



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Experimentos de Stern-Gerlach consecutivos tratados  
cuánticamente

Tesis presentada al

**Posgrado en Física Aplicada**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**DOCTORADO EN CIENCIAS (FÍSICA APLICADA)**

por

Ernesto Benítez Rodríguez

Asesorado por

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar

Puebla Pue.  
Marzo 2021





Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

---

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

---

Experimentos de Stern-Gerlach consecutivos tratados  
cuánticamente

Tesis presentada al

**Posgrado en Física Aplicada**

como requisito parcial para la obtención del grado de

**DOCTORADO EN CIENCIAS (FÍSICA APLICADA)**

por

Ernesto Benítez Rodríguez

Asesorado por

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar

Puebla Pue.  
Marzo 2021



**Título:** Experimentos de Stern-Gerlach consecutivos tratados cuánticamente

**Estudiante:** ERNESTO BENÍTEZ RODRÍGUEZ

COMITÉ

---

Dra. Marcela Maribel Méndez Otero  
Presidente

---

Dr. Maximino Luis Arroyo Carrasco  
Secretario

---

Dr. Martín Rodolfo Palomino Merino  
Vocal

---

Dr. José F. Récamier Angelini  
Vocal

---

Dr. Victor Manuel Velázquez Aguilar  
Vocal

---

Dr. Carlos Ignacio Robledo Sánchez  
Suplente

---

Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar  
Asesor



Agradezco a todos mis seres queridos por apoyarme en este gran proyecto y también a todas las personas que con su cariño y compañía me ayudaron a no rendirme en este largo camino.

Quiero agradecer particularmente al Dr. Luis Manuel Arévalo Aguilar por el gran apoyo que me ha brindado.

Me gustaría agradecer de igual forma a Elena pues sin su amor y apoyo no hubiera podido realizar este trabajo.

Finalmente me gustaría agradecer a Bebé, Galleta y Zeus por su cariño.



# Resumen

En esta tesis doctoral describimos por primera vez la evolución en el tiempo de los experimentos de Stern-Gerlach consecutivos y encontramos su estado final al resolver la ecuación de Schrödinger asociada al sistema. El estado final de los experimentos consecutivos presenta enredamiento entre sus grados de libertad, una propiedad cuántica de gran importancia cuya presencia en el sistema nos hizo decidir ahondar en el estudio de las correlaciones cuánticas presentes en el experimento. De esta manera, proponemos una descripción cuantitativa de las correlaciones en el experimento por medio del operador de Wigner y de esta forma evaluamos la existencia de correlaciones cuánticas y no localidad por medio de varias desigualdades de Bell, resultando en la violación de varias de estas desigualdades. Así, demostramos la existencia de no localidad y enredamiento en los experimentos de Stern-Gerlach consecutivos.

Esta tesis se divide de la siguiente forma, en la Introducción presentamos el panorama general de estudio de los experimentos consecutivos, además mostramos nuestras razones para realizar este trabajo. En el Capítulo 1 hablamos acerca de los antecedentes históricos del Experimento de Stern-Gerlach y de los experimentos consecutivos y su impacto en el estudio y desarrollo de la Física. En el Capítulo 2 desarrollamos nuestra descripción de la evolución en el tiempo de nuestro sistema, hacemos esta tarea tomando la ecuación de Schrödinger asociada a cada uno de los experimentos de Stern-Gerlach y tomando un estado inicial que es un producto entre los grados de libertad de espín y posición. Luego, en el Capítulo 3, desarrollamos la teoría del estudio de las correlaciones cuánticas en nuestro sistema hasta llegar a la verificación de varias desigualdades tipo Bell y además demostramos la existencia de steering en los experimentos consecutivos, otra importante propiedad cuántica. Finalmente, en la parte de Conclusiones Finales presentamos nuestros resultados de una forma condensada.



# Lista de Publicaciones

El trabajo realizado para obtener este grado ha producido dos artículos propios. El primero de estos es un repaso del estado del arte del concepto de perturbación en mecánica cuántica,

Benítez Rodríguez, E. y Arévalo Aguilar, L. M. “A survey of the concept of disturbance in quantum mechanics”. *Entropy* 21: 142 (2019). doi: 10.3390/e21020142.

En el segundo de estos artículos describimos de una forma completamente cuántica los experimentos de Stern-Gerlach consecutivos y además probamos la existencia de no localidad y steering en este sistema, este artículo se encuentra bajo revisión para ser aceptado,

Benítez Rodríguez, E., Piceno Martínez, E. y Arévalo Aguilar, L. M. “Single-particle steering and nonlocality: The consecutive Stern-Gerlach Experiments”. *To be published* (2020). arXiv: 2011.11797 (quant-ph).

Adicionalmente he participado como coautor de un tercer artículo acerca de la existencia de no localidad en el experimento de Stern Gerlach,

Piceno Martínez, A. E., Benítez Rodríguez, E., Mendoza Fierro, J. A., Méndez Otero, M. M. y Arévalo Aguilar, L. M. “Quantum Nonlocality and Quantum Correlations in the Stern-Gerlach Experiment”. *Entropy* 20 (4): 299 (2018). ISSN 1099-4300. doi:10.3390/e20040299. URL <http://www.mdpi.com/1099-4300/20/4/29>.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>V</b>
<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Lista de Publicaciones</b>	<b>IX</b>
<b>Índice general</b>	<b>XI</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Antecedentes Históricos</b>	<b>3</b>
1.1. El ESG: Antecedentes . . . . .	3
1.2. Los experimentos de Stern Gerlach Consecutivos: Antecedentes . . . . .	4
<b>2. Tratamiento Cuántico de los experimentos de Stern Gerlach consecutivos</b>	<b>9</b>
2.1. Tres Experimentos de Stern Gerlach Consecutivos . . . . .	9
2.2. Arreglo alternativo de ESGC . . . . .	14
2.3. Conclusiones . . . . .	17
<b>3. Correlaciones y Enredamiento de los experimentos consecutivos</b>	<b>19</b>
3.1. Correlaciones Cuánticas . . . . .	19
3.1.1. No localidad y realismo . . . . .	20
3.1.2. Ejemplo de una desigualdad de tipo Bell . . . . .	21
3.1.3. Localidad y contextualidad . . . . .	22
3.1.4. Steering . . . . .	23
3.1.5. Discusión . . . . .	25
3.2. Función de Correlación para los ESGC modificados . . . . .	25
3.2.1. Deducción de la función de correlación para los ESGC . . . . .	26
3.3. No localidad de los experimentos de Stern Gerlach consecutivos . . . . .	28
3.3.1. Resultados . . . . .	28
3.4. Metodología para el cálculo numérico de las funciones de Bell . . . . .	35
3.5. Relación entre correlaciones y enredamiento en los ESGC . . . . .	36
3.6. Distribución de probabilidad para los ESGCM . . . . .	38
3.7. Conclusiones . . . . .	40
<b>Conclusiones finales</b>	<b>43</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>45</b>



# Introducción

Las ciencias tienen diferentes objetos de estudio que, dependiendo de su naturaleza, poseen una diferencia en el enfoque de la descripción de los mismos. Una de las formas de describir y obtener información acerca de los objetos de estudio es la experimentación. Experimentar nos permite conocer y reconocer virtudes y propiedades de algo.

En particular, en las ciencias exactas, como lo es la Física, la experimentación nos lleva a demostrar y comprobar fenómenos o principios que hemos colocado como hipótesis o inclusive tomar el experimento como punto de partida para realizar una descripción cuantitativa de algún fenómeno. En el área de la Física existen experimentos muy importantes que han ayudado al entendimiento de la naturaleza y su comportamiento, no dejando atrás, por supuesto, la teoría que modela y verifica la descripción del fenómeno.

De manera muy particular podemos mencionar al Experimento de Stern-Gerlach (ESG) como uno de los más importantes en la historia de la ciencia, a causa de que el mundo microscópico pudo entenderse de una mejor manera gracias a su realización. Además, se debe mencionar aquí que a casi cien años de la realización del ESG sería una muy buena idea ponernos a reflexionar acerca de las implicaciones científicas y filosóficas que el ESG ha tenido a lo largo de la historia, una empresa que nosotros llevamos a cabo en este trabajo de tesis.

El ESG es importante para la Física, en particular para la mecánica cuántica, este experimento consiste en un rayo de partículas de plata que sale de un horno y luego pasa por una rendija que selecciona la dirección de las partículas, para luego atravesar un campo magnético inhomogéneo, finalmente una pantalla es colocada para poder observar lo que ha sucedido con el rayo luego de la interacción con el campo[1–8]. Un esquema del experimento se muestra en la Figura 1.

El ESG fue creado con la idea original de comprobar la cuantización espacial de los campos eléctrico y magnético descrita en la antigua teoría cuántica de Debye y Sommerfeld (1916) [8], teoría que fue una generalización de la de Bohr de 1913[8, 9]. Es gracias al ESG que el espín para partículas fue descubierto, además con este experimento se logró entender mejor el concepto de medición en mecánica cuántica.

A principios de los años 20 del siglo XX poco se sabía acerca de lo que hoy se conoce como espín o momento angular de espín, y por consiguiente, de la cuantización de éste. En el año 1922 [1, 2, 9–11], Otto Stern y Walther Gerlach publicaron su famoso trabajo acerca de la confirmación de la existencia de una nueva propiedad de la materia, que años después se conocería como espín, el cual valió el Premio Nobel de Física del año de 1943[9]. No sólo el ESG ha tenido un gran impacto en la mecánica cuántica y en las bases de ésta, sino también está íntimamente ligado al proceso de medición, que a lo largo de la historia de la humanidad ha sido un tema recurrente en la vida

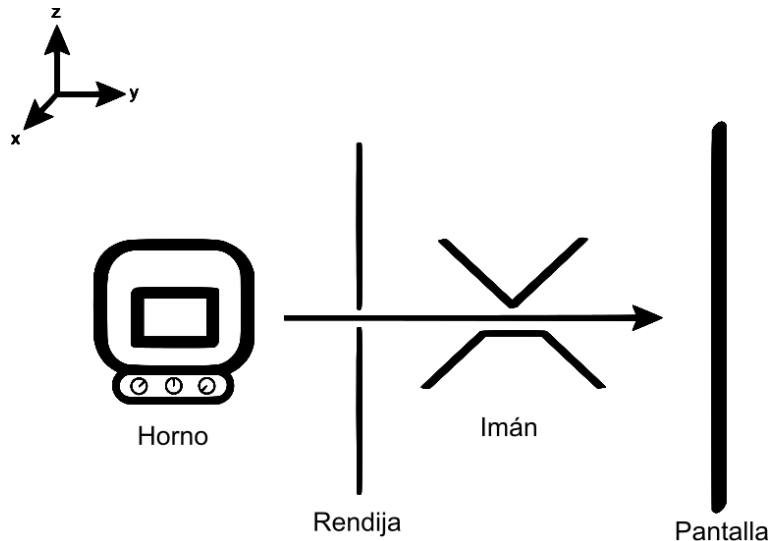


Figura 1: Esquema del ESG, se puede observar el rayo de partículas pasando a través del imán.

diaria y académica.

El ESG es considerado por muchos como un simple modelo de introducción a la teoría cuántica, que nos ayuda a entender mejor los conceptos de: grado de libertad, partícula, interacción y espín [6, 7]. Por esta razón deseamos hacer énfasis en que el ESG tiene en sí mismo un mecanismo más complicado comparado con el que generalmente se le asocia, por ejemplo, una forma de obtener estados enredados. De este modo, hemos estudiado previamente al ESG de una forma cuántica [12] y hemos visto que el estado obtenido al salir del imán es un estado enredado entre la posición y el espín. Nuestro tratamiento cuántico no fue el primero en realizarse pues existen algunos artículos donde se habla y se encuentra que el ESG es un sistema que crea enredamiento[13–17], pero nuestra descripción es la primera en donde se toma en cuenta por completo el Hamiltoniano del ESG y de esta forma se resuelve por primera vez la ecuación de Schrödinger del sistema[12, 18, 19].

La importancia del ESG ha dado lugar al estudio de diferentes configuraciones de imanes, por ejemplo, el arreglo de experimentos de Stern Gerlach consecutivos (ESGC)[6–9] ha sido estudiado desde hace tiempo, pero hasta la fecha no existe ningún tratamiento cuántico de los ESGC en la literatura, por lo que nos hemos dado a la tarea de describirlos usando como base nuestro estudio cuántico previo del ESG [12].

El tratamiento semiclásico de los ESGC es comunmente utilizado en libros como una forma de visualizar la no conmutatividad de los operadores de espín [4–7, 20, 21], pero se deja en segundo plano la dinámica del experimento, que es descrita cualitativamente.

Los ESGC forman un sistema más complejo que el ESG, pues en nuestro caso estudiamos tres imanes colocados uno tras otro y como es de esperar, el número de variables del sistema es alto. Por esta razón el enredamiento que podrían presentar los ESGC sería entre más grados de libertad (GDL), por lo que cuantificarlo no sería una tarea sencilla. Por otro lado, el número de GDL que presenta el sistema da lugar a correlaciones cuánticas [22] que, al igual que el enredamiento, son características de los ESGC dignas de estudio.

# Capítulo 1

## Antecedentes Históricos

### 1.1. El ESG: Antecedentes

El ESG fue realizado en el año de 1922 en Frankfurt am Main, Alemania por Otto Stern y Walther Gerlach [1, 2, 8–10](Ver Figura1.1). Este es un experimento fundamental para la Física debido a que mostró la existencia de una nueva propiedad de las partículas, el espín. El espín, o momento angular intrínseco, es un concepto físico que fue propuesto en el año de 1925 por Uhlenbeck, Goudsmit[11] e independientemente por Kronig[23] para explicar el comportamiento de las partículas presentes en el ESG, es decir, en presencia de un campo magnético inhomogéneo.

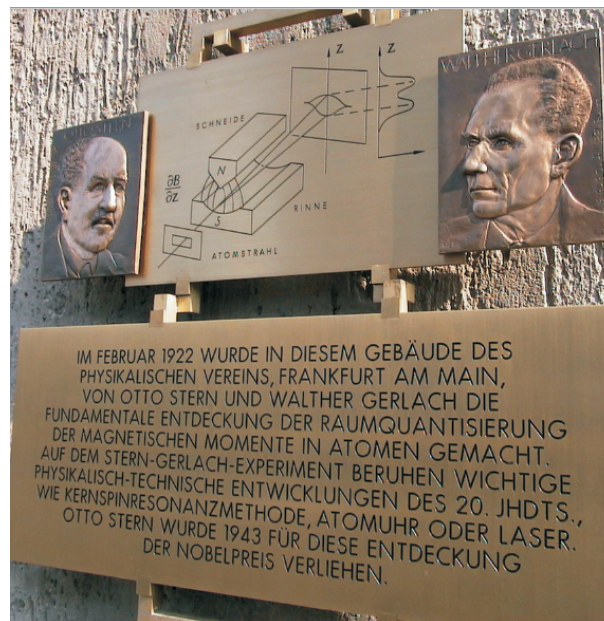


Figura 1.1: Placa que conmemora la realización del experimento por Otto Stern y Walther Gerlach en el 80 aniversario de su elaboración(2002). Esta placa se colocó en la universidad de Frankfurt, frente al mismo edificio donde el ESG fue efectuado [9].

## CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES HISTÓRICOS

### 1.2. LOS EXPERIMENTOS DE STERN GERLACH CONSECUTIVOS: ANTECEDENTES

---

El ESG fue concebido originalmente como una forma de probar la teoría cuántica ideada por Debye y Sommerfeld en 1916[8] que estaba basada en la teoría de Bohr de 1913 [8, 9], es decir en el modelo atómico de Bohr (Ver por ejemplo [21]).

El ESG es un buen ejemplo de lo que es un experimento correcto basado en una teoría incorrecta[8, 9], pues el concepto de espín que hizo evidente el experimento, no fue propuesto formalmente hasta tres años después por Uhlenbeck y Goudsmit [11, 24, 25] y propuesto informalmente en correspondencia por Kronig[23].

Uno de los principales antecedentes modernos que podemos encontrar en la literatura es el artículo de Platt de 1992 [13] en el que se muestra una forma diferente de describir el ESG. En este artículo se resuelve la dinámica del experimento utilizando el Hamiltoniano completo del sistema y resolviendo la ecuación de Schrödinger en espinores, aunque no obtiene las funciones de onda del sistema.

Muchos trabajos siguieron los pasos de Platt tratando de resolver la dinámica del experimento e incluso proponiendo formalmente al ESG como un sistema que naturalmente crea enredamiento [14]. Uno de los primeros trabajos en proponer una función de onda para el ESG fue el de Patil [26] de 1998 en el que utiliza el método de propagadores para resolver la dinámica del sistema con integrales de Green. Otro trabajo interesante en donde se propone una función de onda en espinores para el experimento es el de Díaz Bulnes y Oliveira [27] de 2001 en el que construyen la función de onda del ESG utilizando las funciones de Airy [28] para la partícula libre.

Existen otros trabajos posteriores en los que se concentra el esfuerzo de estudio en la resolución de la ecuación de Schrödinger con diferentes métodos para el ESG tales como el trabajo de Roston et. al. [16] de 2005 donde se resuelve una solución particular de la ecuación en espinores, además este es el primer artículo en el que se describe el enredamiento del ESG. En 2007 otro importante trabajo es el de Home et. al. [17] donde de igual manera resuelven un caso particular de la ecuación de Schrödinger bajo métodos desconocidos, adicionalmente estudian la superposición entre las funciones de onda asociadas a cada espino. Por otro lado, un trabajo digno de mención es el de Hsu et. al. de 2011 [29] donde se construyen propagadores para obtener el comportamiento en el tiempo del experimento. Finalmente, como último antecedente de la descripción cuántica del ESG, se encuentra nuestro trabajo acerca de la solución de la Ecuación de Schrödinger para el ESG del 2017 [12] utilizando el Método de Factorización del operador de evolución (MFOE).

### 1.2. Los experimentos de Stern Gerlach Consecutivos: Antecedentes

Los Experimentos de Stern Gerlach consecutivos (ESGC) fueron una extensión del original para poder estudiar más a fondo la cuantización espacial. Hasta dónde sabemos la primera persona en proponer un arreglo de experimentos de Stern Gerlach consecutivos fue Werner Heisenberg en 1927 [30], dónde propone colocar 2 imanes puestos de forma consecutiva.

Otro importante antecedente de los experimentos consecutivos se encuentra en un par de cartas de Albert Einstein, la primera sin fecha a Otto Stern, en la que propone una configuración de dos imanes colocados uno tras otro con polos opuestos, en la parte de arriba de la Figura(1.2) se puede ver el dibujo hecho por Einstein adjunto a la carta; la segunda carta fue enviada a Paul Ehrenfest en 1928, en la parte de abajo de la Figura(1.2) se observa otro dibujo por parte de Einstein enviado en esta segunda carta donde propone un esquema de experimentos consecutivos.

Años más tarde se comenzó a formular, de una manera más seria, la posibilidad y utilidad de estudiar sistemas utilizando configuraciones de imanes colocados uno tras otro[31]. No fue hasta 1932 que un trabajo experimental con imanes consecutivos fue realizado por Stern y Phipps[32]. Con este sistema es posible calcular el momento magnético de haces de partículas [32–34]. En este experimento se colocan varios imanes uno tras otro, un esquema del experimento se puede ver en la Figura(1.3)

**CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES HISTÓRICOS**  
**1.2. LOS EXPERIMENTOS DE STERN GERLACH CONSECUTIVOS: ANTECEDENTES**

---

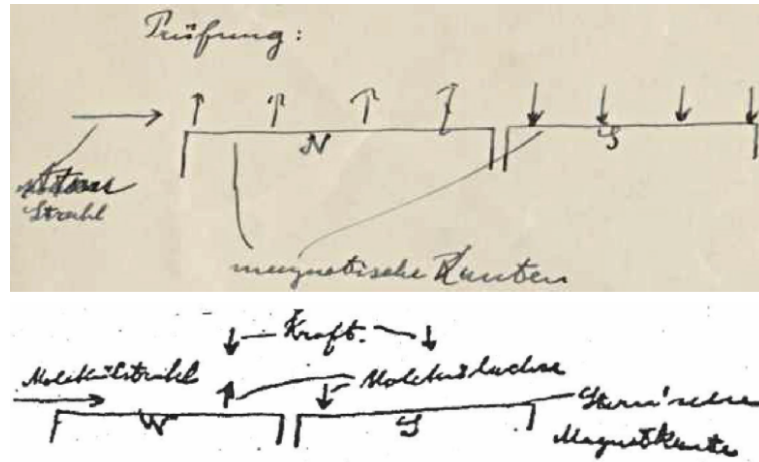


Figura 1.2: Dibujos de Albert Einstein. En la parte de arriba se encuentra el dibujo adjunto a la carta a Stern sin fecha(US-BL, BANC MSS 85/96 c; Is-AEA 71 120), en la parte de abajo está el dibujo contenido en la carta a Paul Eherenfest del 28 de Enero de 1928(US-BL, BANC MSS 85/96 c; Is-AEA 10-173). En ambos dibujos se pueden ver esquemas con dos imanes colocados consecutivamente con polos opuestos[8].

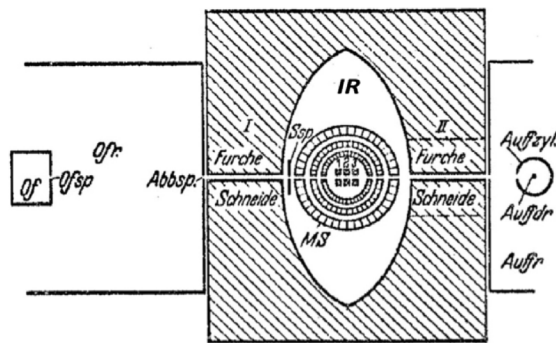


Figura 1.3: Esquema del experimento de Phipps-Stern[8, 32].

Este trabajo de Phipps y Stern tuvo ciertas repercusiones tales como los estudios de Güttinger[31] y Rosen[35] que buscaban mejorar la base teórica del experimento y también mejorarlo con el fin de poder medir más eficazmente los momentos magnéticos de diversas partículas. Tomando estos trabajos como base, Rabi logró mejorar el método para poder medir los momentos magnéticos en haces de partículas[36, 37]. El método de Rabi consiste en colocar tres imanes consecutivos, el primero con campo inhomogéneo, el segundo con un campo oscilatorio y el tercero con un campo inhomogéneo pero en dirección opuesta al primero. Este trabajo es considerado como la base de lo que es el método de Resonancia Magnética Nuclear(RMN) [33, 36–39]. Rabi tuvo una gran influencia por parte de Stern, debido a que estuvo en una estancia de trabajo con este en Hamburgo en 1927[40], aunque corta, dicha estancia tuvo un gran impacto en la vida científica de Rabi[8, 40].

Con la llegada del experimento de Rabi y sus muy valiosas aplicaciones tecnológicas, el ESG causó menos interés en ser estudiado pues el experimento de Rabi era mucho más eficiente en el cálculo de momentos magnéticos[33, 37]

Años más adelante, en 1964, Feynmann en sus conocidas *Lectures on Physics*[5] propuso y utilizó

## CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES HISTÓRICOS

### 1.2. LOS EXPERIMENTOS DE STERN GERLACH CONSECUTIVOS: ANTECEDENTES

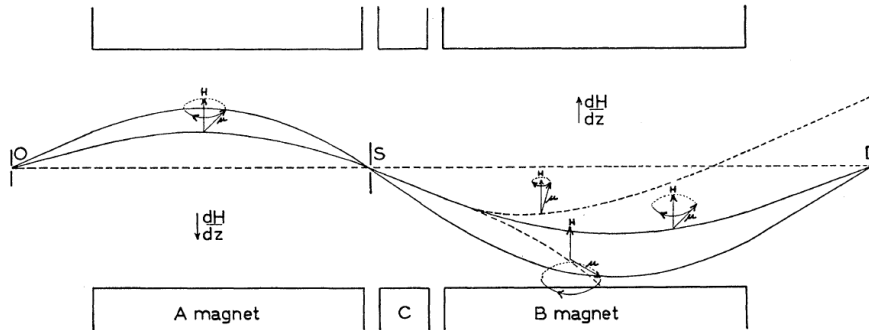


Figura 1.4: Esquema del experimento de Rabi et. al. [37]. Podemos observar que consiste de tres imanes, el primero, A, que produce un campo inhomogéneo hacia abajo, el segundo imán, B, que produce un campo en la dirección opuesta a A, en la parte de enmedio podemos ver una sección C donde existe un campo magnético homogéneo y un campo oscilante perpendicular al campo homogéneo y S una rendija que actúa como colimador.

diferentes arreglos de experimentos de Stern-Gerlach para mostrar como se deberían comportar las partículas con una cierta diversidad de espines. El estudio de Feynman es semiclásico y utiliza trayectorias clásicas para describir cuantitativamente los arreglos que propone. Véase Figura 1.5. Es clara la utilidad pedagógica de los experimentos de Stern Gerlach consecutivos de Feynman, pues incluso varias décadas después existen libros de Mecánica Cuántica que poseen diagramas inspirados en los de Feynman[6, 7, 41, 42]. Feynman, es tal vez el primero en estandarizar el estudio semiclásico del ESG y generalizarlo a experimentos consecutivos.

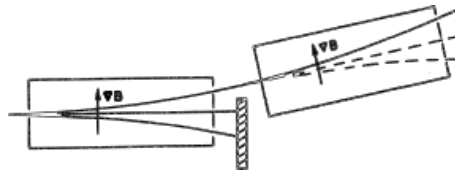


Figura 1.5: Esquema de dos aparatos de Stern Gerlach consecutivos para el caso de un rayo de partículas de espín 1. Podemos observar que dos de las trayectorias del primer experimento son bloqueadas mientras que la trayectoria superior atraviesa un segundo experimento. Imagen reproducida de [5].

Es de importancia, al igual que el libro de Feynman, el libro escrito por Julian Schwinger que fue publicado postmortem en el año 2001[43] tomando las notas que había reunido a lo largo de los años, pues es sabido que él tenía la intención de escribir un libro de mecánica cuántica desde los años 50, pero nunca encontró el momento adecuado para hacerlo [43]. En este libro se comienza el estudio de la mecánica cuántica con el proceso de medición y con el experimento de Stern Gerlach. Es relevante mencionar que Schwinger hace un estudio semiclásico de dos experimentos de Stern Gerlach consecutivos, manteniendo uno fijo mientras el otro rota sobre el eje horizontal de 0 a 180°. Véase Figura 1.6.

**CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES HISTÓRICOS**  
**1.2. LOS EXPERIMENTOS DE STERN GERLACH CONSECUTIVOS: ANTECEDENTES**

---

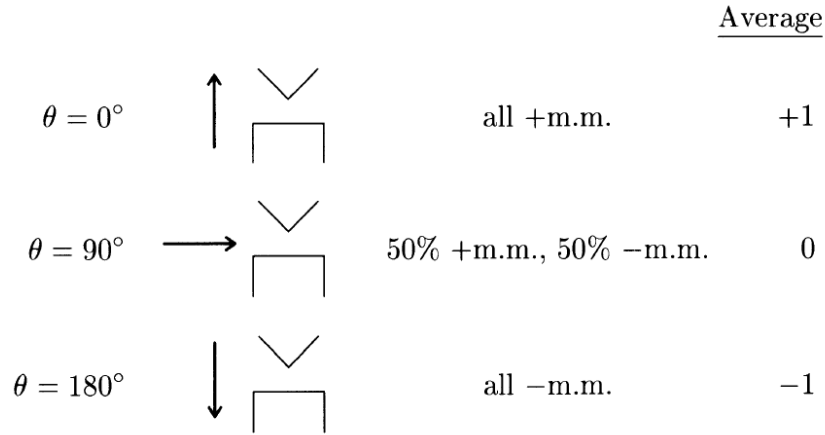


Figura 1.6: Experimentos de Stern Gerlach de Schwinger, m.m. es el momento magnético (magnetic moment). El promedio de momentos magnéticos es el promedio ponderado de dos posibles resultados, +1 y -1, dicho promedio es la fracción de un largo número de átomos en el rayo superior e inferior. Como en  $\theta = 90^\circ$ , existen momentos magnéticos positivos y negativos por igual, el promedio es cero. Este esquema es utilizado para estudiar la probabilidad de mediciones sucesivas, ya que el ESG es considerado como un aparato de medición. Imagen reproducida de [43].

Tal vez la más célebre de todas las descripciones acerca de experimentos de Stern Gerlach consecutivos es la propuesta por Sakurai en su renombrado libro de *Mécanica Cuántica*, "Modern Quantum Mechanics" de 1985 [6] que explica el comportamiento de tres configuraciones de experimentos consecutivos. Estas configuraciones aparecen en la Figura 1.7. Los tres arreglos de experimentos consecutivos toman en cuenta partículas de espín 1/2 como en el experimento original y tratan de describir el comportamiento cuantitativo de tres diferentes situaciones en las que se bloquea cierta trayectoria asociada a un espín en una dirección dada. Esta descripción es utilizada como una introducción al libro y de aquí se "deducen" más propiedades de la mecánica cuántica que se discuten a lo largo del libro. Es innegable la influencia que este libro ha tenido en la enseñanza de la física a nivel mundial y la idea de que el ESG está completamente descrito está arraigada en muchos círculos académicos [12]. Afortunadamente las descripciones cuánticas del ESG comenzaron a surgir con el paso de los años, pero a pesar de esto no encontramos una descripción cuántica de los experimentos consecutivos hasta esta, nuestra nueva propuesta.

CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES HISTÓRICOS

1.2. LOS EXPERIMENTOS DE STERN GERLACH CONSECUTIVOS: ANTECEDENTES

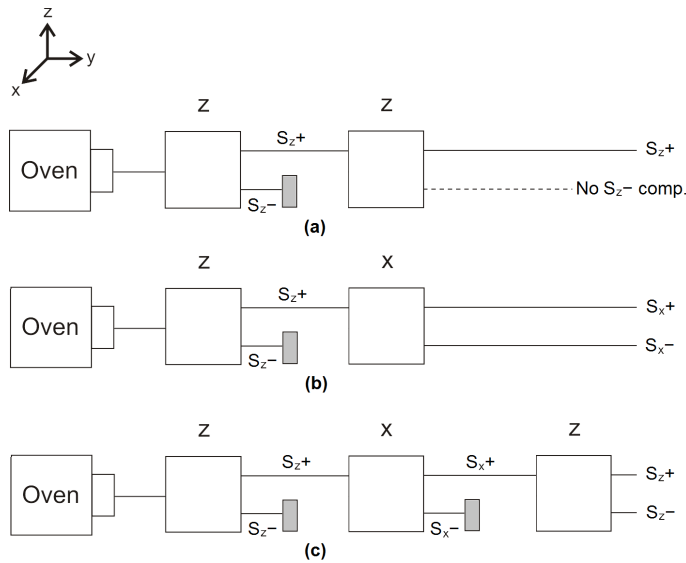


Figura 1.7: Tres configuraciones de ESG consecutivos, en la parte (a) se colocan dos imanes uno tras otro, cuya inhomogeneidad se encuentra en dirección  $z$ . Se tapa uno de los componentes del rayo, el cual se asocia al espín abajo en dirección  $z$ ; al salir del segundo imán solamente existe el rayo asociado con el espín arriba. En la parte (b) se puede ver un experimento similar al primero solamente que el segundo experimento se coloca en dirección  $x$ , al igual que el primero, se tapa la componente de espín hacia abajo en  $z$ , luego se observa como salen dos trayectorias de espín del experimento en  $x$ , no importando que la componente abajo en  $z$  haya sido bloqueada. Finalmente, en (c) un tercer experimento en dirección  $z$  se agrega a la configuración (b), se observa que de este último salen nuevamente dos trayectorias de espín en  $z$  a pesar de que la componente de espín abajo fue bloqueada anteriormente. Por lo que se deduce que no podemos conocer  $S_x$  y  $S_z$  simultáneamente, es decir que  $[S_x, S_z] \neq 0$ .

## Capítulo 2

# Tratamiento Cuántico de los experimentos de Stern Gerlach consecutivos

En este capítulo describiremos la dinámica de los ESGC utilizando la ecuación de Schrödinger y resolviendola utilizando el MFOE, un método que hemos utilizado previamente en el estudio del experimento de Stern Gerlach unitario[12], y que además ha sido usado anteriormente para mostrar el comportamiento en el tiempo del oscilador armónico cuántico entre otros sistemas [44–46]. Para dar comienzo a nuestra descripción de los ESGC primero establezcamos un diagrama del sistema.

Como se puede observar en el diagrama (Figura 2.1), nuestro sistema está conformado por tres experimentos de Stern Gerlach colocados consecutivamente. El primero de ellos con el campo magnético alineado en la dirección  $z$ , el segundo en dirección  $x$  y el tercero, igual que el primero, en dirección  $z$ . Como podemos apreciar, cada uno de estos ESG, está asociado a un hamiltoniano  $\hat{H}_i, i = 1, 2, 3$  y por lo tanto un operador de evolución,  $\hat{U}_i, i = 1, 2, 3$ . Utilizamos el MFOE para cada uno de los aparatos, de una forma similar a la realizada para el ESG unitario[12].

### 2.1. Tres Experimentos de Stern Gerlach Consecutivos

Consideremos el sistema que se encuentra en la Figura(2.1), que consta de tres experimentos de Stern Gerlach colocados consecutivamente. El primero y el último están orientados en la dirección

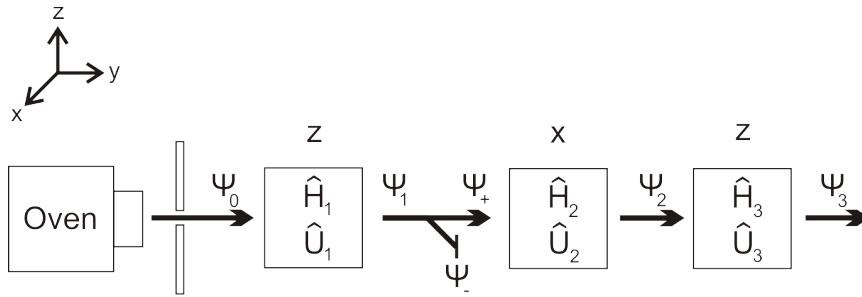


Figura 2.1: Arreglo de ESGC considerado. Después del primer ESG un estado superpuesto con dos posibles resultados es producido,  $\psi_1$ , del cual bloqueamos uno de estos componentes, seleccionando el estado  $\psi_+$  para entrar al segundo ESG.

## CAPÍTULO 2. TRATAMIENTO CUÁNTICO DE LOS EXPERIMENTOS DE STERN GERLACH CONSECUTIVOS

### 2.1. TRES EXPERIMENTOS DE STERN GERLACH CONSECUTIVOS

$z$ , donde el campo inhomogéneo está directamente en la dirección  $z$  y, por lo tanto, actúa sobre la componente  $z$  del espín, y el segundo está orientado en dirección  $x$ , actuando sobre la componente  $x$  del espín. Después del primer ESG seleccionamos solamente la componente de espín arriba en  $z$  del rayo para que entre al segundo ESG, bloqueando o colocando el segundo aparato de tal forma que esta es la única componente que puede entrar en la región del campo magnético inhomogéneo. Esto efectivamente destruye la superposición de los eigenestados de espín  $z$  [47]. Calcularemos las siguientes evoluciones en cada ESG aplicando un operador de evolución factorizado sobre un estado inicial con la forma de una superposición de espín, como se hizo en [12].

Para obtener la evolución completa de nuestro sistema, primero tomemos un rayo de partículas moviéndose en dirección  $y$  y hacemos que el rayo pase a través del primer ESG una vez que fue colimado, este primer experimento tiene un campo magnético inhomogéneo  $\mathbf{B}_1 = -bx\hat{\mathbf{i}} + (B_1 + b_1z)\hat{\mathbf{k}}$ . La componente  $x$  de este campo magnético es usualmente considerada despreciable debido a que el momento magnético precesa rápidamente alrededor de esta dirección del campo [15–17]. De esta manera el Hamiltoniano efectivo de este ESG está dado por

$$\hat{H}_1 = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \mu_c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}_1), \quad (2.1)$$

donde  $\mu_c = g\hbar/(4m)$ , con  $g$  el radio giromagnético,  $m$  la masa del electrón y  $e$  la carga eléctrica unitaria, y  $\boldsymbol{\sigma}$  es el vector de las matrices de Pauli.

Se encuentra que el sistema que sale de este ESG es un estado enredado entre la posición en  $z$  y el espín en  $z$ . Luego, seleccionamos la componente del rayo con espín positivo en  $z$ , y la hacemos pasar a través del segundo ESG. En esta ocasión usamos un ESG orientado en la dirección  $x$ , y después de consideraciones similares tenemos que su hamiltoniano efectivo está dado por

$$\hat{H}_2 = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \mu_c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}_2), \quad (2.2)$$

con el campo magnético inhomogéneo  $\mathbf{B}_2 = (B_2 + b_2x)\hat{\mathbf{i}}$ . Finalmente, hacemos pasar al estado saliente a través de un ESG orientado nuevamente en la dirección  $z$ . Para este ESG,

$$\hat{H}_3 = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \mu_c(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}_3), \quad (2.3)$$

con  $\mathbf{B}_3 = (B_3 + b_3z)\hat{\mathbf{k}}$ . Ahora aplicaremos las evoluciones dadas por estos tres hamiltonianos consecutivamente al estado inicial.

Queremos considerar un estado inicial completamente cuántico. Como fue realizado en [12], utilizamos un producto entre los GDL internos y externos, es decir, el espín y la posición. Para el espín consideramos un estado general superpuesto,  $\alpha|\uparrow_z\rangle + \beta|\downarrow_z\rangle$ , con  $\alpha$  y  $\beta$  amplitudes de probabilidad para cada estado, y para la posición tomamos un paquete de ondas Gaussiano normalizado,

$$\psi_0 = \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{\frac{3}{4}}}\exp\left(-\frac{r^2}{4\sigma_0^2} + \mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\right), \quad (2.4)$$

donde  $\sigma_0$  es el ancho inicial del paquete de ondas,  $\mathbf{k}$  es el vector de onda y  $\mathbf{r}$  la posición. En este caso tenemos que el rayo viaja en la dirección  $y$  positiva, entonces el estado inicial es

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{\frac{3}{4}}}\exp\left(-\frac{r^2}{4\sigma_0^2} + \mathbf{i}k_y y\right)(\alpha|\uparrow_z\rangle + \beta|\downarrow_z\rangle). \quad (2.5)$$

Cuando pasa a través del primer ESG orientado en la dirección  $z$ , tenemos que el estado evoluciona por medio del operador de evolución, cuya factorización está determinada por el hamiltoniano

**CAPÍTULO 2. TRATAMIENTO CUÁNTICO DE LOS EXPERIMENTOS DE STERN GERLACH CONSECUTIVOS**

**2.1. TRES EXPERIMENTOS DE STERN GERLACH CONSECUTIVOS**

en la Ec.(2.1) [12, 46]:

$$\begin{aligned}\hat{U}_1(t) &= \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\hat{H}_1\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{6}\kappa\right) \exp\left[-\frac{it}{2m\hbar}(p_x^2 + p_y^2)\right] \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{it\mu_c}{\hbar}(B_1 + b_1z)\sigma_z\right] \exp\left(\frac{it^2\mu_cb}{2m\hbar}p_z\sigma_z\right) \exp\left(-\frac{it}{2m\hbar}p_z^2\right),\end{aligned}\tag{2.6}$$

donde  $\kappa = (it^2\mu_c^2b^2)/(m\hbar)$ , para detalles sobre la factorización vea [12].

Si el rayo sale del ESG al tiempo  $t = \tau_1$ , el estado emergente es

$$\begin{aligned}|\psi_1(\tau_1)\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{6}\kappa_1\right) \left[\frac{\sigma_0}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{3}{2}} \left(\sigma_0^2 + \frac{i\tau_1\hbar}{2m}\right)^{-\frac{3}{2}} \exp(-\sigma_0^2k_y^2) \exp\left[-\frac{x^2 + (y - 2i\sigma_0^2k_y)^2}{4(\sigma_0^2 + \frac{i\tau_1\hbar}{2m})}\right] \\ &\quad \times \left\{ \exp\left[-\frac{i\tau_1\mu_c}{\hbar}(B_1 + b_1z)\right] \exp\left[-\left(z + \frac{\tau_1^2\mu_cb_1}{2m}\right)^2 \frac{1}{4(\sigma_0^2 + \frac{i\tau_1\hbar}{2m})}\right] \alpha|\uparrow_z\rangle \right. \\ &\quad \left. + \exp\left[\frac{i\tau_1\mu_c}{\hbar}(B_1 + b_1z)\right] \exp\left[-\left(z - \frac{\tau_1^2\mu_cb_1}{2m}\right)^2 \frac{1}{4(\sigma_0^2 + \frac{i\tau_1\hbar}{2m})}\right] \beta|\downarrow_z\rangle \right\},\end{aligned}\tag{2.7}$$

aquí  $\kappa_1 = (i\tau_1^2\mu_c^2b^2)/(m\hbar)$ . De aquí es fácil ver que los GDL de la posición en  $z$  y el espín en  $z$  están enredados. Cuando medimos (por ejemplo, usando una pantalla) un valor de la posición en  $z$  correspondiente a  $z + \tau_1^2\mu_cb_1/(2m)$  ( $z - \tau_1^2\mu_cb_1/(2m)$ ) tenemos que el estado de espín es  $|\uparrow_z\rangle$  ( $|\downarrow_z\rangle$ ) [48, 49]. Este resultado nos llevaría a dos puntos en la pantalla, correspondiendo a cada valor de  $z$ . Para el estado resultante de la evolución en este ESG unitario veasé la discusión en [12].

Ahora, seleccionamos solamente la parte con espín arriba en  $z$ , dada por

$$\begin{aligned}|\psi_+(\tau_1)\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{6}\kappa_1\right) \left[\frac{\sigma_0}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{3}{2}} \left(\sigma_0^2 + \frac{i\tau_1\hbar}{2m}\right)^{-\frac{3}{2}} \exp(-\sigma_0^2k_y^2) \exp\left[-\frac{x^2 + (y - 2i\sigma_0^2k_y)^2}{4(\sigma_0^2 + \frac{i\tau_1\hbar}{2m})}\right] \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{i\tau_1\mu_c}{\hbar}(B_1 + b_1z)\right] \exp\left[-\left(z + \frac{\tau_1^2\mu_cb_1}{2m}\right)^2 \frac{1}{4(\sigma_0^2 + \frac{i\tau_1\hbar}{2m})}\right] |\uparrow_z\rangle,\end{aligned}\tag{2.8}$$

porque  $\alpha \rightarrow 1$ , y hacemos pasarlo a través del segundo ESG, que está orientado en la dirección  $x$ . Podemos factorizar el operador de evolución correspondiente a  $\hat{H}_2$  de la Ec.(2.2), similarmente a lo hecho en [12, 46]. Luego, el operador que hace evolucionar al estado es ahora dado por

$$\begin{aligned}\hat{U}_2(t) &= \exp\left(-\frac{1}{6}\kappa\right) \exp\left[-\frac{it}{2m\hbar}(p_y^2 + p_z^2)\right] \exp\left[-\frac{it\mu_c}{\hbar}(B_2 + b_2x)\sigma_x\right] \\ &\quad \times \exp\left(\frac{it^2\mu_cb_2}{2m\hbar}p_x\sigma_x\right) \exp\left(-\frac{it}{2m\hbar}p_x^2\right).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Con el fin de aplicar este operador al estado en la Ec.(2.8), necesitamos expresar los eigenestados de espín en  $z$  como una superposición de eigenestados de espín en la dirección  $x$ . Esto se hace de esta forma pues  $\sigma_x$  y  $\sigma_z$  no conmutan, y por lo tanto no tienen los mismos eigenvectores, permitiéndonos escribir a los eigenestados de uno como una descomposición espectral en la base de eigenestados del otro. Tenemos  $|\uparrow_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_x\rangle + |\downarrow_x\rangle)$ . Así el estado saliente de este ESG después del tiempo

**CAPÍTULO 2. TRATAMIENTO CUÁNTICO DE LOS EXPERIMENTOS DE  
STERN GERLACH CONSECUTIVOS**  
2.1. TRES EXPERIMENTOS DE STERN GERLACH CONSECUTIVOS

---

$\tau_2$  (en este punto tenemos  $T_2 = \tau_1 + \tau_2$ , el tiempo transcurrido total) es

$$\begin{aligned}
|\psi_2(T_2)\rangle &= \hat{U}_x(\tau_2)|\psi_+(\tau_1)\rangle \\
&= A_2 \exp\left[-\frac{y_d^2 + z_d^2}{4\left(\sigma_0^2 + \frac{iT_2\hbar}{2m}\right)}\right] \\
&\times \left\{ \exp\left[-\frac{i\tau_2\mu_c}{\hbar}(B_2 + b_2x)\right] \exp\left[-\left(x + \frac{\tau_2^2\mu_cb_2}{2m}\right)^2 \frac{1}{4\left(\sigma_0^2 + \frac{iT_2\hbar}{2m}\right)}\right] |\uparrow_x\rangle \right. \\
&+ \left. \exp\left[\frac{i\tau_2\mu_c}{\hbar}(B_2 + b_2x)\right] \exp\left[-\left(x - \frac{\tau_2^2\mu_cb_2}{2m}\right)^2 \frac{1}{4\left(\sigma_0^2 + \frac{iT_2\hbar}{2m}\right)}\right] |\downarrow_x\rangle \right\}, \tag{2.10}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\sigma_0}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{1}{6}(\kappa_1 + \kappa_2)\right] \exp(-\sigma_0^2 k_y^2) \exp\left(-\frac{i\tau_1\mu_c}{\hbar}B_1\right) \\
&\times \exp\left\{ \frac{1}{4\left(\sigma_0^2 + \frac{i\tau_1\hbar}{2m}\right)} \left[ \frac{\tau_1^2\mu_cb_1}{2m} + \frac{2i\tau_1\mu_cb_1}{\hbar} \left(\sigma_0^2 + \frac{i\tau_1\hbar}{2m}\right) \right]^2 \right\} \\
&\times \exp\left[ -\frac{1}{4\left(\sigma_0^2 + \frac{i\tau_1\hbar}{2m}\right)} \left(\frac{\tau_1^2\mu_cb_1}{2m}\right)^2 \right] \left[ \sigma_0^2 + \frac{i(\tau_1 + \tau_2)\hbar}{2m} \right]^{-\frac{3}{2}}, \tag{2.11}
\end{aligned}$$

$\kappa_2 = (i\tau_2^2\mu_c^2b^2)/(m\hbar)$ , y

$$y_d = y - 2i\sigma_0^2 k_y \tag{2.12}$$

$$z_d = z + \left[ \frac{\tau_1^2\mu_cb_1}{2m} + \frac{i\tau_1\mu_cb_1}{\hbar} 2 \left(\sigma_0^2 + \frac{i\tau_1\hbar}{2m}\right) \right]. \tag{2.13}$$

Como era esperado, después de atravesar el ESG en la dirección  $x$  el rayo tiene sus GDL de la posición  $x$  y el espín en  $x$  enredados. Correspondientemente, cuando colocamos una pantalla deberíamos tener dos puntos alrededor de donde los átomos se concentran, ahora separados en la dirección  $x$ . En este caso ambos puntos que aparecen en la pantalla deberían tener una posición en  $z$  dada por la traslación  $z_d$ , esto es porque nosotros seleccionamos solamente la componente del estado con  $z_d$  y espín arriba para que entre al segundo ESG.

