Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Posgrado en Ciencias Matemáticas

La descomposición de Jordan para funciones de variación acotada con valores en espacios vectoriales

TESIS

Que para obtener el grado de:

Doctor en Ciencias (Matemáticas)

Presenta:

Daniela Rodríguez Tzompantzi

Directores de Tesis:

Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna

Dr. Francisco Javier Mendoza Torres

Puebla, Pue. Agosto 2018

BUAP

DRA. LIDIA AURORA HERNÁNDEZ REBOLLAR
SECRETARIA DE INVESTIGACIÓN Y
ESTUDIOS DE POSTGRADO, FCFM-BUAP
P R E S E N T E:

Por este medio le informo que el(la) C:

DANIELA RODRÍGUEZ TZOMPANTZI

estudiante del Doctorado en Ciencias (Matemáticas), ha cumplido con las indicaciones que el Jurado le señaló en el Coloquio que se realizó el día 25 de junio de 2018, con la tesis titulada:

"LA DESCOMPOSICIÓN DE JORDAN PARA FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA CON VALORES EN ESPACIOS VECTORIALES"

Por lo que se le autoriza a proceder con los trámites y realizar el examen de grado en la fecha que se le asigne.

A T E N T A M E N T E.
H. Puebla de Z, a 29 de junio de 2018

DR. FERNANDO MACÍAS ROMERO
COORDINADOR DEL POSGRADO
EN MATEMÁTICAS.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · 1578 ·
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS · SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y ESTUDIOS DE POSGRADO

DR.FMR/mtrv

Facultad
de Ciencias
Físico Matemáticas

Av. San Claudio y 18 sur, edif. 111 A,
Ciudad Universitaria, Col. San
Manuel, Puebla, Pue. C.P. 72570
01 (222) 229 55 00 Ext. 7550 y 7552

A mi esposo e hijos.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis padres Hortensia y Daniel, quienes me han brindado su apoyo incondicional a lo largo de mi carrera.

A mi esposo Jorge Salazar, por su amor y amistad. A mis hijos Jeshua Yahir y Jafet que son mi fuerza, a ustedes les dedico este logro.

A mis hermanos y hermanas, y de manera especial a mi hermano Gumaro.

A mis asesores Dr. Juan Alberto Escamilla y el Dr Francisco Javier Mendoza. Muchas gracias por su paciencia y tiempo.

A los miembros del jurado: Dr. Slavisa Djorjevic, Dra. Lidia Aurora Hernández, Dr. José Jacobo Oliveros, Dr. Victor Manuel Méndez, Dr Gabriel Kantún por sus valiosas observaciones para mejorar el trabajo de tesis.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por haberme otorgado una beca para realizar mis estudios de Doctorado, sin su apoyo me habría sido imposible lograr este objetivo.

Índice general

Introducción

Jordan en sus estudios sobre series de Fourier, en 1881, introdujo el concepto de función de variación acotada para funciones con valores reales definidas sobre un intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}$. Entre otros resultados, demostró que : *una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada si y sólo si es expresada como la diferencia de dos funciones crecientes [9].* Este resultado es conocido como el Teorema de descomposición de Jordan.

El concepto de función de variación acotada admite varias generalizaciones. Vitali, Hardy, Arzela, Pierpont, Frechet y Tonelli extendieron de manera diferente el concepto de función de variación acotada para funciones reales de dos variables. Adams [1, 2] estudió la relación que existe entre estos conceptos.

Chistyakov en [4, 5, 6, 7] estudió un concepto de función de variación acotada, para funciones $f : [a, b] \to X$, donde X es un espacio normado o métrico. En el marco de este tipo de funciones no se puede plantear que una función de variación acotada es la diferencia de dos funciones crecientes, ya que en un espacio métrico no necesariamente se tiene un orden ($\leq$) que permita introducir el concepto de función creciente. Sin embargo, Chistyakov demostró algunos teoremas alternativos de descomposición de Jordan.

En este trabajo de tesis estudiamos algunas extensiones del concepto de variación acotada para funciones $f : [a, b] \to X$, donde X es un espacio normado o un espacio vectorial. Entre otros, estudiamos el concepto de variación acotada débil, variación acotada fuerte, de variación acotada y de variación acotada respecto al orden. Nuestro principal interés es obtener teoremas tipo descomposición de Jordan para estas funciones.

Sabemos que los multiplicadores en la integral de Henstock-Kurzweil son funciones de variación acotada. Así, el empleo de la descomposición de Jordan, en muchas ocasiones facilita la evaluación de la integral del producto de una función de variación acotada y una función Henstock-Kurzweil integrable. Por otro lado, resultados en la teoría de la integral de Henstock-Kurzweil y la de Riemann (Lebesgue, Henstock)-Stieltjes, por ejemplo, son demostrados a partir de esta descomposición.

Bianchini y Tonon [3] estudian un caso alternativo de la descomposición de Jordan para funciones de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}$ y comentan que el caso $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, con $n \geq 2$, requieren mayor estudio salvo el caso $n = 1$. Nuestro trabajo agrega algunos resultados a las observaciones de Chistyakov y Bianchini-Tonon cuando el codominio de la función es un espacio normado o de Hilbert.

La tesis está dividida en dos capítulos.

Capítulo 1 Está dedicado a exponer una serie de preliminares, que incluyen conceptos de la teoría de los espacios normados ordenados, y de la teoría de función de variación acotada para funciones con dominio un intervalo cerrado y codominio $\mathbb{R}$. Además, algunas de sus propiedades que son de utilidad para el desarrollo del capítulo 2.

Capítulo 2 Este capítulo está enfocado al desarrollo de los resultados originales del trabajo de tesis.

Entre otros mencionamos los siguientes resultados: En el caso real es conocido que toda función monótona es de variación acotada. Este resultado no se cumple para funciones con valores en espacios normados. En los teoremas 2.1.6 y 2.1.7 damos condiciones para que toda función monótona con valores en un espacio normado sea de variación acotada fuerte o de variación acotada débil. El Teorema 2.3.3 demuestra que la descomposición de Jordan para funciones fuertemente de variación acotada con valores en un espacio de Hilbert se satisface bajo una relación de equivalencia. Cuando se consideran funciones fuertemente de variación acotada con valores en el espacio dual se demuestra la descomposición de Jordan, Teorema 2.4.4. Si las funciones fuertemente de variación acotada tienen valores en el espacio de las funciones continuas, se obtiene la descomposición de Jordan, Teorema 2.4.3. Haciendo uso de la relación de orden del espacio, se define el concepto de función de variación acotada respecto al orden, mostramos algunas de sus propiedades y además se obtiene el teorema del tipo descomposición de Jordan, Teorema 2.2.7.

Los teoremas 2.1.7, 2.3.3, 2.2.7 y algunos resultados más que se encuentran en las secciones 2.2 y 2.3 fueron publicados en el artículo: *"The Jordan decomposition of bounded variation functions valued in vector spaces"* [10]. Los teoremas de la sección 2.4 son resultados originales pero no han sido publicados.

Capítulo 1

Preliminares

Como mencionamos en la introducción en este capítulo se revisan algunos conceptos básicos de la teoría de espacios normados ordenados y de las funciones de variación acotada reales definidas en un intervalo compacto. Ningún resultado es original.

1.1. Espacios normados ordenados

Comenzamos con la definición de relación de orden parcial en un conjunto.

Definición 1.1.1. *Sea X un conjunto no vacío. La relación $\leq$ en X es llamada **orden parcial** si*

- *$x \leq x$ para cada $x \in X$ ($\leq$ es **reflexiva**);*
- *$x \leq y$ y $y \leq x$ implica $x = y$ ($\leq$ es **antisimétrica**);*
- *$x \leq y$ y $y \leq z$ implica $x \leq z$ ($\leq$ es **transitiva**).*

*El par $(X, \leq)$ es llamado un **conjunto parcialmente ordenado**.*

Definición 1.1.2. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que X es una **lattice**, si cada subconjunto K de X que consta de dos puntos tiene un supremo y un ínfimo.*

Existen otros tipos de clasificación de conjuntos parcialmente ordenados, por ejemplo, los conjuntos orden completo, Dedekind completo, Dedekind σ-completo, los cuales no son mencionados debido a que no se requieren en este trabajo, el lector interesado puede consultar [13].

Definición 1.1.3. *Sea X un espacio vectorial sobre el campo de los números reales y sea $\leq$ un orden parcial en X. El par $(X, \leq)$ es llamado **espacio vectorial ordenado**, si X es parcialmente ordenado respecto al orden parcial $\leq$ y para $x, y, z \in X$ y $\lambda \geq 0$:*

- $x \leq y$ *implica* $x + z \leq y + z$;
- $x \leq y$ *implica* $\lambda x \leq \lambda y$.

