



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Relación entre una partícula en un campo gravitacional
uniforme y el oscilador armónico

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Emmanuel Paz Córdova

Asesorado por

Dr. Gilberto Silva Ortigoza

Puebla Pue.
Septiembre 2025



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Relación entre una partícula en un campo gravitacional
uniforme y el oscilador armónico

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA

por

Emmanuel Paz Córdova

Asesorado por

Dr. Gilberto Silva Ortigoza

Puebla Pue.
Septiembre 2025

Título: Relación entre una partícula en un campo gravitacional uniforme y el oscilador armónico

Estudiante: EMMANUEL PAZ CÓRDOVA

COMITÉ

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
Presidente

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco
Secretario

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Vocal

Dra. Iraís Rubalcava García
Vocal

Dr. Gilberto Silva Ortigoza
Asesor

Índice general

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Relación en los formalismos de la Mecánica clásica	1
1.1. Relación en el formalismo Newtoniano	4
1.2. Relación en el formalismo Lagrangiano	6
1.3. Relación en el formalismo de Hamilton-Jacobi	9
1.4. Relación en el formalismo Hamiltoniano	11
2. Ecuación de Schrödinger	13
2.1. La relación en el marco de la Mecánica cuántica	13
2.2. Estados estacionarios del oscilador armónico	16
2.3. Solución a la ecuación de Schrödinger para una partícula sometida a un campo gravitacional constante determinada por el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico	22
3. Formulación de Bohm de la Mecánica cuántica	29
3.1. Formulación de Bohm	29
3.2. La relación entre las trayectorias de Madelung-Bohm.	30
3.3. El potencial cuántico y las trayectorias de Madelung-Bohm para el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico.	32
3.4. Las trayectorias de Madelung-Bohm para una partícula en un campo gravitacional uniforme asociadas con el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico.	35
Conclusiones	37
A. Demostración de identidades en el formalismo Hamiltoniano	39
B. Relación entre las ecuaciones de Schrödinger para una partícula en un campo gravitacional uniforme y para el oscilador armónico	41
C. Valores esperados para el n-ésimo estado estacionario del oscilador armónico	45
D. Valores esperados de una partícula en un campo gravitacional uniforme determinados por los estados estacionarios del oscilador armónico	47
E. Potencial cuántico del n-ésimo estado estacionario del oscilador armónico	51
Bibliografía	53

Resumen

En el presente trabajo usamos una transformación de punto definida en el espacio de configuraciones extendido para mostrar que, tanto en el formalismo clásico como en el cuántico, la evolución de una partícula bajo la influencia de un campo gravitacional constante puede relacionarse con la evolución del oscilador armónico. Es decir, en el régimen de la mecánica clásica, demostramos que esta transformación de punto nos permite establecer la conexión en los formalismos Newtoniano, Lagrangiano, Hamilton-Jacobi y Hamiltoniano. En el régimen de la mecánica cuántica, la transformación de punto determina una relación entre las funciones de onda, que son soluciones a las correspondientes ecuaciones de Schrödinger. Además, mediante el enfoque del potencial cuántico de la mecánica cuántica, demostramos que la transformación de punto clásica, de manera natural, induce una transformación de punto cuántica en el correspondiente espacio de configuraciones cuántico extendido, que determina la conexión entre las correspondientes trayectorias de Madelung-Bohm. Encontramos que la transformación de punto cuántica tiene la misma forma funcional que la clásica, aunque las trayectorias cuánticas o de Madelung-Bohm son en general, totalmente diferentes de las clásicas.

Palabras clave: *Transformación de punto, Mecánica clásica, Mecánica cuántica, Potencial cuántico, Trayectorias de Madelung-Bohm.*

Introducción

En el desarrollo de teorías físicas para describir las leyes de la naturaleza, las conexiones entre dos problemas físicos aparentemente diferentes han jugado un papel importante. Por ejemplo, Newton se percató que la fuerza que hace que la manzana caiga hacia la Tierra, es la misma fuerza que hace que la luna orbite alrededor de la Tierra. De esta manera, él reconoció la naturaleza universal de la interacción gravitacional. En el presente trabajo, mediante una transformación de punto definida en el espacio de configuraciones extendido, presentamos una conexión entre la partícula unidimensional que evoluciona en un campo gravitacional uniforme y el oscilador armónico unidimensional.

En las formulaciones Newtoniana, Lagrangiana y Hamiltoniana de la mecánica clásica, el concepto de trayectoria es fundamental. En estas formulaciones cada trayectoria está totalmente determinada por las condiciones iniciales. De este modo, para una partícula evolucionando en una dimensión, bajo una interacción dada, estas formulaciones asocian a cada partícula una familia de trayectorias, en el espacio-tiempo, caracterizadas por dos parámetros reales, su posición y momento iniciales. Por otro lado, en la teoría de Hamilton-Jacobi nos interesa calcular una denominada integral completa, la cual da la solución general a las ecuaciones de Hamilton. Un punto clave es que una integral completa a la ecuación de Hamilton-Jacobi, para un sistema Hamiltoniano con un grado de libertad, es una familia uniparamétrica de soluciones, cada solución determina un subconjunto particular de trayectorias. Es decir, en la teoría de Hamilton-Jacobi todas las trayectorias determinadas por la solución general a las ecuaciones de Hamilton están organizadas en subconjuntos tales que cada subconjunto determina una solución particular de la ecuación de Hamilton-Jacobi perteneciente a la integral completa. En la mecánica clásica, la teoría de Hamilton-Jacobi es solo un método para calcular la solución general a las ecuaciones de Hamilton para un sistema mecánico dado [1].

En la formulación ortodoxa de la mecánica cuántica cualquier propiedad física de un sistema cuántico dado se codifica en la función de onda compleja, solución a la correspondiente ecuación de Schrödinger. La evolución de la partícula cuántica es determinada una vez dada la función de onda a un tiempo dado; esto es, todas las propiedades físicas de la partícula a nivel cuántico están determinadas tanto por la amplitud como por la fase de la función de onda compleja. Es importante destacar que a partir de ciertas soluciones a la ecuación de Schrödinger, para un sistema cuántico con una contraparte clásica, como para la partícula libre o el oscilador armónico, es posible determinar un subconjunto de trayectorias clásicas y de este modo una solución particular a la correspondiente ecuación de Hamilton-Jacobi clásica [2]. Esto a su vez significa, que dos integrales completas a la ecuación de Hamilton-Jacobi para un sistema Hamiltoniano clásico dado, las cuales dan el mismo conjunto de trayectorias clásicas, a nivel cuántico podrían estar asociadas con dos sistemas cuánticos con propiedades físicas totalmente diferentes.

En el enfoque del potencial cuántico de la mecánica cuántica, cualquier solución a la ecuación de Schrödinger, para una partícula bajo un potencial clásico dado, hay asociada una familia de trayectorias cuánticas, que corresponden a las curvas integrales de la densidad de corriente de probabilidad, que definen una solución particular a la llamada ecuación de Hamilton-Jacobi cuántica [3–5]. En este enfoque, la función de onda se reescribe en su forma polar y cuando se sustituye en la ecuación de Schrödinger la parte imaginaria de la ecuación resultante da la evolución de la

amplitud de la función de onda, lo que establece la conservación de la probabilidad, mientras la parte real da una ecuación que es conocida como la ecuación de Hamilton-Jacobi cuántica, la cual describe la evolución de la partícula cuántica. En esta formulación, las trayectorias cuánticas determinadas por una solución dada de la ecuación de Schrödinger, se ajustan a una solución particular de la ecuación de Hamilton-Jacobi cuántica. Esa solución particular se obtiene al requerir que el momento de la partícula cuántica esté dado por el gradiente de la fase de la función compleja y de este modo las trayectorias cuánticas resultan ser las curvas integrales de la densidad de corriente de probabilidad.

En este trabajo, siguiendo los procedimientos usados en [6, 8], introducimos una transformación de punto en el espacio de configuraciones extendido que da la relación, en los marcos clásico y cuántico, entre una partícula en un campo gravitacional uniforme y el oscilador armónico.

La organización del presente trabajo es la siguiente: En el capítulo 1 presentamos la relación en la formulación Newtoniana, Lagrangiana, Hamilton-Jacobi y Hamiltoniana. En el capítulo 2, presentamos la relación en el marco de la mecánica cuántica. Esto es, primero mostramos que la ecuación de Schrödinger para una partícula bajo la influencia de un campo gravitacional constante se transforma en la ecuación de Schrödinger para un oscilador armónico. Finalmente, en el capítulo 3 y utilizando el enfoque del potencial cuántico para la mecánica cuántica, presentamos la relación entre las trayectorias de Madelung-Bohm para estos problemas.

Capítulo 1

Relación en los formalismos de la Mecánica clásica

Si (X, T) son coordenadas locales en el espacio de configuraciones extendido de una partícula bajo la influencia de un campo gravitacional constante y (x, t) son coordenadas locales en el espacio de configuraciones extendido para el oscilador armónico, en esta sección mostramos que en los enfoques: Newtoniano, Lagrangiano, Hamilton-Jacobi, y Hamiltoniano de la mecánica clásica la transformación de punto dada por

$$X(x, t) = x \sec(\omega t) - \frac{g \tan^2(\omega t)}{2\omega^2}, \quad T(x, t) = \frac{\tan(\omega t)}{\omega}, \quad (1.1)$$

donde ω y g son dos constantes, establece la conexión entre los dos problemas. El jacobiano para esta transformación de coordenadas equivale a

$$J = \frac{\partial(X, T)}{\partial(x, t)} = \sec^3(\omega t). \quad (1.2)$$

Esto significa que el mapeo (1.1) no corresponde a una transformación de coordenadas cuando

$$t = \frac{\pi}{2\omega}(2n + 1), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.3)$$

De este modo, si $J \neq 0$, entonces la transformación de coordenadas inversa puede escribirse de la siguiente manera

$$x(X, T) = \frac{2X + gT^2}{2\sqrt{1 + T^2\omega^2}}, \quad t(X, T) = \frac{\arctan(\omega T)}{\omega}. \quad (1.4)$$

Observe que cuando g tiende a cero, la partícula bajo la influencia de un campo gravitacional constante se reduce a una partícula libre y la transformación de coordenadas da la relación entre una partícula libre y el oscilador armónico recientemente estudiada por Torres del Castillo [6]; es decir

$$X(x, t) = x \sec(\omega t), \quad T(x, t) = \frac{\tan(\omega t)}{\omega}. \quad (1.5)$$

Por otra parte, cuando ω tiende a cero, ahora el oscilador armónico se reduce a una partícula libre y así la transformación de coordenadas establece la conexión entre una partícula en un campo gravitacional constante y la partícula libre recientemente estudiada por Silva-Ortigoza et al. [10], correspondiente a

$$X(x, t) = x - \frac{g}{2}t^2, \quad T(x, t) = t. \quad (1.6)$$

Finalmente, cuando g y ω tienden a cero la transformación se reduce a la transformación identidad; es decir

$$X(x, t) = x, \quad T(x, t) = t. \quad (1.7)$$

Es decir, las ecuaciones en (1.1) dan una familia de transformaciones de punto de dos parámetros (g, ω) , tales que la transformación identidad es uno de sus miembros. Por lo tanto, la transformación de punto dada por la Ec. (1.1) nos permite estudiar la partícula libre, el oscilador armónico y una partícula en un campo gravitacional constante de manera unificada.

Observe que, la evolución de una partícula en un campo gravitacional uniforme dada por

$$X(T) = X_0 + V_0T - \frac{g}{2}T^2, \quad (1.8)$$

donde X_0 y V_0 corresponden a la posición y velocidad al tiempo $t = 0$ y g es la magnitud de la aceleración debida a la gravedad, es mapeada bajo la transformación (1.1) a la evolución del oscilador armónico dada por

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t) + \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t). \quad (1.9)$$

Es decir, las condiciones iniciales del oscilador armónico son iguales a las condiciones iniciales de una partícula en un campo gravitacional uniforme. Ahora, presentamos un par de ejemplos para poder entender cómo actúa esta transformación de punto y su inversa:

Ejemplo 1. Supongamos que para el caso de una partícula en un campo gravitacional uniforme, con $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, las condiciones iniciales están dadas por $X_0 = 1 \text{ m}$ y $V_0 = 10 \text{ m/s}$, entonces la posición en función del tiempo corresponde a

$$X_1(T) = 1 + 10T - 4.9T^2. \quad (1.10)$$

En la Fig. (1.1a) se muestra en el espacio de configuraciones extendido con coordenadas locales (X, T) , la gráfica para esta trayectoria. De la Ec. (1.10), hallamos que la partícula alcanza su altura máxima dada por $h = 6.1 \text{ m}$ cuando $T = 1.02 \text{ s}$, y finalmente el tiempo que le toma al subir y caer de vuelta a X_0 es de 2.04 s .

Por otra parte, de la Ec. (1.10) definida en el intervalo temporal $T \in [0, 2.04 \text{ s}]$, es mapeada bajo la transformación de punto (1.1) a

$$x_1(t) = \cos(\omega t) + \frac{10}{\omega} \sin(\omega t), \quad (1.11)$$

en el intervalo $t \in [0, \arctan(2.04\omega)/\omega]$, donde la frecuencia angular, ω , está determinada por las constantes k y m . Esta ecuación corresponde a la evolución de un oscilador armónico, en particular, podemos pensar en un resorte ideal con constante de restitución k , colocado horizontalmente, donde su extremo izquierdo se encuentra fijo, mientras que en el extremo libre se conecta la partícula de masa m . Tomando a la posición de equilibrio en $x = 0$ y la dirección positiva hacia la derecha, entonces las condiciones iniciales para esta partícula son $X_0 = 1 \text{ m}$ y $V_0 = 10 \text{ m/s}$. En la Fig. (1.1b), se muestran en el espacio de configuraciones extendido para el oscilador armónico algunas trayectorias generadas por la Ec. (1.11) para distintos valores de ω . Observe que, dado que el periodo del oscilador armónico está relacionado con la frecuencia angular de la forma

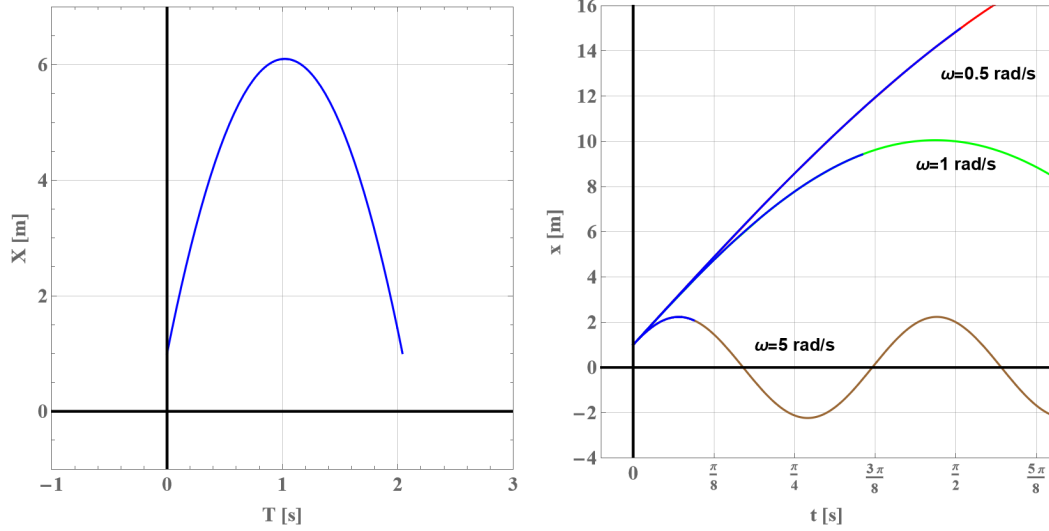
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (1.12)$$

entonces, si ω aumenta, significa que el sistema completa sus oscilaciones más rápido y por lo tanto, el periodo de la oscilación disminuye.

Por otra parte, recordemos que la amplitud viene dada por

$$a = \sqrt{X_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2}}, \quad (1.13)$$

lo cual también implica que, si el valor de ω aumenta, entonces la amplitud disminuye, tal como se puede apreciar en la Fig. (1.1b).



(a) En el espacio de configuraciones extendido para la partícula en un campo gravitacional uniforme se muestra la gráfica de la trayectoria dada por $X_1(T) = 1 + 10T - 4.9T^2$, para el intervalo de tiempo $T \in [0, 2.04 \text{ s}]$.

(b) En el espacio de configuraciones extendido para el oscilador armónico se muestran algunas trayectorias generadas por $x_1(t) = \cos(\omega t) + 10 \sin(\omega t)/\omega$, para distintos valores de ω , donde $t \in [0, \arctan(2.04\omega)/\omega]$. Las curvas azules ilustran la porción de cada curva que se obtiene mediante la transformación de punto (1.1) aplicada a la trayectoria $X_1(T)$. Las porciones restantes de las curvas, en diferentes colores, representan la evolución del oscilador armónico más allá del intervalo temporal.

Figura 1.1: Gráficas del Ejemplo 1

Ejemplo 2. Supongamos que un resorte con constante de restitución k se monta horizontalmente con su extremo izquierdo fijo. Se conecta una partícula de masa m al extremo libre, de esta forma, consideramos a la posición de equilibrio en el origen ($x = 0$) y a la dirección positiva hacia la derecha. Al tiempo $t = 0$, tenemos que $X_0 = 0.10 \text{ m}$ y $V_0 = 0$. Además, si suponemos que no hay fricción, y que la masa y la constante k son tales que $\omega = 1 \text{ rad/s}$, entonces la evolución de la partícula está dada por

$$x_2(t) = 0.10 \cos(t), \quad (1.14)$$

cuya gráfica en el espacio de configuraciones extendido para el oscilador armónico está representada en la Fig. (1.2a). De la Ec. (1.14) vemos que la amplitud para esta oscilación es $a = 0.10 \text{ m}$. Por otra parte, se encuentra que el periodo y la frecuencia son $\tau = 2\pi \text{ s}$ y $f = 1/2\pi \text{ Hz}$, respectivamente.

Relación en los formalismos de la Mecánica clásica

1.1 Relación en el formalismo Newtoniano

Ahora bien, al aplicar la transformación de punto inversa (1.4), encontramos que esto no es posible en los puntos (x, t) donde $t = \pi/2 s, 3\pi/2 s, 5\pi/2 s, \dots$, ya que la transformación no está definida en esos instantes. Por ello, elegiremos a la parte de la curva (1.14) que se mapea mediante la transformación inversa (1.4) únicamente sobre el intervalo $t \in [0, \pi/2 s)$ (Fig. (1.2a)). Por lo tanto, la trayectoria (1.14) en dicho intervalo, es mapeada a

$$X_2(T) = 0.10 - \frac{g}{2}T^2, \quad (1.15)$$

donde $T \in [0, +\infty)$. La expresión anterior corresponde a la trayectoria en el espacio de configuraciones extendido de una partícula en un campo gravitacional uniforme (Fig. (1.2b)).

Por lo tanto, la aplicación de las Ecs. (1.4) en cada punto (x, t) en $t \in [0, \pi/2 s)$, es válida y localmente invertible, y la coordenada temporal $T(t) = \tan(t)$ toma valores en el intervalo $[0, +\infty)$. Mientras que la coordenada espacial $X_2(T) = 0.10 - gT^2/2$ toma valores en el rango $(-\infty, 0.10 m]$.