Finalmente, el rayo atraviesa un ESG en la dirección  $z$  otra vez, esta ocasión con la evolución determinada por el hamiltoniano  $H_3$ . Ahora el operador

$$\begin{aligned}
\hat{U}_3(t) &= \exp\left(-\frac{1}{6}\kappa\right) \exp\left[-\frac{it}{2m\hbar}(p_x^2 + p_y^2)\right] \\
&\times \exp\left[-\frac{it\mu_c}{\hbar}(B_3 + b_3z)\sigma_z\right] \exp\left(\frac{it^2\mu_cb}{2m\hbar}p_z\sigma_z\right) \exp\left(-\frac{it}{2m\hbar}p_z^2\right), \tag{2.14}
\end{aligned}$$

es el operador de evolución que hace que el estado evolucione durante un tiempo  $\tau_3$ . El tiempo total de evolución hasta este punto es  $T_3 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ . Como antes, necesitamos escribir los eigenestados de espín en  $x$  en términos de los de espín en  $z$ , esto está dado por las siguientes expresiones:  $|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow_z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow_z\rangle$  y  $|\downarrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow_z\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow_z\rangle$ . Con esto, aplicando la Ec.(2.14) al estado de la Ec.(2.10), tenemos que el estado saliente de este último ESG está dado por

**CAPÍTULO 2. TRATAMIENTO CUÁNTICO DE LOS EXPERIMENTOS DE  
STERN GERLACH CONSECUTIVOS**  
2.1. TRES EXPERIMENTOS DE STERN GERLACH CONSECUTIVOS

---

$$\begin{aligned}
|\psi_3(T_3)\rangle = & A_3 \exp \left[ -\frac{y_d^2}{4(\sigma_0^2 + iT_3\hbar/(2m))} \right] \left( \exp \left[ -\frac{i\tau_3\mu_c}{\hbar}(B_3 + b_3z) \right] \right. \\
& \times \exp \left[ -\frac{\left(z_d + \frac{\tau_3^2\mu_cb_3}{2m}\right)^2}{4(\sigma_0^2 + \frac{iT_3\hbar}{2m})} \right] \left\{ \exp \left( \frac{-i\tau_2\mu_c B_2}{\hbar} \right) \exp \left[ -\frac{x_{d1}^2}{4(\sigma_0^2 + \frac{i\hbar T_3}{2m})} \right] \right. \\
& + \exp \left( \frac{i\tau_2\mu_c B_2}{\hbar} \right) \exp \left[ -\frac{x_{d2}^2}{4(\sigma_0^2 + \frac{i\hbar T_3}{2m})} \right] \left. \right\} |\uparrow_z\rangle \\
& + \exp \left[ \frac{i\tau_3\mu_c}{\hbar}(B_3 + b_3z) \right] \exp \left[ -\frac{\left(z_d - \frac{\tau_3^2\mu_cb_3}{2m}\right)^2}{4(\sigma_0^2 + iT_3\hbar/2m)} \right] \\
& \times \left\{ \exp \left( -\frac{i\tau_2\mu_c B_2}{\hbar} \right) \exp \left[ -\frac{x_{d1}^2}{4(\sigma_0^2 + \frac{i\hbar T_3}{2m})} \right] \right. \\
& \left. - \exp \left( \frac{i\tau_2\mu_c B_2}{\hbar} \right) \exp \left[ -\frac{x_{d2}^2}{4(\sigma_0^2 + \frac{i\hbar T_3}{2m})} \right] \right\} |\downarrow_z\rangle, \tag{2.15}
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
A_3 = & \frac{1}{2} \exp \left[ -\frac{1}{6}(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) \right] \left[ \frac{\sigma_0}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{3}{2}} \left( \sigma_0^2 + \frac{iT_3\hbar}{2m} \right)^{-\frac{3}{2}} \exp(-\sigma_0^2 k_y^2) \exp \left( -\frac{i\tau_1\mu_c}{\hbar} B_1 \right) \\
& \times \exp \left[ -\frac{1}{4(\sigma_0^2 + \frac{i\tau_1\hbar}{2m})} \left( \frac{\tau_1^2\mu_cb_1}{2m} \right)^2 \right] \exp \left[ -\frac{1}{4(\sigma_0^2 + \frac{iT_2\hbar}{2m})} \left( \frac{\tau_2^2\mu_cb_2}{2m} \right)^2 \right] \\
& \times \exp \left\{ \frac{1}{4(\sigma_0^2 + \frac{i\tau_1\hbar}{2m})} \left[ \frac{\tau_1^2\mu_cb_1}{2m} + \frac{2i\tau_1\mu_cb_1}{\hbar} \left( \sigma_0^2 + \frac{i\tau_1\hbar}{2m} \right) \right]^2 \right\} \\
& \times \exp \left\{ \frac{1}{4(\sigma_0^2 + \frac{iT_2\hbar}{2m})} \left[ \frac{\tau_2^2\mu_cb_2}{2m} - \frac{2i\tau_2\mu_cb_2}{\hbar} \left( \sigma_0^2 + \frac{iT_2\hbar}{2m} \right) \right]^2 \right\}, \tag{2.16}
\end{aligned}$$

$\kappa_3 = (i\tau_3^2\mu_c^2 b^2)/(2m)$ , y

$$x_{d1,d2} = x \pm \left[ \frac{\tau_2^2\mu_cb_2}{2m} + \frac{i\tau_2\mu_cb_2}{\hbar} 2 \left( \sigma_0^2 + \frac{i\hbar T_2}{2m} \right) \right]. \tag{2.17}$$

La Ec.(2.15) nos da el estado final después de la evolución completa a través de este arreglo de ESG consecutivos.

Al pasar a través del último ESG ha sido creado enredamiento híbrido entre los GDL de espín y la posición en  $z$ , manteniéndose el enredamiento con la posición en  $x$  presente en el estado de la Ec.(2.10). De este modo tenemos que el estado de la Ec.(2.15) presenta enredamiento híbrido entre los GDL de las dos posiciones, en dirección  $x$  y  $z$ , y el GDL de espín. Notemos que el valor de la posición en  $z$  de cada componente de espín ha sufrido más cambios después de pasar a través del segundo ESG orientado en dirección  $z$ . Esto crearía, como se espera, cuatro puntos en una pantalla colocada después de este arreglo por la concentración de las partículas incidentes, dependiendo de los valores posibles de las coordenadas  $x$  y  $z$ , que aparecen en la Ec.(2.15). Véase Sección 3.6 más adelante para observar este efecto.

## 2.2. Arreglo alternativo de ESGC

Con el fin de estudiar con mayor facilidad las propiedades cuánticas de los experimentos consecutivos, proponemos un arreglo alternativo que nos hará tener menos constantes y por tal motivo facilitará los cálculos que nos interesan para poder estudiar las correlaciones presentes en el sistema.

La configuración de experimentos consecutivos que hemos expuesto en la anterior sección es general y por lo tanto la cantidad de constantes implicadas en la evolución del sistema es grande, por lo que ahora nos fijaremos en un sistema reducido de experimentos consecutivos que hasta cierto punto presenta cualidades similares al que ya hemos descrito.

Como podemos observar en la Figura(2.2), esta configuración de experimentos consta de dos experimentos principales, que corresponden directamente a los dos últimos de nuestra primera configuración, Figura(2.1).

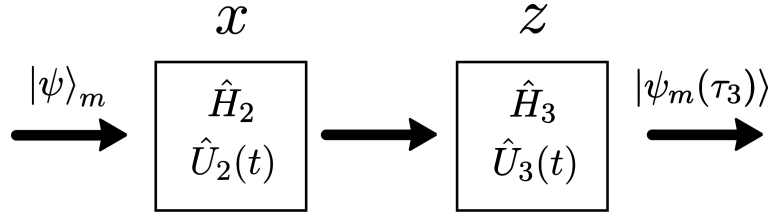


Figura 2.2: Esquema de los experimentos consecutivos modificados.

El estado entrante al ESG en dirección  $x$  es un estado previamente seleccionado (preparado) por otro ESG y cuya principal característica es que es un estado con espín hacia arriba que podemos escribir como sigue[12]:

$$|\psi\rangle_m = \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{\frac{3}{4}}} \exp\left(-\frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{4\sigma_0^2} + ik_y y\right) |\uparrow_z\rangle. \quad (2.18)$$

La evolución del experimento de Stern Gerlach ya ha sido previamente descrita en [12] y por lo tanto es sabido que si nuestro estado inicial es un paquete de ondas gaussiano multiplicado por el GDL de espín, este paquete de ondas se ensancha al pasar del tiempo y se traslada en dirección  $z$  dependiendo de la componente del espín gracias a la interacción con el campo inhomogéneo, como se puede apreciar en la Ec. (2.7). Al escribir la Ec. (2.18) estamos considerando un paquete de ondas general con un ancho final de  $\sigma_0$  y tomando las posición  $z$  de tal estado como nuestro origen y no el directamente producido por la interacción de un ESG como se presenta en la Ec. (2.7). De esta forma, al realizar la consideración de la Ec. (2.18) tenemos un estado simplificado que, por lo tanto, contiene menos constantes. La Ec. (2.18) es la equivalente a la Ec. (2.8).

**CAPÍTULO 2. TRATAMIENTO CUÁNTICO DE LOS EXPERIMENTOS DE  
STERN GERLACH CONSECUTIVOS  
2.2. ARREGLO ALTERNATIVO DE ESGC**

---

Ahora vamos a estudiar la evolución de los ESGC modificados usando el arreglo que aparece en la Figura(2.2). Tenemos que el operador de evolución asociado al ESG en dirección  $x$  es (Ec.(2.9), una vez que está factorizado)

$$\begin{aligned} \hat{U}_2(t) = & \exp\left(-\frac{1}{6}\kappa\right) \exp\left[-\frac{it}{2m\hbar}(p_y^2 + p_z^2)\right] \exp\left[-\frac{it\mu_c}{\hbar}(B_2 + b_2x)\sigma_x\right] \\ & \times \exp\left(\frac{it^2\mu_cb_2}{2m\hbar}p_x\sigma_x\right) \exp\left(-\frac{it}{2m\hbar}p_x^2\right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Al aplicar  $\hat{U}_2(t)$  a  $|\psi\rangle_m$  obtenemos que,

$$\begin{aligned} \hat{U}_2(t)|\psi\rangle_m &= |\psi_m(\tau_2)\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{1}{6}\kappa_2\right) \sigma_0^{\frac{3}{2}} \left(\sigma_0^2 + \frac{i\hbar\tau_2}{2m}\right)^{-\frac{3}{4}} \left\{ \left[ (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left(\sigma_0^2 + \frac{i\hbar\tau_2}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}^3 \\ &\times \exp(-k_y^2\sigma_0^2) \exp\left\{ \frac{-[(y - 2ik_y\sigma_0^2)^2 + z^2]}{4(\sigma_0^2 + \frac{i\hbar\tau_2}{2m})} \right\} \\ &\times \left\{ \exp\left[-\frac{i\tau_2\mu_c}{\hbar}(B_2 + b_2x)\right] \exp\left[\frac{-(x + \frac{\tau_2^2\mu_cb_2}{2m})^2}{4(\sigma_0^2 + \frac{i\hbar\tau_2}{2m})}\right] |\uparrow_x\rangle \right. \\ &\left. + \exp\left[\frac{i\tau_2\mu_c}{\hbar}(B_2 + b_2x)\right] \exp\left[\frac{-(x - \frac{\tau_2^2\mu_cb_2}{2m})^2}{4(\sigma_0^2 + \frac{i\hbar\tau_2}{2m})}\right] |\downarrow_x\rangle \right\}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde  $|\uparrow_z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_x\rangle + |\downarrow_x\rangle)$ . Ahora, siguiendo con nuestra descripción, apliquemos el operador de evolución asociado al último ESG, que se encuentra en dirección  $z$ , al estado de la Ec.(2.20). Este operador está dado por(Ec.(2.14), una vez que está factorizado)

$$\begin{aligned} \hat{U}_3(t) = & \exp\left(-\frac{1}{6}\kappa\right) \exp\left[-\frac{it}{2m\hbar}(p_x^2 + p_y^2)\right] \\ & \times \exp\left[-\frac{it\mu_c}{\hbar}(B_3 + b_3z)\sigma_z\right] \exp\left(\frac{it^2\mu_cb}{2m\hbar}p_z\sigma_z\right) \exp\left(-\frac{it}{2m\hbar}p_z^2\right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

**CAPÍTULO 2. TRATAMIENTO CUÁNTICO DE LOS EXPERIMENTOS DE  
STERN GERLACH CONSECUTIVOS  
2.2. ARREGLO ALTERNATIVO DE ESGC**