*Si X es un lattice con respecto al orden parcial, entonces X es llamado un **espacio de Riesz** o una **lattice vectorial**.*

Recordemos que dados los subconjuntos A y B del espacio vectorial X, se define

$$A \pm B = \{x \pm y \mid x \in A \text{ y } y \in B\},$$

$$\lambda A = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } x \in A\}.$$

Definición 1.1.4. *Sea X un espacio vectorial real. Un subconjunto de X, denotado por X_+, le llamaremos **cono** si X_+ tiene las siguientes propiedades:*

i) $X_+ + X_+ \subset X_+$;

ii) $X_+ \bigcap \{-X_+\} = \{\theta\}$;

iii) $cX_+ \subset X_+$, *para* $c \geq 0$.

En algunos artículos el subconjunto X_+ es llamado cono de orden o cono positivo.

Observación 1.1.5. *Si $(X, \leq)$ es un espacio vectorial ordenado, es fácil probar que el subconjunto $X_+ = \{x \mid \theta \leq x \in X\}$ es un cono.*

Definición 1.1.6. *Sea X_+ un cono de un espacio vectorial X. Definimos una relación de orden en X, denotada por $\leq_{X_+}$, como:*

$$x \leq_{X_+} y, \ \text{si } y - x \in X_+. \tag{1.1}$$

para $x, y \in X$.

Proposición 1.1.7. *Sean X un espacio vectorial, X_+ un cono de X y $\leq_{X_+}$ la relación de orden definida en (1.1) El par $(X, \leq_{X_+})$ es un espacio vectorial ordenado.*

Demostración. Primero probaremos que es un orden parcial. Sean $x, y, z \in X$,

- $x \leq_{X_+} x$, ya que $x - x = \theta \in X_+$;
- $x \leq_{X_+} y$ y $y \leq_{X_+} x$, entonces $x - y = -(y - x) \in X_+$. Por inciso $ii)$ de definición 1.1.7, $x = y$;
- $x \leq_{X_+} y$ y $y \leq_{X_+} z$, entonces $y - x + z - y = z - x \in X_+$ y $x \leq_{X_+} z$.

Ahora sean $x, y, z \in X$ y $\lambda \geq 0$, con $x \leq_{X_+} y$:

- $x + z \leq_{X_+} y + z$, ya que $y - x = y + z - (x + z) \in X_+$;
- $\lambda x \leq_{X_+} \lambda y$, ya que $\lambda(y - x) \in X_+$.

$\square$

Además, si X es un espacio normado, a la definición 1.1.4 de cono se le agrega la condición que X_+ sea un subconjunto cerrado. Dado un cono X_+ de X, cuando consideremos a X como espacio vectorial ordenado o espacio normado ordenado, será con el orden definido en (1.1).

Observación 1.1.8. *Como consecuencia de la Proposición 1.1.7, dado un cono se define un orden parcial; más aún, el recíproco también se cumple, es decir, si $\leq$ es un orden parcial sobre el espacio X, entonces el conjunto $X_+ = \{x \in X \mid 0 \leq x\}$ es un cono.*

A continuación se muestran algunos ejemplos de conos de espacios normados dados.

Ejemplos 1.1.9. *En los siguientes ejemplos X denota el espacio normado, X_+ un cono en el espacio y $\|\cdot\|_X$ la norma del espacio X.*

1. *Sea $X = \mathbb{R}$ con la norma $\|x\|_X = |x|$ y $X_+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.*
2. *Sea $X = \mathbb{R}^2$ con la norma $\|(x_1, x_2)\|_X = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ y $X_+ = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0$ y $x_2 \leq 0\}$.*
3. *Sea $X = \mathbb{R}^n$ con la norma $\|\bar{x}\|_X = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ y $X_+ = \{\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X \mid x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$.*
4. *Sea $X = \mathcal{B}(A, \mathbb{R})$, el espacio de las funciones reales acotadas con la norma $\|f\|_X = \sup_{x \in A} |f(x)|$ y $X_+ = \{f \in \mathcal{B}(A, \mathbb{R}) \mid f(x) \geq 0$, para todo $x \in A\}$.*
5. *Sea $X = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, el espacio de las funciones continuas con la norma $\|f\|_X = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$, y sea $X_+ = \{f \in X \mid f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]\}$.*

6. *Sea* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *un espacio de medida. Se define* $X = L^p(\Omega)$ *el espacio de las funciones p-integrables, donde la norma está definida de la forma usual:*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

y

$$X_+ = \{f \in X \mid f(x) \geq 0, \ \text{a. e. } t \in X\}.$$

7. *Sea* $X = \ell^2$*, con la norma* $\|x\|_X = (\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ *para cualquier* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots) \in \ell^2$ *y* $X_+ = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots) \in \ell^2 \mid x_1 \geq 0 \text{ y } x_i \leq x_1, \text{ para } i = 2, 3, \ldots\}$.

Los conceptos de sucesión y función monótona en un espacio normado ordenado se definen como sigue.

Definición 1.1.10. *Sean* X *un espacio normado ordenado por un cono* X_+ *y* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* X*. Diremos que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es:*

- ***creciente*** *si* $x_n \leq x_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*
- ***decreciente*** *si* $x_{n+1} \leq x_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*
- ***monótona*** *si es creciente o decreciente.*

Sea $f : [a, b] \to X$ *una función. Diremos que* f *es:*

- ***creciente*** *si dados* $t_1, t_2 \in [a, b]$ *tales que* $t_1 \leq t_2$*, entonces* $f(t_1) \leq f(t_2)$*;*
- ***decreciente*** *si dados* $t_1, t_2 \in [a, b]$ *tales que* $t_1 \leq t_2$*, entonces* $f(t_2) \leq f(t_1)$*;*
- ***monótona*** *si es creciente o decreciente.*

Al igual que en el caso real podemos hablar de intervalo en un espacio normado ordenado.

Definición 1.1.11. *Si* $y, z \in X$*, denotamos como* $[y, z]$ *al* ***intervalo ordenado****. Si se satisface que* $y \leq z$ *entonces el intervalo ordenado es el conjunto definido por* $[y, z] = \{x \in X \mid y \leq x \leq z\}$.

De manera similar se puede definir un intervalo abierto.

Observación 1.1.12. *Si no se cumple* $y \leq z$*, entonces* $[y, z] = \emptyset$ *y* $(y, z) = \emptyset$*. Y si* $y < z$*, entonces* $[y, z] \neq \emptyset$ *y* $(y, z) \neq \emptyset$*.*

A través de la relación de orden se define el concepto de conjunto acotado: sean X un espacio de normado ordenado y $A \subset X$.

- A es **acotado superiormente** si existe $z \in X$ tal que, $x \leq z$, para todo $x \in A$.
- A es **acotado inferiormente** si existe $y \in X$ tal que, $y \leq x$, para todo $x \in A$.

Diremos que A es **acotado en orden** si A es acotado superiormente e inferiormente, es decir si existe un intervalo $[y, z]$ tal que

$$A \subset [y, z].$$

Existen varios tipos de conos, por ejemplo podemos mencionar los conceptos de cono sólido, cono regular, cono completamente regular, etc. En este trabajo mencionamos los conos que serán de utilidad, y son los que enunciamos a continuación, al lector interesado lo referimos a [8].

Definición 1.1.13. *Sea X_+ un cono de un espacio de normado X. Diremos que X_+ es:*

- ***normal*** *si existe una constante $\gamma \geq 1$ tal que para cada $x, y \in X$,*

$$\text{si } \theta \leq x \leq y, \text{ entonces } \|x\| \leq \gamma \|y\|.$$

- ***extendible*** *si existe un cono X_1 en X y $b > 0$ tal que, para cada $x \in X_+ \backslash \{\theta\}$, $B(x, b\|x\|) \subset X_1$, donde $B(x, b\|x\|) = \{y \in X \mid \|y - x\| \leq b\|x\|\}$;*
- ***generador*** *si $X = X_+ - X_+$.*

Una caracterización de los conos extendibles está dada en términos de un elemento del dual, y es la siguiente.

Teorema 1.1.14. (*Guo*, [*8*]) *Supongamos que X_+ es un cono ordenado en X. Entonces X_+ es extendible si y sólo si existe una función $f \in X^*$ y una constante $\alpha > 0$ tal que $f(x) \geq \alpha \cdot \|x\|$ para todo $x \in X_+$.*

Recordemos que el **espacio dual** de un espacio normado X es

$$X^* = \{\phi : X \to K \mid \phi \text{ es lineal y continua}\},$$

el cual también es un espacio normado con la norma

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(x)| \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Los siguientes ejemplos muestran espacios cuyo cono es normal, extendible. También se dan ejemplos de espacios en los cuales el cono no es normal, extendible y generador.

Ejemplos 1.1.15.

- *Sea $X = \mathbb{R}^n$ con la norma*

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{n} |x_j|, \text{ donde } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

y sea

$$X_+ = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

X_+ es un cono normal, notemos que $\theta \leq x \leq y$ si y sólo si $0 \leq x_i \leq y_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $\|x\| \leq \|y\|$.