Una pregunta natural es la siguiente: ¿Qué pasa si ahora elegimos a la parte de la curva (1.14) que se mapea mediante las Ecs. (1.4) sobre el intervalo $t \in (\pi/2 s, 3\pi/2 s)$? La respuesta es que, en las coordenadas (X, T) , la trayectoria en este intervalo corresponde a la curva (1.15), donde $T \in (-\infty, +\infty)$. Esto se debe a que, cuando la variable t se acerca al valor de $\pi/2 s$ por la derecha, $t \rightarrow (\pi/2 s)^+$, entonces $T \rightarrow -\infty$, para $t = \pi s$ ocurre que $T = 0$ y finalmente, cuando t se acerca al valor de $3\pi/2 s$ por la izquierda, $t \rightarrow (3\pi/2 s)^-$, entonces $T \rightarrow +\infty$. Es así que, para la coordenada espacial $X(T) = 0.10 - gT^2/2$, vemos que cuando $T \rightarrow -\infty$ o $T \rightarrow +\infty$, la coordenada X tiende a menos infinito, mientras que para $T = 0$, entonces $X = 0.10 m$. Si tomamos el intervalo $t \in (3\pi/2 s, 5\pi/2 s)$, nuevamente obtendremos la trayectoria (1.15) para $T \in (-\infty, +\infty)$. De hecho, si escogemos la parte de la trayectoria del oscilador armónico (1.14) que se mapea mediante la transformación (1.4) sobre cualquier intervalo de tiempo donde $\cos(t) \neq 0$, encontraremos que la trayectoria correspondiente en el espacio de configuraciones extendido para una partícula en un campo gravitacional uniforme está dada por la Ec. (1.15) para el intervalo temporal $T \in (-\infty, +\infty)$.

Es decir, para la trayectoria (1.15), cuando $g = 0$ la evolución corresponde a una partícula que en todo instante de tiempo se encuentra en reposo. Por otra parte, si $g > 0$, la evolución se asocia a una partícula la cual, cuando $T \rightarrow -\infty$ es lanzada desde $-\infty$ con una rapidez ascendente infinita. El objeto frena mientras asciende, alcanzando su punto más alto a $0.10 m$ arriba del origen de coordenadas en el instante $T = 0$, donde su velocidad es cero. Después de $T = 0$, la partícula comienza su descenso y ganando rapidez, por lo que cuando $T \rightarrow +\infty$, el cuerpo regresa hacia $-\infty$ con una rapidez descendente infinita. Este comportamiento no es un efecto físico del sistema gravitacional, sino que es consecuencia de la forma funcional de la transformación de punto (1.1), ya que esta presenta singularidades en los instantes del oscilador armónico dados por la Ec. (1.3).

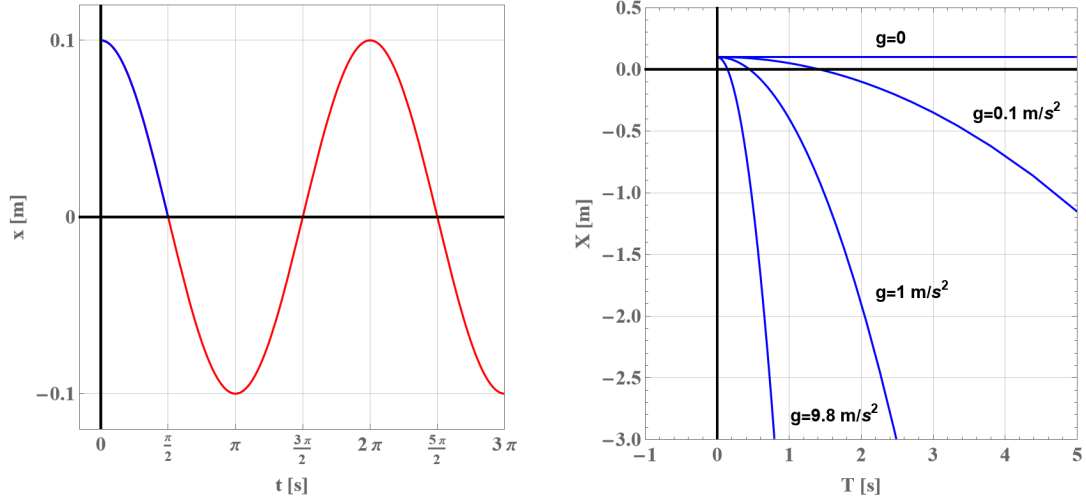
Nótese que, para el caso general, las Ecs. (1.4) se aplican a los puntos (x, t) de manera local en intervalos donde $\cos(\omega t) \neq 0$. En cada uno de estos casos, la transformación temporal $T(t) = \tan(\omega t)/\omega$ varía continuamente desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Y por lo tanto, la coordenada espacial $X(T)$ diverge hacia $-\infty$ cuando $T \rightarrow -\infty$ o $T \rightarrow +\infty$.

1.1. Relación en el formalismo Newtoniano

En el formalismo Newtoniano tenemos que la evolución de una partícula de masa m en un campo gravitacional constante y la del oscilador armónico están dadas, respectivamente, por

$$\frac{d^2 X}{dT^2} + g = 0, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (1.16)$$

donde $-mg\hat{X}$ es la fuerza gravitacional constante que actúa sobre la partícula y $-m\omega^2 x\hat{x}$ es la fuerza de Hooke. De las Ecs. (1.1), encontramos que los diferenciales dX y dT , están dados por



(a) En el espacio de configuraciones extendido para el oscilador armónico se muestra la gráfica de la trayectoria dada por $x_2(t) = 0.10 \cos(t)$ en color rojo. Mientras que la parte que se mapea mediante la transformación (1.1) se encuentra en color azul para el intervalo temporal $t \in [0, \pi/2 \text{ s}]$.

(b) En el espacio de configuraciones extendido de una partícula en un campo gravitacional uniforme se muestran algunas trayectorias dadas por $X_2(T) = 0.10 - gT^2/2$, para distintos valores de g . Cada curva corresponde al mapeo de la parte resaltada en azul de la trayectoria $x_2(t)$ mostrada en la Fig. (1.2a). Cabe señalar que la gráfica es incompleta, ya que conforme T se aproxima al extremo derecho del intervalo de transformación, este diverge, $T \rightarrow +\infty$, y en consecuencia, $X_2(T)$ tiende a $-\infty$, por lo tanto la trayectoria real se prolonga fuera del rango mostrado.

Figura 1.2: Gráficas del Ejemplo 2

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial t} dt$$

$$= \sec(\omega t) dx + \left\{ \omega x \tan(\omega t) \sec(\omega t) - \frac{g}{\omega} \tan(\omega t) \sec^2(\omega t) \right\} dt \quad (1.17)$$

$$= \sec(\omega t) dx + \left\{ \frac{1}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) [\omega^2 x - g \sec(\omega t)] \right\} dt,$$

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt = \sec^2(\omega t) dt, \quad (1.18)$$

entonces

$$\frac{dX}{dT} = \frac{\sec(\omega t)}{\sec^2(\omega t)} \frac{dx}{dt} + \frac{\tan(\omega t) \sec(\omega t)}{\omega \sec^2(\omega t)} [\omega^2 x - g \sec(\omega t)] \frac{dt}{dt}$$

$$= \frac{1}{\sec(\omega t)} \frac{dx}{dt} + \frac{\tan(\omega t)}{\omega \sec(\omega t)} [\omega^2 x - g \sec(\omega t)] \quad (1.19)$$

$$= \cos(\omega t) \frac{dx}{dt} + \omega x \sin(\omega t) - \frac{g}{\omega} \tan(\omega t).$$

Por otra parte, la derivada segunda de la Ec. (1.19) está dada por

$$\frac{d^2 X}{dT^2} = \frac{d}{dT} \left(\frac{dX}{dT} \right). \quad (1.20)$$

Ahora desarrollamos el diferencial de la derivada total (1.19)

$$\begin{aligned} d \left(\frac{dX}{dT} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dX}{dT} \right) dx + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{dX}{dT} \right) d\dot{x} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dX}{dT} \right) dt \\ &= \omega \sin(\omega t) dx + \cos(\omega t) d\dot{x} - \omega \sin(\omega t) dx + [\omega^2 x \cos(\omega t) - g \sec^2(\omega t)] dt \\ &= \cos(\omega t) d \left(\frac{dx}{dt} \right) + [\omega^2 x \cos(\omega t) - g \sec^2(\omega t)] dt. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Por lo tanto, de la Ec. (1.20), se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dT^2} &= \frac{\cos(\omega t)}{\sec^2(\omega t)} \frac{d}{dT} \left(\frac{dx}{dt} \right) + \omega^2 x \frac{\cos(\omega t)}{\sec^2(\omega t)} - g \frac{\sec^2(\omega t)}{\sec^2(\omega t)} \\ &= \cos^3(\omega t) \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x \cos^3(\omega t) - g \\ &= \cos^3(\omega t) \left[\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x \right] - g. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Finalmente,

$$\frac{d^2 X}{dT^2} + g = \cos^3(\omega t) \left[\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x \right] = \frac{1}{J} \left[\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x \right]. \quad (1.23)$$

De este modo, si $X(T)$ es una solución a la segunda ley de Newton para una partícula de masa m bajo la influencia de un campo gravitacional constante, entonces $x(t)$ es una solución a la ecuación de la segunda ley Newton del oscilador armónico.

1.2. Relación en el formalismo Lagrangiano

Una Lagrangiana que describe la evolución de una partícula de masa m en un campo gravitacional constante está dada por

$$L^{(g)} = \frac{m}{2} \left(\frac{dX}{dT} \right)^2 - mgX. \quad (1.24)$$

Sustituyendo las Ecs. (1.1) y la derivada (1.19) en la Lagrangiana (1.24), se obtiene que

$$\begin{aligned}
L^{(g)} &= \frac{m}{2} \left\{ \cos(\omega t) \frac{dx}{dt} + \left[\omega x \sin(\omega t) - \frac{g}{\omega} \tan(\omega t) \right] \right\}^2 - mg \left[x \sec(\omega t) - \frac{g}{2\omega^2} \tan^2(\omega t) \right] \\
&= \frac{m}{2} \left[\cos^2(\omega t) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2\omega x \sin(\omega t) \cos(\omega t) \frac{dx}{dt} - \frac{2g}{\omega} \sin(\omega t) \frac{dx}{dt} + \omega^2 x^2 \sin^2(\omega t) \right. \\
&\quad \left. - 2gx \sin(\omega t) \tan(\omega t) + \frac{g^2}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \right] - mgx \sec(\omega t) + \frac{mg^2}{2\omega^2} \tan^2(\omega t) \\
&= \frac{m}{2} \cos^2(\omega t) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + m\omega x \sin(\omega t) \cos(\omega t) \frac{dx}{dt} - \frac{mg}{\omega} \sin(\omega t) \frac{dx}{dt} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \\
&\quad - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \cos^2(\omega t) - mgx \sin(\omega t) \tan(\omega t) + \frac{mg^2}{\omega^2} \tan^2(\omega t) - mgx \sec(\omega t) \\
&= \cos^2(\omega t) \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + m\omega x \tan(\omega t) \frac{dx}{dt} - \frac{mg}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) \frac{dx}{dt} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \sec^2(\omega t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{m\omega^2 x^2}{2} - mgx \tan^2(\omega t) \sec(\omega t) + \frac{mg^2}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) - mgx \sec^3(\omega t) \right\} \\
&= \cos^2(\omega t) \left\{ \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right] + \left[m\omega x \tan(\omega t) - \frac{mg}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) \right] \frac{dx}{dt} \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{m\omega^2 x^2}{2} \sec^2(\omega t) - mgx \tan^2(\omega t) \sec(\omega t) + \frac{mg^2}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) - mgx \sec^3(\omega t) \right] \right\}. \tag{1.25}
\end{aligned}$$

Por otra parte, de la Ec.(1.18) vemos que $dt/dT = \cos^2(\omega t)$. Entonces, la Ec.(1.25) se puede escribir en la siguiente manera

$$\begin{aligned}
L^{(g)} dT &= L^{(\omega)} dt + \left[m\omega x \tan(\omega t) - \frac{mg}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) \right] dx + \left[\frac{m\omega^2 x^2}{2} \sec^2(\omega t) \right. \\
&\quad \left. - mgx \tan^2(\omega t) \sec(\omega t) + \frac{mg^2}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) - mgx \sec^3(\omega t) \right] dt, \tag{1.26}
\end{aligned}$$

donde

$$L^{(\omega)} = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \tag{1.27}$$

es la Lagrangiana natural que describe la evolución del oscilador armónico. Ahora definimos una función $F(x, t)$ tal que

$$dF(x, t) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt, \tag{1.28}$$

donde

$$\frac{\partial F}{\partial x} = m\omega x \tan(\omega t) - \frac{mg}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t), \tag{1.29}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{m\omega^2 x^2}{2} \sec^2(\omega t) - mgx \tan^2(\omega t) \sec(\omega t) + \frac{mg^2}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) - mgx \sec^3(\omega t). \tag{1.30}$$

Para determinar esta función, ahora integramos a la Ec.(1.29) con respecto de x

$$\int \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) dx = \int \left[m\omega x \tan(\omega t) - \frac{mg}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) \right] dx, \quad (1.31)$$

entonces

$$F = \frac{m\omega x^2}{2} \tan(\omega t) - \frac{mgx}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) + h(t), \quad (1.32)$$

donde h es una función por determinar que depende del tiempo. Para determinarla, derivamos la ecuación propuesta para F (1.32) con respecto del tiempo

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{m\omega^2 x^2}{2} \sec^2(\omega t) - mgx \left[\sec^2(\omega t) \sec(\omega t) + \tan(\omega t) \tan(\omega t) \sec(\omega t) \right] + \frac{dh}{dt} \\ &= \frac{m\omega^2 x^2}{2} \sec^2(\omega t) - mgx \sec^3(\omega t) - mgx \tan^2(\omega t) \sec(\omega t) + \frac{dh}{dt}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

comparando las Ecs. (1.30) y (1.33) obtenemos que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{mg^2}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t), \quad (1.34)$$

separamos variables e integramos

$$\int dh = \frac{mg^2}{\omega^2} \int \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) dt. \quad (1.35)$$

Para resolver la integral del lado derecho de la ecuación (1.35), hacemos un cambio de variable de la forma $u = \tan(\omega t)$, entonces

$$h = \frac{mg^2}{\omega^3} \int u^2 du = \frac{mg^2}{\omega^3} \frac{u^3}{3} + D, \quad (1.36)$$

donde D es una constante de integración. Sustituyendo el cambio de variable realizado y suponiendo que la constante D es igual a cero, entonces la función h está dada por

$$h(t) = \frac{mg^2}{3\omega^3} \tan^3(\omega t). \quad (1.37)$$

Finalmente, la función F corresponde a

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \frac{m\omega x^2}{2} \tan(\omega t) - \frac{mgx}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) + \frac{mg^2}{3\omega^3} \tan^3(\omega t) \\ &= \left\{ \frac{m\omega}{2} x^2 + \frac{mg^2}{3\omega^3} \tan^2(\omega t) - \frac{mg}{\omega} x \sec(\omega t) \right\} \tan(\omega t) \\ &= \left\{ \frac{m\omega}{2} x^2 + \frac{mg}{\omega} \left[\frac{g}{3\omega^2} \tan^2(\omega t) - x \sec(\omega t) \right] \right\} \tan(\omega t). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Esto significa, que la Ec. (1.26) se puede escribir en la siguiente forma

$$L^{(g)} dT = L^{(\omega)} dt + dF. \quad (1.39)$$

De esta manera, se establece la relación en el formalismo Lagrangiano.

1.3. Relación en el formalismo de Hamilton-Jacobi

En el formalismo de Hamilton-Jacobi, la evolución de la partícula bajo la influencia de un campo gravitacional constante y la del oscilador armónico se obtienen resolviendo las correspondientes ecuaciones de Hamilton-Jacobi dadas por

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S^{(g)}}{\partial X} \right)^2 + mgX + \frac{\partial S^{(g)}}{\partial T} = 0, \quad \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S^{(\omega)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \frac{\partial S^{(\omega)}}{\partial t} = 0. \quad (1.40)$$

De la Ec. (1.39) tenemos que

$$S^{(g)} = \int_{\gamma^{(g)}} L^{(g)} dT = \int_{\gamma^{(\omega)}} L^{(\omega)} dt + \int_{\gamma^{(\omega)}} dF = S^{(\omega)} + F, \quad (1.41)$$

donde $\gamma^{(g)}$ y $\gamma^{(\omega)}$ son curvas en los espacios de configuraciones extendidos, con coordenadas locales (X, T) y (x, t) , respectivamente, relacionadas por la transformación de coordenadas (1.1). Por lo tanto, si $S^{(g)}(X, T)$ es una solución a la ecuación de Hamilton-Jacobi para la partícula en un campo gravitacional constante, entonces mediante la transformación de coordenadas (1.1) se determina una solución $S^{(\omega)}(x, t)$ a la ecuación de Hamilton-Jacobi para el oscilador armónico dada por

$$S^{(g)}(X, T) = S^{(\omega)}(x, t) + F(x, t), \quad (1.42)$$

donde $F(x, t)$ viene dada por la Ec. (1.38). Por ejemplo, utilizando la solución general de la ecuación de Lagrange para una partícula en un campo gravitacional constante dada por la Ec. (1.8), observe que, si $X_1 = X(T_1)$, con $T_1 > 0$, entonces

$$X_1 = X_0 + V_0 T_1 - \frac{g}{2} T_1^2, \quad (1.43)$$

al despejar V_0 de esta expresión, obtenemos que

$$V_0 = \frac{X_1 - X_0}{T_1} + \frac{g}{2} T_1. \quad (1.44)$$

Ahora, sustituimos la Ec. (1.44) en la solución general de la ecuación de movimiento para una partícula bajo un campo gravitacional constante (1.8), entonces también se puede escribir en la forma equivalente

$$X = X_0 + \left(\frac{X_1 - X_0}{T_1} \right) T + \frac{g}{2} (T_1 T - T^2), \quad (1.45)$$

es decir, en este caso las condiciones iniciales están dadas por las posiciones X_0 y X_1 de la partícula al tiempo cero y T_1 .

