



# **BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**APRENDIZAJE DE LOS ÁNGULOS DE LA CIRCUNFERENCIA  
UTILIZANDO EL MODELO DE VAN HIELE EN PREPARATORIA**

**TESIS  
PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

PRESENTA  
**JOSÉ LÁZARO GARCÍA CARAVEO**

DIRECTOR DE TESIS  
**DRA. MARÍA ARACELI JUÁREZ RAMÍREZ**  
CO-DIRECTOR DE TESIS  
**DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR**

PUEBLA, PUE.

JUNIO 2018



**BUAP**

**DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR**  
**SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y**  
**ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP**  
**P R E S E N T E:**

Por este medio le informo que el C:

**JOSÉ LAZARO GARCÍA CARAVEO**

Estudiante de la Maestría en Educación Matemática, ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 07 de mayo de 2018, con la tesis titulada:

**“Aprendizaje de los ángulos de la circunferencia utilizando el modelo de Van Hiele en preparatoria”**

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E,  
H. Puebla de Z. a 28 de mayo de 2018

*MSL*  
**DR. JOSIP ŠLIŠKO IGNJATOV**  
**COORDINADOR DE LA MAESTRÍA**  
**EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**



Cop. Archivo  
DR. JSI / lagn\*

Facultad  
de Ciencias  
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. 111 A,  
Ciudad Universitaria, Col. San  
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570  
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

## **AGRADECIMIENTOS**

En primer lugar agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico brindado en todo el proceso de formación de la Maestría en Educación Matemática.

Agradezco también a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas (FCFM) por la oportunidad de pertenecer y formarme en la tercera generación de esta maestría.

Un agradecimiento especial a mi directora de tesis, la Dra. María Araceli Ramírez Juárez, y mi co-directora, la Dra. Lidia Aurora Hernández Rebollar, ya que gracias a su respeto, colaboración y confianza, pudo llegar a buen término este trabajo de investigación.

Mi agradecimiento y mi respeto a cada uno de los docentes que impartieron las materias de este programa académico, sus conocimientos y experiencias han formado docentes más consientes.

Agradezco también a mi esposa Josefina Rosas Mata, y mis hijos, Jesús Daniel, José Eduardo y Carlos Adrián, este logro fue gracias a la comprensión, unión y amor que existe en esta familia.

Muchas gracias a mis padres, Mirna Beatriz Caraveo Pacheco y Ramiro García Bermejo, así como a mis hermanos, Alberto, José Luis y David, su apoyo y confianza han sido un gran pilar en mi vida.

Mi agradecimiento a la Preparatoria Xilotzingo, la rectora Julia Hernández, la directora Adriana Tamariz y a mis alumnos de la generación 2015-2018, ya que me permitieron desarrollar este trabajo de investigación en esta institución.

Y por último agradezco a mi amigo y compañero, Domiciano Domínguez Campos, su amistad y apoyo fueron esenciales en cada una de las materias de la maestría.

## **INDICE**

<b>RESUMEN</b> .....	1
<b>ABSTRACT</b> .....	2
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	3
<b>CAPÍTULO 1</b> .....	8
<b>1.1 ANTECEDENTES</b> .....	8
<b>1.2 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN</b> .....	10
<b>1.3 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN</b> .....	11
<b>1.4 OBJETIVOS</b> .....	11
<b>1.4.1 OBJETIVO GENERAL</b> .....	11
<b>1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS</b> .....	11
<b>CAPITULO 2</b> .....	13
<b>MARCO TEÓRICO</b> .....	13
<b>2.1 GEOMETRÍA</b> .....	13
<b>2.2 IMPORTANCIA DE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA</b> .....	14
<b>2.3 DIFICULTADES EN EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA     GEOMETRÍA</b> .....	15
<b>2.4 MODELO DE VAN HIELE</b> .....	16
<b>2.4.1 NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE</b> .....	17
<b>2.4.1.1 NIVEL 1 RECONOCIMIENTO O VISUALIZACIÓN</b> .....	18
<b>2.4.1.2 NIVEL 2 ANÁLISIS</b> .....	18
<b>2.4.1.3 NIVEL 3 CLASIFICACIÓN</b> .....	18
<b>2.4.1.4 NIVEL 4 DEDUCCIÓN FORMAL</b> .....	19
<b>2.4.1.5 NIVEL 5 RIGOR</b> .....	19
<b>2.4.2 FASES DEL APRENDIZAJE DEL MODELO DE VAN HIELE</b> .....	21
<b>2.4.2.1 FASE 1 INFORMACIÓN</b> .....	21
<b>2.4.2.2 FASE 2 ORIENTACIÓN DIRIGIDA</b> .....	21
<b>2.4.2.3 FASE 3 EXPLICITACIÓN</b> .....	22
<b>2.4.2.4 FASE 4 ORIENTACIÓN LIBRE</b> .....	22
<b>2.4.2.5 FASE 5 INTEGRACIÓN</b> .....	23
<b>CAPITULO 3</b> .....	24
<b>METODOLOGÍA</b> .....	24
<b>3.1 POBLACIÓN</b> .....	24

<b>3.2 MÉTODO DE INVESTIGACIÓN</b> .....	25
<b>3.3 NIVELES DE RAZONAMIENTO EN EL TEMA ÁNGULOS DE LA CIRCUNFERENCIA</b> .....	26
<b>3.3.1 NIVEL 1 RECONOCIMIENTO O VISUALIZACIÓN</b> .....	26
<b>3.3.2 NIVEL 2 ANÁLISIS</b> .....	27
<b>3.3.3 NIVEL 3 CLASIFICACIÓN</b> .....	27
<b>3.3.4 NIVEL 4 DEDUCCIÓN FORMAL</b> .....	28
<b>3.4 PRUEBA DIAGNÓSTICA</b> .....	28
<b>3.5 SECUENCIA DE ACTIVIDADES</b> .....	31
<b>CAPITULO 4</b> .....	38
<b>ANÁLISIS, RESULTADOS Y CONCLUSIONES</b> .....	38
<b>4.1 APLICACIÓN Y RESULTADOS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA</b> .....	38
<b>4.2 ANÁLISIS DE LOS APRENDIZAJES</b> .....	43
<b>4.2.1 ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES CORRESPONDIENTES AL NIVEL DE RAZONAMIENTO 1</b> .....	43
<b>4.2.2 ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES CORRESPONDIENTES AL NIVEL DE RAZONAMIENTO 2</b> .....	44
<b>4.2.3 ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES CORRESPONDIENTES AL NIVEL DE RAZONAMIENTO 3</b> .....	48
<b>4.2.4 ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES CORRESPONDIENTES AL NIVEL DE RAZONAMIENTO 4</b> .....	49
<b>4.3 ANÁLISIS DEL POST-TEST</b> .....	50
<b>4.3.1 DETERMINACIÓN DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE CADA ALUMNO</b> .....	51
<b>4.4 COMPARACIÓN DE LOS ANÁLISIS DEL PRE-TEST Y POST-TEST</b> .....	65
<b>CONCLUSIONES</b> .....	66
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	68
<b>ANEXOS</b> .....	70

## INDICE DE FIGURAS

Figura 1. Niveles de razonamiento del Modelo de Van Hiele.....	20
Figura 2. Fases del aprendizaje del Modelo de Van Hiele .....	23
Figura 3. Ángulos de la circunferencia: central, inscrito, semi-inscrito, interior y exterior. 34	
Figura 4. Ejercicio compuesto de varios ángulos de distinto tipo .....	35
Figura 5. Gráfico de barras de los Niveles de Razonamiento Obtenidos por ítem.....	40
Figura 6. Gráfico de frecuencia de número de ítems no contestados .....	41
Figura 7. Gráfico de pastel de porcentajes de cada Nivel Alcanzado en el grupo .....	42
Figura 8. Actividad 1 Conocimientos previos del tema ángulos de la circunferencia. Segmentos de la circunferencia. ....	44
Figura 9. Actividad 2 ángulo inscrito .....	45
Figura 10. Actividad 3 ángulo semi-inscrito .....	46
Figura 11. Actividad 4 ángulo interior .....	47
Figura 12. Actividad 5 ángulo exterior.....	47
Figura 13. Tabla de contenido de ángulos de la circunferencia. ....	48
Figura 14. Ejercicios de demostración .....	50
Figura 15. Gráfico de barras de los Niveles de Razonamiento alcanzados en cada ítem.....	60
Figura 16. Gráfico de barras de los Niveles de Razonamiento adquiridos en el grupo.....	63
Figura 17. Gráfico de barras de frecuencia de ítems sin contestar. ....	64

## INDICE DE TABLAS

Tabla 1. Ponderaciones de los Tipos de respuesta.....	53
Tabla 2. Valores de los grados de adquisición de un Nivel de Razonamiento.....	54
Tabla 3. Tabla de ponderación de los ítems según el tipo de respuesta dado .....	61
Tabla 4. Tabla de Valores de los grados de adquisición .....	62

## RESUMEN

Se puede considerar que uno de los principales objetivos del currículo de bachillerato es la formación de estudiantes críticos y reflexivos. Actualmente muchos estudiantes tienen dificultades en la solución de problemas en donde se involucran propiedades de la circunferencia.

En esta investigación se analiza el nivel de razonamiento de un grupo de alumnos de tercer semestre de preparatoria de la ciudad de Puebla respecto al tema de ángulos de la circunferencia. Se diseña una secuencia de actividades enfocadas a dicho tema basado en el modelo de Van Hiele y se evalúa el efecto de dicha secuencia. Se divide en tres momentos, la aplicación de un pre-test para poder clasificar al alumnado según su nivel de razonamiento, el diseño y la aplicación de la secuencia de actividades para que los alumnos pasen a un siguiente nivel de razonamiento según las fases de aprendizaje propuestas por Van Hiele y por último la aplicación de un post-test para analizar y observar el nivel de razonamiento que alcanzaron.

Los resultados del pre-test al post-test muestran un avance en los alumnos. Una vez analizado el pre-test, se concluyó que el grupo se encontraba en el Nivel 1 de Razonamiento, partiendo de este nivel para la elaboración y aplicación de la secuencia de actividades, para posteriormente aplicar el post-test. Los resultados alcanzados que esta aplicación arrojó son: 10% del grupo alcanzó en Nivel 4, 33% el Nivel 3 y 57% el Nivel 2 de Razonamiento del Modelo de Van Hiele.

## **ABSTRACT**

It can be considered that one of the main objectives of the high school curriculum is the training of critical and reflective students. Currently many students have difficulties in solving problems involving circumference properties.

In this research, the level of reasoning of a group of students of the third semester of high school in the city of Puebla is analyzed with respect to the subject of angles of the circumference. A sequence of activities focused on this theme is designed based on Van Hiele's model and the effect of said sequence is evaluated. It is divided into three moments, the application of a pre-test to classify students according to their level of reasoning, the design and application of the sequence of activities for students to move to a next level of reasoning according to the learning phases proposals by Van Hiele and finally the application of a post-test to analyze and observe the level of reasoning they achieved.

The results of the pre-test to the post-test show an advance in the students. Once the pre-test was analyzed, it was concluded that the group was in Level 1 of Reasoning, starting from this level for the preparation and application of the sequence of activities, to subsequently apply the post-test. The results achieved that this application showed are: 10% of the group reached in Level 4, 33% in Level 3 and 57% in Level 2 of Reasoning of the Van Hiele Model.

## INTRODUCCIÓN

Según Aravena, Gutiérrez y Jaime (2016), la geometría es una de las áreas de la matemática, que presenta mayor dificultad y obstáculos de aprendizaje. Esto está apoyado por PISA, ya que en los resultados presentados por los alumnos, muestran serias deficiencias en los procesos argumentativos y deductivos en Geometría.

Jaime y Gutiérrez (1990) citan en un Capítulo de su libro palabras de Van Hiele (1986) que dicen:

“Cuando empecé mi carrera como profesor de matemáticas, pronto me di cuenta que es una profesión difícil. Había partes de la materia en cuestión que yo podía explicar y explicar, y aun así los alumnos no entendían. Especialmente al comienzo de la geometría, cuando había que demostrar cosas muy simples, la materia parecía ser demasiado difícil.”

Jaime y Gutiérrez (1990), aseguran que las posibles causas que pueden estar provocando esto son: falta de interés, compromiso y responsabilidad de parte de los alumnos. Dentro de lo social, problemas, violencia o separación familiar, o que el alumno viva con el padre o la madre solamente. Del lado del docente, la falta de preparación y compromiso, también son causas de que se presenten dichas deficiencias. En la actualidad, por medio de la investigación, se buscan formas para que el razonamiento de los alumnos sea activado y se encuentren las soluciones correctas a problemas y ejercicios de geometría.

Vargas y Gamboa (2013) en su trabajo de investigación analizan la importancia de estudiar geometría, además de las concepciones y dificultades que se dan en la forma de enseñar y aprender. Mencionan que la geometría despierta en el estudiante un conjunto de habilidades que le servirán para comprender otras áreas de la Matemática y tendrá una mejor preparación para entender el mundo que lo rodea; además de que muchas de las aplicaciones de la Matemática poseen un componente geométrico. En lo que respecta a las dificultades los autores mencionan que el docente planea sus lecciones utilizando concepciones y experiencias adquiridas en su formación. Su vivencia personal le impide llevar a cabo una experiencia de aprendizaje que guíe al alumno al descubrimiento de la geometría. Además mencionan que el auge de la Matemática moderna en la década de los setenta, provocó que

la geometría pase a un segundo término en el ámbito escolar, relegándose al final de los contenidos anuales de estudio, por lo que en muchas ocasiones no se abarcan estos temas.

Por lo tanto la enseñanza de la geometría ha estado limitada al hecho de conceptualizar figuras y plasmarlas en papel, es decir, el alumno no cuenta con objetos, formas, ejemplos reales que le permitan captar mejor los conceptos; las clases de geometría se han convertido prácticamente en sesiones de dictado de manera abstracta.

En este trabajo de tesis se diseñan y experimentan estrategias de enseñanza para la geometría, que buscan mejorar el rendimiento de un grupo de estudiantes del 3er Semestre de Preparatoria. Esto da origen a bajos resultados de alumnos en distintos centros educativos, comprobando así la poca o nula utilización de procesos de razonamiento geométrico.

El modelo de razonamiento de Van Hiele tiene origen en los trabajos doctorales de dos profesores holandeses de Matemáticas, Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele Geldof, quienes mostraron un modelo de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Este modelo describe la evolución del razonamiento geométrico de los alumnos, dividiéndolo en cinco niveles: Nivel 1(Visualización), el alumno percibe las figuras geométricas en su totalidad y no generalizan características de una figura a otra; Nivel 2(Análisis), el alumno reconoce propiedades matemáticas en las figuras geométricas pero no las relaciona con otras propiedades; Nivel 3(Clasificación), el alumno inicia con el desarrollo de razonamiento deductivo abstracto, realizando demostraciones informales; Nivel 4(Deducción formal), el alumno comprende y realiza demostraciones deductivas formales y lo adopta como medio de verificar la verdad de la información; Nivel 5(Rigor), comprenden la estructura axiomática de las matemáticas, como el sentido y la utilidad de términos no definidos.

El alumno se ubica en un nivel dado al inicio del aprendizaje y conforme vaya cumpliendo un proceso, avanza a un nivel superior. Van Hiele (1986) propuso cinco fases de aprendizaje para guiar al docente en el diseño y organización de aprendizajes adecuados para el progreso del alumno para pasar de un nivel a otro. Las fases del aprendizaje son: Fase 1(Información), el docente plantea las actividades y conocimientos del tema de estudio. También informa sobre los conocimientos previos; Fase 2(Orientación dirigida), los alumnos resuelven actividades y problemas con el objetivo de dirigirlos al resultado, para que descubran, comprendan conceptos y propiedades; Fase 3(Explicitación): los alumnos presentan y

argumentan resultados y conclusiones. Se fomenta el diálogo, intercambio de ideas y se utiliza el vocabulario de acuerdo al nivel de razonamiento, Fase 4(Orientación libre), los alumnos aplican los conceptos adquiridos en las fases anteriores para resolver problemas más complejos; Fase 5(Integración): el docente procura que los alumnos relacionen los nuevos conceptos con otros contenidos matemáticos.