- *Sea $X = C^1[0, 2\pi]$ el espacio de todas las funciones con primera derivada continua definidas sobre $[0, 2\pi]$, donde la norma está definida como*

$$\|f\| = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)| + \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f'(x)|,$$

y sea

$$X_+ = \{f \in X \mid f(x) \geq 0, \text{ para todo } x \in [0, 2\pi]\},$$

el cono del espacio. Veamos que X_+ no es normal. Si X_+ es normal, existe una constante $N > 0$ tal que, si $0 \leq f \leq g$ entonces $\|f\| \leq N\|g\|$. Sea $f_n(x) = 1 - \cos nx$ y $g_n(x) = 2$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. Claramente se tiene que

$$0 \leq f_n \leq g_n, \; \|f_n\| = 2 + n, \; \|g_n\| = 2.$$

Entonces se tiene que $2 + n \leq 2N$ para $n = 1, 2, \ldots$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X_+ no es un cono normal.

- *Sea $X = L^p(\Omega)$ el espacio de las funciones p-integrables, donde la norma está definida de la forma usual:*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

y sea

$$X_+ = \{f \in X \mid f(t) \geq 0, \text{ a. e. } t \in \Omega\},$$

el cono del espacio.

a) *Si $p = 1$, entonces X_+ es un cono extendible.*
El funcional

$$g(f) = \int_X f d\mu, \; f \in L(\Omega),$$

es tal que $g(f) = \|f\|$, para todo $f \in X_+$. Por el Teorema 1.1.14, se sigue que X_+ es extendible.

b) *Si $p > 1$, el cono X_+ no es extendible. Si suponemos que X_+ es extendible, entonces por Teorema 1.1.14 existe $x^* \in X^*$ y $\alpha > 0$ tal que $x^*(f) \geq \alpha \cdot \|f\|$ para toda $f \in X_+$.*

Para cualquier entero positivo m, dividimos al conjunto Ω en m conjuntos disjuntos medibles Ω_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ con la misma medida y definamos la función $f_i(t)$ como

$$f_i(t) = \begin{cases} m^{\frac{1}{p}}, & si \quad t \in \Omega_i, \\ \\ 0, & si \quad t \in \Omega \setminus \Omega_i. \end{cases}$$

Claramente $f_i \in X_+$ y $\|f_i\| = (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}}$ para $i = 1, 2, \ldots, m$.

Por lo tanto, tenemos

$$x^*(f_i) \geq \alpha \cdot \|x_i\| = \alpha \cdot (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}}.$$

Por otro lado, si consideramos $f(t) \equiv 1$, entonces $f \in X_+$ y

$$f(t) = m^{-\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{m} f_i(t), \ t \in \Omega.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$x^*(f) = x^*(m^{-\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{m} f_i(t)) = m^{-\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{m} f_i(t) \geq \alpha \cdot m^{1-\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{m} f_i(t),$$

se cumple para cualquier entero positivo m, lo cual es una contradicción ya que $x^*(f)$ es finito.

- *Sea $X = C([a, b], \mathbb{R})$ el espacio de las funciones continuas, y sea*

$$X_+ = \{f \in X \mid f(x) \geq 0, \ para\ todo\ x \in [a, b]\}.$$

X_+ es un cono generador ya que, para cualquier $f \in X$ existen funciones $g, h \in X_+$ tales que $f = g - h$, donde

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & si \quad f(t) > 0, \\ \\ 0, & si \quad f(t) < 0. \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} 0, & si \quad f(t) > 0, \\ \\ -f(t), & si \quad f(t) < 0. \end{cases}$$

Observemos que $g, h \in C([a, b], \mathbb{R})$.

Sea $X = L^p(\Omega)$ el espacio de las funciones p-integrables y X_+ es un cono generador dado que para cada $f \in L^p(\mu)$ existen funciones $g, h \in L^p(\mu)$ tal que, $f = g - h$, donde g y h están definidas de la misma forma que para el caso de las funciones continuas.

Sea X un espacio de Riesz, entonces, para cualquier $x \in X$, se define $x^+ = \sup\{x, 0\}$, $x^- = \sup\{-x, 0\}$ y $|x| = \sup\{x, (-x)\}$, que son la parte positiva, la parte negativa y el valor absoluto de x, respectivamente.

La parte positiva, la parte negativa y el valor absoluto tienen propiedades análogas a las consideradas en el caso real, tales como la desigualdad triangular, las cuales son mencionadas a continuación.

Teorema 1.1.16. *(Zaanen, [13])*

(i) x^+ *y* x^- *pertenecen a* X_+; $(-x)^+ = x^-$, *y* $(-x)^- = x^+$. *Más aún* $|-x| = |x|$.

(ii) $x = x^+ - x^-$, $\inf\{x^+, x^-\} = 0$ *y* $|x| = x^+ + x^-$. *Se observa que* $|x| \in X_+$.

(iii) $0 \leq x^+ \leq |x|$ *y* $0 \leq x^- \leq |x|$. *Más aún* $-x^- \leq x \leq x^+$. *Además,* $|x| = 0$ *si, y sólo si* $x = 0$.

(iv) $x \leq y$ *si y sólo si* $x^+ \leq y^+$ *y* $y^- \leq x^-$.

Teorema 1.1.17. *(Zaanen, [13]) (Desigualdad triangular). Para* x *y* y *en* X *tenemos*

$$(x+y)^+ \leq x^+ + y^+, (x+y)^- \leq x^- + y^-,$$
$$||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|.$$

Cabe destacar que la parte positiva, la parte negativa y el valor absoluto definidos son elementos del espacio de Riesz.

1.2. Funciones de variación acotada con valores reales

Recordemos algunos resultados conocidos de las funciones reales de variación acotada definidas sobre intervalos compactos.

Definición 1.2.1. *Una partición* $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ *de un intervalo cerrado* $[a, b]$ *es un subconjunto finito de puntos, de tal manera que*

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Observación 1.2.2. *La partición define* n *subintervalos cerrados no translapados* $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *tales que* $[a, b] = \bigcup_{i=1}^{n} [t_{i-1}, t_i]$.

La familia de todas las particiones del intervalo $[a, b]$ la denotaremos por $\mathcal{P}[a, b]$.

Definición 1.2.3. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función y sea* $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ *una partición de* $[a,b]$. *La* ***variación*** $V_a^b(f,\mathbb{R})$ *de* f *sobre* $[a,b]$ *está definida como:*

$$V_a^b(f,\mathbb{R}) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| : P \in \mathcal{P}[a,b] \right\}.$$

Si $V_a^b(f,\mathbb{R})$ es finita, es decir si existe una constante $M \in \mathbb{R}$ tal que, $V_a^b(f,\mathbb{R}) \leq M$, entonces diremos que f es una función de **variación acotada** sobre $[a,b]$ y $V_a^b(f,\mathbb{R})$ es la variación total de f sobre $[a,b]$. El conjunto de todas las funciones de variación acotada sobre $[a,b]$ es denotado por $BV([a,b])$.

Algunas propiedades de las funciones de variación acotada son las siguientes.

Teorema 1.2.4. *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es de variación acotada, entonces* f *es acotada.*

Es conocido que el recíproco no es cierto.

Teorema 1.2.5. *Sean* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones de variación acotada sobre* $[a,b]$. *Entonces también la suma, diferencia y producto son de variación acotada y, además,*

$$V_a^b(f \pm g,\mathbb{R}) \leq V_a^b(f,\mathbb{R}) + V_a^b(f,\mathbb{R}) \text{ y } V_a^b(fg,\mathbb{R}) \leq \alpha \cdot V_a^b(f,\mathbb{R}) + \beta \cdot V_a^b(g,\mathbb{R}),$$

donde

$$\alpha = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)| \text{ y } \beta = \sup_{t \in [a,b]} |g(t)|.$$

Es decir el espacio $BV([a,b])$ es un espacio vectorial con respecto a las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación de una función por un escalar.

Teorema 1.2.6. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función de variación acotada en* $[a,b]$, *y supongamos que* $c \in (a,b)$. *Entonces* f *es de variación acotada en* $[a,c]$ *y en* $[c,b]$. *En este caso, se tiene*

$$V_a^b(f,\mathbb{R}) = V_a^c(f,\mathbb{R}) + V_c^b(f,\mathbb{R}).$$

Corolario 1.2.7. *Toda función monótona sobre* $[a,b]$ *es una función de variación acotada sobre* $[a,b]$.

Teorema 1.2.8. *Sea* f *una función de variación acotada sobre* $[a,b]$. *Sea* V *definida sobre* $[a,b]$ *como sigue:* $V(x) = V_a^x(f,\mathbb{R})$ *si* $a < x \leq b$, $V(a) = 0$. *Entonces:*

i) V *es una función creciente sobre* $[a, b]$.

ii) $V - f$ *es una función creciente sobre* $[a, b]$.

Teorema 1.2.9. *Sea* f *definida sobre* $[a, b]$. *Entonces* f *es de variación acotada en* $[a, b]$ *si y sólo si,* f *es expresada como la diferencia de dos funciones crecientes.*

El Teorema 1.2.9, como lo mencionamos en la introducción, se conoce como **Teorema de descomposición de Jordan**.

Existen más propiedades de las funciones de variación acotada, en este trabajo únicamente mencionamos algunos, sin embargo, al lector le interesado sugerimos ver [11].