Derivando a la expresión anterior respecto de T , obtenemos que

$$\frac{dX}{dT} = \frac{X_1 - X_0}{T_1} + \frac{g}{2} (T_1 - 2T), \quad (1.46)$$

ahora desarrollamos su cuadrado

$$\begin{aligned} \left(\frac{dX}{dT} \right)^2 &= \left[\frac{X_1 - X_0}{T_1} + \frac{g}{2} (T_1 - 2T) \right]^2 \\ &= \left(\frac{X_1 - X_0}{T_1} \right)^2 + g \left(\frac{X_1 - X_0}{T_1} \right) (T_1 - 2T) + \frac{g^2}{4} (T_1 - 2T)^2 \\ &= \left(\frac{X_1 - X_0}{T_1} \right)^2 + g(X_1 - X_0) - \frac{2g(X_1 - X_0)}{T_1} T + \frac{g^2}{4} (T_1^2 - 4T_1 T + 4T^2). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Relación en los formalismos de la Mecánica clásica
1.3 Relación en el formalismo de Hamilton-Jacobi

Sustituyendo las Ecs. (1.45) y (1.47) en la Lagrangiana natural para una partícula bajo un campo gravitacional constante (1.24), entonces

$$L^{(g)} = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{X_1 - X_0}{T_1} \right)^2 + g(X_1 - X_0) - \frac{2g(X_1 - X_0)}{T_1} T + \frac{g^2}{4} (T_1^2 - 4T_1 T + 4T^2) \right] - mg \left[X_0 + \left(\frac{X_1 - X_0}{T_1} \right) T + \frac{g}{2} (T_1 T - T^2) \right]. \quad (1.48)$$

Ahora, calculamos la acción de la Lagrangiana (1.48) para una configuración del sistema mecánico dada al tiempo cero hasta una configuración dada al tiempo T_1 , entonces

$$S^{(g)}(X_0, X_1, 0, T_1) = \int_0^{T_1} L^{(g)} dT = \int_0^{T_1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dX}{dT} \right)^2 - mgX \right] dT, \quad (1.49)$$

entonces

$$\begin{aligned} S^{(g)} &= \int_0^{T_1} \left\{ \frac{m}{2} \left[\left(\frac{X_1 - X_0}{T_1} \right)^2 + g(X_1 - X_0) - \frac{2g(X_1 - X_0)}{T_1} T + \frac{g^2}{4} (T_1^2 - 4T_1 T + 4T^2) \right] - mg \left[X_0 + \left(\frac{X_1 - X_0}{T_1} \right) T + \frac{g}{2} (T_1 T - T^2) \right] \right\} dT \\ &= \frac{m}{2} \left[\left(\frac{X_1 - X_0}{T_1} \right)^2 T_1 + g(X_1 - X_0) T_1 - \frac{2g(X_1 - X_0)}{T_1} \frac{T_1^2}{2} + \frac{g^2}{4} \left(T_1^2 T_1 - 4T_1 \frac{T_1^2}{2} + 4 \frac{T_1^3}{3} \right) \right] - mg \left[X_0 T_1 + \left(\frac{X_1 - X_0}{T_1} \right) \frac{T_1^2}{2} + \frac{g}{2} \left(T_1 \frac{T_1^2}{2} - \frac{T_1^3}{3} \right) \right] \\ &= \frac{m}{2} \left[\frac{(X_1 - X_0)^2}{T_1} + \cancel{g(X_1 - X_0)T_1} - \cancel{g(X_1 - X_0)T_1} + \frac{g^2}{4} \left(T_1^3 - 2T_1^3 + \frac{4}{3}T_1^3 \right) \right] \\ &\quad - mg \left[X_0 T_1 + \frac{1}{2} (X_1 - X_0) T_1 + \frac{g}{2} \left(\frac{1}{2} T_1^3 - \frac{1}{3} T_1^3 \right) \right] \\ &= m \left[\frac{(X_1 - X_0)^2}{2T_1} + \frac{g^2 T_1^3}{24} - gX_0 T_1 - \frac{g}{2} X_1 T_1 + \frac{g}{2} X_0 T_1 - \frac{g^2 T_1^3}{12} \right], \end{aligned}$$

entonces

$$S^{(g)}(X_0, X_1, 0, T_1) = m \left[\frac{(X_0 - X_1)^2}{2T_1} - \frac{g(X_0 + X_1)T_1}{2} - \frac{g^2 T_1^3}{24} \right]. \quad (1.50)$$

Este resultado establece que, a la partícula bajo la influencia de un campo gravitacional uniforme en el espacio, al evolucionar entre los puntos X_0 y X_1 en el intervalo de tiempo $[0, T_1]$ tiene asociado un número real dado por la Ec. (1.50). Ahora reemplazamos X_1 por X y T_1 por T , de esta forma obtenemos que

$$S^{(g)}(X, T, X_0) = m \left[\frac{(X_0 - X)^2}{2T} - \frac{g(X_0 + X)T}{2} - \frac{g^2 T^3}{24} \right], \quad (1.51)$$

y puesto que

$$\frac{\partial^2 S^{(g)}}{\partial X \partial X_0} = \frac{\partial}{\partial X} \left\{ m \left[\frac{2(X_0 - X)}{2T} - \frac{gT}{2} \right] \right\} = -\frac{m}{T} \neq 0, \quad (1.52)$$

concluimos que la Ec. (1.51) es una integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula bajo la acción de un campo gravitacional constante.

Por otra parte, podemos hallar una integral completa para la ecuación de Hamilton-Jacobi del oscilador armónico al sustituir las Ecs. (1.38) y (1.51) en la relación (1.42). Entonces

$$\begin{aligned}
 S^{(\omega)} &= S^{(g)} - F \\
 &= m \left[\frac{\omega}{2} \cot(\omega t) \left(X_0 - x \sec(\omega t) + \frac{g}{2\omega^2} \tan^2(\omega t) \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{g}{2\omega} \tan(\omega t) \left(X_0 + x \sec(\omega t) - \frac{g}{2\omega^2} \tan^2(\omega t) \right) - \frac{g^2 \tan^3(\omega t)}{24\omega^3} \right] \\
 &\quad - \frac{m\omega x^2}{2} \tan(\omega t) + \frac{mgx}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) - \frac{mg^2}{3\omega^3} \tan^3(\omega t) \\
 &= m \left[\frac{\omega}{2} X_0^2 \cot(\omega t) - \omega X_0 x \csc(\omega t) + \frac{\omega x^2}{2} \cot(\omega t) \sec^2(\omega t) - \frac{g}{\omega} x \tan(\omega t) \sec(\omega t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{g^2}{3\omega^3} \tan^3(\omega t) \right] - \frac{m\omega x^2}{2} \tan(\omega t) + \frac{mgx}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) - \frac{mg^2}{3\omega^3} \tan^3(\omega t) \\
 &= \left\{ \frac{m\omega}{2 \sin(\omega t)} \right\} [X_0^2 \cos(\omega t) - 2X_0 x + x^2 \sec(\omega t) - x^2 \tan(\omega t) \sin(\omega t)] \\
 &= \left\{ \frac{m\omega}{2 \sin(\omega t)} \right\} [X_0^2 \cos(\omega t) - 2X_0 x + x^2 \sec(\omega t)(1 - \sin^2(\omega t))],
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$S^{(\omega)}(x, t, X_0) = \left\{ \frac{m\omega}{2 \sin(\omega t)} \right\} [(X_0^2 + x^2) \cos(\omega t) - 2X_0 x]. \quad (1.53)$$

La cual es una integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi para el oscilador armónico, determinada por la solución (1.51). Véase que se cumple lo siguiente

$$\frac{\partial^2 S^{(\omega)}}{\partial x \partial X_0} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left\{ \frac{m\omega}{2 \sin(\omega t)} \right\} [2X_0 \cos(\omega t) - 2x] \right\} = -\frac{m\omega}{\sin(\omega t)} \neq 0. \quad (1.54)$$

De esta forma hemos establecido la conexión en el formalismo de Hamilton-Jacobi.

1.4. Relación en el formalismo Hamiltoniano

Dado que los momentos generalizados definidos por las funciones Lagrangianas (1.24) y (1.27) están dados por

$$P = \frac{\partial L^{(g)}}{\partial \dot{X}} = m\dot{X}, \quad p = \frac{\partial L^{(\omega)}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad (1.55)$$

entonces, de la Ec. (1.19) tenemos que la ley de transformación para los momentos P y p inducida por la transformación coordenada (1.1) se puede escribir de la siguiente manera

$$P(x, p, t) = p \cos(\omega t) + m\omega x \sin(\omega t) - \frac{mg}{\omega} \tan(\omega t). \quad (1.56)$$

Además, los Hamiltonianos naturales correspondientes, determinados por la transformación de Legendre a partir de las funciones Lagrangianas (1.24) y (1.27), están dados por

$$H^{(g)} = \frac{P^2}{2m} + mgX, \quad H^{(\omega)} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad (1.57)$$

respectivamente. Además, las correspondientes ecuaciones de Hamilton están dadas por

Relación en los formalismos de la Mecánica clásica
1.4 Relación en el formalismo Hamiltoniano

$$\frac{dX}{dT} = \frac{\partial H^{(g)}}{\partial P}, \quad \frac{dP}{dT} = -\frac{\partial H^{(g)}}{\partial X}, \quad (1.58)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H^{(\omega)}}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H^{(\omega)}}{\partial x}. \quad (1.59)$$

Ahora bien, que las ecuaciones de Hamilton determinadas por $H^{(g)}$ y aquellas determinadas por $H^{(\omega)}$ estén relacionadas por la transformación de coordenadas (1.1) significa que

$$PdX - H^{(g)}dT = pdx - H^{(\omega)}dt + dF(x, t), \quad (1.60)$$

es una identidad cuando los momentos están relacionados por la Ec. (1.56). Puesto que

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial t}dt, \quad dT = \frac{\partial T}{\partial t}dt, \quad dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial t}dt, \quad (1.61)$$

entonces las Ecs. (1.60) y (1.61) implican que

$$p = P \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}, \quad H^{(\omega)} = H^{(g)} \frac{\partial T}{\partial t} - P \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (1.62)$$

Estas ecuaciones dan la relación entre $(X, P, T, H^{(g)})$, $(x, p, t, H^{(\omega)})$ y F . En el presente caso, utilizando las Ecs. (1.1), (1.38), (1.56) y (1.57), un cálculo directo muestra que son identidades (Apéndice A). De esta manera hemos establecido la relación en el formalismo hamiltoniano.

Capítulo 2

Ecuación de Schrödinger

2.1. La relación en el marco de la Mecánica cuántica

En esta sección mostramos que si $\Psi(X, T)$ es una solución de la ecuación de Schrödinger para una partícula de masa m bajo la influencia de un campo gravitacional constante; esto es,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + mgX\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial T}, \quad (2.1)$$

mediante la transformación de coordenadas (1.1), se determina una solución $\psi(x, t)$ a la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Para este propósito, guiados por la relación (1.42), proponemos

$$\Psi(X, T) = f(x, t) e^{i\frac{F(x, t)}{\hbar}} \psi(x, t), \quad (2.3)$$

donde $f(x, t)$ es una función por determinar. Con ayuda de la regla de la cadena y de la transformación de coordenadas (1.1) obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} &= \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial X} \frac{\partial}{\partial t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \frac{\partial}{\partial x} \\ &= \cos(\omega t) \frac{\partial}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} &= \frac{\partial x}{\partial T} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial T} \frac{\partial}{\partial t} \\ &= \frac{1}{4(1 + \tan^2(\omega t))} \left[\frac{4g}{\omega} \tan(\omega t) \sqrt{1 + \tan^2(\omega t)} - (2x \sec(\omega t)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{g}{\omega^2} \tan^2(\omega t) + \frac{g}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \right] \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{1 + \tan^2(\omega t)} \frac{\partial}{\partial t} \\ &= \frac{1}{4 \sec^2(\omega t)} \left[\frac{4g}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) - 4\omega x \frac{\tan(\omega t) \sec(\omega t)}{\sec(\omega t)} \right] \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sec^2(\omega t)} \frac{\partial}{\partial t} \\ &= \left[\frac{g}{\omega} \sin(\omega t) - \omega x \sin(\omega t) \cos(\omega t) \right] \frac{\partial}{\partial x} + \cos^2(\omega t) \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por lo que al sustituir la transformación (1.1) y las Ecs. (2.4) y (2.5) en la ecuación de Schrödinger para una partícula bajo la influencia de un campo gravitacional uniforme (2.1), encontramos que

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \cos^2(\omega t) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + mgx \sec(\omega t) \Psi - \frac{mg^2}{2\omega^2} \tan^2(\omega t) \Psi \\ & = i\hbar \left[\frac{g}{\omega} \sin(\omega t) - \omega x \sin(\omega t) \cos(\omega t) \right] \frac{\partial \Psi}{\partial x} + i\hbar \cos^2(\omega t) \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \end{aligned}$$

eliminando el factor $\cos^2(\omega t)$ de todos los términos de la expresión anterior, entonces

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + mgx \sec^3(\omega t) \Psi - \frac{mg^2}{2\omega^2} \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) \Psi \\ & = i\hbar \left[\frac{g}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) - \omega x \tan(\omega t) \right] \frac{\partial \Psi}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ahora, sustituimos la relación propuesta (2.3) en la Ec. (2.6). Para ello, resultan de utilidad las siguientes derivadas

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = e^{\frac{iF}{\hbar}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \psi + f \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{i}{\hbar} f \psi \frac{\partial F}{\partial x} \right), \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} & = e^{\frac{iF}{\hbar}} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \psi + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + f \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{i2}{\hbar} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \psi + f \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial F}{\partial x} \right. \\ & \left. + \frac{i}{\hbar} f \psi \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{\hbar^2} f \psi \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = e^{\frac{iF}{\hbar}} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \psi + f \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} f \psi \frac{\partial F}{\partial t} \right), \quad (2.9)$$

sustituyendo las derivadas anteriores en la Ec. (2.6), obtenemos que

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \psi + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + f \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{i2}{\hbar} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \psi + f \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{i}{\hbar} f \psi \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\hbar^2} f \psi \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \right] + mgx f \psi \sec^3(\omega t) - \frac{mg^2}{2\omega^2} f \psi \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) \\ & = i\hbar \left[\frac{g}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) - \omega x \tan(\omega t) \right] \left(\frac{\partial f}{\partial x} \psi + f \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{i}{\hbar} f \psi \frac{\partial F}{\partial x} \right) \\ & + i\hbar \left(\frac{\partial f}{\partial t} \psi + f \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} f \psi \frac{\partial F}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para desarrollar la expresión anterior, nos serán de utilidad las siguientes derivadas parciales de la función $F(x, t)$ (1.38)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = m\omega x \tan(\omega t) - \frac{mg}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t), \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = m\omega \tan(\omega t), \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 &= \left(m\omega x \tan(\omega t) - \frac{mg}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t)\right)^2 \\ &= m^2\omega^2 x^2 \tan^2(\omega t) - 2m^2gx \tan^2(\omega t) \sec(\omega t) + \frac{m^2g^2}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{m\omega^2 x^2}{2} \sec^2(\omega t) + \frac{mg^2}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) - mgx \sec^3(\omega t) - mgx \tan^2(\omega t) \sec(\omega t). \quad (2.14)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi - i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) f &= \left\{ \frac{1}{2}f m \omega^2 x^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right. \\ &+ \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial f}{\partial x} \left[m\omega x \tan(\omega t) - \frac{mg}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) \right] + \frac{i\hbar}{2m} f m \omega \tan(\omega t) \\ &- \frac{1}{2m} f \left[m^2\omega^2 x^2 \tan^2(\omega t) - 2m^2gx \tan^2(\omega t) \sec(\omega t) + \frac{m^2g^2}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) \right] \\ &- f mgx \sec^3(\omega t) + \frac{mg^2}{2\omega^2} f \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) + \left[\frac{i\hbar g}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) \right. \\ &- \left. \omega x \tan(\omega t) \right] \frac{\partial f}{\partial x} + f m \left[\frac{g^2}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) - 2gx \tan^2(\omega t) \sec(\omega t) \right. \\ &+ \left. \omega^2 x^2 \tan^2(\omega t) \right] + i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} - f \left[\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \sec^2(\omega t) + \frac{mg^2}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) \right. \\ &- \left. mgx \sec^3(\omega t) - mgx \tan^2(\omega t) \sec(\omega t) \right] \left. \right\} \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &+ i\hbar f \frac{\partial \psi}{\partial x} \left[\omega x \tan(\omega t) - \frac{g}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) \right] - i\hbar f \frac{\partial \psi}{\partial x} \left[\omega x \tan(\omega t) - \frac{g}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) \right] \\ &= \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + i\hbar \omega x \tan(\omega t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i\hbar}{2} f \omega \tan(\omega t) - \omega x \tan(\omega t) \frac{\partial f}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} \right. \\ &+ \left. i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} \right\} \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

De la expresión anterior se deduce que

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + i\hbar \omega x \tan(\omega t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i\hbar}{2} f \omega \tan(\omega t) - \omega x \tan(\omega t) \frac{\partial f}{\partial x} + i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (2.17)$$

De la Ec. (2.16) encontramos que la función f solo puede depender del tiempo, es decir, $f = f(t)$. Ahora, de la Ec. (2.17), se obtiene

$$\frac{1}{2} f \omega \tan(\omega t) + \frac{df}{dt} = 0, \quad (2.18)$$

la expresión anterior es una ecuación diferencial de primer orden separable. Al separar las variables e integrar, tenemos que

$$f = \sqrt{\cos(\omega t)}. \quad (2.19)$$

Finalmente, la relación propuesta (2.3) queda explícitamente dada por

$$\begin{aligned} \Psi(X, T) &= \sqrt{\cos(\omega t)} e^{i\frac{F(x,t)}{\hbar}} \psi(x, t) \\ &= \sqrt{\cos(\omega t)} \exp \left\{ \frac{im\omega}{2\hbar} x^2 \tan(\omega t) + \frac{img}{\hbar\omega} \tan(\omega t) \left[\frac{g}{3\omega^2} \tan^2(\omega t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - x \sec(\omega t) \right] \right\} \psi(x, t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Luego, usando las Ecs. (1.1), (1.38), (2.4), (2.5) y (2.20), un cálculo directo (apéndice B) muestra que la ecuación de Schrödinger (2.1) implica el siguiente resultado

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + mgX\Psi - i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial T} = \cos^{\frac{5}{2}}(\omega t) e^{\frac{iF}{\hbar}} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \psi - i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\}. \quad (2.21)$$

Por lo tanto, si Ψ es una solución de la Ec. (2.1), entonces ψ dada por la Ec. (2.20) será una solución a la Ec. (2.2), siempre y cuando $\cos(\omega t) \neq 0$. Además, a partir de la Ec. (2.20) tenemos los dos resultados importantes siguientes. Primero

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(X, T)|^2 dX = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) |\psi(x, t)|^2 dX = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx, \quad (2.22)$$

lo que implica que $\Psi(X, T)$ está normalizada si y solo si $\psi(x, t)$ está normalizada. Segundo, este resultado también implica que la probabilidad $|\Psi(X, T)|^2 dX$ de encontrar una partícula de masa m bajo la acción de un campo gravitacional constante al tiempo T entre X y $X + dX$ es igual a la probabilidad $|\psi(x, t)|^2 dx$ de encontrar una partícula de masa m bajo una interacción dada por la ley de Hooke al tiempo t entre x y $x + dx$.

2.2. Estados estacionarios del oscilador armónico

Vemos que la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico (2.2), dado que el potencial es independiente del tiempo, se puede resolver mediante el método de separación de variables, por lo que suponemos que $\psi(x, t) = M(x)N(t)$. Al sustituir esta expresión en la ecuación de Schrödinger (2.2), esta se descompone en dos ecuaciones diferenciales ordinarias: una ecuación que depende solo de x , y otra que depende solo de t . Resolviendo la ecuación temporal se encuentra que $N(t) = e^{-iEt/\hbar}$. Por otra parte, la otra ecuación se conoce como ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el oscilador armónico, la cual se puede resolver mediante un método algebraico usando los operadores de escalera \hat{a}_{\pm} , o buscando la solución como una serie de potencias. Esta ecuación diferencial que involucra la coordenada espacial x , admite una colección infinita de soluciones $\{M_n(x)\}$, cada una con su energía permitida correspondiente $\{E_n\}$. De esta forma, se encuentra que las soluciones separables están dadas por [9]

$$\psi_n(x, t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right) \exp \left\{ -\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 - \frac{iE_n t}{\hbar} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

donde $H_n(\sqrt{m\omega/\hbar}x)$ denota al polinomio de Hermite de orden n y

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad (2.24)$$

es la energía asociada a cada estado. Las soluciones (2.23) se conocen como los **estados estacionarios del oscilador armónico**, ya que sus densidades de probabilidad correspondientes son independientes del tiempo. Alternativamente, introduciendo la variable adimensional

$$\xi \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x, \quad (2.25)$$

estas soluciones se pueden escribir en la siguiente forma

$$\psi_n(\xi, t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2} - i\omega t \left(n + \frac{1}{2}\right)\right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.26)$$

y los polinomios de Hermite están dados por la **fórmula de Rodrigues**

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \left(\frac{d}{d\xi}\right)^n e^{-\xi^2}. \quad (2.27)$$

Observe que la función de onda del n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico, $\psi_n(x, t)$, está representada en el espacio de las posiciones. Por otra parte, la función de onda del n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico en el espacio de los momentos, $\phi_n(p, t)$, está dada por la transformada de Fourier de la función $\psi_n(x, t)$. Estas funciones de onda han sido calculadas en la literatura y están dadas por [11]

$$\phi_n(p, t) = \left(\frac{1}{\pi\hbar m\omega}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\mu) \exp\left\{-\frac{\mu^2}{2} - i\omega t \left(n + \frac{1}{2}\right)\right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.28)$$

donde

$$\mu \equiv \frac{p}{\sqrt{\hbar m\omega}}. \quad (2.29)$$

Un calculo directo muestra que los valores esperados asociados a la posición y el momento para el n -ésimo estado estacionario, están dados por

$$\langle x \rangle_n = 0, \quad (2.30)$$

$$\langle x^2 \rangle_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar}{m\omega}, \quad (2.31)$$

$$\langle p \rangle_n = 0, \quad (2.32)$$

$$\langle p^2 \rangle_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar m\omega. \quad (2.33)$$

Por otra parte, los valores esperados para la energía cinética, la energía potencial y la energía total están dados por

$$\langle K \rangle_n^{(\omega)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar\omega}{2}, \quad (2.34)$$

$$\langle V \rangle_n^{(\omega)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar\omega}{2}, \quad (2.35)$$

$$\langle H \rangle_n^{(\omega)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega. \quad (2.36)$$

Mientras que el promedio de la fuerza es cero; es decir

$$\left\langle -\frac{dV}{dx} \right\rangle_n^{(\omega)} = 0. \quad (2.37)$$

La deducción de estas expresiones se encuentra en el apéndice C. Los valores esperados representan el promedio de los resultados que se obtendrían si se realizara una medición de una observable varias veces, preparando el sistema en el mismo estado inicial cada vez. De estos resultados, notamos que se cumple el **teorema de Ehrenfest**

$$\langle p \rangle_n = m \frac{d\langle x \rangle_n}{dt}, \quad \frac{d\langle p \rangle_n}{dt} = \left\langle -\frac{dV}{dx} \right\rangle_n^{(\omega)}, \quad (2.38)$$

es decir, los valores esperados obedecen a las leyes clásicas del movimiento.

