

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS APLICADAS

ALGUNAS FUNCIONES ESPECIALES ENTRE
ESPACIOS MÉTRICOS COMPACTOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA
EMANUEL RAMÍREZ MÁRQUEZ

DIRECTORA DE TESIS
Dra. María de Jesús López Toriz

PUEBLA, PUE.

FECHA

*Dedicado a
mi familia*

Agradecimientos

¡Muchas gracias a todos!

Índice general

Introducción	V
Capítulo 1. Preliminares	1
1. Componentes y quasicomponentes conexas	1
2. Propiedades de espacios topológicos	3
3. Límites de conjuntos	10
Capítulo 2. Algunas funciones especiales entre espacios métricos compactos	13
1. Algunas clases de funciones	13
2. Ejemplos de funciones	19
Capítulo 3. Otras funciones especiales entre espacios métricos compactos	31
1. Funciones casi interiores	31
2. Funciones OM y MO	35
3. Ejemplos de funciones	36
Capítulo 4. Algunas clases de funciones generadas	39
1. Composición de clases de funciones	39
2. Algunas clases de funciones hereditarias	40
3. Ejemplos de funciones	41
Capítulo 5. Algunas clases de funciones locales	45
1. Ejemplos de funciones	51
Capítulo 6. Otras formas de generar clases de funciones	57
1. Ejemplos de funciones	61
Capítulo 7. Algunas propiedades de la composición de funciones y factor	65
1. Propiedad de la composición de funciones	65
2. Ejemplos de funciones que no satisfacen la propiedad de la composición	68
3. Propiedad de la composición factor	75
Bibliografía	81

Introducción

Como bien dice el profesor Sam B. Nadler, Jr. *uno no puede estudiar continuos sin considerar tipos especiales de funciones* [12, p. 277]. El estudio de ciertas clases de funciones especiales entre continuos es una de las herramientas para atender parte de la teoría de los continuos. Recordemos que un *continuo* es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Nuestro tema de tesis pertenece a esta herramienta, de hecho, nos dimos a la tarea de estudiar algunas clases de funciones continuas y suprayectivas entre espacios métricos compactos, en particular, entre continuos; así como analizar la relación que existe entre ellas. Por otro lado, también analizamos algunas propiedades de (i) la composición de clases de funciones, (ii) las funciones hereditarias, (iii) las funciones locales, (iv) la propiedad de la composición de funciones y (v) la propiedad de la composición factor. Cabe mencionar que nuestra tesis está inspirada en algunas partes de la tesis doctoral de T. Maćkowiak, *Funciones continuas entre continuos* [9]. Note la importancia del estudio de las funciones especiales en el libro de Teoría de los continuos de Nadler el Capítulo XIII está dedicado a *Tipos especiales de funciones*; el Capítulo 5 del libro de *Topología y sistemas dinámicos III*, atiende también este tema de funciones entre continuos [2]. Por otro lado, la tesis de Franco Barragán [1] contiene un buen recuento de propiedades que nos dan información acerca de los continuos usando funciones especiales entre ellos; también en este tenor está el Capítulo 8, *El intervalo cerrado, la circunferencia y sus funciones continuas* [3].

Específicamente, en esta tesis estudiamos las relaciones que existen entre las clases de funciones: *abiertas* $\mathcal{O}$, *atómicas* $\mathcal{A}$, *monótonas* $\mathcal{M}$, *confluentes* $\mathcal{C}$, *semiconfluentes* $\mathcal{SC}$, *débilmente confluentes* $\mathcal{DC}$, *juntadoras* $\mathcal{J}$, *atriódicas* $\mathcal{At}$, *casi interiores* $\mathcal{CI}$, *ligeras*, $\mathcal{OM}$, $\mathcal{MO}$, *quasimonótonas* $\mathcal{QM}$, *débilmente monótonas* $\mathcal{DM}$, *pseudoconfluentes* $\mathcal{PC}$, *homeomorfismos* $\mathcal{H}$, *homeomorfismos locales*, *localmente confluentes* y *localmente débilmente confluentes*. Así como una gran variedad de ejemplos de funciones, con los cuales probamos que se tiene alguna contención propia o que no hay relación alguna entre ciertas clases de funciones. Casi todo el estudio que presentamos acerca de las funciones está hecho entre espacios métricos compactos y, algunos casos, entre continuos.

Nuestro trabajo está dividido en siete capítulos, en el primero de éstos presentamos los conceptos y resultados básicos de la topología general y la teoría de los continuos.

En el Capítulo 2, analizamos la relación que existe entre algunas clases de funciones, por ejemplo, mostramos las contenciones siguientes: $\mathcal{A} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{SC} \subset \mathcal{J}$; por otro lado, $\mathcal{O} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{DC} \subset \mathcal{At}$ y $\mathcal{SC} \subset \mathcal{DC}$. Concluimos el capítulo con una sección de ejemplos de funciones mostrando que cada una de las contenciones, citadas previamente, son propias.

También el Capítulo 3 está dedicado al análisis de las relaciones que existe entre algunas clases de funciones. Aquí demostramos que $\mathcal{O} \subset \mathcal{CI} = OM \subset \mathcal{C}$, por otro lado, $\mathcal{M} \subset MO \subset OM$ y $\mathcal{O} \subset MO$. Al final del capítulo damos la sección de ejemplos de funciones donde mostramos que algunas de las contenciones son propias.

Iniciamos el Capítulo 4 mostrando algunas propiedades de la *composición de clases de funciones*, las cuales nos serán de utilidad para generar otras clases de funciones. Dada una clase de funciones $\mathbf{A}$ decimos que una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos, $f : X \rightarrow Y$, es *hereditariamente A* si para cualquier subcontinuo K de X se tiene que la función restricción $f|_K$ pertenece a la clase $\mathbf{A}$; denotamos por $her(\mathbf{A})$ a la clase de las funciones hereditariamente $\mathbf{A}$. Por ejemplo, demostramos que si $f \in her(\mathbf{A})$ entonces $f \in \mathbf{A}$. Por otro lado, si $\mathbf{B}$ es una clase de funciones y $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, entonces $her(\mathbf{A}) \subset her(\mathbf{B})$. De este último hecho y los resultados pertinentes probamos que $\mathcal{M} \subset her(\mathcal{C}) \subset her(\mathcal{DC}) \subset her(\mathcal{At})$ y $\mathcal{A} \subset her(\mathcal{M})$. Concluimos el capítulo con la sección de ejemplos de funciones mostrando que alguna de las contenciones, citadas previamente, son propias.

En el Capítulo 5, dada una clase de funciones $\mathbf{A}$, atendemos el concepto de que una función pertenece a la *clase local de A*, esta clase de funciones la denotamos por $Loc(\mathbf{A})$; demostramos que $\mathbf{A} \subset Loc(\mathbf{A})$. Por otro lado, si $\mathbf{B}$ es una clase de funciones y $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, entonces $Loc(\mathbf{A}) \subset Loc(\mathbf{B})$. También atendemos los conceptos de que una función es un *homeomorfismo local*, es *localmente confluyente* y *localmente débilmente confluyente*. Respecto a estos conceptos probamos que: (i) una función f es localmente confluyente si y sólo si $f \in Loc(\mathcal{C})$; (ii) una función f es localmente débilmente confluyente si y sólo si $f \in Loc(\mathcal{DC})$; (iii) $Loc(\mathcal{H}) \subset \mathcal{O} = Loc(\mathcal{O})$; (iv) $MO \subset Loc(MO) \subset OM = Loc(OM)$; (v) $Loc(\mathcal{M}) \subset MO$ y (vi) $Loc(\mathcal{C}) \subset Loc(\mathcal{SC}) \subset Loc(\mathcal{DC})$. También, Al final del capítulo damos la sección de ejemplos de funciones donde mostramos que algunas de las contenciones, citadas previamente, son propias.

En el Capítulo 6, usando el concepto de continuo irreducible, demostramos las siguientes contenciones de clases de funciones: (i) $her(\mathcal{C}) \subset \mathcal{QM} \subset \mathcal{DM}$; (ii) $\mathcal{DC} \subset \mathcal{PC}$; (iii) $\mathcal{C} \subset \mathcal{DM}$ y (iv) $Loc(\mathcal{M}) \subset \mathcal{QM}$. Similarmente, concluimos el capítulo con la sección de ejemplos de funciones mostrando que alguna de las contenciones, citadas previamente, son propias.

Respecto al último capítulo, en la Sección 7.1 tenemos que dada una clase de funciones $\mathbf{A}$, decimos que $\mathbf{A}$ tiene la *propiedad de la composición* si para cualesquiera $f, g \in \mathbf{A}$ se cumple que $g \circ f \in \mathbf{A}$. Probamos que las siguientes clases de funciones tienen la propiedad de la composición: $\mathcal{H}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{DC}$, $\mathcal{PC}$, OM , QM y los homeomorfismos locales. Por otro lado, también probamos que si la clase $\mathbf{A}$ tiene la propiedad de la composición, entonces la clase hereditariamente $\mathbf{A}$, $her(\mathbf{A})$, tiene la propiedad de la composición. Como consecuencia de estos resultados obtenemos que las clases: $her(\mathcal{H})$, $her(\mathcal{A})$, $her(\mathcal{O})$, $her(\mathcal{M})$, $her(\mathcal{C})$, $her(\mathcal{DC})$, $her(\mathcal{PC})$, $her(OM)$, $her(QM)$ y la clase hereditariamente de los homeomorfismos locales, tienen la propiedad de la composición. En la Sección 7.2 damos los ejemplos de que algunas clases no tienen la propiedad de la composición. Concluimos nuestra tesis, analizando el concepto de la propiedad de la composición factor, es decir, dada una clase de funciones $\mathbf{A}$, decimos que $\mathbf{A}$ tiene la *propiedad de la composición factor* si para cada función $f \in \mathbf{A}$ que se pueda factorizar en dos funciones $f = g \circ h$, se

cumple que $g \in \mathbf{A}$. En esta parte, demostramos que las clases de funciones $\mathcal{H}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{DC}$, $\mathcal{PC}$, $Loc(\mathcal{DC})$, $Loc(\mathcal{C})$, $\mathcal{QM}$, $\mathcal{DM}$, $\mathcal{J}$ y OM tienen la propiedad de la composición factor.

Preliminares

En este capítulo presentamos los conceptos y resultados básicos de topología general y la teoría de continuos, los cuales utilizaremos en el desarrollo de la tesis. Por ejemplo, demostramos el Teorema de reducción de Brouwer, el Teorema del cable cortado y el Teorema de golpes en la frontera.

Si X es un espacio topológico y $A \subset X$, entonces $\text{int}_X(A)$, $\text{Cl}_X(A)$ y $\text{Fr}_X(A)$ denotan el interior, la cerradura y la frontera de A en el espacio X , respectivamente; cuando no haya confusión omitimos la referencia al espacio X . El diámetro del conjunto A lo denotamos por $\text{diám}(A)$ y la cardinalidad por $|A|$. El complemento de A en X se denota por $X \setminus A$. Una vecindad de un punto $x \in X$ es un subconjunto $\mathcal{V}$ de X tal que $x \in \text{int}(\mathcal{V})$ y una vecindad cerrada de x es un subconjunto $\mathcal{V}$ de X cerrado tal que $x \in \text{int}(\mathcal{V})$.

Sean X un espacio métrico, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, denotamos por $B_\varepsilon(x)$ a la bola en X con centro en el punto x y de radio ε ; la bola cerrada con centro en x y radio ε la denotamos por $\overline{B_\varepsilon(x)}$.

Si $f : X \rightarrow Y$ es una función entre espacios topológicos y $A \subset X$, $f|_A$ denota la restricción de f al subconjunto A .

Como es usual, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^2$ denotan el conjunto de los números reales, el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números reales positivos y el espacio euclidiano de dimensión 2, respectivamente.

Los espacios considerados en esta tesis serán los espacios métricos compactos y todas las funciones supondremos que son continuas y suprayectivas.

Para nosotros un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un **continuo de Hausdorff** es un espacio topológico Hausdorff, compacto, conexo y no vacío. Un **subcontinuo** de un espacio es un subespacio el cual es un continuo. Un continuo es **no degenerado** si contiene más de un punto.

1. Componentes y quasicomponentes conexas

PROPOSICIÓN 1.1. *Sea X un espacio topológico, si C es un subconjunto conexo de X y A es un conjunto abierto y cerrado de X tal que $A \cap C \neq \emptyset$, entonces $C \subset A$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $C \not\subset A$, de este modo existe un punto $y \in C$ tal que y no está en A . Por lo que $y \in X \setminus A$ y así $(X \setminus A) \cap C \neq \emptyset$. Como A es abierto, se tiene que $X \setminus A$ es cerrado, así se tienen dos conjuntos cerrados en C , $A \cap C$ y $(X \setminus A) \cap C$, que son ajenos, no vacíos y su unión es C , lo cual contradice la conexidad de C . Por lo tanto $C \subset A$. $\square$

DEFINICIÓN 1.2. Sean X un espacio topológico y un punto $p \in X$, definimos la **componente conexa** de p en X , la cual denotamos por $C_X(p)$, como el conjunto conexo más grande que contiene al punto p , es decir:

$$C_X(p) = \bigcup \{A \subset X \mid p \in A \text{ y } A \text{ es conexo en } X\}.$$

DEFINICIÓN 1.3. Sean X un espacio topológico y un punto $p \in X$, definimos la **quasicomponente conexa** de p en X , la cual denotamos por $Q_X(p)$, como:

$$Q_X(p) = \bigcap \{A \subset X \mid p \in A, A \text{ es abierto y cerrado en } X\}.$$

Debido a la forma en que está definida la componente conexa, $C_X(p)$, siendo este conjunto la unión de conjuntos conexos que tienen intersección no vacía, pues p es un punto de esta intersección, por lo que la unión, $C_X(p)$, es conexo, además $Cl_X(C_X(p))$ es un conjunto conexo que contiene al punto p , por lo que está contenido en $C_X(p)$. Así $C_X(p) \subset Cl_X(C_X(p)) \subset C_X(p)$, por lo tanto, $C_X(p) = Cl_X(C_X(p))$, es decir $C_X(p)$ es cerrado.

OBSERVACIÓN 1.4. Sean X un espacio topológico y un punto $p \in X$. Se tiene que $C_X(p)$ es un conjunto conexo que contiene al punto p y es un conjunto cerrado en X .

Por la definición de la quasicomponente, $Q_X(p)$, dado que es la intersección de conjuntos cerrados, se tiene que $Q_X(p)$ es un conjunto cerrado y, cada uno de estos conjuntos contiene al punto p , así $p \in Q_X(p)$, de modo que $Q_X(p)$ es no vacío.

OBSERVACIÓN 1.5. Sean X un espacio topológico y un punto $p \in X$. Se tiene que $Q_X(p)$ es un conjunto cerrado en X que contiene a p .

PROPOSICIÓN 1.6. Sea X un espacio topológico. Para cada $p \in X$ se tiene que,

$$C_X(p) \subset Q_X(p).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea A un subconjunto abierto y cerrado en X tal que $p \in A$.

Ahora como $C_X(p)$ es un conjunto conexo, y además $p \in C_X(p) \cap A$. Por la Proposición 1.1, obtenemos que $C_X(p) \subset A$. Note que esto ocurre para todo conjunto abierto y cerrado que contenga al punto p , de modo que $C_X(p) \subset \bigcap \{A \subset X \mid p \in A, A \text{ es abierto y cerrado en } X\} = Q_X(p)$. Así $C_X(p) \subset Q_X(p)$. $\square$

EJEMPLO 1.7. No siempre ocurre que $Q_X(p) \subset C_X(p)$. Para esto, definamos al espacio X como

$$\{p, q\} \bigcup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n)$$

donde $p = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$, $q = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ y $L_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos los puntos $p_n = (\frac{1}{n}, 1)$, $q_n = (\frac{1}{n}, 0)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Vamos a probar que para el punto $p \in X$ se tiene

$$C_x(p) \subsetneq Q_X(p).$$

Primero probaremos que $C_X(p) = \{p\}$.

Para esto sea $y \in X$, tal que $y = q$ o $y \in L_n$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Si $y \in L_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el conjunto $A = [(-\infty, \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}{2}) \times \mathbb{R}] \cap X$, el cual es un conjunto abierto y cerrado en X que intersecta a $C_X(p)$, se sigue de la Proposición 1.1, que $C_X(p) \subset A$. Así, y no está en $C_X(p)$. De modo que si $C_X(p)$ tiene otro punto diferente de p , éste no puede ser elemento de L_n , para $n \in \mathbb{N}$. Por lo que tiene que ser q . Note que el conjunto $\{p, q\}$ es desconexo, ya que si tomamos las bolas abiertas, B_1 y B_2 , con centro en p y q y radio $\frac{1}{3}$, respectivamente. Se tiene

que $B_1 \cap \{p, q\}$ y $B_2 \cap \{p, q\}$ son dos abiertos ajenos, no vacíos, y su unión es $\{p, q\}$, por lo que B_1 y B_2 forman una disconexión del conjunto. Así, q no puede estar en $C_X(p)$ y, por lo tanto, $C_X(p) = \{p\}$.

Ahora veremos que $\{p, q\} \subset Q_X(p)$. Para esto tomemos un conjunto abierto y cerrado, A , que contiene al punto p . Note que la sucesión $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al punto p y A es un abierto que lo contiene, por lo que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in A$, para cada $n \geq N$. Así $A \cap L_n \neq \emptyset$ para $n \geq N$. Se sigue de la Proposición 1.1, al ser A un conjunto abierto y cerrado, que $L_n \subset A$ para $n \geq N$. Como $q_n \in L_n \subset A$ para cada $n \geq N$. Además, la sucesión $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al punto q ; por otro lado, dado que A es cerrado se tiene que $q \in A$. Note que esto ocurre para todo conjunto, A , abierto y cerrado por lo que, $\{p, q\} = Q_X(p)$ como se deseaba. Por lo tanto, $C_X(p) \subsetneq Q_X(p)$.

LEMA 1.8. Sean X un espacio topológico, compacto y $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de conjuntos cerrados en X . Si $\mathcal{U}$ es un conjunto abierto en X con $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \subset \mathcal{U}$, entonces existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Lambda$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^n A_{\alpha_i} \subset \mathcal{U}.$$

DEMOSTRACIÓN. Observemos primero que si $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \subset \mathcal{U}$, entonces $X \setminus \mathcal{U} \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (X \setminus A_\alpha)$. De donde $\{X \setminus A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una cubierta abierta del compacto $X \setminus \mathcal{U}$. Demodo que es posible hallar $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Lambda$ tales que $X \setminus \mathcal{U} \subset \bigcup_{i=1}^n (X \setminus A_{\alpha_i})$. De donde $\bigcap_{i=1}^n A_{\alpha_i} \subset \mathcal{U}$. $\square$

TEOREMA 1.9. Si X es un espacio Hausdorff compacto, entonces para cada $p \in X$, se tiene que $C_X(p) = Q_X(p)$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un punto $p \in X$. Por la Proposición 1.6 se tiene que $C_X(p) \subset Q_X(p)$. Resta ver que $Q_X(p) \subset C_X(p)$. Para esto, sean K y H conjuntos ajenos y cerrados en $Q_X(p)$, tales que $Q_X(p) = K \cup H$. Probaremos que K o H es vacío. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $p \in H$. Como K y H son cerrados en $Q_X(p)$, el cual es cerrado en X se tiene que K y H son cerrados en X . Como X es Hausdorff compacto, [11, Teorema 2.4, p.198] tenemos que X es un espacio normal, de modo que existen conjuntos abiertos y ajenos en X , $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$, tales que $H \subset \mathcal{U}$ y $K \subset \mathcal{V}$. Así $Q_X(p) = K \cup H \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Por el Lema 1.1, existen $A_1, \dots, A_n$, conjuntos abiertos y cerrados en X , cada uno de ellos contiene al punto p , de manera que

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}.$$

Ahora, llamemos $\mathcal{W} = (\bigcap_{i=1}^n A_i) \cap \mathcal{U}$. Se tiene que $\mathcal{W}$ es un abierto en X . Como $\bigcap_{i=1}^n A_i \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ y los conjuntos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son ajenos. Se tiene que $\mathcal{W} = (\bigcap_{i=1}^n A_i) \cap (X \setminus \mathcal{V})$. Note que $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es un conjunto cerrado en X y $X \setminus \mathcal{V}$ es un cerrado, por lo que $\mathcal{W}$ es cerrado y contiene al punto p . En consecuencia $K \subset Q_X(p) \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{U}$. Así $K \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$, por lo que $K = \emptyset$. Se sigue que $Q_X(p)$ es un conjunto conexo en X que contiene al punto p , de modo que $Q_X(p) \subset C_X(p)$. $\square$

2. Propiedades de espacios topológicos

Recordamos en esta parte algunas propiedades de los espacios topológicos que utilizaremos a lo largo de la tesis. Muchos de los resultados que exponemos fueron tomados de los libros de Kuratowski [4] y [5]

TEOREMA 1.10. *(de reducción de Brouwer) Si X es un espacio segundo numerable y $\mathcal{A}$ es una familia no vacía de subconjuntos cerrados de X , con la propiedad de que para cada sucesión creciente, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$, de elementos de $\mathcal{A}$ existe un elemento, A , de $\mathcal{A}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subseteq A$. Entonces $\mathcal{A}$ tiene un elemento maximal. Si $\mathcal{A}$ es una familia no vacía de subconjuntos cerrados de X , con la propiedad de que para cada sucesión decreciente, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$, de elementos de $\mathcal{A}$ existe un elemento, A , de $\mathcal{A}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \supseteq A$. Entonces $\mathcal{A}$ tiene un elemento minimal.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un elemento $A_0 \in \mathcal{A}$ y una base numerable para la topología de X , $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$. Consideremos la subcolección $\mathcal{A}_1$ de la familia $\mathcal{A}$ definida como sigue:

$$\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{A} : A_0 \subsetneq A \text{ y } A \cap B_1 \neq \emptyset\}.$$

Si $\mathcal{A}_1$ es no vacía, entonces fijamos un elemento $A_1 \in \mathcal{A}_1$. Si la colección $\mathcal{A}_1$ es vacía, entonces definimos $A_1 = A_0$.

Análogamente tomemos la subcolección $\mathcal{A}_2$ de la familia $\mathcal{A}$ definida como sigue:

$$\mathcal{A}_2 = \{A \in \mathcal{A} : A_1 \subsetneq A \text{ y } A \cap B_2 \neq \emptyset\}.$$

Si $\mathcal{A}_2$ es no vacía, entonces fijamos un elemento $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Si la colección $\mathcal{A}_2$ es vacía, entonces definimos $A_2 = A_1$. Ahora, supongamos que se han determinado n elementos de $\mathcal{A}$, digamos $A_1, A_2, \dots, A_n$, tales que $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n$ y, si A_{i-1} está contenido propiamente en A_i , entonces $A_i \cap B_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, consideremos la subcolección $\mathcal{A}_{n+1}$ de la familia $\mathcal{A}$ definida por:

$$\mathcal{A}_{n+1} = \{A \in \mathcal{A} : A_n \subsetneq A \text{ y } A \cap B_{n+1} \neq \emptyset\}.$$

Si $\mathcal{A}_{n+1}$ es no vacía, entonces elijamos un elemento $A_{n+1} \in \mathcal{A}_{n+1}$. Si la colección $\mathcal{A}_{n+1}$ es vacía, entonces definimos $A_{n+1} = A_n$. De este modo, inductivamente, se ha determinado una sucesión creciente de elementos en $\mathcal{A}$,

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots,$$

con la propiedad adicional de que, para cada $n \in \mathbb{N}$, si A_{n-1} está contenido propiamente en A_n , entonces

$$A_n \cap B_n \neq \emptyset.$$

Por hipótesis, existe un elemento A de $\mathcal{A}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A$.

Mostraremos que A es un elemento maximal en $\mathcal{A}$. Para esto, supongamos, lo contrario, es decir, supongamos que existe un elemento A' en $\mathcal{A}$ que contiene propiamente al conjunto A y fijemos un punto $x \in A' \setminus A$. Se tiene que $X \setminus A$ es un conjunto abierto en X que contiene al punto x . Luego, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_m \subset X \setminus A$.

Por otro lado, como $A_m \subset A$ y $A \cap B_m = \emptyset$, se tiene que $A_m \cap B_m = \emptyset$. Ahora, puesto que $A_{m-1} \subset A$ y A está contenido propiamente en A' , se tiene que A_{m-1} está contenido propiamente en A' . Además, como $x \in A' \cap B_m$, se sigue que $A' \cap B_m \neq \emptyset$. Luego, A' es un elemento de la colección $\mathcal{A}_m$. Es decir, la colección $\mathcal{A}_m$, que usamos para determinar al elemento A_m de la sucesión construida, no es vacía. Luego, el elemento A_m está determinado de tal forma que $A_m \cap B_m \neq \emptyset$. Lo cual es una contradicción de modo que A es un elemento maximal en $\mathcal{A}$.

Análogamente se puede probar que $\mathcal{A}$ tiene un elemento minimal. $\square$

TEOREMA 1.11. *(del cable cortado) Sea X un espacio Hausdorff compacto. Si K es una componente conexa de X y F es un conjunto cerrado en X tal que $F \cap K = \emptyset$, entonces existe un conjunto abierto y cerrado en X , L , tal que $K \subset L$ y $L \cap F = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean K una componente conexa de X y F un conjunto cerrado de X tal que $F \cap K = \emptyset$. Como K es una componente conexa de X , existe un punto p de X tal que $K = C_X(p)$. Por el Teorema 1.9 tenemos que $K = Q_X(p)$. Note que $K \subset X \setminus F$ y $X \setminus F$ es abierto en X . Luego por el Lema 1.8, existen conjuntos abiertos y cerrados en X , $A_1, \dots, A_n$, tales que $p \in A_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$ y $\bigcap_{i=1}^n A_i \subset X \setminus F$. De esta forma:

$$(\bigcap_{i=1}^n A_i) \cap F = \emptyset \text{ y } K \subset \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

Así, basta definir a L como $\bigcap_{i=1}^n A_i$, para tener la conclusión del teorema. $\square$

TEOREMA 1.12. *(de golpes en la frontera) Sea X un continuo de Hausdorff y $\mathcal{U}$ un subconjunto propio, abierto y no vacío de X . Si K es una componente de $Cl_X(\mathcal{U})$ entonces $K \cap Fr_X(\mathcal{U}) \neq \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{U}$ un subconjunto propio, abierto y no vacío de X y K una componente de $Cl_X(\mathcal{U})$. Supongamos que $K \cap Fr_X(\mathcal{U}) = \emptyset$. Se demostrará que $\mathcal{U}$ no puede ser un subconjunto propio de X . Note que $Cl_X(\mathcal{U})$ es un espacio Hausdorff compacto. Además, $Fr_X(\mathcal{U})$ es un conjunto cerrado en $Cl_X(\mathcal{U})$ y ajeno de K . Se sigue del Teorema del cable cortado que existe un conjunto, L , abierto y cerrado en $Cl_X(\mathcal{U})$, tal que $K \subset L$ y $L \cap Fr_X(\mathcal{U}) = \emptyset$. Como $L \subset Cl_X(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \cup Fr_X(\mathcal{U})$, se tiene que $L \subset \mathcal{U}$. De aquí que L es abierto en $\mathcal{U}$, note que $\mathcal{U}$ es abierto en X , se sigue que L es abierto en X . También ocurre que L es cerrado en X , pues L es cerrado en $Cl_X(\mathcal{U})$ el cual es cerrado en X . De esta forma L es abierto y cerrado en X . Además, $L \neq \emptyset$, pues $K \subset L$, y como X es conexo, se sigue que $L = X$. Finalmente como, $L \subset \mathcal{U}$, se tiene que $\mathcal{U} = X$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $K \cap Fr_X(\mathcal{U}) \neq \emptyset$. $\square$

PROPOSICIÓN 1.13. *Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos compactos tal que $X_{n+1} \subset X_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y sea*

$$X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n.$$

Si $\mathcal{U}$ es un conjunto abierto en X_1 tal que $X \subset \mathcal{U}$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$X_n \subset \mathcal{U}.$$

En particular, si $X_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $X \neq \emptyset$ (y así compacto).

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe un conjunto abierto $\mathcal{U}$ en X_1 tal que $X \subset \mathcal{U}$ y $X_n \not\subset \mathcal{U}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Tomemos un punto $x_n \in X_n \setminus \mathcal{U}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $X_1 \setminus \mathcal{U}$ es cerrado, y así compacto, para la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X_1 \setminus \mathcal{U}$ podemos encontrar una subsucesión $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ que converge a un punto $p \in X_1 \setminus \mathcal{U}$. Como para cada $j \in \mathbb{N}$, $x_{n_j} \in X_m$ si $n_j \geq m$, entonces $p \in X_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Así $p \in X$, lo cual contradice el hecho de que $X \subset \mathcal{U}$, pues $p \in X_1 \setminus \mathcal{U}$.

Para la segunda parte de la demostración supongamos que $X = \emptyset$. Se tiene que $\mathcal{U} = \emptyset$ cumple que $X \subset \mathcal{U}$, así por la parte anterior tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \subset \mathcal{U}$, para toda $n \geq N$. De modo que $X_n = \emptyset$, para toda $n \geq N$; lo cual es una contradicción. Por lo que $X \neq \emptyset$. $\square$

TEOREMA 1.14. Si $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de continuos tal que $X_{n+1} \subset X_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y sea

$$X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n.$$

Entonces X es un continuo.

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 1.13, X es un espacio métrico compacto y no vacío. Resta ver que X es conexo. Para esto supongamos lo contrario, es decir, supongamos que existen A y B conjuntos cerrados, no vacíos y ajenos tales que $X = A \cup B$. Como X_1 es un espacio normal, existen dos abiertos en X_1 , $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$, ajenos tales que $A \subset \mathcal{V}$ y $B \subset \mathcal{W}$. Sea $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cup \mathcal{W}$. Entonces por la Proposición 1.13 tenemos que $X_n \subset \mathcal{U}$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$X_n = (X_n \cap \mathcal{V}) \cup (X_n \cap \mathcal{W}).$$

Como $A \cup B = X \subset X_n$ y, dado que $A \cap X \neq \emptyset$ y $B \cap X \neq \emptyset$, tenemos que $X_n \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $X_n \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$. Por lo que $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ forman una disconexión para el continuo X_n lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X es conexo. $\square$

DEFINICIÓN 1.15. Sean X un espacio topológico y $A, B \subset X$. Se dice que A y B son conjuntos separados si

$$A \cap Cl_X(B) = \emptyset \text{ y } Cl_X(A) \cap B = \emptyset.$$

Algunas veces también se dirá que A está separado de B .

PROPOSICIÓN 1.16. Sean X un espacio topológico y $A, B, C \subset X$. Si A está separado de B y de C , entonces A está separado de $B \cup C$.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $A \cap Cl_X(B \cup C) = (A \cap Cl_X(B)) \cup (A \cap Cl_X(C)) = \emptyset$. Por otro lado, $Cl_X(A) \cap (B \cup C) = (Cl_X(A) \cap B) \cup (Cl_X(A) \cap C) = \emptyset$. Por lo tanto, A y $B \cup C$ son conjuntos separados. $\square$

DEFINICIÓN 1.17. Sea X un espacio topológico, decimos que X es **disconexo** si existen A y B subconjuntos de X separados tales que $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ y $X = A \cup B$. Si no existen dichos conjuntos, entonces decimos que X es **conexo**.

TEOREMA 1.18. (de descomposición) Sean X un espacio topológico conexo y $C \subset X$ conexo. Si M y N son dos conjuntos separados y no vacíos tales que $X \setminus C = M \cup N$, entonces los conjuntos $C \cup M$ y $C \cup N$ son conexos. Más aún, si C es cerrado, entonces $C \cup M$ y $C \cup N$ también son cerrados.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $C \cup M$ no es conexo, es decir, $C \cup M = A \cup B$, con A y B conjuntos separados. Probaremos que $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$. Como C es conexo, sin pérdida de generalidad, supongamos que $C \cap B \neq \emptyset$, luego $C \subset B$. De modo que $A \subset M$. Como M y N son conjuntos separados, el conjunto A está separado de N . Por la Proposición 1.16, A y $N \cup B$ son conjuntos separados, pues A está separado de B . De modo que $X = (C \cup M) \cup N = (A \cup B) \cup N = A \cup (B \cup N)$. Por lo que X es la unión de dos conjuntos separados, a saber A y $B \cup N$. Por lo tanto, $A = \emptyset$ o $B \cup N = \emptyset$, es decir, $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

Ahora, si suponemos que C es un conjunto cerrado, entonces

$$Cl_X(C \cup M) = [Cl_X(C) \cup Cl_X(M)] \cap X = [C \cup Cl_X(M)] \cap [C \cup M \cup N].$$

Como N y M son conjuntos separados, se tiene que $Cl_X(M) \cap N = \emptyset$, por lo tanto, $Cl_X(C \cup M) = C \cup M$, es decir $C \cup M$ es un conjunto cerrado.

Análogamente, se prueba que $C \cup N$ es un conjunto conexo y cerrado. $\square$

COROLARIO 1.19. *Sea C un subcontinuo de un continuo X . Si M y N son dos conjuntos separados y no vacíos tales que $X \setminus C = M \cup N$, entonces $C \cup M$ y $C \cup N$ son continuos.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 1.18 tenemos que $C \cup M$ y $C \cup N$ son subconjuntos conexos y cerrados de X . Se sigue que $C \cup M$ y $C \cup N$ son compactos. Por lo tanto, $C \cup M$ y $C \cup N$ son continuos. $\square$

DEFINICIÓN 1.20. *Sean X un continuo y $p, q \in X$. Se dice que X es **irreducible entre p y q** si no existe subcontinuo propio Y , de X tal que $p, q \in Y$. Decimos que X es **irreducible** si existen dos puntos tales que X es irreducible entre ellos.*

DEFINICIÓN 1.21. *Sean X un espacio topológico y $A, B \subset X$, se dice que X es **conexo entre A y B** si no existen conjuntos abiertos, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$, en X tales que $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, $A \subset \mathcal{U}$, $B \subset \mathcal{V}$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.*

PROPOSICIÓN 1.22. *Si X es un continuo y $p, q \in X$, entonces X contiene un subcontinuo que es irreducible entre p y q .*

DEMOSTRACIÓN. Sean $p, q \in X$. Tomemos

$$\mathcal{H} = \{Y \subset X : Y \text{ es un subcontinuo con } p, q \in Y\},$$

la familia $\mathcal{H}$ no es vacía pues $X \in \mathcal{H}$.

Ahora, tomemos una sucesión de elementos, $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, de $\mathcal{H}$ tal que $H_{n+1} \subset H_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos que la sucesión $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada inferiormente en $\mathcal{H}$. Sea $H_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n$. Como $p, q \in H_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $p, q \in H_0$, se sigue del Teorema 1.14 que H_0 es un continuo. Por lo que $H_0 \in \mathcal{H}$ y $H_0 \subset H_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De modo que la sucesión $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada inferiormente. Por el Teorema de Reducción de Brouwer (Teorema 1.10), tenemos que $\mathcal{H}$ tiene un elemento minimal, es decir, existe un elemento $Z \in \mathcal{H}$ tal que $Z \subset H$, para cada $H \in \mathcal{H}$.

Veamos que Z es irreducible entre los puntos p y q . Para esto supongamos lo contrario, es decir, supongamos que Z tiene un subcontinuo propio, Z' , tal que $p, q \in Z'$. Como Z' es compacto en Z , entonces Z' es compacto en X . Además, como Z' es conexo en Z , entonces Z' es conexo en X , por lo que $Z' \in \mathcal{H}$ y $Z' \subset Z$, lo cual contradice que Z sea el elemento minimal de $\mathcal{H}$. Por lo tanto Z es un continuo irreducible entre los puntos p y q . $\square$

LEMA 1.23. *Sean X y Y espacios métricos compactos. Una función $f : X \rightarrow Y$ es continua si, y sólo si, siempre que una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente en X tal que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente en Y , entonces se tiene que*

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n).$$

DEMOSTRACIÓN. La necesidad siempre se cumple pues X y Y son espacios métricos.