Capítulo 2

La descomposición de Jordan para funciones de variación acotada valuadas en espacios vectoriales

2.1. Conceptos y propiedades

Como se mencionó en la introducción, el concepto de función de variación acotada para funciones $f : [a, b] \to X$, donde X es un espacio normado, admite varias generalizaciones, dentro de las cuales podemos mencionar las siguientes.

Definición 2.1.1. *Sea $f : [a, b] \to X$.*

(a) *f es **débilmente de variación acotada** (wBV) sobre $[a, b]$, si para cada $x^* \in X^*$ la función $x^*(f) : X \to \mathbb{R}$ es de variación acotada (BV) sobre $[a, b]$.*

(b) *f es de **variación acotada** (*BV) sobre $[a, b]$, si*

$$\sup \left\| \sum (f(t_i) - f(t_{i-1})) \right\|_X$$

es finito, donde el supremo es tomado sobre todas las particiones de $[a, b]$.

(c) *f es **fuertemente de variación acotada** (BV) sobre $[a, b]$, si*

$$\sup \left\{ \sum \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|_X \right\}$$

es finito, donde el supremo es tomado sobre todas las particiones de $[a,b]$.

Las relaciones entre función débilmente de variación acotada, variación acotada y fuertemente de variación acotada son las siguientes.

Observación 2.1.2. *Directamente de la definición podemos notar que*

$$BV \Rightarrow {}^*BV \Rightarrow wBV.$$

Si una función $f : [a,b] \to X$ es wBV, BV o $^*BV$, entonces la función es acotada.

La relación entre *BV y wBV se da en el siguiente lema.

Lema 2.1.3. *(Schwabik, [12]). Una función $f : [a,b] \to X$ es de variación acotada sobre $[a,b]$ si y sólo si es débilmente de variación acotada sobre $[a,b]$.*

Denotaremos por $V_a^b(f,X)$ a la variación fuerte de la función f y al espacio de las funciones fuertemente de variación acotada como $BV([a,b],X)$.

Observación 2.1.4. *Si $f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_m(t))$, donde cada $f_j \in BV([a,b])$, entonces $f \in BV([a,b],\mathbb{R}^m)$ y la siguiente desigualdad se satisface*

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{m} V_a^b(f_j,\mathbb{R})^2} \leq V_a^b(f,\mathbb{R}^m) \leq \sum_{j=1}^{m} V_a^b(f_j,\mathbb{R}). \tag{2.1}$$

Veamos por ejemplo, el caso $m = 2$. Sea $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ y $P = \{a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n = b\}$ cualquier partición de $[a,b]$. Por la desigualdad $\sqrt{\alpha_1+\alpha_2} \leq \sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}$, donde $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$; tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f_1(t_i) - f_1(t_{i-1}))^2 + (f_2(t_i) - f_2(t_{i-1}))^2} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |f_1(t_i) - f_1(t_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |f_2(t_i) - f_2(t_{i-1})| \\
&\leq V_a^b(f_1,\mathbb{R}) + V_a^b(f_2,\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Así, $f \in BV([a,b],\mathbb{R}^2)$ y

$$V_a^b(f,\mathbb{R}^2) \leq V_a^b(f_1,\mathbb{R}) + V_a^b(f_2,\mathbb{R}).$$

Por la desigualdad

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{1i}\right)^{2}+\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{2i}\right)^{2}}\leq\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\alpha_{1i}^{2}+\alpha_{2i}^{2}},$$

donde $\alpha_{ji}\geq 0$ *para* $i=1,2,...,n;\ j=1,2;$ *y tomando* $\alpha_{ji}=\left|f_{j}\left(t_{i}\right)-f_{j}\left(t_{i-1}\right)\right|$, *tenemos*

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}\left|f_{1}\left(t_{i}\right)-f_{1}\left(t_{i-1}\right)\right|\right)^{2}+\left(\sum_{i=1}^{n}\left|f_{2}\left(t_{i}\right)-f_{2}\left(t_{i-1}\right)\right|\right)^{2}}\\
\leq\ &\sum_{i=1}^{n}\|f(t_{i})-f(t_{i-1})\|\\
\leq\ &V_{a}^{b}(f,\mathbb{R}^{2}).
\end{aligned}$$

Evaluando el supremo sobre todas las particiones de $[a,b]$, *obtenemos la desigualdad de la izquierda de (2.1). Está desigualdad puede ser estricta. Por ejemplo, sea* $f\left(t\right)=\left(f_{1}\left(t\right),f_{2}\left(t\right)\right)=\left(t^{2},t\right),\ t\in\left[-1,1\right].$ *Tenemos que*

$$V_{-1}^{1}(f_{1},\mathbb{R})=2\int_{-1}^{1}|t|\,dt=2,\quad V_{-1}^{1}(f_{2},\mathbb{R})=2$$

y

$$\sqrt{V_{-1}^{1}(f_{1},\mathbb{R})^{2}+V_{-1}^{1}(f_{2},\mathbb{R})^{2}}=2\sqrt{2}.$$

La afirmación es probada observando que para la partición

$$P_{0}=\left\{-1,0,\frac{1}{2},1\right\}:$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sqrt{\left(f_{1}\left(t_{i}\right)-f_{1}\left(t_{i-1}\right)\right)^{2}+\left(f_{2}\left(t_{i}\right)-f_{2}\left(t_{i-1}\right)\right)^{2}}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{13}}{4}>2\sqrt{2}.$$

Dado que $V_{a}^{b}(f,\mathbb{R}^{m})$ *es un escalar, entonces se podría pensar que sea igual a*

$$\left\|\left(V_{a}^{b}(f_{1},\mathbb{R}),V_{a}^{b}(f_{2},\mathbb{R}),...,V_{a}^{b}(f_{m-1},\mathbb{R}),V_{a}^{b}(f_{m},\mathbb{R})\right)\right\|.$$

El ejemplo para el caso $m=2$ *muestra que este hecho puede no ser cierto.*

En el caso real tenemos que una función monótona es de variación acotada, para el caso de funciones con valores en un espacio de normado ordenado, este resultado no necesariamente es verdadero.

Antes de dar el ejemplo de una función monótona que no es fuertemente de variación acotada, recordemos que $L_\infty[0,1] = \{f : [0,1] \to K \mid f \text{ es medible y } \|f\|_\infty < \infty\}$ el espacio de las funciones esencialmente acotadas es un espacio normado con la norma $\|f\|_\infty = \text{ínf}\{M \mid |f(t)| \leq M \text{ para casi todo } t \in [0,1]\}$. $L_\infty[0,1]$ tiene un orden en el siguiente sentido, si $h_1, h_2 \in L_\infty[0,1]$, entonces $h_1 \leq h_2$ si y sólo si $h_1(x) \leq h_2(x)$ a. e. sobre $[0,1]$.

Ejemplos 2.1.5. *Definamos $F : [0,1] \to L_\infty[0,1]$ como sigue:*

Sea $x \in [0,1)$ tal que, $F(x) = \chi_{[0,x]}$, donde

$$\chi_{[0,x]}(t) = \begin{cases} 1, & si \quad 0 \leq t \leq x, \\ \\ 0, & si \quad x < t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces F es una función creciente pero no es fuertemente de variación acotada sobre $[0,1]$.

Primero notemos que ésta función es creciente, supongamos que $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$, si $t \in [0, x_1]$, entonces $F(x_1)(t) = F(x_2)(t) = 1$, ahora si $t \in (x_1, x_2)$, entonces dado que $\chi_{[0,x_1]} \leq \chi_{[0,x_2]}$, se sigue que $F(x_1)(t) \leq F(x_2)(t)$. En el caso $t \in [x_2, 1]$ es obvio.

Ahora para cualquier colección finita de intervalos disjuntos (t_{k-1}, t_k), $k = 1, 2, \ldots, n$ de $P \in \mathcal{P}[a,b]$, tenemos $\|F(t_k) - F(t_{k-1})\|_{L_\infty[0,1]} = 1$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \|F(t_k) - F(t_{k-1})\|_{L_\infty[0,1]} = n. \tag{2.2}$$

Concluimos que F es una función creciente, de (2.2) se sigue que F no es fuertemente de variación acotada.

Por otro lado, notemos que

$$\|\sum_{k=1}^{n} F(t_k) - F(t_{k-1})\|_{L_\infty[0,1]} \leq \|F(1)\|_{L_\infty[0,1]} = 1.$$

F es una función débilmente de variación acotada pero no fuertemente de variación acotada.

Sin embargo obtenemos los dos resultados siguientes.