Estas fases no son exclusivas de un nivel, mejor dicho, el alumno inicia con las actividades de la primera fase hasta culminar con las actividades de la última fase, de tal forma que debe alcanzar el siguiente nivel de razonamiento. Basándose en este modelo, en este trabajo de tesis, se propone el diseño de una secuencia de actividades, para abordar el tema de ángulos de la circunferencia, tema que pertenece al programa de estudios de Geometría Euclidiana de la materia de Matemáticas II de Preparatorias incorporadas a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). Estos ángulos son nombrados según la posición del vértice en la circunferencia y los segmentos que forman sus lados. Los ángulos de la circunferencia son: ángulo central, cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados son radios; ángulo inscrito, cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son cuerdas o secantes; ángulo interior, cuyo vértice se ubica dentro de la circunferencia y sus lados están formados por la intersección de dos cuerdas; ángulo exterior, cuyo vértice se ubica fuera de la circunferencia y sus lados pueden ser dos tangentes, dos secantes o una tangente y una secante.

Algunos autores como Kerlegand y Rosas (2009) realizaron una investigación para comprobar que alumnos de bachiller presentan dificultades para resolver problemas de aplicación de propiedades geométricas de la circunferencia. Diseñaron una secuencia apoyada con Cabri y basada en el modelo de Van Hiele. El grupo fue ubicado en el Nivel 1 de Razonamiento geométrico, logrando ubicarse en el Nivel 2. También Aravena y Gutiérrez (2016) realizaron una investigación para mejorar el aprendizaje de la geometría en alumnos de 2° año de escuelas de Chile. Elaboraron una secuencia didáctica, utilizando un pre-test y post-test para evaluar el cambio de nivel de razonamiento de los alumnos. Se dividió a la muestra en dos grupos. El primer grupo fue atendido por docentes que prepararon sus actividades de manera tradicional, el segundo grupo fue atendido por docentes que fueron capacitados con el modelo de Van Hiele. Los resultados obtenidos fueron los siguientes: el

primer grupo un porcentaje mínimo pudo alcanzar el Nivel 2 de razonamiento, mientras el otro grupo fue mucho mayor el porcentaje que alcanzo dicho nivel. Ramírez, Torres e Iglesias (2013) presentan una propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de este tema para alumnos de 2° año de educación media en Venezuela, basándose en el modelo de Van Hiele. En este trabajo de investigación se abordan solo los ángulos inscritos y semi-inscritos, que forman parte del tema que se aborda en nuestro trabajo de investigación. En este documentos solo se hace mención de cómo se elabora la propuesta didáctica que servirá de herramienta para poder comprobar el subir un Nivel de Razonamiento geométrico.

En este trabajo de tesis, presentamos evidencias de que utilizando el Modelo de Van Hiele, un grupo de alumnos de segundo de preparatoria, logró pasar de un Nivel de Razonamiento geométrico a otro, por medio de la creación de una secuencia de actividades, basándose en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, aplicado al tema de ángulos de la circunferencia, perteneciente al programa de estudios de Preparatorias incorporadas a la BUAP.

Esta investigación se divide en tres momentos, que se corresponden con el modelo de Van Hiele. Este modelo evalúa el nivel de razonamiento que presenta el alumno o un grupo de alumnos, por lo que el primer momento es aplicar un pre-test al grupo, para observar el nivel de razonamiento geométrico que presenta, además de que estos resultados sirven para desarrollar la secuencia de actividades. Los ejercicios que componen dicho test, fueron seleccionados de pruebas ya aplicadas en otras investigaciones, así como también de ejercicios para preparar participantes a Olimpiadas de Matemáticas.

Una vez terminado el diseño se aplica dicha secuencia al grupo. Esta etapa se diseña de acuerdo a las fases de aprendizaje del Modelo de Van Hiele, para que los alumnos tengan la oportunidad de avanzar en los niveles de razonamiento geométrico de todos los conocimientos deseados. Enseguida, se aplicó el post-test, que es el mismo pre-test. Para el análisis de los resultados, Corberán, Gutiérrez y otros (1994) proponen una codificación del test y determinan el Nivel de Razonamiento. Hacen una tipificación (de 0 a 7) de 8 posibles resultados. Los primeros cuatro tipos (0-3) son respuestas nulas o respuestas muy pobres, incompletas, con errores matemáticos y proporcionan muy poca información del nivel de razonamiento. Una respuesta de tipo 4 muestra características de dos niveles de

razonamiento. Y los últimos 3 tipos de respuestas, son respuestas que muestran un dominio avanzado para alcanzar el siguiente nivel de razonamiento. Una vez que se determinó el tipo de respuesta en cada ítem se le asigna un porcentaje para después obtener el promedio por ítem y por último determinar el grado de adquisición por nivel de razonamiento. Jaime (1993) utiliza esta forma de evaluación en su trabajo doctoral y define los grados de adquisición de un nivel de razonamiento. Estos grados son: Adquisición Nula, el alumno no emplea las características del nivel de razonamiento; Adquisición Baja, inicia la consciencia de las características y métodos del nivel pero muy pobre, es frecuente el abandono del trabajo; Adquisición Intermedia, es más frecuente el uso de métodos en el nivel, sin embargo no se domina; Adquisición Alta, nivel normal de trabajo y en algunas ocasiones podría darse un retroceso y ocasionalmente se hace uso inadecuado de herramientas; Adquisición Completa, dominio total de herramientas y métodos de trabajo. En este trabajo de investigación, una vez que se asignaron las ponderaciones por ítems, se obtuvieron promedios de cada nivel para poder así proporcionar que niveles de razonamiento fueron adquiridos en el post-test.

El desarrollo de la investigación consta de cuatro capítulos, organizados de la siguiente forma. En el capítulo uno, se describen los antecedentes en donde se apoya este trabajo, además de mencionar el problema de investigación, la pregunta de investigación, así como los objetivos. En el capítulo dos, se encuentra el Marco Teórico, en donde se mencionan los conceptos de la geometría, la importancia que tiene su enseñanza, así como sus dificultades. Así como la descripción detallada del Modelo de Van Hiele. El capítulo tres, está descrita la Metodología que se aplicó en la investigación, así como la descripción del pre-test y la secuencia de actividades que se aplicará al grupo de alumnos. Por último, el capítulo cuatro está compuesto por el análisis de los resultados que arrojaron el pre-test, las observaciones que se obtuvieron de la aplicación de la secuencia de actividades, así como los resultados del post-test y la determinación del Nivel de Razonamiento geométrico que obtuvo cada alumno.

# CAPÍTULO 1

## 1.1 ANTECEDENTES

El modelo de Van Hiele fue propuesto en 1957, por el matrimonio Dina Van Hiele-Geldof y Pierre Van Hiele, en la universidad de Utrech, orientado a la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Este modelo es muy utilizado, debido a que permite el análisis de razonamiento de los alumnos al momento de resolver un problema geométrico.

Kerlegand y Rosas (2009) realizaron una investigación en estudiantes de bachillerato, para comprobar que estos alumnos presentan muchas dificultades para resolver problemas en los que tenían que aplicar propiedades geométricas de la circunferencia, a pesar de que ya habían sido estudiadas previamente.

Diseñaron una secuencia didáctica apoyada en la aplicación Cabri y basada en el modelo Van Hiele, para ser aplicada a los alumnos y de esta forma lograr que estos pasen al siguiente nivel de razonamiento.

Aravena y Gutiérrez (2016) realizaron una investigación enfocada en mejorar el aprendizaje de la geometría y la adquisición de destrezas de razonamiento matemático de estudiantes de 2° año de centros de enseñanza secundaria de Chile, la edad comprendida de estos alumnos era de entre 15 y 16 años.

Realizaron una secuencia didáctica o unidad de enseñanza como se menciona, de acuerdo con los niveles y las fases de Van Hiele, utilizando también un pre-test y post-test, para evaluar el cambio de nivel de razonamiento de los alumnos.

Los resultados que obtuvieron mostraron un avance significativo en el desarrollo de razonamientos de los alumnos que fueron objeto de estudio.

En lo referente a la circunferencia y los ángulos que se pueden formar dentro y fuera de ésta, Ramírez, Torres e Iglesias (2013) presentan una propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de este tema para alumnos de 2° año de educación media en Venezuela, basándose en el modelo de Van Hiele. Dentro de la propuesta se menciona el uso de tecnología como Cabri o Geogebra, como apoyo en la enseñanza y el aprendizaje.

Los autores mencionan que el diseño de unidades didácticas con contenido geométrico exige a los docentes del dominio del conocimiento disciplinar y el conocimiento didáctico, asociado al conocimiento matemático.

Bagazgoitia (2003) crea una secuencia de actividades utilizando Cabri como software de apoyo para la enseñanza de ángulos de la circunferencia. La metodología de enseñanza es relacionando los arcos que se forman con los distintos tipos de ángulos (inscritos, semi-inscritos, interiores y exteriores, con los ángulos centrales que abarcan dichos arcos).

Además de contener actividades para demostrar dichas relaciones, también la secuencia cuenta con problemas de aplicación de dichos ángulos.

Con lo mencionado anteriormente, se evidencia lo siguiente:

- Alumnos con un razonamiento bajo, difícilmente podrán enfrentar ejercicios y problemas de geometría, ya que como lo menciona el modelo de Van Hiele, el que un alumno suba a otro nivel de razonamiento depende más de la enseñanza en el nivel anterior que de la edad o madurez.
- Aplicar correctamente el Modelo de Van Hiele en una secuencia de actividades, basándose en los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje, garantiza un mayor conocimiento en los alumnos.

## **1.2 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**

Durante mucho tiempo, los docentes, sobre todo los de matemáticas, al momento de abordar los conocimientos necesarios en el salón de clases, tratan de buscar distintas formas de preparar sus clases para enseñar, teniendo un conjunto de creaciones y resultados que forman parte de la formación de los alumnos.

Siendo más específico, la enseñanza de la geometría se vuelve un reto más grande para el docente, ya que el alumno no solo debe aprender figuras geométricas, fórmulas para perímetro y área, y conceptos similares a los vistos durante la primaria o la secundaria, sino que el alumno debe también conocer propiedades como definiciones, teoremas, etc. Usando estos elementos para demostraciones formales, y enfrentando al alumno a resolver problemas de este estilo.

Si los alumnos no llevaron una buena enseñanza en años anteriores, el docente de bachillerato tendrá un serio problema por resolver. Ya que podrá encontrar obstáculos de conocimientos previos mal aprendidos y aplicados de manera incorrecta en lo nuevo que está por aprender, o simplemente no fueron comprendidos y no encuentre ningún camino para resolverlo.

Existen muchas estrategias de enseñanza para la comprensión matemática; Aprendizaje Basado en Problema, Aprendizaje Basado en Proyectos, etc. Inclusive, la tecnología se ha vuelto una buena herramienta de apoyo para que junto con alguna metodología se intente cumplir con los objetivos de enseñanza-aprendizaje.

Sin embargo, una metodología óptima para el proceso de enseñanza-aprendizaje en geometría es el modelo de Van Hiele, ya que no solo comprende dividir el aprendizaje en fases para una mejor comprensión, sino que también se analiza el nivel de razonamiento en el que se encuentran los alumnos, para poder diseñar secuencias de actividades en donde se

pueda desenvolver el alumno, de manera que puedan ir subiendo cada nivel, y de esta manera garantizar el aprendizaje del grupo.

Bajo esta razón, el problema de investigación es: *“Basándose en el modelo de Van Hiele, determinar el nivel de razonamiento inicial de un grupo de alumnos de 2° grado de Bachillerato por medio de un pre-test, para después aplicar un secuencia de actividades apoyado de las fases del aprendizaje de dicho modelo y para comprobar dicho aprendizaje, se aplica un post-test para realizar un análisis y determinar el nivel de razonamiento que se alcanza. El tema que se aborda para aplicar este modelo es **Ángulos de la Circunferencia**.”*

### **1.3 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN**

Se pretende dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo favorece al aprendizaje de los alumnos de 2° grado de Bachillerato, el uso del Modelo de Van Hiele aplicado al tema de Ángulos de la Circunferencia?

### **1.4 OBJETIVOS**

#### **1.4.1 OBJETIVO GENERAL**

Diseñar y evaluar una secuencia de actividades para el aprendizaje de ángulos de la circunferencia, basada en el modelo de Van Hiele, en alumnos de 2° grado de preparatoria.

#### **1.4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

1. Determinar el nivel de razonamiento del grupo previo al diseño de la secuencia de actividades, para saber el punto de partida de dicha secuencia para alcanzar el nivel de razonamiento esperado.

2. Crear una secuencia de actividades que involucre las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, iniciando desde el nivel de razonamiento que presentó el grupo en la aplicación del pre-test.
3. Comprobar el nivel de razonamiento alcanzado después de la secuencia de actividades por medio de un post-test.

## **CAPITULO 2**

### **MARCO TEÓRICO**

En este capítulo se hace referencia a todos los conceptos teóricos que fundamentan a este trabajo de investigación.

Como se mencionó anteriormente, el Modelo de Van Hiele es el referente para trabajar y analizar el avance que puede tener el grupo frente al tema de ángulos de la circunferencia, esto debido a que dicho tema forma parte del programa de estudios de Geometría Euclidiana correspondientes a los alumnos del 2º grado de Bachillerato

#### **2.1 GEOMETRÍA**

La geometría es una de las áreas de la matemática de mayor importancia, ya que se relaciona con muchas actividades dentro de la sociedad, el estudio, recreación, etc. La geometría es para el ser humano el idioma universal que permite describir y construir su mundo, así como transmitir la percepción que se tiene de este a otros seres humanos.

La geometría debe despertar en el alumno habilidades que le deben servir para entender y mejorar el mundo que lo rodea, además de que son muchas las aplicaciones de las matemáticas que poseen algún componente geométrico.

Para el docente, debe ser un reto explorar distintas formas de obtener provecho de las habilidades que provee la geometría, es decir, debe dedicarse a la investigación, exploración y aplicación de nuevas actividades dentro y fuera del salón de clases. También debe contar con una gran base de conocimientos que le permitan guiar con mayor facilidad a sus alumnos. Debe ser el primero en explorar para incluir los descubrimientos propios y/o ajenos en la planeación diaria de sus clases.

## 2.2 IMPORTANCIA DE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Se dice que entre los conocimientos generales que un alumno debe obtener para una educación matemática de calidad, la geometría tiene una gran importancia. Andonegui (2006) hace mención de que el estudio de la geometría ayuda a potenciar habilidades de procesamiento de la información recibida a través de los sentidos y permite al alumno desarrollar otras destrezas de tipo espacial para poder comprender el espacio donde vive.

También señala que la geometría ayuda a comprender mejor el mundo, ya que se hacen representaciones que imitan el entorno y permite un análisis de objetos geométricos.

Otros autores como Hernández y Villalba (2001) mencionan que la geometría se puede concebir como:

- a) La ciencia del espacio, como una herramienta para medir y describir, para construir y estudiar modelos del mundo físico y del mundo real.
- b) Un método de representación visual de conceptos y otras áreas de la matemática y otras ciencias. Ejemplo: gráficas, histogramas, etc.
- c) Un punto de encuentro entre la Matemática teórica y la Matemática como fuente de modelos.
- d) Una forma de razonar y comprender.
- e) Un modelo de enseñanza del razonamiento deductivo.
- f) Una herramienta en aplicaciones, ejemplo: gráficas por computadora, procesamientos y manipulación de imágenes, robótica, investigación de operaciones, etc.

Esto debe hacer ver la importancia de la geometría para el desarrollo de un alumno, tanto en lo personal como en lo social, por lo que el docente debe cumplir con su labor de explotar al máximo las posibilidades que ofrece la geometría como potenciadora de habilidades y formas de pensamiento, que proporciona una mayor versatilidad.

### **2.3 DIFICULTADES EN EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA**

La geometría presenta algunas dificultades, desde las concepciones y creencias del alumno y el docente.

Un docente planea sus actividades de acuerdo a las concepciones y experiencias que adquirió durante su formación, por lo tanto utiliza los mismos recursos que experimentó en su momento como alumno. Por lo que impedirá una experiencia de aprendizaje del alumno por medio del descubrimiento de la geometría.

Según Barrantes y Blanco (2004), la forma de enseñar la geometría se ha ido heredando a través de las generaciones y parece una larga cadena que no se puede romper. Las experiencias que conserva el docente tienen mucho peso en la forma de planear las clases de geometría, ya que carece de un punto de comparación o referencia que permita explorar nuevas formas de enseñanza de la geometría a partir de lo que ya conoce.

Por lo tanto esto provoca que un docente de Matemáticas se incline hacia los temas que considere más importantes para la enseñanza y el aprendizaje, por lo que los temas de geometría son relegados al ser considerados poco importantes.