Para probar la suficiencia supongamos que $f : X \rightarrow Y$ que no es continua, esto es, existe un punto $x_0 \in X$ tal que f no es continua en x_0 . De esta manera podemos hallar una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cuyo límite en X es x_0 pero

$$\lim f(x_n) \neq f(x_0).$$

De esta forma para algún $\varepsilon_0 > 0$ se cumple que, dado cualquier $n \in \mathbb{N}$ es posible hallar un $M_{(n)} \in \mathbb{N}$ tal que $M_{(n)} > n$ y $d(f(x_{M_{(n)}}), f(x_0)) \geq \varepsilon_0$. Luego, podemos definir recursivamente la función $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ como sigue:

- Caso base, $\sigma(1) = M_{(1)}$,
- paso recursivo $\sigma(n+1) = M_{(\sigma(n))}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $x'_n = x_{\sigma(n)}$. Observe que $\sigma(n+1) = M_{(\sigma(n))} > \sigma(n)$, así que $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es una función creciente, y por lo tanto $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Además ocurre que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$d(f(x'_n), f(x_0)) \geq \varepsilon_0.$$

Como Y es un espacio métrico compacto, la sucesión $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ admite una subsucesión $\{x''_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente en Y . Dado que

$$d(f(x''_n), f(x_0)) \geq \varepsilon_0, \text{ para toda } n \in \mathbb{N},$$

se tiene que

$$\lim f(x''_n) \neq f(x_0).$$

No obstante $\lim x''_n = x_0$, pues $\{x''_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

En resumen, se ha demostrado que si $f : X \rightarrow Y$ no es continua entonces existen un punto x_0 y una sucesión $\{x''_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a x_0 en X , y cuya sucesión de imágenes $\{f(x''_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en Y , pero $\lim f(x''_n) \neq f(x_0)$, con lo cual termina la prueba. $\square$

LEMA 1.24. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Si $A \subset X$ y $B \subset Y$ se cumple que

$$f[A \cap f^{-1}(B)] = f(A) \cap B.$$

Más aún, si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son subconjuntos de X entonces

$$f[f^{-1}(\bigcap_{k=1}^n f(A_k)) \cap A_i] = \bigcap_{k=1}^n f(A_k),$$

para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos un punto $y \in f(A) \cap B$, entonces existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$, como $f(x) = y \in B$ entonces $x \in f^{-1}(B)$, de modo que $x \in A \cap f^{-1}(B)$. Por lo que $f(A) \cap B \subset f[A \cap f^{-1}(B)]$.

Como $f[A \cap f^{-1}(B)] \subset f(A) \cap f(f^{-1}(B)) \subset f(A) \cap B$, tenemos que

$$f[A \cap f^{-1}(B)] = f(A) \cap B.$$

Sean $A_1, A_2, \dots, A_n$ subconjuntos de X , si tomamos $B = \bigcap_{k=1}^n f(A_k)$, por la parte anterior de esta demostración tenemos que

$$f[A_i \cap f^{-1}(\bigcap_{k=1}^n f(A_k))] = f(A_i) \cap [\bigcap_{k=1}^n f(A_k)] = \bigcap_{k=1}^n f(A_k),$$

para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. $\square$

TEOREMA 1.25. (Weierstrass). Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si X es un espacio compacto, entonces f es acotada y alcanza su máximo y su mínimo.

DEMOSTRACIÓN. Como f es continua y X es compacto, entonces $f(X)$ es compacto en $\mathbb{R}$. Por lo que $f(X)$ es un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}$. Con lo cual se tiene la conclusión. $\square$

COROLARIO 1.26. Sean X un espacio métrico y $A, B \subset X$. Si A es compacto, B es cerrado y $A \cap B = \emptyset$ entonces $\delta(A, B) > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que $\delta(A, B) = \inf\{d(x, B) : x \in A\}$. Como la función $f : A \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por $f(x) = d(x, B)$, para cada $x \in A$, es una función continua definida de un espacio métrico compacto. Por el Teorema 1.25 existe un punto $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = d(x_0, B) = \delta(A, B)$. Si $f(x_0) = 0$ entonces $x_0 \in Cl(B) = B$, dado que B es cerrado, obtenemos que $x_0 \in A \cap B$ lo cual contradice la hipótesis, por lo tanto, $\delta(A, B) > 0$. $\square$

COROLARIO 1.27. *Sean X un espacio compacto y una familia de conjuntos cerrados $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset X$ tal que $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \emptyset$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ (llamado el coeficiente de Lebesgue del sistema $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$) tal que para cada conjunto A de diámetro menor a ε es ajeno de al menos uno de los conjuntos F_α .*

DEMOSTRACIÓN. Como F_α es cerrado para toda $\alpha \in I$, entonces $E_\alpha = X \setminus F_\alpha$ es un conjunto abierto para cada $\alpha \in I$. Note que $\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus F_\alpha = X \setminus (\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha) = X$, de modo que $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una cubierta abierta de X . Por lo que existen puntos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \subset I$ tales que $\bigcup_{i=1}^n E_{\alpha_i} = X$. De modo que $\emptyset = X \setminus (\bigcup_{i=1}^n E_{\alpha_i}) = \bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i}$. Así existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \subset I$ tales que $\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} = \emptyset$.

Sea $f : F_{\alpha_1} \times \dots \times F_{\alpha_n} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f((x_1, \dots, x_n)) = \max\{d(x_i, x_j) : x_i \in F_{\alpha_i}, x_j \in F_{\alpha_j} \text{ y } j, i \in \{1, \dots, n\} \text{ con } i \neq j\}.$$

Como f es una función continua definida en un espacio métrico compacto, entonces por el Teorema 1.25, el conjunto $f(F_{\alpha_1} \times \dots \times F_{\alpha_n})$ es acotado. Llamemos ε a la cota inferior de la función. Dado que $\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} = \emptyset$ por el Corolario 1.26 tenemos que $\varepsilon > 0$. Sea $A \subset X$ con $\text{diám}(A) < \varepsilon$.

Supongamos que $A \cap F_\alpha \neq \emptyset$ para cada $\alpha \in I$. En particular, sea $x_i \in A \cap F_{\alpha_i}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces $f(x_1, \dots, x_n) \geq \varepsilon$ lo cual contradice que $\text{diám}(A) < \varepsilon$ por lo que $A \cap F_\alpha = \emptyset$ para algún $\alpha \in I$. $\square$

COROLARIO 1.28. *Sean X un espacio métrico y $\mathcal{C}$ una cubierta abierta. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que cada cubierta de X compuesta por conjuntos de diámetro menor que ε es un refinamiento de $\mathcal{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de X . Llamemos

$$D_\alpha = X \setminus C_\alpha, \text{ para cada } \alpha \in I.$$

Note que D_α es cerrado en X , para cada $\alpha \in I$, y $\bigcap_{\alpha \in I} D_\alpha = \emptyset$.

Como $\bigcap_{\alpha \in I} D_\alpha = \emptyset$ entonces existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ tales que $\bigcap_{i=1}^n D_{\alpha_i} = \emptyset$. Tomemos $f : F_{\alpha_1} \times \dots \times F_{\alpha_n} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f((x_1, \dots, x_n)) = \max\{d(x_i, x_j) : x_i \in F_{\alpha_i}, x_j \in F_{\alpha_j} \text{ y } j, i \in \{1, \dots, n\} \text{ con } i \neq j\},$$

Como f es una función continua definida en un espacio métrico compacto, entonces por el Teorema 1.25, el conjunto $f(F_{\alpha_1} \times \dots \times F_{\alpha_n})$ es acotado. Llamemos ε a la cota inferior de la función. Así, por el Corolario 1.27, cada conjunto A de diámetro menor a ε intersecta a al menos un D_α .

Sea $\{E_\beta\}_{\beta \in J}$ una cubierta de X con $\text{diám}(E_\beta) < \varepsilon$ para cada $\beta \in J$, es decir $X \subset \bigcup_{\beta \in J} E_\beta$. Sea $\beta \in J$, veamos que $E_\beta \subset C_\alpha$ para algún $\alpha \in I$. Supongamos por el contrario, es decir, $E_\beta \not\subset C_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Consideremos un punto

$x_\alpha \in E_\beta \cap (X \setminus C_\alpha) = E_\beta \cap D_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Así $f((x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n})) \geq \varepsilon$ lo que contradice que $\text{diam}(A) < \varepsilon$. $\square$

3. Límites de conjuntos

En esta sección atendemos un tipo de convergencia de sucesiones de subconjuntos de un espacio métrico compacto. Así como algunas propiedades básicas para entender nuestro estudio acerca de funciones especiales.

DEFINICIÓN 1.29. Sean X un espacio métrico compacto y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de X . Definamos el **límite superior** (denotado por $\limsup$) y el **límite inferior** ($\liminf$) de la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como:

$\liminf A_n = \{x \in X : \text{para todo abierto } \mathcal{U} \subset X \text{ con } x \in \mathcal{U}, \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \mathcal{U} \cap A_n \neq \emptyset, \text{ para cada } n \geq N\}$ y

$\limsup A_n = \{x \in X : \text{para todo abierto } \mathcal{U} \text{ de } X \text{ con } x \in \mathcal{U}, \text{ existe un conjunto } J \subset \mathbb{N} \text{ infinito, tal que } \mathcal{U} \cap A_n \neq \emptyset, \text{ para cada } n \in J\}$.

PROPOSICIÓN 1.30. Sean X un espacio métrico compacto y $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos de X . Se tiene lo siguiente:

- (i) $\liminf A_n \subset \limsup A_n$;
- (ii) $\limsup A_n$ y $\liminf A_n$ son subconjuntos cerrados de X ;
- (iii) $\limsup A_n \neq \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN.

(i) Probemos que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$. Para esto sea $x \in \liminf A_n$, entonces para todo conjunto abierto $\mathcal{U}$ de X , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{U} \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$. Basta tomar $J = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, N-1\}$, por lo que $x \in \limsup A_n$, así $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

(ii) Veamos que $\limsup A_n = Cl(\limsup A_n)$. Sean $x \in Cl(\limsup A_n)$ y $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en X tales que $x \in \mathcal{U}$. Luego, $(\limsup A_n) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Tomemos un punto $y \in (\limsup A_n) \cap \mathcal{U}$. De manera que existe un conjunto $J \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $\mathcal{U} \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \in J$. Por lo que $x \in \limsup A_n$. Así que $Cl(\limsup A_n) \subset \limsup A_n$. Se sigue que $\limsup A_n$ es cerrado en X . Análogamente se prueba que $\liminf A_n$ es un conjunto cerrado en X .

(iii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in A_n$ y consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X . Como X es compacto, existe una subsucesión $\{x'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim x'_m = x$, para algún $x \in X$. Veamos que $x \in \limsup A_n$. Sea $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en X tal que $x \in \mathcal{U}$. Como $\{x'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a x , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x'_m \in \mathcal{U}$, para cada $m \geq N$. Puesto que $x'_m \in A'_m$, se tiene que $A'_m \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, para cada $m \geq N$. Sea $J = \{m : m \geq N\}$. Luego $J \subset \mathbb{N}$, J es infinito y $A'_m \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, para cada $m \in J$. Por lo tanto, $x \in \limsup A_n$. $\square$

OBSERVACIÓN 1.31. Dada una familia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos cerrados. No siempre ocurre que $\limsup A_n \subset \liminf A_n$.

Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dada por $A_{2n} = \{1\}$ y $A_{2n-1} = \{-1\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $\limsup A_n = \{-1, 1\}$ pero $\liminf A_n = \emptyset$.

Veamos que $1 \in \limsup A_n$. Sea $\mathcal{U}$ un conjunto abierto que contiene a 1. Tomemos el conjunto infinito $J = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$. Tenemos que $1 \in \mathcal{U} \cap A_n$, para cada

$n \in J$. De modo que $\mathcal{U} \cap A_n \neq \emptyset$, para toda $n \in J$. Por lo que $1 \in \limsup A_n$. Análogamente podemos probar que $-1 \in \limsup A_n$.

Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Tomemos la bola abierta con centro en x y radio r , $B_r(x)$, donde $r = \min\{|x - 1|, |x + 1|\}$. Note que $x \in B_r(x)$ y $-1, 1 \notin B_r(x)$. Por lo que $B_r(x) \cap A_n = \emptyset$, para toda $n \in \mathbb{N}$. De modo que $x \notin \limsup A_n$. Por lo tanto $\limsup A_n = \{-1, 1\}$.

Por la parte anterior tenemos, además, que $x \notin \liminf A_n$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Veamos ahora que $1 \notin \liminf A_n$. Tomemos $\mathcal{V} = B_1(1)$, $\mathcal{V}$ es un conjunto abierto con $1 \in \mathcal{V}$. Note que para toda $n \in \mathbb{N}$, si $\mathcal{V} \cap A_n \neq \emptyset$, entonces $A_{n+1} = \{-1\}$, por lo que $\mathcal{V} \cap A_n = \emptyset$. Por lo que no existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N$, $\mathcal{V} \cap A_n \neq \emptyset$. De modo que $1 \notin \liminf A_n$. De forma similar se puede probar que $-1 \notin \limsup A_n$. Por lo que $\liminf A_n = \emptyset$.

PROPOSICIÓN 1.32. Sean X y Y espacios métricos compactos. Una función $f : X \rightarrow Y$ es continua si, y sólo si, para cada punto $y \in Y$, y toda sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, contenida en Y , tal que $\lim y_n = y$ se cumple que

$$\limsup f^{-1}(\{y_n\}) \subset f^{-1}(\{y\}).$$

DEMOSTRACIÓN. Primero veamos la necesidad, para esto supongamos que $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y sea $x \in \limsup f^{-1}(\{y_n\})$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en X , tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_n \in f^{-1}(y_n)$. Luego, existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim x_{n_j} = x$.

Como $f : X \rightarrow Y$ es continua, por el Lema 1.23, se tiene que $\lim f(x_n) = f(x)$. Note que $\{f(x_{n_j})\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y observe que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = y_n$, por lo que $\{f(x_{n_j})\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Como $\lim y_n = y$, entonces $\lim f(x_{n_j}) = y$. De aquí que $f(x) = y$, es decir $x \in f^{-1}(\{y\})$. Por lo que

$$\limsup f^{-1}(\{y_n\}) \subset f^{-1}(\{y\}).$$

Ahora para la suficiencia, tomemos un punto $x_0 \in X$. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente a x_0 tal que $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto $y_0 \in Y$.

Como $\lim f(x_n) = y_0$, entonces

$$\limsup f^{-1}(\{f(x_n)\}) \subset f^{-1}(\{y_0\})$$

esto es por hipótesis. Note que

$$x_0 \in \limsup \{x_n\} \subset \limsup f^{-1}(\{f(x_n)\}) = \limsup f^{-1}(\{f(x_n)\}) \subset f^{-1}(\{y_0\}).$$

Por lo tanto $f(x_0) = y_0$, y así $f : X \rightarrow Y$ es continua. $\square$

Capítulo 2

Algunas funciones especiales entre espacios métricos compactos

1. Algunas clases de funciones

En este capítulo vamos a definir la primera parte de las funciones especiales, entre espacios métricos compactos, que se estudiarán más adelante y que servirán a su vez para definir nuevas clases de funciones.

DEFINICIÓN 2.1. *Sea f una función continua de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y , decimos que f es:*

- (I) Un **homeomorfismo** si f es inyectiva y la función inversa f^{-1} es continua.
- (II) **Abierta** si f manda a cualquier conjunto abierto de X en un conjunto abierto de Y .
- (III) **Atómica** si para cualquier subcontinuo, K , de X tal que el conjunto $f(K)$ es no degenerado, entonces $f^{-1}(f(K)) = K$.

NOTACIÓN 2.2. *Para el estudio posterior de estas funciones denotaremos por:*

$\mathcal{H}$ a la clase de los homeomorfismos;
 $\mathcal{O}$ a la clase de las funciones abiertas y
 $\mathcal{A}$ es la clase de las funciones atómicas.

Las siguientes funciones en consideración han sido definidas por la propiedad que satisface la imagen inversa de un continuo del codominio. Decimos que tal clase de funciones está definida por el subcontinuo de la imagen.

DEFINICIÓN 2.3. *Sea f una función continua y suprayectiva de un espacio topológico X sobre un espacio topológico Y , decimos que f es:*

(IV) **Monótona** si para cualquier punto $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(\{y\})$ es conexo.

(V) **Confluente** si para cualquier subcontinuo, Q , de Y y cualquier componente, K , de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(K) = Q$.

(VI) **Semiconfluente** si para cualquier subcontinuo, Q , de Y y para cualesquiera dos componentes, C_1 y C_2 , de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(C_1) \subset f(C_2)$ o $f(C_2) \subset f(C_1)$.

(VII) **Débilmente confluente** si para cualquier subcontinuo, Q , de Y existe una componente, K , de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(K) = Q$.

(VIII) **Juntadora** si para cualquier subcontinuo, Q , de Y y para cualesquiera dos componentes, C_1 y C_2 , de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(C_1) \cap f(C_2) \neq \emptyset$.

(IX) **Atriódica** si para cualquier subcontinuo, Q , de Y existen dos componentes, C_1 y C_2 , de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C_1) \cup f(C_2) = Q$ y para cualquier componente, C , de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(C) = Q$, $f(C) \subset f(C_1)$ o $f(C) \subset f(C_2)$.

NOTACIÓN 2.4. Para el estudio posterior de estas funciones denotaremos por:

$\mathcal{M}$ a la clase de las funciones monótonas;

$\mathcal{C}$ a la clase de las funciones confluentes;

$\mathcal{SC}$ a la clase de las funciones semiconfluentes;

$\mathcal{DC}$ a la clase de las funciones débilmente confluentes;

$\mathcal{J}$ a la clase de las funciones juntadoras y

$\mathcal{A}$ a la clase de las funciones atriódicas.

De las definiciones anteriores vemos que los homeomorfismos es la clase más grande, respecto de la contención de conjuntos, de las funciones definidas en 2.1 y 2.3. En el resultado que sigue sólo vamos a atender el caso de las funciones abiertas y atómicas.

TEOREMA 2.5. Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Si f es un homeomorfismo, entonces f es una función abierta y atómica.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo.

Veamos que f es abierta. Para esto sea $\mathcal{V}$ un conjunto abierto en X . Tenemos que $f(\mathcal{V}) = (f^{-1})^{-1}(\mathcal{V})$ y, como f^{-1} es continua por hipótesis, entonces $f(\mathcal{V})$ es un abierto en Y .

Ahora, probemos que f es atómica. Tomemos K un subcontinuo de X tal que $f(K)$ es no degenerado. Como f es un homeomorfismo, se tiene que $f^{-1}(f(K)) = K$.

Por lo tanto, f es una función abierta y atómica. $\square$

En lo que sigue de esta sección comparamos nuestras clases de funciones, iniciamos este análisis probando que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.

TEOREMA 2.6. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es atómica, entonces f es monótona.

DEMOSTRACIÓN. Esta proposición se demostrará por contrarrecíproca. Supongamos que f no es monótona, de modo que existe un punto $y \in Y$ tal que $f^{-1}(\{y\})$ no es conexo. Por lo que podemos encontrar C_1 y C_2 dos conjuntos cerrados en $f^{-1}(\{y\})$, no vacíos y ajenos tales que $f^{-1}(\{y\}) = C_1 \cup C_2$. Como f es continua

estonces, $f^{-1}(\{y\})$ es un conjunto cerrado en X , así C_1 y C_2 son cerrados en X . Como X es métrico, en particular es normal, por lo que existen dos abiertos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ en X tales que $C_1 \subset \mathcal{U}$, $C_2 \subset \mathcal{V}$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Sea D la componente de $Cl_X(\mathcal{U})$ tal que $f^{-1}(\{y\}) \cap D \neq \emptyset$ por el Teorema de Golpes en la Frontera, Teorema 1.12, tenemos que $D \cap Fr(\mathcal{U}) \neq \emptyset$, por lo que $f(D)$ es no degenerado. Note que $y \in f(D)$, por lo que $f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(f(D))$ de modo que $D \subsetneq f^{-1}(f(D))$, pues $f^{-1}(\{y\}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $D \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Así que f no es atómica. $\square$

Ahora, vamos a dar una caracterización de las funciones monótonas, con lo cual vamos a probar que $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}$.

PROPOSICIÓN 2.7. *Sean X y Y dos espacios Hausdorff compactos, $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Se tiene que f es monótona si, y sólo si, para cada, K , subcontinuo de Y , $f^{-1}(K)$ es un subcontinuo de X .*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$] Sea K un subcontinuo de Y . Claramente $f^{-1}(K)$ es compacto en X . Así, resta ver que $f^{-1}(K)$ es conexo en X . Supongamos que no es así, es decir, supongamos que existen F y G conjuntos cerrados en X , ajenos tales que $f^{-1}(K) = F \cup G$.

Observe que por la suprayectividad de f se tiene que $K = f(F) \cup f(G)$, además $f(F)$ y $f(G)$ son cerrados en Y . Si $y \in f(F) \subset K$, entonces $f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(K) = F \cup G$. Por hipótesis, como $f^{-1}(\{y\})$ es conexo y $f^{-1}(\{y\}) \cap F \neq \emptyset$, se tiene que $f^{-1}(\{y\}) \subset F$. De modo que $f^{-1}(\{y\}) \cap G = \emptyset$. Luego y no está en $f(G)$. De aquí que $f(F) \cap f(G) = \emptyset$. Como K es conexo en Y , se sigue que $f(F) = \emptyset$ o $f(G) = \emptyset$, es decir, $F = \emptyset$ o $G = \emptyset$. Por lo tanto se concluye que $f^{-1}(K)$ es conexo.

$\Leftarrow$] Sea $y \in Y$ tenemos que $\{y\}$ es compacto y conexo, de modo que $\{y\}$ es un subcontinuo de Y , se sigue de la hipótesis que $f^{-1}(\{y\})$ es un subcontinuo de X y por lo tanto, $f^{-1}(\{y\})$ conexo. Así f es monótona. $\square$

TEOREMA 2.8. *Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Si f es monótona, entonces f es confluyente.*

DEMOSTRACIÓN. Sean Q un subcontinuo de Y y K una componente de $f^{-1}(Q)$. Como f es monótona se sigue de la Proposición 2.7 que $f^{-1}(Q)$ es un continuo. En particular $f^{-1}(Q)$ es conexo, por lo que K sólo puede ser $f^{-1}(Q)$, de modo que $f(K) = f(f^{-1}(Q)) = Q$. Con esto se tiene que f es confluyente. $\square$

TEOREMA 2.9. *Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Si f es confluyente, entonces f es semiconfluyente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Q un subcontinuo de Y y tomemos dos componentes, C_1 y C_2 , de $f^{-1}(Q)$. Como f es confluyente, tenemos que $f(C_1) = Q \subset Q = f(C_2)$. Así $f(C_1) \subset f(C_2)$. Por lo que f es semiconfluyente. $\square$

TEOREMA 2.10. *Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Si f es semiconfluyente, entonces f es juntadora.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Q un subcontinuo de Y y tomemos dos componentes, C_1 y C_2 , de $f^{-1}(Q)$. Como f es semiconfluyente tenemos que $f(C_1) \subset f(C_2)$ o bien $f(C_2) \subset f(C_1)$.

Si $f(C_1) \subset f(C_2)$ entonces $f(C_1) \cap f(C_2) = f(C_1) \neq \emptyset$.

Análogamente, si $f(C_2) \subset f(C_1)$ entonces $f(C_1) \cap f(C_2) = f(C_2) \neq \emptyset$.

De modo que f es una función juntadora. $\square$

TEOREMA 2.11. *Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Si f es confluyente, entonces f es débilmente confluyente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Q un subcontinuo de Y . Tomemos C una componente de $f^{-1}(Q)$. Como f es confluyente tenemos que $f(C) = Q$. De modo que existe una componente de $f^{-1}(Q)$, a saber C , tal que $f(C) = Q$, por lo que f es débilmente confluyente. $\square$

TEOREMA 2.12. *Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Si f es semiconfluyente, entonces f es débilmente confluyente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Q un subcontinuo arbitrario de Y . Veamos que existe una componente, C , de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C) = Q$. Para esto, tomemos

$$\mathcal{H} = \{H \subset Y : H \text{ es un subcontinuo de } Q \text{ y existe una componente, } C, \text{ de } f^{-1}(Q) \text{ tal que } H \subset f(C)\}.$$

Note que la familia $\mathcal{H}$ no es vacía, pues si tomamos $y \in Q$, entonces $\{y\} \in \mathcal{H}$. Ahora, si $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{H}$ tal que $H_{n-1} \subset H_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Pongamos $H_0 = \text{Cl}_Y(\cup_{n \in \mathbb{N}} H_n)$, tenemos que $H_0 \in \mathcal{H}$. De hecho, sea C_n la componente de $f^{-1}(Q)$ tal que $H_n \subset f(C_n)$. Dado que X es un espacio compacto, se tiene que $f^{-1}(Q)$ es compacto y podemos encontrar una subsucesión convergente $\{C_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ de la sucesión $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Definamos $K = \lim C_{n_j}$, como $f(K) \subset Q$ y como K es un subcontinuo, existe una componente C_0 de $f^{-1}(Q)$ tal que $K \subset C_0$. Por la continuidad de f tenemos que $H_0 \subset f(K)$, y así, $H_0 \subset f(C_0)$. esto significa que $H_0 \in \mathcal{H}$. se sigue del Teorema de reducción de Brouwer que $\mathcal{H}$ tiene un elemento maximal, el cual denotaremos por R . Por la definición de $\mathcal{H}$, tenemos que existe $C \subset f^{-1}(Q)$ tal que $R \subset f(C)$. Supongamos que $f(C) \neq Q$, es decir, que existe un punto $q \in Q \setminus f(C)$ y tomemos una componente C' de $f^{-1}(Q)$ tal que $q \in f(C')$. Como f es semiconfluyente, tenemos que $f(C) \subset f(C') \setminus \{q\}$, lo cual contradice que R sea el máximo. Así $f(C) = Q$. $\square$

TEOREMA 2.13. *Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Si f es débilmente confluyente, entonces f es atriódica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Q un subcontinuo de Y . Como f es débilmente confluyente tenemos que existe una componente, K , de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(K) = Q$. Consideremos $C_1 = K$ y C_2 otra componente de $f^{-1}(Q)$. Tenemos que $f(C_1) \cup f(C_2) = Q \cup f(C_2) = Q$. Ahora, para cualquier otra componente, C , de $f^{-1}(Q)$ tenemos que $f(C) \subset Q = f(C_1)$, por lo que $f(C) \subset f(C_1)$. Así f es atriódica. $\square$

Concluimos esta sección con una equivalencia de las funciones abiertas y, algunas propiedades que nos serán de utilidad para probar que $\mathcal{O} \subset \mathcal{C}$.

PROPOSICIÓN 2.14. *Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos, entonces f es abierta si, y sólo si, para cada sucesión, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, contenida en Y tal que $\lim y_n = y$, entonces*

$$\limsup f^{-1}(\{y_n\}) = f^{-1}(\{y\}).$$

DEMOSTRACIÓN. Primero probaremos la suficiencia. Sea $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en X y tomemos $y \in Cl_Y(Y \setminus f(\mathcal{U}))$. Como f es suprayectiva, entonces existe un punto $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Se demostrará que $x \in X \setminus \mathcal{U}$. Para esto elijamos una sucesión, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, contenida en $Y \setminus f^{-1}(\mathcal{U})$, tal que $\lim y_n = y$.

Note que por hipótesis $x \in f^{-1}(\{y\}) = \limsup f^{-1}(\{y_n\})$, así que podemos elegir una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y una subsucesión de ésta, digamos $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n \in f^{-1}(\{y_n\}) \text{ y } \lim x_{n_j} = x,$$

dado que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = y_n$, y $f^{-1}(\{y_n\}) \cap \mathcal{U} = \emptyset$, se tiene que $x_{n_j} \in X \setminus \mathcal{U}$ para toda $j \in \mathbb{N}$. Como $X \setminus \mathcal{U}$ es un conjunto cerrado en X y $\lim x_{n_j} = x$ se sigue que $x \in X \setminus \mathcal{U}$. Por lo tanto $f^{-1}(\{y\}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, es decir, $y \in Y \setminus f(\mathcal{U})$. Por lo tanto, $Y \setminus f(\mathcal{U})$ es un conjunto cerrado en Y , lo cual implica que f es una función abierta.

Ahora probaremos la necesidad. Para esto, sea $y \in Y$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión contenida en Y tal que $\lim y_n = y$. Se demostrará que

$$\lim f^{-1}(\{y_n\}) = f^{-1}(\{y\}).$$

Por lo cual bastará verificar que

$$f^{-1}(\{y\}) \subset \liminf f^{-1}(\{y_n\}) \text{ y } \limsup f^{-1}(\{y_n\}) \subset f^{-1}(\{y\}).$$

Observe que como f es una función continua, por la Proposición 1.32 la segunda contención se cumple.

Ahora, tomemos un punto $x \in f^{-1}(\{y\})$ y un conjunto abierto, $\mathcal{U}$, en X tal que $x \in \mathcal{U}$. Como f es una función abierta, entonces $f(\mathcal{U})$ es un conjunto abierto en Y que contiene al punto $f(x) = y$. Dado que $\lim y_n = y$, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n > N$, $y_n \in f(\mathcal{U})$, esto es, $f^{-1}(\{y_n\}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Por lo tanto $x \in \liminf f^{-1}(\{y_n\})$. Esto prueba que $f^{-1}(\{y\}) \subset \liminf f^{-1}(\{y_n\})$ y así, $f^{-1}(\{y\}) = \liminf f^{-1}(\{y_n\})$. $\square$

DEFINICIÓN 2.15. Sean X un espacio topológico, un punto $x \in X$ y un número cardinal α , decimos que el orden de x en X es menor o igual que α , denotado por $\text{ord}(x, X) \leq \alpha$, si para cada conjunto abierto, $\mathcal{U}$, en X con $x \in \mathcal{U}$ existe un conjunto abierto, $\mathcal{V}$, en X tal que $x \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ y $|Fr(\mathcal{V})| \leq \alpha$. Escribimos $\text{ord}(x, X) = \alpha$ para indicar que $\text{ord}(x, X) \leq \alpha$ y es falso que $\text{ord}(x, X) \leq \beta$ para todo número cardinal $\beta < \alpha$.

La siguiente proposición afirma que las funciones abiertas no incrementan el orden de los puntos.

PROPOSICIÓN 2.16. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos. Si f es una función abierta, entonces satisface que:

- (a) Si $\mathcal{U}$ es un conjunto abierto en X , entonces $Fr_Y(f(\mathcal{U})) \subset f(Fr_X(\mathcal{U}))$.
- (b) Para cada $x \in X$, se tiene que $\text{ord}(f(x), Y) \leq \text{ord}(x, X)$.

DEMOSTRACIÓN.

(a) Sea $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en X . Se tiene que $Fr_X(\mathcal{U}) = Cl_X(\mathcal{U}) \cap (X \setminus \mathcal{U})$. Dado que f es abierta, se tiene que $f(\mathcal{U})$ es un conjunto abierto en Y . Así, $Fr_Y(f(\mathcal{U})) = Cl_Y(f(\mathcal{U})) \cap (Y \setminus f(\mathcal{U}))$. Sea $y \in Fr_Y(f(\mathcal{U}))$, esto es $y \in Cl_Y(f(\mathcal{U})) \cap (Y \setminus f(\mathcal{U}))$. Como f es continua, entonces $f(Cl_X(\mathcal{U})) \subset Cl_Y(f(\mathcal{U}))$. Además, dado que f es cerrada se obtiene que $f(Cl_X(\mathcal{U})) = Cl_Y(f(\mathcal{U}))$. Luego, existe un punto $x \in Cl_X(\mathcal{U})$ tal que $f(x) = y$. Note que $x \in X \setminus \mathcal{U}$, pues si $x \in \mathcal{U}$ entonces $f(x) \in f(\mathcal{U})$ y así

$y \in f(\mathcal{U})$, lo cual es una contradicción. De donde $x \in Cl_X(\mathcal{U}) \cap (X \setminus \mathcal{U})$, es decir, $x \in Fr_X(\mathcal{U})$. Con lo cual $y \in f(Fr_X(\mathcal{U}))$.

(b) Sean $x \in X$ y α un número cardinal tal que $ord(xX) = \alpha$. Sea $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en Y con $f(x) \in \mathcal{U}$. Note que $f^{-1}(\mathcal{U})$ es un conjunto abierto en X y $x \in f^{-1}(\mathcal{U})$. Luego, por hipótesis, existe un conjunto $\mathcal{V}$ abierto en X tal que $x \in \mathcal{V} \subset f^{-1}(\mathcal{U})$ y $|Fr_X(\mathcal{V})| \leq \alpha$. Como f es abierta, $f(\mathcal{V})$ es un conjunto abierto en Y . Se tiene que $f(x) \in f(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$. Ahora, por la parte (a) tenemos que $Fr_Y(f(\mathcal{V})) \subset f(Fr_X(\mathcal{V}))$. De aquí se tiene que

$$|Fr_Y(f(\mathcal{V}))| \leq |f(Fr_X(\mathcal{V}))| \leq |Fr_X(\mathcal{V})| \leq \alpha.$$

Por lo tanto $ord(f(x), Y) \leq ord(x, X)$. $\square$

PROPOSICIÓN 2.17. *Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \rightarrow Y$ una función abierta. Si Z es un subconjunto no vacío de Y , entonces*

$$f|_{f^{-1}(Z)} : f^{-1}(Z) \rightarrow Z$$

es una función abierta.

DEMOSTRACIÓN. Sea f una función abierta y Z un subconjunto no vacío de Y , sabemos que $f|_{f^{-1}(Z)} : f^{-1}(Z) \rightarrow Z$ es continua y suprayectiva. Resta ver que manda conjuntos abiertos en conjuntos abiertos, para esto, sea $\mathcal{W}$ un conjunto abierto de $f^{-1}(Z)$. Se tiene que existe un conjunto abierto $\mathcal{U}$ de X tal que $\mathcal{W} = \mathcal{U} \cap f^{-1}(Z)$.

Luego $f|_{f^{-1}(Z)}(\mathcal{W}) = f|_{f^{-1}(Z)}(\mathcal{U} \cap f^{-1}(Z)) = f(\mathcal{U} \cap f^{-1}(Z)) \subset f(\mathcal{U}) \cap Z$. Por otro lado, si $y \in f(\mathcal{U}) \cap Z$ existe x en $\mathcal{U}$ tal que $f(x) = y$, manera que $x \in \mathcal{U} \cap f^{-1}(Z)$. Es decir $y \in f(\mathcal{U} \cap f^{-1}(Z)) = f|_{f^{-1}(Z)}(\mathcal{W})$, por lo que $f|_{f^{-1}(Z)}(\mathcal{W}) = f(\mathcal{U}) \cap Z$. Como f es abierta, se sigue que $f|_{f^{-1}(Z)}(\mathcal{W})$ es un conjunto abierto en Z . $\square$

TEOREMA 2.18. *Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Si f es abierta, entonces f es confluyente.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función $f : X \rightarrow Y$ no es confluyente, es decir, existen un subcontinuo B de Y y una componente K de $f^{-1}(B)$ tales que $f(K) \neq B$. Luego existe un punto $b \in B \setminus f(K)$. Se sigue que $K \cap f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$. Notemos que no existe un subconjunto conexo contenido en $f^{-1}(B)$ que intersecta a $f^{-1}(\{b\})$ y K simultáneamente, ya que si D es un subconjunto conexo tal que $D \cap f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$ y $D \cap K \neq \emptyset$ entonces $K \cap f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$, lo cual no puede ser. Note que $f^{-1}(\{b\})$ y K son conjuntos cerrados en $f^{-1}(B)$.

Luego, por el Teorema del Cable Cortado (Teorema 1.11), se tiene que existe un conjunto abierto y cerrado en $f^{-1}(B)$, G , tal que $f^{-1}(\{b\}) \subset G$ y $G \cap K = \emptyset$. Llamemos H al conjunto $f^{-1}(B) \setminus G$. Tenemos que G y H son conjuntos cerrados en $f^{-1}(B)$ tales que $f^{-1}(B) = G \cup H$, $K \subset G$, $f^{-1}(\{b\}) \subset H$ y $G \cap H = \emptyset$.

Como $f(G) = B \cap f(G)$, se tiene que $f(G)$ es cerrado en B . Por otro lado, puesto que $G = (X \setminus H) \cap f^{-1}(B)$, se sigue que G es abierto en $f^{-1}(B)$. Por la Proposición 2.17 se tiene que $f|_{f^{-1}(B)}$ es una función abierta, por lo que $f|_{f^{-1}(B)}(G) = f(G)$ es un conjunto abierto en B .