Por otra parte, observe que la desviación estándar en x es

$$\sigma_{xn} = \sqrt{\langle x^2 \rangle_n - \langle x \rangle_n^2} = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar}{m\omega}}, \quad (2.39)$$

y la desviación estándar en p es

$$\sigma_{pn} = \sqrt{\langle p^2 \rangle_n - \langle p \rangle_n^2} = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar m\omega}. \quad (2.40)$$

Al tomar el producto de estas dos desviaciones estándar comprobamos que se satisface el principio de incertidumbre para el n -ésimo estado estacionario

$$\sigma_{xn}\sigma_{pn} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.41)$$

Observe que el estado base del oscilador armónico ($n = 0$) tiene la incertidumbre mínima, ya que $\sigma_{x0}\sigma_{p0} = \hbar/2$.

Puesto que la región clásicamente permitida está dada por $-\sqrt{2E/m\omega^2} \leq x \leq \sqrt{2E/m\omega^2}$, entonces para el estado ψ_n , la probabilidad de encontrar a la partícula en esta región, $P_n(C)$, está dada por

$$P_n(C) = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{2n+1}}^{\sqrt{2n+1}} H_n^2(\xi) e^{-\xi^2} d\xi. \quad (2.42)$$

Por otra parte, la probabilidad de hallar a la partícula fuera de la región clásicamente permitida, $P_n(NC)$, es

$$P_n(NC) = 1 - P_n(C). \quad (2.43)$$

Ahora bien, la región clásicamente permitida para los momentos corresponde a $-\sqrt{2mE} \leq p \leq \sqrt{2mE}$. Por lo tanto, para el estado ϕ_n , las probabilidades de hallar a la partícula en esta región, $P_n(M)$, o fuera de esta, $P_n(NM)$, están dadas por

$$P_n(M) = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\sqrt{2n+1}}^{\sqrt{2n+1}} H_n^2(\mu) e^{-\mu^2} d\mu, \quad (2.44)$$

$$P_n(NM) = 1 - P_n(M), \quad (2.45)$$

respectivamente. De estos resultados, se tiene que la probabilidad de encontrar a la partícula en una posición dentro de la región clásicamente permitida coincide con la probabilidad de que su momento se encuentre también dentro de la región clásicamente permitida

$$P_n(C) = P_n(M), \quad (2.46)$$

y por lo tanto, las probabilidades complementarias también son iguales

$$P_n(NC) = P_n(NM). \quad (2.47)$$

A continuación aplicamos nuestros resultados generales a los casos: $n = 0, 1, 10$.

Ejemplo 3. Para $n = 0$, la Ec. (2.23) se reduce a

$$\psi_0(x, t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 - \frac{i\omega t}{2}\right\}.$$

que corresponde al estado fundamental del oscilador armónico cuántico. Por otra parte, la función de onda para este estado en el espacio de los momentos es

$$\phi_0(p, t) = \left(\frac{1}{\pi\hbar m\omega}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left\{-\frac{p^2}{2\hbar m\omega} - \frac{i\omega t}{2}\right\}. \quad (2.48)$$

Los valores esperados son

$$\langle x \rangle_0 = 0, \quad \langle x^2 \rangle_0 = \frac{\hbar}{2m\omega}, \quad \langle p \rangle_0 = 0, \quad \langle p^2 \rangle_0 = \frac{\hbar m\omega}{2}. \quad (2.49)$$

De estos, se obtienen las desviaciones estándar

$$\sigma_{x0} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \quad \sigma_{p0} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}. \quad (2.50)$$

Estas cantidades cuantifican la dispersión de los resultados de medición respecto a los valores esperados $\langle x \rangle_0$ y $\langle p \rangle_0$, respectivamente. En este estado, las distribuciones de probabilidad para ψ_0 y ϕ_0 son gaussianas. En la Fig. (2.1a) se muestra la densidad de probabilidad de ψ_0 en términos de ξ , las líneas discontinuas azules indican el valor esperado de la posición y las naranjas delimitan las tres primeras desviaciones estándar. Para una distribución gaussiana, en el intervalo de una desviación estándar se encuentra aproximadamente 0.6827 de la probabilidad total. Al considerar dos desviaciones estándar, la probabilidad aumenta a 0.9545, y dentro de tres desviaciones estándar se incluye alrededor de 0.9973. Una representación análoga de la densidad de probabilidad para ϕ_0 en función de μ se muestra en la Fig. (2.1b), con resultados equivalentes en el espacio de los momentos.

Finalmente, las probabilidades de hallar la partícula en la región clásicamente permitida y no permitida resultan ser

$$P_0(C) = 0.8427, \quad P_0(NC) = 0.1573, \quad (2.51)$$

respectivamente, donde los límites de la región clásicamente permitida están indicados mediante líneas punteadas verdes en ambas gráficas.

Ejemplo 4. De la Ec. (2.23), para $n = 1$, se obtiene el primer estado excitado del oscilador armónico

$$\psi_1(x, t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 - \frac{i3\omega t}{2}\right\}. \quad (2.52)$$

Mientras que la función de onda en el espacio de los momentos es

$$\phi_1(p, t) = \left(\frac{1}{\pi\hbar m\omega}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{2}{\hbar m\omega}} p \exp\left\{-\frac{p^2}{2\hbar m\omega} - \frac{i3\omega t}{2}\right\}. \quad (2.53)$$

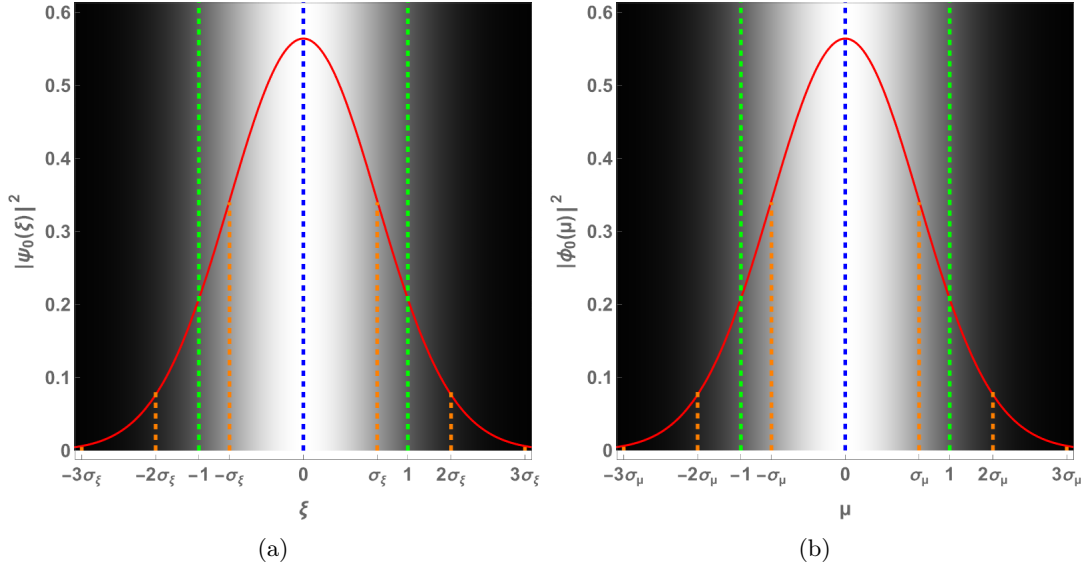


Figura 2.1: Gráficas del Ejemplo 3. De izquierda a derecha, se muestran las gráficas de $|\psi_0(\xi)|^2$ y $|\phi_0(\mu)|^2$. En cada figura, se muestra la densidad de probabilidad como una curva roja, mientras que en el fondo en escala de grises corresponde a la evolución temporal de la misma, donde las regiones más claras representan áreas de alta probabilidad. En ambas representaciones, se incluyen líneas discontinuas: la azul indica el valor esperado de la posición o el momento ($\langle \xi \rangle_0 = 0$ o $\langle \mu \rangle_0 = 0$), las naranjas marcan las tres primeras desviaciones estándar y las verdes los límites clásicos. Nótese que ambas gráficas corresponden a distribuciones Gaussianas centradas en el origen. En las gráficas que se presentan en las Figs. (2.2) y (2.3) las líneas punteadas tienen el mismo significado que se les ha dado en estas gráficas.

Los valores esperados son

$$\langle x \rangle_1 = 0, \quad \langle x^2 \rangle_1 = \frac{3\hbar}{2m\omega}, \quad \langle p \rangle_1 = 0, \quad \langle p^2 \rangle_1 = \frac{3\hbar m\omega}{2}. \quad (2.54)$$

Con las correspondientes desviaciones estándar

$$\sigma_{x1} = \sqrt{\frac{3\hbar}{2m\omega}}, \quad \sigma_{p1} = \sqrt{\frac{3\hbar m\omega}{2}}. \quad (2.55)$$

En la Fig. (2.2a) se muestra la gráfica de $|\psi_1(\xi)|^2$, las líneas discontinuas tienen el mismo significado que en las gráficas del Ejemplo 3. Para esta distribución, aproximadamente 0.6084 de la probabilidad total se concentra dentro de la primera desviación estándar, 0.9926 dentro de las dos desviaciones y 0.9999 dentro de las tres desviaciones. Por otra parte, para la gráfica de $|\phi_1(\mu)|^2$ mostrada en la Fig. (2.2b), proporciona resultados equivalentes en el espacio de los momentos.

Finalmente, las probabilidades de encontrar a la partícula en la región clásicamente permitida y no permitida son, respectivamente,

$$P_1(C) = 0.8884, \quad P_1(NC) = 0.1116. \quad (2.56)$$

Ejemplo 5. Para $n = 10$, la Ec. (2.23) corresponde al decimo estado excitado del oscilador armónico, dada por

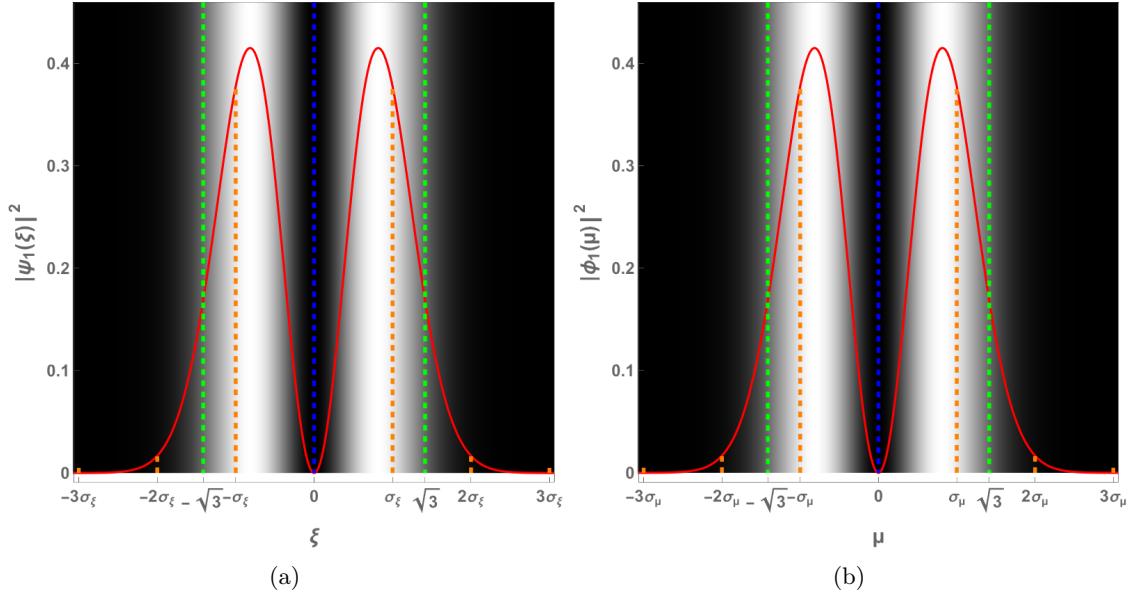


Figura 2.2: Gráficas del Ejemplo 4. De izquierda a derecha, se muestran las gráficas de $|\psi_{10}(\xi)|^2$ y $|\phi_{10}(\mu)|^2$. En ambas gráficas, se observa que la distribución es simétrica en el origen, cuenta con dos máximos, y la dispersión aumenta con respecto al estado fundamental.

$$\psi_{10}(x, t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^{10}(10!)}} H_{10}(\xi) \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 - \frac{i21\omega t}{2}\right\}. \quad (2.57)$$

Por otro lado, la función de onda en el espacio de los momentos es

$$\phi_{10}(p, t) = \left(\frac{1}{\pi\hbar m\omega}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^{10}(10!)}} H_{10}(\mu) \exp\left\{-\frac{1}{2\hbar m\omega}p^2 - \frac{i21\omega t}{2}\right\}. \quad (2.58)$$

Los valores esperados correspondientes son

$$\langle x \rangle_{10} = 0, \quad \langle x^2 \rangle_{10} = \frac{21\hbar}{2m\omega}, \quad \langle p \rangle_{10} = 0, \quad \langle p^2 \rangle_{10} = \frac{21\hbar m\omega}{2}. \quad (2.59)$$

Por otra parte, las desviaciones estándar están dadas por

$$\sigma_{x10} = \sqrt{\frac{21\hbar}{2m\omega}}, \quad \sigma_{p10} = \sqrt{\frac{21\hbar m\omega}{2}}. \quad (2.60)$$

En la Fig. (2.3a) se muestra la gráfica de $|\psi_{10}(\xi)|^2$. Para esta distribución, se encuentra que aproximadamente 0.5260 de la probabilidad total se encuentra dentro de la primera desviación estándar, el 0.9999 dentro de las dos primeras desviaciones y aproximadamente toda la probabilidad total dentro de las tres desviaciones.

Observe que, las probabilidades de encontrar a la partícula en la región clásicamente permitida y no permitida son, respectivamente,

$$P_{10}(C) = 0.9398, \quad P_{10}(NC) = 0.0602. \quad (2.61)$$

Como puede notar, cuando n tiende a infinito en los estados estacionarios del oscilador armónico, la probabilidad de hallar a la partícula en la región clásicamente permitida tiende a 1. Es decir, para $n \rightarrow \infty$, recuperamos el comportamiento clásico del oscilador armónico.

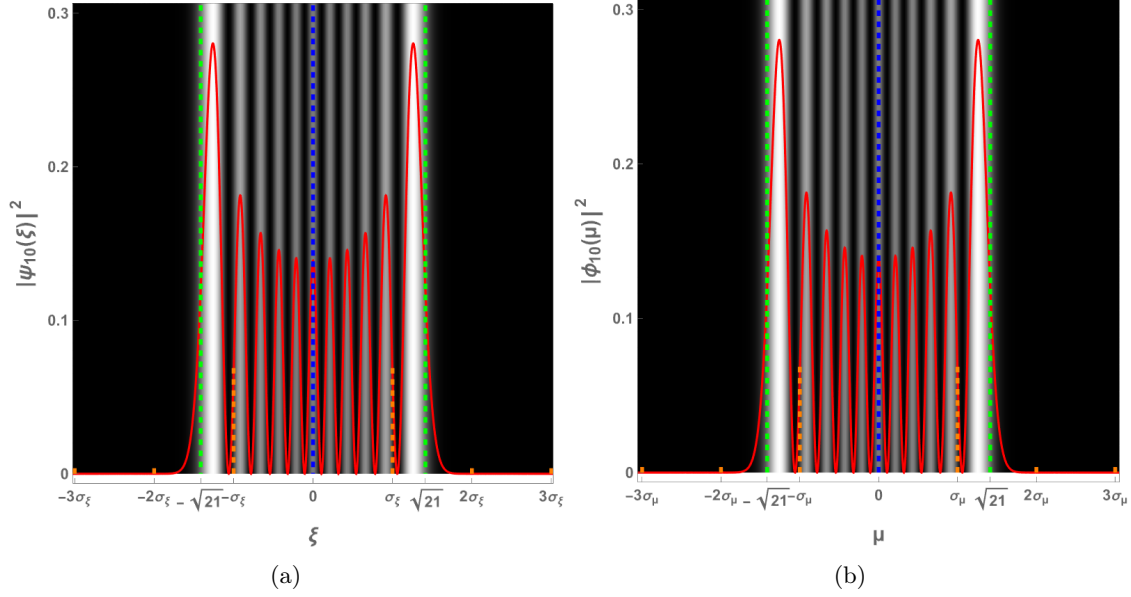
2.3 Solución a la ecuación de Schrödinger para una partícula sometida a un campo gravitacional constante determinada por el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico


Figura 2.3: Gráficas del Ejemplo 5. De izquierda a derecha, se muestran las gráficas de $|\psi_{10}(\xi)|^2$ y $|\phi_{10}(\mu)|^2$. En ambas gráficas, se observa que la distribución es simétrica en el origen, cuenta con once máximos, y la dispersión aumenta con respecto al estado fundamental y al primer estado excitado.