## 2.4 MODELO DE VAN HIELE

Dentro de la Educación, y sobre todo la Educación Matemática, existe la preocupación sobre la forma de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Existe una diversidad de modelos en los que se puede apoyar para aproximarse a esta realidad. De manera particular para el razonamiento geométrico, el Modelo de Van Hiele es uno de los modelos más usados, tanto para la formación educativa, como para la investigación.

Muchos autores mencionan la importancia de este Modelo en la enseñanza de la Geometría, ya que una de las características del modelo es el análisis del nivel de razonamiento que presenta un alumno o un grupo, para después partir de este punto

Jurado y Londoño (2005) mencionan en su trabajo de tesis lo siguiente:

*“El modelo de Van Hiele es una propuesta que parece describir con bastante exactitud la evolución desde las formas intuitivas iniciales, hasta las formas deductivas finales y está adquiriendo cada vez mayor aceptación a nivel internacional en lo que se refiere a la geometría escolar”.*

Vargas (2013) menciona que el modelo de Van Hiele nace de los trabajos doctorales de Pierre M. van Hiele y Dina Van Hiele Geldof en la universidad de Utrech. Este modelo menciona la evolución del razonamiento geométrico por medio de 5 niveles: Visualización, Análisis, Deducción Informal, Deducción Formal y Rigor. El alumno se ubica en un nivel determinado y conforme se cumpla con un proceso avanza al siguiente nivel.

Este modelo abarca dos aspectos básicos:

1. El primer aspecto es descriptivo, ya que se pueden identificar distintas formas de razonamiento geométrico de los alumnos y puede valorarse su progreso.

2. El segundo aspecto es instructivo, ya que marca pautas a los docentes para favorecer a los alumnos el avance de su razonamiento geométrico.

El modelo de Van Hiele hace mención de que el razonamiento geométrico de los alumnos pasa por una serie de niveles dentro del proceso de aprendizaje de la geometría. Para que el alumno pase a un nivel superior debe dominar el nivel en el que se encuentra, cumpliendo con ciertos logros y aprendizajes.

Este modelo distribuye el conocimiento de manera escalonada en cinco niveles de razonamiento, secuenciales y ordenados. En cada nivel hay una serie de fases de aprendizaje que el alumno debe cumplir para avanzar de un nivel a otro. No existen niveles de razonamientos independientes, por lo que no pueden saltarse. Para subir al siguiente nivel el alumno debe dominar el nivel en el que se encuentra.

Fouz (2006) menciona que al pasar a un nivel superior, los conocimientos que en el nivel anterior eran implícitos, se hacen explícitos, lo que da como resultado el aumento de grado de comprensión y dominio del conocimiento, llegando a la conclusión que las actividades del nivel superior son extensiones de las actividades del nivel anterior.

#### **2.4.1 NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE**

Los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele son los siguientes:

### **2.4.1.1 NIVEL 1 RECONOCIMIENTO O VISUALIZACIÓN**

En este nivel el alumno reconoce las figuras geométricas por su forma como un todo, es decir no hace diferencia de partes ni componentes de dicha figura. No es capaz de reconocer o explicar sus propiedades, las descripciones de las figuras son totalmente visuales y lo relaciona con objetos de su entorno. En este nivel el alumno no tiene la capacidad de manejar un lenguaje geométrico formal.

### **2.4.1.2 NIVEL 2 ANÁLISIS**

El alumno ya reconoce y analiza algunas propiedades particulares de las figuras geométricas y las reconoce a través de ellas; aunque no es capaz de establecer relaciones o clasificaciones de propiedades de distintas figuras. Menciona estas propiedades de manera empírica, resultado de la manipulación y la experimentación. No puede elaborar definiciones geométricas, ya que estas se establecen a partir de las propiedades.

### **2.4.1.3 NIVEL 3 CLASIFICACIÓN**

En este nivel el alumno tiene la capacidad de mencionar las propiedades de las figuras y las reconoce como unas propiedades que se derivan de otras, construye interrelaciones entre las figuras y entre familias de ellas. Las definiciones ya adquieren significado debido a que puede establecer las condiciones necesarias que deben cumplir las figuras geométricas, aunque su razonamiento lógico se sigue basando en la manipulación.

Podrá seguir una demostración pero no será capaz de comprenderlas, por lo que no podrá organizar una secuencia de razonamientos lógicos que justifique sus observaciones. No comprende la necesidad de la formalidad (demostraciones generales) ni las estructuras axiomáticas.

Un alumno que razone en este nivel, podrá hacer, por ejemplo, conjeturas relacionadas a propiedades de los ángulos de un rectángulo a partir de otras propiedades relacionadas a sus lados.

#### **2.4.1.4 NIVEL 4 DEDUCCIÓN FORMAL**

En este nivel el alumno comienza con el razonamiento formal, ya que reconoce propiedades que se deducen unas de otras, además de que sigue una demostración formal aunque no es capaz de construir una por sí mismo. Pueden describir una figura geométrica, dando definiciones matemáticamente correctas. Comprende que se puede llegar a los mismos resultados, partiendo de proposiciones o premisas distintas, concluyendo que se pueden realizar distintas demostraciones para obtener el mismo resultado.

#### **2.4.1.5 NIVEL 5 RIGOR**

En este nivel el alumno puede entender y realizar razonamientos lógicos formales; las demostraciones ya tienen sentido y existe la necesidad de verificar la verdad de una información.

Comprenden la estructura axiomática de las matemáticas, como el sentido y la utilidad de términos no definidos.

Algunos autores como Gutiérrez y Jaime (1991) y Alsina, Fortuny y Pérez (1997) mencionan que este último nivel por su alto grado de abstracción, debe ser considerado en una categoría aparte, ya que consideran que solo se desarrolla en estudiantes de la Universidad, con una buena preparación en geometría.

Otros autores hacen mención que el Nivel 5(Rigor) es inalcanzable para los estudiantes y se prescinde de él, es decir en su trabajo no hacen mención de este nivel, por lo que sus investigaciones solamente citan 4 Niveles.

También se hace mención que alumnos no universitarios alcanzan solamente los tres primeros niveles, y que el paso de un nivel a otro, depende más de la enseñanza recibida que de la edad o la madurez.

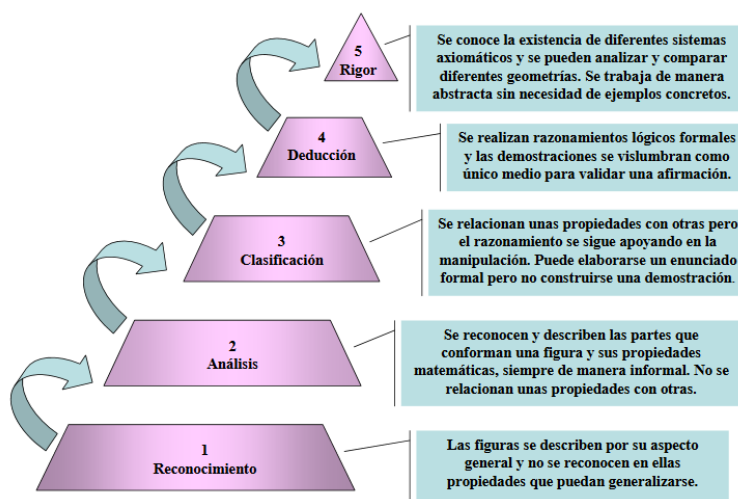


Figura 1. Niveles de razonamiento del Modelo de Van Hiele

## **2.4.2 FASES DEL APRENDIZAJE DEL MODELO DE VAN HIELE**

En este modelo se proponen cinco fases de aprendizaje que guían al docente al diseño y organización de actividades de aprendizaje adecuados para el progreso del alumno de un nivel a otro. Las fases no son exclusivas de un nivel, sino, en cada nivel, el estudiante comienza con actividades de la primera fase y así sucesivamente, de tal forma que al terminar con las actividades de la fase 5, el alumno debe haber alcanzado el siguiente nivel de razonamiento.

Las fases del aprendizaje del modelo de Van Hiele son:

### **2.4.2.1 FASE 1 INFORMACIÓN**

El docente debe identificar los conocimientos previos del alumno sobre el nuevo tema a trabajar, además de que conozca el nivel de razonamiento que presenta. El alumno debe recibir información para conocer el campo de estudio que va a iniciar, los tipos de problemas a resolver, métodos y materiales a utilizar, etc.

También el docente crea un diálogo con los alumnos para conocer la interpretación de los conceptos que el alumno da con sus propias palabras. Este entra en contacto con el vocabulario y objetos de la materia mediante intercambio de preguntas y observaciones.

### **2.4.2.2 FASE 2 ORIENTACIÓN DIRIGIDA**

En esta fase el docente guía al alumno por medio de actividades, para descubrir y aprender diversas relaciones de los conocimientos por adquirir. Se deben seleccionar cuidadosamente las actividades y orientar al alumno a la solución cuando sea necesario. Se menciona que esta fase es fundamental, ya que se construyen los elementos básicos de la red de relaciones del nivel correspondiente.

Van Hiele señala que las actividades de esta fase, si se seleccionan cuidadosamente, constituyen la base adecuada del pensamiento de nivel superior. Las funciones del docente son muy importantes en esta fase, ya que debe seleccionar actividades adecuadas para permitir al alumno aprender los conceptos, propiedades o definiciones fundamentales para pasar a un nivel de razonamiento nuevo.

### **2.4.2.3 FASE 3 EXPLICITACIÓN**

En esta fase el alumno trata de expresar los resultados que obtuvieron en las actividades, intercambian experiencias con sus compañeros y profesor. El alumno trata de usar un vocabulario adecuado al nivel. El docente debe intervenir lo menos posible dentro de la solución y comunicación con los alumnos.

### **2.4.2.4 FASE 4 ORIENTACIÓN LIBRE**

En esta fase debe darse la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. El alumno utiliza los conocimientos adquiridos para realizar actividades más complejas, es decir debes ser diferentes a las anteriores. El docente debe proponer actividades en donde no se utilice una aplicación solamente para solucionarlas, sino actividades que planteen nuevas relaciones, preferentemente con distintas formas de solucionar, con varias soluciones o con ninguna.

Van Hiele menciona que *“los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir en situaciones nuevas. Los problemas planteados en esta fase deben obligar a los alumnos a combinar sus conocimientos y aplicarlos a situaciones diferentes de las propuestas anteriormente. La intervención del profesor en la resolución de tareas debe ser mínima, ya que los alumnos deben de encontrar el camino adecuado”*.

### 2.4.2.5 FASE 5 INTEGRACIÓN

En esta fase el alumno tiene una visión global de todo lo aprendido del tema, integrando los nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenía anteriormente. Las actividades propuestas no deben contener nuevos conocimientos, sino los que fueron adquiridos con anterioridad, esto quiere decir que no hay un aprendizaje de elementos nuevos, sino una fusión de los nuevos conocimientos, algoritmos y formas de razonamiento con los anteriores. Dichas actividades le deben permitir al docente comprobar que se ha conseguido integrar los conocimientos.

El paso por cada una de las fases del aprendizaje y el observar cómo se van desarrollando, potencia la posibilidad de que un alumno avance del nivel en el que se encuentra y desarrollar sus habilidades y capacidades de razonamiento geométrico.

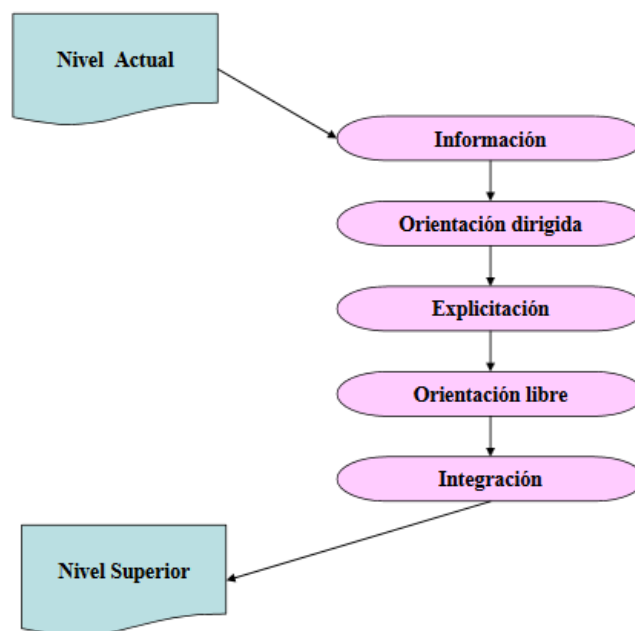


Figura 2. Fases del aprendizaje del Modelo de Van Hiele

## **CAPITULO 3**

### **METODOLOGÍA**

#### **3.1 POBLACIÓN**

La Preparatoria Xilotzingo, UNICUP, es una institución privada incorporada a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, que inició sus labores en el ciclo escolar 2013-2014. Es una institución de nueva creación ya con la primera generación egresada.

Actualmente su población escolar está formada por alumnos vecinos de la Colonia Xilotzingo. El grupo de Segundo Grado consta de 29 alumnos con una edad promedio de 16-17 años, con 15 hombres y 14 mujeres.

Durante la aplicación del pre-test, la secuencia de actividades y el post-test, varió el número de alumnos que participaron en cada una de las etapas. Un total de 24 alumnos participaron en las tres etapas.

La mayoría de estos alumnos vienen de cursar un primer grado de Preparatoria con muchas dificultades en el aprendizaje del álgebra, incluso algunos presentaron el examen extraordinario de dicho curso. Se consideró que esto no era impedimento para participar en esta investigación.

### 3.2 MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

Para este trabajo de investigación, se realizará un análisis cualitativo:

La metodología que se seguirá es la siguiente:

1. Se diseña una prueba diagnóstica, que consta de 9 reactivos. La finalidad de esta prueba no es solamente llevar un registro de la calificación numérica que obtenga el alumno, sino determinar el nivel de razonamiento matemático en el que se encuentran, esto con la finalidad de saber cómo iniciar y continuar con la secuencia de actividades.
2. Una vez realizada, revisada y aprobada la prueba. Se aplica dicha prueba a los alumnos.
3. Se analizan las pruebas para obtener dos tipos de resultados: la calificación según el número de reactivos correctos obtenidos, y el nivel de razonamiento en el que se encuentra el grupo. Con base en estos resultados, se realizará la secuencia de actividades correspondientes al nivel de razonamiento del que se parte, y de esta forma se asegura que todo el grupo tendrá la misma oportunidad de aprender el tema correspondiente.
4. Se diseña la secuencia de actividades para abordar el tema de “Ángulos de la circunferencia” basado en las fases de aprendizaje del Modelo de Van Hiele. Se pretende que con cada actividad se va superando cada fase del aprendizaje de manera que al cubrir la última actividad los alumnos estén en condiciones de pasar al siguiente nivel razonamiento geométrico.

Las actividades podrían estar organizadas de la siguiente forma:

- a) Para cubrir la Fase 1 (Información) se diseña una secuencia en donde se aborden concepto o elementos vistos con anterioridad.
  - b) Para la Fase 2 (Orientación Dirigida) se diseñan las actividades para aprender los ángulos de la circunferencia, se pretende realizar una actividad por cada ángulo. En esta actividad es importante la participación del docente, ya que se pretende que el alumno adquiriera la confianza necesaria para descubrir, manifestar ideas, etc.
  - c) Para las Fases 3 y 4 (Explicitación y Orientación Libre) se diseña una actividad en donde el grupo se divide por equipos y resuelven una serie de ejercicios en donde están presentes distintos tipos de ángulos. Esto con la finalidad de que manifiesten sus ideas y manejen el lenguaje correcto dentro de la actividad.
  - d) Para la Fase 5 (Integración) se diseña una actividad formada por demostraciones sencillas, con el fin de que el alumno aplique conceptos adquiridos y conceptos previos, además de que su lenguaje debe ser totalmente formal.
5. Se realiza una segunda aplicación de la prueba diagnóstica, analizando los resultados que presenten para determinar el nivel de razonamiento alcanzado.

Para esta investigación se requiere de 10 sesiones de trabajo de 2 horas cada sesión.

### **3.3 NIVELES DE RAZONAMIENTO EN EL TEMA ÁNGULOS DE LA CIRCUNFERENCIA**

#### **3.3.1 NIVEL 1 RECONOCIMIENTO O VISUALIZACIÓN**

- a) El alumno de este nivel identifica puntos, segmentos, figuras geométricas.
- b) Identifica distintos tipos de polígonos según sus números de lados.

- c) Puede dibujar segmentos, ángulos y figuras.