Ahora si b es un elemento de $f(G)$ entonces existe $z \in G$ tal que $f(z) = b$, de manera que $z \in f^{-1}(B) \subset H$. Así $z \in G \cap H$, lo cual es una contradicción pues esta intersección es vacía. Se sigue que $b \in B \setminus f(G)$, en consecuencia $f(G) \neq B$, además $f(G) \neq \emptyset$.

En resumen, tenemos un subconjunto $f(G)$ de B el cual es abierto y cerrado en B , $f(G) \neq B$ y $f(G) \neq \emptyset$, lo cual contradice la conexidad de B , por lo tanto f es confluyente. $\square$

2. Ejemplos de funciones

Concluimos este capítulo, mediante ejemplos de funciones, mostrando que cada una de las contenciones entre las clases de funciones son propias. De hecho iniciamos esta sección mostrando, con los Ejemplos 2.19 y 2.20, que las clases de funciones abiertas y monótonas no son comparables.

EJEMPLO 2.19. Definamos $f(x) = |x|$ para cada $x \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$. La función f es abierta pero no es monótona.

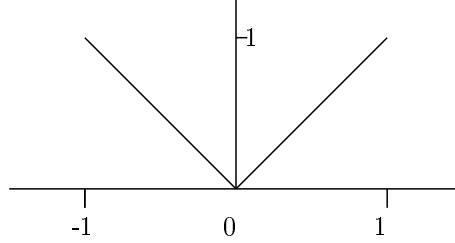


FIGURA 1

Veamos que f es abierta, para esto tomemos $\mathcal{U}$ un abierto básico para la topología de $[-1, 1]$, entonces $\mathcal{U}$ es de la forma $[-1, a)$, $(b, 1]$ ó (c, d) con $-1 < a \leq 1$, $-1 \leq b < 1$ y $-1 \leq c < d \leq 1$ y tenemos los siguientes casos:

Caso I. Si $0 \in \mathcal{U}$, entonces,

$$f(\mathcal{U}) = \begin{cases} [0, 1] & \text{si } \mathcal{U} = [-1, a) \text{ ó } (b, 1]; \\ [0, e), \text{ donde } e = \max\{-c, d\} & \text{si } \mathcal{U} = (c, d). \end{cases}$$

Los cuales son abiertos en $[0, 1]$.

Caso II. Si $0 \notin \mathcal{U}$, entonces

$$f(\mathcal{U}) = \begin{cases} (-a, 1], & \text{si } \mathcal{U} = [-1, a); \\ (b, 1], & \text{si } \mathcal{U} = (b, 1]; \\ (c, d), & \text{si } \mathcal{U} = (c, d) \text{ y } 0 < c; \\ (-d, -c), & \text{si } \mathcal{U} = (c, d) \text{ y } d < 0. \end{cases}$$

Los cuales son abiertos en $[0, 1]$.

Por lo cual f es una función abierta. Por otro lado, si tomamos el punto $1 \in [0, 1]$, su imagen inversa es el conjunto $\{-1, 1\}$, el cual no es conexo, así f no es monótona.

EJEMPLO 2.20. Consideremos la función $f : [0, 1] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Se tiene que f es una función monótona y no es abierta.

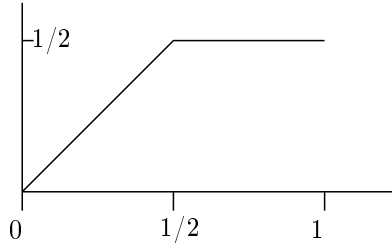


FIGURA 2

Veamos que f es monótona, para esto tomemos un punto $y \in [0, \frac{1}{2}]$.

Si $y \in [0, \frac{1}{2})$ tenemos que $f^{-1}(\{y\}) = \{y\}$, el cual es conexo.

Si $y = \frac{1}{2}$ entonces $f^{-1}(\{y\}) = [\frac{1}{2}, 1]$ el cual es conexo.

Por lo que f es monótona.

Ahora si tomamos el conjunto $\mathcal{U} = (\frac{1}{2}, 1]$ el cual es abierto en $[0, 1]$, tenemos que $f(\mathcal{U}) = \{\frac{1}{2}\}$, el cual no es un abierto en $[0, \frac{1}{2}]$. Por lo que f no es abierta.

El siguiente ejemplo muestra que no toda función atómica es abierta.

EJEMPLO 2.21. Sea $S = \{(x, \sin(\frac{2\pi}{x})) : 0 < x \leq 1\}$ y tomemos $X = Cl_{\mathbb{R}^2}(S)$. Definamos la función $f : X \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$f((x, y)) = x,$$

para cada $(x, y) \in X$. Se tiene que f es atómica pero no es abierta.

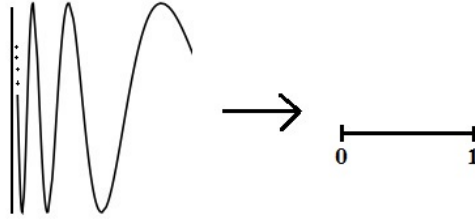


FIGURA 3

Veamos que f es atómica. Para esto sea Q un subcontinuo de X tal que $f(Q)$ es no degenerado. Note que Q puede ser de tres formas:

1. $Q \subset S$, es decir, $Q = \{(x, \sin(\frac{2\pi}{x})) : x_0 \leq x \leq y_0\}$ para $0 < x_0 \leq y_0 \leq 1$.
2. $Q \subset \{0\} \times [-1, 1]$, es decir, $Q = \{0\} \times [a, b]$, con $-1 \leq a \leq b \leq 1$.
3. $Q \cap S \neq \emptyset$ y $Q \cap (\{0\} \times [-1, 1]) \neq \emptyset$, y por la conexidad de Q , éste tiene la forma $(\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin(\frac{2\pi}{x})) : 0 < x \leq x_0\}$, con $0 < x_0 \leq 1$.

Observe que si Q es como en el segundo caso, entonces $f(Q) \subset \{0\}$, es decir la imagen de Q bajo f es degenerado. Así, si Q es un subcontinuo de X tal que el conjunto $f(Q)$ es no degenerado entonces Q tiene que ser como en el caso 1 o como en el caso 3.

Supongamos que Q es como en el primer caso, entonces $Q \subset S$. Note que $f|_S: S \rightarrow (0, 1]$ es una función biyectiva, más aún $f(\{0\} \times [-1, 1]) \subset \{0\}$, es decir, $f(\{0\} \times [-1, 1]) \cap f(S) = f(\{0\} \times [-1, 1]) \cap (0, 1] = \emptyset$, por lo que $f^{-1}(f(Q)) = Q$ pues de no ser así se contradice la inyectividad de $f|_S$.

Ahora, si Q es como en el tercer caso, es decir $Q = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin(\frac{2\pi}{x})) : 0 < x \leq x_0\}$, para algún $0 < x_0 \leq 1$. Entonces $f(Q) = (0, x_0]$ y $f^{-1}(f(Q)) = f^{-1}((0, x_0]) = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin(\frac{2\pi}{x})) : 0 < x \leq x_0\} = Q$.

Así $f^{-1}(Q) = Q$ y, por lo tanto, f es atómica.

La función f no es abierta, pues si tomamos la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]$, tenemos que $\lim \frac{1}{n} = 0$ y $f^{-1}(\{\frac{1}{n}\}) \subset \{(\frac{1}{n}, 0)\}$ por lo que $\lim f^{-1}(\{\frac{1}{n}\}) = \lim(\frac{1}{n}, 0) = (0, 0)$, pero $f^{-1}(\{0\}) = \{0\} \times [-1, 1]$, de modo que $\lim f^{-1}(\{\frac{1}{n}\}) \neq f^{-1}(\lim(\{\frac{1}{n}\}))$, se sigue de la Proposición 2.14 que f no es abierta.

El siguiente ejemplo muestra que existen funciones monótonas que no son atómicas.

EJEMPLO 2.22. Sean $S = \{(x, \sin(\frac{2\pi}{x})) : 0 < x \leq 1\}$ y $L = \{0\} \times [-1, 2]$, tomemos $X = S \cup L$ y definamos $f: X \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$f((x, y)) = x$$

para cada $(x, y) \in X$. Se tiene que f es monótona pero no es atómica.

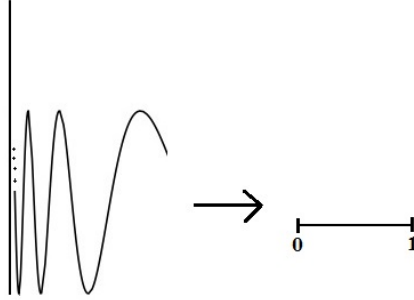


FIGURA 4

Probaremos que f es monótona, sea $x \in [0, 1]$ tenemos dos casos:

Caso 1, si $x \in (0, 1]$ entonces $f^{-1}(\{x\}) = \{(x, \frac{2\pi}{x})\}$, el cual es conexo.

Caso 2, si $x = 0$ entonces $f^{-1}(\{x\}) = \{0\} \times [-1, 2]$ que es conexo.

Por lo que f es monótona. Ahora, si tomamos $Q = \{(x, \sin(\frac{2\pi}{x})) : 0 < x \leq 1\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$, tenemos que su imagen bajo f es $[0, 1]$, el cual es un conjunto no degenerado y $f^{-1}(f(Q)) = f^{-1}([0, 1]) = X \neq Q$, por lo que f no es atómica.

El siguiente ejemplo muestra que la clase de las funciones confluentes es más grande que la clase de las funciones abiertas.

EJEMPLO 2.23. Sean $S = \{(x, \sin(\frac{2\pi}{x})) : 0 < x \leq 1\}$, $I = \{0\} \times [-1, 1]$ y $L = \{0\} \times [-1, 2]$, tomemos $X = S \cup L$, $Y = A \cup I$ y definamos la función

$f : X \rightarrow Y$ dada por

$$f((x, y)) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } y \leq 1; \\ (x, 3 - 2y), & \text{si } y \geq 1. \end{cases}$$

Tenemos que f es confluyente pero no es abierta.

Veamos que f es confluyente, para esto sea Q un subcontinuo de Y , como vimos en el Ejemplo 2.21, Q es de la forma

- (1) $Q \subset S$, es decir, $Q = \{(x, \sin(\frac{2\pi}{x})) : x_0 \leq x \leq y_0\}$ para $0 < x_0 \leq y_0 \leq 1$.
- (2) $Q \subset \{0\} \times [-1, 1]$, es decir, $Q = \{0\} \times [a, b]$, con $-1 \leq a \leq b \leq 1$.
- (3) $Q \cap S \neq \emptyset$ y $Q \cap (\{0\} \times [-1, 1]) \neq \emptyset$, y por la conexidad de Q , éste tiene la forma $(\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin(\frac{2\pi}{x})) : 0 < x \leq x_0\}$, con $0 < x_0 \leq 1$.

Si Q es de la forma (1), dado que para cada $(x, y) \in Q$, $0 < x$ entonces $f^{-1}(Q) = Q$ y $f(Q) = Q$.

Si Q es de la forma (2), tenemos dos casos:

Caso 1. Si $Q = \{0\} \times [a, 1]$ con $-1 \leq a \leq 1$ entonces $f^{-1}(Q) = \{0\} \times [a, \frac{3-a}{2}]$ y $f([a, \frac{3-a}{2}]) = [a, 1] = Q$.

Caso 2. Si $Q = \{0\} \times [a, b]$, con $-1 \leq a \leq b < 1$, entonces $f^{-1}(Q) = \{0\} \times [a, b] \cup \{0\} \times [\frac{3-b}{2}, \frac{3-a}{2}]$, con $f(\{0\} \times [a, b]) = \{0\} \times [a, b] = Q$ y $f(\{0\} \times [\frac{3-b}{2}, \frac{3-a}{2}]) = \{0\} \times [a, b] = Q$.

Si Q es de la forma (3), entonces $Q = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin(\frac{2\pi}{x})) : 0 < x \leq x_0\}$ para algún $x_0 \in (0, 1]$, de modo que

$$f^{-1}(Q) = (\{0\} \times [-1, 2]) \cup \{(x, \sin(\frac{2\pi}{x})) : 0 < x \leq x_0\} \text{ y } f[(\{0\} \times [-1, 2]) \cup \{(x, \sin(\frac{2\pi}{x})) : 0 < x \leq x_0\}] = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin(\frac{2\pi}{x})) : 0 < x \leq x_0\} = Q.$$

Por lo que f es confluyente.

Ahora veamos que f no es abierta. Para esto consideremos la sucesión $\{(\frac{1}{n}, 0)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$, tenemos que $\lim(\frac{1}{n}, 0) = (0, 0)$ y $f^{-1}(\{(\frac{1}{n}, 0)\}) \subset \{(\frac{1}{n}, 0)\}$, así $\lim f^{-1}(\{(\frac{1}{n}, 0)\}) = \lim(\frac{1}{n}, 0) = (0, 0)$, pero $f^{-1}(\{(0, 0)\}) = \{(0, 0), (\frac{3}{2}, 0)\}$, de modo que $\lim f^{-1}(\{(\frac{1}{n}, 0)\}) \neq f^{-1}(\lim(\{(\frac{1}{n}, 0)\}))$, se sigue de la Proposición 2.14 que f no es abierta.

El siguiente ejemplo muestra que hay funciones confluyentes que no son monótonas.

EJEMPLO 2.24. Sean $S = \{(x, \sin(\frac{2\pi}{x})) : 0 < x \leq 1\}$, $I = \{0\} \times [-1, 1]$ y $L = \{0\} \times [-1, 2]$, tomemos $X = S \cup L$, $Y = A \cup I$ y consideremos la función $f : X \rightarrow Y$ como en el Ejemplo 2.23.

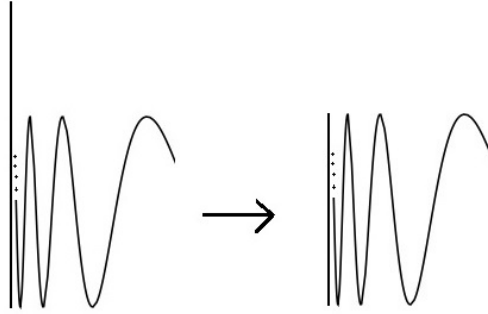


FIGURA 5

Sabemos que f es confluyente. Probaremos que no es monótona, para ver esto, tomemos $x = (0, -1)$ tenemos que $f^{-1}(\{(0, -1)\}) = \{(0, -1), (0, 2)\}$ que no es conexo y por tanto f no es monótona.

El siguiente ejemplo muestra que la clase de funciones confluentes está contenida propiamente en la clase de funciones semiconfluentes y débilmente confluentes.

EJEMPLO 2.25. Sea $f : [-1, 2] \rightarrow [0, 2]$ definida por

$$f(x) = |x|.$$

La función f es semiconfluyente y débilmente confluyente pero no es confluyente.

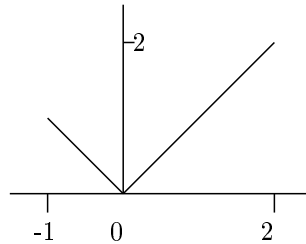


FIGURA 6

Primero probemos que f es semiconfluyente. Sea Q un subcontinuo arbitrario de $[0, 2]$, entonces Q es de la forma $[a, b]$ con $0 \leq a \leq b \leq 2$, tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Si $b \leq 1$ entonces

(i) $f^{-1}(Q) = [-b, -a] \cup [a, b]$ si $0 < a$, tenemos que $f([-b, -a]) = [a, b] = f([a, b])$.

(ii) $f^{-1}(Q) = [-b, b]$ si $a = 0$, y $f([-b, b]) = [0, b] = Q$.

Caso 2. Si $1 \leq a$, entonces $f^{-1}(Q) = [a, b]$, con $f([a, b]) = [a, b]$.

Caso 3. Si $a < 1 < b$, entonces $f^{-1}(Q) = [-1, -a] \cup [a, b]$ y $f([-1, -a]) = [a, 1] \subset [a, b] = f([a, b])$.

Por lo que f es semiconfluyente.

Veamos ahora que f es débilmente confluyente, para esto tomemos un subcontinuo Q de $[0, 2]$, de modo que $Q = [a, b]$, con $0 \leq a \leq b \leq 2$.

Caso 1. Si $1 \in \text{int}(Q)$, entonces $f^{-1}(Q) = [-1, -a] \cup [a, b]$ y $f([a, b]) = [a, b] = Q$

Caso 2. Si $1 \notin \text{int}(Q)$, entonces

(i) $f^{-1}(Q) = [-b, -a] \cup [a, b]$, si $b \leq 1$, con $f([a, b]) = [a, b] = Q$

(ii) $f^{-1}(Q) = [a, b]$, si $1 \leq a$, y $f([a, b]) = [a, b] = Q$.

Por lo tanto f es una función débilmente confluyente.

La función f no es confluyente, pues si tomamos $Q = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ subcontinuo de $[0, 2]$, tenemos que $f^{-1}(Q) = [-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ y $f([-1, \frac{1}{2}]) = [\frac{1}{2}, 1] \neq Q$.

El siguiente ejemplo muestra que existen funciones juntadoras que no son semi-confluentes.

EJEMPLO 2.26. Consideremos la función $f : [-1, 3] \rightarrow [1, 2]$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in [-1, 0]; \\ x, & \text{si } x \in [0, 2]; \\ 4 - x, & \text{si } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

La función f es juntadora y no es semiconfluyente.

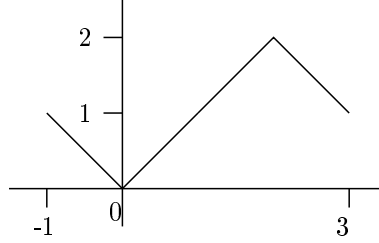


FIGURA 7

Veamos que f es juntadora. Para esto, sea Q un subcontinuo de $[0, 2]$, entonces $Q = [a, b]$ con $0 \leq a \leq b \leq 2$.

Caso 1. Si $b < 1$, entonces

(i) Si $a = 0$ entonces $f^{-1}(Q) = [-b, b]$ que es conexo. Si tomamos componentes K_1 y K_2 , de $f^{-1}(Q)$, tenemos que $f(K_1) = [0, b] = f(K_2)$, de modo que $f(K_1) \cap f(K_2) \neq \emptyset$.

(ii) Si $a > 0$ entonces $f^{-1}(Q) = [-b, -a] \cup [a, b]$, con $f([-b, -a]) = [a, b] = f([a, b])$. Luego $f([-b, -a]) \cap f([a, b]) \neq \emptyset$.

Caso 2. Si $b = 1$, entonces

(i) Si $a = 0$ entonces $f^{-1}(Q) = [-1, 1] \cup \{3\}$ con $f([-1, 1]) = [0, 1]$ y $f(\{3\}) = \{1\}$, de modo que $f([-1, 1]) \cap f(\{3\}) = \{1\} \neq \emptyset$.

(ii) Si $a > 0$ entonces $f^{-1}(Q) = [-b, -a] \cup [a, b] \cup \{3\}$, con $f([-b, -a]) = [a, b] = f([a, b])$ y $f(\{3\}) = \{1\}$. Así para cada K_1 y K_2 componentes de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $1 \in f(K_1) \cap f(K_2)$. Luego $f(K_1) \cap f(K_2) \neq \emptyset$.

Caso 3. Si $a > 1$, entonces

- (i) Si $b = 2$ entonces $f^{-1}(Q) = [a, 4 - a]$ que es conexo.
(ii) Si $b < 2$ entonces $f^{-1}(Q) = [a, b] \cup [4 - b, 4 - a]$, con $f([a, b]) = [a, b]$ y $f([4 - b, 4 - a]) = [a, b]$. Luego $f([a, b]) \cap f([4 - b, 4 - a]) \neq \emptyset$.

Caso 4. Si $a = 1$, entonces

- (i) Si $b = 2$ entonces $f^{-1}(Q) = [1, 3] \cup \{-1\}$ con $f([1, 3]) = [1, 2]$ y $f(\{-1\}) = \{1\}$, de modo que $f([1, 3]) \cap f(\{-1\}) = \{1\} \neq \emptyset$.
(ii) Si $b < 2$ entonces $f^{-1}(Q) = [a, b] \cup [4 - b, 4 - a] \cup \{-1\}$, con $f([-1, a]) = [a, b] = f([4 - b, 4 - a])$ y $f(\{-1\}) = \{1\}$. Así para cada K_1 y K_2 componentes de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $1 \in f(K_1) \cap f(K_2)$. Luego $f(K_1) \cap f(K_2) \neq \emptyset$.

Caso 5. Si $a < 1 < b$, entonces

- (i) Si $a = 0$ y $b < 2$, entonces $f^{-1}(Q) = [-1, b] \cup [4 - b, 3]$ con $f([-1, b]) = [0, b]$, $f([4 - b, 3]) = [1, b]$ y $f([-1, b]) \cap f([4 - b, 3]) = [1, b] \neq \emptyset$.
(ii) Si $a > 0$ y $b = 2$, entonces $f^{-1}(Q) = [-1, -a] \cup [a, 3]$ con $f([-1, -a]) = [a, 1]$, $f([a, 3]) = [a, 2]$ y $f([-1, -a]) \cap f([a, 3]) = [a, 1] \neq \emptyset$.
(iii) Si $0 < a$ y $b < 2$ entonces $f^{-1}(Q) = [-1, -a] \cup [a, b] \cup [4 - b, 3]$, con $f([-1, -a]) = [a, 1]$, $f([a, b]) = [a, b]$ y $f([4 - b, 3]) = [a, b]$. De modo que para cada K_1 y K_2 , componentes de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $1 \in f(K_1) \cap f(K_2)$, se sigue que $f(K_1) \cap f(K_2) \neq \emptyset$.

Por lo tanto f es juntadora.

Ahora, si consideramos el subcontinuo Q de $[0, 2]$ como $Q = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, tenemos que $f^{-1}(Q) = [-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \cup [\frac{5}{2}, 3]$. Note que $f([-1, -\frac{1}{2}]) = [\frac{1}{2}, 1]$ y $f([\frac{5}{2}, 3]) = [1, \frac{1}{3}]$. Además $f([-1, -\frac{1}{2}]) \not\subseteq f([\frac{5}{2}, 3])$ y $f([\frac{5}{2}, 3]) \not\subseteq f([-1, -\frac{1}{2}])$. De modo que f no es semiconfluente.

El siguiente ejemplo muestra que no toda función débilmente confluyente es semiconfluente.

EJEMPLO 2.27. Sea $f : [-2, 2] \rightarrow [-1, 1]$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -||x + 1| - 1|, & \text{si } x \in [-2, 0]; \\ ||1 - x| - 1|, & \text{si } x \in [0, 2]. \end{cases}$$

La función f es débilmente confluyente pero no es semiconfluente.

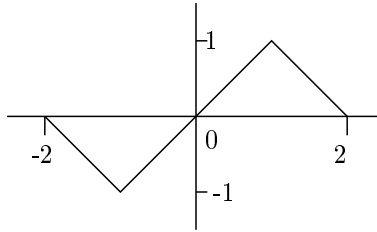


FIGURA 8

Probemos primero que la función f es débilmente confluyente. Sea Q un subcontinuo de $[-1, 1]$. De modo que Q es de la forma $[a, b]$ con $-1 \leq a \leq b \leq 1$, de donde tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Si $0 \notin \text{int}(Q)$, entonces

(i) $Q = [a, b]$ con $0 \leq a$, de modo que $f^{-1}(Q) = [a, b] \cup [2-b, 2-a]$ y $f([a, b]) = [a, b] = Q$.

(ii) $Q = [a, b]$ con $b \leq 0$ por lo que $f^{-1}(Q) = [a, b] \cup [-2-a, -2-b]$ y $f([a, b]) = [a, b] = Q$.

Caso 2. Si $0 \in \text{int}(Q)$, entonces $Q = [a, b]$ con $a < 0 < b$ teniendo así que $f^{-1}(Q) = [a, b] \cup [-2, -2-a] \cup [2-b, 2]$ y $f([a, b]) = [a, b] = Q$.

Por lo tanto f es débilmente confluente.

Ahora f no es semiconfluente ya que si tomamos $Q = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, el conjunto $f^{-1}(Q) = [-2, -\frac{3}{2}] \cup [-\frac{1}{2}, 12] \cup [\frac{3}{2}, 2]$ tiene dos componentes, $C_1 = [-2, -\frac{3}{2}]$ y $C_2 = [\frac{3}{2}, 2]$, con $f(C_1) = [-\frac{1}{2}, 0]$, $f(C_2) = [0, \frac{1}{2}]$ por lo que $f(C_2) \not\subseteq f(C_1)$ y $f(C_1) \not\subseteq f(C_2)$.

Los siguientes ejemplos muestran que las clases de funciones triódicas y juntadoras no son comparables, es decir, existen funciones juntadoras que no son atriódicas y hay funciones que son atriódicas y no juntadoras.

EjemPlo 2.28. Sean $X = [0, 3]$, $Y = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \subset \mathbb{R}^2$ y $f : X \rightarrow Y$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} (2x-1, 0), & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ (0, 2x-1), & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]; \\ (0, 3-2x), & \text{si } x \in [1, \frac{3}{2}]; \\ (2x-3, 0), & \text{si } x \in [\frac{3}{2}, 2]; \\ (5-2x, 0), & \text{si } x \in [2, \frac{5}{2}]; \\ (0, 5-2x), & \text{si } x \in [\frac{5}{2}, 3]. \end{cases}$$

La función f es juntadora pero no es atriódica.

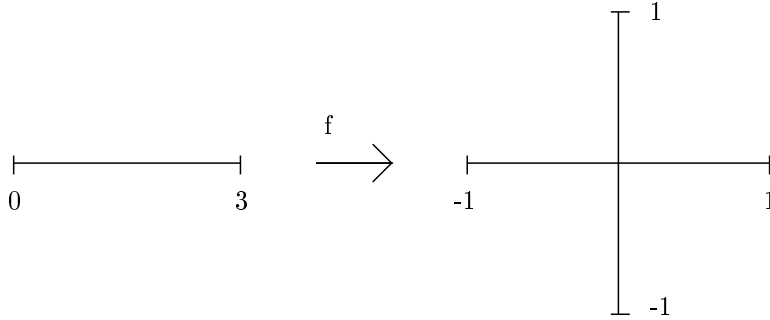


FIGURA 9

Veamos que f es juntadora. Sea Q un subcontinuo de Y y llamemos $K_1 = [-1, 0] \times \{0\}$, $K_2 = \{0\} \times [0, 1]$, $K_3 = [0, 1] \times \{0\}$ y $K_4 = \{0\} \times [-1, 0]$, así que $Y = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$, por lo que tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Si $Q \subset K_i$, para algún $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, entonces

(i) $Q = [a, b] \times \{0\}$, con $-1 \leq a \leq b \leq 0$ si $Q \subset K_1$, por lo que

$$\blacksquare f^{-1}(Q) = [\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}], \text{ si } b < 0;$$

- $f^{-1}(Q) = [\frac{a+1}{2}, \frac{1}{2}] \cup \{\frac{3}{2}\} \cup \{\frac{5}{2}\}$, si $b = 0$, con $f(\{\frac{3}{2}\}) = f(\{\frac{5}{2}\}) \subset \{(0,0)\} \subset Q = f([\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}])$.
- (ii) $Q = \{0\} \times [a, b]$, con $0 \leq a \leq b \leq 1$ si $Q \subset K_2$, de modo que
 - $f^{-1}(Q) = [\frac{a+1}{2}, \frac{3-a}{2}]$, si $b = 1$ y $a > 0$;
 - $f^{-1}(Q) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \cup \{\frac{5}{2}\}$, si $b = 1$ y $a = 0$, con $f = (\{\frac{5}{2}\}) \subset \{(0,0)\} \subset Q = f(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$;
 - $f^{-1}(Q) = [\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}] \cup [\frac{3-b}{2}, \frac{3-a}{2}]$, si $b < 1$ y $a > 0$, con $f([\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}]) = Q = f([\frac{3-b}{2}, \frac{3-a}{2}])$;
 - $f^{-1}(Q) = [\frac{1}{2}, \frac{b+1}{2}] \cup [\frac{3-b}{2}, \frac{3}{2}] \cup \{\frac{5}{2}\}$ si $b < 1$ y $a = 0$ con $f = (\{\frac{5}{2}\}) \subset \{(0,0)\} \subset Q = f([\frac{1}{2}, \frac{b+1}{2}]) = f([\frac{3-b}{2}, \frac{3}{2}])$.
- (iii) $[a, b] \times \{0\}$, con $0 \leq a \leq b \leq 1$ si $Q \subset K_3$, entonces
 - $f^{-1}(Q) = [\frac{a+3}{2}, \frac{5-a}{2}]$, si $b = 1$ y $a > 0$;
 - $f^{-1}(Q) = [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}] \cup \{\frac{1}{2}\}$, si $b = 1$ y $a = 0$, con $f = (\{\frac{1}{2}\}) \subset \{(0,0)\} \subset Q = f(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$;
 - $f^{-1}(Q) = [\frac{a+3}{2}, \frac{b+3}{2}] \cup [\frac{5-b}{2}, \frac{5-a}{2}]$, si $b < 1$ y $a > 0$, con $f([\frac{a+3}{2}, \frac{b+3}{2}]) = Q = f([\frac{5-b}{2}, \frac{5-a}{2}])$;
 - $f^{-1}(Q) = [\frac{3}{2}, \frac{b+3}{2}] \cup [\frac{5-b}{2}, \frac{5}{2}] \cup \{\frac{1}{2}\}$ si $b < 1$ y $a = 0$ con $f = (\{\frac{1}{2}\}) \subset \{(0,0)\} \subset Q = f([\frac{3}{2}, \frac{b+3}{2}]) = f([\frac{5-b}{2}, \frac{5}{2}])$.
- (iv) $Q = \{0\} \times [a, b]$, con $-1 \leq a \leq b \leq 0$ si $Q \subset K_2$, de modo que
 - $f^{-1}(Q) = [\frac{5-b}{2}, \frac{5-a}{2}]$, si $b < 0$;
 - $f^{-1}(Q) = [\frac{5}{2}, \frac{5-a}{2}] \cup \{\frac{3}{2}\} \cup \{\frac{1}{2}\}$, si $b = 0$, con $f(\{\frac{1}{2}\}) = f(\{\frac{3}{2}\}) \subset \{(0,0)\} \subset Q = f([\frac{5}{2}, \frac{5-a}{2}])$.

Caso 2. Si $Q \subset K_i \cup K_j$, tal que $Q \cap (K_i \setminus \{(0,0)\}) \neq \emptyset$ y $Q \cap (K_j \setminus \{(0,0)\}) \neq \emptyset$ para algún $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ con $i \neq j$, entonces

- (i) $Q = ([a, 0] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, b])$, con $-1 \leq a \leq 0$ y $0 \leq b \leq 1$, si $Q \subset K_1 \cup K_2$, por lo que
 - $f^{-1}(Q) = [\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}] \cup [\frac{3-b}{2}, \frac{3}{2}] \cup \{\frac{5}{2}\}$ si $b < 1$ con $f(\{\frac{5}{2}\}) = \{(0,0)\} \subset f([\frac{3-b}{2}, \frac{3}{2}]) = \{0\} \times [0, b] \subset Q = f([a, \frac{b+1}{2}])$;
 - $f^{-1}(Q) = [\frac{a+1}{2}, \frac{3}{2}] \cup \{\frac{5}{2}\}$ si y $b = 1$, con $f(\{\frac{5}{2}\}) = \{(0,0)\} \subset Q = f([\frac{a+1}{2}, \frac{3}{2}])$.
- (ii) $Q = (\{0\} \times [0, a]) \cup ([0, b] \times \{0\})$, con $0 \leq a \leq 1$ y $0 \leq b \leq 1$, si $Q \subset K_1 \cup K_2$, por lo que
 - $f^{-1}(Q) = [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$, si $a = 1$ y $b = 1$;
 - $f^{-1}(Q) = [\frac{1}{2}, \frac{b+3}{2}] \cup [\frac{5-b}{2}, \frac{5}{2}]$, si $a = 1$ y $b < 1$, con $f([\frac{5-b}{2}, \frac{5}{2}]) = [0, b] \times \{0\} \subset Q = f([\frac{1}{2}, \frac{b+3}{2}])$;
 - $f^{-1}(Q) = [\frac{1}{2}, \frac{a+1}{2}] \cup [\frac{3-a}{2}, \frac{5}{2}]$, si $a < 1$ y $b = 1$, con $f([\frac{1}{2}, \frac{a+1}{2}]) = \{0\} \times [0, a] \subset Q = f([\frac{3-a}{2}, \frac{5}{2}])$;
 - $f^{-1}(Q) = [\frac{1}{2}, \frac{a+1}{2}] \cup [\frac{3-a}{2}, \frac{b+3}{2}] \cup [\frac{5-b}{2}, \frac{5}{2}]$, si $a < 1$ y $b < 1$, note que $f(\frac{1}{2}) = 0$, $f(\frac{3}{2}) = 0$, $f(\frac{5}{2}) = 0$ y $\frac{3}{2} \in [\frac{3-a}{2}, \frac{b+3}{2}]$, por lo que $0 \in ([\frac{1}{2}, \frac{a+1}{2}]) \cap ([\frac{3-a}{2}, \frac{b+3}{2}]) \cap ([\frac{5-b}{2}, \frac{5}{2}])$, de modo que cada vez que se intersecta la imagen de dos componentes arbitrarias su intersección es no vacía.
- (iii) $Q = ([0, a] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [b, 0])$, con $0 \leq a \leq 1$ y $-1 \leq b \leq 0$, si $Q \subset K_3 \cup K_4$, por lo que

- $f^{-1}(Q) = [\frac{3}{2}, \frac{a+3}{2}] \cup [\frac{5-a}{2}, \frac{5-b}{2}] \cup \{\frac{1}{2}\}$ si $a < 1$ con $f(\{\frac{1}{2}\}) = \{(0,0)\} \subset f([\frac{3}{2}, \frac{a+3}{2}]) = [0, a] \times \{0\} \subset Q = f([\frac{5-a}{2}, \frac{5-b}{2}])$;
- $f^{-1}(Q) = [\frac{3}{2}, \frac{5-b}{2}]$, si $a = 1$.

(iv) $Q = ([a, 0] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [b, 0])$, con $-1 \leq a \leq 0$ y $-1 \leq b \leq 0$, si $Q \subset K_1 \cup K_4$, por lo que $f^{-1}(Q) = [\frac{a+1}{2}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{5}{2}, \frac{5-b}{2}] \cup \{\frac{3}{2}\}$, note que $f(\frac{1}{2}) = 0$, $f(\frac{3}{2}) = 0$, $f(\frac{5}{2}) = 0$, así que cada vez que intersectemos la imagen de dos componentes distintas, ésta intersección no será vacía pues contendrá al 0.

- (v) $Q = [a, b] \times \{0\}$, con $-1 \leq a \leq 0 \leq b \leq 1$, si $Q \subset K_1 \cup K_3$, por lo que
- $f^{-1}(Q) = [\frac{a+1}{2}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$, si $b = 1$, con $f(\frac{1}{2}) = 0 = f(\frac{3}{2})$, así que $f([\frac{a+1}{2}, \frac{1}{2}]) \cap f([\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]) \neq \emptyset$;
 - $f^{-1}(Q) = [\frac{a+1}{2}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, \frac{3+b}{2}] \cup [\frac{5-b}{2}, \frac{5}{2}]$, si $b < 1$, note que $f(\frac{1}{2}) = 0$, $f(\frac{3}{2}) = 0$, $f(\frac{5}{2}) = 0$, por lo que $f([\frac{a+1}{2}, \frac{1}{2}]) \cap f([\frac{3}{2}, \frac{3+b}{2}]) \cap f([\frac{5-b}{2}, \frac{5}{2}]) \neq \emptyset$.

- (vi) $Q = \{0\} \times [a, b]$ con $0 \leq a \leq 1$ y $-1 \leq b \leq 0$, si $Q \subset K_2 \cup K_4$, por lo que
- $f^{-1}(Q) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \cup [\frac{5}{2}, \frac{5-b}{2}]$, si $a = 1$, con $f(\frac{1}{2}) = 0 = f(\frac{5}{2})$, de modo que $f([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]) \cap f([\frac{5}{2}, \frac{5-b}{2}]) \neq \emptyset$;
 - $f^{-1}(Q) = [\frac{1}{2}, \frac{a+1}{2}] \cup [\frac{3+a}{2}, \frac{3}{2}] \cup [\frac{5}{2}, \frac{5-b}{2}]$, si $a < 1$, note que $f(\frac{1}{2}) = 0$, $f(\frac{3}{2}) = 0$, $f(\frac{5}{2}) = 0$, por lo que $f([\frac{1}{2}, \frac{a+1}{2}]) \cap f([\frac{3+a}{2}, \frac{3}{2}]) \cap f([\frac{5}{2}, \frac{5-b}{2}]) \neq \emptyset$.