2.3. Solución a la ecuación de Schrödinger para una partícula sometida a un campo gravitacional constante determinada por el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico

A partir de la expresión del n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico (2.23) y la relación entre las funciones Ψ y ψ (2.20), podemos hallar una expresión que sea solución a la ecuación de Schrödinger para una partícula bajo un campo gravitacional constante (2.1). Al sustituir la Ec. (2.23) en el lado derecho de la Ec. (2.20), obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \Psi_n &= \cos^{\frac{1}{2}}(\omega t) \exp \left\{ \frac{im\omega}{2\hbar} x^2 \tan(\omega t) + \frac{img}{\hbar\omega} \tan(\omega t) \left[\frac{g}{3\omega^2} \tan^2(\omega t) - x \sec(\omega t) \right] \right\} \\
 &\quad \times \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) \exp \left\{ -\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 - i\omega t \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\} \\
 &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) \cos^{\frac{1}{2}}(\omega t) \exp \left\{ \frac{m\omega x^2}{2\hbar} (i \tan(\omega t) - 1) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{img}{\hbar\omega} \tan(\omega t) \left[\frac{g}{3\omega^2} \tan^2(\omega t) - x \sec(\omega t) \right] - i\omega t \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Por otra parte, a partir de las ecuaciones de la transformación de punto inversa (1.4) se obtiene

$$\tan(\omega t) = \tan(\arctan(\omega T)) = \omega T, \tag{2.63}$$

$$\cos(\omega t) = \cos(\arctan(\omega T)) = (1 + \omega^2 T^2)^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.64}$$

2.3 Solución a la ecuación de Schrödinger para una partícula sometida a un campo gravitacional constante determinada por el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico

$$\sec(\omega t) = \sec(\arctan(\omega T)) = (1 + \omega^2 T^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.65)$$

Al sustituir la transformación inversa (1.4) y los resultados (2.63)- (2.65) en la expresión (2.62), tenemos que

$$\begin{aligned} \Psi_n(X, T) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{2X + gT^2}{2\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \right] (1 + \omega^2 T^2)^{-\frac{1}{4}} \\ &\quad \times \exp \left\{ -i \left(n + \frac{1}{2} \right) \arctan(\omega T) \right\} \exp \left\{ \frac{m\omega}{2\hbar} \frac{(2X + gT^2)^2}{4(1 + \omega^2 T^2)} (i\omega T - 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{img}{\hbar} T \left[\frac{g}{3} T^2 - \left(\frac{2X + gT^2}{2\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \right) (1 + \omega^2 T^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \\ &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{2X + gT^2}{2\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \right] (1 + \omega^2 T^2)^{-\frac{1}{4}} \\ &\quad \times \exp \left\{ -in \arctan(\omega T) - \frac{i}{2} \arctan(\omega T) \right\} \exp \left\{ -\frac{m\omega(2X + gT^2)^2}{8\hbar(1 + i\omega T)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{imgT}{\hbar} \left(X + \frac{gT^2}{6} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Puesto que

$$1 + i\omega T = \sqrt{1 + \omega^2 T^2} e^{i \arctan(\omega T)}, \quad (2.67)$$

entonces

$$(1 + i\omega T)^{-\frac{1}{2}} = (1 + \omega^2 T^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{i}{2} \arctan(\omega T)}, \quad (2.68)$$

$$e^{-in \arctan(\omega T)} = \left(\frac{1 + i\omega T}{(1 + i\omega T)^{\frac{1}{2}} (1 - i\omega T)^{\frac{1}{2}}} \right)^{-n} = \left(\frac{1 - i\omega T}{1 + i\omega T} \right)^{\frac{n}{2}}. \quad (2.69)$$

Usando las Ecs. (2.68) y (2.69), entonces la Ec. (2.66) se puede escribir en la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Psi_n(X, T) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \frac{1}{\sqrt{1 + i\omega T}} \left(\frac{1 - i\omega T}{1 + i\omega T} \right)^{\frac{n}{2}} H_n \left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{2X + gT^2}{2\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{m\omega(2X + gT^2)^2}{8\hbar(1 + i\omega T)} - \frac{imgT}{\hbar} \left(X + \frac{gT^2}{6} \right) \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.70)$$

Esta expresión es una función de onda para una partícula sometida a un campo gravitacional constante determinada por el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico.

Cabe señalar que la función de onda (2.70) no es estacionaria, ya que su densidad de probabilidad depende explícitamente del tiempo

$$\begin{aligned} |\Psi_n(X, T)|^2 &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \\ &\quad \times H_n^2 \left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{2X + gT^2}{2\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \right] \exp \left\{ -\frac{m\omega(2X + gT^2)^2}{4\hbar(1 + \omega^2 T^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Si evaluamos a la Ec. (2.70) al tiempo $T = 0$ vemos que

2.3 Solución a la ecuación de Schrödinger para una partícula sometida a un campo gravitacional constante determinada por el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico

$$\Psi_n(X, 0) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X \right] \exp \left\{ -\frac{m\omega X^2}{2\hbar} \right\}. \quad (2.72)$$

Es decir, la Ec. (2.70) es la función de onda de la partícula bajo un campo gravitacional constante cuya condición inicial es la Ec. (2.72). Observe que esta función de onda inicial coincide con la parte espacial del n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico.

Por otro lado, de la Ec. (2.70), cuando $n = 0$ y $g = 0$ entonces obtenemos una solución de la ecuación de Schrödinger para una partícula libre relacionada al estado fundamental del oscilador armónico, recientemente estudiada por Torres del Castillo [6]

$$\Psi_0(X, T) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+i\omega T}} \exp \left\{ -\frac{m\omega X^2}{2\hbar(1+i\omega T)} \right\}. \quad (2.73)$$

Ahora bien, para una partícula en el estado Ψ_n , se encuentra que los valores esperados para la posición y el momento están dados por

$$\langle X \rangle_n = -\frac{g}{2} T^2, \quad (2.74)$$

$$\langle X^2 \rangle_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar(1+T^2\omega^2)}{m\omega} + \frac{g^2}{4} T^4, \quad (2.75)$$

$$\langle P \rangle_n = -mgT, \quad (2.76)$$

$$\langle P^2 \rangle_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar m\omega + m^2 g^2 T^2. \quad (2.77)$$

Mientras que los valores esperados de la energía cinética, la energía potencial y la energía total corresponden a

$$\langle K \rangle_n^{(g)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{mg^2}{2} T^2, \quad (2.78)$$

$$\langle V \rangle_n^{(g)} = -\frac{mg^2}{2} T^2, \quad (2.79)$$

$$\langle H \rangle_n^{(g)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (2.80)$$

Por otro lado

$$\left\langle -\frac{dV}{dX} \right\rangle_n^{(g)} = -mg. \quad (2.81)$$

Nuevamente, una deducción rigurosa de estas expresiones se puede hallar en el apéndice D. A partir de estos resultados, vemos que se cumple el **teorema de Ehrenfest**, ya que

$$\langle P \rangle_n = m \frac{d\langle X \rangle_n}{dT}, \quad \frac{d\langle P \rangle_n}{dT} = \left\langle -\frac{dV}{dX} \right\rangle_n^{(g)}. \quad (2.82)$$

Nótese que las desviaciones estándar para X y P son

$$\sigma_{Xn} = \sqrt{\langle X^2 \rangle_n - \langle X \rangle_n^2} = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar(1+T^2\omega^2)}{m\omega}}, \quad (2.83)$$

2.3 Solución a la ecuación de Schrödinger para una partícula sometida a un campo gravitacional constante determinada por el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico

$$\sigma_{Pn} = \sqrt{\langle P^2 \rangle_n - \langle P \rangle_n^2} = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar m \omega}, \quad (2.84)$$

respectivamente. Vemos que el producto de σ_{Xn} y σ_{Pn} es

$$\sigma_{Xn} \sigma_{Pn} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \sqrt{1 + T^2 \omega^2} \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.85)$$

Esto está de acuerdo con el principio de incertidumbre, como sería de esperarse. En este caso, la incertidumbre mínima ocurre cuando $n = 0$ al tiempo $T = 0$.

Es importante señalar que los valores esperados para la posición y el momento dados por las Ecs. (2.74)-(2.77) para una partícula en un campo gravitacional uniforme, bajo las transformaciones (1.1) y (1.56), están determinados por los valores esperados de la posición y el momento (2.30)-(2.33) para los estados estacionarios del oscilador armónico de la siguiente manera

$$\langle X \rangle_n = \langle x \rangle_n \sec(\omega t) - \frac{g \tan^2(\omega t)}{2\omega^2} = -\frac{g}{2} T^2, \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} \langle X^2 \rangle_n &= \langle x^2 \rangle_n \sec^2(\omega t) - \frac{g}{\omega^2} \langle x \rangle_n \tan^2(\omega t) \sec(\omega t) + \frac{g^2 \tan^4(\omega t)}{4\omega^4}, \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar(1 + T^2 \omega^2)}{m\omega} + \frac{g^2}{4} T^4, \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\langle P \rangle_n = \langle p \rangle_n \cos(\omega t) + m\omega \langle x \rangle_n \sin(\omega t) - \frac{mg}{\omega} \tan(\omega t) = -mgT, \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} \langle P^2 \rangle_n &= \langle p^2 \rangle_n \cos^2(\omega t) + m^2 \omega^2 \langle x^2 \rangle_n \sin^2(\omega t) + \frac{m^2 g^2}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \\ &\quad + 2m\omega \langle x \rangle_n \langle p \rangle_n \sin(\omega t) \cos(\omega t) - \frac{2mg}{\omega} \langle p \rangle_n \sin(\omega t) - 2m^2 g \langle x \rangle_n \sin(\omega t) \tan(\omega t) \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar m \omega}{(1 + T^2 \omega^2)} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar m \omega^3 T^2}{(1 + T^2 \omega^2)} + m^2 g^2 T^2 \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar m \omega + m^2 g^2 T^2. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Para graficar la densidad de probabilidad para un estado dado, resulta conveniente introducir los siguientes cambios de variables

$$X \equiv x_0 \nu, \quad T \equiv \frac{m x_0^2 \zeta}{\hbar}, \quad g \equiv \frac{\hbar^2 \alpha}{m^2 x_0^3}, \quad \omega \equiv \frac{\hbar \beta}{m x_0^2}, \quad (2.90)$$

con lo cual la función de onda (2.70) se reescribe en términos de las variables adimensionales ν y ζ

$$\begin{aligned} \Psi_n(\nu, \zeta) &= \left(\frac{\beta}{\pi x_0^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \frac{1}{\sqrt{1 + i\beta\zeta}} \left(\frac{1 - i\beta\zeta}{1 + i\beta\zeta}\right)^{\frac{n}{2}} \\ &\quad \times H_n \left[\frac{\sqrt{\beta}(2\nu + \alpha\zeta^2)}{2\sqrt{1 + \beta^2\zeta^2}} \right] \exp \left\{ -\frac{\beta(2\nu + \alpha\zeta^2)^2}{8(1 + i\beta\zeta)} - i\alpha\zeta \left(\nu + \frac{\alpha\zeta^2}{6} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

donde los parámetros adimensionales α y β están relacionados con los valores de g y ω , respectivamente. A continuación, aplicamos estos resultados generales a los casos: $n = 0, 1, 10$.

2.3 Solución a la ecuación de Schrödinger para una partícula sometida a un campo gravitacional constante determinada por el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico

Ejemplo 6. Para $n = 0$, la Ec. (2.70) se reduce a

$$\Psi_0(X, T) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+i\omega T}} \exp\left\{-\frac{m\omega(2X + gT^2)^2}{8\hbar(1+i\omega T)} - \frac{imgT}{\hbar} \left(X + \frac{gT^2}{6}\right)\right\}. \quad (2.92)$$

Los valores esperados son

$$\langle X \rangle_0 = -\frac{g}{2}T^2, \quad \langle X^2 \rangle_0 = \frac{\hbar(1 + T^2\omega^2)}{2m\omega} + \frac{g^2}{4}T^4, \quad (2.93a)$$

$$\langle P \rangle_0 = -mgT, \quad \langle P^2 \rangle_0 = \frac{\hbar m\omega}{2} + m^2g^2T^2. \quad (2.93b)$$

Con las correspondientes desviaciones estándar

$$\sigma_{X0} = \sqrt{\frac{\hbar(1 + T^2\omega^2)}{2m\omega}}, \quad \sigma_{P0} = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}. \quad (2.94)$$

En las Figs. (2.4) se muestran algunas gráficas de la densidad de probabilidad para este estado.

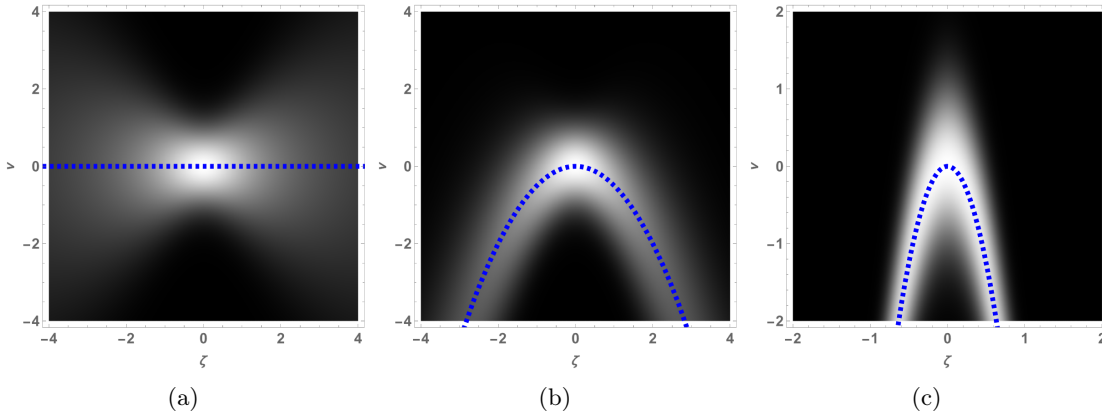


Figura 2.4: Gráficas del Ejemplo 6. Se muestran las gráficas para $|\Psi_0(\nu, \zeta)|^2$ con $x_0 = 1$ y $\beta = 1$. En estas representaciones, las regiones más claras indican una mayor probabilidad de hallar a la partícula. Las líneas discontinuas azules señalan la evolución del valor esperado de la posición $\langle \nu \rangle_0$ para: (a) partícula libre, dada por $\alpha = 0$, (b) una partícula en un campo gravitacional uniforme con $\alpha = 1$ y (c) $\alpha = 10$. En las gráficas que se presentan en las Figs. (2.5) y (2.6) las líneas punteadas tienen el mismo significado que se les ha dado en estas gráficas.

Ejemplo 7. Para $n = 1$, de la Ec. (2.70) se encuentra que

$$\Psi_1(X, T) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \frac{2X + gT^2}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \frac{\sqrt{1 - i\omega T}}{1 + i\omega T} \times \exp\left\{-\frac{m\omega(2X + gT^2)^2}{8\hbar(1 + i\omega T)} - \frac{imgT}{\hbar} \left(X + \frac{gT^2}{6}\right)\right\}. \quad (2.95)$$

Los valores esperados para este estado cuántico son

2.3 Solución a la ecuación de Schrödinger para una partícula sometida a un campo gravitacional constante determinada por el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico

$$\langle X \rangle_1 = -\frac{g}{2}T^2, \quad \langle X^2 \rangle_1 = \frac{3\hbar(1+T^2\omega^2)}{2m\omega} + \frac{g^2}{4}T^4, \quad (2.96a)$$

$$\langle P \rangle_1 = -mgT, \quad \langle P^2 \rangle_1 = \frac{3\hbar m\omega}{2} + m^2g^2T^2. \quad (2.96b)$$

De estos, se obtienen las desviaciones estándar

$$\sigma_{X1} = \sqrt{\frac{3\hbar(1+T^2\omega^2)}{2m\omega}}, \quad \sigma_{P1} = \sqrt{\frac{3m\omega\hbar}{2}}. \quad (2.97)$$

Nuevamente, puede observar algunas gráficas para la densidad de probabilidad de Ψ_1 en las Figs. (2.5).

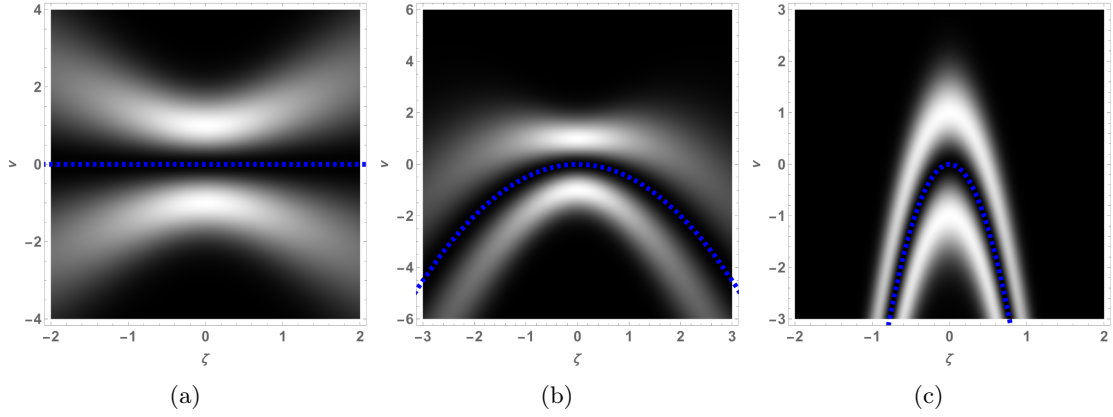


Figura 2.5: Gráficas del Ejemplo 7. Se muestran las gráficas para $|\Psi_1(\nu, \zeta)|^2$ con $x_0 = 1$ y $\beta = 1$, para: (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 1$ y (c) $\alpha = 10$.

Ejemplo 8. Para $n = 10$, de la Ec. (2.70) vemos que

$$\begin{aligned} \Psi_{10}(X, T) = & \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^{10}(10!)}} \frac{1}{\sqrt{1+i\omega T}} \left(\frac{1-i\omega T}{1+i\omega T}\right)^5 \\ & \times H_{10} \left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{2X+gT^2}{2\sqrt{1+T^2\omega^2}} \right] \exp\left\{ -\frac{m\omega(2X+gT^2)^2}{8\hbar(1+i\omega T)} - \frac{imgT}{\hbar} \left(X + \frac{gT^2}{6}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Los valores esperados son

$$\langle X \rangle_{10} = -\frac{g}{2}T^2, \quad \langle X^2 \rangle_{10} = \frac{21\hbar(1+T^2\omega^2)}{2m\omega} + \frac{g^2}{4}T^4, \quad (2.99a)$$

$$\langle P \rangle_{10} = -mgT, \quad \langle P^2 \rangle_{10} = \frac{21\hbar m\omega}{2} + m^2g^2T^2. \quad (2.99b)$$

Por lo que las desviaciones estándar son

$$\sigma_{X10} = \sqrt{\frac{21\hbar(1+T^2\omega^2)}{2m\omega}}, \quad \sigma_{P10} = \sqrt{\frac{21\hbar m\omega}{2}}. \quad (2.100)$$

En las Figs. (2.6), se muestran algunas gráficas de la densidad de probabilidad para Ψ_{10} .

2.3 Solución a la ecuación de Schrödinger para una partícula sometida a un campo gravitacional constante determinada por el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico

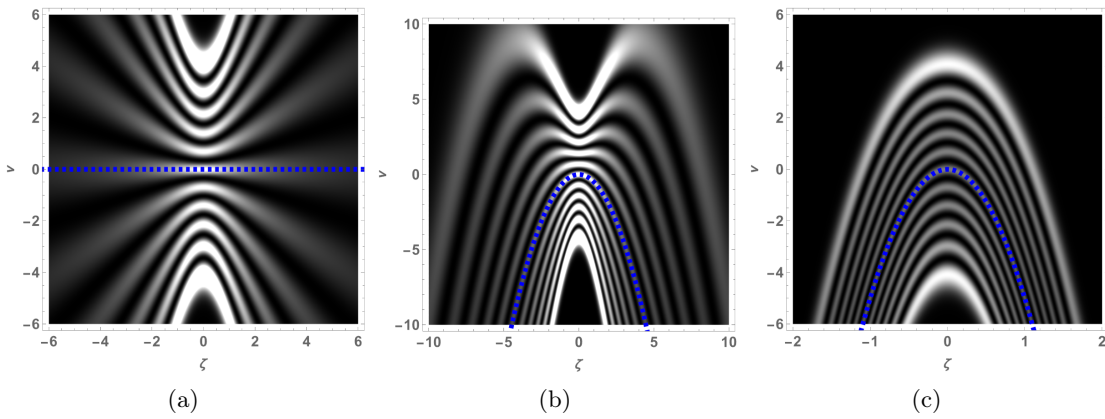


Figura 2.6: Gráficas del Ejemplo 8. Se muestran las gráficas para $|\Psi_{10}(\nu, \zeta)|^2$ con $x_0 = 1$ y $\beta = 1$, para: (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 1$ y (c) $\alpha = 10$.