### **3.3.2 NIVEL 2 ANÁLISIS**

- a) El alumno de este nivel identifica un ángulo como a abertura de dos lados, mencionando algunas propiedades para clasificarlos, por ejemplo ángulo agudo, recto, obtuso, llano.
- b) El alumno no es capaz de relacionar propiedades de conceptos (ángulos suplementarios, ángulos complementarios, ángulos opuestos por el vértice)
- c) El alumno no es capaz de identificar los tipos de ángulos que se presentan en una circunferencia, es decir, no identifica un conjunto mínimo de propiedades que se cumplen.

### **3.3.3 NIVEL 3 CLASIFICACIÓN**

- a) El Alumno de este nivel, identifica propiedades de ángulos, por ejemplo: ángulos complementarios, ángulos suplementarios, ángulos opuestos por el vértice.
- b) El alumno identifica propiedades de una circunferencia, por ejemplo: arcos que la forman, medida de dichos arcos, etc.
- c) El alumno identifica las propiedades de los segmentos que se pueden trazar en una circunferencia: radio, diámetro, cuerda, secante, tangente.
- d) El alumno identifica las propiedades de los ángulos que se forman en una circunferencia: ángulo central, ángulo inscrito, ángulo semi-inscrito, ángulo interior y ángulo exterior.

- e) El alumno puede entender una demostración guiada por el docente, pero no pueden desarrollar una demostración por sí solo.

### **3.3.4 NIVEL 4 DEDUCCIÓN FORMAL**

- a) El alumno de este nivel, maneja las propiedades de la circunferencia y ángulos presentes en esta dentro de un contexto formal. Es decir, es capaz de realizar una demostración formal, utilizando teoremas, definiciones, etc.

## **3.4 PRUEBA DIAGNÓSTICA**

Para la elaboración de la Prueba Diagnóstica se analizó literatura de investigaciones aplicando Modelo de Van Hiele que contienen pruebas o ejercicios, además de analizar ejercicios presentes en preparación a Olimpiadas de Matemáticas y que aborden el tema de Ángulos de la Circunferencia.

Se hizo la selección de 9 ítems que integran la prueba diagnóstica.

En el ítem #1 se trata el tema de ángulos opuestos por el vértice, en donde se menciona que dos segmentos se cortan en un punto y se da la medida de uno de los ángulos, pidiendo que se obtenga la medida de los otros ángulos. Este ítem fue seleccionado debido a que en ángulos internos a la circunferencia se presentan ángulos opuestos por el vértice y puede ser de utilidad resolver dicho ejercicio.

En este ítem el nivel máximo que se presenta es el Nivel 3 de razonamiento, es decir Clasificación.

En el ítem #2 se aborda el tema de ángulos suplementarios, en donde se debe plantear una ecuación algebraica para hallar las medidas de los ángulos. En este ítem podemos ver el

razonamiento del alumno para plantear una solución algebraica, aritmética, etc, y hallar de manera eficaz la solución. El nivel 3 de razonamiento es el máximo nivel que se presenta en este ítem, ya que se deben conocer propiedades de ángulos suplementarios, el planteamiento de una expresión algebraica, así como hallar la solución de dicha expresión para la solución de dicho ítem.

El ítem #3 se solicita que los alumnos mencionen todos los ángulos presentes en las circunferencias, se tienen ángulos como central, inscrito e interior, que son los ángulos que se estudian en esta investigación. El nivel 3 de razonamiento, es el máximo nivel que se presenta en este ítem, ya que se deben conocer las propiedades que presentan de los distintos ángulos que se trazan en la circunferencia

El ítem #4 tiene algunos enunciados donde el alumno debe contestar falso o verdadero a cada enunciado y justificar su respuesta. Los enunciados tratan de un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia, cuya hipotenusa es el diámetro. Los enunciados tratan sobre dicho triángulo y el ángulo inscrito que se forma. El nivel 3 de razonamiento es el máximo nivel presente en este ítem ya que se deben conocer las propiedades que cumple el contar con un diámetro, como por ejemplo, el valor del ángulo formado, el valor del arco formado, y los ángulos formados, como ángulo inscrito, así como también sus propiedades.

En el ítem #5 se pide hallar la medida del arco, de un ángulo interior. Ejercicios de este tipo se abordan en actividades de la secuencia. El nivel 3 de razonamiento, es el máximo nivel que presenta este ítem. El alumno debe tener presente las propiedades de los ángulos interiores de una circunferencia, tanto el valor de dichos ángulos, como el valor de los arcos formados. Tendrá la capacidad de utilizar la expresión y elementos correctos para hallar dichos valores.

Los ítem #6, #7 y #8 son demostraciones, donde no solo se encuentran los ángulos de la circunferencia, sino figuras inscritas como triángulos. Este ítem está desarrollado para alumnos que presentan un nivel de razonamiento 4 o 5, esto debido a que los ítems no presentan valores numéricos, es decir, el alumno debe resolverlos únicamente con propiedades tanto de los ángulos, como de las figuras geométricas presentes. El nivel 4 de razonamiento es el máximo nivel presente en estos ítems. El alumno tendrá la capacidad de aplicar propiedades de los ángulos en la circunferencia como definiciones, corolarios, teoremas, etc., entender una demostración y realizarlas.

El ítem #9 presenta una combinación de ítems anteriores, el alumno deberá aplicar propiedades de ángulos y figuras inscritas y se apoya en medidas para encontrar las soluciones solicitadas. El nivel 4 de razonamiento, es el nivel máximo alcanzado en este ítem. El alumno además de realizar las operaciones y propiedades necesarias para hallar el valor de ángulo y arcos presentes en el ítem, también se necesita de dichas propiedades para una demostración formal.

Como se puede observar, la prueba contiene ítems en donde se pueden comprobar los 5 niveles de razonamiento del modelo Van Hiele. Dicha prueba será aplicada en dos momentos: al inicio de la investigación, como prueba pre-test, esto con la finalidad de determinar el nivel de razonamiento inicial del grupo. Y el otro momento es después de la secuencia de actividades como post-test, con el objetivo de observar el nivel alcanzado del grupo después de dicha secuencia.

### **3.5 SECUENCIA DE ACTIVIDADES**

#### **DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES REALIZADAS**

A continuación se describen las actividades para el aprendizaje de los ángulos de la circunferencia, en base a las fases del aprendizaje y el diseño de cada nivel de razonamiento del Modelo de Van Hiele.

El modelo de Van Hiele se divide en cinco niveles de razonamiento-comprensión. No se puede pasar de un nivel a otro sin dominar antes el que se está trabajando. Estos niveles son:

**Nivel 0 Reconocimiento**

**Nivel 1 Análisis**

**Nivel 2 Clasificación**

**Nivel 3 Deducción**

**Nivel 4 Rigor**

Cada nivel tiene 5 fases de aprendizaje que son

**1° Fase → Información**

**2° Fase → Orientación dirigida**

**3° Fase → Explicitación**

**4° Fase → Orientación libre**

**5° Fase → Integración**

### **3.5.1 ACTIVIDADES DEL NIVEL 1**

#### **FASE 1**

El docente les informa a los alumnos los conceptos que se van a abordar en la sesión. Los alumnos inician investigando algunos de estos conceptos.

#### **FASE 2**

Los alumnos identifican los puntos, segmentos y figuras geométricas que se dibujaron en el pizarrón.

Analizan los conceptos de segmentos de una circunferencia. Trazan dichos segmentos en sus libretas con distintos colores para una fácil interpretación.

#### **FASE 3**

Los alumnos proporcionan una primera versión de las definiciones de estos conceptos, con sus propias palabras.

#### **FASE 4**

Se analizan las definiciones y en grupo se mejoran las versiones con vocabulario adecuado.

#### **FASE 5**

Los alumnos comprenden y mencionan estas definiciones, sin la necesidad del apoyo de libreta o libro.

### **3.5.2 ACTIVIDADES DEL NIVEL 2**

#### **FASE 1**

Al inicio de la sesión el docente hace una introducción de que conceptos se van a definir, así como de conocimientos previos que los alumnos deben tener para comprender los nuevos.

Los conocimientos que ya se deben tener claros son:

Ángulos, ángulos complementarios, ángulos suplementarios, ángulos opuestos por el vértice, segmentos paralelos, segmentos perpendiculares.

#### **FASE 2**

Los alumnos van descubriendo los tipos de ángulos que se presentan en la circunferencia según las características y conceptos que ellos van observando y se hacen presentes, puntos en la circunferencia, segmentos de la circunferencia que forman ángulos, etc.

#### **FASE 3**

Los alumnos proponen una expresión algebraica para obtener las medidas de los distintos ángulos y dan primera versión de las definiciones de los ángulos de la circunferencia según las características que observaron en la fase anterior, tratan de utilizar un lenguaje y vocabulario correcto.

#### **FASE 4**

Se analizan las definiciones, se corrigen y los alumnos tratan de expresar situaciones problemáticas en donde se observen los conceptos vistos.

## FASE 5

Los alumnos definen los ángulos de la circunferencia y deben de ser capaces de calcular la medida de dichos ángulos, utilizando las expresiones halladas en las fases anteriores.

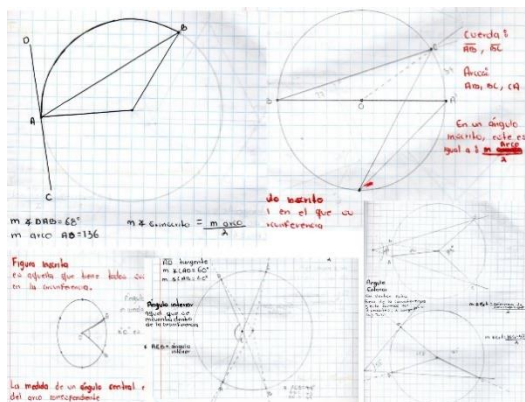


Figura 3. Ángulos de la circunferencia: central, inscrito, semi-inscrito, interior y exterior

### 3.5.3 ACTIVIDADES DEL NIVEL 3

#### FASE 1

Se les informa a los alumnos las actividades a realizar, mencionando conceptos que deben conocer y dominar para resolver dichas actividades.

Estos conocimientos son: tipos de ángulos, ángulos opuestos por el vértice, ángulos complementarios y suplementarios, ángulos presentes en la circunferencia, segmentos en la circunferencia.

#### FASE 2

Los alumnos van mencionando las características presentes en cada actividad, como ángulos y arcos formados, definen los conceptos a resolver, mencionan fórmulas o expresiones que podrían servirles para la hallar dicha solución.

### FASE 3

En equipos los alumnos proponen diferentes estrategias de solución a las actividades, proponiendo expresiones o fórmulas, estrategias gráficas o inclusive soluciones mentales, según la complejidad de las soluciones que se necesitan.

### FASE 4

Se observan y analizan las estrategias utilizadas para resolver las actividades en el salón de clases. Se reflexionan sobre los posibles obstáculos y errores que se presentaron en dichas estrategias.

### FASE 5

Los alumnos obtienen conclusiones del análisis hecho en la Fase anterior, se toma nota de los conceptos principales abordados para las soluciones, se practican con actividades similares.

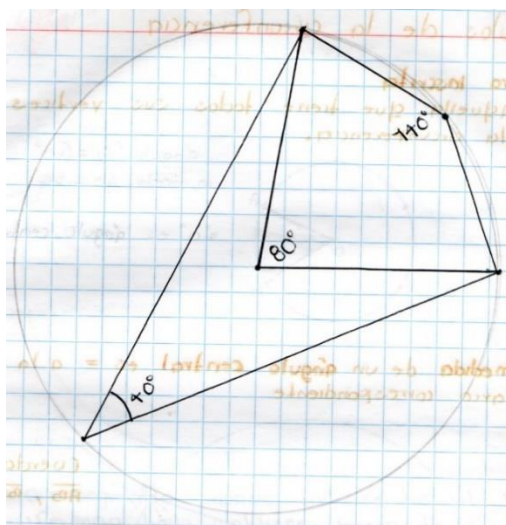


Figura 4. Ejercicio compuesto de varios ángulos de distinto tipo

### **3.5.4 ACTIVIDADES DEL NIVEL 4**

#### **FASE 1**

En clase se hace mención de los temas y actividades que se abordarán en estas sesiones, además de los conceptos que se deben aplicar.

Estos conocimientos son: tipos de ángulos, ángulos opuestos por el vértice, ángulos complementarios y suplementarios, ángulos presentes en la circunferencia, segmentos en la circunferencia, además de teoremas, definiciones, corolarios, etc., para la realización de demostraciones.

#### **FASE 2**

Los alumnos realizan una lista de los conceptos que visualizan en las actividades, mencionan definiciones cortas de dichos conceptos.

Tienen un primer contacto con las actividades a trabajar y se les pide que aporten algunas ideas que podrían ayudar a la solución.

#### **FASE 3**

Los alumnos trabajan en equipos para definir estrategias para la solución de las actividades. Estos equipos cuentan con las herramientas necesarias para poder aplicar conceptos y realizar demostraciones al menos de manera sencilla.

Se les pide que traten de realizar demostraciones formales, así como el uso del vocabulario correcto.

#### **FASE 4**

Se observan y analizan las estrategias utilizadas para las demostraciones realizadas, se realiza una lista de obstáculos, errores que se presentaron así como términos que no se utilizaron de manera correcta.

## **FASE 5**

Los alumnos comprenden todas las herramientas, así como los conceptos vistos en las actividades correspondientes a este nivel.

## **CAPITULO 4**

### **ANÁLISIS, RESULTADOS Y CONCLUSIONES**

#### **4.1 APLICACIÓN Y RESULTADOS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA**

Como se había mencionado, la población con la que se cuenta es de 30 alumnos. El grupo contó con 2 horas para la realización del pre-test.

Se le explicó al grupo que el objetivo de esta actividad, no es una prueba escolar, es decir el resultado de dicha prueba no forma parte de la calificación del periodo correspondiente, sino que forma parte de una investigación, esto con el fin de que el grupo esté relajado y en confianza. Sin embargo se sentía cierta tensión y desagrado en el grupo, ya que ellos consideran que la mayoría de los ítems tienen un alto grado de dificultad.

Una vez concluida la actividad, se procede al análisis de las pruebas para determinar el nivel de razonamiento que presenta el grupo en el tema de Ángulos de la Circunferencia. El análisis arroja los siguientes resultados:

1. El promedio general obtenido en el grupo es de 1.083 ítems correctos. El ítem #1 es el que más alumnos contestaron de manera correcta, con un total de 18 alumnos.  
El ítem #2, 7 alumnos contestaron de manera correcta.  
Respecto a los ítems 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, ningún alumno contestó de manera correcta éstos.
2. Se determinó un nivel de razonamiento por ítem, por lo que se observó lo siguiente:
  - a) Para el ítem #1, 1 alumno alcanzó el Nivel de Razonamiento #3, identificó los elementos o conceptos abordados en el ejercicios, así como las propiedades que

tienen estos y la relación que existen con otros conceptos, además de aplicar de manera correcta estas propiedades para poder hallar la solución correcta.

6 alumnos alcanzaron el Nivel de Razonamiento #2. Lograron identificar conocimientos que contiene el ítem, además de las propiedades que contienen, pero no logran relacionarlos con otros conceptos y por lo tanto no encuentran una expresión que puedan aplicar y no logran resolverlo.

14 alumnos se encuentran en el Nivel de Razonamiento #1, solo logran identificar los elementos o conceptos que el ítem aborda, sin mencionar propiedades, relaciones y expresiones para obtener la solución correcta.

- b) Para el ítem #2, 1 alumno alcanzó el Nivel de Razonamiento #3. Mencionó los elementos presentes en el ítem, además de mencionar las propiedades de dichos elementos y las relaciones que se presentan con otros elementos. Además de hallar la expresión algebraica correcta y por consiguiente la solución correcta.

1 alumno alcanzó el Nivel de Razonamiento #2. Pudo mencionar todos los elementos presentes en el ítem, además de que pudo definir algunas propiedades de estos elementos, sin embargo no encontró relación alguna y por consiguiente no pudo proponer expresión algebraica y solución correcta.

14 alumnos se encuentran en el Nivel de Razonamiento #1. Estos alumnos solo pudieron mencionar elementos básicos que y posiblemente alguna propiedad elemental, no hubo mención de propiedades propias del tema, ni relación de elemento, así como no hay propuesta alguna de expresión algebraica y por lo tanto no fue resuelto de manera correcta.

2 alumnos no contestaron este ítem, no hicieron intento alguno por contestarlo.