Caso 3. Si $Q \subset K_i \cup K_j \cup K_l$, tal que $Q \cap (K_i \setminus \{(0,0)\}) \neq \emptyset$, $Q \cap (K_j \setminus \{(0,0)\}) \neq \emptyset$ y $Q \cap (K_l \setminus \{(0,0)\}) \neq \emptyset$ para $i, j, l \in \{1, 2, 3, 4\}$ con $i \neq j, j \neq l$ y $l \neq i$ entonces:

- (i) Si $Q \subset K_1 \cup K_2 \cup K_3$, es decir, $Q = [a, c] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0, b]$, con $-1 \leq a \leq 0 \leq c \leq 1$ y $0 \leq b \leq 1$, entonces:

- $f^{-1}(Q) = [\frac{a-1}{2}, \frac{5}{2}]$, si $c = b = 1$;
- $f^{-1}(Q) = [\frac{a-1}{2}, \frac{b+1}{2}] \cup [\frac{3-b}{2}, \frac{5}{2}]$ si $c = 1$ y $b < 1$, con $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{5}{2}) = 0$ y $\frac{1}{2} \in [\frac{a-1}{2}, \frac{b+1}{2}]$, por lo que $f([\frac{a-1}{2}, \frac{b+1}{2}]) \cap f([\frac{3-b}{2}, \frac{5}{2}]) \neq \emptyset$;
- $f^{-1}(Q) = [\frac{a-1}{2}, \frac{c+3}{2}] \cup [\frac{5-c}{2}, \frac{5}{2}]$ si $b = 1$ y $c < 1$, con $f(\frac{3}{2}) = f(\frac{5}{2}) = 0$ y $\frac{3}{2} \in [\frac{a-1}{2}, \frac{c+3}{2}]$, por lo que $f([\frac{a-1}{2}, \frac{c+3}{2}]) \cap f([\frac{5-c}{2}, \frac{5}{2}]) \neq \emptyset$;
- $f^{-1}(Q) = [\frac{a-1}{2}, \frac{b+1}{2}] \cup [\frac{3-b}{2}, \frac{c+3}{2}] \cup [\frac{5-c}{2}, \frac{5}{2}]$ si $b < 1$ y $c < 1$, con $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{3}{2}) = f(\frac{5}{2}) = 0$, $\frac{1}{2} \in [\frac{a-1}{2}, \frac{b+1}{2}]$ y $\frac{3}{2} \in [\frac{3-b}{2}, \frac{c+3}{2}]$, así que $f([\frac{a-1}{2}, \frac{b+1}{2}]) \cap f([\frac{3-b}{2}, \frac{c+3}{2}]) \cap f([\frac{5-c}{2}, \frac{5}{2}]) \neq \emptyset$.

Algo análogo sucede cuando $Q \subset K_2 \cup K_3 \cup K_4$.

- (ii) Si $Q \subset K_1 \cup K_2 \cup K_4$, es decir, $Q = ([b, 0] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [a, c])$, con $-1 \leq a \leq 0 \leq c \leq 1$ y $0 \leq b \leq 1$, entonces:

- $f^{-1}(Q) = [\frac{b+1}{2}, \frac{3}{2}] \cup [\frac{5}{2}, \frac{5-a}{2}]$, si $c = 1$, con $f(\frac{3}{2}) = f(\frac{5}{2}) = 0$, por lo que $f([\frac{b+1}{2}, \frac{3}{2}]) \cap f([\frac{5}{2}, \frac{5-a}{2}]) \neq \emptyset$;
- $f^{-1}(Q) = [\frac{b+1}{2}, \frac{c+1}{2}] \cup [\frac{3-c}{2}, \frac{3}{2}] \cup [\frac{5}{2}, \frac{5-a}{2}]$, si $c < 1$, con $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{3}{2}) = f(\frac{5}{2}) = 0$, es decir $f([\frac{b+1}{2}, \frac{c+1}{2}]) \cap f([\frac{3-c}{2}, \frac{3}{2}]) \cap f([\frac{5}{2}, \frac{5-a}{2}]) \neq \emptyset$;

Análogamente si $Q \subset K_1 \cup K_3 \cup K_4$.

Caso 4. Si $Q = ([a, b] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [c, d])$, con $-1 \leq a \leq b \leq 1$ y $-1 \leq c \leq d \leq 1$, entonces:

- $f^{-1}(Q) = [\frac{a+1}{2}, \frac{5-c}{2}]$, si $b = d = 1$.
- $f^{-1}(Q) = [\frac{a+1}{2}, \frac{b+3}{2}] \cup [\frac{5-b}{2}, \frac{5-c}{2}]$, si $d = 1$ y $b < 1$, con $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{5}{2}) = 0$, $\frac{1}{2} \in [\frac{a+1}{2}, \frac{b+3}{2}]$, $\frac{5}{2} \in [\frac{5-b}{2}, \frac{5-c}{2}]$, es decir, $f([\frac{a+1}{2}, \frac{b+3}{2}]) \cap f([\frac{5-b}{2}, \frac{5-c}{2}]) \cap f([\frac{5}{2}, \frac{5-a}{2}]) \neq \emptyset$; Análogamente podemos probar cuando $b = 1$ y $d < 1$.

- $f^{-1}(Q) = [\frac{a+1}{2}, \frac{d+1}{2}] \cup [\frac{3-d}{2}, \frac{b+3}{2}] \cup [\frac{5-b}{2}, \frac{5-c}{2}]$, si $d < 1$ y $b < 1$, con $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{3}{2}) = f(\frac{5}{2}) = 0$, $\frac{1}{2} \in [\frac{a+1}{2}, \frac{d+1}{2}]$, $\frac{3}{2} \in [\frac{3-d}{2}, \frac{b+3}{2}]$, $\frac{5}{2} \in [\frac{5-b}{2}, \frac{5-c}{2}]$, es decir, $f([\frac{a+1}{2}, \frac{d+1}{2}] \cap [\frac{3-d}{2}, \frac{b+3}{2}]) \cap f([\frac{3-d}{2}, \frac{b+3}{2}]) \cap f([\frac{5-b}{2}, \frac{5-c}{2}]) \neq \emptyset$.

Podemos concluir que cada vez que intersectemos la imagen de dos componentes distintas de $f^{-1}(Q)$, esta intersección no es vacía, como se desea. Por lo tanto f es juntadora.

Veamos ahora que f no es atriódica, para esto, sea

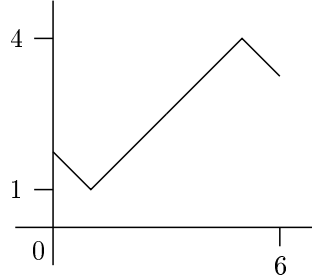
$$Q = ([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]),$$

tenemos que $f^{-1}(Q) = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \cup [\frac{5}{4}, \frac{7}{4}] \cup [\frac{9}{4}, \frac{11}{4}]$. Llamemos $C_1 = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, $C_2 = [\frac{5}{4}, \frac{7}{4}]$ y $C_3 = [\frac{9}{4}, \frac{11}{4}]$. Note que $f(C_1) \cup f(C_2) = ([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, \frac{1}{2}]) \neq Q$, $f(C_2) \cup f(C_3) = ([0, \frac{1}{2}] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) \neq Q$ y $f(C_1) \cup f(C_3) = ([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = Q$, pero $f(C_2) = (\{0\} \times [0, \frac{1}{2}]) \cup ([0, \frac{1}{2}] \times \{0\}) \not\subset ([-\frac{1}{2}, 0] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, \frac{1}{2}]) = f(C_1)$ y $f(C_2) \not\subset ([0, \frac{1}{2}] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-\frac{1}{2}, 0])$, por lo que f no es atriódica.

EJEMPLO 2.29. Consideremos $f : [0, 6] \rightarrow [1, 5]$ definida por

$$f((x, y)) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } x \in [0, 1]; \\ x, & \text{si } x \in [1, 5]; \\ 10 - x, & \text{si } x \in [5, 6]. \end{cases}$$

La función f es débilmente confluyente y atriódica pero no es juntadora.



Veamos que f es débilmente confluyente. Sea Q un subcontinuo de $[1, 4]$, entonces Q es de la forma $[a, b]$, con $1 \leq a \leq b \leq 4$. Note que $[a, b] \in f^{-1}(Q)$. Sea K la componente de $f^{-1}(Q)$ que contiene a $[a, b]$, entonces $[a, b] = f([a, b]) \subset f(K) \subset Q$. De modo que $f(K) = [a, b]$. Por lo tanto f es débilmente confluyente. Luego, por el Teorema 2.13 f es una función atriódica.

Consideremos el subcontinuo Q de $[1, 4]$ como $[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}]$. De modo que $f^{-1}(Q) = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, \frac{9}{2}] \cup [\frac{11}{2}, 6]$. Note que $f([0, \frac{1}{2}]) = [\frac{3}{2}, 2]$ y $f([\frac{11}{2}, 6]) = [4, \frac{9}{2}]$. Luego, $f([0, \frac{1}{2}]) \cap f([\frac{11}{2}, 6]) = \emptyset$. Por lo tanto, f no es juntadora.

Otras funciones especiales entre espacios métricos compactos

En este capítulo hacemos un análisis entre las clases de funciones monótonas, abiertas, casi interiores, confluentes, *OM* y *MO*, usando el concepto de funciones ligeras.

1. Funciones casi interiores

DEFINICIÓN 3.1. Una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos, $f : X \rightarrow Y$, es **casi interior en el punto** $y \in Y$, si para cada conjunto abierto $\mathcal{U}$ de X tal que existe una componente, C , de $f^{-1}(\{y\})$ con $C \subset \mathcal{U}$, se tiene que $y \in \text{int}_Y(f(\mathcal{U}))$. Decimos que $f : X \rightarrow Y$ es **casi interior**, si f es casi interior en cada uno de los puntos de Y .

TEOREMA 3.2. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos, tenemos que

- (i) si f es abierta, entonces f es casi interior.
- (ii) si f es monótona, entonces f es casi interior.

DEMOSTRACIÓN. Sean $y \in Y$ y $\mathcal{U}$ un conjunto abierto de X tal que existe una componente, C , de $f^{-1}(\{y\})$ tal que $C \subset \mathcal{U}$.

(i) Supongamos que f es abierta. Veamos que f es casi interior, notemos que $f(C) = f(y)$ y $f(y) \in f(\mathcal{U})$ por lo que $f(C) \subset f(\mathcal{U})$. Como f es abierta, tenemos que $f(\mathcal{U}) = \text{int}_Y(f(\mathcal{U}))$, de donde $f(C) \subset \text{int}_Y(f(\mathcal{U}))$, como se desea. Por lo tanto f es casi interior.

(ii) Supongamos que f es monótona y sea $y \in Y$. Probaremos que f es casi interior en el punto y . Para esto supondremos lo contrario, es decir, que existe un conjunto abierto, $\mathcal{V}$ de X tal que cualquier componente C de $f^{-1}(\{y\})$ con $C \subset \mathcal{V}$, se tiene que $y \notin \text{int}_Y(f(\mathcal{V}))$. Así que $y \in \text{fr}(f(\mathcal{V}))$, de modo que $y \in \text{fr}(Y \setminus f(\mathcal{V}))$, por lo que es posible encontrar una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $Y \setminus f(\mathcal{V})$ tal que $\lim y_n = y$. Como f es continua, por la Proposición 1.32, se tiene que $\limsup f^{-1}(\{y_n\}) \subset f^{-1}(\{y\})$. Además, puesto que f es monótona se tiene que $f^{-1}(\{y\})$ es un conjunto conexo, sea $C = f^{-1}(\{y\})$. Esto es $\limsup f^{-1}(\{y_n\}) \subset C$.

Ahora, como $y_n \in Y \setminus f(\mathcal{V})$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $f^{-1}(\{y_n\}) \subset X \setminus \mathcal{V}$. Dado que f es suprayectiva, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $x_n \in X$ tal que $f(x_n) = y_n$. Note que $x_n \in X \setminus \mathcal{V}$ el cual es un conjunto cerrado, y así compacto, por lo que podemos encontrar $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ subsucesión convergente de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Sea $x = \lim x'_n$. Como $X \setminus \mathcal{V}$ es cerrado entonces $x \in X \setminus \mathcal{V}$, además $x \in \limsup f^{-1}(\{y_n\})$. Como f es monótona, entonces $C = f^{-1}(\{y\})$, por lo que $x \in C \subset \mathcal{V}$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $y \in \text{int}_Y(f(\mathcal{V}))$.

Por lo que podemos concluir que f es casi interior en el punto y . Por lo tanto, f es casi interior. $\square$

TEOREMA 3.3. *Sean $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos y $y \in Y$. La función f es casi interior en y , si y sólo si, para cada sucesión, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en Y tal que $\lim y_n = y$ y para cada componente C de $f^{-1}(\{y\})$, se tiene que $\limsup f^{-1}(\{y_n\}) \cap C \neq \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es casi interior en el punto y . Sean $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en Y tal que $\lim y_n = y$ y C una componente de $f^{-1}(\{y\})$. Probaremos que $\limsup f^{-1}(\{y_n\}) \cap C \neq \emptyset$.

Para esto, supongamos que $\limsup f^{-1}(\{y_n\}) \cap C = \emptyset$. Por la Proposición 1.30 y la Observación 1.4 se tiene que $\limsup f^{-1}(\{y_n\})$ y C son conjuntos cerrados y no vacíos. Como X es un espacio métrico entonces es normal, por lo que podemos encontrar dos abiertos, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$, en X , tales que $\limsup f^{-1}(\{y_n\}) \subset \mathcal{V}$ y $C \subset \mathcal{U}$ con $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. De modo que $\mathcal{V} \cap Cl_X(\mathcal{U}) = \emptyset$. Como $\limsup f^{-1}(\{y_n\}) \subset \mathcal{V}$ entonces $\limsup f^{-1}(\{y_n\}) \cap Cl_X(\mathcal{U}) = \emptyset$.

Por otro lado, por hipótesis, $y \in int_Y(f(\mathcal{U}))$. Así, puesto que $\lim y_n = y$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para cada $n \geq N$, $y_n \in int_Y(f(\mathcal{U})) \subset f(\mathcal{U})$.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, fijemos $x_n \in \mathcal{U}$ tal que $f(x_n) = y_n$. De donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in f^{-1}(\{y_n\}) \cap \mathcal{U}$. Luego existe una subsucesión $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $\lim x'_n = x$ para algún $x \in Cl_X(\mathcal{U})$. Note que $x \in \limsup f^{-1}(\{y_n\})$ y $x \in Cl_X(\mathcal{U})$, es decir, $\limsup f^{-1}(\{y_n\}) \cap Cl_X(\mathcal{U}) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. De manera que $\limsup f^{-1}(\{y_n\}) \cap C \neq \emptyset$.

Recíprocamente, supongamos que para cada sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en Y que converge a y y para cada componente C de $f^{-1}(\{y\})$, se tiene que $\limsup f^{-1}(\{y_n\}) \cap C \neq \emptyset$. Sean C una componente de $f^{-1}(\{y\})$ y $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en X tal que $C \subset \mathcal{U}$. Probaremos que $y \in int_Y(f(\mathcal{U}))$, para esto supongamos que $y \notin int_Y(f(\mathcal{U}))$. Por lo que $y \in fr_Y(f(\mathcal{U})) = fr_Y(Y \setminus f(\mathcal{U}))$. Podemos considerar una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $Y \setminus f(\mathcal{U})$ convergente a y . Por hipótesis, $\limsup f^{-1}(\{y_n\}) \cap C \neq \emptyset$. Por un lado, como f es suprayectiva, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $x_n \in X$ tal que $f(x_n) = y_n$. Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X \setminus \mathcal{U}$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(\{y_n\}) \subset X \setminus \mathcal{U}$. De manera que

$$(1) \quad f^{-1}(\{y_n\}) \cap \mathcal{U} = \emptyset, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Veamos que $\limsup f^{-1}(\{y_n\}) \subset X \setminus \mathcal{U}$. Sea $x \in \limsup f^{-1}(\{y_n\})$, supongamos que $x \in \mathcal{U}$. Luego existe un subconjunto infinito J de $\mathbb{N}$ tal que $\mathcal{U} \cap f^{-1}(\{y_n\}) \neq \emptyset$, para cada $n \in J$; lo cual contradice (1), de modo que $x \in X \setminus \mathcal{U}$. Por lo tanto $\limsup f^{-1}(\{y_n\}) \subset X \setminus \mathcal{U}$. Por otro lado, como $C \subset \mathcal{U}$ se tiene que $\limsup f^{-1}(\{y_n\}) \cap C = \emptyset$, lo cual contradice la hipótesis. Por lo que podemos concluir que $y \in int_Y(f(\mathcal{U}))$. $\square$

Del Teorema 3.3 tenemos la siguiente consecuencia.

COROLARIO 3.4. *Una función $f : X \rightarrow Y$ entre espacios métricos compactos es casi interior si, y sólo si, para cada $y \in Y$ y para cada sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en Y tal que $\lim y_n = y$, se tiene que $\limsup f^{-1}(\{y_n\}) \cap C \neq \emptyset$, para cada componente C de $f^{-1}(\{y\})$.*

DEFINICIÓN 3.5. Una función $f : X \rightarrow Y$ continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos es una función **ligera** si para cada $y \in Y$, se tiene que el conjunto $f^{-1}(\{y\})$ es totalmente desconexo.

El siguiente resultado nos muestra que el ser una función ligera se hereda a los subespacios conexos.

PROPOSICIÓN 3.6. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función ligera entre espacios métricos compactos y A es un subespacio conexo de X , entonces la restricción

$$f|_A : A \rightarrow f(A)$$

es también una función ligera.

DEMOSTRACIÓN. Sea $g = f|_A$ veamos que g es ligera, es claro que g es continua y suprayectiva. Ahora, sean $y \in f(A)$ y B un subconjunto conexo de $g^{-1}(\{y\})$. Note que $g^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\{y\}) \cap A$. Luego $B \subset f^{-1}(\{y\})$. Como f es ligera y B es conexo en $A \subset X$, entonces B es conexo en X . Se sigue que B es degenerado. Por lo tanto g es ligera. $\square$

La siguiente proposición prueba que la clase de las funciones ligeras es cerrada bajo la composición de funciones. Este resultado debería formar parte de la Sección 7.1, sin embargo lo vamos a usar en este capítulo.

PROPOSICIÓN 3.7. Sean X, Y, Z espacios métricos compactos, $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones continuas y suprayectivas. Si las funciones f y g son ligeras, entonces la función $g \circ f : X \rightarrow Z$ es ligera.

DEMOSTRACIÓN. Sean $z \in Z$ y A un subconjunto de X conexo con $A \subset (g \circ f)^{-1}(\{z\})$. Como $(g \circ f)^{-1}(\{z\}) = f^{-1}(g^{-1}(\{z\}))$, se tiene que $f(A) \subset g^{-1}(\{z\})$. Dado que g es ligera y $f(A) \subset Y$ es conexo, tenemos que $f(A)$ es degenerado, es decir, existe $y \in Y$ tal que $f(A) = \{y\}$. Como f es ligera, $f^{-1}(A) = f^{-1}(\{y\})$ es totalmente desconexo. Además, puesto que $A \subset f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{y\})$, se concluye que A sólo puede tener un elemento. Por lo tanto, $g \circ f$ es una función ligera. $\square$

TEOREMA 3.8. Si $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ son funciones continuas y suprayectivas entre espacios métricos tales que g es ligera y $g \circ f$ es casi interior, entonces f es casi interior.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{U} \subset Y$ un abierto y $y \in \mathcal{U}$. Llamemos z al punto $g(y)$ y tomemos una componente, C , de $f^{-1}(\{y\})$. Note que $C \subset (g \circ f)^{-1}(\{z\})$, sea C' la componente de $f^{-1} \circ g^{-1}(\{z\})$ que contiene a C . Tenemos que $(g \circ f)(C') = \{z\}$. Así que $f(C') \subset g^{-1}(\{z\})$, pero como g es una función ligera, entonces $f(C')$ es un conjunto degenerado, por lo que $f(C') = \{y\}$. Así $C' \subset f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(g^{-1}(\{z\}))$, por lo que C' debe ser una componente de $f^{-1}(\{y\})$, en otras palabras tenemos que $C = C'$. Como

$$C' = C \subset f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(\mathcal{U})$$

donde $f^{-1}(\mathcal{U})$ es un conjunto abierto y $g \circ f$ es casi interior, de modo que $z \in \text{int}(g \circ f(f^{-1}(\mathcal{U}))) = \text{int}(g(\mathcal{U}))$. Esto implica que $g(\mathcal{U}) \subset \text{int}(g(\mathcal{U}))$, es decir $g(\mathcal{U})$ es un abierto. Por lo tanto g es abierta. $\square$

Con el resultado que sigue vamos a probar que las funciones casi interiores son confluentes y que las funciones casi interiores coinciden con las funciones OM. Para una prueba de éste vea [12, Teorema 13.3, p.279].

TEOREMA 3.9. *(de factorización monótona ligera) Sean X y Y espacios métricos compactos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces existe un espacio métrico compacto Z y funciones $g : X \rightarrow Z$ y $h : Z \rightarrow Y$ tales que $f = h \circ g$ con g monótona y h ligera.*

La siguiente proposición prueba que la clase de las funciones confluentes es cerrada bajo la composición. También este resultado debería formar parte de la Sección 7.1, sin embargo lo vamos a usar para probar que las funciones casi interior son confluentes.

PROPOSICIÓN 3.10. *Sean X, Y y Z espacios métricos compactos. Si $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ son funciones confluentes entonces $g \circ f$ es una función confluente.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un subcontinuo, Q , de Z y K una componente de $(g \circ f)^{-1}(\{Q\})$. Veamos que $g \circ f(K) = Q$. Sean C la componente de $g^{-1}(Q)$ tal que $f(K) \subset C$ y E la componente $f^{-1}(C)$ tal que $K \subset E$. Obsérvese que $K \subset E \subset f^{-1}(C) \subset f^{-1}(g^{-1}(Q))$, así $K \subset E \subset f^{-1}(g^{-1}(Q)) \subset K$, de modo que $E = K$, pues K es una componente de $(g \circ f)^{-1}(Q)$. Ahora como $g^{-1}(Q)$ es cerrado en Y , se sigue que C es un subcontinuo de Y y dado que f es confluente, se tiene que $f(E) = C$. Como g es confluente y Q es un subcontinuo de Z se tiene que $Q = g(C) = g(f(E))$, es decir $g(f(K)) = g \circ f(K) = Q$, de esta manera tenemos que $g \circ f$ es una función confluente. $\square$

TEOREMA 3.11. *Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Si f es casi interior entonces f es confluente.*

DEMOSTRACIÓN. Como f es una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos, por el teorema de factorización monótona ligera (Teorema 3.9), existe un espacio métrico compacto, Z , y funciones $g : X \rightarrow Z$ y $h : Z \rightarrow Y$ tales que g es monótona, h es ligera y $f = h \circ g$. Como g es monótona, por el Teorema 2.8 tenemos que g es confluente. Aplicando el Teorema 3.8 obtenemos que h es abierta. Por el Teorema 2.18, h es confluente. Se sigue de la Proposición 3.10 que $h \circ g = f$ es confluente. $\square$

Similarmente, el resultado que sigue debería formar parte de la Sección 7.1, sin embargo, lo utilizaremos para probar que las funciones casi interior coincide con las funciones *OM*.

PROPOSICIÓN 3.12. *Sean X, Y y Z espacios métricos compactos, $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones continuas y suprayectivas. Si f y g son casi interiores, entonces $g \circ f$ también lo es.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $z \in Z$ y $\mathcal{U}$ un conjunto abierto de X que contiene a una componente C de $(g \circ f)^{-1}(\{z\})$. Note que C es cerrado en $(g \circ f)^{-1}(\{z\})$, este último es un cerrado en X , por lo que es compacto y así un continuo. Como f es una función continua, entonces $f(C)$ es un subcontinuo de Y , con $g(f(C)) \subset \{z\}$, de modo que $f(C) \subset g^{-1}(\{z\})$. Sea C' la componente de $g^{-1}(\{z\})$ que contiene a $f(C)$. Tenemos que

$$C \subset f^{-1}(f(C)) \subset f^{-1}(C') \subset f^{-1}(g^{-1}(\{z\})) = (g \circ f)^{-1}(\{z\}),$$

de modo que C es una componente de $f^{-1}(C')$. Por la Teorema 3.11 tenemos que f es confluente. Luego, se sigue que $f(C) = C'$.

Ahora, sean $y \in C'$ y $x \in C$ tal que $f(x) = y$ y, sea C_y la componente de $f^{-1}(\{y\})$ que contiene a x . Así

$$C \cap C_y \neq \emptyset \text{ y } C_y \subset f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(C'),$$

de modo que $C_y \subset C \subset \mathcal{U}$, como f es casi interior tenemos que $y \in \text{int}(f(\mathcal{U}))$, para cada $y \in C'$, de modo que $C' \subset \text{int}(f(\mathcal{U}))$. Ahora, como g es casi interior se tiene que $z \in \text{int}(g(\text{int}(f(\mathcal{U})))) \subset \text{int}(g \circ f(\mathcal{U}))$. De donde $z \in \text{int}(g \circ f(\mathcal{U}))$ y, por lo tanto, $g \circ f$ es casi interior. $\square$

2. Funciones OM y MO

DEFINICIÓN 3.13. *Una función continua y suprayectiva f entre espacios métricos compactos es una función **OM** si existen funciones g y h tales que $f = h \circ g$ donde g es monótona y h es abierta.*

DEFINICIÓN 3.14. *Una función continua y suprayectiva f entre espacios métricos compactos es una función **MO** si existen funciones g y h tales que $f = h \circ g$ donde g es abierta y h es monótona.*

Una consecuencia inmediata de la definición es la siguiente.

COROLARIO 3.15. *Sea f una función continua y suprayectiva. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) f es casi interior;
- (ii) f es una función OM;
- (iii) f se puede escribir como la composición $f = h \circ g$ de dos funciones donde g es monótona y h es ligera y abierta.

DEMOSTRACIÓN.

(i) $\Rightarrow$ (iii)] Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \rightarrow Y$ una función casi interior. En particular f es una función continua y suprayectiva, así por el Teorema 3.9 existe un espacio métrico compacto, Z , y funciones g y h tales que $g : X \rightarrow Z$, $h : Z \rightarrow Y$ y $f = h \circ g$ con g monótona y h ligera. Por el Teorema 3.8, h es abierta, por lo que f se puede escribir como la composición $f = h \circ g$ con g monótona y h abierta y ligera.

(iii) $\Rightarrow$ (ii)] Si f se puede escribir como la composición $f = h \circ g$ con g monótona y h abierta y ligera, entonces f es una función OM.

(ii) $\Rightarrow$ (i)] Si f se puede escribir como la composición $f = h \circ g$ con g monótona y h abierta. Como g es monótona por el Teorema 3.2 tenemos que g es casi interior. Como h es abierta por el Teorema 3.2, h es casi interior. Se sigue de la Proposición 3.12 que $h \circ g = f$ es una función casi interior. $\square$

Veamos que la clase de las funciones MO está contenida en la clase de las funciones OM.

TEOREMA 3.16. *Sea f una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos. Si f es una función MO entonces es una función OM.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f una función MO, de modo que existen funciones g y h tales que $f = h \circ g$ con g es abierta y h es monótona. Por el Teorema 3.2 las funciones g y h son casi interiores. Ahora por la Proposición 3.12, $h \circ g = f$ es casi interior. Se sigue del Corolario 3.15 que f es una función OM. $\square$

TEOREMA 3.17. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos. Si f es monótona entonces f es una función MO.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es monótona. Consideremos la función identidad $I_X : X \rightarrow X$ y denotemos $g = I_X$. Es claro que g es un homeomorfismo y así una función abierta. Ahora, para cada $x \in X$ se tiene que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x)$. Así podemos concluir que f es una función MO . $\square$

TEOREMA 3.18. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos. Si f es abierta entonces f es una función MO .*

DEMOSTRACIÓN. Sea f una función abierta. Consideremos la función identidad $I_Y : Y \rightarrow Y$ y denotemos $g = I_Y$. Es claro que g es un homeomorfismo y así una función monótona. Ahora, para cada $x \in X$ se tiene que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x)$. Así podemos concluir que f es una función MO . $\square$

TEOREMA 3.19. *Sea f una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos. Si f es una función OM entonces f es confluyente.*

DEMOSTRACIÓN. Como f es una función OM , por el Corolario 3.15, tenemos que f es casi interior. Se sigue del Teorema 3.11 que f es confluyente. $\square$

3. Ejemplos de funciones

En esta parte, mostramos que algunas contenciones entre las clases de funciones son propias, con los ejemplos que siguen. Iniciamos con un ejemplo que muestra que no toda función MO es una función monótona.

EJEMPLO 3.20. *Consideremos la función $f : [-2, 2] \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$, definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 1, & \text{si } x \in [-2, -1] \cup [1, 2]; \\ 0, & \text{si } x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Se tiene que f es una función MO y no es monótona.

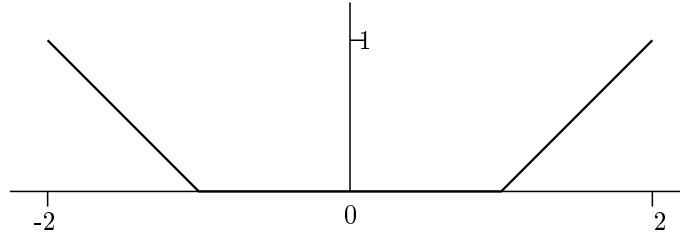


FIGURA 1

Veamos que f es MO . Sean $h : [-2, 2] \rightarrow [0, 2]$ y $g : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ dadas por

$$h(x) = |x|, \text{ para cada } x \in [-2, 2] \text{ y,}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, 1]; \\ x - 1, & \text{si } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

No es difícil probar que h es abierta, g es monótona y $f = g \circ h$. Por lo tanto, f es una función MO . Por otro lado, si tomamos el punto $1 \in [-2, 2]$ se tiene que el conjunto $h^{-1}(\{1\}) = \{-2, 2\}$, el cual no es conexo. Por lo cual f no es monótona.

El siguiente ejemplo muestra que hay funciones MO que no son abiertas.

EJEMPLO 3.21. Consideremos la función h como en el Ejemplo 3.20,

$$h(x) = \begin{cases} |x| - 1, & \text{si } x \in [-2, -1] \cup [1, 2]; \\ 0, & \text{si } x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Se tiene que h es una función MO y no es abierta.

Sabemos que h es una función MO . Ahora, si tomamos el conjunto abierto $\mathcal{U} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, tenemos que $h(\mathcal{U}) = \{0\}$ el cual no es un conjunto abierto en $[0, 1]$. Por lo tanto h no es abierta.

El siguiente ejemplo muestra que la clase de las funciones OM contiene a la clase de las funciones MO .

EJEMPLO 3.22. Consideremos la función $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}]; \\ 2 - 3x, & \text{si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]; \\ 0, & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Se tiene que h es una función OM y no es una función MO .

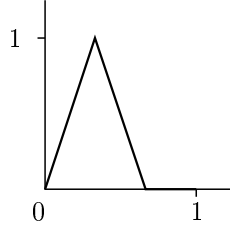


FIGURA 2

Consideremos las funciones $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ y $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & \text{si } x \in [0, \frac{2}{3}]; \\ 1, & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2 - 2x, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Claramente f es monótona, g es abierta y $h = g \circ f$. Así h es una función OM . Probaremos que h no es una función MO . Supongamos por el contrario, es decir, supongamos que h es una función MO . Luego, es posible escribir a h como $g_0 \circ f_0$, donde f_0 es abierta y g_0 es monótona. Toda imagen abierta no degenerada, del intervalo cerrado es un arco, ver [3, Teorema 3.2, p.193]. Por otro lado, por la Proposición 2.8 tenemos que si y_0 es un punto extremo de un arco, entonces $f_0(y_0)$ es un punto extremo. De aquí se sigue que $A = f_0([0, 1])$ es un arco y $b = f_0(1)$ es un punto extremo de A . Sea $\mathcal{U} = (\frac{2}{3}, 1]$, como f_0 es abierta, $f_0(\mathcal{U})$ es un conjunto abierto en A y el conjunto $\mathcal{V} = f_0^{-1}(f_0(\mathcal{U}))$ es un conjunto abierto en $[0, 1]$. El punto $a = f_0(0)$ es también un punto extremo de A con $g_0(a) = h(0) = h(1) = g_0(b)$. Como g_0 es monótona, si a y b son los puntos extremos de A tendríamos que $A \subset g_0^{-1}(g_0(a))$. De donde

$$h([0, 1]) = g_0(A) = g_0(a) = h(0) = \{0\},$$

lo cual no es posible, de este modo tenemos que $a = b$ y

$$0 \in f_0^{-1}(b) = f_0^{-1}(f_0(1)) \subset f_0^{-1}(f_0(\mathcal{U})) = \mathcal{V}.$$

Así que $\mathcal{V}$ es una vecindad de 0 en $[0, 1]$ y, por la suprayectividad de f_0

$$h(\mathcal{V}) = g_0 \circ f_0(f_0^{-1}(f_0(\mathcal{U}))) = g_0 \circ f_0(\mathcal{U}) = h(\mathcal{U}) = \{0\}.$$

Pero esto no sucede pues h no es constante para alguna vecindad de 0. Por lo tanto h no es una función MO .

Algunas clases de funciones generadas

Las clases de funciones que vamos a considerar en el resto de la tesis son clases de funciones continuas y suprayectivas definidas entre espacios métricos compactos.

En este capítulo vamos a describir algunos métodos que son usados para generar nuevas clases de funciones con las clases de funciones dadas en los Capítulos 2 y 3.

1. Composición de clases de funciones

Por supuesto que en la siguiente definición el dominio y codominio de las funciones en cuestión son espacios métricos compactos o en algunos casos continuos.

DEFINICIÓN 4.1. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos clases de funciones que contienen a la clase de los homeomorfismos, definimos la *composición* de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, como:

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \{g \circ f : g \in \mathbf{A}, f \in \mathbf{B}\}.$$

DEFINICIÓN 4.2. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos clases de funciones que contienen a la clase de los homeomorfismos, definimos y denotamos por

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{f : f \in \mathbf{A} \text{ o } f \in \mathbf{B}\}.$$

De la Definición 4.1 tenemos las siguientes consecuencias.

PROPOSICIÓN 4.3. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos clases de funciones que contienen a la clase de los homeomorfismos. Entonces:

- (i) $\mathbf{A} \subset \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ y
- (ii) $\mathbf{B} \subset \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$.

DEMOSTRACIÓN. Primero probaremos el inciso (i). Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre espacios métricos compactos tal que $f \in \mathbf{A}$, entonces, la función identidad en X , $I_X : X \rightarrow X$, es un homeomorfismo, por lo que $I_X \in \mathbf{B}$. Note que $f = f \circ I_X$, con $f \in \mathbf{A}$ e $I_X \in \mathbf{B}$. Luego, $f = f \circ I_X \in \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$.

Ahora, demostraremos el inciso (ii). Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre espacios métricos compactos tal que $f \in \mathbf{B}$, entonces, la función identidad en Y , $I_Y : Y \rightarrow Y$, es un homeomorfismo, de modo que $I_Y \in \mathbf{A}$. Note que $f = I_Y \circ f$, con $I_Y \in \mathbf{A}$ y $f \in \mathbf{B}$. Luego, $f = I_Y \circ f \in \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$. $\square$

De la Proposición 4.3 tenemos los siguientes corolarios.