Capítulo 3

Formulación de Bohm de la Mecánica cuántica

3.1. Formulación de Bohm

Dado que la función de onda $\Psi(\vec{r}, t)$ es una función compleja, podemos escribirla en su forma polar. Es decir

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sqrt{\rho(\vec{r}, t)} e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}(\vec{r}, t)}, \quad (3.1)$$

donde $\sqrt{\rho}$ y \mathcal{S} son funciones reales asociadas a su amplitud y fase, respectivamente. Por otra parte, la ecuación de Schrödinger en tres dimensiones está dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Sustituyendo la función de onda (3.1) en la Ec. (3.2), entonces la ecuación de Schrödinger se reescribe en la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\hbar^2}{4m} \rho^{-\frac{1}{2}} \nabla^2 \rho + \frac{\hbar^2}{8m} \rho^{-\frac{3}{2}} (\nabla \rho)^2 + \frac{1}{2m} \rho^{\frac{1}{2}} (\nabla \mathcal{S})^2 + V \rho^{\frac{1}{2}} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \rho^{\frac{1}{2}} \right] \\ & - i \left[\frac{\hbar}{2m} \rho^{\frac{1}{2}} \nabla^2 \mathcal{S} + \frac{\hbar}{2m} \rho^{-\frac{1}{2}} (\nabla \mathcal{S}) \cdot (\nabla \rho) + \frac{\hbar}{2} \rho^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

La ecuación anterior es una expresión compleja de la forma $x - iy = 0$. Para que se cumpla dicha ecuación, se concluye que $x = 0$ y $y = 0$. Por lo tanto

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \rho^{-\frac{1}{2}} \nabla^2 \rho + \frac{\hbar^2}{8m} \rho^{-\frac{3}{2}} (\nabla \rho)^2 + \frac{1}{2m} \rho^{\frac{1}{2}} (\nabla \mathcal{S})^2 + V \rho^{\frac{1}{2}} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \rho^{\frac{1}{2}} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\hbar}{2m} \rho^{\frac{1}{2}} \nabla^2 \mathcal{S} + \frac{\hbar}{2m} \rho^{-\frac{1}{2}} (\nabla \mathcal{S}) \cdot (\nabla \rho) + \frac{\hbar}{2} \rho^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3.5)$$

Al multiplicar la Ec. (3.4) por $\rho^{-\frac{1}{2}}$ y reescribir el resultado, se obtiene que

$$\frac{1}{2m} (\nabla \mathcal{S})^2 + V + \mathcal{Q} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = 0, \quad (3.6)$$

la cual, formalmente es la ecuación de Hamilton-Jacobi para una partícula de masa m bajo la interacción dada por el potencial clásico V , y el **potencial cuántico** \mathcal{Q} , definido por:

$$\mathcal{Q} \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}. \quad (3.7)$$

La Ec. (3.6) se conoce comúnmente como la **ecuación de Hamilton-Jacobi cuántica**, a partir de la cual se encuentran las **trayectorias de Madelung-Bohm**, las cuales están determinadas por la condición de que su momento cuántico es igual al gradiente de la fase; es decir

$$\vec{p} = \nabla S. \quad (3.8)$$

Por otra parte, de la Ec. (3.5) al multiplicarla por $2\rho^{\frac{1}{2}}/\hbar$ y reescribiendo, se obtiene que

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3.9)$$

La ecuación anterior es una ecuación de continuidad que expresa la conservación local de la probabilidad, donde

$$\vec{J} \equiv \frac{\rho}{m} \nabla S, \quad (3.10)$$

se define como la **densidad de corriente de probabilidad**.

3.2. La relación entre las trayectorias de Madelung-Bohm.

Para obtener la relación entre las trayectorias de Madelung-Bohm para una partícula en un campo gravitacional constante con las del oscilador armónico reescribimos las funciones de onda Ψ y ψ en su forma polar; esto es

$$\Psi(X, T) = \sqrt{\rho^{(g)}(X, T)} e^{\frac{i}{\hbar} S^{(g)}(X, T)}, \quad \psi(x, t) = \sqrt{\rho^{(\omega)}(x, t)} e^{\frac{i}{\hbar} S^{(\omega)}(x, t)}, \quad (3.11)$$

donde $\rho^{(g)}(X, T)$, $S^{(g)}(X, T)$, $\rho^{(\omega)}(x, t)$, $S^{(\omega)}(x, t)$ son funciones reales. Las trayectorias de Madelung-Bohm determinadas por estas funciones de onda están dadas por todos los puntos en los espacios de configuraciones extendidos, con coordenadas locales (X, T) y (x, t) , tales que [3, 4]

$$m \frac{dX}{dT} = \frac{\partial S^{(g)}}{\partial X}, \quad m \frac{dx}{dt} = \frac{\partial S^{(\omega)}}{\partial x}, \quad (3.12)$$

respectivamente. Observe que estas trayectorias son las curvas integrales de las densidades de corriente de probabilidad correspondientes definidas por

$$J^{(g)} \equiv \frac{\rho^{(g)}}{m} \frac{\partial S^{(g)}}{\partial X}, \quad J^{(\omega)} \equiv \frac{\rho^{(\omega)}}{m} \frac{\partial S^{(\omega)}}{\partial x}. \quad (3.13)$$

Ahora, a partir de las Ecs. (2.20) y (3.11) tenemos que

$$\rho^{(g)}(X, T) = \cos(\omega t) \rho^{(\omega)}(x, t), \quad (3.14)$$

$$S^{(g)}(X, T) = S^{(\omega)}(x, t) + F(x, t). \quad (3.15)$$

Por lo tanto, a partir de las Ecs. (2.4), (3.12)-(3.15), encontramos que las densidades de corriente de probabilidad están relacionadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 J^{(g)} &= \frac{\rho^{(g)}}{m} \frac{\partial S^{(g)}}{\partial X} \\
 &= \frac{1}{m} \cos(\omega t) \rho^{(\omega)} \frac{\partial}{\partial X} [S^{(\omega)} + F] \\
 &= \cos^2(\omega t) \frac{\rho^{(\omega)}}{m} \frac{\partial}{\partial x} [S^{(\omega)} + F] \\
 &= \cos^2(\omega t) \left[\frac{\rho^{(\omega)}}{m} \frac{\partial S^{(\omega)}}{\partial x} + \frac{\rho^{(\omega)}}{m} \frac{\partial F}{\partial x} \right] \\
 &= \cos^2(\omega t) \left[J^{(\omega)} + \frac{\rho^{(\omega)}}{m} \frac{\partial F}{\partial x} \right].
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$J^{(g)} = \cos^2(\omega t) \frac{\rho^{(\omega)}}{m} \frac{\partial [S^{(\omega)} + F]}{\partial x} = \left[J^{(\omega)} + \frac{\rho^{(\omega)}}{m} \frac{\partial F}{\partial x} \right] \cos^2(\omega t), \quad (3.16)$$

donde

$$\frac{\partial F}{\partial x} = m\omega x \tan(\omega t) - \frac{mg}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t). \quad (3.17)$$

Y, la relación entre las correspondientes trayectorias de Madelung-Bohm es determinada por

$$\begin{aligned}
 m \frac{dX}{dT} &= \frac{\partial S^{(g)}}{\partial X} \\
 &= \frac{\partial}{\partial X} [S^{(\omega)} + F] \\
 &= \cos(\omega t) \frac{\partial}{\partial x} [S^{(\omega)} + F] \\
 &= \cos(\omega t) \left[\frac{\partial S^{(\omega)}}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x} \right] \\
 &= m \cos(\omega t) \left[\frac{dx}{dt} + \omega x \tan(\omega t) - \frac{g}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) \right] \\
 &= m \cos(\omega t) \left\{ \frac{dx}{dt} + \left[\omega x - \frac{g}{\omega} \sec(\omega t) \right] \tan(\omega t) \right\}.
 \end{aligned} \quad (3.18)$$

En la última igualdad hemos utilizado la expresión para F dada en la Ec. (1.38). Aplicando el método de separación de variables, e integrando

$$\int dX = \int \left\{ \cos(\omega t) \frac{dx}{dt} + \left[\omega x \sin(\omega t) - \frac{g}{\omega} \tan(\omega t) \right] \right\} dT,$$

dado que la transformación de coordenadas para el tiempo está dada por

$$T = \frac{\tan(\omega t)}{\omega}, \quad (3.19)$$

entonces

Formulación de Bohm de la Mecánica cuántica

3.3 El potencial cuántico y las trayectorias de Madelung-Bohm para el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico.

$$\begin{aligned}
 X &= \int \left\{ \cos(\omega t) \frac{dx}{dt} + \left[\omega x \sin(\omega t) - \frac{g}{\omega} \tan(\omega t) \right] \right\} \sec^2(\omega t) dt \\
 &= \int \sec(\omega t) \frac{dx}{dt} dt + \int \omega x \tan(\omega t) \sec(\omega t) dt - \int \frac{g}{\omega} \tan(\omega t) \sec^2(\omega t) dt \\
 &= \int \sec(\omega t) \frac{dx}{dt} dt + \left[x \sec(\omega t) - \int \sec(\omega t) \frac{dx}{dt} dt \right] - \frac{g \tan^2(\omega t)}{\omega - 2\omega} + C,
 \end{aligned}$$

donde C es una constante de integración. Si $X(0) = X_0$, $x(0) = x_0$, y $X_0 = x_0$ entonces $C = 0$. Por lo tanto, si $X(T)$ es una curva integral de la densidad de corriente de probabilidad para una partícula bajo un campo gravitacional constante, entonces $x(t)$ está dado por

$$X = x \sec(\omega t) - \frac{g \tan^2(\omega t)}{2\omega^2}, \quad (3.20)$$

es una curva integral de la densidad de corriente de probabilidad para el oscilador armónico. Este resultado implica que la transformación de punto (1.1), también mapea una curva integral de, $J^{(g)}$, la densidad de corriente de probabilidad para una partícula bajo un campo gravitacional constante en una curva integral de, $J^{(\omega)}$, la densidad de corriente de probabilidad para el oscilador armónico. De esta manera, vemos que la transformación de punto clásica (1.1), de forma natural, induce una transformación (que llamaremos transformación de punto cuántica) que da la relación entre las correspondientes trayectorias de Madelung-Bohm de los dos sistemas cuánticos.

3.3. El potencial cuántico y las trayectorias de Madelung-Bohm para el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico.

Comparando la función de onda del n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico (2.26) con su correspondiente forma polar (3.11), encontramos que la amplitud y la fase están dadas por

$$\sqrt{\rho_n^{(\omega)}} = A_n H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \quad (3.21)$$

$$\mathcal{S}_n^{(\omega)} = -E_n t = -\left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega t, \quad (3.22)$$

donde la variable ξ está definida por la Ec. (2.25) y además

$$A_n \equiv \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}. \quad (3.23)$$

Un cálculo directo muestra que la expresión del potencial cuántico para los estados estacionarios del oscilador armónico es

$$\mathcal{Q}_n^{(\omega)}(\xi) = \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi^2\right) \hbar \omega, \quad (3.24)$$

o equivalentemente

$$\mathcal{Q}_n^{(\omega)}(x) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = E_n^{(\omega)} - V^{(\omega)}. \quad (3.25)$$

Se puede ver una deducción de este resultado en el apéndice E. Observe que los ceros del potencial cuántico $\mathcal{Q}_n^{(\omega)}$ están dados por

Formulación de Bohm de la Mecánica cuántica

3.3 El potencial cuántico y las trayectorias de Madelung-Bohm para el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico.

$$x_n = \pm \sqrt{\frac{(2n+1)\hbar}{m\omega}}, \quad (3.26)$$

o en términos de ξ

$$\xi_n = \pm \sqrt{2n+1}. \quad (3.27)$$

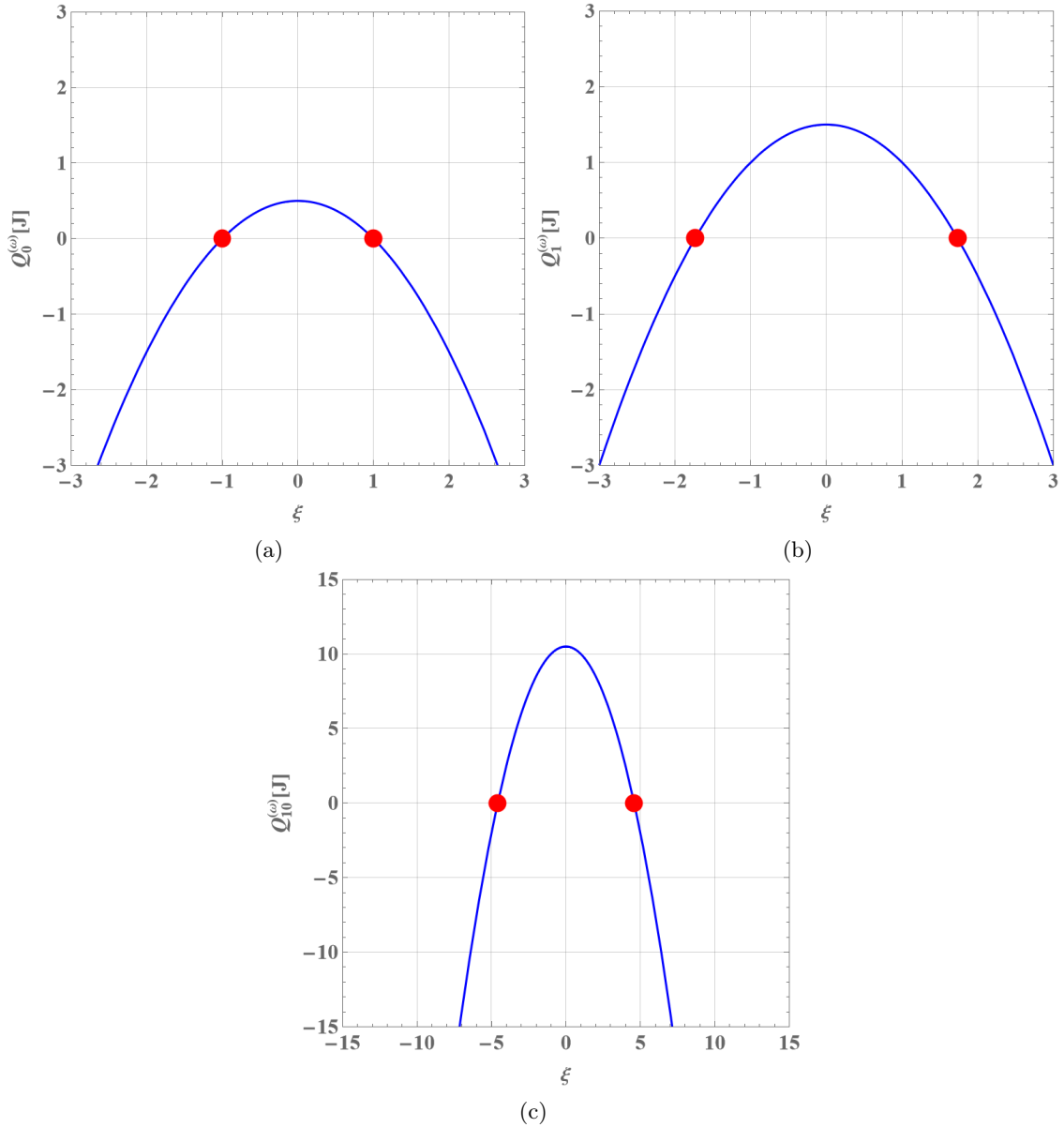


Figura 3.1: Gráficas del potencial cuántico en función de ξ para algunos estados estacionarios del oscilador armónico, con $\hbar\omega = 1$. En cada gráfica, los puntos rojos indican los ceros del potencial para: (a) $n = 0$, $\xi_0 = \pm 1$, (b) $n = 1$, $\xi_1 = \pm\sqrt{3}$, (c) $n = 10$, $\xi_{10} = \pm\sqrt{21}$.

En las Fig. (3.1) se muestran las gráficas correspondientes a los ceros del potencial cuántico para algunos estados estacionarios del oscilador armónico.

Formulación de Bohm de la Mecánica cuántica

3.3 El potencial cuántico y las trayectorias de Madelung-Bohm para el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico.

Ahora bien, las trayectorias de Madelung Bohm para el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico están dadas por

$$m \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathcal{S}_n^{(g)}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[- \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega t \right] = 0. \quad (3.28)$$

Esto significa que la partícula cuántica descrita por los estados estacionarios del oscilador armónico cuántico, mediante el formalismo de Bohm, tiene momento lineal cero. Es decir, la partícula está en reposo. Por lo tanto, en este caso las trayectorias cuánticas están dadas por

$$x(t) = X_0, \quad (3.29)$$

donde X_0 denota la posición inicial de la partícula cuántica, la cual puede tomar cualquier valor real. Este resultado, claramente es diferente a la descripción clásica de un oscilador armónico con energía igual a uno de los valores del espectro de energía para el oscilador armónico cuántico. Observe que las trayectorias cuánticas de cualquier estado estacionario están dadas por la Ec. (3.29).

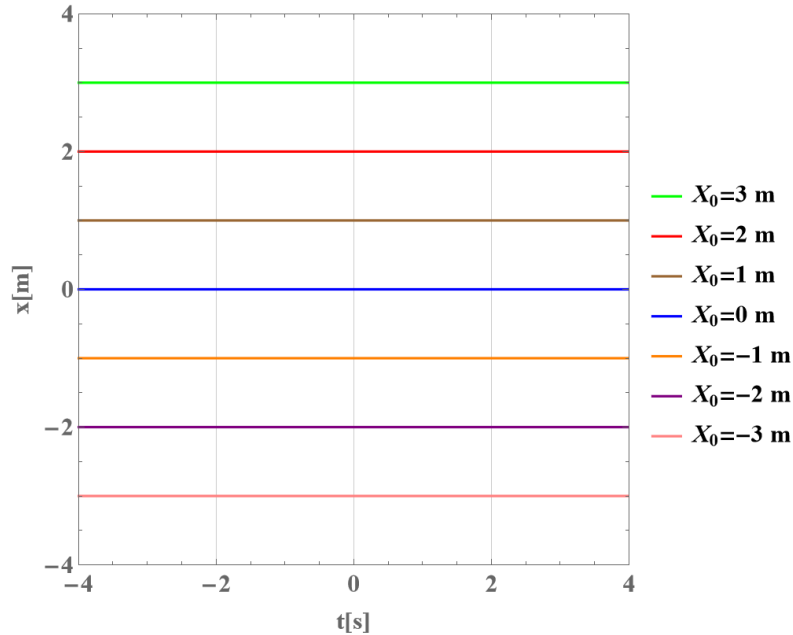


Figura 3.2: En el espacio de configuraciones cuántico extendido para el oscilador armónico se muestran algunas trayectorias de Madelung-Bohm asociadas a los estados estacionarios para algunos valores de X_0 .

Observe que $x(t)$ (3.29) es una curva integral de la densidad de corriente de probabilidad para el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico dada por

$$J_n^{(\omega)} = 0. \quad (3.30)$$

3.4. Las trayectorias de Madelung-Bohm para una partícula en un campo gravitacional uniforme asociadas con el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico.