- c) Para el ítem #3, 4 alumnos se ubicaron en el Nivel de Razonamiento #2. Estos alumnos lograron definir los elementos presentes en el ítem como son puntos,

ángulos, arcos y figuras inscritas, definieron algunas propiedades de estos elementos, sin embargo no hallaron relación con otros elementos y por consiguiente no definieron ninguna expresión algebraica para solucionarlo.

8 alumnos se encuentran en el Nivel de Razonamiento #1. Estos alumnos solamente observaron y mencionaron algunos elementos básicos presentes en el ítem como puntos, segmentos y ángulos básicos (agudo, recto, obtuso), no logran observar los ángulos de la circunferencia presentes (central, inscrito, semi-inscrito, interior y exterior), además de no definir propiedades de estos, la relación con otros elementos, así como deducir las expresiones que lleven a encontrar soluciones.

9 alumnos no lo resolvieron.

- d) Para el ítem #4, 12 alumnos se encuentran en el Nivel 1 y 9 alumnos no lo respondieron.
- e) Para los ítems del #5 al #9 ningún alumno intentó resolverlos.

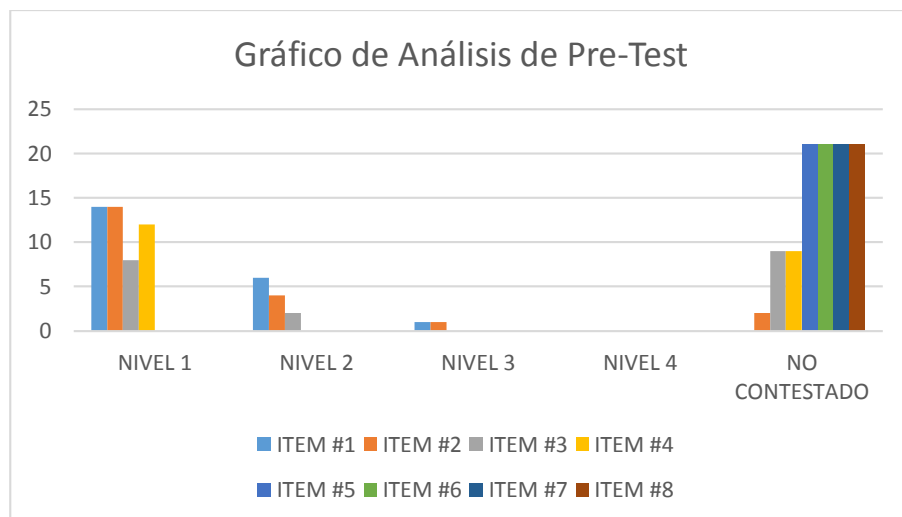


Figura 5. Gráfico de barras de los Niveles de Razonamiento Obtenidos por ítem

3. Además se realizaron otros dos análisis:

- a) Respecto al número de ítems que contestaron los alumnos se observó lo siguiente:
  - i) Ningún alumno contestó o al menos intentó contestar todos los ítems que contiene la prueba, el promedio de ítems contestado en el grupo es de 3 ítems, ya que 4 es el máximo número de ítems contestados y 2 el mínimo de ítems intentados.
  - ii) Ningún alumno intentó contestar alguno de los 5 ítems en los cuales la demostración es el método de solución.

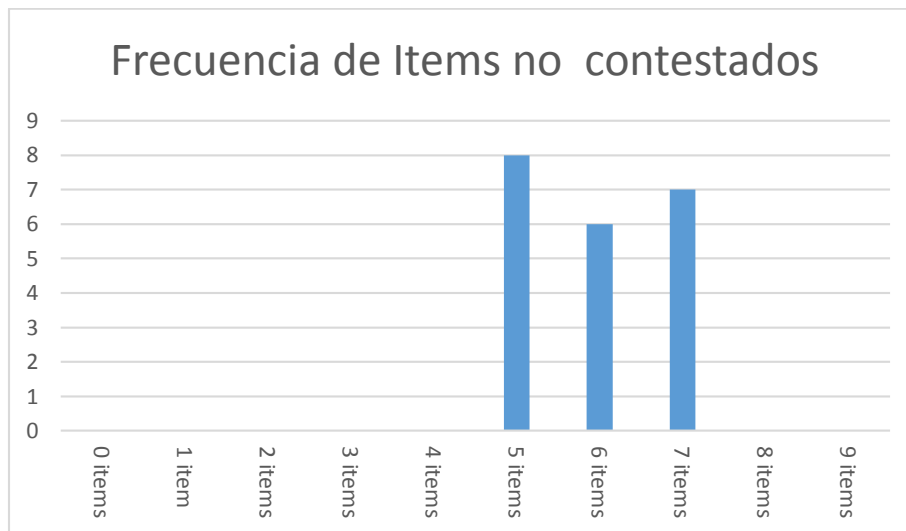


Figura 6. Gráfico de frecuencia de número de ítems no contestados

- b) Una vez evaluadas todas las pruebas del grupo y observar el Nivel de Razonamiento en cada ítem, se determinó de manera individual el Nivel de Razonamiento que alcanzó de manera general. Obteniendo finalmente los siguientes resultados:
  - i) 15 alumnos alcanzaron el Nivel de Razonamiento #1, es decir, son alumnos que solamente definen elementos básicos que observan como son puntos, segmentos, figuras de manera general, etc. Aunque no logran observar ni definir propiedades que tienen los elementos, así como las relaciones que tengan con otros elementos.
  - ii) 6 alumnos alcanzaron el Nivel de Razonamiento #2. Además de observar y definir los elementos, estos alumnos pueden definir algunas propiedades

básicas que se presentan, encontrando de manera intuitiva alguna relación con otro elemento, pero sin lograr mencionar alguna definición.



Figura 7. Gráfico de pastel de porcentajes de cada Nivel Alcanzado en el grupo

- Una vez analizados los resultados obtenidos se llega a la conclusión de que el grupo se encuentra en el Nivel de Razonamiento #1 de Van Hiele, es decir el grupo puede identificar elementos u objetos presentes en un ejercicio, muy pocos podrían definir algunas propiedades de dichos objetos sin relacionar unos conceptos con otros pero ninguno podrá hallar dichas relaciones y por consiguiente no podrá realizar demostraciones formales.

## **4.2 ANÁLISIS DE LOS APRENDIZAJES**

En esta sección se realizará un análisis del desempeño y de los avances que los alumnos tuvieron a lo largo de las actividades, se mencionarán los cambios y progresos alcanzados en comprensión-razonamiento, siguiendo el modelo de Van Hiele.

Se realiza el análisis de cada actividad, así como la de Post-test.

### **4.2.1 ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES CORRESPONDIENTES AL NIVEL DE RAZONAMIENTO 1**

La finalidad de esta fase es la de recordar conocimientos o información sobre los segmentos que puede tener una circunferencia, se presentan las características que tiene un radio, un diámetro, una cuerda, una secante y una tangente.

Además de presentar los conceptos de arco y figura inscrita en una circunferencia.

Hubo buena participación y entusiasmo de parte de los alumnos para realizar esta actividad.

Ellos mismos definieron los conocimientos propuestos, mencionaron las características, y propusieron formas de obtener las medidas de los arcos utilizando la unidad de grados, además de que se percataron de que una figura inscrita tiene todos sus vértices en la circunferencia.

Al inicio de la actividad solo algunos alumnos tomaron la iniciativa de participar, ya que tenían presentes los conceptos y tenían la seguridad de que lo que contestaban era correcto. Conforme fue avanzando la actividad los demás alumnos fueron integrándose, participando poco a poco, obteniendo la confianza necesaria para ir adquiriendo los conceptos. Lo que llevó a casi la totalidad del grupo a comprender y manejar los conocimientos.

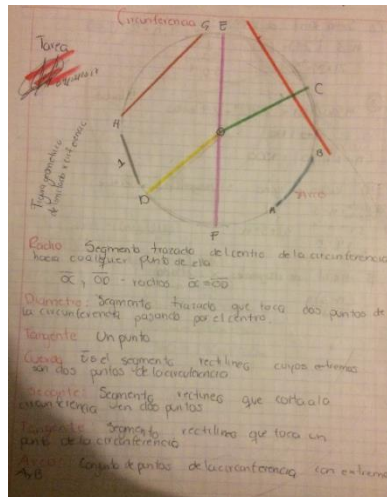


Figura 8. Actividad 1 Conocimientos previos del tema ángulos de la circunferencia. Segmentos de la circunferencia.

#### 4.2.2 ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES CORRESPONDIENTES AL NIVEL DE RAZONAMIENTO 2

El propósito de estas actividades es que los alumnos descubran por medio del uso de herramientas como el transportador, el compás y la regla, junto con el apoyo del docente, los conceptos de ángulos de la circunferencia, las características que cumplen y las operaciones necesarias para hallar la medida de alguno de estos ángulos.

Cabe mencionar que hubo una participación entusiasmada de parte de los alumnos, ya que consideraron divertido trabajar con transportador y compás, explicaban que desde la Primaria no usaban estas herramientas. Esto facilitó demasiado el trabajo, la participación y en consecuencia el aprendizaje del conocimiento.

Dentro de la Actividad 1, para los alumnos fue muy fácil encontrar la relación entre un ángulo central y el arco comprendido por dicho ángulo, realizaron suficientes ejercicios para comprobar que la medida de un ángulo central es igual a la medida del arco correspondiente.

Para la Actividad 2, los alumnos estaban muy entusiasmados para trabajar, así que siguieron todas las indicaciones para trazar un ángulo inscrito, realizaron los trazos y tomaron las medidas necesarias. Una vez trazado el primer ángulo en donde colocaron el vértice sobre la circunferencia, al igual que los puntos de los dos lados, después de medir el ángulo, descubrieron que cambiando de lugar el vértice, pero con el mismo arco, la medida es la misma. De manera eficaz, hallaron la expresión matemática que les serviría para encontrar

la medida de un ángulo inscrito. Para nombrar este ángulo, los alumnos recordaron la definición de figura inscrita en la circunferencia y relacionaron de manera correcta el ángulo que estaba siendo motivo de estudio por lo que automáticamente nombraron de manera correcta al ángulo inscrito.

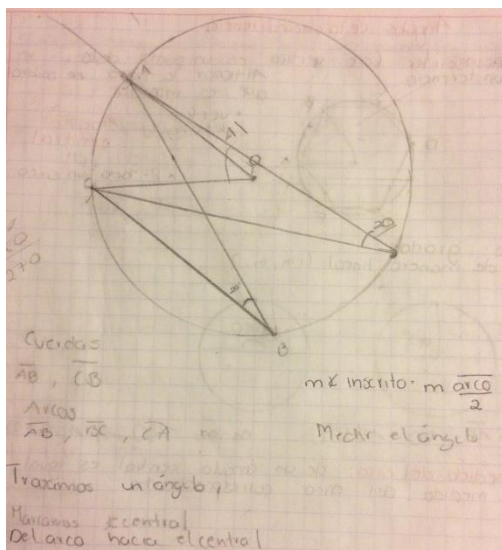


Figura 9. Actividad 2 ángulo inscrito

En la Actividad 3, resultó un poco difícil de manera gráfica comprobar la relación que tiene el ángulo semi-inscrito con el arco correspondiente, ya que requiere del trazo de una recta tangente por lo que se tiene que ser muy preciso para que dicha recta toque un solo punto de la circunferencia. Pero algunos alumnos hallaron relaciones de este ángulo con el ángulo inscrito. Las relaciones encontradas fueron:

- a) El vértice de ambos ángulos está en la circunferencia.
- b) Los lados de un ángulo inscrito son dos cuerdas, mientras que los del ángulo semi-inscrito uno de sus lados es una cuerda.

El descubrir estas relaciones les ayudó trazar de manera más precisa los ángulos y comprobar que también la medida del ángulo semi-inscrito es la mitad de la medida del arco correspondiente.

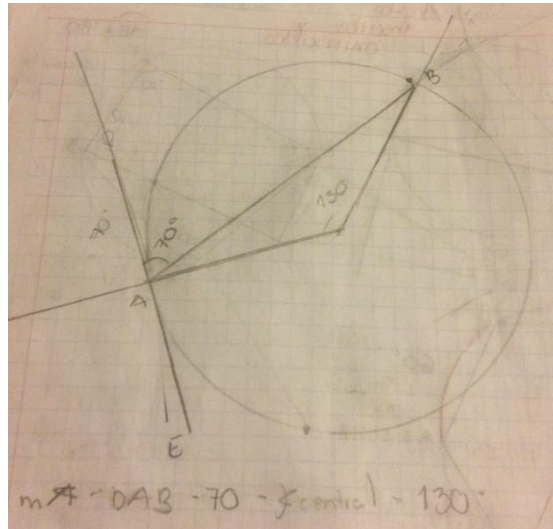


Figura 10. Actividad 3 ángulo semi-inscrito

Para la Actividad 4, los alumnos se desempeñaron de manera correcta, siguiendo las indicaciones. Los alumnos pudieron observar que se presentan rectas incidentes, y que forman 4 ángulos opuestos por el vértice, describiendo todas las características que tienen dichos ángulos. Continuando con la actividad, los alumnos descubrieron que los ángulos opuestos por el vértice comprenden dos arcos de la circunferencia. Algunos alumnos llegaron a la conclusión de que el arco que comprende el arco y el de su opuesto, deben tener alguna relación para obtener la medida de dicho ángulo. Después de algunas participaciones e intentos, algunos alumnos descubrieron que sumando la medida de los arcos y después dividiéndolo entre 2 es como obtienen la medida del ángulo interior. El argumento que dieron para realizar la división entre 2, es que para el ángulo inscrito y el ángulo semi-inscrito se hizo tal división, por lo tanto eso les llevo a experimentar el realizar dicha división.

Una vez que se propuso la expresión matemática, los alumnos pudieron comprobar dicha expresión con varios ejemplos.

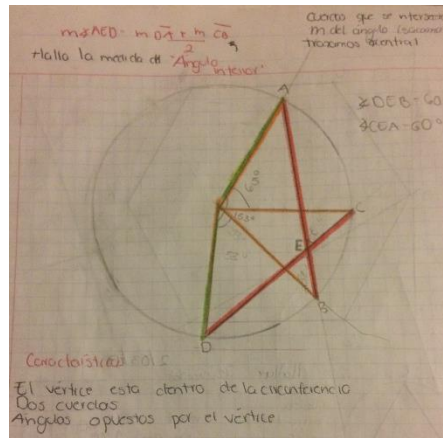


Figura 11. Actividad 4 ángulo interior

Por último, para la Actividad 5, los alumnos ya contaban con la experiencia necesaria para enfrentar esta actividad. En primer lugar los alumnos pudieron definir los elementos que forman al ángulo exterior: dos rectas secantes, dos rectas tangentes, una recta secante y una recta tangente. Además hallaron de manera eficaz la medida de los arcos comprendidos por el ángulo. No hubo tanto problema para hallar la expresión matemática para la medida del ángulo exterior.

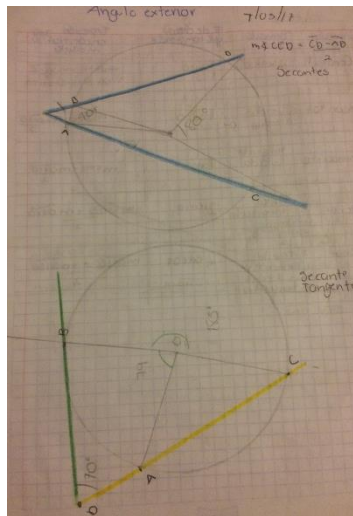


Figura 12. Actividad 5 ángulo exterior

Una vez concluida la Actividad 5, los alumnos elaboraron una tabla en donde se mencionan todos los ángulos de circunferencia vistos. En dicha tabla se menciona el nombre del ángulo, las características que tiene (tipo de segmento, vértice, etc.), número de arcos que se forman y la expresión matemática que sirve para hallar su medida (fórmula).

Esta actividad fue de mucha utilidad, ya que se pudo comprobar el avance que el grupo obtuvo con respecto al tema, además de ganar confianza y seguridad para enfrentar futuras actividades.

Ángulo	Formado por	# de arcos que comprende	Expresión para encontrar la medida
Central	Radio	1 arco	$m\widehat{AB} = m\widehat{AB}$ $m\widehat{AB} = 2 \times \text{ángulo central}$
Inscrito	Cuerdas central	1 arco	$m\widehat{AB} = \frac{m\widehat{AB}}{2}$
Seminscrito	tangente cuerda	1 arco	$m\widehat{AB} = \frac{m\widehat{AB}}{2}$
Interior	cuerdas intersectadas o ángulo entre tangentes	2 arcos	$m\widehat{AB} + m\widehat{CD} = \frac{m\widehat{AC} + m\widehat{BD}}{2}$
Exterior	2 tangentes y 2 secantes	2 arcos	$m\widehat{AB} = \frac{m\widehat{AC} - m\widehat{BD}}{2}$

Figura 13. Tabla de contenido de ángulos de la circunferencia.