COROLARIO 4.4. Si $\mathbf{A}$ es una clase de funciones que contiene a la clase de los homeomorfismos. Entonces

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{A} \circ \mathbf{A}.$$

COROLARIO 4.5. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos clases de funciones que contienen a la clase de los homeomorfismos. Entonces

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \subset \mathbf{A} \circ \mathbf{B}.$$

PROPOSICIÓN 4.6. *Si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ son clases de funciones que contienen a la clase de los homeomorfismos con $\mathbf{A} \subset \mathbf{C}$ y $\mathbf{B} \subset \mathbf{D}$. Entonces*

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{B} \subset \mathbf{C} \circ \mathbf{D}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \circ g \in \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$, entonces $f \in \mathbf{A}$, $g \in \mathbf{B}$, como $\mathbf{A} \subset \mathbf{C}$ y $\mathbf{B} \subset \mathbf{D}$ entonces $f \in \mathbf{C}$ y $g \in \mathbf{D}$, por lo que $f \circ g \in \mathbf{C} \circ \mathbf{D}$. Por lo tanto $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} \subset \mathbf{C} \circ \mathbf{D}$. $\square$

PROPOSICIÓN 4.7. *Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son clases de funciones que contienen a la clase de los homeomorfismos tales que $\mathbf{A} \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) \subset \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$. Entonces $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} \subset \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f : Y \rightarrow Z$ y $g : X \rightarrow Y$ funciones entre espacios métricos compactos tales que $f \in \mathbf{A}$ y $g \in \mathbf{B}$. Consideremos $I_X : X \rightarrow X$ la función identidad la cual es un homeomorfismo, de donde $I_X \in \mathbf{A}$ y $g = g \circ I_X$, de modo que $f \circ g = f \circ (g \circ I_X)$ así $f \circ (g \circ I_X) \in \mathbf{A} \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{A})$. Por hipótesis, $f \circ g \in \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$ y así $(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) \subset \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$. $\square$

PROPOSICIÓN 4.8. *Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son clases de funciones que contienen a la clase de los homeomorfismos tales que $\mathbf{A} \circ \mathbf{A} = \mathbf{A}$, $\mathbf{B} \circ \mathbf{B} = \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} \subset \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$. Entonces*

$$(\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) = \mathbf{B} \circ \mathbf{A}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos por el Corolario 4.4 que $\mathbf{B} \circ \mathbf{A} \subset (\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{A})$. Resta ver que $(\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) \subset \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$, para esto notemos que $(\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) = \mathbf{B} \circ (\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) \circ \mathbf{A} \subset \mathbf{B} \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) \circ \mathbf{A} = (\mathbf{B} \circ \mathbf{B}) \circ (\mathbf{A} \circ \mathbf{A}) = \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$. Por lo tanto, $\mathbf{B} \circ \mathbf{A} = (\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{A})$. $\square$

PROPOSICIÓN 4.9. *Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ clases de funciones que contienen a la clase de los homeomorfismos. Si $(\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) = \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A} \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) = \mathbf{B} \circ \mathbf{A} = (\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) \circ \mathbf{B}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos por la Proposición 4.3 (ii) que $\mathbf{B} \circ \mathbf{A} \subset \mathbf{A} \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) \subset (\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) = \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$, por lo que $\mathbf{A} \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) = \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$. Por otro lado, por la Proposición 4.3, $\mathbf{B} \circ \mathbf{A} \subset (\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) \circ \mathbf{B}$ y $(\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) \circ \mathbf{B} \subset (\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) \circ (\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) = \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$. Por lo tanto, $(\mathbf{B} \circ \mathbf{A}) \circ \mathbf{B} = \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$. $\square$

2. Algunas clases de funciones hereditarias

DEFINICIÓN 4.10. *Sea $\mathbf{A}$ una clase arbitraria de funciones que contiene a la clase de los homeomorfismos. Diremos que una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos, $f : X \rightarrow Y$, es **hereditariamente $\mathbf{A}$** si para cualquier subcontinuo, K , de X la función restricción $f|_K$ pertenece a la clase $\mathbf{A}$.*

NOTACIÓN 4.11. *Dada una clase $\mathbf{A}$ de funciones continuas y suprayectivas denotaremos por $\text{her}(\mathbf{A})$ a la clase de las funciones hereditariamente $\mathbf{A}$.*

Considerando por $\mathbf{A}$ a la clase de las funciones monótonas, confluentes, débilmente confluentes o atriódicas, se obtienen de esta manera la clase de funciones hereditariamente monótona, hereditariamente confluyente, hereditariamente débilmente confluyente, hereditariamente atriódica, respectivamente.

PROPOSICIÓN 4.12. *Sea $\mathbf{A}$ una clase de funciones que contiene a la clase de los homeomorfismos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva entre continuos que es hereditariamente $\mathbf{A}$, entonces f está en la clase $\mathbf{A}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos la cual es hereditariamente $\mathbf{A}$. Notar que $f|_X = f$ y X es un subcontinuo de X , así por la definición de hereditariamente $\mathbf{A}$ se sigue que $f|_X$ pertenece a la clase $\mathbf{A}$, por lo que $f \in \mathbf{A}$. $\square$

TEOREMA 4.13. *Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos clases de funciones que contienen a la clase de los homeomorfismos. Si $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, entonces $her(\mathbf{A}) \subset her(\mathbf{B})$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos la cual es hereditariamente $\mathbf{A}$. Veamos que f es hereditariamente $\mathbf{B}$, para esto, tomemos un subcontinuo, K , de X . Por hipótesis, $f \in her(\mathbf{A})$ luego tenemos que $f|_K \in \mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, por lo tanto $f|_K \in \mathbf{B}$. De modo que $f \in her(\mathbf{B})$. $\square$

Del Teorema 4.13 y de los Teoremas 2.8, 2.11 y 2.13 tenemos las siguientes implicaciones:

COROLARIO 4.14. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos.*

- (i) *Si f es hereditariamente monótona, entonces f es hereditariamente confluyente.*
- (ii) *Si f es hereditariamente confluyente, entonces f es hereditariamente débilmente confluyente.*
- (iii) *Si f es hereditariamente débilmente confluyente, entonces f es hereditariamente atriódica.*

TEOREMA 4.15. *Sean X y Y continuos. Una función $f : X \rightarrow Y$ continua y suprayectiva es atómica si, y sólo si, f es hereditariamente atómica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Q un subcontinuo de X . Veamos que $f|_Q$ es atómica. Para esto sea K un subcontinuo de Q tal que $f|_Q(K)$ es no degenerado. Notemos que K es un subcontinuo de X . Además, $f|_Q(K) = f(K)$, por lo cual $f(K)$ es no degenerado y como f es atómica, se tiene que $f^{-1}(f(K)) = K$. Por otro lado, note que

$$K \subset f|_Q^{-1}(f|_Q(K)) = f^{-1}(f|_Q(K)) = f^{-1}(f(K)) = K,$$

así obtenemos que $f|_Q^{-1}(f|_Q(K)) = K$. Por lo tanto $f|_Q$ es atómica. En consecuencia f es hereditariamente atómica.

El recíproco se deduce de la Proposición 4.12. $\square$

Como consecuencia de los Teoremas 4.15 y 2.6 tenemos el siguiente.

COROLARIO 4.16. *Sean X y Y continuos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función atómica, entonces f es hereditariamente monótona.*

3. Ejemplos de funciones

En esta parte, mostramos que algunas contenciones entre las clases de funciones son propias, con los ejemplos que siguen. Iniciamos con un ejemplo que muestra que la clase de las funciones monótonas no está contenida en la clase de las funciones hereditariamente atriódicas, es decir, existen funciones como la siguiente.

EJEMPLO 4.17. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \{0, 1, 2\}; y \in [0, 1]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2]; y \in \{0, 1\}\}$. Sea $f : X \rightarrow f(X)$ definida por

$$f((x, y)) = \begin{cases} (1, 1), & \text{si } y = 1; \\ (x, y), & \text{si } y = 0 \text{ o } x = 1; \\ (x, x), & \text{si } x = 0; \\ (2 - y, y), & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Se tiene que la función f es monótona y no es hereditariamente atriódica.

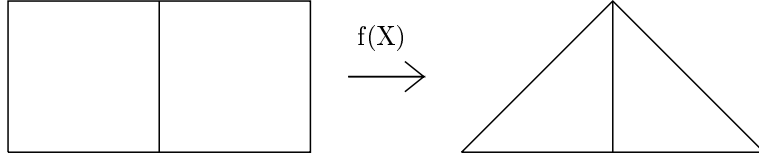


FIGURA 1

Primero veamos que f es monótona. Sea un punto $y \in f(X)$.

(i) Si $y = (1, 1)$ entonces $f^{-1}(\{y\}) = [0, 2] \times \{1\}$.

(ii) Si $y \neq (1, 1)$ entonces $|f^{-1}(\{y\})| = 1$.

Por lo que $f^{-1}(\{y\})$ es un conjunto conexo, y por lo tanto $f \in \mathcal{M}$.

La función f no es hereditariamente atriódica, para esto consideremos

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \{0, 1, 2\}; y \in [0, 1]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2]; y = 0\}.$$

La función $g = f|_Z$ no es una función atriódica, pues para el continuo $Q = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\frac{1}{2}, 1]\} \cup \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [\frac{1}{2}, 1]\} \cup \{(2 - y, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [\frac{1}{2}, 1]\}$. Tenemos que $g^{-1}(Q) = ([\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}) \cup ([\frac{1}{2}, 1] \times \{1\}) \cup ([\frac{1}{2}, 1] \times \{2\})$. Denotemos a las componentes de $g^{-1}(Q)$ por $C_i = [\frac{1}{2}, 1] \times \{i\}$, donde $i \in \{0, 1, 2\}$. Observe que

$$g(C_0) \cup g(C_1) = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\frac{1}{2}, 1]\} \cup \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [\frac{1}{2}, 1]\} \neq Q;$$

$$g(C_0) \cup g(C_2) = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\frac{1}{2}, 1]\} \cup \{(2 - y, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [\frac{1}{2}, 1]\} \neq Q;$$

$$g(C_1) \cup g(C_2) = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [\frac{1}{2}, 1]\} \cup \{(2 - y, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [\frac{1}{2}, 1]\} \neq Q.$$

De aquí se sigue que g no es atriódica y, por lo tanto, f no es hereditariamente atriódica.

El siguiente ejemplo muestra que no toda función abierta es hereditariamente atriódica.

EJEMPLO 4.18. Consideremos el continuo

$$X = \{(x, y) : x \in \{0, 1, 2, 3\}, y \in [-1, 1]\} \cup \{(x, y) : x \in [0, 3], y \in \{-1, 1\}\}.$$

Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ dada por

$$f((x, y)) = (x, |y|).$$

Se tiene que la función $f|_X$ es abierta y no es hereditariamente atriódica.

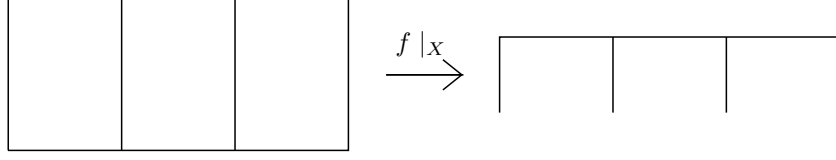


FIGURA 2

Probamos que f es abierta. Sea $\mathcal{V}$ un conjunto abierto básico de la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Supongamos que $\mathbb{R}^2$ tiene como base a la colección $\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) : x, y \in \mathbb{R} \text{ y } \varepsilon > 0\}$. De este modo $\mathcal{V}$ es de la forma $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, para algunos $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Si $(0, 0) \notin \mathcal{V}$, entonces

(i) $f(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$, si $y_0 \geq 0$. El cual es un abierto en la topología de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$.

(ii) $f(\mathcal{V}) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (-y_0 - \varepsilon, -y_0 + \varepsilon)$, si $y_0 < 0$. El cual es un conjunto abierto en $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$.

Caso 2. Si $(0, 0) \in \mathcal{V}$, entonces

(i) $f(\mathcal{V}) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (0, y_0 + \varepsilon)$, si $y_0 \geq 0$. El cual es un conjunto abierto en $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$.

(ii) $f(\mathcal{V}) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (0, -y_0 + \varepsilon)$, si $y_0 < 0$. El cual es un conjunto abierto en $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$.

Por lo tanto, f es una función abierta. Luego, no es difícil convencerse que, $f|_X$ es una función abierta.

Por otro lado, si tomamos

$$Q = \{(x, y) : x \in \{1, 2\}, y \in [-1, 1]\} \cup ([0, 1] \times \{1\}) \cup ([2, 3] \times \{1\}) \cup ([1, 2] \times \{-1\}).$$

Tenemos que Q es un subcontinuo de X y denotemos $Y = ([0, 3] \times \{1\}) \cup (\{1\} \times [0, 1]) \cup (\{2\} \times [0, 1])$. Ahora, la función $f|_X|_Q = f|_Q : Q \rightarrow Y$ no es atriódica.

Consideremos el subcontinuo de Y , $K = [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}] \times \{1\}$. Tenemos que

$$f|_Q^{-1}(K) = ([\frac{1}{2}, 1] \times \{1\}) \cup ([1, 2] \times \{-1\}) \cup ([2, \frac{5}{2}] \times \{1\}).$$

Denotemos a las componentes de $f|_Q^{-1}(K)$ por $C_1 = [\frac{1}{2}, 1] \times \{1\}$, $C_2 = [1, 2] \times \{-1\}$, $C_3 = [2, \frac{5}{2}] \times \{1\}$. Por lo que $f(C_1) \cup f(C_3) = C_1 \cup C_3 \neq K$, $f(C_1) \cup f(C_2) = [\frac{1}{2}, 2] \times \{1\} \neq K$ y $f(C_2) \cup f(C_3) = [1, \frac{5}{2}] \times \{1\} \neq K$.

Por lo tanto $f|_Q$ no es atriódica. En consecuencia $f|_X$ no es hereditariamente atriódica.

El siguiente ejemplo nos muestra que no todo homeomorfismo local es un homeomorfismo.

EJEMPLO 4.19. Consideremos el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ en coordenadas polares. Tomemos el círculo unitario $S = \{(r, \phi) : r = 1, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$. Definamos la función $f : S \rightarrow S$ dada por $f((r, \phi)) = (r, 2\phi)$, entonces f es un homeomorfismo local y no es un homeomorfismo.

Note que f abierta y, para cada $y \in S$, $|f^{-1}(\{y\})| = 2$. Así por el Teorema 5.12 se tiene que f es un homeomorfismo local. Por otro lado, como f no es inyectiva se concluye que f no es un homeomorfismo.

Algunas clases de funciones locales

DEFINICIÓN 5.1. Sea $\mathbf{A}$ una clase de funciones arbitraria y sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos. Decimos que f está en la clase local de $\mathbf{A}$, $Loc(\mathbf{A})$, si para cualquier punto $x \in X$ existe una vecindad cerrada, $\mathcal{V}$, de x en X , tal que $f(\mathcal{V})$ es una vecindad cerrada de $f(x)$ en Y y la función restricción $f|_{\mathcal{V}}$ pertenece a la clase $\mathbf{A}$.

De la Definición 5.1 tenemos las siguientes consecuencias.

PROPOSICIÓN 5.2. Si $\mathbf{A}$ es una clase de funciones continuas y suprayectivas, siempre se cumple que $\mathbf{A} \subset Loc(\mathbf{A})$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos tal que $f \in \mathbf{A}$, y un punto $x \in X$, tenemos que X es una vecindad cerrada de x y $f(X) = Y$ es una vecindad cerrada de $f(x)$. Ahora $f|_X = f \in \mathbf{A}$, de modo que $f \in Loc(\mathbf{A})$, por lo tanto $\mathbf{A} \subset Loc(\mathbf{A})$. $\square$

PROPOSICIÓN 5.3. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son clases de funciones continuas y suprayectivas entre espacios métricos compactos tales que $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, entonces $Loc(\mathbf{A}) \subset Loc(\mathbf{B})$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos tal que $f \in Loc(\mathbf{A})$ y un punto $x \in X$. Como $f \in Loc(\mathbf{A})$ existe $\mathcal{V}$ vecindad cerrada de x en X tal que $f(\mathcal{V})$ es una vecindad cerrada de $f(x)$ en Y tal que $f|_{\mathcal{V}} \in \mathbf{A}$. Así, $\mathcal{V}$ es una vecindad cerrada de x tal que $f(\mathcal{V})$ es una vecindad cerrada de $f(x)$ y, como $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, $f|_{\mathcal{V}} \in \mathbf{B}$. Por lo tanto $f \in Loc(\mathbf{B})$. $\square$

PROPOSICIÓN 5.4. Si $\mathbf{A}$ es una clase de funciones continuas y suprayectivas entre espacios métricos compactos, entonces $Loc(\mathbf{A}) = Loc(Loc(\mathbf{A}))$.

DEMOSTRACIÓN. $\subseteq$] Por la Proposición 5.2 tenemos que $\mathbf{A} \subset Loc(\mathbf{A})$. Se sigue de la Proposición 5.3 que $Loc(\mathbf{A}) \subset Loc(Loc(\mathbf{A}))$.

$\supseteq$] Sean $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos tal que $f \in Loc(Loc(\mathbf{A}))$ y un punto $x \in X$. Luego existe una vecindad cerrada, $\mathcal{W}$, de x en X tal que $f(\mathcal{W})$ es una vecindad cerrada de $f(x)$ en Y tal que $f|_{\mathcal{W}}$ pertenece a la clase $Loc(\mathbf{A})$. Como $x \in \mathcal{W} \subset X$, entonces existe $\mathcal{U}$ vecindad cerrada de x en $\mathcal{W}$ tal que $f(\mathcal{U})$ es una vecindad cerrada de $f(x)$ en $f(\mathcal{W})$ tal que $f|_{\mathcal{W}|_{\mathcal{U}}}$ está en la clase $\mathbf{A}$.

Note que $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$ y $\mathcal{U}$ es un conjunto cerrado en $\mathcal{W}$ el cual es un conjunto cerrado en X , de modo que $\mathcal{U}$ es una vecindad cerrada de x en X . Análogamente, $f(\mathcal{U})$ es una vecindad cerrada de $f(x)$ en Y .

Ahora, si tomamos $\mathcal{V} = \mathcal{U}$, tenemos que $\mathcal{V}$ es una vecindad cerrada de x en X con $f(\mathcal{V})$ vecindad cerrada de $f(x)$ en Y y $f|_{\mathcal{W}}|_{\mathcal{U}} \in \mathbf{A}$. De aquí que $f \in \text{Loc}(\mathbf{A})$.

Por lo tanto $\text{Loc}(\text{Loc}(\mathbf{A})) \subseteq \text{Loc}(\mathbf{A})$. $\square$

DEFINICIÓN 5.5. Se dice que una función, $f : X \rightarrow Y$, continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos es un **homeomorfismo local**, si para cualquier punto $x \in X$ existe una vecindad abierta $\mathcal{U}$ de x en X tal que $f(\mathcal{U})$ es una vecindad abierta de $f(x)$ en Y y la función restricción $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow f(\mathcal{U})$ es un homeomorfismo.

DEFINICIÓN 5.6. Se dice que una función, $f : X \rightarrow Y$, continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos es **localmente confluyente** (respectivamente, **localmente débilmente confluyente**) si para cualquier punto $y \in Y$ existe una vecindad cerrada F de y tal que la función restricción $f|_{f^{-1}(F)} : f^{-1}(F) \rightarrow F$ es una función confluyente (respectivamente, débilmente confluyente).

Recordemos que $\mathcal{H}$ denota la clase de los homeomorfismos.

TEOREMA 5.7. Una función $f : X \rightarrow Y$ continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos es un homeomorfismo local si, y sólo si, $f \in \text{Loc}(\mathcal{H})$.

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$] Supongamos que f es un homeomorfismo local y sea x un punto arbitrario de X . Tomemos $\mathcal{U}$ una vecindad abierta de x en X tal que $f(\mathcal{U})$ es una vecindad abierta de $f(x)$ en Y y $f|_{\mathcal{U}}$ es un homeomorfismo. Sea $\mathcal{V}$ una vecindad cerrada de x que esté contenida en $\mathcal{U}$. Note que $f|_{\mathcal{V}}$ es un homeomorfismo, como el interior de $\mathcal{V}$ es un conjunto abierto de $\mathcal{U}$ y $f|_{\mathcal{V}}$ es un homeomorfismo, entonces $f(\text{int}(\mathcal{V}))$ es un abierto en Y , pues $f(\mathcal{U})$ es un conjunto abierto en Y . Luego, como $\mathcal{V}$ es un conjunto compacto, entonces $f(\mathcal{V})$ es un conjunto compacto, y así cerrado. Se sigue que $f(\mathcal{V})$ es una vecindad cerrada el punto $f(x)$. Por lo tanto $f \in \text{Loc}(\mathcal{H})$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $f \in \text{Loc}(\mathcal{H})$. Sean x un punto arbitrario de X y $\mathcal{V}$ una vecindad cerrada de x en X tal que $f(\mathcal{V})$ es una vecindad cerrada de $f(x)$ en Y y $f|_{\mathcal{V}}$ es un homeomorfismo. Sea $\mathcal{U}'$ un abierto en X que contenga a x y $\mathcal{U}' \subset \mathcal{V}$. Se tiene que $f(\mathcal{U}')$ es un conjunto abierto de $f(\mathcal{V})$ que contiene a $f(x)$. Como $f(\mathcal{V})$ es una vecindad de $f(x)$, podemos hallar un conjunto abierto $\mathcal{W}$ de Y tal que $f(x) \in \mathcal{W} \subset f(\mathcal{U}')$. Tomemos $\mathcal{U} = \mathcal{U}' \cap f^{-1}(\mathcal{W})$. Los conjuntos $\mathcal{U}'$ y $f^{-1}(\mathcal{W})$ son abiertos de X , de modo que $\mathcal{U}$ es un conjunto abierto en X . Ahora $f(\mathcal{U}) = f(\mathcal{U}' \cap f^{-1}(\mathcal{W})) = f(\mathcal{U}') \cap \mathcal{W} = \mathcal{W}$ por lo tanto $f(\mathcal{U})$ es un abierto en Y . Más aún, $f|_{\mathcal{U}}$ es un homeomorfismo, ya que $(f|_{\mathcal{V}})^{-1}|_{\mathcal{W}} = (f|_{\mathcal{U}})^{-1}$ y $(f|_{\mathcal{V}})^{-1}$ es continua. Consecuentemente, f es un homeomorfismo local. $\square$

Recordemos que $\mathcal{C}$ denota a la clase de las funciones confluentes. Similarmente podemos probar lo siguiente.

TEOREMA 5.8. Una función $f : X \rightarrow Y$ continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos es localmente confluyente si, y sólo si, $f \in \text{Loc}(\mathcal{C})$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es localmente confluyente y tomemos un punto arbitrario x de X . Por hipótesis, existe una vecindad cerrada F de $f(x)$ en Y tal que $f|_{f^{-1}(F)}$ es confluyente. Así basta tomar $\mathcal{V}$ como $f^{-1}(F)$. Tenemos que $\mathcal{V}$ es una vecindad cerrada de x en X ; note que $f(\mathcal{V}) = f(f^{-1}(F)) = F$ es una vecindad cerrada de $f(x)$ en Y y $f|_{\mathcal{V}}$ es confluyente. Por lo tanto $f \in \text{Loc}(\mathcal{C})$.

Recíprocamente, supongamos ahora que $f \in \text{Loc}(\mathcal{C})$. Sea y un punto arbitrario de Y . Por hipótesis, para cada $x \in f^{-1}(\{y\})$ existe una vecindad cerrada de x , $\mathcal{U}_x$, en X tal que $f(\mathcal{U}_x)$ es una vecindad cerrada de y en Y y $f|_{\mathcal{U}_x}$ es confluyente. Como $f^{-1}(\{y\})$ es compacto, pues es un conjunto cerrado en X . Existen puntos $x_1, \dots, x_n \in f^{-1}(\{y\})$ tales que $f^{-1}(\{y\}) \subset \bigcup_{i=1}^n \text{int}(\mathcal{U}_{x_i})$.

Sea $F' = \bigcap_{i=1}^n f(\mathcal{U}_{x_i})$. El conjunto F' es una vecindad cerrada de y , ya que es la intersección finita de vecindades cerradas de y . Para cada $m \in \mathbb{N}$, tomemos $K_m = \overline{B_{\frac{1}{m}}(y)}$, así $K_{m+1} \subset K_m$ para toda $m \in \mathbb{N}$ y $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} K_m = \{y\}$, por lo que $f^{-1}(K_{m+1}) \subset f^{-1}(K_m)$, para toda $m \in \mathbb{N}$ y,

$$f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}\left(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} K_m\right) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} f^{-1}(K_m).$$

Ya que K_m es cerrado, entonces $f^{-1}(K_m)$ es cerrado y así compacto, pues X es compacto. Más aún, $f^{-1}(K_m)$ es un espacio métrico, para cada $m \in \mathbb{N}$. Así por la Proposición 1.13, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-1}(K_m) \subset \bigcup_{i=1}^n \text{int}(\mathcal{U}_{x_i})$ para cada $m \geq M$. Análogamente $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} K_m = \{y\} \subset \text{int}(F')$, pues F' es una vecindad cerrada de y . Luego existe $M' \in \mathbb{N}$ tal que $K_m \subset \text{int}(F')$ para cada $m \geq M'$. Llamemos $N = \max\{M, M'\}$, pongamos $F = K_N$, tenemos que F es una vecindad de y , como $N \geq M'$, $F \subset \text{int}(F')$ y, puesto que $N \geq M$, $f^{-1}(F) = f^{-1}(K_N) \subset \bigcup_{i=1}^n \text{int}(\mathcal{U}_{x_i})$.

Probaremos que $f|_{f^{-1}(F)}$ es confluyente. Sea Q un subcontinuo arbitrario de F . Tomemos K una componente arbitraria de $f|_{f^{-1}(F)}^{-1}(Q)$. Observe que $Q \subset F \subset \bigcap_{i=1}^n f(\mathcal{U}_{x_i})$ de modo que existe un punto z de X tal que $z \in K \cap \mathcal{U}_{x_i}$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Como $f|_{\mathcal{U}_{x_i}}$ es confluyente, sea K' la componente de $f|_{\mathcal{U}_{x_i}}(Q)$ que contiene al punto z , se tiene que $(f|_{\mathcal{U}_{x_i}})(K') = Q$. Pero $z \in K \cap K'$ y K es una componente de $f|_{f^{-1}(F)}^{-1}(Q)$ y así $K' \subset K$, de modo que $f|_{f^{-1}(F)}(K) = Q$. Por lo tanto $f|_{f^{-1}(F)}$ es confluyente. Por lo que podemos concluir que f es localmente confluyente. $\square$

Recordemos que $\mathcal{DC}$ denota a la clase de las funciones débilmente confluentes. Similarmente podemos probar lo siguiente.

TEOREMA 5.9. *Una función $f : X \rightarrow Y$ continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos es localmente débilmente confluyente si, y sólo si, $f \in \text{Loc}(\mathcal{DC})$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es localmente débilmente confluyente y tomemos un punto arbitrario x de X . Por hipótesis, existe una vecindad cerrada F de $f(x)$ en Y tal que $f|_{f^{-1}(F)}$ es débilmente confluyente. Así basta tomar $\mathcal{V}$ como $f^{-1}(F)$. Tenemos que $\mathcal{V}$ es una vecindad cerrada de x en X ; note que $f(\mathcal{V}) = f(f^{-1}(\mathcal{V})) = F$ es una vecindad cerrada de $f(x)$ en Y y $f|_{\mathcal{V}}$ es débilmente confluyente. Por lo tanto $f \in \text{Loc}(\mathcal{DC})$.

Recíprocamente, supongamos ahora que $f \in \text{Loc}(\mathcal{DC})$. Sea y un punto arbitrario de Y . Por hipótesis, para cada $x \in f^{-1}(\{y\})$ existe una vecindad cerrada de x , $\mathcal{U}_x$, en X tal que $f(\mathcal{U}_x)$ es una vecindad cerrada de y en Y y $f|_{\mathcal{U}_x}$ es débilmente confluyente. Como $f^{-1}(\{y\})$ es compacto, existen puntos $x_1, \dots, x_n \in f^{-1}(\{y\})$ tales que $f^{-1}(\{y\}) \subset \bigcup_{i=1}^n \text{int}(\mathcal{U}_{x_i})$.

Sea $F = \bigcap_{i=1}^n f(\mathcal{U}_{x_i})$. El conjunto F es una vecindad cerrada de y ya que es la intersección finita de vecindades cerradas de y .

Probaremos que $f|_{f^{-1}(F)}$ es débilmente confluyente. Sea Q un subcontinuo arbitrario de F . Como $Q \subset \bigcap_{i=1}^n f(\mathcal{U}_{x_i})$, en particular Q está contenido en $f(\mathcal{U}_{x_1})$ y $f|_{\mathcal{U}_{x_1}}$ es débilmente confluyente, así existe C' componente de $(f|_{f^{-1}(F)})^{-1}(Q)$ tal que $f|_{\mathcal{U}_{x_1}}(C') = Q$. Tomemos C la componente de $f^{-1}|_{\mathcal{U}_{x_1}}(Q)$ que contiene a C' , por lo que $Q = f|_{\mathcal{U}_{x_1}}(C) \subset f|_{f^{-1}(F)}(C) \subset Q$, de modo que $f|_{f^{-1}(F)}$ es débilmente confluyente. Por lo tanto f es localmente débilmente confluyente. $\square$

Ahora estudiaremos las clases de funciones localmente monótonas y localmente MO . Primero veamos la clase de funciones localmente abiertas. Recordemos que $\mathcal{O}$ denota a la clase de las funciones abiertas.

TEOREMA 5.10. *La clase $\mathcal{O}$ es la misma que la clase $Loc(\mathcal{O})$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero por la Proposición 5.2 tenemos que $\mathcal{O} \subset Loc(\mathcal{O})$.

Ahora, sean $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos tal que $f \in Loc(\mathcal{O})$ y $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en X . Vamos a probar que $f(\mathcal{U})$ es un conjunto abierto en Y . Sea $y \in f(\mathcal{U})$, tomemos $x_0 \in \mathcal{U}$ tal que $f(x_0) = y$. Como $f \in Loc(\mathcal{O})$ para el punto x_0 existe $\mathcal{V}$, vecindad cerrada de x_0 en X , tal que $f(\mathcal{V})$ es una vecindad cerrada de y en Y y $f|_{\mathcal{V}} \in \mathcal{O}$. Dado que $f(\mathcal{V})$ es una vecindad de y , existe $\mathcal{W}_1$ conjunto abierto en Y , tal que $y \in \mathcal{W}_1 \subset f(\mathcal{V})$. Como $\mathcal{V}$ es una vecindad de x_0 podemos encontrar $\mathcal{W}_2$ abierto en X tal que $x_0 \in \mathcal{W}_2 \subset (\mathcal{V} \cap \mathcal{U})$. Dado que f es una función continua $f^{-1}(\mathcal{W}_1)$ es un conjunto abierto en X . Sea $\mathcal{W} = f^{-1}(\mathcal{W}_1) \cap \mathcal{W}_2$. Note que $\mathcal{W}$ es un conjunto abierto en X tal que $x_0 \in \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. De modo que

$$y \in f|_{\mathcal{V}}(\mathcal{W}) = f(\mathcal{W}) \subset f(f^{-1}(\mathcal{W}_1)) \cap f(\mathcal{W}_2) = \mathcal{W}_1 \cap f(\mathcal{W}_2) \subset f(\mathcal{U}).$$

Como $f|_{\mathcal{V}}$ es abierta entonces $f|_{\mathcal{V}}(\mathcal{W}_2) = f(\mathcal{W}_2)$ es un conjunto abierto en $f(\mathcal{V})$, de modo que existe $\mathcal{W}_3$ conjunto abierto en Y tal que $f(\mathcal{W}_2) = \mathcal{W}_3 \cap f(\mathcal{V})$. Así $\mathcal{W}_1 \cap f(\mathcal{W}_2) = \mathcal{W}_1 \cap (\mathcal{W}_3 \cap f(\mathcal{V})) = \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_3$, el cual es un conjunto abierto en Y . Luego, $f(\mathcal{W})$ es un conjunto abierto en Y con $y \in f(\mathcal{W})$ y $f(\mathcal{W}) \subset f(\mathcal{U})$. Por lo tanto f es abierta. $\square$

TEOREMA 5.11. *La clase $Loc(\mathcal{H})$ está contenida en la clase $\mathcal{O}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.5 tenemos que $\mathcal{H} \subset \mathcal{O}$. Se sigue de la Proposición 5.3 y del Teorema 5.10, respectivamente, que $Loc(\mathcal{H}) \subset Loc(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$. Por lo tanto $Loc(\mathcal{H}) \subset \mathcal{O}$. $\square$

El siguiente teorema caracteriza a los homeomorfismos locales el cual tomamos de [8, Teorema 4, p. 856]. Cabe mencionar que la demostración la completamos usando algunas ideas del libro de Whyburn [13].

TEOREMA 5.12. *Sea f una función continua y suprayectiva de un espacio Hausdorff compacto X a un continuo de Hausdorff Y , la función f es un homeomorfismo local si, y sólo si f es abierta y existe un entero positivo n tal que, para cada $y \in Y$, $|f^{-1}(\{y\})| = n$.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$] Sean $y \in Y$ y $\mathcal{U}$ un conjunto abierto de Y que contiene al punto y . Denotemos por $|f^{-1}(\{y\})| = n$, con $n \in \mathbb{N}$. Pues de lo contrario, es decir, si $f^{-1}(\{y\})$ es un conjunto infinito, dado que X es compacto, entonces existe $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ subsucesión de $f^{-1}(\{y\})$ convergente; sea $x \in X$ tal que $\lim x_m = x$, entonces para cada $\mathcal{V}$ vecindad cerrada de x , existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in \mathcal{V}$ para toda $m \geq M$. Si tomamos $k > m \geq M$, entonces $f(x_k) = y = f(x_m)$ y $x_k, x_m \in \mathcal{V}$

de modo que la función $f|_{\mathcal{V}}$ no es inyectiva, lo cual contradice el hecho de que f sea un homeomorfismo local. Por lo tanto $|f^{-1}(\{y\})|$ es finito. Supongamos que $f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Como X es un espacio Hausdorff, es posible tomar $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ conjuntos abiertos en X y ajenos tales que $x_i \in \mathcal{U}_i$, $f(\mathcal{U}_i)$ es una vecindad abierta de y en Y , tal que $f|_{\mathcal{U}_i}$ es un homeomorfismo, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Tomemos $\mathcal{V}_y$ un conjunto abierto de Y tal que $y \in \mathcal{V}_y \subset \bigcap_{i=1}^n f(\mathcal{U}_i)$ y $f^{-1}(\mathcal{V}_y) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i$. Sea $z \in \mathcal{V}_y$, tenemos que

$$|f^{-1}(\{z\})| \geq n, \text{ pues } \mathcal{V}_y \subset \bigcap_{i=1}^n f(\mathcal{U}_i),$$

además

$$|f^{-1}(\{z\})| \leq n, \text{ pues } f^{-1}(\mathcal{V}_y) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i,$$

de modo que

$$|f^{-1}(\{z\})| = n, \text{ para cada } z \in \mathcal{V}_y.$$

Como Y es compacto existen puntos, $y_1, \dots, y_k$, de Y tales que $Y \subset \bigcup_{i=1}^k \mathcal{V}_{y_i}$. Dado que Y es un conjunto conexo entonces para cada $\mathcal{V}_{y_i}$ con $i \in \{1, \dots, k\}$, existe $j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$ tal que $\mathcal{V}_{y_i} \cap \mathcal{V}_{y_j} \neq \emptyset$. Pues de lo contrario si $\mathcal{V}_{y_i} \cap \mathcal{V}_{y_j} = \emptyset$ para todo $j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$, entonces los conjuntos abiertos $\mathcal{V}_{y_i}$ y $\bigcup_{j=1, j \neq i}^k \mathcal{V}_{y_j}$ forman una disconexión para el espacio Y , lo cual contradice el hecho de que Y es conexo. Por lo tanto $|f^{-1}(\{y\})| = n$, para cada $y \in Y$.

$\Leftarrow$] Sea x_0 un punto de X y denotemos $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Como X es un espacio Hausdorff entonces para cada x_i y x_j , existen abiertos $\mathcal{U}_{i,j}$, $\mathcal{U}_{j,i}$ tales que $x_i \in \mathcal{U}_{i,j}$, $x_j \in \mathcal{U}_{j,i}$ y $\mathcal{U}_{i,j} \cap \mathcal{U}_{j,i} = \emptyset$, para cada $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ y $i \neq j$. Tomemos $\mathcal{U}_i = \bigcap_{j=0, j \neq i}^{n-1} \mathcal{U}_{i,j}$, tenemos que $x_i \in \mathcal{U}_i$, pues $x_i \in \mathcal{U}_{i,j}$, para cada $j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \setminus \{i\}$. Más aún, $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \emptyset$, para cada $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ con $i \neq j$, pues $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{U}_{i,j}$ y $\mathcal{U}_j \subset \mathcal{U}_{j,i}$ con $\mathcal{U}_{i,j} \cap \mathcal{U}_{j,i} = \emptyset$.