Teorema 2.1.6. *Sea (X, X_+) un espacio normado ordenado, donde X_+ es un cono normal. Toda función $f : [a, b] \to X$ monótona es de variación acotada.*

Demostración. Probaremos el caso cuando f es una función creciente, la demostración para funciones decrecientes es similar. Sea $\{[c_i, d_i]\}_{i=1}^n$ una sucesión de intervalos no translapados de $[a, b]$ y $\{[u_i, v_i]\}_{i=1}^m$ los intervalos necesarios para que $\{[c_i, d_i]\}_{i=1}^n \cup \{[u_i, v_i]\}_{i=1}^m$ sea una partición de $[a, b]$. Entonces tenemos que

$$0 \leq \sum_i f(d_i) - f(c_i) \leq \sum_i f(d_i) - f(c_i) + \sum_i f(v_i) - f(u_i),$$

como el cono X_+ de X es normal entonces

$$\begin{aligned} \|\sum_i f(d_i) - f(c_i)\| &\leq M\|\sum_i f(d_i) - f(c_i) + \sum_i f(v_i) - f(u_i)\| \\ &= M\|f(b) - f(a)\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto f es una función de variación acotada. Para el caso de función decreciente se hace de manera similar $\square$

Teorema 2.1.7. *Sea (X, X_+) un espacio normado ordenado, donde X_+ es un cono extendible. Toda función $f : [a, b] \to X$ monótona es fuertemente de variación acotada.*

Demostración. Probaremos el caso cuando f es una función creciente, la demostración para funciones decrecientes es similar. Sea $\{[t_{k-1}, t_k] : k = 1, \ldots, n\}$ una partición de $[a, b]$. Dado que X_+ es un cono extendible, entonces por Teorema 1.1.14 existe $g \in X^*$ y una constante $\alpha > 0$ tal que, $\|f(t_k) - f(t_{k-1})\| \leq \alpha g(f(t_k) - f(t_{k-1}))$, $k = 1, \ldots, n$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| &\leq \alpha \cdot \sum_{i=1}^n g(f(t_i) - f(t_{i-1})) \\ &= \alpha \cdot g(\sum_{i=1}^n (f(t_i) - f(t_{i-1}))) \\ &= \alpha \cdot g(f(b) - f(a)) \leq \alpha \cdot \|g\|\|f(b) - f(a)\|. \end{aligned}$$

$\square$

Los siguientes resultados son análogos al caso $X = \mathbb{R}$.

Teorema 2.1.8. *Sean $f, g : [a, b] \to X$ funciones fuertemente de variación acotada sobre $[a, b]$. Entonces también la suma y diferencia. Además,*

$$V_a^b(f \pm g, X) \leq V_a^b(f, X) + V_a^b(g, X).$$

Es decir el espacio $BV([a, b], X)$ es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación de una función por un escalar.

Con el objetivo de simplificar notación denotamos $\sum(P)$ como la suma $\sum \|\Delta f_k\|$ correspondiente a la partición $P \in \mathcal{P}[a, b]$, donde $\|\Delta f_k\| = \|f(t_k) - f(t_{k-1})\|$.

Teorema 2.1.9. *Sea $f : [a, b] \to X$ una función fuertemente de variación acotada en $[a, b]$, y supongamos que $c \in (a, b)$. Entonces f es fuertemente de variación acotada en $[a, c]$ y en $[c, b]$ y se tiene*

$$V_a^b(f, X) = V_a^c(f, X) + V_c^b(f, X).$$

Demostración. Probaremos en primer lugar que f es fuertemente de variación acotada en $[a, c]$ y en $[c, b]$. Sean P_1 una partición de $[a, c]$ y P_2 una partición de $[c, b]$. Entonces $P = P_1 \bigcup P_2$ es una partición de $[a, b]$. Podemos escribir

$$\sum(P_1) + \sum(P_2) = \sum \|\Delta f_k\| \leq V_a^b(f, X).$$

Esta desigualdad muestra que el conjunto $\sum(P_1)$ y $\sum(P_2)$ está acotada por $V_a^b(f, X)$ lo cual significa que f es fuertemente de variación acotada en $[a, c]$ y en $[c, b]$. Entonces se obtiene la desigualdad

$$V_a^c(f, X) + V_c^b(f, X) \leq V_a^b(f, X).$$

Para obtener la desigualdad en el otro sentido. Sean $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$ y $P_0 = P \cup \{c\}$ la partición obtenida al añadir el punto c.

Si $c \in [t_{k-1}, t_k]$, entonces tenemos

$$\|f(t_k) - f(t_{k-1})\| \leq \|f(t_k) - f(c)\| + \|f(c) - f(t_{k-1})\|,$$

por lo tanto

$$\sum(P) \leq \sum(P_0) = \sum(P_1) + \sum(P_2) \leq V_a^c(f, X) + V_c^b(f, X).$$

Así $V_a^c(f, X) + V_c^b(f, X)$ es una cota superior para el conjunto de todas las sumas $\sum(P)$. Entonces

$$V_a^b(f, X) \leq V_a^c(f, X) + V_c^b(f, X).$$

□

2.2. En espacios de Riesz

Los conceptos de función débilmente de variación acotada, de variación acotada y fuertemente de variación acotada están dados en términos de la norma del espacio. Sin embargo cuando consideramos funciones con valores en un espacios de Riesz, se define el concepto de función de variación acotada con respecto al orden.

Definición 2.2.1. *Sea $(X, \leq)$ un espacio de Riesz. Una función $f : [a, b] \to X$ es de* ***variación acotada respecto al orden****, si existe un $M \in X$ tal que,*

$$V_f^o[a, b] = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq M.$$

Para las funciones de variación acotada respecto al orden se obtienen resultados análogos al caso real, tales como los teoremas 1.2.4, 1.2.5 y 1.2.6.

Teorema 2.2.2. *Si $f : [a, b] \to X$ es monótona en $[a, b]$, entonces f es de variación acotada respecto al orden en $[a, b]$*

Demostración. Probaremos el caso cuando f es una función creciente, la demostración para funciones decrecientes es similar. Sea f una función creciente. Entonces para cada partición de $[a, b]$ tenemos que $f(t_i) - f(t_{i-1}) \in X_+$ y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) - f(t_{i-1}) = f(b) - f(a).$$

□

Teorema 2.2.3. *Si $f : [a, b] \to X$ es de variación acotada respecto al orden en $[a, b]$, entonces f es acotada superiormente en $[a, b]$.*

Demostración. Sean $t \in (a, b)$ y $P = \{a, t, b\}$ la partición de $[a, b]$.

$$|f(t) - f(a)| + |f(b) - f(t)| \leq V_f^o[a, b],$$

entonces

$$2|f(t)| \leq V_f^o[a, b] + |f(a)| + |f(b)|,$$

por lo tanto

$$|f(t)| \leq \frac{V_f^o[a, b] + |f(a)| + |f(b)|}{2}.$$

De manera similar se prueba si $t = a$ o $t = b$. □

Teorema 2.2.4. *Supongamos que $f, g : [a,b] \to X$ son dos funciones de variación acotada respecto al orden en $[a,b]$. Entonces la suma y la diferencia son de variación acotada respecto al orden. Además se tiene*

$$V^o_{f\pm g}[a,b] \leq V^o_f[a,c] + V^o_g[c,b].$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
V^o_{f\pm g}[a,b] &= \sup_{P\in\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} |(f\pm g)(t_i) - (f\pm g)(t_{i-1})| \\
&= \sup_{P\in\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} |(f(t_i) - f(t_{i-1})) \pm (g(t_i) - g(t_{i-1}))| \\
&\leq \sup_{P\in\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} |(f(t_i) - f(t_{i-1}))| \pm \sup_{P\in\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} |(g(t_i) - g(t_{i-1}))| \\
&= V^o_f[a,b] \pm V^o_g[a,b] \\
&\leq V^o_f[a,b] + V^o_g[a,b]
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.5. *Sea $f : [a,b] \to X$ una función de variación acotada respecto al orden en $[a,b]$, y supongamos que $c \in (a,b)$. Entonces f es de variación acotada respecto al orden en $[a,c]$ y en $[c,b]$ y se tiene*

$$V^o_f[a,b] = V^o_f[a,c] + V^o_f[c,b].$$

Demostración. Probaremos en primer lugar que f es de variación acotada respecto al orden en $[a,c]$ y en $[c,b]$. Sea P_1 una partición de $[a,c]$ y sea P_2 una partición de $[c,b]$. Entonces $P = P_1 \bigcup P_2$ es una partición de $[a,b]$. Podemos escribir

$$\sum(P_1) + \sum(P_2) = \sum |\Delta f_k| \leq V^o_f[a,b].$$

Esta desigualdad muestra que cada suma $\sum(P_1)$ y $\sum(P_2)$ es menor $V^o_f[a,b]$ lo cual significa que f es de variación acotada respecto al orden en $[a,c]$ y en $[c,b]$. Entonces se tiene la desigualdad

$$V^o_f[a,c] + V^o_f[c,b] \leq V^o_f[a,b].$$

Para obtener la desigualdad en el otro sentido, sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$ y sea $P_0 = P \cup \{c\}$ la partición obtenida al añadir el punto c.