### 4.2.3 ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES CORRESPONDIENTES AL NIVEL DE RAZONAMIENTO 3

La actividad diseñada para estas fases, fue elaborada con el objetivo de trabajar en equipo, esto para intercambiar métodos de solución que los alumnos propongan, utilizando los conocimientos ya adquiridos, tanto los nuevos, como los aprendidos anteriormente.

En esta actividad se proponen una serie de ejercicios donde estén presentes distintos tipos de ángulos, además de otros elementos como polígonos inscritos.

Al inicio de la actividad hubo cierta incertidumbre de parte de los alumnos, manifestaban cierto temor, desconfianza al enfrentarse a retos o ejercicios más complejos a los que se habían enfrentado con anterioridad.

Al ver la situación se retomó en el primer ejercicio a la Fase 2, en donde se requirió de orientación de parte del docente. Esto sirvió para retomar nuevamente confianza de parte de los alumnos y para que a partir del segundo ejercicio pudieran ya trabajar en equipo.

La actividad se llevó a cabo con apoyo y participación de los integrantes de cada equipo, se observó un ambiente cordial, de interés por encontrar las soluciones de los problemas a resolver. Hubo respeto y escucharon las ideas y propuestas de los compañeros, asignando turnos para que puedan hablar cada uno, si alguien consideraba que se caía en un error, pedían la palabra y de forma pacífica se hacía ver el error y se corregía.

Los equipos tuvieron 60 minutos aproximadamente para resolver los ejercicios, una vez concluido el tiempo, se siguió al análisis de las respuestas que proponen los equipos.

Se observó que en los equipos pudieron definir todos los elementos que tenía cada ejercicio, encontraron todos los ángulos presentes, determinaron qué elementos tenían que hallar.

Se apoyaron en las expresiones planteadas en las actividades anteriores para hallar medidas de ángulos, o arcos según lo requería el ejercicio. Cuando el ejercicio tenía ángulos centrales, inscrito o semi-inscrito, hallaban de manera mental la medida de dicho ángulo o el arco correspondiente. En general, la mayoría de los razonamientos y respuestas fueron correctos. Estos resultados originaron una gran satisfacción a la mayoría de los alumnos.

#### **4.2.4 ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES CORRESPONDIENTES AL NIVEL DE RAZONAMIENTO 4**

En esta actividad se abordó la parte más compleja del tema, los alumnos necesitan hacer demostraciones, en donde no solamente se toman en cuenta ángulos de la circunferencia, sino que también intervienen conceptos como triángulos, cuadriláteros, etc. En los que también hay que considerar sus propiedades para poder realizar dichas demostraciones.

Al inicio de la actividad se les explicó a los alumnos que tendrían que realizar demostraciones, ellos empezaron a manifestar que no podrían realizar esta actividad, ya que anteriormente habrían hecho demostraciones para congruencia de triángulos y de cuadriláteros, y la experiencia no había sido del todo positiva.

Se inició el trabajo con algunos ejercicios sencillos previos en donde iban a ir definiendo conceptos ya vistos, esto con la finalidad de ir adquiriendo confianza e irlos enfrentando poco a poco a las demostraciones.

Conforme fueron avanzando los ejercicios, los alumnos fueron tomando confianza. Al llegar a las demostraciones, la actitud fue distinta, iban observando qué propiedades podrían utilizar para la solución del problema.

Llegado el momento de trabajar sin la orientación del docente, trataron de realizar las demostraciones por sí solos. Algunos de ellos fueron los que pudieron lograr terminar las demostraciones que se plantearon. Otros plantearon algunos caminos sin llegar a la solución con realizar la demostración ya que el resto de la demostración la realizaron los alumnos que ya dominan los conceptos.

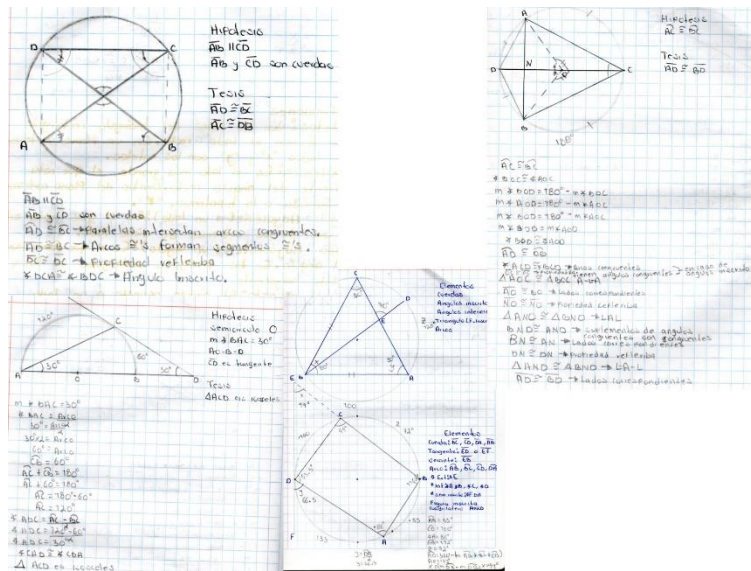


Figura 14. Ejercicios de demostración

### 4.3 ANÁLISIS DEL POST-TEST

Para la aplicación de esta prueba, se contó una población de 21 alumnos a los que se les aplicó este test. El tiempo que se les proporcionó para contestar dicha prueba fue de 2 horas.

Previo a la aplicación se puede comentar lo siguiente:

- a) El ambiente que se percibió al inicio fue de incertidumbre y desconfianza, manifestando que estaban nerviosos para solucionar cada uno de los ítems de la prueba.
- b) Se tomaron unos instantes para platicar, tranquilizar y generar un ambiente de confianza al grupo.
- c) Se observó una mejora en el ambiente y disposición de parte del grupo para iniciar con la elaboración de la prueba.

La mayoría del grupo utilizó el tiempo total establecido para la solución de los ítems de la prueba.

Una vez concluida la prueba, se realizó la evaluación correspondiente. Se hizo un análisis fino para determinar el Nivel de Razonamiento alcanzado en cada ítem.

#### **4.3.1 DETERMINACIÓN DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE CADA ALUMNO**

Una vez aplicado el post-test y antes de determinar el nivel de razonamiento alcanzado por cada alumno se revisó literatura para respaldar cada resultado.

Corberan, Gutiérrez y otros (1994) en su bibliografía, elabora una propuesta para la codificación de los tests y la determinación de los niveles de razonamiento de los estudiantes.

Menciona que la codificación de los tests para asignar un nivel de razonamiento, requiere de un proceso de varias etapas. Los elementos centrales son:

- a) No es razonable asignar simplemente un número correspondiente a un nivel de razonamiento. Es necesario tratar de determinar cómo perfecta la adquisición de cada nivel de razonamiento.

- b) A un ítem planteado a un alumno, la forma como éste responda en conjunto a las diferentes cuestiones del ítem permite determinar el nivel de razonamiento alcanzado en dicha respuesta.
- c) La calidad de la respuesta debe ser un indicador de la seguridad con la que el alumno ha contestado y, por lo tanto, un indicador de la seguridad con que ha utilizado las destrezas propias del nivel de razonamiento empleado.

La autora también menciona que cada respuesta a un ítem se evalúa desde una doble perspectiva:

- a) Determinar el Nivel de razonamiento al que corresponde la respuesta.
- b) Determinar un Tipo de respuesta en función de la calidad de esta y de la claridad con que aparece reflejado el nivel de razonamiento correspondiente.

Los tipos de respuesta son los siguientes:

- a) Tipo 0: ítems sin respuesta o con respuesta no codificable.
- b) Tipo 1: respuesta que indica que el alumno no está en un nivel de razonamientos determinado y no proporciona información alguna de niveles inferiores.
- c) Tipo 2: respuestas incorrectas e incompletas, pero se reconocen indicios de un nivel de razonamiento determinado. En general son respuestas breves y pobres, con errores matemáticos o no contestan la pregunta planteada.
- d) Tipo 3: Respuestas correctas pero incompletas, presentan indicios de un nivel de razonamiento determinado. Respuestas breves y pobres, pero no contienen errores matemáticos.

- e) Tipo 4: Respuestas que reflejan de manera clara, características de dos niveles de razonamiento diferentes. Es la situación típica de los alumnos en transición entre niveles. Las respuestas pueden ser correctas o incorrectas, pero son bastantes completas.
  
- f) Tipo 5: Respuestas bastantes completas, aunque son incorrectas, reflejan claramente un nivel de razonamiento determinado. La incorrección de la respuesta puede deberse a errores matemáticos o a que siguen líneas que no llevan a la solución del problema planteado.
  
- g) Tipo 6: Respuestas bastantes completas y correctas que reflejan de manera clara un nivel de razonamiento determinado. Son respuestas claras y correctas, aunque incompletas, ya que no llegan a resolver el problema por completo, ya que hay saltos en el razonamiento, tiene pequeños errores, etc.
  
- h) Tipo 7: Respuestas matemáticamente correctas y completas, ya que reflejan de manera clara el nivel de razonamiento alcanzado.

Una vez tipificada cada una de las respuestas de un alumno al test, el proceso de evaluación de su nivel de razonamiento se completa observando en conjunto las respuestas a los diferentes ítems que pueden ser contestados en un determinado nivel y ponderado entre 0% y 100% cada respuesta en función de su tipo.

<b>Tipo</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
<b>Ponderación</b>	0%	0%	20%	25%	50%	75	80%	100%

*Tabla 1. Ponderaciones de los Tipos de respuesta.*

Por último, se obtiene la media aritmética de los pesos de los diferentes ítems asociados a cada nivel, para calcular el Grado de Adquisición.

Jaime (1993) en su tesis doctoral, describe los distintos tipos de Grado de Adquisición que son descritos en la bibliografía de Corberan.

Esta autora menciona que la adquisición de un nivel de Van Hiele viene determinado por las siguientes características:

- a) Adquisición Nula: El alumno no emplea las características del nivel de razonamiento.
- b) Adquisición Baja: Empieza la consciencia de las características, métodos y exigencias propios del nivel, pero es muy pobre la utilización que se hace de ellos. Es frecuente del abandono del trabajo en este nivel para recurrir al razonamiento del nivel inferior.
- c) Adquisición Intermedia: El empleo de los métodos de este nivel es más frecuente y preciso. No obstante, todavía no se domina, por lo que, antes situaciones que resultan complicadas, se retrocede de nivel, aunque posteriormente se intenta regresar al nivel superior. Por lo tanto hay saltos entre dos niveles consecutivos de razonamiento.
- d) Adquisición alta: Éste es el nivel normal de trabajo, y en alguna ocasión podría darse algún retroceso de nivel. También ocasionalmente se hace uso inadecuado de las herramientas propias del nivel de razonamiento.
- e) Adquisición Completa: Hay un dominio total de las herramientas y métodos de trabajo del nivel de razonamiento.

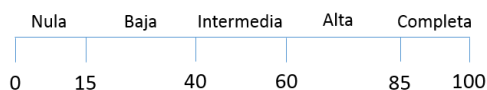


Tabla 2. Valores de los grados de adquisición de un Nivel de Razonamiento

Una vez comprendidos estas ideas, se procede al análisis y tipificación de los resultados de cada uno de los ítems de los alumnos.

Los resultados son los siguientes:

- a) Para el ítem #1, 9 alumnos alcanzaron el Nivel de Razonamiento #3, ya que no solamente obtuvieron la respuesta correcta, sino que utilizaron distintas propiedades y fórmulas, como ángulos opuestos por el vértice y ángulos suplementarios, algunos inclusive no necesitaron realizar la operación en papel, sino mentalmente, pero dando los argumentos necesarios.

9 Alumnos alcanzaron el Nivel de Razonamiento #2, algunos alumnos obtuvieron solo la medida de 2 ángulos sólo por ser ángulos opuestos por el vértice, sin embargo no pudieron hallar la medida de los otros 2 ángulos, otros alumnos observaron la presencia de ángulos suplementarios y obtuvieron las medidas de estos, pero no alcanzaron a observar la presencia de ángulos opuestos por el vértice.

Solo 2 alumnos alcanzaron el Nivel de Razonamiento #1, ya que sólo pudieron describir y definir algunos ángulos y algunas propiedades básicas, que no son suficientes para la solución del ítem.

- b) En el ítem #2, 7 alumnos alcanzaron el Nivel de Razonamiento #3. Estos alumnos hallaron la solución utilizando las propiedades y fórmulas necesarias, como, ángulos suplementarios, hallar la expresión algebraica correcta, así como solucionar de manera correcta la ecuación planteada.

7 alumnos alcanzaron el Nivel de Razonamiento #2. Los alumnos de este Nivel sólo mencionaban las propiedades de los ángulos opuestos por el vértice, sin embargo no fueron capaces de proponer una expresión algebraica para solucionar el ítem, inclusive algunos alumnos hallaron la solución por prueba y error.

5 alumnos alcanzaron solo el Nivel de Razonamiento #1. Los alumnos de este Nivel sólo hicieron mención de algunos elementos, como segmentos, ángulos, medida del ángulo que solo se menciona.

2 alumnos no contestaron este ítem.

- c) En el ítem #3, 4 alumnos alcanzaron el Nivel #3 de Razonamiento. Estos alumnos pudieron mencionar todos los ángulos y arcos que se presentan en el ítem, además mencionaron propiedades y expresiones para hallar sus medidas.

12 alumnos alcanzaron el Nivel #2 de Razonamiento. Estos alumnos mencionaron los ángulos presentes en la circunferencia, mencionando sólo algunas propiedades, sin reflexionar sobre la expresión a utilizar para hallar la medida de estos. Además lograban observar algunos arcos formados.

4 alumnos alcanzaron el Nivel #1 de Razonamiento. Estos alumnos mencionaron de manera intuitiva solo algunos ángulos, sin reflexionar que características tienen al estar presentes en la circunferencia, también nombraron algunos segmentos y puntos, pero no utilizan expresión alguna para hallar alguna medida. Sólo 1 alumno no contestó este ítem.

- d) En el ítem #4, 13 alumnos alcanzaron el Nivel #2 de Razonamiento. Estos alumnos pudieron observar y mencionar, los segmentos trazados en la circunferencia, así como los ángulos de la circunferencia. Definen algunas propiedades y de manera intuitiva mencionan las medidas de los ángulos y los arcos formados. Sin embargo, no fueron capaces de contestar los incisos con algunas variaciones de las circunstancias iniciales.

6 alumnos alcanzaron el Nivel #1 de Razonamiento. Los alumnos solamente pudieron mencionar los segmentos y ángulos que observaron, sin poder mencionar propiedades, además de no poder proponer ni mencionar alguna expresión para calcular las medidas correspondientes. 2 alumnos no contestaron este ítem.

e) En el ítem #5, 2 alumnos alcanzaron el Nivel #4 de Razonamiento. Los alumnos pudieron definir correctamente los elementos que se presentaron en el ejercicio, como ángulos de la circunferencia, arcos formados, segmentos y puntos correspondientes. Con la definición correcta de las propiedades, plantearon la expresión correcta para hallar las medidas correctas. Además, utilizaron dichas propiedades para aplicarlas en una demostración.

5 alumnos alcanzaron el Nivel #3 de Razonamiento. Los alumnos mencionaron tanto los elementos presentes en el ítem, como ángulos, arcos y segmentos de la circunferencia, como propiedades de dichos elementos. Además plantearon la expresión correcta para solucionar el ítem, además de que pudieron resolverlo de manera mental, justificando de manera correcta su razonamiento.

8 alumnos alcanzaron el Nivel #2 de Razonamiento. Estos alumnos mencionaron elementos y algunas propiedades, sin poder apoyarse de estas para hallar una expresión y solucionar dicho ítem.

2 alumnos alcanzaron el Nivel #1 de Razonamiento. Estos alumnos pudieron mencionar solo algunos elementos presentes, sin poder definir propiedades y por consiguiente no hallar la solución del ítem. 4 alumnos no resolvieron el problema.

f) En el ítem #6, 2 alumnos alcanzaron el Nivel #4 de Razonamiento. Los alumnos identificaron los ángulos de la circunferencia, ángulos suplementarios, arcos formados por los ángulos, segmentos notables de la circunferencia, así como figuras inscritas en esta (triángulo). Además de que mencionaron las propiedades de dichos elementos. De manera intuitiva lograron encontrar las relaciones de elementos y propiedades para hacer la demostración. Plasmaron dicha demostración de manera escrita.