Como f es una función abierta entonces el conjunto $\mathcal{W} = \bigcap_{i=0}^{n-1} f(\mathcal{U}_i)$ es un abierto y $f(x_0) \in \mathcal{W}$. Entonces el conjunto $\mathcal{V}_i = f^{-1}(\mathcal{W}) \cap \mathcal{U}_i$ es un abierto, para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Por la continuidad de f , y $x_i \in \mathcal{V}_i$, para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, pues $x_i \in f^{-1}(\mathcal{W})$ y $x_i \in \mathcal{U}_i$. Por el Lema 1.24 tenemos que

$$f(\mathcal{V}_i) = f(\mathcal{U}_i \cap f^{-1}(\mathcal{W})) = f(\mathcal{U}_i \cap f^{-1}(\bigcap_{i=0}^{n-1} f(\mathcal{U}_i))) = f(\mathcal{U}_i) \cap (\bigcap_{i=0}^{n-1} f(\mathcal{U}_i)) = \bigcap_{i=0}^{n-1} f(\mathcal{U}_i) = \mathcal{W}, \text{ para cada } i \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Ahora, como $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = (f^{-1}(\mathcal{W}) \cap \mathcal{U}_i) \cap (f^{-1}(\mathcal{W}) \cap \mathcal{U}_j) = f^{-1}(\mathcal{W}) \cap (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) = \emptyset$ para $i \neq j$ y $|f^{-1}(\{y\})| = n$, para cada $y \in Y$, tenemos que $f|_{\mathcal{V}_i}$ es inyectiva, para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Así el conjunto $\mathcal{V}_0$ es una vecindad de x_0 tal que $f(\mathcal{V}_0) = \mathcal{W}$ es una vecindad abierta de $f(x_0)$ y $f|_{\mathcal{V}_0}$ es un homeomorfismo. Por lo tanto f es un homeomorfismo local.

Al igual que en las funciones abiertas, la clase de las funciones localmente *OM* coincide con la clase de las funciones *OM*, lo cual demostraremos a continuación.

TEOREMA 5.13. *La clase de las funciones OM es la misma que la clase de funciones Loc(OM).*

DEMOSTRACIÓN. La inclusión $OM \subset Loc(OM)$ se tiene por la Proposición 5.2. Vamos a probar que $Loc(OM) \subset OM$. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos tal que $f \in Loc(OM)$. Por los Corolarios 3.4 y 3.15 basta probar que para cada sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos en

Y con $\lim y_n = y_0$, se tiene que el conjunto $\limsup f^{-1}(\{y_n\})$ intersecta a cada componente de $f^{-1}(\{y_0\})$. Para esto sean C una componente arbitraria del conjunto $f^{-1}(\{y_0\})$ y x_0 un punto de C tal que $f(x_0) = y_0$. Como $f \in \text{Loc}(OM)$ es posible hallar una vecindad cerrada, $\mathcal{V}$, de x_0 en X tal que $f(\mathcal{V})$ es una vecindad cerrada de y_0 en Y y la restricción $f|_{\mathcal{V}}$ es una función OM . Se sigue de los Corolarios 3.4 y 3.15 que $(\limsup(f|_{\mathcal{V}})^{-1}(\{y_n\})) \cap C \neq \emptyset$, pero $(\limsup(f|_{\mathcal{V}})^{-1}(\{y_n\})) \cap C \subset (\limsup f^{-1}(\{y_n\})) \cap C$. Así $(\limsup f^{-1}(\{y_n\})) \cap C \neq \emptyset$ como se desea. Por lo tanto $f \in OM$. $\square$

Como una consecuencia de los resultados previos tenemos el siguiente corolario.

COROLARIO 5.14. *La clase de funciones MO está contenida en la clase de funciones $\text{Loc}(MO)$ la cual está contenida en la clase de funciones OM .*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 3.16 tenemos que $MO \subset OM$. Se sigue de la Proposición 5.3 que $\text{Loc}(MO) \subset \text{Loc}(MO)$. De la Proposición 5.13, obtenemos que $\text{Loc}(OM) = OM$. Por otro lado, por la Proposición 5.2 tenemos que $MO \subset \text{Loc}(MO)$. Por lo tanto $MO \subset \text{Loc}(MO) \subset OM$. $\square$

Las funciones localmente monótonas tienen la siguiente propiedad.

TEOREMA 5.15. *Sea $f : X \rightarrow Y$ un función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos. Si f es una función localmente monótona, entonces es una función localmente MO y existe un entero positivo N tal que, para cada $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(\{y\})$ tiene a lo más N componentes.*

DEMOSTRACIÓN. Como f es una función localmente monótona por las Proposiciones 3.17 y 5.3 obtenemos que f es localmente MO . Como $f \in \text{Loc}(\mathcal{M})$ tenemos que para cada punto $y \in Y$ existen puntos $x_1, \dots, x_{n_y}$ tales que existe $\mathcal{V}_i$ vecindad cerrada de x_i con $f(\mathcal{V}_i)$ vecindad cerrada del punto y , $f|_{\mathcal{V}_i}$ es una función monótona, para cada $i \in \{1, \dots, n_y\}$, y $f^{-1}(\{y\}) \subset \bigcup_{i=1}^{n_y} \text{int}(\mathcal{V}_i)$. Por lo tanto existe una vecindad cerrada $\mathcal{V}_y$ de y tal que $f^{-1}(\mathcal{V}_y) \subset \bigcup_{i=1}^{n_y} \text{int}(\mathcal{V}_i)$. Así para cada $y' \in \mathcal{V}_y$ el conjunto $f^{-1}(\{y'\})$ tiene a lo más n_y componentes pues $f^{-1}(\{y'\}) \subset f^{-1}(\mathcal{V}_y) \subset \bigcup_{i=1}^{n_y} \text{int}(\mathcal{V}_i)$. Dado que Y es compacto existen $y_1, \dots, y_m$ elementos de Y tales que $Y \subset \bigcup_{i=1}^m \text{int}(\mathcal{V}_{y_i})$. Sea $N = \max\{n_{y_1}, \dots, n_{y_m}\}$ tenemos que para toda $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(\{y\})$ tiene a lo más N componentes. $\square$

Ahora vamos a estudiar a las clases localmente confluentes, localmente semi-confluentes y localmente débilmente confluentes.

Como una consecuencia de la Proposición 5.3 tenemos las siguientes contenciones.

PROPOSICIÓN 5.16. (i) *La clase $\text{Loc}(\mathcal{C})$ está contenida en la clase $\text{Loc}(\mathcal{SC})$.*
(ii) *La clase $\text{Loc}(\mathcal{SC})$ está contenida en la clase $\text{Loc}(\mathcal{DC})$.*

DEMOSTRACIÓN. (i) Por el Teorema 2.9, tenemos que la clase $\mathcal{C}$ está contenida en la clase $\mathcal{SC}$. Se sigue de la Proposición 5.3 que $\text{Loc}(\mathcal{C}) \subset \text{Loc}(\mathcal{SC})$.

(ii) Por el Teorema 2.12, tenemos que la clase $\mathcal{SC}$ está contenida en la clase $\mathcal{DC}$. Luego, por la Proposición 5.3 obtenemos que $\text{Loc}(\mathcal{SC}) \subset \text{Loc}(\mathcal{DC})$. $\square$

En los resultados que siguen caracterizamos a las funciones localmente confluentes y a las funciones localmente débilmente confluentes.

TEOREMA 5.17. *Una función $f : X \rightarrow Y$ continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos es localmente confluyente si, y sólo si, existe un número $\varepsilon > 0$ tal que para cada continuo Q de diámetro menor que ε en Y y cada componente, C , de $f^{-1}(Q)$ cumple que $f(C) = Q$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es localmente confluyente, entonces para cada $y \in Y$ existe F_y vecindad cerrada de y tal que $f|_{f^{-1}(F_y)}$ es confluyente. Como Y es compacto entonces existen $F_{y_1}, \dots, F_{y_n}$ cerrados tales que $Y \subset \bigcup_{i=1}^n \text{int}(F_{y_i})$. La familia $\mathcal{C} = \{\text{int}(F_{y_1}), \dots, \text{int}(F_{y_n})\}$ es una cubierta abierta de Y , se sigue del Corolario 1.28 que existe un número $\varepsilon > 0$ tal que cada continuo Q de diámetro menor que ε en Y está contenido en algún F_{y_m} , con $m \in \{1, \dots, n\}$. Como $f|_{f^{-1}(F_{y_m})}$ es confluyente, cada componente, C , de $f^{-1}(Q) = [f|_{f^{-1}(F_y)}]^{-1}(Q)$ cumple que $f(C) = f|_{f^{-1}(F_y)}(C) = Q$.

Recíprocamente, supongamos que existe un número $\varepsilon > 0$ tal que para cada continuo Q de diámetro menor que ε y cada componente de $f^{-1}(Q)$, C , satisface que $f(C) = Q$. Sea y un punto arbitrario de Y . Pongamos $\mathcal{V} = \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)}$. Claramente $\mathcal{V}$ es una vecindad cerrada de y en Y y por hipótesis se tiene que $f|_{f^{-1}(\mathcal{V})}$ es confluyente. Por lo tanto f es localmente confluyente. $\square$

TEOREMA 5.18. *Una función $f : X \rightarrow Y$ continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos es localmente débilmente confluyente si, y sólo si, existe un número $\varepsilon > 0$ tal que para cada continuo Q de diámetro menor que ε en Y existe una componente, C , de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C) = Q$.*

DEMOSTRACIÓN. La necesidad se demuestra similarmente como la necesidad del Teorema 5.17.

Recíprocamente, supongamos que existe un número $\varepsilon > 0$ tal que para cada continuo Q de diámetro menor que ε existe una componente de $f^{-1}(Q)$, C , tal que $f(C) = Q$. Sea y un punto arbitrario de Y . Pongamos $\mathcal{V} = \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)}$. Note que $\mathcal{V}$ es una vecindad cerrada de y y por hipótesis se tiene que $f|_{f^{-1}(\mathcal{V})}$ es débilmente confluyente. Por lo tanto f es localmente débilmente confluyente. $\square$

1. Ejemplos de funciones

Concluimos este capítulo con ejemplos de funciones que muestran que algunas de las contenciones entre las clases de funciones son propias. El primero de estos ejemplos muestra que no siempre ocurre que si $f \in \mathcal{O}$ entonces f es un homeomorfismo local.

EJEMPLO 5.19. *Sea $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por*

$$f(x) = |x|.$$

Se tiene que f es una función abierta y no es un homeomorfismo local.

En el Ejemplo 2.19 probamos que f es abierta. Veamos que f no es un homeomorfismo local. Para esto consideremos el punto $0 \in [-1, 1]$ y una vecindad cerrada, $\mathcal{V}$, arbitraria de 0 , entonces existe un intervalo abierto (a, b) de $[-1, 1]$ tal que $0 \in (a, b) \subset \mathcal{V}$, así para el punto $c = \min\{-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\}$ se tiene que $f|_{\mathcal{V}}(c) = c = f|_{\mathcal{V}}(-c)$, de modo que $f|_{\mathcal{V}}$ no es inyectiva y, por lo tanto, $f|_{\mathcal{V}}$ no es un homeomorfismo.

El siguiente ejemplo muestra que no toda función OM es una función $Loc(MO)$.

EJEMPLO 5.20. Consideremos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$I = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0\};$$

$$A_n = \{(x, y) : x = \frac{1}{2^n}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2^{n-1}}\}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N};$$

$$B_n = \{(x, y) : x = \frac{1}{2^n}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2^n}\}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Pongamos $T = I \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$ y $J = I \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n)$. Definamos las funciones $f : T \rightarrow J$ y $g : J \rightarrow I$, para cada $(x, y) \in T$ y $(x, y) \in J$, respectivamente, como sigue

$$f((x, y)) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } y \leq x, \\ (x, x), & \text{si } x \leq y, \end{cases}$$

y

$$g((x, y)) = (x - y, 0).$$

Se tiene que f es una función monótona, g es una función abierta y la función h definida por $h = g \circ f$ es OM y no es una función localmente MO .

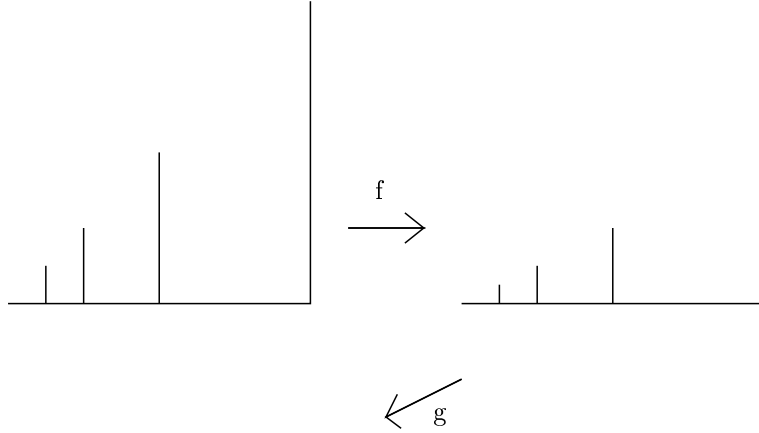


FIGURA 1

Veamos primero que f es una función monótona, para esto sea $(x, y) \in J$.

Caso 1. Si $x = y$, note que $(x, y) \in B_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. De modo que $f^{-1}(\{(x, y)\}) = \{\frac{1}{2^n}\} \times [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ el cual es un conjunto conexo.

Caso 2. Si $x < y$ entonces $f^{-1}(\{(x, y)\}) = \{(x, y)\}$ que es conexo. Por lo tanto f es monótona.

Mostraremos ahora que g es abierta. Sea $\mathcal{U}$ un conjunto abierto de J .

Caso 1. Si $\mathcal{U} \subset B_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces, tenemos los siguientes casos.

(i) $\mathcal{U} = \{\frac{1}{2^n}\} \times (a, b)$ con $0 \leq a < b \leq \frac{1}{2^n}$, de modo que $g(\mathcal{U}) = (1 - b, 1 - a) \times \{0\}$ el cual es un conjunto abierto en I .

(ii) $\mathcal{U} = \{\frac{1}{2^n}\} \times (a, \frac{1}{2^n}]$ con $0 \leq a < \frac{1}{2^n}$. Luego $g(\mathcal{U}) = [0, 1 - a) \times \{0\}$, el cual es un conjunto abierto en I .

(iii) $\mathcal{U} = \{\frac{1}{2^n}\} \times (0, b]$ con $0 < b \leq \frac{1}{2^n}$. Por lo tanto $g(\mathcal{U}) = (1 - b, 1] \times \{0\}$ que es un conjunto abierto en I .

Caso 2. Si $\mathcal{U} \subset \bigcup_{i=1}^m B_{n_i}$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cap B_{n_i}$ es un conjunto abierto en J y, por el caso 1, $g(\mathcal{U}_i)$ es un abierto en I . Así $g(\mathcal{U}) = g(\bigcup_{i=1}^m \mathcal{U}_i) = \bigcup_{i=1}^m g(\mathcal{U}_i)$. Por lo tanto $f(\mathcal{U})$ es un conjunto abierto.

Caso 3. Si $\mathcal{U} \subset I$ entonces $\mathcal{U} \cap B_n = \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$; pues de lo contrario, es decir, si $\mathcal{U} \cap B_n \neq \emptyset$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces para el punto $(\frac{1}{2^n}, 0)$ existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \cap J \subset I$, pero el punto $(\frac{1}{2^n}, \frac{r}{2})$ está en $B_r(x_0) \cap J$ y $(\frac{1}{2^n}, 0) \notin I$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $g(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ que es un abierto en I .

Caso 4. Si $\mathcal{U} \subset I \cup B_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{U} = ((a, b) \times \{0\}) \cup (\{\frac{1}{2^n}\} \times [0, c))$ con $\frac{1}{2^{n+1}} \leq a < \frac{1}{2^n} < b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ y $0 < c \leq \frac{1}{2^n}$. De modo que $g(\mathcal{U}) = (d, b) \times \{0\}$, con $d = \min\{a, \frac{1}{2^n} - c\}$, que es un conjunto abierto en I .

Por lo tanto g es una función abierta. Con todo $h \in OM$.

Ahora, probaremos que h no es una función localmente MO . Supongamos por el contrario, es decir, supongamos que la función h es localmente MO . En particular, para el punto $p = (0, 0)$ existe una vecindad cerrada, $\mathcal{V}$, tal que $h(\mathcal{V})$ es una vecindad cerrada del punto $h(p)$ y la función restricción $h|_{\mathcal{V}}$ es una función OM . Por lo tanto, existe una función monótona f_1 y una función abierta g_1 tales que $h|_{\mathcal{V}} = f_1 \circ g_1$. Por la Proposición 2.16 sabemos que las funciones abiertas no aumentan los ordenes de los puntos, tenemos que para $A_n \subset \mathcal{V}$ sucede alguno de los siguientes dos casos:

(i) $g_1(A_n)$ es un arco tal que $g_1(A_n) \cap g_1(I \cap \mathcal{V}) = \{g(\frac{1}{2^n})\}$;

(ii) $g_1(A_n) \subset g_1(I \cap \mathcal{V})$ y $g_1((\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}})) = g_1(p)$.

En el caso (i) tendríamos una contradicción con la monotonía de f_1 , pues en este caso el conjunto $f_1^{-1}(p)$ tiene al menos dos componentes, una contenida en $g_1(A_n)$ y otra contenida en $g_1(I \cap \mathcal{V})$.

En el caso (ii), como $f_1 \circ g_1((\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}})) = g_1(p)$ y $g_1((\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}})) \neq g_1(p)$ tenemos que existe un punto $q \neq p$ en el arco I tal que $h(q) = h(p)$ lo cual contradice el hecho de que $h|_I$ es un homeomorfismo. Por lo tanto, h no es una función localmente MO .

El siguiente ejemplo muestra que la clase de las funciones $Loc(\mathcal{M})$ está contenida propiamente en la clase de las funciones $Loc(MO)$.

EJEMPLO 5.21. Consideremos la función $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$, definida por

$$f(x) = |x| \text{ para } x \in [-1, 1].$$

Tenemos que la función f es localmente MO y no es localmente monótona.

Por el Ejemplo 2.19 tenemos que la función f es abierta. Por el Teorema 3.18 $\mathcal{O} \subset MO$ y por la Proposición 5.2 sabemos que $MO \subset Loc(MO)$. Por lo tanto f es localmente MO . Por otro lado, $f \notin Loc(\mathcal{M})$. Ya que para el punto 0, si tomamos la bola abierta con centro en 0 y radio $r > 0$ el punto $\frac{r}{2} \in B_r(0)$ con $f(\frac{r}{2}) = \frac{r}{2}$ y el conjunto $f^{-1}(\{\frac{r}{2}\}) = \{\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}\}$ que no es conexo.

El siguiente ejemplo muestra que existen funciones localmente monótonas que no son monótonas y que no son homeomorfismos locales.

EJEMPLO 5.22. Consideremos la función $f : [-2, 2] \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 1, & \text{si } x \in [-2, -1] \cup [1, 2], \\ 0, & \text{si } x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

La función f es localmente monótona, pero no es monótona y no es un homeomorfismo local.

Probaremos primero que $f \in \text{Loc}(\mathcal{M})$. Para esto, sea $x \in [-2, 2]$.

Caso 1. Si $x \in [-2, 0)$, entonces $\mathcal{V} = [-2, 0]$ es una vecindad cerrada de x y $f(\mathcal{V}) = [0, 1]$ es una vecindad cerrada de $f(x)$. Veamos que $f|_{\mathcal{V}}$ es monótona. Para esto, sea $y \in [0, 1]$.

(i) Si $y \in (0, 1]$, entonces $(f|_{\mathcal{V}})^{-1}(\{y\}) = \{y\}$ que es conexo.

(ii) Si $y = 0$, entonces $(f|_{\mathcal{V}})^{-1}(\{0\}) = [-1, 0]$ que es conexo.
Por lo tanto $f|_{\mathcal{V}}$ es monótona.

Caso 2. Si $x \in [0, 2]$, entonces $\mathcal{V} = [-1, 2]$ es una vecindad cerrada de x con $f(\mathcal{V}) = [0, 1]$ es una vecindad cerrada de $f(x)$. Veamos que $f|_{\mathcal{V}}$ es monótona. Para esto, sea $y \in [0, 1]$.

(i) Si $y \in (0, 1]$, entonces $(f|_{\mathcal{V}})^{-1}(\{y\}) = \{y\}$ que es conexo.

(ii) Si $y = 0$, entonces $(f|_{\mathcal{V}})^{-1}(\{0\}) = [-1, 1]$ que es conexo.
Por lo tanto $f|_{\mathcal{V}}$ es monótona.

Por otro lado, del Ejemplo 3.20 sabemos que f no es monótona. Resta ver que f no es un homeomorfismo local. Esto es por que para el punto 0 si consideramos la bola abierta con centro en 0 y radio $r > 0$, y tomamos el punto $b = \min\{\frac{r}{2}, \frac{1}{2}\}$, tenemos que $f(b) = 0 = f(-b)$; por lo que f no es inyectiva. De modo que no existe una vecindad cerrada $\mathcal{V}$ del punto 0 tal que $f|_{\mathcal{V}}$ sea un homeomorfismo.

El siguiente ejemplo muestra que existen funciones localmente semiconfluentes que no son localmente confluentes

EJEMPLO 5.23. Sea $f : [-1, 2] \rightarrow [0, 2]$ definida por

$$f(x) = |x|, \text{ para cada } x \in [-1, 2].$$

Tenemos que la función f es localmente semiconfluente y no es localmente confluente.

En el Ejemplo 2.25 se demostró que f es semiconfluente. Por la Proposición ?? (ii) tenemos que $f \in \text{Loc}(\mathcal{SC})$. Resta ver que f no es localmente confluente. Para esto vamos a ver que en el punto 1 $\in [-1, 2]$ no se satisface la condición. Ya que si tomamos la bola cerrada de radio $1 > r > 0$ y centrada en el punto 1, $\overline{B}_r(1)$, el intervalo $\mathcal{V} = [1 - \frac{r}{2}, 1 + \frac{r}{2}]$ es un subcontinuo de $\overline{B}_r(1)$ y $K = [-1, -(1 - \frac{r}{2})]$ es una componente de $f^{-1}(\mathcal{V})$ tal que $f(K) = [1 - \frac{r}{2}, 1] \neq \mathcal{V}$. Por lo tanto $f|_{\mathcal{V}}$ no es confluente. De modo que f no es localmente confluente.

Similarmente existen funciones localmente débilmente confluentes que no son localmente semiconfluentes como la siguiente.

EJEMPLO 5.24. Consideremos al continuo $X = L \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n)$, donde

$$L = [-1, 1] \times \{0\};$$

$$I_n = \{(-x, \frac{1-x}{2^{2n}}) : x \in [0, 1]\}, \text{ para toda } n \in \mathbb{N};$$

$$J_n = \{(x, \frac{1-x}{2^{2n-1}}) : x \in [0, 1]\}, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

La función $f : X \rightarrow [-1, 1]$ definida por

$$f((x, y)) = x, \text{ para cada } (x, y) \in X,$$

es localmente débilmente confluyente y no es localmente semiconfluyente.

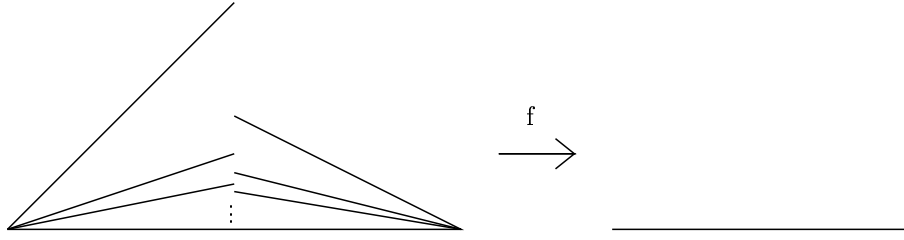


FIGURA 2

Veamos que f es débilmente confluyente, para esto sea Q un subcontinuo de $[-1, 1]$, entonces $Q = [a, b]$ con $-1 \leq a \leq b \leq 1$ y llamemos K a la componente que contiene al conjunto $A = [a, b] \times \{0\}$. Note que $f(A) = [a, b]$ por lo que $[a, b] = f(A) \subset f(K) \subset Q$, así $f(K) = Q$, con lo cual f es débilmente confluyente. Por la Proposición ?? se tiene que $f \in Loc(DC)$.

Ahora, si tomamos el punto $(0, 0) \in X$ y una vecindad cerrada de x , $\mathcal{V}$ tal que $f(\mathcal{V})$ es una vecindad cerrada de 0, por lo que $f(\mathcal{V})$ contiene un conjunto de la forma $Q = [a, b]$, con $-1 < a < 0 < b < 1$. Note que Q es un subcontinuo de $f(\mathcal{V})$. Llamemos K_1 al segmento de recta que une al punto $(a, \frac{a+1}{2})$ con $(0, \frac{1}{4})$ y K_2 al segmento de recta que une a los puntos $(0, \frac{1}{2})$ y $(b, \frac{1-b}{2})$. Observe que K_1 y K_2 son componentes de $f^{-1}(Q)$, $f(K_1) = [a, 0]$ y $f(K_2) = [0, b]$. Así $f(K_1) \not\subset f(K_2)$ y $f(K_2) \not\subset f(K_1)$. Por lo tanto, $f|_{\mathcal{V}} \notin SC$. Así, podemos concluir que $f \notin Loc(SC)$.

Las inclusiones en el Corolario 5.14 son propias pues la función f descrita en el Ejemplo 3.22 es una función localmente MO pero no es una función MO .

Otras formas de generar clases de funciones

Como vimos en los capítulos anteriores se pueden definir algunas clases de funciones cuando consideramos los subcontinuos del codominio. Por lo que obtenemos nuevas clases de funciones cuando tomamos a los subcontinuos de la imagen que tienen interior no vacío, o los continuos irreducibles del codominio en lugar de todos los subcontinuos de la imagen.

DEFINICIÓN 6.1. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos, decimos que f es:

(i) **quasimonótona**, si para cada subcontinuo Q de Y con interior no vacío, el conjunto $f^{-1}(Q)$ tiene un número finito de componentes y la imagen de cada una de éstas bajo f es Q .

(ii) **débilmente monótona**, si para cada subcontinuo Q de Y con interior no vacío, y cada componente de $f^{-1}(Q)$, C , cumple que $f(C) = Q$.

(iii) **pseudoconfluente**, si para cada subcontinuo irreducible Q de Y existe una componente de $f^{-1}(Q)$, C , tal que $f(C) = Q$.

NOTACIÓN 6.2. Para estudios posteriores denotaremos por:

$\mathcal{QM}$ a la clase de las funciones quasimonótonas.

$\mathcal{DM}$ a la clase de las funciones débilmente monótonas.

$\mathcal{PC}$ a la clase de las funciones pseudoconfluente.

De la Definición 6.1 tenemos las siguientes consecuencias.

TEOREMA 6.3. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos. Si f es quasimonótona, entonces f es débilmente monótona.

DEMOSTRACIÓN. Sean Q un subcontinuo de Y con interior no vacío y K una componente de $f^{-1}(Q)$. Como f es quasimonótona entonces $f(K) = Q$. Por lo tanto f es débilmente monótona. $\square$

TEOREMA 6.4. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos. Si f es confluente, entonces f es débilmente monótona.

DEMOSTRACIÓN. Sean Q un subcontinuo de Y con interior no vacío y K una componente de $f^{-1}(Q)$. Como f es confluente, entonces $f(K) = Q$. Por lo tanto f es débilmente monótona. $\square$

TEOREMA 6.5. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos. Si f es débilmente confluyente, entonces f es pseudoconfluyente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Q un subcontinuo irreducible de Y . Como f es débilmente confluyente, entonces existe K componente de $f^{-1}(Q)$, tal que $f(K) = Q$. Por lo tanto f es pseudoconfluyente. $\square$

TEOREMA 6.6. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos. Si $f \in \text{Loc}(\mathcal{M})$, entonces f es quasimonótona.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Q un subcontinuo de Y con interior no vacío. Como $f \in \text{Loc}(\mathcal{M})$ entonces, por el Teorema 5.15, tenemos que f es una función localmente MO. Se sigue de los Teoremas 3.16 y 3.19 que f es localmente confluyente. Por lo que para cada K , componente de $f^{-1}(Q)$, se cumple que $f(K) = Q$. Más aún, por este mismo Teorema 5.15, existe un entero positivo N tal que $|f^{-1}(\{y\})| \leq N$ para cada $y \in Y$, de modo que $f^{-1}(Q)$ tiene a lo más N componentes. Por lo tanto f es quasimonótona. $\square$

El siguiente teorema caracteriza a las funciones pseudoconfluente.

TEOREMA 6.7. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos. La función f es pseudoconfluyente si, y sólo si, para cada subcontinuo Q de Y se cumple que para cada par de puntos $y, y' \in Q$ existe una componente, K , de $f^{-1}(Q)$, tal que $y, y' \in f(K)$.*

DEMOSTRACIÓN.

$\Rightarrow$] Sean Q un subcontinuo de Y y y, y' dos puntos distintos de Q . Por la Proposición 1.22 existe K subcontinuo de Q , y así subcontinuo de Y , tal que K es irreducible entre los puntos y y y' . Como f es pseudoconfluyente, existe C componente de $f^{-1}(K)$ tal que $f(C) = K$. Como $K \subset Q$, sea C' la componente de $f^{-1}(Q)$ que contiene a C , se tiene que $y, y' \in K \subset f(C')$ por lo tanto $y, y' \in f(C')$.

$\Leftarrow$] Sea Q un subcontinuo irreducible de Y , entonces existen dos puntos $y, y' \in Q$ tales que Q es un continuo irreducible entre ellos. Como $y, y' \in Q$ por hipótesis existe una componente de $f^{-1}(Q)$, K , tal que $y, y' \in f(K)$. Como $f^{-1}(Q)$ es un conjunto cerrado en X , K es cerrado en X . De modo que K es un conjunto conexo y compacto, y así un subcontinuo de X . Se tiene que $f(K)$ es un continuo en Y que contiene a los puntos y, y' . Note que, como Q es un continuo irreducible entre los puntos y, y' entonces $Q \subset f(K)$. Luego, dado que $K \subset f^{-1}(Q)$ entonces $f(K) \subset Q$. Se sigue que $f(K) = Q$. Por lo tanto, f es pseudoconfluyente. $\square$

TEOREMA 6.8. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es hereditariamente confluyente entonces para cada subcontinuo, Q , de Y con interior no vacío el conjunto $f^{-1}(Q)$ es conexo.*

Más aún, si Q es un subcontinuo de Y y A y B son subcontinuos de Y tales que $Q = A \cap B$ y los conjuntos $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conexos, entonces $f^{-1}(Q)$ es conexo.

DEMOSTRACIÓN. Primero vamos a probar lo siguiente.

Afirmación. Si A y B son subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$, entonces los conjuntos $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conexos.

En efecto. Sea A' una componente arbitraria de $f^{-1}(A)$. Como f es hereditariamente confluente, por el Corolario ??, f es confluente, así tenemos que $f(A') = A$. Luego existe una componente B' de $f^{-1}(B)$ tal que $A' \cap B' \neq \emptyset$ ya que $A \cap B \neq \emptyset$. Así $f(A') \cap B \neq \emptyset$, entonces $A' \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$.

Observación 1. $f^{-1}(A) \cap B' = A' \cap B' = f^{-1}(B) \cap A'$.

Prueba de la Observación 1. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que $(f^{-1}(A) \cap B') \setminus A' \neq \emptyset$, entonces existe una componente A'' del conjunto $(f|_{A' \cup B'})^{-1}(A)$ contenida en B' . Como $A \setminus B \neq \emptyset$ (pues $A, B \subsetneq Y$), $f(A' \cup B') = Y$ y $f(B') = B$. Lo cual contradice la confluencia de $f|_{A' \cup B'}$, ya que $f(A'') = f|_{A' \cup B'}(A'') \neq A$. Similarmente se prueba que $A' \cap B' = f^{-1}(B) \cap A'$.

De la Observación 1 podemos concluir lo siguiente.

Observación 2. Cada componente de $f^{-1}(A)$ intersecta exactamente a una componente de $f^{-1}(B)$ y, cada componente de $f^{-1}(B)$ intersecta exactamente a una componente de $f^{-1}(A)$.

Supongamos que $f^{-1}(A)$ no es conexo. De modo que $f^{-1}(A) = P \cup R$ donde P y R son conjuntos cerrados en X , no vacíos y ajenos. Pongamos:

$$P' = \{K : K \text{ es una componente que } f^{-1}(B) \text{ y } K \cap P \neq \emptyset\} \text{ y}$$

$$R' = \{K : K \text{ es una componente que } f^{-1}(B) \text{ y } K \cap R \neq \emptyset\}.$$

Como $f^{-1}(A) \cap P \neq \emptyset$ entonces existe una componente, C , de $f^{-1}(A)$ tal que $C \subset P$. Se sigue de la Observación 2 que existe una componente, K , de $f^{-1}(B)$ tal que $C \cap K \neq \emptyset$, es decir, $K \cap P \neq \emptyset$. De modo que $P' \neq \emptyset$. Análogamente se tiene que $R' \neq \emptyset$.

Observación 3. Si K es una componente de $f^{-1}(B)$ entonces se cumple sólo una de las siguientes proposiciones.

- (i) $K \subset P'$.
- (ii) $K \subset R'$.

En efecto, como K es una componente de $f^{-1}(B)$ por la Observación 2, existe C componente de $f^{-1}(A)$ tal que $K \cap C \neq \emptyset$. Note que $C \subset P$ o $C \subset R$.

Vamos a probar que si $C \subset P$, entonces $K \cap P \neq \emptyset$. Para esto probaremos que $K \cap R = \emptyset$, supongamos por el contrario, es decir, supongamos que $K \cap R \neq \emptyset$. De modo que existe C_1 componente de $f^{-1}(A)$ tal que $C_1 \subset R$ y $C_1 \cap K \neq \emptyset$. Como $K \cap P \neq \emptyset$, existe C_2 componente de $f^{-1}(A)$ tal que $C_2 \subset P$ y $C_2 \cap K \neq \emptyset$. Dado que P y R forman una disconexión de $f^{-1}(A)$ entonces $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, de modo que C_1 y C_2 son dos componentes distintas de $f^{-1}(A)$ con $K \cap C_1 \neq \emptyset$ y $C_2 \cap K \neq \emptyset$. Lo cual contradice la Observación 2. Similarmente se demuestra que si $C \subset R$, entonces $K \cap R \neq \emptyset$.

Lo cual prueba la Observación 3.

Observación 4. Los conjuntos P' y R' son cerrados en X .

Veamos que el conjunto P' es cerrado, para esto, tomemos $x \in Cl_X(P')$, entonces existe una sucesión de elementos de P' , $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $\lim x_n = x$. Note que $f^{-1}(B)$ es un conjunto cerrado en X y $P' \subset f^{-1}(B)$. De modo que $x \in f^{-1}(B)$. Sea K la componente de $f^{-1}(B)$ tal que $x \in K$. Como K es una componente de $f^{-1}(B)$ entonces existen conjuntos cerrados en $f^{-1}(B)$, $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$, ajenos tales que $K \subset \mathcal{W}_1$ y $f^{-1}(B) \setminus K \subset \mathcal{W}_2$. Dado que $f^{-1}(B)$ es un conjunto cerrado en X , entonces $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ son conjuntos cerrados en X . Como X es un espacio métrico, y

así un espacio normal, existen conjuntos abiertos en X , $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$, ajenos tales que $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{U}_1$ y $\mathcal{W}_2 \subset \mathcal{U}_2$. Luego, $x \in K \subset \mathcal{U}_1$. Como $\lim x_n = x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \mathcal{U}_1$, para cada $n \geq N$. Note que $\mathcal{U}_1 \cap f^{-1}(B) = K$, de modo que $x_n \in K$, para toda $n \geq N$. Se sigue que K es la componente de x_n en $f^{-1}(B)$, para cada $n \geq N$. Como $x_n \in P'$, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $K \subset P'$. Luego $x \in P'$ y, por lo tanto, P' es un conjunto cerrado. Análogamente, se puede probar que R' es un conjunto cerrado y con esto queda probada la Observación 4.