La amplitud y la fase de la función de onda para una partícula en un campo gravitacional constante determinadas por el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico (2.23) están dadas por

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\rho_n^{(g)}} &= \sqrt{\cos(\omega t)} \sqrt{\rho_n^{(\omega)}} \\
 &= \sqrt{\cos(\omega t)} A_n H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) \exp \left\{ -\frac{m\omega x^2}{2\hbar} \right\} \\
 &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \frac{1}{(1+T^2\omega^2)^{\frac{1}{4}}} H_n \left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{2X+gT^2}{2\sqrt{1+T^2\omega^2}} \right] \exp \left\{ -\frac{m\omega(2X+gT^2)^2}{8\hbar(1+T^2\omega^2)} \right\},
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_n^{(g)} &= \mathcal{S}_n^{(\omega)} + F \\
 &= - \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega t + \frac{m\omega x^2}{2} \tan(\omega t) - \frac{mgx}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) + \frac{mg^2}{3\omega^3} \tan^3(\omega t) \\
 &= - \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \arctan(\omega T) + \frac{m\omega^2 T}{2} \left[\frac{(2X+gT^2)^2}{4(1+T^2\omega^2)} \right] \\
 &\quad - \left(\frac{2X+gT^2}{2\sqrt{1+T^2\omega^2}} \right) mgT \sqrt{1+T^2\omega^2} + \frac{mg^2 T^3}{3} \\
 &= - \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \arctan(\omega T) + \frac{m\omega^2 T(2X+gT^2)^2}{8(1+T^2\omega^2)} - mgXT - \frac{mg^2 T^3}{6}.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Ahora bien, sustituyendo la Ec. (3.29) en la transformación de punto cuántica (3.20), obtenemos que

$$X(T) = X_0 \sqrt{1+T^2\omega^2} - \frac{g}{2} T^2, \tag{3.33}$$

la cual es la trayectoria de Madelung-Bohm para una partícula en un campo gravitacional uniforme determinada por la trayectoria cuántica de los estados estacionarios del oscilador armónico. Observe que el valor esperado de la posición (2.74) para una partícula bajo un campo gravitacional constante, coincide con una trayectoria de Madelung-Bohm, la cual aparece en color azul en las gráficas de la Fig. (3.3).

Nótese que $X(T)$ (3.33) es una curva integral de la densidad de corriente de probabilidad $J_n^{(g)}$ dada por

$$\begin{aligned}
 J_n^{(g)} &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \left[\frac{(2X+gT^2)\omega^2 T}{2(1+T^2\omega^2)} - gT \right] \\
 &\quad \times H_n^2 \left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{2X+gT^2}{2\sqrt{1+T^2\omega^2}} \right] \exp \left\{ -\frac{m\omega(2X+gT^2)^2}{4\hbar(1+T^2\omega^2)} \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Finalmente, se encuentra que la trayectoria clásica para una partícula en un campo gravitacional uniforme (1.8) está contenida en la Ec. (3.33) cuando $X_0 = 0$.

De esta manera, se ha establecido la conexión entre las trayectorias de Madelung-Bohm de los estados estacionarios del oscilador armónico con las trayectorias de Madelung-Bohm para la partícula en un campo gravitacional constante.

Formulación de Bohm de la Mecánica cuántica

3.4 Las trayectorias de Madelung-Bohm para una partícula en un campo gravitacional uniforme asociadas con el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico.

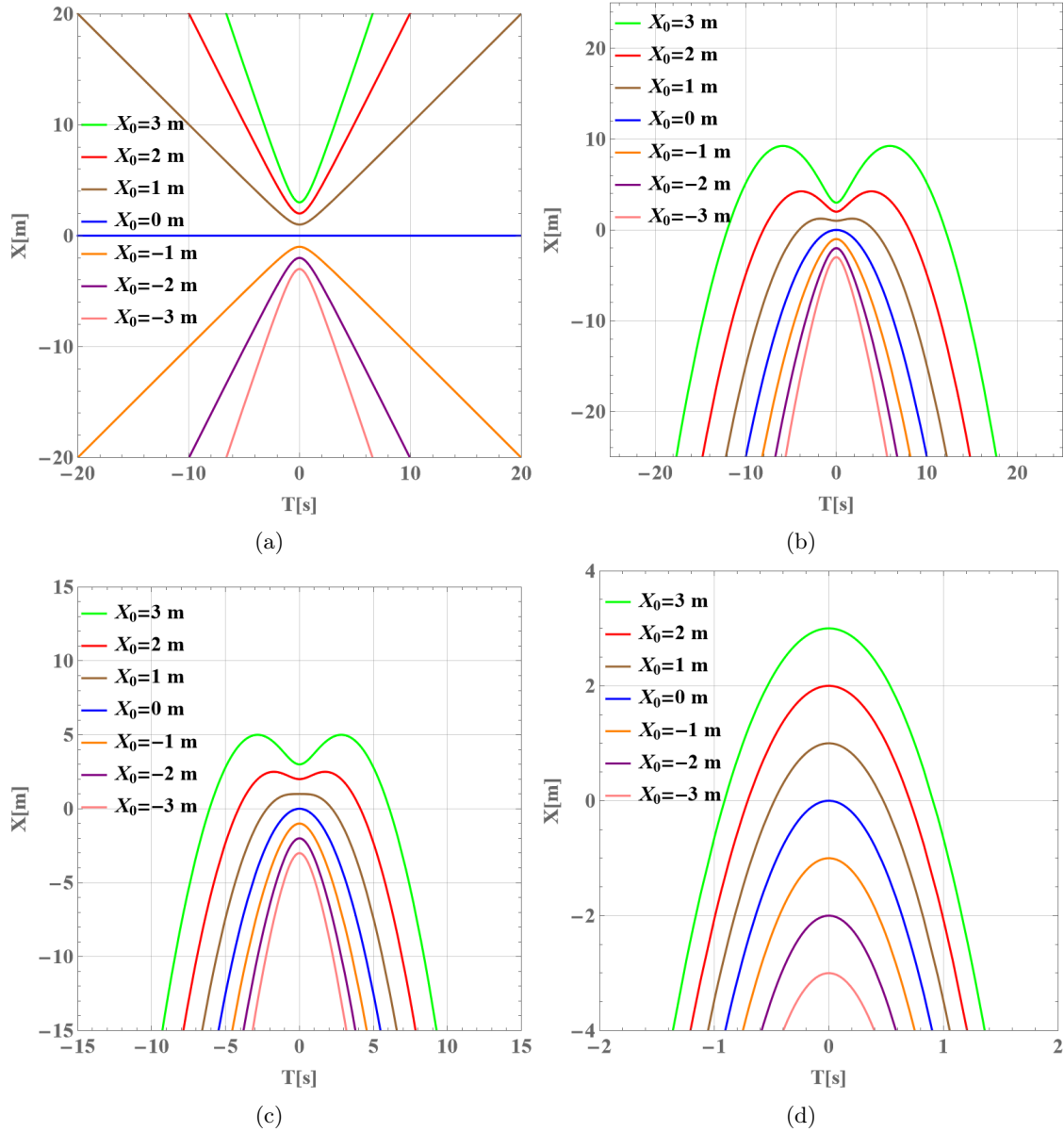


Figura 3.3: En el espacio de configuraciones cuántico extendido para una partícula en un campo gravitacional uniforme se grafican algunas trayectorias de Madelung-Bohm determinadas por los estados estacionarios del oscilador armónico, para distintas posiciones X_0 , con $\omega = 1$ y distintos valores de g : (a) $g = 0$, (b) $g = 0.5 \text{ m/s}^2$, (c) $g = 1 \text{ m/s}^2$ y (d) $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Conclusión

En este trabajo, siguiendo las referencias [6,7], hemos introducido una transformación de punto (1.1) para estudiar de manera unificada, tres sistemas físicos fundamentales: una partícula libre, una partícula bajo un campo gravitacional constante y el oscilador armónico. De este modo, en la primera parte hemos establecido la relación en los formalismos de la mecánica clásica de: Newton, Lagrange, Hamilton-Jacobi, y Hamilton.

En la segunda parte, mostramos que la misma transformación de punto permite establecer una conexión entre las ecuaciones de Schrödinger correspondientes. En particular, a partir de la función de onda del n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico

$$\psi_n(x, t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 - i\omega t\left(n + \frac{1}{2}\right)\right\}, \quad (3.35)$$

y mediante la relación (2.20), encontramos una función de onda que describe una partícula en un campo gravitacional uniforme, dada por

$$\begin{aligned} \Psi_n(X, T) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \frac{1}{\sqrt{1+i\omega T}} \left(\frac{1-i\omega T}{1+i\omega T}\right)^{\frac{n}{2}} \\ &\times H_n\left[\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{2X + gT^2}{2\sqrt{1+T^2\omega^2}}\right] \exp\left\{-\frac{m\omega(2X + gT^2)^2}{8\hbar(1+i\omega T)} - \frac{imgT}{\hbar}\left(X + \frac{gT^2}{6}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Por otra parte, los valores esperados del n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico están dados por

$$\langle x_n \rangle = 0, \quad \langle x_n^2 \rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar}{m\omega}, \quad (3.37)$$

$$\langle p_n \rangle = 0, \quad \langle p_n^2 \rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar m\omega. \quad (3.38)$$

Estos resultados se relacionan con los valores esperados correspondientes a una partícula sometida a un campo gravitacional uniforme mediante la transformación de coordenadas (1.1) y momentos (1.56), obteniéndose que

$$\langle X \rangle_n = -\frac{g}{2}T^2, \quad \langle X^2 \rangle_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar(1+T^2\omega^2)}{m\omega} + \frac{g^4}{4}T^4, \quad (3.39)$$

$$\langle P \rangle_n = -mgT, \quad \langle P^2 \rangle_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar m\omega + m^2 g^2 T^2. \quad (3.40)$$

Además, usando el punto de vista del potencial cuántico de la mecánica cuántica, mostramos que la transformación de punto clásica, de forma natural, induce una transformación de punto cuántica en el espacio de configuraciones cuántico extendido correspondiente, que determina la conexión

Formulación de Bohm de la Mecánica cuántica

3.4 Las trayectorias de Madelung-Bohm para una partícula en un campo gravitacional uniforme asociadas con el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico.

entre las trayectorias de Madelung-Bohm correspondientes. Esto permitió que con base en las trayectorias de Madelung-Bohm de los estados estacionarios del oscilador armónico

$$x(t) = X_0, \quad (3.41)$$

determinar las correspondientes trayectorias de Madelung-Bohm de una partícula en un campo gravitacional constante

$$X(T) = X_0 \sqrt{1 + T^2 \omega^2} - \frac{1}{2} g T^2. \quad (3.42)$$

Observe que, aunque la forma de la transformación de punto cuántica es la misma que en el caso clásico, las trayectorias cuánticas pueden diferir significativamente de las clásicas, revelando la influencia del potencial cuántico en la dinámica.

De este modo, nuestro trabajo muestra cómo una transformación de punto adecuada puede revelar profundas conexiones entre sistemas físicos aparentemente distintos, tanto en el marco clásico como en el cuántico.

Apéndice A

Demostración de identidades en el formalismo Hamiltoniano

Utilizando las Ecs. (1.1), (1.38), (1.56), y (1.57) en las Ecs. (1.62) se puede demostrar que estas últimas son identidades.

$$\begin{aligned} p &= P \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \\ &= \left[p \cos(\omega t) + m\omega x \sin(\omega t) - \frac{gm}{\omega} \tan(\omega t) \right] \sec(\omega t) \\ &\quad - m\omega x \tan(\omega t) + \frac{mg}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) \\ &= p \cos(\omega t) \sec(\omega t) + \cancel{m\omega x \sin(\omega t) \sec(\omega t)} - \cancel{\frac{gm}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t)} \\ &\quad - \cancel{m\omega x \tan(\omega t)} + \cancel{\frac{gm}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t)} \\ &= p. \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
 H^{(\omega)} &= H^{(g)} \frac{\partial T}{\partial t} - P \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} \\
 &= \left\{ \frac{P^2}{2m} + mgX \right\} \frac{\partial T}{\partial t} - P \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} \\
 &= \left\{ \frac{1}{2m} \left[(p \cos(\omega t) + m\omega x \sin(\omega t)) - \frac{gm}{\omega} \tan(\omega t) \right]^2 \right. \\
 &\quad \left. + mg \left[x \sec(\omega t) - \frac{g}{2\omega^2} \tan^2(\omega t) \right] \right\} \sec^2(\omega t) \\
 &\quad - \left[p \cos(\omega t) + m\omega x \sin(\omega t) - \frac{gm}{\omega} \tan(\omega t) \right] \left[\omega x \tan(\omega t) \sec(\omega t) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{g}{\omega} \tan(\omega t) \sec^2(\omega t) \right] + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \sec^2(\omega t) - mgx \tan^2(\omega t) \sec(\omega t) \\
 &\quad + \frac{mg^2}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) - mgx \sec^3(\omega t) \\
 &= \left\{ \frac{1}{2m} p^2 \cos^2(\omega t) + \omega x p \sin(\omega t) \cos(\omega t) + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \sin^2(\omega t) - \frac{g}{\omega} p \sin(\omega t) \right. \\
 &\quad \left. - mgx \tan(\omega t) \sin(\omega t) + mgx \sec(\omega t) \right\} \sec^2(\omega t) - \omega x p \tan(\omega t) \tag{A.2} \\
 &\quad + \frac{g}{\omega} p \tan(\omega t) \sec(\omega t) - m\omega^2 x^2 \tan^2(\omega t) + mgx \tan^2(\omega t) \sec(\omega t) \\
 &\quad + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \sec^2(\omega t) - mgx \sec^3(\omega t) \\
 &= \frac{p^2}{2m} + \cancel{\omega x p \tan(\omega t)} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \tan^2(\omega t) - \cancel{\frac{g}{\omega} p \tan(\omega t) \sec(\omega t)} - \cancel{mgx \tan^2(\omega t) \sec(\omega t)} \\
 &\quad + \cancel{mgx \sec^3(\omega t)} - \cancel{\omega x p \tan(\omega t)} + \cancel{\frac{g}{\omega} p \tan(\omega t) \sec(\omega t)} - m\omega^2 x^2 \tan^2(\omega t) \\
 &\quad + \cancel{mgx \tan^2(\omega t) \sec(\omega t)} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \sec^2(\omega t) - \cancel{mgx \sec^3(\omega t)} \\
 &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} (\sec^2(\omega t) - \tan^2(\omega t)) \\
 &= \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \\
 &= H^{(\omega)}
 \end{aligned}$$

Apéndice B

Relación entre las ecuaciones de Schrödinger para una partícula en un campo gravitacional uniforme y para el oscilador armónico

En este apéndice mostramos paso a paso la derivación de la Ec. (2.21). Para ello, sustituimos las Ecs. (1.1), (1.38), (2.4), (2.5) y (2.20), en la ecuación de Schrödinger para una partícula bajo la influencia de un campo gravitacional uniforme (2.1). Observe que, resulta conveniente desarrollar las siguientes derivadas

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial X} &= \cos(\omega t) \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{\cos(\omega t)} e^{\frac{iF}{\hbar}} \psi) \\ &= \cos^{\frac{3}{2}}(\omega t) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{i}{\hbar} \psi \frac{\partial F}{\partial x} \right) e^{\frac{iF}{\hbar}},\end{aligned}\tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} &= \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial X} \right) \\ &= \cos(\omega t) \cos^{\frac{3}{2}}(\omega t) \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{i}{\hbar} \psi \frac{\partial F}{\partial x} \right) e^{\frac{iF}{\hbar}} \right] \\ &= e^{\frac{iF}{\hbar}} \cos^{\frac{5}{2}}(\omega t) \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar} \psi \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{2i}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{\hbar^2} \psi \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &= e^{\frac{iF}{\hbar}} \cos^{\frac{5}{2}}(\omega t) \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar} m \omega \psi \tan(\omega t) + \frac{2i}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(m \omega x \tan(\omega t) - \frac{m g}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\psi}{\hbar^2} \left(m^2 \omega^2 x^2 \tan^2(\omega t) - 2 m^2 g x \tan^2(\omega t) \sec(\omega t) + \frac{m^2 g^2}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) \right) \right] \\ &= e^{\frac{iF}{\hbar}} \cos^{\frac{5}{2}}(\omega t) \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{i m \omega}{\hbar} \psi \tan(\omega t) + \frac{2 i m \omega x}{\hbar} \tan(\omega t) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{2 i m g}{\hbar \omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2 \omega^2 x^2}{\hbar^2} \psi \tan^2(\omega t) + \frac{2 m^2 g x}{\hbar^2} \psi \tan^2(\omega t) \sec(\omega t) - \frac{m^2 g^2}{\hbar^2 \omega^2} \psi \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) \right],\end{aligned}\tag{B.2}$$

Relación entre las ecuaciones de Schrödinger para una partícula en un campo gravitacional uniforme y para el oscilador armónico

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial T} &= \left[\frac{g}{\omega} \sin(\omega t) - \omega x \sin(\omega t) \cos(\omega t) \right] \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{\cos(\omega t)} e^{\frac{iF}{\hbar}} \psi \right) + \cos^2(\omega t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\cos(\omega t)} e^{\frac{iF}{\hbar}} \psi \right) \\
&= \left[\frac{g}{\omega} \sin(\omega t) - \omega x \sin(\omega t) \cos(\omega t) \right] \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{i}{\hbar} \psi \frac{\partial F}{\partial x} \right) e^{\frac{iF}{\hbar}} \cos^{\frac{1}{2}}(\omega t) \\
&\quad + e^{\frac{iF}{\hbar}} \cos^2(\omega t) \left[-\frac{\omega}{2} \psi \sin(\omega t) \cos^{-\frac{1}{2}}(\omega t) + \cos^{\frac{1}{2}}(\omega t) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \psi \cos^{\frac{1}{2}}(\omega t) \frac{\partial F}{\partial t} \right] \\
&= \left[\frac{g}{\omega} \sin(\omega t) - \omega x \sin(\omega t) \cos(\omega t) \right] \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{i}{\hbar} \psi \left(m\omega x \tan(\omega t) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{mg}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) \right) \right] e^{\frac{iF}{\hbar}} \cos^{\frac{1}{2}}(\omega t) + e^{\frac{iF}{\hbar}} \cos^2(\omega t) \left[-\frac{\omega}{2} \psi \sin(\omega t) \cos^{-\frac{1}{2}}(\omega t) \right. \\
&\quad \left. + \cos^{\frac{1}{2}}(\omega t) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \psi \cos^{\frac{1}{2}}(\omega t) \left(\frac{m\omega^2 x^2}{2} \sec^2(\omega t) - mgx \tan^2(\omega t) \sec(\omega t) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{mg^2}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) - mgx \sec^3(\omega t) \right) \right] \\
&= e^{\frac{iF}{\hbar}} \left\{ \left[\frac{g}{\omega} \sin(\omega t) \cos^{\frac{1}{2}}(\omega t) - \omega x \sin(\omega t) \cos^{\frac{3}{2}}(\omega t) \right] \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{im\omega x}{\hbar} \psi \tan(\omega t) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{img}{\hbar\omega} \psi \tan(\omega t) \cos^{-1}(\omega t) \right] + \left[-\frac{\omega}{2} \psi \sin(\omega t) \cos^{\frac{3}{2}}(\omega t) + \cos^{\frac{5}{2}}(\omega t) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{im\omega^2 x^2}{2\hbar} \psi \cos^{\frac{1}{2}}(\omega t) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{imgx}{\hbar} \psi \tan^2(\omega t) \cos^{\frac{3}{2}}(\omega t) + \frac{img^2}{\hbar\omega^2} \psi \tan^2(\omega t) \cos^{\frac{1}{2}}(\omega t) - \frac{imgx}{\hbar} \psi \cos^{-\frac{1}{2}}(\omega t) \right] \right\} \\
&= e^{\frac{iF}{\hbar}} \left\{ \frac{g}{\omega} \sin(\omega t) \cos^{\frac{1}{2}}(\omega t) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{imgx}{\hbar} \psi \sin^2(\omega t) \cos^{-\frac{1}{2}}(\omega t) - \frac{img^2}{\hbar\omega^2} \psi \sin^2(\omega t) \cos^{-\frac{3}{2}}(\omega t) \right. \\
&\quad \left. - \omega x \sin(\omega t) \cos^{\frac{3}{2}}(\omega t) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{im\omega^2 x^2}{\hbar} \psi \sin^2(\omega t) \cos^{\frac{1}{2}}(\omega t) + \frac{imgx}{\hbar} \psi \sin^2(\omega t) \cos^{-\frac{1}{2}}(\omega t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\omega}{2} \psi \sin(\omega t) \cos^{\frac{3}{2}}(\omega t) + \cos^{\frac{5}{2}}(\omega t) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{im\omega^2 x^2}{2\hbar} \psi \cos^{\frac{1}{2}}(\omega t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{imgx}{\hbar} \psi \sin^2(\omega t) \cos^{-\frac{1}{2}}(\omega t) + \frac{img^2}{\hbar\omega^2} \psi \sin^2(\omega t) \cos^{-\frac{3}{2}}(\omega t) - \frac{imgx}{\hbar} \psi \cos^{-\frac{1}{2}}(\omega t) \right\} \\
&= e^{\frac{iF}{\hbar}} \cos^{\frac{5}{2}}(\omega t) \left\{ \frac{g}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial t} - \omega x \tan(\omega t) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{im\omega^2 x^2}{2\hbar} \psi \sec^2(\omega t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{im\omega^2 x^2}{\hbar} \psi \tan^2(\omega t) - \frac{imgx}{\hbar} \psi \sec(\omega t) - \frac{\omega}{2} \psi \tan(\omega t) \right\}.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Al sustituir las derivadas (B.2), (B.3) en la Ec. (2.1) vemos que