Si $c \in [t_{k-1}, t_k]$ entonces tenemos

$$|f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq |f(t_k) - f(c)| + |f(c) - f(t_{k-1})|,$$

por lo tanto

$$\sum(P) \leq \sum(P_0) = \sum(P_1) + \sum(P_2) \leq V_f^o[a,c] + V_f[c,b].$$

Así $V_f^o[a,c]+V_f^o[c,b]$ es una cota superior para el conjunto de todas las sumas $\sum(P)$. Entonces

$$V_f^o[a,b] \leq V_f^o[a,c] + V_f^o[c,b].$$

□

Teorema 2.2.6. *Sea f una función de variación acotada respecto al orden en $[a,b]$. Sea V^o definida en $[a,b]$ como sigue: $V^o(t) = V_f^o[a,t]$ si $a < t \leq b$, $V^o(a) = 0$. Entonces:*

i) V^o es una función creciente en $[a,b]$.

ii) $V^o - f$ es una función creciente en $[a,b]$.

Demostración. *i*) Si $a < t_1 < t_2 \leq b$, podemos escribir

$$V_f^o[a,t_2] = V_f^o[a,t_1] + V_f^o[t_1,t_2].$$

Esto implica que $V^o(t_2) - V^o(t_1) = V_f^o[t_1,t_2] \geq 0$. Luego $V^o(t_1) \leq V^o(t_2)$. *ii*) sea $D(t) = V^o(t) - f(t)$ si $t \in [a,b]$. Entonces, si $a \leq t_1 < t_2 \leq b$, tenemos

$$\begin{aligned} D(t_2) - D(t_1) &= V^o(t_2) - f(t_2) - (V^o(t_1) - f(t_1)) \\ &= V^o(t_2) - V^o(t_1) - [f(t_2) - f(t_1)] \\ &= V^o[t_1,t_2] - [f(t_2) - f(t_1)]. \end{aligned}$$

Por definición de $V_f^o[t_1,t_2]$, se sigue que

$$f(t_2) - f(t_1) \leq V_f^o[t_1,t_2].$$

Entonces $D(t_2) - D(t_1) \geq 0$. □

Teorema 2.2.7. *Sea $f : [a,b] \to X$. Entonces f es de variación acotada respecto al orden en $[a,b]$ si y sólo si f se expresa como la diferencia de dos funciones crecientes.*

Demostración. Si f es de variación acotada respecto al orden en $[a,b]$, podemos escribir $f = V^o - D$, en donde V^o es la función del teorema anterior y $D = V^o - f$. Tanto V^o como D son funciones crecientes.

El recíproco se deduce inmediatamente de los Teoremas 2.2.2 y 2.2.4. □

En el siguiente ejemplo se calcula la variación respecto al orden de una función con valores en un espacio de Riesz.

Ejemplos 2.2.8. *Sea* $f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to\mathbb{R}^2$ *dada por* $f(t)=(\cos t,t)$*, donde* $\mathbb{R}^2$ *es considerado un espacio de Riesz con el orden* $(x_1,x_2)\leq(y_1,y_2)$*, siempre que* $x_1\leq y_1$ *y* $x_2\leq y_2$*. Sea* $P\in\mathcal{P}[a,b]$*.*

Si $0\in P$*, entonces*

$$\begin{aligned}
|(\cos t_i-\cos t_{i-1},t_i-t_{i-1})|_o &= \sup\{(\cos t_i-\cos t_{i-1},t_i-t_{i-1}),(0,0)\}\\
&\quad+\sup\{(\cos t_{i-1}-\cos t_i,t_{i-1}-t_i),(0,0)\}\\
&= (g(i,t),t_i-t_{i-1})\\
&= (|\cos t_i-\cos t_{i-1}|,t_i-t_{i-1}),
\end{aligned}$$

donde

$$g(i,t)=\begin{cases}\cos t_i-\cos t_{i-1} & si\quad -\frac{\pi}{2}\leq t\leq 0\\ \\ \cos t_{i-1}-\cos t_i & si\quad 0<t\leq\frac{\pi}{2}\end{cases}.$$

Supongamos que existe $t_{i-1},t_i\in P$ *tal que,* $0\in(t_{i-1},t_i)$*. Entonces*

$$\begin{aligned}
|(\cos t_i-\cos t_{i-1},t_i-t_{i-1})|_o &= \sup\{(\cos t_i-\cos t_{i-1},t_i-t_{i-1}),(0,0)\}\\
&\quad+\sup\{(\cos t_{i-1}-\cos t_i,t_{i-1}-t_i),(0,0)\}\\
&= (h(i,t),t_i-t_{i-1})\\
&= (|\cos t_i-\cos t_{i-1}|,t_i-t_{i-1}),
\end{aligned}$$

donde

$$h(i,t)=\begin{cases}\cos t_i-\cos t_{i-1} & si\quad t_i<|t_{i-1}|\\ \\ \cos t_{i-1}-\cos t_i & si\quad t_i\geq|t_{i-1}|\end{cases}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]}\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|_o &= \sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]}\sum_{i=1}^{n}(|\cos t_i-\cos t_{i-1}|,t_i-t_{i-1})\\
&= \sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]}\left(\sum_{i=1}^{n}|\cos t_i-\cos t_{i-1}|,\pi\right)\\
&= \left(V_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos t,\mathbb{R}),\pi\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f *es de variación acotada con respecto al orden y*

$$V_f^o\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]=\left(V_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos t,\mathbb{R}),\pi\right).$$

2.3. En espacios de Hilbert

En está subsección analizaremos la descomposición de Jordan para funciones fuertemente de variación acotada con valores en un espacio de Hilbert.

Definición 2.3.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert ordenado sobre $\mathbb{R}$ y sea x_0 fijo en $\mathcal{H}$. Diremos que $x, y \in \mathcal{H}$ están relacionados con respecto a x_0, y emplearemos la notación*

$$x \sim_{x_0} y,$$

si $\langle x - y, x_0 \rangle = 0$.

Se observa que la relación anterior es de equivalencia, por lo que, para cada $x_0 \in \mathcal{H}$, podemos dividir $\mathcal{H}$ en clases disjuntas.

Si x_0 es 0, se tiene que si cualesquiera dos elementos $x, y \in \mathcal{H}$ están relacionados con respecto a 0, entonces la única clase de equivalencia es $\mathcal{H}$.

Para cada $x_0 \neq 0$ en $\mathcal{H}$ y $\alpha \in (0, \|x_0\|)$ denotemos

$$\mathcal{H}_{x_0+} = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, x_0 \rangle \geq \alpha \, \|x\|\} . \tag{2.3}$$

Proposición 2.3.2. *$\mathcal{H}_{x_0+}$ es un cono extendible distinto del trivial de $\mathcal{H}$.*

Demostración. Sa $h_0 \in X^*$ definida como

$$h_0(x) = \langle x, x_0 \rangle , \tag{2.4}$$

Ya que $x_0 \neq 0$, y el funcional h_0 no es idénticamente cero. Veamos que $\mathcal{H}_{x_0+}$ es un cono: es cerrado ya que si $x \in \overline{\mathcal{H}}_{x_0+}$, entonces existe $x_0 \in \mathcal{H}_{x_0+}$ tal que si $x_n \to x$ y $\langle x_n, x_0 \rangle \geq \alpha \|x_0\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por la continuidad del producto interior se tiene que $\langle x, x_0 \rangle \geq \alpha \|x\|$. Si x y $y \in \mathcal{H}_{x_0+}$, se tiene

$$h_0(x+y) = h_0(x) + h_0(y) \geq \alpha\|x\| + \alpha\|y\| = \alpha(\|x\| + \|y\|) \geq \alpha\|x+y\|,$$

entonces $x + y \in \mathcal{H}_{x_0+}$. Si x y $-x \in \mathcal{H}_{x_0+}$, entonces

$$\alpha \, \|x\| \leq \langle -x, x_0 \rangle \leq -\alpha \, \|x\| ,$$

por lo tanto $x = 0$. También, si $\lambda \geq 0$ y $x \in \mathcal{H}_{x_0+}$, tenemos que $\langle \lambda x, x_0 \rangle \geq \alpha \, \|\lambda x\|$. Por el Teorema 1.1.14, es claro que $\mathcal{H}_{x_0+}$ es un cono extendible. □

Se dice que $f \sim_{x_0} [f_{x_0 1} - f_{x_0 2}]$ si para cada $t \in [a, b]$ se tiene

$$\langle f(t) - [f_{x_0 1}(t) - f_{x_0 2}(t)] , x_0 \rangle = 0.$$

Teorema 2.3.3. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, para cada $x_0 \neq 0$ en $\mathcal{H}$, consideremos el cono extendible $\mathcal{H}_{x_0+}$. Si $f : [a,b] \to \mathcal{H}$ es una función fuertemente de variación acotada, entonces, existen $f_{x_01}, f_{x_02} : [a,b] \to \mathcal{H}$ funciones crecientes tales que $f \sim_{x_0} [f_{x_01} - f_{x_02}]$.*

Demostración. Tomamos $h_0 \in \mathcal{H}^*$ definido en (2.4). Por el Lema 2.1.3 $h_0 \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada. Por lo tanto, existen $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ crecientes tales que

$$h_0 \circ f = g_1 - g_2. \tag{2.5}$$

Definamos $f_{x_01}(t) = \frac{g_1(t)x_0}{\|x_0\|^2}$ y $f_{x_02}(t) = \frac{g_2(t)x_0}{\|x_0\|^2}$ para cada $t \in [a,b]$. Sean $t_1, t_2 \in [a,b]$ tales que $t_1 \leq t_2$, como g_1 es creciente se tiene $0 \leq g_1(t_2) - g_1(t_1)$, entonces tenemos que

$$f_{x_01}(t_2) - f_{x_01}(t_1) = \frac{[g_1(t_2) - g_1(t_1)]\, x_0}{\|x_0\|^2} \in \mathcal{H}_{x_0+}.$$

Entonces f_{x_01} es una función creciente, de manera similar se demuestra que f_{x_02} es creciente.