Ahora, de las Observaciones 4 y 3, se tiene que P' y R' son conjuntos cerrados y $P' \cap R' = \emptyset$, $P' \cap R = \emptyset$ y $P \cap Q' = \emptyset$. De modo que podemos formar una disconexión del conjunto X en dos conjuntos cerrados, ajenos y no vacíos, $P \cup P'$ y $R \cup R'$, lo que contradice la conexidad de X . Lo cual prueba la Afirmación.

Sea Q un subcontinuo de Y con interior no vacío. Tenemos los siguientes casos:

Caso 1. El conjunto $Y \setminus Q$ es conexo, entonces $Y = Cl_Y(Y \setminus Q) \cup Q$. Se sigue de la Afirmación que $f^{-1}(Q)$ es conexo.

Caso 2. El conjunto $Y \setminus Q$ no es conexo. Se sigue del Corolario 1.19 que existen subcontinuos propios A y B de Y tales que $Y = A \cup B$ y $Q = A \cap B$. Por la Afirmación, tenemos que los conjuntos $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conexos. Supongamos que $f^{-1}(Q)$ no es conexo, entonces $f^{-1}(Q) = E \cup F$ donde E y F son conjuntos cerrados, ajenos y no vacíos en $f^{-1}(Q)$. Note que $X \setminus F$ es abierto en X y $E \subset X \setminus F$. Como X es normal entonces existe un conjunto abierto $\mathcal{U}$ de X tal que $E \subset \mathcal{U} \subset Cl(\mathcal{U}) \subset X \setminus F$. Sea K una componente de $f^{-1}(B) \cap Cl(\mathcal{U})$ que intersecta a E . La componente K contiene puntos que no están en $f^{-1}(Q)$. Así

$$(2) \quad F(K) \setminus A \neq \emptyset.$$

Consideremos el continuo $K \cup f^{-1}(A)$ y la función $f|_{K \cup f^{-1}(A)}$. El conjunto $C = [f|_{K \cup f^{-1}(A)}]^{-1}(f(K))$ está contenido en el conjunto $f^{-1}(B) \cap (K \cup f^{-1}(A)) = [f^{-1}(B) \cap K] \cup [f^{-1}(B) \cap f^{-1}(A)] = K \cup Q = K \cup E \cup F$. Como $(K \cup E) \cap F \neq \emptyset$ y $f(E) = f(F) = Q$, por la confluencia de f . Se tiene que el conjunto C tiene una componente W contenida en F . Dado que $f(F) \subset A$, y por (2), tenemos que $f(W) = f|_{K \cup f^{-1}(A)}(W) \neq f(K)$. Se sigue que $f|_{K \cup f^{-1}(A)}$ no es confluyente, lo cual contradice que f sea hereditariamente confluyente. Por lo tanto $f^{-1}(Q)$ es conexo.

Por otro lado, sean Q un subcontinuo de Y con interior no vacío y A y B subcontinuos de Y tales que $Q = A \cap B$ y los conjuntos $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conexos. Con argumentos similares como en el Caso 2, se demuestra que $f^{-1}(Q)$ es conexo. Así, el teorema queda demostrado. $\square$

Del Teorema 6.8 tenemos la siguiente implicación.

COROLARIO 6.9. *Sea f una función continua y suprayectiva entre continuos. Si f es hereditariamente confluyente entonces f es quasimonótona.*

1. Ejemplos de funciones

En esta sección daremos algunos ejemplos que muestran que las contenciones entre estas clases de funciones son estrictas.

EJEMPLO 6.10. Consideremos el continuo $X \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$X = (\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n),$$

donde

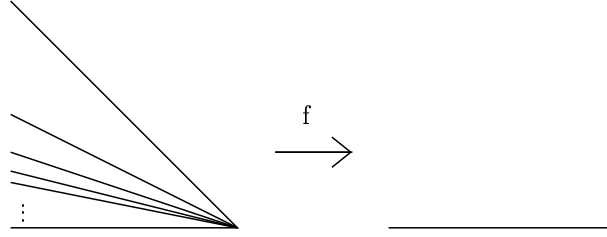
$$L_n = \{(1 - \alpha, \frac{\alpha}{n}) : \alpha \in [0, 1]\} \text{ para cada } n \in \mathbb{N};$$

$$L_0 = [0, 1] \times \{0\}.$$

La función $f : X \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$f((x, y)) = x,$$

es abierta, débilmente monótona y no es quasimonótona.



Primero veamos que f es débilmente monótona, para esto, sea Q un subcontinuo de $[0, 1]$, entonces Q es de la forma $[a, b]$ con $0 \leq a \leq b \leq 1$.

Caso 1. Si $b = 0$, entonces

$$f^{-1}(Q) = ([a, 1] \times \{0\}) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(1 - \alpha, \frac{(1-a)\alpha}{n}) : \alpha \in [0, 1]\}),$$

el cual es un conjunto conexo.

Caso 2. Si $b < 1$, entonces $f^{-1}(Q) = ([a, b] \times \{0\}) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n)$, donde $K_n = \{(1 + (\alpha - 1)b - a\alpha, \frac{1 + (\alpha - 1)b - a\alpha}{n}) : \alpha \in [0, 1]\}$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Note que $f^{-1}(Q)$ tiene un número de componentes numerable, a saber, $[a, b]$, $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f([a, b]) = [a, b]$ y $f(K_n) = [a, b]$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto f es débilmente monótona.

Tenemos que f es una función abierta, pues la función proyección $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es abierta.

La función f no es quasimonótona pues si tomamos $Q = [0, \frac{1}{2}] \times \{0\}$, el conjunto $f^{-1}(Q)$ tiene un número infinito de componentes.

EJEMPLO 6.11. Consideremos la función descrita en el Ejemplo 2.27, $f : [-2, 2] \rightarrow [-1, 1]$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -||x + 1| - 1|, & \text{si } x \in [-2, 0]; \\ ||1 - x| - 1|, & \text{si } x \in [0, 2], \end{cases}$$

f es hereditariamente débilmente confluyente y no es débilmente monótona.

Primero veamos que f es hereditariamente débilmente confluyente. Sea Q un subcontinuo de $[-1, 1]$, entonces f es de la forma $[a, b]$ con $-1 \leq a \leq b \leq 1$. Probaremos que $f|_Q : Q \rightarrow f(Q)$ es débilmente confluyente. Sea C un subcontinuo de Q entonces C es de la forma $[c, d]$ con $a \leq c \leq d \leq b$.

Caso 1. Si $a \leq -1$ y $1 \leq b$. Note que $[c, d] \subset f|_Q^{-1}(C)$. Sea K la componente de $f|_Q^{-1}(C)$ que contiene a $[c, d]$ entonces $[c, d] = f|_Q([c, d]) \subset f(K) \subset [c, d]$. De modo que $f|_Q(K) = C$. Por lo tanto, $f|_Q$ es débilmente confluyente. Se sigue que f es hereditariamente débilmente confluyente.

Caso 2. Si $-2 \leq a \leq b \leq -1$, entonces $f|_Q^{-1}(C) = [1-b, 1-a]$ que es conexo. Luego, $f([1-b, 1-a]) = C$.

Caso 3. Si $-2 \leq a \leq -1 \leq b < 1$, tenemos que

(i) Si $d > b$ entonces $[-1-d, -1-c] \subset f|_Q^{-1}(C)$. Consideremos la componente de $f|_Q^{-1}(C)$, K , que contiene a $[-1-d, -1-c]$ entonces $[c, d] = f|_Q([-1-d, -1-c]) \subset f(K) \subset [c, d]$. De modo que $f|_Q(K) = C$.

(ii) Si $d = b$ entonces $[c, d] \subset f|_Q^{-1}(C)$. Sea K la componente de $f|_Q^{-1}(C)$ que contiene a $[c, d]$ entonces $[c, d] = f|_Q([c, d]) \subset f(K) \subset [c, d]$. De modo que $f|_Q(K) = C$.

(iii) Si $d > f(a)$ entonces $[c, d] \subset f|_Q^{-1}(C)$. Consideremos la componente de $f|_Q^{-1}(C)$, K , que contiene a $[c, d]$ entonces $[c, d] = f|_Q([c, d]) \subset f(K) \subset [c, d]$. De modo que $f|_Q(K) = C$.

(iv) Si $d = f(a)$ entonces $[-1-d, -1-c] \subset f|_Q^{-1}(C)$. Sea K la componente de $f|_Q^{-1}(C)$ que contiene a $[-1-d, -1-c]$ entonces $[c, d] = f|_Q([-1-d, -1-c]) \subset f(K) \subset [c, d]$. De modo que $f|_Q(K) = C$.

Caso 4. Si $a \leq 1 \leq b \leq 2$, tenemos que

(i) Si $c < a$ entonces $[2-d, 2-c] \subset f|_Q^{-1}(C)$. Consideremos la componente de $f|_Q^{-1}(C)$, K , que contiene a $[2-d, 2-c]$ entonces $[c, d] = f|_Q([2-d, 2-c]) \subset f(K) \subset [c, d]$. De modo que $f|_Q(K) = C$.

(ii) Si $c = a$ entonces $[c, d] \subset f|_Q^{-1}(C)$. Sea K la componente de $f|_Q^{-1}(C)$ que contiene a $[c, d]$ entonces $[c, d] = f|_Q([c, d]) \subset f(K) \subset [c, d]$. De modo que $f|_Q(K) = C$.

(iii) Si $c < f(b)$ entonces $[c, d] \subset f|_Q^{-1}(C)$. Consideremos la componente de $f|_Q^{-1}(C)$, K , que contiene a $[c, d]$ entonces $[c, d] = f|_Q([c, d]) \subset f(K) \subset [c, d]$. De modo que $f|_Q(K) = C$.

(iv) Si $c = f(b)$ entonces $[2-d, 2-c] \subset f|_Q^{-1}(C)$. Sea K la componente de $f|_Q^{-1}(C)$ que contiene a $[2-d, 2-c]$ entonces $[c, d] = f|_Q([2-d, 2-c]) \subset f(K) \subset [c, d]$. De modo que $f|_Q(K) = C$.

Caso 5 Si $1 \leq a \leq b \leq c$, entonces $f|_Q^{-1}(C) = [c, d]$. Luego, $f([c, d]) = [c, d]$.

Por lo que podemos concluir que f es débilmente confluyente.

Veamos que f no es débilmente monótona. Para esto note que el continuo $Q = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ tiene interior no vacío, de hecho $\text{int}(Q) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $f^{-1}(Q) = [-2, -\frac{3}{2}] \cup [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, 2]$, pero $f([\frac{3}{2}, 2]) = [0, \frac{1}{2}] \neq Q$, por lo que f no es débilmente monótona.

EJEMPLO 6.12. Sea $T \subset \mathbb{R}^2$ definido por $T = (\{0\} \times [0, 1]) \cup ([-1, 1] \times \{0\})$, y definamos la función $f : [0, 1] \rightarrow T$ como sigue

$$f(x) = \begin{cases} (-3x - \frac{1}{2}, 0), & \text{si } x \in [0, \frac{1}{6}); \\ (6x - 2, 0), & \text{si } x \in [\frac{1}{6}, \frac{2}{6}]; \\ (0, 6x - 2), & \text{si } x \in [\frac{2}{6}, \frac{3}{6}); \\ (0, -6x + 4), & \text{si } x \in [\frac{3}{6}, \frac{4}{6}]; \\ (6x - 4, 0), & \text{si } x \in [\frac{4}{6}, \frac{5}{6}); \\ (-12x + 11, 0), & \text{si } x \in [\frac{5}{6}, 1]. \end{cases}$$

La función f es pseudoconfluente y no es débilmente monótona ni localmente débilmente confluente.

Primero probaremos que f es pseudoconfluente. Para esto sea Q un continuo irreducible de T entonces Q tiene la forma,

$$\begin{aligned} & [a, b] \times \{0\}, & \text{con } -1 \leq a \leq b \leq 1; \\ & \{0\} \times [a, b], & \text{con } 0 \leq a \leq b \leq 1; \\ & ([a, 0] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, b]), & \text{con } -1 \leq a \leq 0 \leq b \leq 1; \\ & ([0, a] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, b]), & \text{con } 0 \leq a \leq 1 \text{ y } 0 \leq b \leq 1. \end{aligned}$$

Si Q es de la forma $[a, b] \times \{0\}$ con $-1 \leq a \leq b \leq 1$. El conjunto $C = [\frac{11-a}{12}, \frac{11-b}{12}]$ está contenido en $f^{-1}(Q)$. Note que $f(C) = Q$. Sea K la componente de $f^{-1}(Q)$ que contiene a C , entonces $Q \subset f(C) \subset f(K) \subset Q$. Por lo tanto $f(K) = Q$.

Si Q es de la forma $\{0\} \times [a, b]$, con $0 \leq a \leq b \leq 1$. Consideremos el conjunto $C = [\frac{2+a}{6}, \frac{2+b}{6}]$. Note que C es un subconjunto conexo de $f^{-1}(Q)$ con $f(C) = Q$. Sea K la componente de $f^{-1}(Q)$ que contiene a C . Entonces $f(K) = Q$.

Si Q es de la forma $([a, 0] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, b])$, con $-1 \leq a \leq 0 \leq b \leq 1$, entonces tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Si $a < \frac{1}{6}$, consideremos el conjunto $C = [-\frac{a+\frac{1}{2}}{3}, 0] \cup [0, \frac{2+b}{6}]$, C está contenido en $f^{-1}(Q)$ y $f(C) = Q$. Tomemos K la componente de $f^{-1}(Q)$ que contiene a C . De modo que $f(K) = Q$.

Caso 2. Si $a \geq \frac{1}{6}$, Tomemos el conjunto $C = [-\frac{a+2}{6}, 0] \cup [0, \frac{2+b}{6}]$. Note que C está contenido en $f^{-1}(Q)$ y $f(C) = Q$. Sea K la componente de $f^{-1}(Q)$ que contiene al conjunto C . Luego $f(K) = Q$.

Si Q es de la forma $([0, a] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, b])$, con $0 \leq a \leq 1$ y $0 \leq b \leq 1$. Consideremos el conjunto $C = [\frac{4-b}{6}, \frac{a-4}{6}]$. Tenemos que $C \subset f^{-1}(Q)$ y $f(C) = Q$. Tomemos K la componente de $f^{-1}(Q)$ que contiene a C . De modo que $f(K) = Q$.

Por lo tanto f es una función pseudoconfluente.

Veamos que f no es débilmente monótona. Sea $Q = ([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, \frac{1}{2}]) \subset T$. Note que Q tiene interior no vacío, de hecho $\text{int}(Q) = ((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, \frac{1}{2}))$. Tenemos que $f^{-1}(Q) = [\frac{1}{6}, \frac{5}{12}] \cup [\frac{7}{12}, \frac{3}{4}] \cup [\frac{7}{8}, \frac{23}{24}]$ y $f([\frac{7}{8}, \frac{23}{24}]) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{0\} \neq Q$, por lo tanto f no es débilmente monótona; de hecho tampoco es quasimonótona.

Probaremos ahora que $f \notin \text{Loc}(\mathcal{DC})$. Para esto consideremos el punto $(0, 0)$ y sea $\mathcal{V}$ una vecindad cerrada de $(0, 0)$. Tenemos que $g = f|_{f^{-1}(\mathcal{V})}$ no es confluente. Como $\mathcal{V}$ es una vecindad de $(0, 0)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon((0, 0)) \cap T \subset \mathcal{V}$, entonces

sea $\mathcal{U} = \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}((0,0))} \cap T$, es decir $\mathcal{U} = ([-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, \frac{\varepsilon}{2}])$. Luego, $\mathcal{U}$ es un subcontinuo de $\mathcal{V}$ y $g^{-1}(\mathcal{U}) = [\frac{4-\varepsilon}{12}, \frac{4+\varepsilon}{12}] \cup [\frac{8-\varepsilon}{12}, \frac{8+\varepsilon}{12}] \cup [\frac{22-\varepsilon}{24}, \frac{22+\varepsilon}{24}]$. Note que

$$g([\frac{4-\varepsilon}{12}, \frac{4+\varepsilon}{12}]) = ([-\frac{\varepsilon}{2}, 0] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, \frac{\varepsilon}{2}]) \neq Q,$$

$$g([\frac{8-\varepsilon}{12}, \frac{8+\varepsilon}{12}]) = ([0 - \frac{\varepsilon}{2}] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, \frac{\varepsilon}{2}]) \neq Q,$$

$$g([\frac{22-\varepsilon}{24}, \frac{22+\varepsilon}{24}]) = ([-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}] \times \{0\}) \neq Q.$$

De modo que g no es débilmente confluyente. Por lo tanto, f no es hereditariamente débilmente confluyente.

Algunas propiedades de la composición de funciones y factor

En este capítulo vamos a estudiar algunas propiedades de las clases de funciones definidas anteriormente.

1. Propiedad de la composición de funciones

DEFINICIÓN 7.1. Sea $\mathbf{A}$ una clase de funciones arbitraria. Decimos que la clase $\mathbf{A}$ tiene la propiedad de la composición si para cualesquiera dos funciones $f, g \in \mathbf{A}$, su composición $g \circ f$ también es un elemento de $\mathbf{A}$.

Una consecuencia inmediata de la Definición 7.1 es la siguiente.

TEOREMA 7.2. Las siguientes clases de funciones tiene la propiedad de la composición:

- (i) La clase de los homeomorfismos, $\mathcal{H}$.
- (ii) La clase de las funciones atómicas, $\mathcal{A}$.
- (iii) La clase de las funciones abiertas, $\mathcal{O}$.
- (iv) La clase de las funciones monótonas, $\mathcal{M}$.

DEMOSTRACIÓN.

(i) Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ homeomorfismos entre espacios métricos compacto. Veamos que $g \circ f$ es un homeomorfismo. Tomemos $x_1, x_2 \in X$ arbitrarios con $x_1 \neq x_2$, como f es inyectiva entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$ y dado que g es inyectiva entonces $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, por lo tanto $g \circ f$ es inyectiva, y así, $g \circ f$ es biyectiva.

Ahora como tanto $f^{-1} : Y \rightarrow X$ como $g^{-1} : Z \rightarrow Y$ son funciones continuas, se sigue que $f^{-1} \circ g^{-1} = [g \circ f]^{-1}$ es continua. Por lo tanto, $g \circ f$ es un homeomorfismo.

(ii) Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones continuas y suprayectivas entre espacios métricos compactos tales que $f, g \in \mathcal{A}$. Veamos que $g \circ f \in \mathcal{A}$. Sea K un subcontinuo de X tal que $g \circ f(K)$ es no degenerado. Como f es continua entonces $f(K)$ es un subcontinuo de Y con $g(f(K))$ no generado, dado que g es atómica tenemos que $g^{-1}(g(f(K))) = f(K)$ y, ya que g es una función suprayectiva, $f(K)$ es no degenerado, se sigue de que f es atómica que $f^{-1}(f(K)) = K$. Así que

$$K = f^{-1}(f(K)) = f^{-1}(g^{-1}(g(f(K)))) = [g \circ f]^{-1}(g \circ f(K)).$$

Por lo tanto $g \circ f$ es atómica.

(iii) Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones continuas y suprayectivas entre espacios métricos compactos tales que $f, g \in \mathcal{O}$. Veamos que $g \circ f$ es abierta, para esto sea $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en X . Como f es abierta entonces $f(\mathcal{U})$ es un

conjunto abierto en Y . Dado que g es abierta entonces $g(f(\mathcal{U}))$ es un abierto en Z . Por lo tanto, $g \circ f$ es una función abierta.

(iv) Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones continuas y suprayectivas entre espacios métricos compactos tales que $f, g \in \mathcal{M}$. Veamos que $g \circ f \in \mathcal{M}$. Sea Q un subcontinuo de Z , como $g \in \mathcal{M}$ se sigue de la proposición 2.7 $g^{-1}(Q)$ es un subcontinuo de Y . Dado que f es monótona y por la Proposición 2.7 tenemos que $(g \circ f)^{-1}(Q) = f^{-1}(g^{-1}(Q))$ es un subcontinuo de X . Por lo tanto, $g \circ f \in \mathcal{M}$. $\square$

TEOREMA 7.3. *La clase de los homeomorfismos locales tiene la propiedad de la composición.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones continuas y suprayectivas entre espacios métricos compactos tales que $f, g \in \text{Loc}(\mathcal{H})$. Veamos que $g \circ f \in \text{Loc}(\mathcal{H})$, para esto tomemos un punto arbitrario $z \in Z$. Como g es un homeomorfismo local, entonces por el Teorema 5.12 existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|g^{-1}(\{z\})| = N_1$. Tomemos $y \in g^{-1}(\{z\})$. Como f es un homeomorfismo local, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|f^{-1}(\{y\})| = N_2$. Llamemos $N = N_1 \cdot N_2$ tenemos que $|(g \circ f)^{-1}(z)| = |f^{-1}(g^{-1}(\{z\}))| = N$, para cada $z \in Z$. Note que como f y g son homeomorfismos locales, por el Teorema 5.11 tenemos que f y g son funciones abiertas. Se sigue del Teorema 7.2 (iii), que $g \circ f$ es abierta y, por el Teorema 5.12, obtenemos que $f \circ g$ es un homeomorfismo local. $\square$

TEOREMA 7.4. *Las siguientes clases de funciones tienen la propiedad de la composición:*

- (i) *La clase de las funciones confluentes, $\mathcal{C}$.*
- (ii) *La clase de las funciones débilmente confluentes, $\mathcal{DC}$.*
- (iii) *La clase de las funciones pseudoconfluentes $\mathcal{PC}$.*

DEMOSTRACIÓN. (i) Se sigue de la Proposición 3.10.

(ii) Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones continuas y suprayectivas entre espacios métricos compactos tales que $f, g \in \mathcal{DC}$. Veamos que $g \circ f$ es débilmente confluyente. Sea Q un subcontinuo de Z . Como $g \in \mathcal{DC}$, existe K componente de $g^{-1}(Q)$ tal que $g(K) = Q$. Dado que $g^{-1}(Q)$ es un conjunto cerrado en Y y K un conjunto cerrado en $g^{-1}(Q)$, se sigue que K es cerrado en Y y así un subcontinuo en Y . Como f es débilmente confluyente, existe K' componente de $f^{-1}(K)$ tal que $f(K') = K$. Note que $K' \subset f^{-1}(K) \subset f^{-1}(g^{-1}(Q)) = (g \circ f)^{-1}(Q)$. Sea C la componente de $(g \circ f)^{-1}(Q)$, que contiene a K' , de modo que $Q = g \circ f(K') \subset g \circ f(C) \subset Q$. Luego $g \circ f(C) = Q$. Por lo tanto, $g \circ f$ es débilmente confluyente.

(iii) Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones continuas y suprayectivas entre espacios métricos compactos tales que $f, g \in \mathcal{PC}$. Veamos que $g \circ f$ es pseudoconfluyente. Sean C un subcontinuo de Z y z, z' dos puntos distintos en C . Como g es una función pseudoconfluyente entonces, por el Teorema 6.7, existe una componente Q' , de $g^{-1}(C)$ tal que $z, z' \in g(Q')$. Observe que Q' es un subcontinuo de Y . Como $z, z' \in g(Q')$ sean $y, y' \in Q'$ tales que $g(y) = z$ y $g(y') = z'$. Ya que f es una función pseudoconfluyente existe una componente Q'' de $f^{-1}(Q')$ que cumple que $y, y' \in f(Q'')$. Note que $f(Q'') \subset Q'$, de modo que $g(f(Q'')) \subset g(Q') \subset C$, por lo tanto $Q'' \subset (g \circ f)^{-1}(C)$.

Llamemos Q a la componente de $(g \circ f)^{-1}(C)$ que contiene a Q'' , así $y, y' \in f(Q'') \subset f(Q)$ y $z = g(y), z' = g(y') \in g(f(Q'')) \subset g(f(Q))$. De modo que $z, z' \in g \circ f(Q)$. Se sigue del Teorema 6.7 que $g \circ f \in \mathcal{PC}$. $\square$

TEOREMA 7.5. *Sea $\mathbf{A}$ una clase de funciones continuas y suprayectivas entre espacios métricos compactos. Si $\mathbf{A}$ tiene la propiedad de la composición, entonces la clase hereditariamente $\mathbf{A}$ también tiene la propiedad de la composición.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones continuas y suprayectivas entre espacios métricos compactos tales que f y g están en la clase hereditariamente $\mathbf{A}$. Veamos que $g \circ f$ también es hereditariamente $\mathbf{A}$. Tomemos Q un subcontinuo de X , como f es continua, entonces $f(Q)$ es un subcontinuo de Y . Dado que f y g son hereditariamente $\mathbf{A}$, tenemos que $f|_Q$ y $g|_{f(Q)}$ son elementos de $\mathbf{A}$, de modo que $(g \circ f)|_Q = g|_{f(Q)} \circ f|_Q$ está en $\mathbf{A}$. Por lo tanto $g \circ f$ es hereditariamente $\mathbf{A}$. $\square$

TEOREMA 7.6. *La clase de las funciones OM tiene la propiedad de la composición.*

DEMOSTRACIÓN. Como la clase de funciones OM , por el Corolario 3.15, coincide con la clase de las funciones casi interiores y esta última, por la Proposición 3.12, tiene la propiedad de la composición. Se sigue que la clase OM tiene la propiedad de la composición. $\square$

TEOREMA 7.7. *La clase de las funciones quasimonótonas, $\mathcal{QM}$, tiene la propiedad de la composición.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones continuas y suprayectivas entre espacios métricos compactos tales que $f, g \in \mathcal{QM}$ y Q un subcontinuo arbitrario de Z con interior no vacío. Como g es quasimonótona, tenemos que $g^{-1}(Q)$ tiene un número finito de componentes, llamemos N al número de componentes, es decir, sean $C_1, \dots, C_N$ las componentes de $g^{-1}(Q)$. Note que $g(C_i) = Q$, para cada $i \in \{1, \dots, N\}$. Ahora, observe que $\text{int}(Q) = \text{int}(g(C_i))$, para cada $i \in \{1, \dots, N\}$. Tomemos $z \in \text{int}(Q)$, entonces existe $y_i \in C_i$ tal que $g(y_i) = z$. Como C_i es una componente de $g^{-1}(Q)$ existen conjuntos abiertos, $\mathcal{U}'_i$ y $\mathcal{V}'_i$, en Y tales que $C_i \subset \mathcal{U}'_i$ y $\bigcup_{j=1, j \neq i}^N C_j \subset \mathcal{V}'_i$. Por otro lado, dado que $z \in \text{int}(Q)$ existe $\mathcal{W}$ conjunto abierto en Z tal que $z \in \mathcal{W} \subset Q$. Como g es una función continua entonces $g^{-1}(\mathcal{W})$ es un conjunto abierto en X . Tomemos $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}'_i \cap f^{-1}(Q)$, tenemos que $\mathcal{U}_i$ es un conjunto abierto en Y y $y_i \in \mathcal{U}_i \subset C_i$. De modo que $y_i \in \text{int}(C_i)$, se sigue que C_i tiene interior no vacío. Note que esto sucede para toda $i \in \{1, \dots, N\}$. Por lo tanto C_i es un subcontinuo de Y con interior no vacío, para cada $i \in \{1, \dots, N\}$.

Ahora, ya que f es quasimonótona, para cada $i \in \{1, \dots, N\}$, el conjunto $f^{-1}(C_i)$ tiene un número finito de componentes. Llamemos N_{C_i} al número de componentes de $f^{-1}(C_i)$. Note que cada K componente de $f^{-1}(C_i)$, $f(K) = C_i$, por lo que $(g \circ f(K)) = Q$, así el conjunto $(g \circ f)^{-1}(Q)$ tiene un número finito de componentes y para cada una de éstas su imagen bajo $g \circ f$ es Q . De modo que $g \circ f$ es una función quasimonótona. Por lo tanto, la clase $\mathcal{QM}$ tiene la propiedad de la composición. $\square$

COROLARIO 7.8. *Las siguientes clases de funciones tienen la propiedad de la composición:*

- (i) hereditariamente $\mathcal{H}$.
- (ii) hereditariamente $\mathcal{A}$.
- (iii) hereditariamente $\mathcal{O}$.
- (iv) hereditariamente $\mathcal{M}$.
- (v) hereditariamente $\mathcal{C}$.
- (vi) hereditariamente $\mathcal{DC}$.
- (vii) hereditariamente $\mathcal{PC}$.
- (viii) hereditariamente $\text{Loc}(\mathcal{H})$.
- (ix) hereditariamente $\mathcal{OM}$.
- (ix) hereditariamente $\mathcal{QM}$.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de los Teoremas 7.2 y 7.3, 7.4 7.6, 7.7 y 7.5. $\square$

2. Ejemplos de funciones que no satisfacen la propiedad de la composición

En esta sección daremos algunos ejemplos de algunas clases de funciones que no satisfacen la propiedad de la composición de funciones. Comenzando con el siguiente ejemplo que muestra que la clase de las funciones MO no tiene la propiedad de la composición.

EJEMPLO 7.9. Sean $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & \text{si } x \in [0, \frac{2}{3}]; \\ 1, & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1]; \end{cases}$$

y $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2 - 2x, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

No es difícil convencerse de que la función f es monótona, así por el Teorema 3.17 tenemos que f es una función MO . Note que g es abierta y por el Teorema 3.18 tenemos que g es una función MO . Pongamos $h = g \circ f$, por el Ejemplo 3.22, sabemos que h no es una función MO .

El siguiente ejemplo muestra que la clase de las funciones localmente monótonas no tiene la propiedad de la composición.

EJEMPLO 7.10. Consideremos el continuo $X \subset \mathbb{R}^2$ con coordenadas polares, definido por:

$$X = X_1 \cup X_2 \cup S,$$

donde $X_1 = \{(r, \frac{\pi}{2r} \text{sen}(\frac{\pi}{r-1})) : 1 < r \leq 2\}$;

$X_2 = \{(r, \phi) : (r, \phi - \pi) \in X_1\}$ y

$S = \{(1, \phi) : 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$.

Definamos la función $f : X \rightarrow f(X)$ como sigue:

$$f((r, \phi)) = (r, 2\phi).$$

Consideremos la función cociente, $g : f(X) \rightarrow [0, 1]$, que identifica con el 0 a todos los puntos de S , es decir, $g(x) = 0$, para todo $x \in S$. Tenemos que las funciones f y g son localmente monótonas y la función $g \circ f$ no es localmente monótona.

Note que f es abierta y para cada $y \in f(X)$ el conjunto $f^{-1}(\{y\})$ tiene cardinalidad 2, se sigue del Teorema 5.12 que f es un homeomorfismo local. Luego, por la Proposición 5.2 f es localmente monótona.

Observe que g es una función monótona. Se sigue de la Proposición 5.3 que g es localmente monótona.

Veamos que $g \circ f$ no es localmente monótona, para esto tomemos el punto $(1, \frac{\pi}{2})$. Consideremos la sucesión $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $r_n = \frac{2n+3}{2n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que la sucesión $\{(r_{2n}, \frac{\pi}{2r_{2n}} \text{sen}(\frac{\pi}{r_{2n}-1}))\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al punto $(1, \frac{\pi}{2})$. Ahora, sea $\mathcal{V}$ una vecindad cerrada del punto $(1, \frac{\pi}{2})$, de este modo existe $r > 0$ tal que $B_r((1, \frac{\pi}{2})) \subset \mathcal{V}$, también existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $r_n \in B_r((1, \frac{\pi}{2}))$, para cada $n > N$. Consideremos $n > N$, note que $f(r_n) \in f(\mathcal{V})$, $f(r_n) \neq 0$ y el conjunto $f^{-1}(f(r_n)) = \{(r_{2n}, \frac{\pi}{2r_{2n}} \text{sen}(\frac{\pi}{r_{2n}-1})), (r_{2n}, \frac{\pi}{2r_{2n}} \text{sen}(\frac{\pi}{r_{2n}-1}) - \pi)\}$ no es conexo. De aquí se deduce que $g \circ f$ no es localmente monótona.

El siguiente ejemplo nos muestra que la clase de las funciones débilmente monótonas no tiene la propiedad de la composición.

EJEMPLO 7.11. Consideremos el continuo $X \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$X = I \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n),$$

donde $I = \{(1 - \frac{t}{2}, -\frac{t}{2}) : t \in [0, 1]\}$;

$L_0 = [0, 1] \times \{0\}$ y

$L_n = \{(1 - t, \frac{t}{n}) : t \in [0, 1]\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

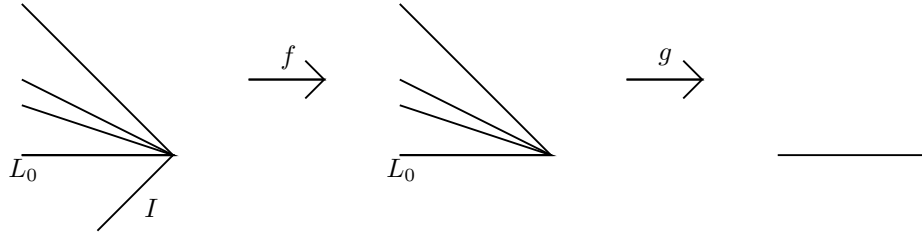
Definamos las funciones $f : X \rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ y $g : \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n \rightarrow [0, 1]$ como sigue

$$f((x, y)) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } y \geq 0; \\ (x, 0), & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

y

$$g((x, y)) = x.$$

Se tiene que las funciones f y g son débilmente monótonas y $g \circ f$ no es débilmente monótona.



Primero veamos que f es quasimonótona. Para esto, sea Q un subcontinuo de $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ con interior no vacío.

Caso 1. Si $Q \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$, entonces $f^{-1}(Q) = Q$ y $f(Q) = Q$.

Caso 2. Si $Q \cap L_0 \neq \emptyset$ entonces, como $\text{int}(Q) \neq \emptyset$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Q \cap L_n \neq \emptyset$, pues si $Q \subset L_0$ entonces $\text{int}(Q) = \emptyset$. Así el punto $(1, 0)$ está contenido en Q por la conexidad de Q . De modo que $f^{-1}(Q)$ tiene una sola componente, C ,

con $f(C) = Q$. De modo tanto f es quasimonótona. Se sigue del Teorema 6.3 que f es débilmente monótona.

Ahora, sea $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función proyección en la primera coordenada. Tenemos que p es una función abierta. Como $p|_X = f$ de modo que f es abierta. Por el Teorema 2.18 tenemos que g es confluyente y, finalmente por el Teorema 6.4, g es débilmente monótona.

Por otro lado, veamos que la función $g \circ f$ no es débilmente monótona. Para esto consideremos el subcontinuo $Q = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ del continuo $[0, 1]$. Note que $\text{int}(Q) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \neq \emptyset$. El conjunto $C = \{(\frac{3-t}{4}, \frac{-1-t}{4}) : t \in [0, 1]\}$ es una componente de $(g \circ f)^{-1}(Q)$ y $g \circ f(C) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \neq Q$. En consecuencia, $g \circ f$ no es débilmente monótona.

El siguiente ejemplo nos muestra que las clases de las funciones $\mathcal{SC}$ y $\mathcal{J}$ no tienen la propiedad de la composición.

EJEMPLO 7.12. Consideremos el continuo $X \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$X = L \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n)$$

donde $L = [-1, 1] \times \{0\}$;

$I_n = \{(\alpha + \frac{1-\alpha}{n}, \frac{1-\alpha}{n}) : \alpha \in [0, 1]\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$;

$J_n = \{(-\alpha - \frac{1-\alpha}{n}, -\frac{1-\alpha}{n}) : \alpha \in [0, 1]\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

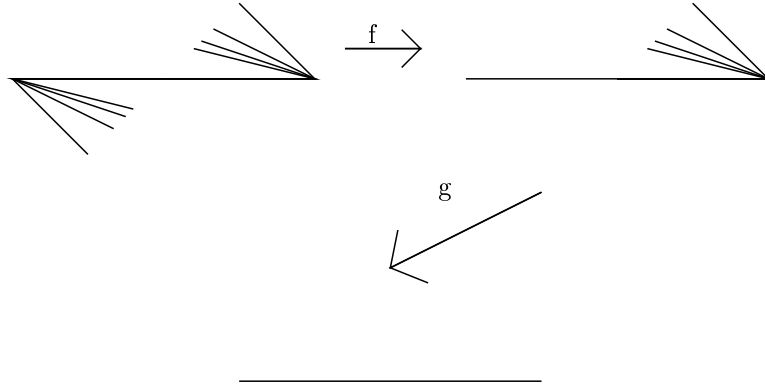
Las funciones $f : X \rightarrow L \cup (\bigcup_{n=2}^{\infty} I_n)$ y $g : L \cup (\bigcup_{n=2}^{\infty} I_n) \rightarrow L$ definidas por:

$$f((x, y)) = \begin{cases} (x, y), & \text{si } x \geq 0; \\ (x, 0), & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

y

$$g(x, y) = x$$

son semiconfluentes y juntadoras pero su composición $g \circ f$ no es semiconfluyente y no es juntadora.