---

Entonces obtenemos

$$\begin{aligned}
\hat{U}_3(t)|\psi_m(\tau_2)\rangle &= |\psi_m(\tau_3)\rangle \\
&= A'_3 \times \exp \left\{ \frac{-(y - 2ik_y\sigma_0^2)^2}{4 \left[ \sigma_0^2 + \frac{i\hbar(\tau_2+\tau_3)}{2m} \right]} \right\} \\
&\times \left( \exp \left[ -\frac{i\tau_3\mu_c}{\hbar} (B_3 + b_3z) \right] \exp \left\{ \frac{-\left( z + \frac{\tau_3^2\mu_cb_3}{2m} \right)^2}{4 \left[ \sigma_0^2 + \frac{i\hbar(\tau_2+\tau_3)}{2m} \right]} \right\} \right. \\
&\times \left( \exp \left\{ -\frac{i\tau_2\mu_c}{\hbar} B_2 \right\} \exp \left\{ \frac{-\left[ x + \frac{\tau_2^2\mu_cb_2}{2m} + 2i\frac{\tau_2\mu_cb_2}{\hbar} \left( \sigma_0^2 + \frac{i\hbar\tau_2}{2m} \right) \right]^2}{4 \left[ \sigma_0^2 + \frac{i\hbar(\tau_2+\tau_3)}{2m} \right]} \right\} \right. \\
&\quad \left. \left. + \exp \left\{ \frac{i\tau_2\mu_c}{\hbar} B_2 \right\} \exp \left\{ \frac{-\left[ x - \frac{\tau_2^2\mu_cb_2}{2m} - 2i\frac{\tau_2\mu_cb_2}{\hbar} \left( \sigma_0^2 + \frac{i\hbar\tau_2}{2m} \right) \right]^2}{4 \left[ \sigma_0^2 + \frac{i\hbar(\tau_2+\tau_3)}{2m} \right]} \right\} \right) \right) |\uparrow_z\rangle \quad (2.22) \\
&+ \exp \left[ \frac{i\tau_3\mu_c}{\hbar} (B_3 + b_3z) \right] \exp \left\{ \frac{-\left( z - \frac{\tau_3^2\mu_cb_3}{2m} \right)^2}{4 \left[ \sigma_0^2 + \frac{i\hbar(\tau_2+\tau_3)}{2m} \right]} \right\} \\
&\times \left( \exp \left\{ -\frac{i\tau_2\mu_c}{\hbar} B_2 \right\} \exp \left\{ \frac{-\left[ x + \frac{\tau_2^2\mu_cb_2}{2m} + 2i\frac{\tau_2\mu_cb_2}{\hbar} \left( \sigma_0^2 + \frac{i\hbar\tau_2}{2m} \right) \right]^2}{4 \left[ \sigma_0^2 + \frac{i\hbar(\tau_2+\tau_3)}{2m} \right]} \right\} \right. \\
&\quad \left. \left. - \exp \left\{ \frac{i\tau_2\mu_c}{\hbar} B_2 \right\} \exp \left\{ \frac{-\left[ x - \frac{\tau_2^2\mu_cb_2}{2m} - 2i\frac{\tau_2\mu_cb_2}{\hbar} \left( \sigma_0^2 + \frac{i\hbar\tau_2}{2m} \right) \right]^2}{4 \left[ \sigma_0^2 + \frac{i\hbar(\tau_2+\tau_3)}{2m} \right]} \right\} \right) \right) |\downarrow_z\rangle,
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
A'_3 &= \exp \left( \frac{-\kappa_2 - \kappa_3}{6} \right) \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma_0}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{3}{2}} \left( \sigma_0^2 + \frac{i\hbar}{2m} (\tau_2 + \tau_3) \right)^{-\frac{3}{2}} \\
&\times \exp(-k_y^2\sigma_0^2) \exp \left( \frac{i\tau_2}{\hbar} \mu_cb_2 \cdot \frac{\tau_2^2\mu_cb_2}{2m} \right) \exp \left[ -\left( \frac{\tau_2\mu_cb_2}{\hbar} \right)^2 \left( \sigma_0^2 + \frac{i\hbar\tau_2}{2m} \right) \right]. \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Como podemos apreciar, la Ec. (2.22) tiene la misma forma que la Ec. (2.15), por lo que presenta enredamiento entre las variables de posición en  $x$ ,  $z$  y espín. Con este resultado obtenemos un estado con menos constantes que nos permitirá poder realizar cálculos posteriores de una manera más eficiente.

### 2.3. Conclusiones

En este capítulo hemos obtenido la evolución en el tiempo de los ESGC utilizando el MFOE para resolver las ecuaciones de Schrödinger asociadas a cada ESG particular. Además realizamos el estudio de la dinámica de un experimento modificado que tiene un comportamiento equivalente al experimento completo. Este experimento modificado nos permitirá estudiar de una forma más eficiente las propiedades cuánticas que tiene nuestro modelo debido a que menos constantes se ven involucradas.

Encontramos que el estado final de los ESGC, Ec. (2.15) y Ec. (2.22), es una superposición de eigen-estados de espín, de la misma forma observada en el estado saliente de un solo ESG [12, 18], y por consiguiente no representa un estado siguiendo una trayectoria definida a la pantalla. Este estado presenta enredamiento híbrido entre los GDL de posición y el GDL de espín [50], lo cual es congruente con el conocido efecto del ESG, la separación de espines. La presencia de la variable  $z$  en este estado enredado atestigua la no conmutatividad entre los diferentes operadores de espín para las diferentes orientaciones espaciales, esto está en concordancia con las observaciones que presenta el argumento semiclásico para el experimento pensado [5, 6, 15]. También encontramos un interesante efecto para la configuración propuesta aquí en la presencia de enredamiento también con el GDL de posición en la coordenada  $x$ . Es decir que a primera vista existe enredamiento entre tres GDL del experimento.



## Capítulo 3

# Correlaciones y Enredamiento de los experimentos consecutivos

En el presente capítulo se mostrará el estudio de características cuánticas de los ESGC tales como las correlaciones cuánticas existentes en el experimento y el enredamiento del estado final del sistema.

El estudio de correlaciones cuánticas ha sido estudiado por diversos autores y se ha llegado a la conclusión de que estas correlaciones dan lugar a fenómenos como la no localidad cuántica. En nuestro caso hemos estudiado la no localidad del ESG unitario [19] y hemos comprobado que exhibe un comportamiento no local. Utilizando el mismo método para los ESGC ahora deseamos estudiar las correlaciones cuánticas de este sistema.

Ahora, una vez que hemos descrito el arreglo modificado de los ESGC, nos gustaría estudiar las correlaciones presentes en el estado de la Ec.(2.22) del capítulo anterior. Para realizar esta empresa, primero nos gustaría establecer las bases del estudio de las correlaciones cuánticas en un sistema.

### 3.1. Correlaciones Cuánticas

El concepto de correlación viene de estadística y nos dice que si tenemos un sistema con dos o más partes, el conocimiento del comportamiento de una de estas partes nos puede ayudar a conocer como se comporta alguna otra de las partes del sistema.

En teoría de probabilidad[51] la correlación entre dos variables, digamos  $A$  y  $B$ , se expresa como sigue

$$\rho(A, B) = \frac{E[(A - E[A])(B - E[B])]}{\sqrt{\sigma_A \sigma_B}} = \frac{E[AB] - E[A]E[B]}{\sqrt{\sigma_A \sigma_B}}, \quad (3.1)$$

donde  $\sigma_A = E[A^2] - (E[A])^2$  y  $\sigma_B = E[B^2] - (E[B])^2$  son las varianzas de  $A$  y  $B$  respectivamente, con  $E$  denotando el valor esperado.

Es posible probar que la correlación de la Ec. (3.1) cumple que  $-1 \leq \rho(A, B) \leq 1$ . La correlación es una medida de la linealidad entre  $A$  y  $B$ , si tenemos un valor positivo para la correlación entonces esto nos dice que  $B$  tiende a incrementar cuando  $A$  lo hace, en cambio para un valor negativo de la correlación la variable  $B$  tiende a disminuir a la vez que  $A$  incrementa; en el caso en que la correlación fuera cero, esto nos diría que las variables están no correlacionadas. De esta manera vemos que el concepto de correlación tiene su origen en la estadística y su utilización solamente tiene sentido en un contexto relacionado.

En Física es conocido que existen diferencias entre correlaciones clásicas y correlaciones cuánticas. Si bien uno puede hablar de correlaciones en sistemas clásicos, las correlaciones en sistemas

**CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS  
EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS**  
3.1. CORRELACIONES CUÁNTICAS

---

cuánticos se desenvuelven de una forma más natural debido a que la teoría cuántica es fundamentalmente probabilística. Hemos de hacer una diferenciación aquí pues las correlaciones clásicas pueden entenderse como aquellas que existen en sistemas clásicos o más bien sistemas que son descritos de una forma clásica y de manera similar para las correlaciones cuánticas. Otra forma de entender las correlaciones es que podemos llamar correlaciones clásicas a aquellas correlaciones que pueden ser encontradas en sistemas descritos de forma clásica y cuántica y correlaciones cuánticas a aquellas que se encuentran exclusivamente en sistemas descritos con el formalismo cuántico.

En nuestro análisis haremos un estudio de las correlaciones existentes en los experimentos consecutivos sin conocer de antemano de que clase son, es decir, si estas correlaciones son exclusivamente cuánticas. La violación o no violación de las desigualdades de Bell[52–57] nos dará a conocer la naturaleza de estas correlaciones, ya que si existe alguna violación podremos decir que hay correlaciones exclusivamente cuánticas.

De manera general las correlaciones en mecánica cuántica pueden escribirse como probabilidades condicionales de la forma

$$P(a\ b|A\ B), \tag{3.2}$$

donde estamos suponiendo un sistema que consta de dos partes. La Ec.(3.2) nos dice que tan frecuentemente los resultados  $a$  y  $b$  son obtenidos en dos sistemas separados al realizar las mediciones  $A$  y  $B$  sobre tales sistemas. Esto es un caso simplificado de los llamados experimentos tipo-Bell (Bell-type experiments) considerados por John S. Bell en su trabajo fundacional [52] acerca de la no localidad en mecánica cuántica que está directamente relacionado con la paradoja de Einstein-Podolski-Rosen(EPR)[58]. Como podemos ver, las correlaciones en mecánica cuántica están directamente relacionadas con la estadística en la medición de sistemas.

### 3.1.1. No localidad y realismo

La paradoja EPR[58] dio lugar al estudio de John S. Bell y su famosas desigualdades [52]. Bell quería averiguar si la mecánica cuántica era realmente una teoría completa y que describía adecuadamente lo que pasa en la naturaleza pues la paradoja EPR pone en duda la completéz de la teoría. Esta paradoja propone un experimento pensado en donde dos partículas enredadas se separan y luego se realiza una medición sobre una de ellas donde de inmediato se conoce el estado de la otra partícula y concluyendo que es imposible que algo así pueda suceder a un sistema que se encuentra separado de otro, lo que en inglés se conoce como "spooky action at distance". La conclusión de EPR es que la teoría cuántica está incompleta y propone una solución por medio de añadir variables extra a la descripción estadística del experimento, las que se conocen hoy en día como variables ocultas[52, 57, 58].

Supongamos que la correlación de la Ec.(3.2) para dos sistemas depende de más variables que tienen que ver con la dinámica previa a las mediciones  $A$  y  $B$ . En particular esta descripción al depender de más variables puede dar una descripción más precisa del resultado  $a$  y similarmente para el resultado de la medición  $B$ ,  $b$ , además podemos suponer que ninguno de los procesos de medición de las partes tiene influencia sobre el otro y por lo tanto podemos escribir la Ec. (3.2) como

$$P(a\ b|A\ B) = \sum_{\lambda} p(\lambda)P_1(a|A, \lambda)P_2(b|B, \lambda), \tag{3.3}$$

con  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$  y  $p(\lambda)$  una distribución de probabilidad bien definida.

La Ec.(3.3) se conoce como la condición de localidad [57] y cualquier correlación que pueda descomponerse de esta forma es local y cualquier correlación que no pueda descomponerse de esta forma se considera no local. Esta es la base del trabajo de Bell y sus desigualdades.

Bell demostró que cualquier teoría que viole las desigualdades que propuso es no local, es decir que alguna acción realizada sobre una partícula  $A$  tiene influencia en otra partícula  $B$  alejada de la partícula  $A$ .

Dos conceptos muy importantes en el desarrollo de las desigualdades de Bell son los siguientes:

**CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS  
EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS**  
3.1. CORRELACIONES CUÁNTICAS

---

1. *Principio de no-señalización (No-signalling principle)*. Cualquier transmisión de información debe ser llevada por un soporte físico, abandonando al emisor luego de que el mensaje es elegido [57].
2. *Principio de causalidad local*. "Las causas directas (y efectos) de eventos que se encuentran cercanos, e incluso las causas indirectas (y efectos) no pueden ir más allá de lo permitido por la velocidad de la luz". John S. Bell [57, 59].

El principio de no señalización también es parte fundamental de otros estudios tales como la no clonación de estados cuánticos y la discriminación de estados cuánticos [57, 60]. El principio de causalidad local asegura una cota superior a la velocidad de cualquier comunicación haciendo al estudio de las correlaciones compatible con la teoría de la relatividad especial.

Otro concepto importante en el experimento pensado de EPR es el realismo, que se entiende como que los resultados de una medición son predeterminados, una aseveración que suena coherente en mecánica clásica pero que en mecánica cuántica no es válida, eso ha sido estudiado a fondo por Kochen y Specker cuyo resultado más importante es el teorema de Kochen-Specker[61] que nos dice que los observables no tienen valores predeterminados antes de la medición, es decir, antes del colapso de la función de onda.

**Ambigüedades experimentales (Experimental loopholes)**

Una parte importante en la descripción de la no localidad son las que se conocen como ambigüedades experimentales dentro del estudio de las desigualdades de Bell. Estas ambigüedades surgen debido a la comprobación de las desigualdades al tratar de realizar experimentos reales, los cuales se encuentran sujetos a las limitaciones tecnológicas. Todas las desigualdades de Bell presentan al menos una de las siguientes ambigüedades [57],

1. *La ambigüedad de la localidad (The locality loophole)*. Debe existir separación espacio-temporal entre los eventos de medición para poder garantizar la ausencia de algún tipo de comunicación entre los aparatos de medición. Esto pone fuertes restricciones en el tiempo en que se realizan las mediciones, en su duración y en la distancia que las separa.
2. *La ambigüedad de la detección (The detection loophole)* La probabilidad de que las mediciones den resultados no debe ser muy baja. Es posible que esto suceda debido a que el sistema se pierda en el camino, entonces existe la posibilidad de descartar los eventos no detectados permitiendo a un modelo local (de variables ocultas) reproducir las correlaciones. [57].

**3.1.2. Ejemplo de una desigualdad de tipo Bell**

Para poder vislumbrar de alguna forma el papel de las correlaciones en las desigualdades tipo Bell, proponemos el siguiente ejemplo ilustrativo.

Supongamos que tenemos un sistema enredado de la forma

$$|\zeta\rangle = |0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2, \tag{3.4}$$

donde el subíndice 1 indica que el estado pertenece al sistema 1 y el subíndice 2 se refiere al sistema 2. Cada uno de los sistemas tiene dos estados posibles  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ .

Tenemos que la desigualdad de Bell para dos sistemas discretos es la desigualdad CHSH [53]y se puede escribir como:

$$BQ_{CHSH} = E_{00} + E_{01} + E_{10} - E_{11} \leq 2 \tag{3.5}$$

donde  $E_{AB} = P(a = b|AB) - P(a \neq b|AB)$  se define como la correlación entre los resultados de la medición de dos personas [57] , díganos Alice y Bob, en lugares separados al realizar mediciones sobre el sistema 2 de  $A$  y  $B$  respectivamente. Para esto tenemos que suponer que Alice y Bob

**CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS  
EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS**  
3.1. CORRELACIONES CUÁNTICAS

---

reciben una parte del sistema de la Ec. (3.4) en sus respectivas localizaciones. Desgloceemos cada caso de las correlaciones  $E_{AB}$  para este ejemplo,

$$\begin{aligned} E_{00} &= P(a = b|00) - P(a \neq b|00), \\ E_{01} &= P(a = b|01) - P(a \neq b|01), \\ E_{10} &= P(a = b|10) - P(a \neq b|10), \\ E_{11} &= P(a = b|11) - P(a \neq b|11). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Por ejemplo, tomemos el caso particular de  $E_{01}$ . Tenemos que  $E_{01}$  es igual a la probabilidad de que Alice y Bob midan 0 y 1 y obtengan el mismo resultado menos la probabilidad de que Alice y Bob midan 0 y 1 y obtengan diferentes resultados, como puede notarse de este caso particular esto nos dice si existen correlaciones entre las dos mediciones para uno de los cuatro casos posibles en este ejemplo. De esta forma se podría obtener o no una violación de la desigualdad (3.5) revisando los resultados de las mediciones de Alice y Bob para cada caso de la Ec. (3.6).

### 3.1.3. Localidad y contextualidad

Un elemento muy importante en nuestro estudio es el tratamiento de las correlaciones cuánticas, en particular la no localidad, que ya hemos tratado en la anterior subsección. Durante la realización de este trabajo hemos efectuado una intensa revisión de la bibliografía relacionada con el tema y nos hemos encontrado que existe una muy dura discusión para determinar que clase de correlaciones pueden existir en elementos cuánticos que solamente representan un sistema y aquellos que representan más de un sistema [62–65].

De esta forma, en la literatura se denominan dos clases de enredamiento que se definen de acuerdo al número de sistemas o partículas involucradas, el *Enredamiento de una sola partícula*, que es aquel donde se presenta enredamiento entre dos o más de los grados de libertad de un solo sistema, y el *Enredamiento multi-partícula*, que es aquel en donde dos o más sistemas se encuentran enredados [62, 63]. Ambos tipos de enredamiento tienen propiedades diferentes que han sido ampliamente estudiadas [55, 56, 62–64, 66–70], en particular la violación de las desigualdades de Bell ha sido un tema importante para esta clase de sistemas. Por un lado, se afirma en la literatura que para sistemas donde solamente se halla enredamiento entre sus grados de libertad, la violación de las desigualdades de Bell no tiene el mismo significado que para sistemas donde hay enredamiento entre varios sistemas y que estos sistemas son no contextuales en lugar de no locales [62] debido a que un elemento importante de las desigualdades de Bell es que exista separación espacial entre los sistemas tomados en cuenta y por lo tanto es imposible que en sistemas con enredamiento de sus grados de libertad se presente tal hecho. Por otro lado, existe otro grupo de científicos que afirman que la no localidad puede existir incluso en sistemas que presentan enredamiento de una sola partícula [63–65].

La contextualidad tiene que ver directamente con el Teorema de Kochen-Specker [61], si alguna de las desigualdades de Bell se viola para el caso de varios grados de libertad de un solo sistema entonces podemos decir que los observables que representan las propiedades del sistema no tienen valores predeterminados, es decir que no dependen de los valores de otras propiedades del sistema antes de la medición. El concepto de perturbación en mecánica cuántica tiene mucho que ver en el estudio de la contextualidad [60, 71]

Ahora reescribamos aquí el estado inicial de nuestro sistema, los ESGC,

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma_0^2)^{\frac{3}{4}}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\sigma_0^2} + ik_y y\right) (\alpha|\uparrow_z\rangle + \beta|\downarrow_z\rangle). \tag{3.7}$$

Como podemos observar de esta ecuación, en nuestro modelo estamos considerando solamente grados de libertad de una sola partícula pues nuestro estado inicial está representando el estado de una sola partícula. Este hecho podría implicar que nuestro estudio de las correlaciones de los

**CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS  
EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS**  
3.1. CORRELACIONES CUÁNTICAS

---

experimentos consecutivos solamente tiene que ver con la no contextualidad. Desde nuestro punto de vista el ESG y los experimentos consecutivos presentan no localidad debido a la muy conocida distinguibilidad de estados de espín por la que el experimento es conocido [2, 72], (Ver sección 3.6 más adelante) además de que nuestra postura es apoyada por varios trabajos donde se demuestra no localidad entre grados de libertad de una sola partícula [63–65]. La distinguibilidad es un concepto muy importante en mecánica cuántica que inclusive hemos estudiado a fondo previamente [60], este concepto se encuentra bien definido en la literatura y es dependiente de los aparatos de medición [60].

La discusión que existe acerca de que no es posible la existencia de no localidad en sistemas con enredamiento entre sus propios grados de libertad podría detenerse si agregamos el concepto de distinguibilidad a las consideraciones iniciales del estudio de las desigualdades de Bell, es decir, tratar de mejorar la definición en la ambigüedad de la localidad (the locality loophole), pues el concepto de separación espacial que se utiliza en su deducción es ambiguo, además es importante mencionar que se ha encontrado una estrecha relación entre el principio de incertidumbre y la no localidad [67], un hecho que podría relacionar aún más naturalmente la distinguibilidad con la no localidad [60]. Hasta donde sabemos esta propuesta no ha sido estudiada pero ni ha sido realmente tomada en cuenta directamente para la deducción de las desigualdades de Bell o su definición.

Ahora discutiremos otra propiedad del ESG y los ESGC que además de ser interesante apoya nuestra aseveración de que existe no localidad en los experimentos consecutivos.

### 3.1.4. Steering

El steering es una propiedad que fue introducida por Schrödinger en su carta de respuesta a Einstein donde este último mostraba la paradoja EPR[58, 65]. Resumidamente el steering trata de un sistema enredado con dos partes alejadas espacialmente. Al realizar una medición de una de las partes, es decir, al colapsar la función de onda de una de estas, la medición dirige el estado de la otra parte del sistema, lo que significa que al medir una de las partes del sistema el estado de la otra queda determinado.

En particular podemos realizar una demostración heurística de que los ESGC poseen esta propiedad con el siguiente experimento pensado que está inspirado en el experimento pensado del ESG unitario [65].

Supongamos el arreglo de los experimentos modificados, donde solamente tenemos dos aparatos de Stern-Gerlach, esta configuración aparece en la Figura 3.1 (Tomada de [73]). Ahora debemos asumir que es posible realizar mediciones de espín del tipo *sí o no*. De tal manera tenemos a dos personas, Alice que se encuentra en la ciudad de Tokyo, y Bob, que se halla en la ciudad de París, podemos estar seguros de que entre esas dos personas existe una separación espacial considerable. Así, supongamos que Alice puede controlar una configuración de ESGC que está completamente automatizada y se encuentra en algún lugar adecuado, Alice puede encenderla o apagarla y además enviar una o varias partículas como ella desee. Primero supongamos que Alice es capaz y quiere verificar la propiedad  $|\downarrow_z\rangle$  de la función de onda y ella encuentra  $-\hbar/2$ . Recordemos de la Ec. (2.22) que el estado final de los ESGC puede escribirse como  $|\psi_m(\tau_3)\rangle = |\psi_+\rangle|\uparrow_z\rangle + |\psi_-\rangle|\downarrow_z\rangle$ , por lo tanto Alice colapsaría la función a  $|\psi_-\rangle|\downarrow_z\rangle$  en Tokyo. Por otro lado si ella no detectara nada, entonces la función colapsaría a  $|\psi_+\rangle|\uparrow_z\rangle$  en París. Este efecto puede ser explicado en términos de las *cajas de Einstein* (Ver una explicación más amplia de este efecto en [65]).

Sin embargo, si Alice decidiera medir en una base diferente, por ejemplo,  $\hat{\sigma}_x$ , para determinar las posibilidades debemos reescribir el estado final en términos del espín en  $x$  de la siguiente forma

$$|\psi_m(\tau_3)\rangle = \{|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle\}|\uparrow_x\rangle + \{|\psi_+\rangle - |\psi_-\rangle\}|\downarrow_x\rangle \quad (3.8)$$

entonces, las siguientes situaciones pueden ocurrir:

- i) Si ella desea medir el espín abajo en la base de  $\hat{\sigma}_x$  y obtiene  $-\hbar/2$ , entonces la función de onda debería colapsar a  $\{|\psi_+\rangle - |\psi_-\rangle\}|\downarrow_x\rangle$ .

**CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS  
EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS**  
3.1. CORRELACIONES CUÁNTICAS

- ii) Si ella verifica el espín arriba en la base de  $\hat{\sigma}_x$  y obtiene  $\hbar/2$ , entonces la función de onda colapsaría a  $\{|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle\} |\uparrow_x\rangle$ .

De esta manera, concluimos que el estado de Bob es *dirigido* dependiendo de la clase de observable que Alice decide medir, confirmando que los ESGC presentan el fenómeno de steering. Como puede verse en la Figura 3.1 una situación más rica, comparada con el experimento ESG usual, sale a la luz, debido a que en el caso de los experimentos consecutivos pueden participar hasta cuatro personas para tomar en cuenta todas las posibilidades. Por ejemplo, si el Amigo 2 (Friend 2) de Alice en una localización diferente desea verificar el espín hacia arriba en  $x$  y no obtiene nada en su medición, entonces la función de onda colapsará al estado  $\{|\psi_+\rangle - |\psi_-\rangle\} |\downarrow_x\rangle$ . Esto es equivalente a Alice midiendo el espín abajo en  $x$  y obtener  $-\hbar/2$  y es también equivalente a la medición del espín abajo en  $x$  de otro amigo, llamado Amigo 1 (Friend 1), que obtiene  $-\hbar/2$ , ambos amigos colapsarán la función de onda a  $\{|\psi_+\rangle - |\psi_-\rangle\} |\downarrow_x\rangle$ , es decir, la misma función obtenida por el Amigo 2 midiendo el espín arriba en  $x$  obteniendo nada.

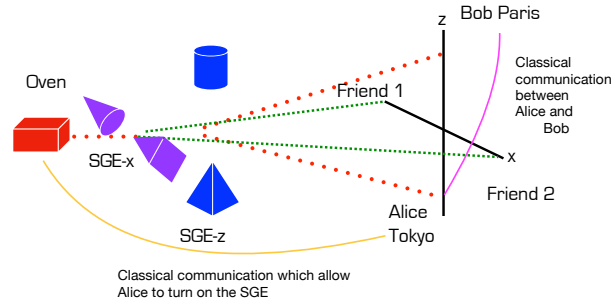


Figura 3.1: Esquema del experimento pensado para la demostración de que existe steering en los experimentos consecutivos. El horno aparece en rojo, en violeta está el ESG en dirección  $x$ , en azul se encuentra el ESG en dirección  $z$ , los puntos verdes y rojos representan los posibles estados de la función de onda. Recuerde que no podemos definir trayectorias como tal para el estado del experimento. Alice puede comunicarse con Bob usando un canal clásico que aparece en color magenta. Además Alice controla totalmente los experimentos consecutivos a través de un canal clásico de color amarillo, teniendo la posibilidad de enviar uno ó  $N$  átomos.

Al mostrar con este experimento que los ESGC poseen la propiedad de steering estamos mostrando que es posible, al menos teóricamente, que dos partes del sistema puedan separarse espacialmente, esto respalda nuestra aseveración de que los experimentos consecutivos presentan no localidad. La realización de este experimento es posible teóricamente y se encuentra sustentado en la visible separación de los estados de espín en la función de onda, hecho que se mostrará más claramente en la Sección 3.6.

### Detección de steering

En los últimos años se ha estudiado la relación que existe entre el steering y el principio de incertidumbre e inclusive se ha definido un criterio basado en un principio de incertidumbre entrópico para detectar steering [74–76]. Los primeros estudios de desigualdades de steering se remontan a 1989 [74], donde se propuso por primera vez una desigualdad de steering basada en

**CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS  
EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS**  
**3.2. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN PARA LOS ESGC MODIFICADOS**

---

el principio de incertidumbre, a pesar de que en esa época el steering aún no se había definido propiamente.

La idea principal para detectar steering con el principio de incertidumbre es que si es posible obtener información más de lo que permite el principio de incertidumbre a través de una medición de las partes del sistema entonces existe steering. Cabe mencionar aquí que es teóricamente posible utilizar este criterio para nuestro caso de estudio y de esta forma demostrar de manera formal la existencia de steering en los experimentos consecutivos. Esto podría desarrollarse en un trabajo posterior al de esta tesis relacionando nuestra propuesta de principio de incertidumbre para la perturbación en la medición [60, 71].

### 3.1.5. Discusión

Las correlaciones cuánticas son un tema de estudio que actualmente se encuentra en desarrollo. A pesar de que las correlaciones se han estudiado desde hace varias décadas aún existen nuevos conceptos y descubrimientos en el tema. El enredamiento, el steering, la no contextualidad y la no localidad son ahora recursos valiosos para realizar tareas no clásicas en información y como tales han sido cada vez más perfeccionados sus protocolos y experimentos [54–57, 62, 63, 68, 70, 74, 77]. El primer trabajo que demostró una jerarquía entre estas propiedades fue el de Wiseman et. al del 2007 [78], donde se demostró que la no localidad es un subconjunto propio del steering y este, a su vez, es subconjunto propio del enredamiento. Por otro lado varios son los trabajos que han demostrado que la no localidad es un subconjunto de la no contextualidad [62, 79, 80] por lo que la no localidad se considera como un caso especial de la no contextualidad.

## 3.2. Función de Correlación para los ESGC modificados

Ahora que ya hemos revisado los conceptos necesarios para poder entender las correlaciones cuánticas comenzaremos con el estudio de las correlaciones para los experimentos consecutivos.

Proponemos que la función de correlación para un sistema tripartita, con un GDL discreto de espín y dos continuos puede escribirse como

$$\mathbf{C}(x, p_x, z, p_z, \theta) = \langle \Phi | \hat{W}(x, p_x, z, p_z) \hat{\sigma}(\theta) | \Phi \rangle, \quad (3.9)$$

esta es la función de correlación generalizada de Banaszek-Wódkiewicz (BW) [81], con

$$\hat{W}(x, p_x, z, p_z) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_x dq_z |x - \frac{1}{2}q_x, z - \frac{1}{2}q_z\rangle \exp[-i(p_z q_z + p_x q_x)/\hbar] \langle x + \frac{1}{2}q_x, z + \frac{1}{2}q_z|, \quad (3.10)$$

el operador de Wigner generalizado, originalmente definido por Ben-Benjamin et. al. [82], para las coordenadas  $x$  y  $z$  con sus respectivos momentos  $p_x$  y  $p_z$ ;  $\hat{\sigma}(\theta)$  es el operador de Pauli para una dirección  $\theta$  arbitraria en el plano. Vemos que esta definición del operador de Wigner se encuentra en términos del operador paridad, lo que quiere decir que parte el espacio en dos partes en  $x$  y en dos partes en  $z$ , por lo que lo hace ideal como nuestro operador para poder observar el comportamiento de las correlaciones en los ESGC.