1 alumno alcanzó el Nivel #3 de Razonamiento. Pudo identificar los elementos y propiedades de los elementos presentes, así como las propiedades de la figura inscrita hallada, menciona las expresiones para hallar las medidas de los ángulos y los arcos. Relaciona de manera correcta la demostración de elementos con las propiedades correctas, sin llegar a terminar dicha demostración.

9 alumnos alcanzaron el Nivel #2 de Razonamiento. Los alumnos mencionaron los elementos presentes en el ítem, mencionando propiedades y características de dichos elementos. No logran visualizar y relacionar elementos y propiedades para una demostración.

1 alumno alcanza en Nivel #1 de Razonamiento. Solo llega a visualizar ángulos, segmentos y figuras geométricas. No logran visualizar o analizar propiedades de estos elementos y por consiguiente no proponen relación alguna para demostrar al menos algún elemento. 8 alumnos no contestaron el ítem.

- g) En el ítem #7, 6 alumnos alcanzaron el Nivel #4 de Razonamiento. Los alumnos mencionaron todos los elementos presentes en el ítem, como ángulos y arcos en la circunferencia, figuras inscritas en la circunferencia, además de sus propiedades. Proponen también métodos de demostración de triángulos, como Ángulo-Lado-Ángulo, Lado-Lado-Lado y Lado-Ángulo-Lado, como apoyo para solucionar el ítem. Logran hacer la demostración del ítem, proponiendo una serie de pasos ordenados, junto con sus propiedades.

7 alumnos alcanzaron el Nivel #2 de Razonamiento. Los alumnos identifican ángulos y arcos de la circunferencia, figuras inscritas en la circunferencia, además de mencionar algunas propiedades que cumplen estos elementos. No son capaces de proponer un camino de solución del ítem. Con dificultad identifican la hipótesis y la tesis. 8 alumnos no contestan el ítem.

h) En el ítem #8. 2 alumnos alcanzaron el Nivel #3 de razonamiento. Los alumnos identifican todos los elementos presentes y sus propiedades, interpretaron de forma correcta tanto la hipótesis como la tesis que presenta el enunciado. Iniciaron con la demostración, sin embargo no fueron capaces de superar todos los obstáculos para demostrar la tesis.

4 alumnos alcanzaron el Nivel #2 de Razonamiento. Estos alumnos lograron definir elementos y propiedades que contiene el ítem. No lograron identificar hipótesis y tesis definidas en el enunciado y no hallaron relación alguna entre los elementos para realizar la demostración.

1 alumno alcanzó el Nivel #1 de Razonamiento, ya que solo definió algunos elementos que pudo identificar, mencionando muy pocas propiedades y por consiguiente ni siquiera intentó realizar la demostración. 14 alumnos no respondieron este ítem.

i) En el ítem #9, 2 alumnos alcanzaron el Nivel #4 de Razonamiento. Estos alumnos pudieron observar y definir todos los elementos que contiene el ítem, además de mencionar las propiedades y las relaciones que tienen con otros conceptos. De manera general pudieron realizar la demostración, además de aplicar de manera correcta los cálculos necesarios para la obtención del resultado correcto.

6 alumnos alcanzaron el Nivel de Razonamiento #3. Definieron elementos y propiedades de dichos elementos que se encuentran presentes en el ítem, además de hallar las relaciones con otros conceptos y sus propiedades. Con dificultad fueron realizando la demostración, sin llegar a terminarla, aunque aplicaron correctamente algunas expresiones para hallar la solución correcta.

9 alumnos alcanzaron el Nivel de Razonamiento #2. Definieron todos los elementos presentes en el ítem, mencionando también algunas propiedades, sin embargo no encontraron relación con otros elementos y también no proponen expresión alguna

para calcular lo que se pide. Obviamente, estos alumnos no fueron capaces de realizar la demostración que se necesitaba.

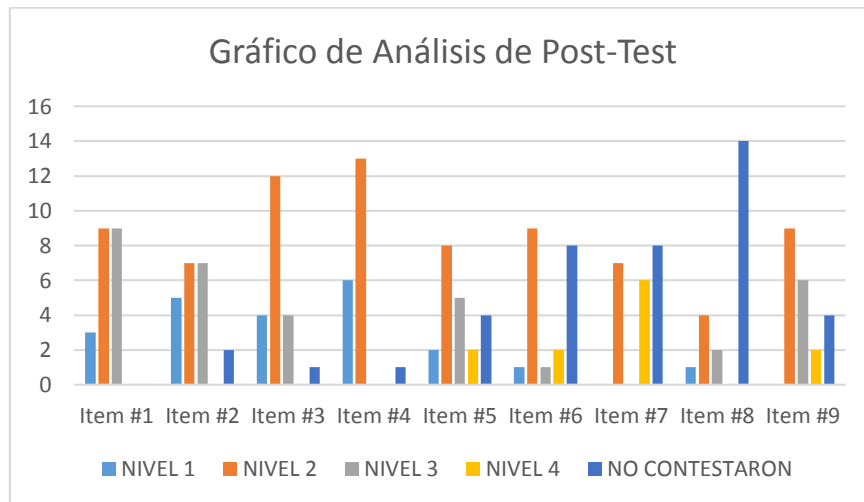


Figura 15. Gráfico de barras de los Niveles de Razonamiento alcanzados en cada ítem.

Una vez hecho este análisis, se procede a obtener el Nivel de Razonamiento que obtiene cada alumno por la tipificación hecha en el paso anterior.

Primero se obtiene la ponderación de los resultados según el tipo de respuesta. En la siguiente tabla se puede observar dicha ponderación.

ALUMNO	NIVEL 1 VISUALIZACIÓN	NIVEL 2 ANÁLISIS	NIVEL 3 CLASIFICACIÓN	NIVEL 4 DEDUCCIÓN FORMAL
AG_2	77.78	52.22	13.33	0
AS_2	77.78	52.22	8.33	0
CH_2	88.89	77.78	0.00	0
CD_2	77.78	66.67	26.67	16
EE_2	77.78	62.22	20.00	0
HA_2	66.67	62.22	8.89	0
JZ_2	66.67	66.67	8.89	0
LC_2	55.56	50.00	8.89	0
LL_2	66.67	66.67	18.89	16
MD_2	100.00	100.00	78.89	46
MC_2	66.67	55.56	11.67	0
MH_2	88.89	84.44	48.33	4
MG_2	100.00	97.78	27.78	8
ME_2	88.89	80.00	50.00	24
OS_2	100.00	71.67	12.22	0
RG_2	88.89	86.67	70.00	64
SC_2	88.89	84.44	55.00	4
TR_2	77.78	75.56	30.00	0
TJ_2	100.00	88.89	71.67	52
ZI_2	100.00	84.44	16.67	4
ZN_2	66.67	41.11	13.89	0

Tabla 3. Tabla de ponderación de los ítems según el tipo de respuesta dado

Con la ponderación de los resultados, se determina el Grado Adquirido en cada Nivel. Estos grados se muestran en la siguiente tabla.

ALUMNO	NIVEL 1 VISUALIZACIÓN	NIVEL 2 ANÁLISIS	NIVEL 3 CLASIFICACIÓN	NIVEL 4 DEDUCCIÓN FORMAL
AG_2	ALTA	INTERMEDIA	BAJA	NULA
AS_2	ALTA	INTERMEDIA	NULA	NULA
CH_2	COMPLETA	ALTA	NULA	NULA
CD_2	ALTA	ALTA	BAJA	BAJA
EE_2	ALTA	ALTA	BAJA	NULA
HA_2	ALTA	ALTA	NULA	NULA
JZ_2	ALTA	ALTA	NULA	NULA
LC_2	ALTA	INTERMEDIA	NULA	NULA
LL_2	ALTA	ALTA	BAJA	BAJA
MD_2	COMPLETA	COMPLETA	ALTA	INTERMEDIA
MC_2	ALTA	INTERMEDIA	NULA	NULA
MH_2	COMPLETA	ALTA	INTERMEDIA	NULA
MG_2	COMPLETA	COMPLETA	BAJA	NULA
ME_2	COMPLETA	ALTA	INTERMEDIA	BAJA
OS_2	COMPLETA	ALTA	NULA	NULA
RG_2	COMPLETA	COMPLETA	ALTA	ALTA
SC_2	COMPLETA	ALTA	INTERMEDIA	NULA
TR_2	ALTA	ALTA	BAJA	NULA
TJ_2	COMPLETA	COMPLETA	ALDA	INTERMEDIA
ZI_2	COMPLETA	ALTA	BAJA	NULA
ZN_2	ALTA	INTERMEDIA	NULA	NULA

Tabla 4. Tabla de Valores de los grados de adquisición

Una vez que se obtuvo el grado de adquisición de cada alumno, se determinó de manera individual el Nivel de Razonamiento que alcanzó de manera general. Obteniendo finalmente los siguientes resultados:

- i. 15 alumnos alcanzaron el Nivel de Razonamiento #2, esto representa el 71% de la población total. Estos alumnos logran identificar los conceptos o elementos presentes en el ítem, pueden mencionar propiedades de estos, sin embargo no son capaces de hallar relaciones y por consiguiente no proponen expresiones algebraicas para solucionar los ítems o realizar demostraciones.

- ii. 3 alumnos alcanzaron el Nivel de Razonamiento #3, que representa el 14% de la población total. Estos alumnos pueden identificar conceptos o elementos, definen propiedades de estos, además de que hallan relaciones con otros elementos o conceptos y pueden proponer expresiones para la solución del ítem.
  
- iii. 3 alumnos alcanzaron el Nivel de Razonamiento #4, que representa el 14% aproximadamente de la población total. Estos alumnos además de cumplir con las características de los alumnos del Nivel #3, pueden utilizar todos los elementos posibles y las relaciones con otros para realizar una demostración.



Figura 16. Gráfico de barras de los Niveles de Razonamiento adquiridos en el grupo.

En el post-test también se realizaron otros dos análisis, que presentaron los siguientes resultados:

- a) Referente a los ítems contestados por alumnos se reporta lo siguiente:
  - i. 5 alumnos contestaron o intentaron contestar los 9 ítems que contiene la prueba, 4 alumnos contestaron 8 ítems, 4 alumnos contestaron 7 ítems y 5 alumnos contestaron 6 ítems. Esto representa el 85% del total de la población con la que se trabajó respondió a mayoría de los ítems del test.

- ii. El máximo número de ítems que no se contestaron fue de 5, y el mínimo es de 1 ítem sin contestar. De los 21 alumnos que presentaron el test, solo los 2 alumnos que no contestaron los 5 problemas, no intentaron contestar los ítems que se resuelven por demostración, el resto del grupo intentó al menos contestar 1 ítem de este tipo. El promedio fue de 1.95 problemas sin resolver en el pre-test.
- b) De los 15 alumnos que se ubicaron en el Nivel de Razonamiento #2, 7 manifestaron un Nivel de Adquisición Bajo en el Nivel de Razonamiento #3, lo que significa que inician con el uso de características y métodos propios de este Nivel, es decir que esta iniciando en la adquisición de este Nivel.

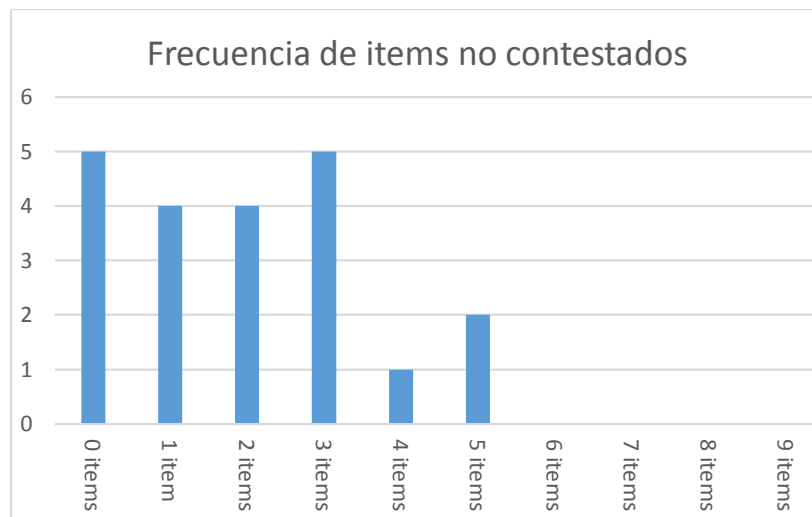


Figura 17. Gráfico de barras de frecuencia de ítems sin contestar.

#### **4.4 COMPARACIÓN DE LOS ANÁLISIS DEL PRE-TEST Y POST-TEST**

Una vez realizados los análisis del Pre-Test y Post-Test se observaron los siguientes puntos:

1. En el Pre-Test el 100% de los alumnos constaron entre 2 y 4 ítems de la prueba, sin embargo en el Post-Test el 85% de los alumnos contestaron entre 6 y 9 ítems de la prueba.
2. En el Pre-Test ningún alumno intentó contestar todos los ítems, mientras que en el Post-Test 5 alumnos contestaron o intentaron todos los ítems.
3. Todos los alumnos alcanzaron en el Post-Test al menos un Nivel de Razonamiento más respecto al Pre-Test. El 28% de los alumnos alcanzaron 2 Niveles de Razonamiento más.

## CONCLUSIONES

Con el firme propósito de contribuir con el diseño de secuencias de actividades basados en un modelo de aprendizaje que se utilizan para la formación académica de alumnos, se realizó una propuesta metodológica de diseño de secuencia de actividades para lograr el aprendizaje de los Ángulos de la circunferencia bajo el Modelo de Van Hiele.

Esta investigación cuestionó la forma tradicional de impartir clases de geometría, observando las características que impiden que funcionen. De esta problemática es donde surge la propuesta del diseño de la secuencia de actividades basadas en el Modelo de Van Hiele para lograr un avance en el Nivel de Razonamiento y que los alumnos logren involucrarse de una manera importante para lograr una mejor retención de los conceptos, poder aplicarlos y transferirlos a su mundo real. Los resultados obtenidos basados en los objetivos específicos planteados en el Capítulo 1 permiten concluir lo siguiente:

1. *Determinar el nivel de razonamiento del grupo previo al diseño de la secuencia de actividades, para saber el punto de partida de dicha secuencia y otros objetivos para alcanzar el nivel de razonamiento esperado.*

Apoiados en el trabajo de Aravena, Gutiérrez y Jaime (2016) se elaboró un pre-test para determinar el Nivel de Razonamiento de inicio antes de la aplicación de la secuencia de actividades, a diferencia del pre-test que se utiliza en la investigación, el nuestro se elabora tomando ítems de tests validados y problemas de la Olimpiada de Matemáticas, esto con la finalidad de evaluar un tema en específico de Geometría, Ángulos de la circunferencia.

2. *Crear una secuencia de actividades que involucre las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, iniciando desde el nivel de razonamiento que presentó el grupo en la aplicación del pre-test.*

Diseñar e implementar una secuencia de actividades basándose en las fases de aprendizaje y en los Niveles de Razonamiento del Modelo de Van Hiele, no solo proporcionó a los alumnos los conceptos y vocabulario para enfrentar y hallar la

solución a un problema en específico, además de darles la oportunidad de analizar y aplicar sus propiedades para realizar la demostración formal de un problema más complejo. Como se había mencionado en el Capítulo 1, esta investigación tiene cierta relación con el trabajo elaborado por Ramírez, Torres e Iglesias (2013) ya que se realiza el diseño de una secuencia de actividades basada en el Modelo de Van Hiele y aborda solo los ángulos inscrito y semi-inscrito, a diferencia de nuestro trabajo donde el tema central es el trabajar con todos los ángulos de la circunferencia (central, inscrito, semi-inscrito, interior y exterior), además de que reportamos los resultados obtenidos por el grupo, así como en Nivel de Razonamiento alcanzado una vez aplicado el post-test.

3. *Comprobar el nivel de razonamiento alcanzado después de la secuencia de actividades por medio de un post-test.*

Una vez aplicada la secuencia de actividades y el post-test, y apoyados de los trabajos de investigación de Corberán, Gutiérrez y otros (1994) y de Jaime (1993), se diseñó una herramienta de evaluación, basada en la tipificación de las respuestas dadas por los alumnos en cada ítem del post-test, asignación de un porcentaje según el tipo de respuesta, obtener el promedio general de cada Nivel y por último el Grado de Adquisición por Nivel de Razonamiento.