Veamos que f es semiconfluyente. Para esto consideremos un subcontinuo de $L \cup (\bigcup_{n=2}^{\infty} I_n)$, digamos Q .

(I) Si $Q \subset [-1, 0] \times \{0\}$ entonces $Q = [a, b] \times \{0\}$ con $-1 \leq a \leq b \leq 0$.

Caso 1. Si $a = -1$, entonces el conjunto $C = f^{-1}(Q)$ es conexo, con $f(C) = Q$.

Caso 2. Si $a \neq -1$ y $b = 0$. Sea N el número natural tal que $-\frac{1}{N} < a \leq -\frac{1}{N-1}$. Note que $J_n \cap f^{-1}(Q) = \emptyset$ si $n \leq N$ y $J_n \cap f^{-1}(Q) \neq \emptyset$ si $n > N$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $K_n = f^{-1}(Q) \cap J_n$. Observe que K_n es una componente de $f^{-1}(Q)$ para cada $n > N$. Sean C_1 y C_2 dos componentes de $f^{-1}(Q)$, entonces

(i) Si $C_1 = K_n$ y $C_2 = K_m$, supongamos sin pérdida de generalidad que $n > m > N$. Así

$$f(C_m) = [a, -\frac{1}{m}] \subset [a, -\frac{1}{n}] = f(C_2).$$

(ii) Si $C_1 = Q$ y $C_2 = C_n$, para algún $n > N$, entonces

$$f(C_n) = [a, -\frac{1}{n}] \subset Q = f(Q).$$

Caso 3. Si $Q = [a, b]$ con $-1 < a \leq b < 0$. Sean $N, M \in \mathbb{N}$ tales que $-\frac{1}{N} < a \leq -\frac{1}{N-1}$ y $-\frac{1}{M} < b \leq -\frac{1}{M-1}$. Note que $J_n \cap f^{-1}(Q) = \emptyset$ si $n \leq N$ y $J_n \cap f^{-1}(Q) \neq \emptyset$ si $n > N$. Tomemos $K_n = f^{-1}(Q) \cap J_n$. Observe que K_n es una componente de $f^{-1}(Q)$, para cada $n > N$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea C_1 y C_2 dos componentes de $f^{-1}(Q)$, entonces

(i) Si $C_1 = K_n$ y $C_2 = K_m$, supongamos sin pérdida de generalidad que $n > m$. Así

$$f(C_m) \subset f(C_2).$$

(ii) Si $C_1 = Q$ y $C_2 = C_n$, entonces

$$f(C_n) \subset Q = f(Q).$$

(II) Si $Q \subset ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\bigcup_{n=2}^{\infty} I_n)$. Entonces $f^{-1}(Q) = Q$, pues f es inyectiva en $([0, 1] \times \{0\}) \cup (\bigcup_{n=2}^{\infty} I_n)$. Luego $f^{-1}(Q)$ tiene una sola componente.

Por lo tanto, f es semiconfluente. Se sigue del Teorema 2.10 que f es juntadora.

Sea $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función proyección en la primera coordenada. Tenemos que p es una función abierta y $L \cup (\bigcup_{n=2}^{\infty} I_n)$ es un subcontinuo de $\mathbb{R}^2$, no vacío, se sigue de la Proposición ?? que $g = f|_{L \cup (\bigcup_{n=2}^{\infty} I_n)}$ es una función abierta. Por el Teorema 2.18 tenemos que g es confluyente. Luego, por el Teorema 2.9 g es semiconfluente. En consecuencia, por la Teorema 2.10, obtenemos que g es juntadora.

Veamos que $g \circ f$ no es semiconfluente. Para esto, consideremos el subcontinuo $Q = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Tomemos C_1 como el segmento que une al punto $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ con $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6})$ y C_2 el segmento que une a los puntos $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$. Note que C_1 y C_2 son componentes de $(g \circ f)^{-1}(Q)$, además $g \circ f(C_1) = [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}] \not\subset [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] = g \circ f(C_2)$ y $g \circ f(C_2) = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \not\subset [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}] = g \circ f(C_1)$. Por lo tanto $g \circ f$ no es semiconfluente.

Finalmente, note que para el continuo $Q = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ se tiene que, $g \circ f(C_1) = [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}]$ y $g \circ f(C_2) = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. De modo que $g \circ f((C_1)) \cap g \circ f(C_2) = \emptyset$. De aquí se sigue que $g \circ f$ no es juntadora.

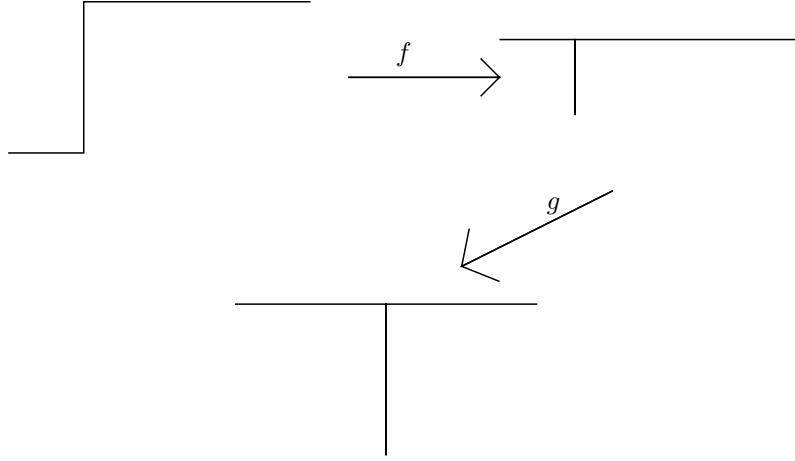
El siguiente ejemplo nos muestra que la clase de las funciones hereditariamente atriódicas no tiene la propiedad de la composición.

EJEMPLO 7.13. Consideremos los continuos X, Y y Z definidos por

$$\begin{aligned}
X &= ([-1, 0] \times \{-1\}) \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \cup ([0, 3] \times \{1\}), \\
Y &= ([-1, 3] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0, 1]), \\
Z &= ([-1, 1] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])
\end{aligned}$$

Definamos las funciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ como

$$\begin{aligned}
f((x, y)) &= (x, |y|), \text{ para cada } (x, y) \in X \text{ y} \\
g((x, y)) &= \begin{cases} (x, y), & \text{si } x \leq 1; \\ (2 - x, 0), & \text{si } x \geq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$



Se tiene que las funciones f y g son hereditariamente atriódicas y su composición $g \circ f$ no es atriódica.

Primero veamos que f es hereditariamente atriódica. Sea Q un subcontinuo de X , probaremos que $f|_Q$ es atriódica.

Caso 1. Si $Q \subset [-1, 0] \times \{-1\}$. Sea C un subcontinuo de $f(Q)$, entonces C es de la forma $[a, b] \times \{1\}$ con $b \leq 0$. De modo que $f|_Q^{-1}(C) = [a, b] \times \{-1\}$ que es conexo.

Caso 2. Si $Q \subset [0, 3] \times \{1\}$. Sea C un subcontinuo de $f(Q)$, entonces C es de la forma $[a, b] \times \{1\}$ con $a \geq 0$. Por lo tanto $f|_Q^{-1}(C) = C$ que es conexo.

Caso 3. Si $Q \subset \{0\} \times [-1, 1]$, entonces Q es de la forma $\{0\} \times [a, b]$ con $-1 \leq a \leq b \leq 1$. Tomemos C subcontinuo de $f(Q)$, entonces C es de la forma $\{0\} \times [d, e]$.

(i) Si $a \leq d$. Consideremos la componente de $f|_Q^{-1}(C)$, K , que contiene a $\{0\} \times [d, e]$ entonces

$$\{0\} \times [d, e] = f|_Q(\{0\} \times [d, e]) \subset f|_Q(K) \subset C,$$

de modo que $f(K) = C$.

(ii) Si $a > d$. Tomemos K la componente de $f|_Q^{-1}(C)$, que contiene a $\{0\} \times [-e, -d]$. Luego

$$\{0\} \times [d, e] = f|_Q(\{0\} \times [-e, -d]) \subset f|_Q(K) \subset C,$$

de modo que $f(K) = C$.

Caso 4. Si $Q \subset ([-1, 0] \times \{-1\}) \cup (\{0\} \times [-1, 1])$. Sea C un subcontinuo de $f(Q)$.

(i) Si $C = [d, e] \times \{1\}$, entonces $f|_Q^{-1}(C) = [d, e] \times \{-1\}$.

(ii) Si $C = \{0\} \times [e, d]$, tomemos la componente de $f|_Q^{-1}(C)$, K , que contiene a $\{0\} \times [-e, -d]$. entonces

$$\{0\} \times [d, e] = f|_Q(\{0\} \times [-e, -d]) \subset f|_Q(K) \subset C,$$

luego $f(K) = C$.

(iii) Si $C = ([d, 0] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [-1, e])$, tomemos K la componente de $f|_Q^{-1}(C)$, que contiene a $([d, 0] \times \{-1\}) \cup (\{0\} \times [-1, -e])$. Tenemos que

$$([d, 0] \times \{-1\}) \cup (\{0\} \times [-1, -e]) = f|_Q(([d, 0] \times \{-1\}) \cup (\{0\} \times [-1, -e])) \subset f|_Q(K) \subset C.$$

Se sigue que $f(K) = C$.

Caso 5. Si $Q = ([0, d] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [e, 1])$ con $0 \leq d \leq 3$ y $-1 \leq e \leq 1$. Sea C un subcontinuo de $f(Q)$. Tomemos la componente de $f|_Q^{-1}(C)$, K , que contiene a C . Tenemos que

$$C = f|_Q(C) \subset f|_Q(K) \subset C.$$

De modo que $f(K) = C$.

Caso 6. Si $Q = ([d, 0] \times \{-1\}) \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \times ([0, e] \times \{1\})$ con $-1 \leq d < 0 < e \leq 3$. Consideremos un subcontinuo de $f(Q)$, C . Note que $f|_Q^{-1}(C)$ tiene a lo más dos componentes.

(i) Si $C \subset [d, 0] \times \{1\}$, de modo que $C = [f, 0] \times \{1\}$ con $d \leq f$, entonces $f|_Q^{-1}(C) = [f, 0] \times \{-1\}$, que es conexo.

(ii) Si $C \subset [0, e] \times \{1\}$, entonces $f|_Q^{-1}(C) = C$ el cual es conexo.

(iii) Si $C \subset [l, m] \times \{1\}$ con $l < 0 < m$, entonces $f|_Q^{-1}(C) = ([l, 0] \times \{-1\}) \cup ([0, m] \times \{1\})$. Note que

$$f|_Q([l, 0] \times \{-1\}) \cup f|_Q([0, m] \times \{1\}) = C.$$

(iv) Si $C = \{0\} \times [l, m]$ con $0 \leq l \leq m \leq 1$. Consideremos la componente de $f|_Q^{-1}(C)$, K , que contiene a C . Tenemos que

$$C = f|_Q(C) \subset f|_Q(K) \subset C.$$

De modo que $f(K) = C$.

(v) Si $C = ([l, m] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [n, 1])$, con $l < 0 < m$ y $n < 1$. Note que $f|_Q^{-1}(C)$ tiene a lo más dos componentes. Sean K_1 la componente de $f|_Q^{-1}(C)$ que contiene a $([l, 0] \times \{-1\}) \cup (\{0\} \times [-1, -n])$ y K_2 la componente de $f|_Q^{-1}(C)$ que contiene a $([0, m] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [n, 1])$, tenemos que
 $f|_Q(K_1) = ([l, 0] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [n, 1])$,
 $f|_Q(K_2) = ([0, m] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [n, 1])$ y
 $C = f|_Q(K_1) \cup f|_Q(K_2)$.

Por lo que podemos concluir que $f|_Q$ es una función atriódica. Por lo tanto f es hereditariamente atriódica.

Veamos ahora que g es hereditariamente atriódica. Sea Q un subcontinuo de Y . Probaremos que $g|_Q$ es atriódica, para esto, sea C un subcontinuo de $g(Q)$.

Caso 1. Si $Q \subset ([-1, 1] \times \{1\}) \cup (\{0\}[0, 1])$, entonces $g|_Q^{-1}(C) = C$, que es conexo.

Caso 2. Si $Q \subset [-1, 3] \times \{1\}$ entonces Q es de la forma $[a, b] \times \{1\}$, con $-1 \leq a \leq b \leq 3$.

(i) Si $a \leq 1$ entonces $C = [l, m]$, de modo que $g|_Q^{-1}(C) = [2-m, 2-l] \times \{1\}$ que es conexo.

(ii) Si $a < 1 < b$, entonces C tiene la forma $[l, m] \times \{0\} \subset g(Q)$.

-Si $2-b > l$, entonces consideremos la componente K de $g|_Q^{-1}(C)$ que contiene a $[l, m] \times \{1\}$, de modo que $[l, m] \times \{1\} = g|_Q([l, m] \times \{1\}) \subset g|_Q(K) \subset C$. Luego, $g|_Q(K) = C$.

-Si $2-b = l$. Sea K la componente de $g|_Q^{-1}(C)$ que contiene a $[2-m, 2-l] \times \{1\}$, entonces $[l, m] \times \{1\} = g|_Q([2-m, 2-l] \times \{1\}) \subset g|_Q(K) \subset C$. De modo que $g|_Q(K) = C$.

-Si $a > l$, tomemos la componente de $g|_Q^{-1}(C)$, K , que contiene a $[2-m, 2-l] \times \{1\}$, de modo que $[l, m] \times \{1\} = g|_Q([2-m, 2-l] \times \{1\}) \subset g|_Q(K) \subset C$. Luego, $g|_Q(K) = C$.

-Si $a = l$. Sea K la componente de $g|_Q^{-1}(C)$ que contiene a $[l, m] \times \{1\}$, de modo que $[l, m] \times \{1\} = g|_Q([l, m] \times \{1\}) \subset g|_Q(K) \subset C$. Se sigue que $g|_Q(K) = C$.

Caso 3. Si Q es de la forma $[a, b] \times \{1\} \cup \{0\} \times [d, 1]$ con $-1 \leq a < 0 < b \leq 1$ y $0 \leq b < 1$, entonces

(i) Si $C = [l, m] \times \{1\}$ se puede probar con un argumento similar al del Caso 2 que existe una componente de $g|_Q^{-1}(C)$, K , tal que $g|_Q(K) = C$.

(ii) Si $C \subset \{0\} \times [d, 1]$ entonces C es de la forma $\{0\} \times [l, m]$ con $d \leq l \leq m \leq 1$ tomemos K la componente de $g|_Q^{-1}(C)$ que contiene a $\{0\} \times [l, m]$, de modo que $\{0\} \times [l, m] = g|_Q(\{0\} \times [l, m]) \subset g|_Q(K) \subset C$. Luego, $g|_Q(K) = C$.

(iii) Si $C = ([l, m] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [n, 1])$ con $l < 1 < m$ y $n < 1$, entonces

-Si $a < l$ entonces tomemos la componente de $g|_Q^{-1}(C)$ que contiene a $([l, m] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [n, 1])$ de modo que $([l, m] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [n, 1]) = g|_Q([l, m] \times \{1\} \cup (\{0\} \times [n, 1])) \subset g|_Q(K) \subset C$. Se sigue que $g|_Q(K) = C$.

-Si $a = l$ note que $g|_Q^{-1}(C)$ tiene a lo más dos componentes. Pongamos K_1 la componente de $g|_Q^{-1}(C)$ que contiene a $([a, m] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [n, 1])$ y K_2 la componente de $g|_Q^{-1}(C)$ que contiene a $[2-m, 2-l] \times \{1\}$. Se tiene que $([a, m] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [n, 1]) = g|_Q(K_1)$, $[l, m] \times \{1\} = g|_Q(K_2)$ y, $g|_Q(K_1) \cup g|_Q(K_2)$.

Por lo tanto, $g|_Q$ es una función atriódica. Se sigue que g es hereditariamente atriódica.

Ahora, si consideramos C subcontinuo de Z como $([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [\frac{1}{2}, 1])$, tenemos que

$$(g \circ f)^{-1}(C) = (([-\frac{1}{2}, 0] \times \{-1\}) \cup (\{0\} \times [-1, -\frac{1}{2}])) \cup (([0, \frac{1}{2}] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [\frac{1}{2}, 1])) \cup ([\frac{3}{2}, \frac{5}{2}] \times \{1\}).$$

Pongamos $K_1 = ([-\frac{1}{2}, 0] \times \{-1\}) \cup (\{0\} \times [-1, -\frac{1}{2}])$, $K_2 = ([0, \frac{1}{2}] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [\frac{1}{2}, 1])$ y $K_3 = [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}] \times \{1\}$. Note que

$$(g \circ f)(K_1) = ([-\frac{1}{2}, 0] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [\frac{1}{2}, 1]) \neq C$$

$$(g \circ f)(K_2) = ([0, \frac{1}{2}] \times \{1\}) \cup (\{0\} \times [\frac{1}{2}, 1]) \neq C \text{ y}$$

$$(g \circ f)(K_3) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \{1\} \neq C.$$

Además $g \circ f(K_i) \cup g \circ f(K_j)$, para $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ y $g \circ f(K_l) \not\subseteq g \circ f(K_i)$ y $g \circ f(K_l) \not\subseteq g \circ f(K_j)$ para $l \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\}$. De modo que $g \circ f$ no es atriódica. Dado que X es un subcontinuo de X , se sigue que $g \circ f$ no es hereditariamente atriódica.

3. Propiedad de la composición factor

Concluimos nuestro trabajo de tesis analizando el concepto de la *propiedad de la composición factor*. Desde nuestro punto de vista es uno de los temas más hermosos que tiene la teoría de los continuos. Las funciones que vamos a considerar en la definición que sigue están definidas entre espacios métricos compactos.

DEFINICIÓN 7.14. Sea $\mathbf{A}$ una clase de funciones continuas y suprayectivas. Decimos que la clase $\mathbf{A}$ tiene la **propiedad de la composición factor**, si para cada función $f : X \rightarrow Y$ que pertenece a $\mathbf{A}$ tal que se puede factorizar en dos funciones, es decir, existen $h : X \rightarrow Z$ y $g : Z \rightarrow Y$ continuas y suprayectivas tales que $f = g \circ h$, implica que $g \in \mathbf{A}$.

En lo que resta de la tesis vamos a probar que las clases de las funciones $\mathcal{H}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{DC}$, $\mathcal{PC}$, $\text{Loc}(\mathcal{DC})$, $\text{Loc}(\mathcal{C})$, $\mathcal{QM}$, $\mathcal{DM}$, $\mathcal{J}$ y $\mathcal{OM}$ tienen la propiedad de la composición factor.

TEOREMA 7.15. La clase de los homeomorfismos, $\mathcal{H}$, tiene la propiedad de la composición factor.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo entre espacios métricos compactos. Supongamos que existen funciones, $h : X \rightarrow Z$ y $g : Z \rightarrow Y$, continuas y suprayectivas tales que $f = g \circ h$. Veamos que $g \in \mathcal{H}$.

Probaremos primero que g es inyectiva, supongamos que g no lo es, es decir, que existen puntos distintos, z_1 y z_2 , en Z tales que $g(z_1) = g(z_2)$. Como h es suprayectiva, entonces tomemos x_1 y x_2 en X tales que $h(x_1) = z_1$ y $h(x_2) = z_2$. Luego, $f(x_1) = g \circ h(x_1) = g(z_1) = g(z_2) = g \circ h(x_2) = f(x_2)$. De modo que $f(x_1) = f(x_2)$ lo cual no puede ser pues f es inyectiva. De este modo g es inyectiva. Por lo tanto g es biyectiva. Análogamente se puede mostrar que h es biyectiva. Resta ver que g^{-1} es continua. Note que $f^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$ por lo cual $h \circ f^{-1} = h \circ h^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1}$. Como h y f^{-1} son continuas, entonces g^{-1} es continua. Por lo tanto g es un homeomorfismo. Por lo tanto, $\mathcal{H}$ tiene la propiedad de la composición factor. $\square$

TEOREMA 7.16. La clase de las funciones abiertas, $\mathcal{O}$, tiene la propiedad de la composición factor.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función abierta entre espacios métricos compactos. Supongamos que existen funciones, $h : X \rightarrow Z$ y $g : Z \rightarrow Y$, continuas y suprayectivas tales que $f = g \circ h$. Veamos que g es abierta.

Sea $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en Z , como h es continua se tiene que el conjunto $\mathcal{V} = h^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en X y, dado que h es suprayectiva se tiene que $h(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$.

Así $g(\mathcal{U}) = g(h(\mathcal{V})) = g \circ h(\mathcal{V}) = f(\mathcal{V})$ con $\mathcal{V}$ un abierto en X . Dado que f es una función abierta se tiene que $f(\mathcal{V})$ es un conjunto abierto en Y , es decir, $g(\mathcal{U})$ es abierto en Y . Por lo tanto g es abierta. $\square$

TEOREMA 7.17. *La clase de las funciones monótonas, $\mathcal{M}$, tiene la propiedad de la composición factor.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos monótona. Supongamos que existen, $h : X \rightarrow Z$ y $g : Z \rightarrow Y$, funciones continuas y suprayectivas tales que $f = g \circ h$. Probaremos que g es monótona.

Consideremos un punto $y \in Y$, como f es monótona entonces $f^{-1}(\{y\})$ es un conjunto conexo. Dado que h es continua tenemos que $h(f^{-1}(\{y\}))$ es conexo en Z . Veamos que $h(f^{-1}(\{y\})) = g^{-1}(\{y\})$.

$\subseteq$ Tomemos $z \in h(f^{-1}(\{y\}))$, entonces existe $x \in f^{-1}(\{y\})$ tal que $h(x) = z$. Ahora $g(z) = g(h(x)) = g \circ h(x) = f(x) = y$. De donde $z \in g^{-1}(\{y\})$.

$\supseteq$ Sea $z \in g^{-1}(\{y\})$. Como h es suprayectiva existe $x \in X$ tal que $h(x) = z$. Ahora $y = g(z) = g(h(x)) = f(x)$. De modo que $x \in f^{-1}(\{y\})$ y $z = h(x)$, por lo que $z \in h(f^{-1}(\{y\}))$.

Se sigue que el conjunto $g^{-1}(\{y\})$ es conexo. Por lo cual $g \in \mathcal{M}$ y, por lo tanto, la clase $\mathcal{M}$ tiene la propiedad de la composición factor. $\square$

TEOREMA 7.18. *La clase de las funciones confluentes, $\mathcal{C}$, tiene la propiedad de la composición factor.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función confluyente entre espacios métricos compactos. Supongamos que existen $h : X \rightarrow Z$ y $g : Z \rightarrow Y$ funciones continuas y suprayectivas tales que $f = g \circ h$. Probaremos que g es confluyente.

Sea Q un subcontinuo de Y y C una componente de $g^{-1}(Q)$. Consideremos un punto $z \in C$, como h es suprayectiva entonces existe $x \in X$ tal que $h(x) = z$, como $f(x) = g(h(x)) = g(z) \in Q$, por lo que $x \in f^{-1}(Q)$. Sea C' la componente de $f^{-1}(Q)$ que contiene al punto x . Dado que f es confluyente, $Q = f(C') = g \circ h(C') = g(h(C'))$, de modo que $h(C') \subset g^{-1}(Q)$. Como C' es conexo y $h(C') \cap C \neq \emptyset$, dado que C es una componente de $g^{-1}(Q)$ entonces $h(C') \subset C$. Así, $f(C') = g(h(C')) \subset g(C)$. Se sigue que $g(C) = Q$. Por lo tanto, g es confluyente. $\square$

TEOREMA 7.19. *La clase de las funciones débilmente confluentes, $\mathcal{DC}$, tiene la propiedad de la composición factor.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función débilmente confluyente entre espacios métricos compactos. Supongamos que existen, $h : X \rightarrow Z$ y $g : Z \rightarrow Y$, funciones continuas y suprayectivas tales que $f = g \circ h$. Probaremos que $g \in \mathcal{DC}$.

Sea Q un subcontinuo de Y . Como f es débilmente confluyente existe C' componente $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C') = Q$. Note que $h(f^{-1}(Q)) \subset g^{-1}(Q)$. Consideremos un punto $z \in h(f^{-1}(Q))$ entonces existe $x \in f^{-1}(Q)$ tal que $h(x) = z$. Como $x \in f^{-1}(Q)$, luego $z = h(x) \in g^{-1}(Q)$. Sea C la componente de $g^{-1}(Q)$ que contiene al conjunto $h(C')$, tenemos que

$$Q = f(C') = g(h(C')) \subset g(C) \subset Q,$$

de aquí se sigue que $g(C) = Q$. Por lo tanto, g es débilmente confluyente. $\square$

TEOREMA 7.20. *La clase de las funciones pseudoconfluentes, $\mathcal{PC}$, tiene la propiedad de la composición factor.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función pseudoconfluyente entre espacios métricos compactos. Supongamos que existen, $h : X \rightarrow Z$ y $g : Z \rightarrow Y$, funciones continuas y suprayectivas tales que $f = g \circ h$. Probaremos que $g \in \mathcal{PS}$.

Sean Q un subcontinuo irreducible de Y y $y_1, y_2 \in Q$. Como f es pseudoconfluyente, por el Teorema 6.7 existe C' componente de $f^{-1}(Q)$ tal que $y_1, y_2 \in f(C')$. Como $h(f^{-1}(Q)) \subset g^{-1}(Q)$ y h es continua, tomemos C la componente de $g^{-1}(Q)$ que contiene a $h(C')$. Se tiene que

$$y_1, y_2 \in f(C') = g(h(C')) \subset g(C),$$

por lo que $y_1, y_2 \in g(C)$. Se sigue del Teorema 6.7 que $g \in \mathcal{PC}$. $\square$

TEOREMA 7.21. *La clase de funciones localmente débilmente confluentes, $Loc(\mathcal{DC})$, tiene la propiedad de la composición factor.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : X \rightarrow Z$ una función localmente débilmente confluyente entre espacios métricos compactos. Supongamos que existen, $h : X \rightarrow Z$ y $g : Z \rightarrow Y$, funciones continuas y suprayectivas tales que $f = g \circ h$. Probaremos que g es localmente débilmente confluyente.

Consideremos un punto $y \in Y$ y tomemos $\mathcal{V}$ vecindad cerrada del punto y tal que $f|_{f^{-1}(\mathcal{V})}$ es débilmente confluyente. Sea Q un continuo arbitrario contenido en $\mathcal{V}$. Entonces existe una componente K de $f^{-1}(\mathcal{V})$ tal que $f(K) = Q$. Más aún $h(K)$ es un continuo de Z contenido en alguna componente, C , de $g^{-1}(Q)$. Es decir, $Q = f(K) = g(h(K)) \subset g(C)$, y así $g(C) = Q$. Esto implica que la función restricción $g|_{g^{-1}(\mathcal{V})}$ es débilmente confluyente, es decir, g es localmente débilmente confluyente. $\square$

TEOREMA 7.22. *La clase de las funciones localmente confluentes, $Loc(\mathcal{C})$, tiene la propiedad de la composición factor.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función localmente confluyente entre espacios métricos compactos. Supongamos que existen, $h : X \rightarrow Z$ y $g : Z \rightarrow Y$, funciones continuas y suprayectivas tales que $f = g \circ h$. Probaremos que g es localmente confluyente.

Consideremos un punto $y \in Y$, por hipótesis existe $\mathcal{V}$ vecindad cerrada del punto y tal que $f|_{f^{-1}(\mathcal{V})}$ es confluyente. Como

$$f|_{f^{-1}(\mathcal{V})} = (g|_{g^{-1}(\mathcal{V})}) \circ (h|_{f^{-1}(\mathcal{V})}),$$

se sigue del Teorema 7.18 que $g|_{g^{-1}(\mathcal{V})}$ es confluyente. Por lo tanto, g es localmente confluyente. $\square$

TEOREMA 7.23. *La clase de las funciones quasimonótonas, $\mathcal{QM}$, tiene la propiedad de la composición factor.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función quasimonótona entre espacios métricos compactos. Supongamos que existen, $h : X \rightarrow Z$ y $g : Z \rightarrow Y$, funciones continuas y suprayectivas tales que $f = g \circ h$. Probaremos que g es quasimonótona.

Sea Q un subcontinuo de Y con interior no vacío. Como f es quasimonótona, entonces el conjunto $f^{-1}(Q)$ tiene un número finito de componentes, llamémosle N al número de componentes de $f^{-1}(Q)$. Note que el número de componentes de $g^{-1}(Q)$ es menor o igual que N , pues h es continua. Sea C una componente de $g^{-1}(Q)$ y tomemos $z \in C$. Como h es suprayectiva existe $x \in X$ tal que $h(x) = z$. Dado que $g(h(x)) = g(z) \in Q$, tenemos que $x \in f^{-1}(Q)$. Sea C' la componente de $f^{-1}(Q)$ que contiene al punto x . Dado que C' es un conjunto conexo, entonces $h(C')$ es conexo. Más aún, como $h(x) = z$, $h(C') \cap C \neq \emptyset$ y $h(C') \subset g^{-1}(Q)$, de modo que $h(C') \subset C$. Así

$$Q = f(C') = g(h(C')) \subset g(C).$$

Luego $g(C) = Q$. Por lo tanto g es quasimonótona. $\square$

Análogamente podemos probar lo siguiente.

TEOREMA 7.24. *La clase de las funciones débilmente monótonas, $\mathcal{DM}$, tiene la propiedad de la composición factor.*

TEOREMA 7.25. *La clase de las funciones juntadoras, $\mathcal{J}$, tiene la propiedad de la composición factor.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función juntadora entre espacios métricos compactos. Supongamos que existen, $h : X \rightarrow Z$ y $g : Z \rightarrow Y$, funciones continuas y suprayectivas tales que $f = g \circ h$. Probaremos que g es juntadora.

Sea Q un subcontinuo de Z . Tomemos C_1 y C_2 dos componentes de $g^{-1}(Q)$ y $z_1 \in C_1$, $z_2 \in C_2$. Como h es suprayectiva existen $x_1, x_2 \in f^{-1}(Q)$ tales que $h(x_1) = z_1$ y $h(x_2) = z_2$. Llamemos C'_1 y C'_2 a las componentes de $f^{-1}(Q)$ que contienen a los puntos x_1 y x_2 , respectivamente. Note que $h(f^{-1}(Q)) \subset g^{-1}(Q)$ y $h(x_1)$ y $h(x_2)$ están en componentes distintas, entonces C'_1 y C'_2 son componentes distintas. Como f es un función juntadora se tiene que $f(C'_1) \cap f(C'_2) \neq \emptyset$. Dado que $f(C'_1) \subset g(C_1)$ y $f(C'_2) \subset g(C_2)$, se sigue que $g(C_1) \cap g(C_2) \neq \emptyset$, por lo tanto g es juntadora. $\square$

TEOREMA 7.26. *La clase de las funciones OM tiene la propiedad de la composición factor.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función OM entre espacios métricos compactos. Supongamos que existen, $h : X \rightarrow Z$ y $g : Z \rightarrow Y$, funciones continuas y suprayectivas tales que $f = g \circ h$. Veamos que g es una función MO .

Sea $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\lim y_n = y$ para algún $y \in Y$, probaremos que $\limsup g^{-1}(\{y_n\}) \cap C \neq \emptyset$ para toda C componente de $g^{-1}(\{y\})$. Note que $h(\limsup f^{-1}(\{y_n\})) \subset \limsup g^{-1}(\{y_n\})$. Sean $z \in h(\limsup f^{-1}(\{y_n\}))$ y $\mathcal{U}$ un conjunto abierto en Y que contiene al punto z , tomemos $x \in \limsup f^{-1}(\{y_n\})$ tal que $h(x) = z$, como h es una función continua el conjunto $h^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto y contiene al punto x . Dado que $x \in \limsup f^{-1}(\{y_n\})$ existe $J \subset \mathbb{N}$ tal que $h^{-1}(\mathcal{U}) \cap f^{-1}(\{y_n\}) \neq \emptyset$, para cada $n \in J$. Como $h(f^{-1}(\{y_n\})) \subset g^{-1}(\{y_n\})$, entonces $\mathcal{U} \cap h(f^{-1}(\{y_n\})) \subset \mathcal{U} \cap g^{-1}(\{y_n\})$, dado que $h^{-1}(\mathcal{U}) \cap f^{-1}(\{y_n\}) \neq \emptyset$

$\emptyset$, para cada $n \in J$ y $h(h^{-1}(\mathcal{U}) \cap f^{-1}(\{y_n\})) \subset \mathcal{U} \cap h(f^{-1}(\{y_n\}))$ se tiene que $\mathcal{U} \cap g^{-1}(\{y_n\}) \neq \emptyset$, para cada $n \in J$. Por lo tanto $z \in \limsup g^{-1}(\{y_n\})$.

Sean C una componente de $g^{-1}(\{y\})$ y $z \in C$, como h es suprayectiva existe $x \in X$ tal que $h(x) = z$, además $f(x) = g(z) = y$, por lo que $x \in f^{-1}(\{y\})$. Llamemos C' a la componente de $f^{-1}(\{y\})$ que contiene al punto x , como h es continua $h(C')$ es un conjunto conexo y $h(C') \cap C \neq \emptyset$, por lo tanto, $h(C') \subset C$. Dado que f es una función *OM*, entonces $C' \cap \limsup f^{-1}(y_n) \neq \emptyset$. Note que $h(C' \cap \limsup f^{-1}(y_n)) \subset h(C') \cap h(\limsup f^{-1}(y_n)) \subset C \cap \limsup g^{-1}(y_n)$, de aquí se sigue que $C \cap \limsup g^{-1}(y_n) \neq \emptyset$. Finalmente, por los Corolarios 3.4 y 3.15 obtenemos que g es una función *OM*. $\square$

El lector se preguntará donde está la sección de *Ejemplos de funciones que no satisfacen la propiedad de la composición factor*, esperamos que la ausencia de tal sea una motivación para un estudio posterior, en nuestro caso ¡así será!

Bibliografía

- [1] F. Barragán M. *Funciones inducidas entre hiperespacios de continuos*, Tesis de Maestría es Ciencias Matemáticas, Facultad de Ciencias Fisico Matemáticas, BUAP, 2007.
- [2] F. Barragán y M. de J. López, *Funciones especiales entre continuos*, Capítulo 5 en Topología y Sistemas Dinámicos III. Editores Juan Angoa A. y otros. Dirección de Fomento editorial, BUAP, Textos Científicos, 2010.
- [3] R. Escobedo, M. de J. López e I. Puga, *El intervalo cerrado, la circunferencia y sus funciones continuas*, Capítulo 8 en Topología y Sistemas Dinámicos IV. Editores Juan Angoa A. y otros. Dirección de Fomento editorial, BUAP, Textos Científicos, 2011.
- [4] K. Kuratowski *Topology I*, Acad. Press and PWN, Warsaw, 1966.
- [5] K. Kuratowski *Topology II*, Acad. Press and PWN, Warsaw, 1968.
- [6] A. Lelek y D. R. Read, *Compositions of confluent mappings and some other classes of functions*, Colloq. Math., 29 (1974), 101-112.
- [7] A. Lelek y E. D. Tymchatyn, *Pseudoconfluent mappings and classification of continua*, Cand. J. Math., 27 (1975), 1336-1348.
- [8] T. Maćkowiak, *A note on local homeomorphisms*, Bull. Acad. Polon. Sci. sér. sci. math. astronom. et phys., 21 (1973), 855-858.
- [9] T. Maćkowiak, *Continuous mappings on continua*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 158 (1979), 1-95.
- [10] T. Maćkowiak, *Locally weakly confluent mappings on hereditarily locally connected continua*, Fund. Math., 88 (1975), 225-240.
- [11] J. R. Munkres, *Topology: A First Course*, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [12] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.
- [13] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Colloquium Publications, Vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1942.