $(W, \leq)$ *y* $(V, \preceq)$ *conjuntos bien ordenados, entonces ocurre una y sólo una de las siguientes proposiciones:*

1. $(W, \leq)$ *y* $(V, \preceq)$ *son isomorfos.*

2. $(W, \leq)$ *es isomorfo a un segmento inicial de* $(V, \preceq)$.

3. $(V, \preceq)$ *es isomorfo a un segmento inicial de* $(W, \leq)$.

Dados dos conjuntos bien ordenados $(W, \leq)$ y $(V, \preceq)$, diremos que tiene tipo de orden menor que $(V, \preceq)$, si $(W, \leq)$ es isomorfo a un segmento inicial de $(V, \preceq)$.

Teorema 14. *(Principio de Inducción) Sea* P *una propiedad que se preserva bajo isomorfismos. Supongamos que para todo conjunto bien ordenado* W,

$(*)$ *si todo conjunto bien ordenado con tipo de orden menor que* W *tiene la propiedad* P*, entonces* W *tiene la propiedad* P

Entonces todo conjunto bien ordenado tiene la propiedad P.

Demostración. Supongamos que no; es decir, existe un conjunto bien ordenado X tal que X no satisface la propiedad P. Entonces, por $(*)$, existe un conjunto bien ordenado Y, con tipo de orden menor que X tal que Y no satisface P.

Dado que Y tiene tipo de orden menor que X, entonces existe $x_0 \in X$ de tal forma que Y es isomorfo a $X[x_0]$. Denotemos A el conjunto formado por los $x \in X$ para los cuales existe un conjunto bien ordenado Y_x tal que Y_x es isomorfo a $X[x]$ y Y_x no satisface P.

Afirmamos que A no es vacío. En efecto, dado que Y es isomorfo a $X[x_0]$ y dado que Y no cumple P, tenemos que $x_0 \in A$.

Ahora bien, de la afirmación previa y el hecho de que X es un conjunto bien ordenado, tenemos que A debe tener un primer elemento (relativo al orden de X), digamos x_1.

Como P es una propiedad que se preserva bajo isomorfirmos $X[x_1]$ no satisface la propiedad P, de lo contrario Y debe tener P, lo cual no puede ocurrir. Sin embargo, (por construcción) $X[x_1]$ es un conjunto bien ordenado con la propiedad de que cualquier conjunto bien ordenado con tipo de orden menor que $X[x_1]$ tiene la propiedad P, entonces (por $(*)$), $X[x_1]$ tiene la propiedad P. Lo cual es absurdo. $\blacksquare$

Bibliografía

- ♡ *Amor,J.(1997).Inducción y Recursión.Miscelánea Matemática,26,1-16.*
- ♡ *Amor,J.(2013).Teoría de Conjuntos para estudiantes de ciencias.UNAM.*
- ♡ *Hernández,F.(1998).Teoría de Conjuntos.Sociedad Matemática Mexicana.*
- ♡ *Hrbacek,K. & Jech,T.(1999).Introduction to set theory.Marcel Dekker.*
- ♡ *Mendelson,E.(2015).Introduction to mathematical logic.Chapman & Hall/CRC.*
- ♡ *Ruíz,A.(2003).Historia y Filosofía de las matemáticas.UNED.*
- ♡ *Van Dalen,D.(2013).Logic and Structure.Springer*