Por último el objetivo principal de este trabajo de tesis fue diseñar y evaluar una secuencia de actividades para el aprendizaje de ángulos de la circunferencia, basada en el modelo de Van Hiele, se puede concluir que se consiguió aplicar la propuesta de manera efectiva ya que los resultados del post-test reflejan el alcance de al menos un Nivel de Razonamiento de todos los alumnos, además de que también estos resultados muestran que existen indicios de la adquisición de un siguiente Nivel de Razonamiento, según las respuestas que proporcionaron en los ítems del post-test.

## BIBLIOGRAFÍA

- Acevedo, I., Londoño, G. y Ramírez, N. (2008) *Geogebra como soporte en el proceso de construcción del concepto de ángulo. Un análisis desde el modelo de Van Hiele*. Colombia: Universidad de Antioquia
- Aravena, M.; Gutiérrez, A.; Jaime, A. (2016). *Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile*, Enseñanza de las Ciencias, 34(1), 107-128.
- Andonegui, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento matemático. Cuaderno N° 12 Geometría: conceptos y construcciones elementales*. Caracas, Venezuela: Federación Internacional Fe y Alegría.
- Barrantes, M. y Blanco, L. (2004). *Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar*. Enseñanza de las Ciencias, 22(2), 241-250.
- Bagazgoitia, A. (2003). *Geometría con Cabri*. Sigma, 83-98.
- Callejo, M. L. (1994). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid, España: Narcea.
- Carmona, J. (2011) *La circunferencia, una propuesta didáctica usando el modelo de Van Hiele y Geometría Dinámica*. Colombia: Universidad Nacional de Colombia
- Corberán, R., Gutiérrez, A. y otros (1994): *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele* (colección "investigación" n° 95). (Madrid: C.I.D.E., M.E.C.)
- Durán Cepeda, D. (2014). *Geometría Euclidiana para Olimpiada de Matemáticas*. Venezuela: Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
- Jaime, A., Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele*, en Llinares, S.; Sánchez, M.V. Teoría y práctica en educación matemática, 295-384. Sevilla: Alfar.
- Jaime, A. (1993): *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* (tesis doctoral). (Valencia: Univ. de Valencia). Director: A. Gutiérrez

- Kerlegand, C. (2008) *Desarrollo de dos propiedades de la circunferencia usando el Modelo de Van Hiele y la Visualización*. México: IPN
- Ramírez, S., Torres Z., Valdez K. y Iglesias, M. (2013) *La circunferencia y el círculo. Una propuesta didáctica*. Memorias de la VIII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VI Jornada de investigación en Educación Matemática.
- Soler, G. G. (2004). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática*. Educación matemática, 103-125.
- Van Hiele, P.M (1986). *Structure and insight. A Theory of mathematics education*. Londres: Academic Press.
- Vargas, G. V., & Araya, R. G. (2013). *El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría*. Uniciencia, 74-94.

# ANEXOS

## ANEXO 1

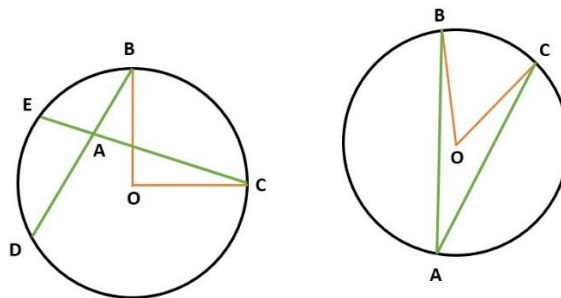


PREPARATORIA XILOTZINGO  
MATEMÁTICAS II  
PRUEBA DIAGNÓSTICA

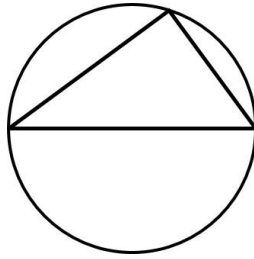


**NOMBRE:** \_\_\_\_\_

- 1.- Dos rectas  $AB$  y  $CD$  se cortan en  $O$ . Si  $m\angle AOD = 50^\circ$ , halle la medida de los otros ángulos
- 2.- Halle la medida de dos ángulos suplementarios si la medida del mayor es  $20^\circ$  menor que tres veces la medida del menor.
- 3.- ¿Cómo se denominan los ángulos que se señalan en las dos figuras de abajo?

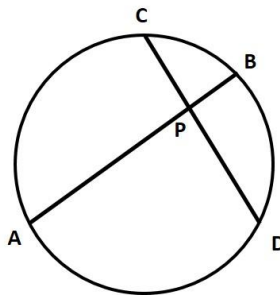


- 4.- Inscribimos un triángulo en una circunferencia coincidiendo dos vértices con los extremos de un diámetro. Escribe si las siguientes oraciones son falsas o verdaderas y justifica por qué:

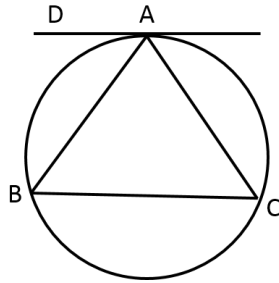


- a. Es siempre un triángulo rectángulo.
- b. En un caso puede ser un triángulo isósceles.
- c. Su área presenta un valor máximo al mover el tercer vértice
- d. alguna de las respuestas anteriores es falsa.

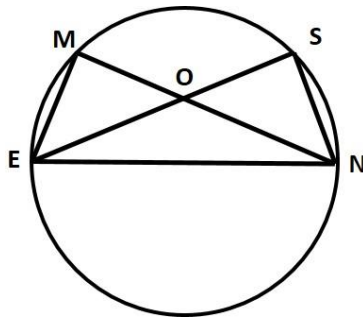
5.- En la siguiente figura se tiene que  $m(\angle APD) = 85^\circ$  y  $m(\text{arc}\{AD\}) = 125^\circ$ . Halle  $m(\text{arc}\{BC\})$ .



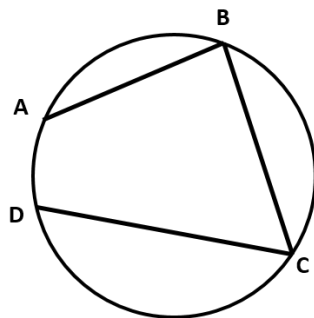
6.- En la figura a la derecha A, B, C son puntos de una circunferencia O y  $\overline{AD}$  es la tangente en A. Pruebe que  $\angle ACB \cong \angle BAD$ .



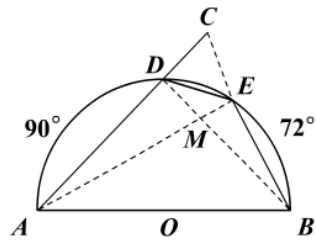
7.- Demostrar que si  $ME \cong SN$  entonces  $MN \cong SE$ .



8.- Demostrar que  $AB \cong CD$  si y sólo si  $AC \cong BD$ .



9.- Sobre la semicircunferencia de diámetro  $AB$  se eligen los puntos  $D$  y  $E$  tales que  $m(\text{arc}\{AD\}) = 90^\circ$  y  $m(\text{arc}\{BE\}) = 72^\circ$  ; luego se trazan las cuerdas  $AD$ ,  $DE$  y  $EB$ . Halle la medida de los ángulos  $EAB$ ,  $DBA$ ,  $ADB$ ,  $EDB$  y  $ACB$ , si  $C$  es la intersección de la prolongación de  $AD$  y  $BE$ .



## ANEXO 2

ALUMNO AG

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
ITEM 1	100	100	20	
ITEM 2	100	25	0	
ITEM 3	100	20	20	
ITEM 4	100	25	0	
ITEM 5	100	100	80	0
ITEM 6	100	100	0	0
ITEM 7	0	0	0	0
ITEM 8	0	0	0	0
ITEM 9	100	100	0	0
PROMEDIOS	77.78	52.22	13.33	0

ALUMNO CH

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
ITEM 1	100	100	0	
ITEM 2	0	0	0	
ITEM 3	100	100	0	
ITEM 4	100	100	0	
ITEM 5	100	0	0	0
ITEM 6	100	100	0	0
ITEM 7	100	100	0	0
ITEM 8	100	100	0	0
ITEM 9	100	100	0	0
PROMEDIO	88.89	77.78	0.00	0.00

ALUMNO AS

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
ITEM 1	100	50	0	
ITEM 2	100	50	0	
ITEM 3	100	50	0	
ITEM 4	100	25	0	
ITEM 5	100	50	0	0
ITEM 6	100	100	75	0
ITEM 7	0	0	0	0
ITEM 8	0	0	0	0
ITEM 9	100	50	0	0
PROMEDIOS	77.78	41.67	8.33	0.00

ALUMNO CD

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
ITEM 1	100	100	80	
ITEM 2	100	100	0	
ITEM 3	0	0	0	
ITEM 4	0	0	0	
ITEM 5	100	100	0	0
ITEM 6	100	0	0	0
ITEM 7	100	100	80	80
ITEM 8	100	100	0	0
ITEM 9	100	100	80	0
PROMEDIO	77.78	66.67	26.67	16

## ALUMNO EE

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
ITEM 1	100	100	80	
ITEM 2	100	100	20	
ITEM 3	100	80	0	
ITEM 4	100	0	0	
ITEM 5	100	100	0	0
ITEM 6	100	80	0	0
ITEM 7	0	0	0	0
ITEM 8	0	0	0	0
ITEM 9	100	100	80	0
PROMEDIO	77.78	62.22	20.00	0.00

## ALUMNO HA

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
ITEM 1	100	100	0	
ITEM 2	100	100	0	
ITEM 3	100	100	0	
ITEM 4	100	80	0	
ITEM 5	0	0	0	0
ITEM 6	0	0	0	0
ITEM 7	0	0	0	0
ITEM 8	100	80	0	0
ITEM 9	100	100	80	0
PROMEDIO	66.67	62.22	8.89	0.00

## ALUMNO JZ

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
ITEM 1	100	100	0	
ITEM 2	100	100	0	
ITEM 3	100	100	0	
ITEM 4	100	100	0	
ITEM 5	100	100	80	0
ITEM 6	0	0	0	0
ITEM 7	0	0	0	0
ITEM 8	0	0	0	0
ITEM 9	100	100	0	0
PROMEDIO	66.67	66.67	8.89	0.00

## ALUMNO LC

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
ITEM 1	100	50	0	
ITEM 2	100	100	0	
ITEM 3	100	100	0	
ITEM 4	100	100	0	
ITEM 5	0	0	80	0
ITEM 6	0	0	0	0
ITEM 7	0	0	0	0
ITEM 8	0	0	0	0
ITEM 9	100	100	0	0
PROMEDIO	55.56	50.00	8.89	0.00

## ALUMNO LL

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
ITEM 1	100	100	20	
ITEM 2	100	100	20	
ITEM 3	100	100	25	
ITEM 4	0	0	0	
ITEM 5	100	100	25	0
ITEM 6	0	0	0	0
ITEM 7	100	100	80	80
ITEM 8	0	0	0	0
ITEM 9	100	100	0	0
PROMEDIO	66.67	66.67	18.89	16.00

## ALUMNO MC

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
ITEM 1	100	100	20	
ITEM 2	100	20	0	
ITEM 3	100	100	20	
ITEM 4	100	80	25	
ITEM 5	100	100	20	0
ITEM 6	0	0	0	0
ITEM 7	0	0	0	0
ITEM 8	0	0	0	0
ITEM 9	100	100	20	0
PROMEDIO	66.67	55.56	11.67	0.00

## ALUMNO MD

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
ITEM 1	100	100	100	
ITEM 2	100	100	100	
ITEM 3	100	100	100	
ITEM 4	100	100	25	
ITEM 5	100	100	80	25
ITEM 6	100	100	25	0
ITEM 7	100	100	100	80
ITEM 8	100	100	80	25
ITEM 9	100	100	100	100
PROMEDIO	100.00	100.00	78.89	46.00

## ALUMNO MH

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
ITEM 1	100	100	80	
ITEM 2	100	100	100	
ITEM 3	100	100	80	
ITEM 4	100	80	25	
ITEM 5	100	100	20	0
ITEM 6	100	80	25	0
ITEM 7	100	100	25	0
ITEM 8	0	0	0	0
ITEM 9	100	100	80	20
PROMEDIOS	88.89	84.44	48.33	4.00

## ALUMNO MG

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
ITEM 1	100	100	20	
ITEM 2	100	100	25	
ITEM 3	100	100	0	
ITEM 4	100	80	0	
ITEM 5	100	100	20	0
ITEM 6	100	100	25	0
ITEM 7	100	100	0	0
ITEM 8	100	100	80	20
ITEM 9	100	100	80	20
PROMEDIOS	100.00	97.78	27.78	8.00

## ALUMNO OS

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
ITEM 1	100	100	20	
ITEM 2	100	20	0	
ITEM 3	100	100	20	
ITEM 4	100	20	0	
ITEM 5	100	25	0	0
ITEM 6	100	100	25	0
ITEM 7	100	100	25	0
ITEM 8	100	80	0	0
ITEM 9	100	100	20	0
PROMEDIOS	100.00	71.67	12.22	0.00

## ALUMNO ME

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
ITEM 1	100	100	80	
ITEM 2	100	100	100	
ITEM 3	100	100	20	
ITEM 4	100	20	0	
ITEM 5	100	100	100	20
ITEM 6	100	100	25	0
ITEM 7	100	100	100	80
ITEM 8	0	0	0	0
ITEM 9	100	100	25	20
PROMEDIOS	88.89	80.00	50.00	24.00

## ALUMNO RG

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
ITEM 1	100	100	80	
ITEM 2	100	100	100	
ITEM 3	100	100	25	
ITEM 4	100	80	25	
ITEM 5	100	100	100	80
ITEM 6	100	100	100	80
ITEM 7	100	100	100	80
ITEM 8	0	0	0	0
ITEM 9	100	100	100	80
PROMEDIOS	88.89	86.67	70.00	64.00

## ALUMNO SC

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
ITEM 1	100	100	100	
ITEM 2	100	100	100	
ITEM 3	100	100	100	
ITEM 4	100	80	25	
ITEM 5	100	100	20	0
ITEM 6	100	80	25	0
ITEM 7	100	100	25	0
ITEM 8	0	0	0	0
ITEM 9	100	100	100	20
<b>PROMEDIOS</b>	88.89	84.44	55.00	4.00

## ALUMNO TJ

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
ITEM 1	100	100	100	
ITEM 2	100	100	100	
ITEM 3	100	100	20	
ITEM 4	100	80	25	
ITEM 5	100	100	100	80
ITEM 6	100	100	100	80
ITEM 7	100	100	100	80
ITEM 8	100	20	0	0
ITEM 9	100	100	100	20
<b>PROMEDIOS</b>	100.00	88.89	71.67	52.00

## ALUMNO TR

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
ITEM 1	100	100	100	
ITEM 2	100	100	100	
ITEM 3	100	100	20	
ITEM 4	100	80	25	
ITEM 5	100	100	0	0
ITEM 6	0	0	0	0
ITEM 7	100	100	25	0
ITEM 8	0	0	0	0
ITEM 9	100	100	0	0
<b>PROMEDIOS</b>	77.78	75.56	30.00	0.00

## ALUMNO ZI

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
ITEM 1	100	100	0	
ITEM 2	100	20	0	
ITEM 3	100	100	20	
ITEM 4	100	80	25	
ITEM 5	100	100	80	20
ITEM 6	100	80	0	0
ITEM 7	100	100	25	0
ITEM 8	100	80	0	0
ITEM 9	100	100	0	0
<b>PROMEDIOS</b>	100.00	84.44	16.67	4.00

ALUMNO ZN

	<b>NIVEL 1</b>	<b>NIVEL 2</b>	<b>NIVEL 3</b>	<b>NIVEL 4</b>
<b>ITEM 1</b>	100	100	100	
<b>ITEM 2</b>	100	20	0	
<b>ITEM 3</b>	100	50	0	
<b>ITEM 4</b>	100	80	25	
<b>ITEM 5</b>	100	20	0	0
<b>ITEM 6</b>	0	0	0	0
<b>ITEM 7</b>	0	0	0	0
<b>ITEM 8</b>	0	0	0	0
<b>ITEM 9</b>	100	100	0	0
<b>PROMEDIOS</b>	66.67	41.11	13.89	0.00