Por otro lado, considerando que $h_0 \circ f = g_1 - g_2$:

$$\begin{aligned}
\text{Sea } t \in [a,b] \text{ entonces } (h_0 \circ f)(t) &= \langle f(t), x_0 \rangle \\
&= [g_1(t) - g_2(t)] \frac{1}{\|x_0\|^2} \langle x_0, x_0 \rangle \\
&= \left\langle \left[\frac{g_1(t)}{\|x_0\|^2} - \frac{g_2(t)}{\|x_0\|^2} \right] x_0, x_0 \right\rangle \\
&= \langle f_{x_01}(t) - f_{x_02}(t), x_0 \rangle .
\end{aligned}$$

Entonces, obtenemos

$$f \sim_{x_0} [f_{x_01} - f_{x_02}] .$$

□

Por el Lema de Riesz y tomando $x_0 \in \mathcal{H}$ asociado con el funcional h_0, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.3.4. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $h_0 \in \mathcal{H}^*$, existe un cono extendible $\mathcal{H}_{h_0+}$, en $\mathcal{H}$ tal que si $f : [a,b] \to \mathcal{H}$ es una función fuertemente de variación acotada, entonces $f_{h_01}, f_{h_02} : [a,b] \to \mathcal{H}$ son funciones crecientes tal que, $f \sim_{x_0} [f_{h_01} - f_{h_02}]$.*

Observación 2.3.5. *Ya que* g_1 *y* g_2 *pueden ser* $V_a^t(h_0 \circ f, \mathbb{R})$ *y* $V_a^t(h_0 \circ f, \mathbb{R}) - h_0 \circ f\,(t)$, *respectivamente, entonces tenemos*

$$f_{h_01}\,(t) = V_a^t(h_0 \circ f, \mathbb{R})x_0 \tag{2.6}$$

y

$$f_{h_02}\,(t) = (-h_0 \circ f)\,(t) + V_a^t(h_0 \circ f, \mathbb{R})x_0.$$

Esto abre la posibilidad de definir a (2.6) como la función variación de f *con respecto a* x_0.

El Teorema 2.3.3 es una generalización del Teorema de descomposición de Jordan, ya que:

Observación 2.3.6. *El caso* $\mathcal{H} = \mathbb{R}$. *El cono* $\mathcal{H}_{x_0+}$ *asociado a cada* $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > 0$, *tiene la forma*

$$[0, \infty) = \mathcal{H}_{x_0+} \;\; = \;\; \{x \in \mathbb{R} : xx_0 \geq \alpha\,|x|\}\,.$$

Así $f \sim_{x_0} [f_{x_01} - f_{x_02}]$ *ya que para cada* $t \in [a, b]$ *se tiene*

$$(f(t) - [f_{x_01}(t) - f_{x_02}(t)])\,x_0 = 0, \text{ entonces } f(t) = f_{x_01}(t) - f_{x_02}(t).$$

Ejemplos 2.3.7. *Sea* $[a, b] = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathcal{H} = \mathbb{R}^2$, $\overline{x}_0 = (1, 1)$, *y* $\alpha = 1 \in \big(0, \sqrt{2}\big)$. *Se sigue que el cono asociado a* $\overline{x}_0$ *es*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\overline{x}_0+} &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right\} \\ &= \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0\big\} \\ &= \mathbb{R}^2_+. \end{aligned}$$

Por la observación 2.1.4, la función $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $f(t) = (\cos t, t)$ *es de variación acotada de* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *a* $\mathcal{H}$, *por lo tanto la función*

$$\begin{aligned} (h_0 \circ f)\,(t) &= \langle f\,(t)\,, \overline{x}_0\rangle \\ &= \cos t + t, \end{aligned}$$

es de variación acotada de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *a* $\mathbb{R}$. *Ya que*

$$\begin{aligned} V_{-\frac{\pi}{2}}^t(h \circ f; \mathbb{R}) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^t |1 - \sin u| du \\ &= t + \cos t + \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

entonces $g_1(t) = t + \cos t + \frac{\pi}{2}$ *y* $g_2(t) = \frac{\pi}{2}$*. Por lo tanto*

$$f_1(t) = \frac{1}{2}\left(t + \cos t + \frac{\pi}{2}, t + \cos t + \frac{\pi}{2}\right)$$

y

$$f_2(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

las cuales son funciones crecientes con respecto a $\mathcal{H}_{\bar{x}_0+}$*. Observamos que efectivamente:*

$$\langle f(t) - [f_1(t) - f_2(t)], (1,1)\rangle = \langle(-\frac{t}{2} + \frac{\cos t}{2}, \frac{t}{2} - \frac{\cos t}{2}), (1,1)\rangle = 0,$$

por lo cual

$$(\cos t, t) \sim_{(1,1)} [f_1(t) - f_2(t)].$$

Si tomamos en cuenta el cono $\mathcal{H}_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} : x_1, x_2 \leq 0\}$*, es fácil ver que* f_1 *no es creciente con respecto a este cono.*

Lema 2.3.8. *Sea* $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_{x_0+})$ *un espacio de Hilbert ordenado con un cono* $\mathcal{H}_{x_0+}$ *definido en (2.3), con* $x_0 \neq 0$*, y sea* $h_0(x) = \langle x, x_0\rangle$*. Si* f *es una función creciente, entonces* $h_0 \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es creciente y satisface que* $f \sim_{x_0} (h_0 \circ f)(t)x_0$*.*

Demostración. Ya que f es creciente, por el Teorema 2.1.7, f es fuertemente de variación acotada y por el Teorema 2.3.3 existen f_{x_01} y f_{x_02} crecientes tal que, $f \sim_{x_0} [f_{x_01} - f_{x_02}]$. Ya que podemos elegir

$$f_{x_01}(t) = V_a^t(h_0 \circ f, \mathbb{R})x_0$$

y

$$f_{x_02}(t) = \left[V_a^t(h_0 \circ f, \mathbb{R}) - h_0 \circ f(t)\right] x_0,$$

tenemos

$$f \sim_{x_0} (h_0 \circ f)(t)\, x_0.$$

Si $t_1 < t_2$, entonces:

$$(h_0 \circ f)(t_2) - (h_0 \circ f)(t_1) = \langle f(t_2) - f(t_1), x_0\rangle \geq \alpha \|f(t_2) - f(t_1)\| \geq 0,$$

por lo tanto $h_0 \circ f$ es creciente. $\square$

Proposición 2.3.9. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, sea $\mathcal{H}_{x_0+}$, con $x_0 \neq 0$, el cono extendible definido en (2.3). Existe $f : I \to \mathcal{H}$ fuertemente de variación acotada tal que, la única posibilidad de satisfacer $f \sim_{x_0} (f_1 - f_2)$, donde f_1 y f_2 son crecientes, es que $f_1 \sim_{x_0} f_2$.*

Demostración. Sea $x_1 \in \mathcal{H}$ con $x_1 \neq 0$ tal que $\langle x_1, x_0 \rangle = 0$. Sea $\lambda : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función creciente y $f(t) = \lambda(t)x_1$. Entonces f es una función fuertemente de variación acotada en $\mathcal{H}$. Supongamos que existen f_1, f_2 funciones crecientes tal que $f \sim_{x_0} [f_1 - f_2]$. Por Lema 2.3.8, tenemos

$$f_1(t) \sim_{x_0} (h_0 \circ f_1)(t)x_0 \quad \text{y} \quad f_2(t) \sim_{x_0} (h_0 \circ f_2)(t)x_0, \tag{2.7}$$

la cual es equivalente a

$$\langle f_i(t), x_0 \rangle = (h_0 \circ f_i)(t)\|x_0\|^2, \quad i = 1, 2.$$

Así:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f(t) - (f_1(t) - f_2(t)), x_0 \rangle \\ &= \langle \lambda(t)x_1 - [(h_0 \circ f_1)(t) - (h_0 \circ f_2)(t)]\, x_0, x_0 \rangle \\ &= [(h_0 \circ f_1)(t) - (h_0 \circ f_2)(t)]\, \|x_0\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto: $(h_0 \circ f_1)(t) = (h_0 \circ f_2)(t)$, para todo $t \in [a,b]$. Por (2.7), concluimos que

$$f_1 \sim_{x_0} f_2.$$

□

2.4. En espacios normados

En la sección 2.3 se demuestra que las funciones fuertemente de variación acotada con valores en un espacio de Hilbert se puede descomponer como la diferencia de dos funciones crecientes. Pero ¿qué ocurre en general en cualquier espacio normado?, a continuación damos algunos resultados sobre espacios normados particulares.