Relación entre las ecuaciones de Schrödinger para una partícula en un campo gravitacional uniforme y para el oscilador armónico

$$\begin{aligned}
& -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + mgX\Psi - i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial T} \\
= & -\frac{\hbar^2}{2m} e^{\frac{iF}{\hbar}} \cos^{\frac{5}{2}}(\omega t) \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{im\omega}{\hbar} \psi \tan(\omega t) + \frac{2im\omega x}{\hbar} \tan(\omega t) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right. \\
& - \frac{2img}{\hbar\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{m^2\omega^2 x^2}{\hbar^2} \psi \tan^2(\omega t) + \frac{2m^2 gx}{\hbar^2} \psi \tan^2(\omega t) \sec(\omega t) \\
& \left. - \frac{m^2 g^2}{\hbar^2 \omega^2} \psi \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) \right\} + \left[mgx \sec(\omega t) - \frac{mg^2}{2\omega^2} \tan^2(\omega t) \right] \cos^{\frac{1}{2}}(\omega t) e^{\frac{iF}{\hbar}} \psi \\
& - i\hbar e^{\frac{iF}{\hbar}} \cos^{\frac{5}{2}}(\omega t) \left\{ \frac{g}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial t} - \omega x \tan(\omega t) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{im\omega^2 x^2}{2\hbar} \psi \sec^2(\omega t) \right. \\
& \left. - \frac{im\omega^2 x^2}{\hbar} \psi \tan^2(\omega t) - \frac{imgx}{\hbar} \psi \sec(\omega t) - \frac{\omega}{2} \psi \tan(\omega t) \right\} \\
= & e^{\frac{iF}{\hbar}} \cos^{\frac{5}{2}}(\omega t) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{i\hbar\omega}{2} \psi \tan(\omega t) - \cancel{i\hbar\omega x \tan(\omega t) \frac{\partial \psi}{\partial x}} + \frac{i\hbar g}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right. \\
& + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \psi \tan^2(\omega t) - \cancel{mgx \psi \tan^2(\omega t) \sec(\omega t)} + \frac{mg^2}{2\omega^2} \psi \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) \\
& + \cancel{mgx \psi \sec^3(\omega t)} - \frac{mg^2}{2\omega^2} \psi \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) - \frac{i\hbar g}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) \frac{\partial \psi}{\partial x} - i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \\
& + \cancel{i\hbar\omega x \tan(\omega t) \frac{\partial \psi}{\partial x}} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \psi \sec^2(\omega t) - \cancel{m\omega^2 x^2 \psi \tan^2(\omega t)} \\
& \left. - \cancel{mgx \psi \sec(\omega t)} + \frac{i\hbar\omega}{2} \psi \tan(\omega t) \right\}, \\
= & e^{\frac{iF}{\hbar}} \cos^{\frac{5}{2}}(\omega t) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \psi [\tan^2(\omega t) + \sec^2(\omega t)] - m\omega^2 x^2 \psi \tan^2(\omega t) \right. \\
& \left. - i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + mgx \psi [-\tan^2(\omega t) \sec(\omega t) + \sec^3(\omega t) - \sec(\omega t)] \right\} \\
= & e^{\frac{iF}{\hbar}} \cos^{\frac{5}{2}}(\omega t) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \cancel{m\omega^2 x^2 \psi \tan^2(\omega t)} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \psi - \cancel{m\omega^2 x^2 \psi \tan^2(\omega t)} - i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \right. \\
& \left. + \cancel{mgx \psi [-\sec^3(\omega t) + \sec^3(\omega t)]} \right\}.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Por lo tanto

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + mgX\Psi - i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial T} = e^{\frac{iF}{\hbar}} \cos^{\frac{5}{2}}(\omega t) \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \psi - i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\}. \tag{B.5}$$

Apéndice C

Valores esperados para el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico

Buscamos determinar los valores esperados para el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico. Para ello, mediante el uso del operador de escalera

$$\hat{a}_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(\mp i\hat{p} + m\omega x), \quad (\text{C.1})$$

reescribimos los operadores de posición y de momento en términos de \hat{a}_{\pm} como

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-), \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}_+ - \hat{a}_-). \quad (\text{C.2})$$

También utilizamos la ortonormalidad de estos estados estacionarios

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx = \delta_{mn}. \quad (\text{C.3})$$

Además, tenemos las siguientes dos propiedades

$$\hat{a}_+ \hat{a}_- \psi_n = n\psi_n, \quad \hat{a}_- \hat{a}_+ \psi_n = (n+1)\psi_n. \quad (\text{C.4})$$

Es así que, los valores esperados asociados a la posición y el momento para estos estados son

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x \psi_n dx \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* (\hat{a}_+ + \hat{a}_-) \psi_n dx \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} (B_{n+1} \psi_n^* \psi_{n+1} + B_{n-1} \psi_n^* \psi_{n-1}) dx \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned}
 \langle x^2 \rangle_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x^2 \psi_n dx \\
 &= \frac{\hbar}{2m\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* [(\hat{a}_+)^2 + \hat{a}_+ \hat{a}_- + \hat{a}_- \hat{a}_+ + (\hat{a}_-)^2] \psi_n dx \\
 &= \frac{\hbar}{2m\omega} \int_{-\infty}^{\infty} [B_{n+2} \psi_n^* \psi_{n+2} + n \psi_n^* \psi_n + (n+1) \psi_n^* \psi_n + B_{n-2} \psi_n^* \psi_{n-2}] dx \quad (C.6) \\
 &= \frac{\hbar}{2m\omega} (n + n + 1) \\
 &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar}{m\omega},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle p \rangle_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \hat{p} \psi_n dx \\
 &= i \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* (\hat{a}_+ - \hat{a}_-) \psi_n dx \quad (C.7) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle p^2 \rangle_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \hat{p}^2 \psi_n dx \\
 &= -\frac{\hbar m \omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* [(\hat{a}_+)^2 - \hat{a}_+ \hat{a}_- - \hat{a}_- \hat{a}_+ + (\hat{a}_-)^2] \psi_n dx \\
 &= -\frac{\hbar m \omega}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [B_{n+2} \psi_n^* \psi_{n+2} - n \psi_n^* \psi_n - (n+1) \psi_n^* \psi_n + B_{n-2} \psi_n^* \psi_{n-2}] dx \quad (C.8) \\
 &= -\frac{\hbar m \omega}{2} (-n - n - 1) \\
 &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar m \omega.
 \end{aligned}$$

Por otra parte, los valores esperados de la energía cinética, la energía potencial, la energía total, y la fuerza, son

$$\langle K \rangle_n^{(\omega)} = \frac{\langle p^2 \rangle_n}{2m} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar \omega}{2}, \quad (C.9)$$

$$\langle V \rangle_n^{(\omega)} = \frac{m\omega^2 \langle x^2 \rangle_n}{2} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar \omega}{2}, \quad (C.10)$$

$$\langle H \rangle_n^{(\omega)} = \langle K \rangle_n^{(\omega)} + \langle V \rangle_n^{(\omega)} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \quad (C.11)$$

$$\left\langle -\frac{dV}{dx} \right\rangle_n^{(\omega)} = -m\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x \psi_n dx = 0. \quad (C.12)$$

Apéndice D

Valores esperados de una partícula en un campo gravitacional uniforme determinados por los estados estacionarios del oscilador armónico

Para una partícula cuántica en el estado Ψ_n (2.70), mediante las Ecs. (1.1), (1.17), (2.4), (2.20), (2.22) y los valores esperados para los estados estacionarios del oscilador armónico dados por (C.5)-(C.11), se encuentra que los valores esperados para la posición y el momento son

$$\begin{aligned}\langle X \rangle_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^* X \Psi_n dX \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) \psi_n^* \left[x \sec(\omega t) - \frac{g}{2\omega^2} \tan^2(\omega t) \right] \psi_n \sec(\omega t) dx \\ &= \sec(\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x \psi_n dx - \frac{g}{2\omega^2} \tan^2(\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi_n dx \\ &= -\frac{g}{2\omega^2} \tan^2(\omega t) \\ &= -\frac{g}{2} T^2,\end{aligned}\tag{D.1}$$

Valores esperados de una partícula en un campo gravitacional uniforme
determinados por los estados estacionarios del oscilador armónico

$$\begin{aligned}
\langle X^2 \rangle_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^* X^2 \Psi_n dX \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) \psi_n^* \left[x \sec(\omega t) - \frac{g}{2\omega^2} \tan^2(\omega t) \right]^2 \psi_n \sec(\omega t) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \left[x^2 \sec^2(\omega t) - \frac{g}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \sec(\omega t) x + \frac{g^2}{4\omega^4} \tan^4(\omega t) \right] \psi_n dx \\
&= \sec^2(\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x^2 \psi_n dx - \frac{g}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \sec(\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x \psi_n dx \\
&\quad + \frac{g^2}{4\omega^4} \tan^4(\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi_n dx \\
&= \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar}{m\omega} \sec^2(\omega t) + \frac{g^2}{4\omega^4} \tan^4(\omega t) \\
&= \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar(1 + T^2\omega^2)}{m\omega} + \frac{g^2}{4} T^4,
\end{aligned} \tag{D.2}$$

$$\begin{aligned}
\langle P \rangle_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^* \left(-i\hbar \frac{\partial \Psi_n}{\partial X} \right) dX \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(\omega t) e^{-\frac{iF}{\hbar}} \psi_n^* \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\frac{iF}{\hbar}} \psi_n \right) \right] \sec(\omega t) dx \\
&= \cos(\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{iF}{\hbar}} \psi_n^* \left[-i\hbar e^{\frac{iF}{\hbar}} \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x} + \frac{i}{\hbar} \frac{\partial F}{\partial x} \psi_n \right) \right] dx \\
&= \cos(\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \left(-i\hbar \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right) dx + \cos(\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \frac{\partial F}{\partial x} \psi_n dx \\
&= \cos(\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \left[m\omega x \tan(\omega t) - \frac{mg}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) \right] \psi_n dx \\
&= m\omega \sin(\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x \psi_n dx - \frac{mg}{\omega} \tan(\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi_n dx \\
&= -\frac{mg}{\omega} \tan(\omega t) \\
&= -mgT,
\end{aligned} \tag{D.3}$$

**Valores esperados de una partícula en un campo gravitacional uniforme
determinados por los estados estacionarios del oscilador armónico**

$$\begin{aligned}
\langle P^2 \rangle_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^* \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial X^2} \right) dX \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) e^{-\frac{iF}{\hbar}} \psi_n^* \left[-\hbar^2 \cos^2(\omega t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(e^{\frac{iF}{\hbar}} \psi_n \right) \right] \sec(\omega t) dx \\
&= \cos^2(\omega t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{iF}{\hbar}} \psi_n^* \left[-\hbar^2 e^{\frac{iF}{\hbar}} \left(\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \psi_n \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{i2}{\hbar} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \psi_n}{\partial x} - \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \psi_n \right) \right] dx \right\} \\
&= \cos^2(\omega t) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} \right) dx - i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \psi_n dx \right. \\
&\quad \left. + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \left(-i\hbar \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right) \frac{\partial F}{\partial x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \psi_n dx \right\} \\
&= \cos^2(\omega t) \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar m \omega - i\hbar m \omega \tan(\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi_n dx \right. \\
&\quad \left. + m^2 \omega^2 \tan^2(\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x^2 \psi_n dx - 2m^2 g \tan^2(\omega t) \sec(\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x \psi_n dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{m^2 g^2}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi_n dx + 2m\omega \tan(\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x \left(-i\hbar \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right) dx \right. \\
&\quad \left. - \frac{2mg}{\omega} \tan(\omega t) \sec(\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \left(-i\hbar \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right) dx \right\} \tag{D.4} \\
&= \cos^2(\omega t) \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar m \omega - i\hbar m \omega \tan(\omega t) + m^2 \omega^2 \tan^2(\omega t) \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar}{m\omega} \right. \\
&\quad \left. + \frac{m^2 g^2}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) + 2m\omega \tan(\omega t) \frac{i\hbar}{2} \right\} \\
&= \cos^2(\omega t) \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar m \omega [1 + \tan^2(\omega t)] + \frac{m^2 g^2}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \sec^2(\omega t) \right. \\
&\quad \left. - \cancel{i\hbar m \omega \tan(\omega t)} + \cancel{i\hbar m \omega \tan(\omega t)} \right\} \\
&= \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar m \omega + \frac{m^2 g^2}{\omega^2} \tan^2(\omega t) \\
&= \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar m \omega + m^2 g^2 T^2.
\end{aligned}$$

Por otro lado, los valores esperados de la energía cinética, la energía potencial, la energía total, y la fuerza están dados por

$$\langle K \rangle_n^{(g)} = \frac{\langle P^2 \rangle_n}{2m} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{m g^2}{2} T^2, \tag{D.5}$$

$$\langle V \rangle_n^{(g)} = mg \langle X \rangle_n = -\frac{m g^2}{2} T^2, \tag{D.6}$$

$$\langle H \rangle_n^{(g)} = \langle K \rangle_n^{(g)} + \langle V \rangle_n^{(g)} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar \omega}{2}, \tag{D.7}$$

$$\left\langle -\frac{dV}{dX} \right\rangle_n^{(g)} = -mg \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^* \Psi_n dX = -mg. \tag{D.8}$$

**Valores esperados de una partícula en un campo gravitacional uniforme
determinados por los estados estacionarios del oscilador armónico**

Adicionalmente, se encuentra que

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_m^* \Psi_n dX &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sqrt{\cos(\omega t)} e^{-\frac{iF}{\hbar}} \psi_m^* \right] \left[\sqrt{\cos(\omega t)} e^{\frac{iF}{\hbar}} \psi_n \right] \sec(\omega t) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) \psi_m^* \psi_n \sec(\omega t) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^* \psi_n dx \\
 &= \delta_{mn}.
 \end{aligned} \tag{D.9}$$

Es decir, las soluciones a la ecuación de Schrödinger para una partícula en un campo gravitacional uniforme determinadas por los estados estacionarios del oscilador armónico (2.70), forman una base ortonormal.

Apéndice E

Potencial cuántico del n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico

A partir de la amplitud $\sqrt{\rho_n^{(\omega)}}$ dada por la Ec. (3.21) es posible hallar el potencial cuántico para los estados estacionarios del oscilador armónico. De la definición de ξ (2.25) y mediante la regla de la cadena se encuentra que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (\text{E.1})$$

Además, para los polinomios de Hermite, se cumple que

$$H_n''(\xi) = 2\xi H_n'(\xi) - 2n H_n(\xi). \quad (\text{E.2})$$

Usando las Ecs. (E.1) y (E.2), se encuentra que el laplaciano de la Ec. (3.21) es

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sqrt{\rho_n^{(\omega)}} &= \frac{d^2 \sqrt{\rho_n^{(\omega)}}}{dx^2} \\ &= \frac{m\omega}{\hbar} \frac{d^2 \sqrt{\rho_n^{(\omega)}}}{d\xi^2} \\ &= A_n \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right) \frac{d^2}{d\xi^2} \left[H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right] \\ &= A_n \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right) \frac{d}{d\xi} \left[-\xi H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} + H_n'(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right] \\ &= A_n \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \left[-H_n(\xi) - \xi H_n'(\xi) + \xi^2 H_n(\xi) + H_n''(\xi) - \xi H_n'(\xi) \right] \\ &= A_n \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \left[-H_n(\xi) - 2\xi H_n'(\xi) + \xi^2 H_n(\xi) + H_n''(\xi) \right] \\ &= A_n \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \left[\xi^2 H_n(\xi) - H_n(\xi) - 2n H_n(\xi) \right] \\ &= A_n \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi) \left[\xi^2 - 2n - 1 \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Sustituyendo las Ecs. (3.21) y (E.3) en la expresión para el potencial cuántico (3.7) se encuentra que

Potencial cuántico del n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico

$$Q_n^{(\omega)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{A_n \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi) [\xi^2 - 2n - 1]}{A_n H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}} = -[\xi^2 - 2n - 1] \frac{\hbar\omega}{2}.$$

Por lo tanto, el potencial cuántico para el n -ésimo estado estacionario del oscilador armónico es

$$\begin{aligned} Q_n^{(\omega)} &= \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi^2 \right) \hbar\omega \\ &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \\ &= E_n^{(\omega)} - V^{(\omega)}. \end{aligned} \tag{E.4}$$

Bibliografía

- [1] H. Goldstein, C. P. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*, Third Edition (Pearson Education, 2011).
- [2] G. Silva-Ortigoza, J. Ortiz-Flores, C. T. Sosa-Sánchez, and R. Silva-Ortigoza, *Classical trajectories from the zeros of the quantum potential: the 2D isotropic harmonic oscillator*, *Physica Scripta*, **99** (2024) 035115.
- [3] E. Madelung, *Quantentheorie in hydrodynamischer form*, *Z. Phys.* **40**, (1927) 322-326.
- [4] D. Bohm, *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. I*, *Phys. Rev.* **85**, (1952) 166-179.
- [5] D. Bohm, *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. II*, *Phys. Rev.* **85**, (1952) 180-193.
- [6] G. F. Torres del Castillo, *Relating the free particle with the harmonic oscillator*, *Rev. Mex. Fís.*, **71** (2025) 030701.
- [7] G. Silva-Ortigoza, E. Paz-Córdova, I. Julián-Macías, G. F. Torres del Castillo, I. Rubalcava-García, C. Ramírez-Romero, M. P. Velazquez-Quesada, and V. Vázquez-Báez, *Relating a particle in a constant gravitational field and the harmonic oscillator in the classical and quantum mechanics frameworks*, manuscript submitted for publication in *Physica Scripta* (2025).
- [8] G. Silva-Ortigoza, R. Silva-Ortigoza, I. Julián-Macías, and J. Ortiz-Flores, *Relating Madelung-Bohm trajectories*, *J. Opt. Soc. Am. B*, **42** (2025) 376-385.
- [9] D. J. Griffiths and D. F. Schroeter, *Introduction to Quantum Mechanics*, Third edition (Cambridge University Press, 2018).
- [10] G. G. Rozenman, D. I. Bondar, W. P. Schleich, L. Shemer and A. Arie, *Observation of Bohm trajectories and quantum potentials of classical waves*, *Phys. Scr.*, **98** (2023) 044004.
- [11] A. K. Ahmed and H. G. Hussein, *New technique for solving harmonic oscillator system in momentum space*, *AIP Conf. Proc.* **2190**, (2019) 020024.