Proposición 2.4.1. *Si (X, X_+) es un espacio normado ordenado, donde X_+ es un cono extendible, pero no generador, entonces existe al menos una función fuertemente de variación acotada $f : [a,b] \to X$ la cual no es la diferencia de dos funciones crecientes.*

Demostración. Sea $x_0 \in X$ tal que no pertenece a $X_+ - X_+$. Definamos $f : [a,b] \to X$ como

$$f(x) = \begin{cases} 2x_0, & si \quad x = b, \\ x_0, & si \quad x = a, \\ 0, & si \quad x \in (a,b). \end{cases}$$

Es claro que f es fuertemente de variación acotada. Supongamos que existen $g, h : [a,b] \to X$ funciones crecientes tales que

$$f = g - h.$$

Notemos que

$$x_0 = f(b) - f(a) = (g(b) - g(a)) - (h(b) - h(a)).$$

Esto es una contradicción, ya que el término de la derecha pertenece a $X_+ - X_+$ y por hipótesis x_0 no pertenece. $\square$

El siguiente ejemplo muestra un espacio normado cuyo cono es extendible, pero no generador.

Ejemplos 2.4.2.

Sean $X = \mathbb{R}^2$ y $X_+ = \{(x,0) : x \geq 0\}$. X_+ es un cono extendible en $\mathbb{R}^2$ y no es generador.

En algunos casos podemos obtener la descomposición de Jordan de funciones fuertemente de variación acotada.

Teorema 2.4.3. *Sea $X = \mathcal{C}([c,d],\mathbb{R})$ con la norma uniforme, y $X_+ = \{f \in \mathcal{C}([c,d],\mathbb{R}) : f(s) \geq 0, \quad para\ cada\ s \in [c,d]\}$ un cono. Si $T : [a,b] \to \mathcal{C}([c,d],\mathbb{R})$ es fuertemente de variación acotada, entonces existen dos funciones crecientes $G, H : [a,b] \to \mathcal{C}([c,d],\mathbb{R})$ tales que $T = G - H$.*

Demostración. Sean $T : [a,b] \to \mathcal{C}([c,d],\mathbb{R})$ fuertemente de variación acotada y $f_0 : [c,d] \to \mathbb{R}$ continua tal que $\|f_0\| \geq 1$.

Definamos G y H como

$$G(t) = V_a^t(T,X)f_0 \text{ y } H(t) = G(t) - T(t),$$

por lo que $T = G - H$. Si $a \leq t_1 < t_2 \leq b$, podemos escribir

$$\begin{aligned} G(t_2) &= V_a^{t_2}(T,X)f_0 \\ &= V_a^{t_1}(T,X)f_0 + V_{t_1}^{t_2}(T,X)f_0 \\ &= G(t_1) + V_{t_1}^{t_2}(T,X)f_0. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$G(t_2) - G(t_1) = V_{t_1}^{t_2}(T, X) f_0 \in X_+.$$

Por lo tanto G es creciente.

Resta probar que H es creciente. Sean $a \leq t_1 < t_2 \leq b$.

$$H(t_2) - H(t_1) = (G(t_2) - G(t_1)) - (T(t_2) - T(t_1)).$$

Sea $s \in [c, d]$. Entonces

$$\begin{aligned}
(T(t_2) - T(t_1))(s) &\leq ||(T(t_2) - T(t_1))||_\infty \\
&\leq V_{t_1}^{t_2}(T, X) \\
&\leq (V_{t_1}^{t_2}(T, X) f_0)(s).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$H(t_2) - H(t_1) \in X_+.$$

$\square$

Teorema 2.4.4. *Sea (X, X_+) un espacio normado ordenado, donde X_+ es extendible y sea $X_+^* = \{s \in X^* \mid s(x) \geq 0,\ \text{para todo } x \in X_+\}$. Si $f : [a, b] \to X^*$ es fuertemente de variación acotada, entonces existen $g, h : [a, b] \to X^*$ crecientes tales que $f = g - h$.*

Demostración. Por hipótesis existe $x_0^* \in X^*$ y $c > 0$ tal que, para cada $x \in X_+$,

$$||x|| \leq c x_0^*(x).$$

Definamos $g, h : [a, b] \to X^*$ como

$$g(t) = V_a^t(f, X^*) c x_0^* \text{ y } h(t) = g(t) - f(t),$$

por lo que $f = g - h$. Si $a \leq t_1 < t_2 \leq b$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
g(t_2) = V_a^{t_2}(f, X^*) c x_0^* &= V_a^{t_1}(f, X^*) c x_0^* + V_{t_1}^{t_2}(f, X^*) c x_0^* \\
&= g(t_1) + V_{t_1}^{t_2}(f, X^*) c x_0^*.
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$g(t_2) - g(t_1) = V_{t_1}^{t_2}(f, X^*) c x_0^*. \tag{2.8}$$

Como

$$V_{t_1}^{t_2}(f, X^*) c x_0^*(x) \geq 0,$$

para todo $x \in X_+$, entonces, por (2.8) se tiene que $g(t_2) - g(t_1) \in X_+^*$, es decir g es creciente.

Resta probar que h es creciente. Sean $a \leq t_1 < t_2 \leq b$. Entonces

$$h(t_2) - h(t_1) = V_{t_1}^{t_2}(f, X^*)x_0^* - (f(t_2) - f(t_1)).$$

Sea $x \in X_+$, entonces

$$(f(t_2) - f(t_1))(x) \leq ||f(t_2) - f(t_1)||_{X^*}||x|| \leq ||f(t_2) - f(t_1)||_{X^*}cx_0^*(x).$$

Así

$$(f(t_2) - f(t_1))(x) \leq (V_{t_1}^{t_2}(f, X^*)cx_0^*)(x).$$

Por lo tanto

$$h(t_2) - h(t_1) \in X_+^*.$$

Así $f = g - h$. $\square$

Conclusiones

Los resultados principales de la tesis son los siguientes:

- Toda función fuertemente de variación acotada con valores en un espacio de Hilbert se representa como la diferencia de dos funciones crecientes bajo una relación de equivalencia (Teorema 2.3.3).
- Se demuestra que dado un espacio normado donde X_+ no es un cono generador, la descomposición de Jordan para funciones fuertemente de variación acotada no se satisface (Proposición 2.4.1).
- La descomposición de Jordan de funciones fuertemente de variación acotada con valores en el espacio de las funciones continuas (Teorema 2.4.3).
- La descomposición de Jordan de funciones fuertemente de variación acotada con valores en el espacio dual (Teorema 2.4.4).

Además, en la sección 2.2 se define el concepto de variación acotada respecto al orden para funciones con valores en un espacio de Riesz y se demuestra que cualquier función de variación acotada respecto al orden se escribe como la diferencia de dos funciones crecientes (Teorema 2.2.7).

Teniendo como base los resultados de este trabajo de tesis, algunos trabajos futuros son:

- Estudio entre las teorías modernas de integración y los resultados de la tesis.
- Extender algunos teoremas clásicos del análisis funcional con respecto a la descomposición de Jordan para funciones valuadas en espacios normados, entre estos estudiar los teoremas de Helly.

Bibliografía

[1] C. R. Adams and J. A. Clarkson, On definitions of bounded variation for functions of two variables, *Trans Amer Math Soc*, 35 (1933), 824-854.

[2] C. R. Adams and J. A. Clarkson, Properties of functions $f(x, y)$ of bounded variation, *Trans Amer Math Soc*, 36 (1934), 711-730.

[3] S. Bianchini and D. Tonon, A decomposition theorem for BV functions, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 10 (2011), 1549-1566.

[4] V. V. Chistyakov, On mappings of bounded variation, *J Dyn Control Syst*, 2 (1997), 261-289.

[5] V. V. Chistyakov, On the theory of multivalued mappings of bounded variation of one real variable, *Sb Math*, 189 (1998), 153-176.

[6] V. V. Chistyakov, On mappings of bounded variation with values in a metric space, *Uspekhi Mat Nauk*, 54 (1999), 189-190.

[7] V. V. Chistyakov, Metric-valued mappings of bounded variation, *J Math Sci (N. Y.)*, 111 (2002), 3387-3429.

[8] D. Guo, Y. J. Cho and J. Zhu, *Partial Ordering Methods in Nonlinear Problems*, New York, NY, USA: Nova Science Publishers, 2004.

[9] C. Jordan, Sur la série de Fourier, *C R Acad Sci Paris*, 92 (1881), 228-230.

[10] F. J. Mendoza, J. A Escamilla and D. Rodríguez, The Jordan decomposition of bounded variation functions valued in vector spaces, *AIMS Mathematics*, 4 (2017), 635-646.

[11] S. Ponnusamy, *Fundations of Mathematical Analysis*, Birkhäuser Basel, New York, 2012.

[12] S. Schwabik and Y. Guoju, *Topics in Banach Space Integration*, Real Analysis, vol. 10, World Scientific, Singapore, 2005.

[13] A. C. Zaanen, *Introduction to operator theory in Riesz spaces*, Springer, New York, 1997.