De este modo, podemos calcular la función de correlación para el estado de la Ec.(2.22), para esto escribamos el estado de la siguiente forma

$$|\psi_m(\tau_3)\rangle = |\psi_+\rangle |\uparrow_z\rangle + |\psi_-\rangle |\downarrow_z\rangle, \quad (3.11)$$

**CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS  
EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS**  
3.2. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN PARA LOS ESGC MODIFICADOS

---

en donde definimos

$$\begin{aligned}
|\psi_{\pm}\rangle = & M \exp\left(\mp i\sqrt{2}k_3^3\tau_3z_0\right) \exp\left\{-\frac{(Z \pm \{\sqrt{2}k_3^3\tau_3^2 + i2\sqrt{2}k_3^3\tau_3[1 + i(\tau_2 + \tau_3)]\})^2}{4[1 + i(\tau_2 + \tau_3)]}\right\} \\
& \times \left(\exp\left(-i\sqrt{2}k_2^3\tau_2x_0\right) \exp\left\{-\frac{[X + \sqrt{2}k_2^3\tau_2^2 + i2\sqrt{2}k_2^3\tau_2(1 + i\tau_2)]^2}{4[1 + i(\tau_2 + \tau_3)]}\right\}\right. \\
& \left. \pm \exp\left(i\sqrt{2}k_2^3\tau_2x_0\right) \exp\left\{-\frac{[X - \sqrt{2}k_2^3\tau_2^2 - i2\sqrt{2}k_2^3\tau_2(1 + i\tau_2)]^2}{4[1 + i(\tau_2 + \tau_3)]}\right\}\right), \tag{3.12}
\end{aligned}$$

con  $M$  el factor de normalización

$$\begin{aligned}
M = & \exp\left(\frac{-\kappa_2 - \kappa_3}{6}\right) \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_0}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\frac{3}{2}} \left(\sigma_0^2 + \frac{i\hbar}{2m}(t_2 + t_3)\right)^{-\frac{3}{2}} \\
& \times \exp(-k_y^2\sigma_0^2) \times \exp\left[-\left(\frac{t_2\mu_c b_2}{\hbar}\right)^2 \sigma_0^2\right] \\
& \times \exp\left[-\left(\frac{t_3\mu_c b_3}{\hbar}\right)^2 \left(\sigma_0^2 + \frac{i\hbar t_2}{2m}\right)\right] \exp\left\{\frac{-(y - 2ik_y\sigma_0^2)^2}{4\left[\sigma_0^2 + \frac{i\hbar(t_2+t_3)}{2m}\right]}\right\}, \tag{3.13}
\end{aligned}$$

La Ec.(3.12) es adimensional gracias a las siguientes definiciones

$$\begin{aligned}
\tau_{2,3} = \frac{\hbar t_{2,3}}{2m\sigma_0^2}, & \quad k_{2,3} = \sqrt{2}\sigma_0 \left(\frac{m\mu_c b_{2,3}}{2\hbar^2}\right)^{1/3}, \\
x_0 = \frac{B_2}{\sigma_0 b_2}, & \quad z_0 = \frac{B_3}{\sigma_0 b_3}, \\
Z = \frac{z}{\sigma_0}, & \quad X = \frac{x}{\sigma_0}. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Las definiciones de la Ec. (3.14) hacen a todas las variables adimensionales y nuestros resultados comparables con aquellos de otros trabajos que estudian el enredamiento en el ESG [16, 50].

### 3.2.1. Deducción de la función de correlación para los ESGC

Para poder calcular la función de correlación de la Ec. (3.9) necesitamos hacer las siguientes consideraciones.

Definamos nuestro sistema de referencia de manera similar al de nuestro experimento que aparece en la Figura 2.1 y definamos un vector unitario, con dirección arbitraria y tridimensional de la siguiente forma

$$\hat{n} = \text{Sin}(\theta)\text{Cos}(\phi)\hat{\mathbf{i}} + \text{Sin}(\theta)\text{Sin}(\phi)\hat{\mathbf{j}} + \text{Cos}(\theta)\hat{\mathbf{k}} \tag{3.15}$$

Un esquema de este vector aparece en la Figura 3.2.

Es fácilmente demostrable que  $\hat{n}$  toma la forma de la Ec. (3.15) en función de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$ . Ahora escribamos el vector de las matrices de Pauli en coordenadas rectangulares,

$$\hat{\sigma} = \sigma_x\hat{\mathbf{i}} + \sigma_y\hat{\mathbf{j}} + \sigma_z\hat{\mathbf{k}}, \tag{3.16}$$

entonces tomamos

$$\hat{\sigma}(\theta) = \hat{\sigma} \cdot \hat{n} = \text{Sin}(\theta)\text{Cos}(\phi)\sigma_x + \text{Sin}(\theta)\text{Sin}(\phi)\sigma_y + \text{Cos}(\theta)\sigma_z, \tag{3.17}$$

**CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS  
EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS**  
3.2. FUNCIÓN DE CORRELACIÓN PARA LOS ESGC MODIFICADOS

---

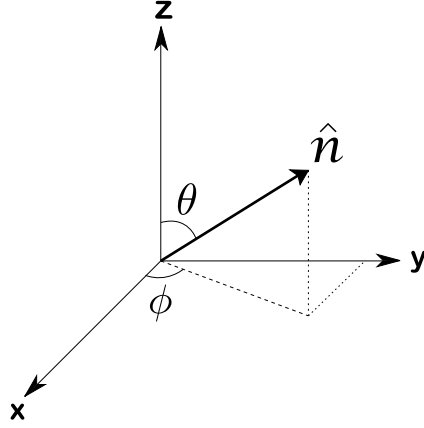


Figura 3.2: Esquema del vector  $\hat{n}$ .

la proyección del vector de Pauli sobre una dirección arbitraria, y de esta manera, con la Ec. (3.17), podemos tomarlo como el observable de nuestro sistema para el espín.

Ahora podemos construir nuestro observable completo para nuestro sistema como

$$\hat{W}(x, p_x, z, p_z)\hat{\sigma}(\theta), \quad (3.18)$$

de la forma en que aparece en la Ec. (3.9).

Ahora podemos calcular la función de correlación de la Ec. (3.9) para nuestro estado final de la Ec. (3.11) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(X, P_x, Z, P_z, \theta) &= \langle \psi_m(\tau_3) | \hat{W}(X, P_x, Z, P_z) \hat{\sigma}(\theta) | \psi_m(\tau_3) \rangle \\ &= \langle \psi_+ | \hat{W}(X, P_x, Z, P_z) | \psi_+ \rangle \langle \uparrow_z | \hat{\sigma}(\theta) | \uparrow_z \rangle + \langle \psi_+ | \hat{W}(X, P_x, Z, P_z) | \psi_- \rangle \langle \uparrow_z | \hat{\sigma}(\theta) | \downarrow_z \rangle \\ &\quad + \langle \psi_- | \hat{W}(X, P_x, Z, P_z) | \psi_+ \rangle \langle \downarrow_z | \hat{\sigma}(\theta) | \uparrow_z \rangle + \langle \psi_- | \hat{W}(X, P_x, Z, P_z) | \psi_- \rangle \langle \downarrow_z | \hat{\sigma}(\theta) | \downarrow_z \rangle. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Luego de una serie de cálculos podemos escribir la función de correlación como

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(X, P_x, Z, P_z, \theta) &= \left( \langle \psi_+ | \hat{W}(X, P_x, Z, P_z) | \psi_+ \rangle - \langle \psi_- | \hat{W}(X, P_x, Z, P_z) | \psi_- \rangle \right) \text{Cos}(\theta) \\ &\quad + \left( \langle \psi_+ | \hat{W}(X, P_x, Z, P_z) | \psi_- \rangle + \langle \psi_- | \hat{W}(X, P_x, Z, P_z) | \psi_+ \rangle \right) \text{Sin}(\theta) (\text{Cos}(\phi) - i \text{Sin}(\phi)). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ahora consideremos que  $\phi = 0$ , el caso en que solamente nos interesan las correlaciones sobre el plano  $X - Z$ . Tenemos finalmente que la función de correlación que nos interesa es de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(X, P_x, Z, P_z, \theta) &= \left( \langle \psi_+ | \hat{W}(X, P_x, Z, P_z) | \psi_+ \rangle - \langle \psi_- | \hat{W}(X, P_x, Z, P_z) | \psi_- \rangle \right) \text{Cos}(\theta) \\ &\quad + \left( \langle \psi_+ | \hat{W}(X, P_x, Z, P_z) | \psi_- \rangle + \langle \psi_- | \hat{W}(X, P_x, Z, P_z) | \psi_+ \rangle \right) \text{Sin}(\theta), \end{aligned} \quad (3.21)$$

la cual es posible calcular analíticamente utilizando el operador de Wigner que proponemos en la Ec. (3.10).

**CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS  
EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS**

**3.3. NO LOCALIDAD DE LOS EXPERIMENTOS DE STERN GERLACH CONSECUTIVOS**

**3.3. No localidad de los experimentos de Stern Gerlach consecutivos**

El estudio de las correlaciones cuánticas en sistemas cuánticos está estrechamente relacionado con tareas no clásicas [12, 15–19, 22, 50, 54–56, 66, 81, 83–85] que abren el camino a importantes aplicaciones. Nosotros cuantificamos las correlaciones cuánticas de los ESGC con una función de correlación para sistemas híbridos con espín que ya ha sido probada para estados bipartitas [19, 22]. De esta forma para poder detectar no localidad necesitamos verificar desigualdades de tipo Bell aplicadas a nuestro sistema de tal forma que podamos estudiar las correlaciones entre partes de nuestro sistema, ya sea por pares o tercias.

**3.3.1. Resultados**

Nuestra descripción cuántica de los experimentos nos permite profundizar en las características cuánticas del sistema, de esta forma, estudiamos las correlaciones cuánticas presentes por medio de la desigualdad CHSH, de Bell-Klyshko-Mermin y de Svetlichny. Es importante mencionar que la violación de estas desigualdades demuestra la no localidad y la existencia de enredamiento, es decir que se consideran una forma de certificar la existencia de enredamiento en un sistema sin depender de un aparato de medición [54–57, 66, 86, 87]. En particular las desigualdad CHSH [53] y la de Bell-Klyshko-Mermin [88, 89] detectan correlaciones por pares a pesar de que esta última sea utilizada en sistemas de más dimensiones, la desigualdad de Svetlichny [86] detecta correlaciones entre tres sistemas.

**Desigualdad CHSH**

De la Ecs. (3.9), (3.11), (3.12), (3.21) llegamos a que la función de correlación de los ESGC tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 C(X, P_x, Z, P_z, \theta) &= \exp[\omega'_z(Z, P_z) + \omega'_x(X, P_x)] \\
 &\times \left[ 4\text{Cos}(\theta) \left( \exp[\omega_z] \left\{ \exp[\omega_x] \text{Cosh}[d_x(X, P_x)] \text{Sinh}[d_z(Z, P_z)] \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \exp[-\omega_x] \text{Cos}[\delta_x(X, P_x)] \text{Cosh}[d_z(Z, P_z)] \right\} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 4\text{Sin}(\theta) \left( \exp[-\omega_z] \left\{ \exp[\omega_x] \text{Sinh}[d_x(X, P_x)] \text{Cos}[\delta_z(Z, P_z)] \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \exp[-\omega_x] \text{Sin}[\delta_x(X, P_x)] \text{Sin}[\delta_z(Z, P_z)] \right\} \right) \right], \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

hasta un factor de normalización. Las funciones  $\omega'_z(Z, P_z)$ ,  $\omega'_x(X, P_x)$ ,  $\omega_z$ ,  $\omega_x$ ,  $d_z(Z, P_z)$ ,  $d_x(X, P_x)$ ,  $\delta_z(Z, P_z)$  and  $\delta_x(X, P_x)$  son funciones reales dadas por las siguientes definiciones

$$\begin{aligned}
 \omega'_z(Z, P_z) &= \frac{1}{4 \left[ 1 + (\tau_2 + \tau_3)^2 \right]} \left[ -(\tau_2 + \tau_3)^2 (Z^2 + 2k_3^6 \tau_3^4) \right] - 2k_3^6 \tau_3^2 \left[ 1 + (\tau_2 + \tau_3)^2 \right] \\
 &+ 2k_3^6 \tau_3^3 (\tau_2 + \tau_3) - 2 \left[ 1 + (\tau_2 + \tau_3)^2 \right] P_z^2 - \frac{1}{4} Z^2 + 2P_z Z (\tau_2 + \tau_3) \\
 &- \frac{1}{4 \left[ 1 + (\tau_2 + \tau_3)^2 \right]} (Z^2 + 2k_3^6 \tau_3^4) - 4k_3^6 \tau_3^2, \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

**CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS  
EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS**

**3.3. NO LOCALIDAD DE LOS EXPERIMENTOS DE STERN GERLACH CONSECUTIVOS**

$$\begin{aligned}
\omega'_x(X, P_x) &= \frac{1}{4 \left[ 1 + (\tau_2 + \tau_3)^2 \right]} \left( -(\tau_2 + \tau_3)^2 (X^2 + 2k_2^6 \tau_2^4) \right. \\
&\quad \left. - 8k_2^6 \tau_2^2 \left[ 4(1 + \tau_2^2)^2 - 2\tau_3^2 (1 - \tau_2^2) + 4\tau_2 \tau_3 (1 + \tau_2^2) \right] \right. \\
&\quad \left. + 8k_2^6 \tau_2^3 \left\{ 4(\tau_2 + \tau_3) - 2\tau_2 \left[ 1 - (\tau_2 + \tau_3)^2 \right] \right\} \right) \\
&\quad - 2 \left[ 1 + (\tau_2 + \tau_3)^2 \right] P_x^2 - \frac{1}{4} X^2 + 2X P_x (\tau_2 + \tau_3) \\
&\quad - \frac{1}{4 \left[ 1 + (\tau_2 + \tau_3)^2 \right]} \left\{ X^2 + 2k_2^6 \tau_2^4 - 8k_2^6 \tau_2^2 \left[ 2(1 + \tau_2^2) + 4\tau_2 \tau_3 \right] 16k_2^3 \tau_2^3 \tau_3 \right\},
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\omega_z = -\frac{1}{2} k_3^6 \tau_3^4 - 2k_3^6 \tau_3^2 \left[ 1 + (\tau_2 + \tau_3)^2 \right] + 2(\tau_2 + \tau_3) k_3^6 \tau_3^3, \tag{3.25}$$

$$\omega_x = -\frac{1}{2} k_2^6 \tau_2^4 - 2k_2^6 \tau_2^2, \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
d_z(Z, P_z) &= \frac{1}{4 \left[ 1 + (\tau_2 + \tau_3)^2 \right]} \left[ -2\sqrt{2} k_3^3 \tau_3^2 (\tau_2 + \tau_3)^2 Z \right] + \sqrt{2} k_3^3 \tau_3 (\tau_2 + \tau_3) Z \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} k_3^3 \tau_3^2 Z + \sqrt{2} k_3^3 \tau_3 (\tau_2 + \tau_3) Z - \frac{1}{4 \left[ 1 + (\tau_2 + \tau_3)^2 \right]} \left[ 2\sqrt{2} k_3^3 \tau_3^2 Z \right] \\
&\quad + P_z \left\{ -4\sqrt{2} k_3^3 \tau_3 + (\tau_2 + \tau_3) \left[ 2\sqrt{2} k_3^3 \tau_3^2 - 4\sqrt{2} k_3^3 \tau_3 (\tau_2 + \tau_3) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
d_x(X, P_x) &= \frac{1}{4 \left[ 1 + (\tau_2 + \tau_3)^2 \right]} \\
&\quad \times \left( -2\sqrt{2} k_2^3 \tau_2^2 (\tau_2 + \tau_3)^2 X + 2\sqrt{2} k_2^3 \tau_2 X \left\{ 4(\tau_2 + \tau_3) - 2\tau_2 \left[ 1 - (\tau_2 + \tau_3)^2 \right] \right\} \right) \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} k_2^3 \tau_2^2 X + P_x \left[ 2\sqrt{2} k_2^3 \tau_2^2 (\tau_2 + \tau_3) - 4\sqrt{2} k_2^3 \tau_2 (1 + \tau_2^2 + \tau_2 \tau_3) \right] \\
&\quad - \frac{1}{4 \left[ 1 + (\tau_2 + \tau_3)^2 \right]} \left( 2\sqrt{2} k_2^3 \tau_2^2 X + 8\sqrt{2} k_2^3 \tau_2 \tau_3 X \right),
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\delta_z(Z, P_z) = -P_z 2\sqrt{2} k_3^3 \tau_3^2 + 2\sqrt{2} k_3^3 \tau_3 Z + 2\sqrt{2} k_3^3 \tau_3 z_0, \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
\delta_x(X, P_x) &= \frac{1}{4 \left[ 1 + (\tau_2 + \tau_3)^2 \right]} \left\{ 2\sqrt{2} k_2^3 \tau_2 X \left[ 2 - 2(\tau_2 + \tau_3)^2 + 4\tau_2 (\tau_2 + \tau_3) \right] \right\} \\
&\quad + \sqrt{2} k_2^3 \tau_2 X - P_x \left( 2\sqrt{2} k_2^3 \tau_2^2 + 4\sqrt{2} k_2^3 \tau_2 \tau_3 \right) \\
&\quad - \frac{1}{4 \left[ 1 + (\tau_2 + \tau_3)^2 \right]} \left\{ -4\sqrt{2} k_2^3 \tau_2 X \left[ 2 + 2\tau_2 (\tau_2 + \tau_3) \right] \right\} + 2\sqrt{2} k_2^3 \tau_2 x_0.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Tenemos las definiciones adimensionales extra dadas por

$$P_x = \frac{p_x \sigma_0}{\hbar}, \quad P_z = \frac{p_z \sigma_0}{\hbar}. \tag{3.31}$$

### CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS

#### 3.3. NO LOCALIDAD DE LOS EXPERIMENTOS DE STERN GERLACH CONSECUTIVOS

La desigualdad CHSH [22, 53, 54, 66] que usamos para verificar la existencia de no localidad entre el par  $Z$ - $\theta$  es como sigue

$$-2 \leq B_{CHSH} = C(X, P_x, Z, P_z, \theta) + C(X, P_x, Z, P_z, \theta') + C(X, P_x, Z', P_z, \theta) - C(X, P_x, Z', P_z, \theta') \leq 2. \quad (3.32)$$

Para estudiar la no localidad entre  $Z$  y  $\theta$  necesitamos fijar las demás variables, en este caso  $X$ ,  $P_x$ ,  $P_z$ ,  $Z'$  and  $\theta'$ . La nomenclatura de variables primadas y no primadas viene de la construcción de las desigualdades tipo Bell, dándole el significado a estas variables como mediciones realizadas por distintas personas. (Véase ejemplo en Sección 3.1.2). Esta consideración se aplicará en cada una de las desigualdades siguientes.

La gráfica de la función de correlación para este caso aparece en la Figura 3.3 para los valores de los parámetros fijos  $X = 0.1$ ,  $P_x = 0.129$ ,  $P_z = 0.049$ ,  $\tau_2 = 6.8$ ,  $\tau_3 = 2.6$ ,  $k_2 = 0.3$ ,  $k_3 = 0.3$ ,  $x_0 = 4$  y  $z_0 = 4$ . La función de Bell para este caso,  $B_{CHSH}$ , se puede ver en la Figura 3.4 para las cantidades primadas  $Z' = 2.4$  y  $\theta' = \frac{\pi}{5}$ . Reportamos una violación de la desigualdad CHSH para el par  $Z, \theta$  por un mínimo valor de  $B_{CHSH}$  de (negativo)  $-2.62405$ . Encontrando este mínimo para los valores  $Z = 0.43$  y  $\theta \approx \frac{2}{3}\pi$ .

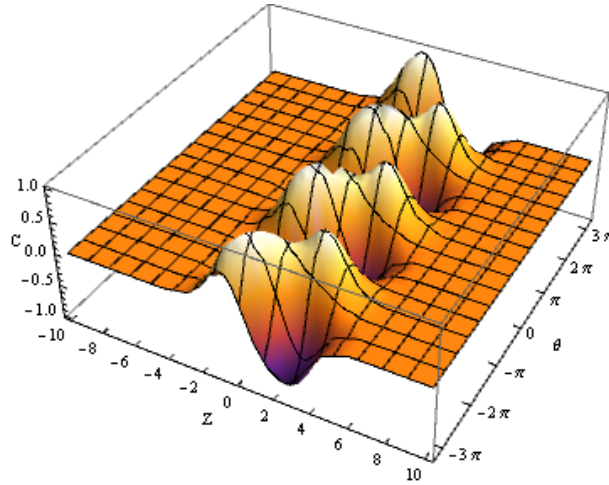


Figura 3.3: Función de correlación para el par  $Z$ - $\theta$  tomando las cantidades fijas como  $X = 0.1$ ,  $P_x = 0.129$ ,  $P_z = 0.049$ ,  $\tau_2 = 6.8$ ,  $\tau_3 = 2.6$ ,  $k_2 = 0.3$ ,  $k_3 = 0.3$ ,  $x_0 = 4$  y  $z_0 = 4$ .

Para poder observar más ampliamente el comportamiento de la función de Bell para este caso, hemos evaluado diversos valores de las constantes que aparecen en la Tabla 3.1. Además, para darnos una mejor idea de como evoluciona en el tiempo la función de Bell,  $B_{CHSH}$ , hemos colocado una serie de gráficas donde se puede observar como se modifica la función de correlación y  $B_{CHSH}$  para un tiempo fijo para  $\tau_2$  y variando el tiempo  $\tau_3$  de 0 a 9, esto se puede ver en la Figura 3.5.

Adicionalmente hemos verificado la violación de otros pares de variables para este caso, es decir la desigualdad CHSH para los pares de variables  $X$ - $\theta$  y  $X$ - $Z$ . En estos casos hemos encontrado también violación de la desigualdad CHSH.

Para el caso del par  $X$ - $Z$ , obtenemos la máxima violación de  $B_{CHSH} = 2.036$  para los valores  $P_x = 0.095$ ,  $P_z = 0.053$ ,  $\theta = \pi/5$ ,  $\tau_2 = 2.8$ ,  $\tau_3 = 5$ ,  $k_2 = 0.3$ ,  $k_3 = 0.3$ ,  $x_0 = 4$ ,  $z_0 = 4$ ,  $X' = 0.18$  y  $Z' = 1.6$ . El máximo se alcanza para los valores de  $X = 0.844$  y  $Z = 3.234$ .

En el caso del par de variables  $X$ - $\theta$  encontramos una máxima violación de  $B_{CHSH} = -2.53132$  para las cantidades  $P_x = 0.76$ ,  $P_z = 0.0019$ ,  $Z = 0.1$ ,  $\tau_2 = 4$ ,  $\tau_3 = 0.1$ ,  $k_2 = 0.3$ ,  $k_3 = 0.3$ ,  $x_0 = 4$ ,  $z_0 = 4$ ,  $X' = -0.128$  y  $\theta' \approx \pi/16$ . Para este caso el máximo se logra para los valores no primados  $X = 1.41$  y  $\theta \approx \pi/6$ .

**CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS  
EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS**

**3.3. NO LOCALIDAD DE LOS EXPERIMENTOS DE STERN GERLACH CONSECUTIVOS**

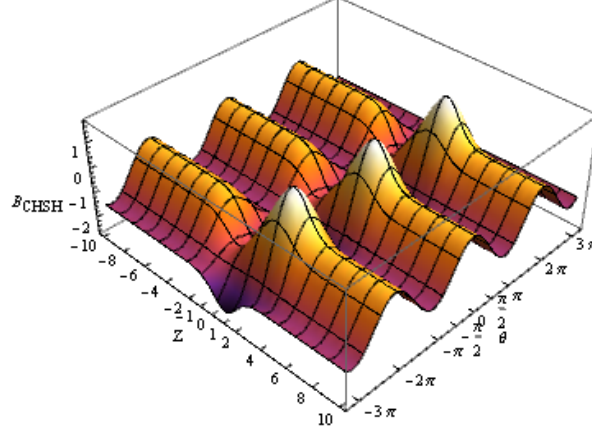


Figura 3.4: Gráfica de  $B_{CHSH}$  para las cantidades primadas  $Z' = 2.4$  y  $\theta' = \frac{\pi}{5}$ . Encontramos un mínimo de  $-2.62405$  para esta función, de esta manera, existe una violación para la desigualdad (3.32) por una cantidad de  $0.62405$ , es decir, alrededor del 75 % de la máxima cantidad de violación,  $\sim 0.8284$ , dada por la cota Cirel'son[54, 66, 90].

No.	$B_{CHSH}$	$X$	$P_x$	$P_z$	$Z'$	$\theta'$	$\tau_2$	$\tau_3$	$k_2$	$k_3$	$x_0$	$z_0$
1.	-2.58865	0.1	0.1298	0.04963	2.2	$\pi/5$	6.8	2.6	0.3	0.3	4	4
2.	-2.6103	0.1	0.1298	0.04963	2.3	$\pi/5$	6.8	2.6	0.3	0.3	4	4
3.	-2.62405	0.1	0.1298	0.04963	2.4	$\pi/5$	6.8	2.6	0.3	0.3	4	4
4.	-2.62844	0.1	0.1298	0.04963	2.5	$\pi/5$	6.8	2.6	0.3	0.3	4	4
5.	-2.62252	0.1	0.1298	0.04963	2.6	$\pi/5$	6.8	2.6	0.3	0.3	4	4
6.	-2.60597	0.1	0.1298	0.04963	2.7	$\pi/5$	6.8	2.6	0.3	0.3	4	4
7.	-1.80902	0.1	0.190919	0.190919	2.5	$\pi/5$	10	10	0.3	0.3	4	4
8.	-1.80902	0.1	0.286378	0.286373	2.5	$\pi/5$	15	15	0.3	0.3	4	4
9.	1.15923	0.1	0.381838	0.381838	2.5	$\pi/5$	20	20	0.3	0.3	4	4
10.	$\approx 0$	0.1	1.90919	1.90919	2.5	$\pi/5$	100	100	0.3	0.3	4	4
11.	-2.01543	0.1	0.04963	0.04963	2.5	$\pi/5$	2.6	2.6	0.3	0.3	4	4
12.	-2.01798	0.1	0.053457	0.04963	2.5	$\pi/5$	2.8	2.6	0.3	0.3	4	4
13.	-2.02211	0.1	0.061094	0.04963	2.5	$\pi/5$	3.2	2.6	0.3	0.3	4	4
14.	-2.02787	0.1	0.076367	0.04963	2.5	$\pi/5$	4	2.6	0.3	0.3	4	4
15.	-2.01176	0.1	0.095459	0.04963	2.5	$\pi/5$	5	2.6	0.3	0.3	4	4
16.	1.49842	0.1	0.04963	0.129825	2.5	$\pi/5$	2.6	6.8	0.3	0.3	4	4
17.	1.55986	0.1	0.04963	0.129825	2.1	$\pi/5$	2.6	6.8	0.3	0.3	4	4
18.	1.56884	0.1	0.04963	0.129825	2.1	$\pi/2$	2.6	6.8	0.3	0.3	4	4

Tabla 3.1: Valores para  $B_{CHSH}$  para varios valores de los parámetros para el caso  $Z$ - $\theta$ . Podemos observar diversos valores para las constantes, note que para tiempos grandes  $B_{CHSH}$  tiende a 0.

**CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS  
EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS**

**3.3. NO LOCALIDAD DE LOS EXPERIMENTOS DE STERN GERLACH CONSECUTIVOS**

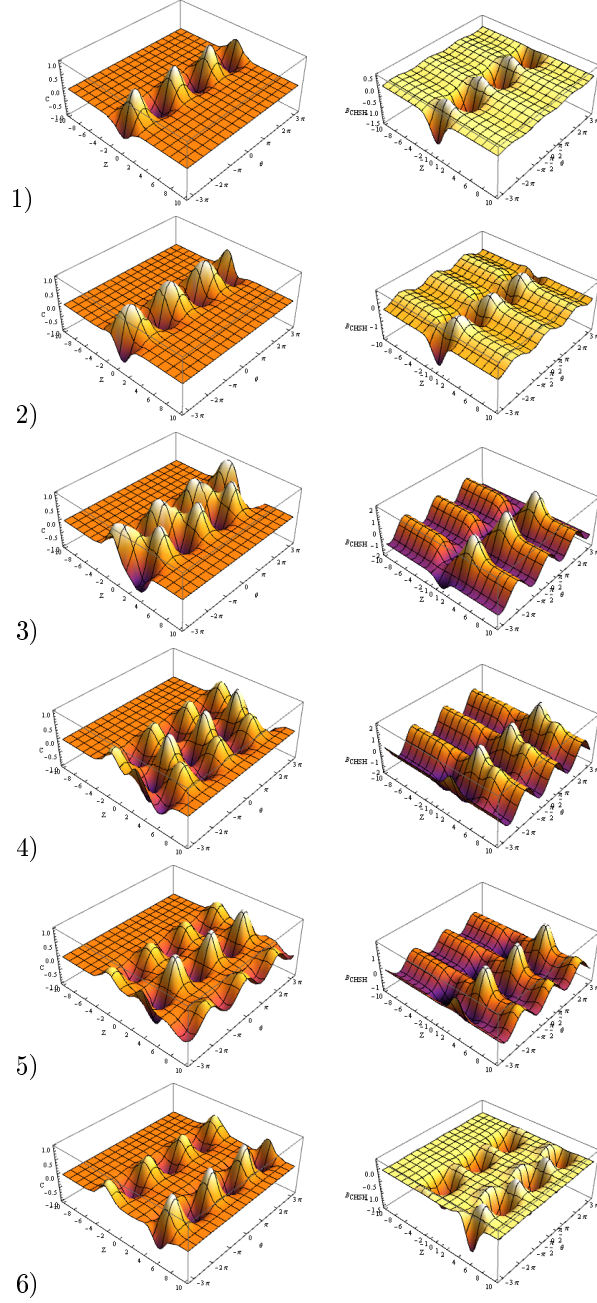


Figura 3.5: Gráficas de la función de correlación para el par  $Z$ - $\theta$  (columna izquierda) y de su correspondiente función de Bell,  $B_{CHSH}$  (columna derecha), para diversos tiempos  $\tau_3$ . Para todos los casos de esta figura,  $X = 0.1$ ,  $P_x = 0.129$ ,  $P_z = 0.049$ ,  $\tau_2 = 6.8$ ,  $k_2 = 0.3$ ,  $k_3 = 0.3$ ,  $x_0 = 4$ ,  $z_0 = 4$ ,  $Z' = 2.4$  y  $\theta' = \frac{\pi}{5}$ . Para el caso 1) tenemos  $\tau_3 = 0$ , para el caso 2)  $\tau_3 = 1$ , para 3)  $\tau_3 = 3$ , para 4)  $\tau_3 = 5$ , para 5)  $\tau_3 = 7$  y para 6)  $\tau_3 = 9$ . Vemos como la función de correlación se va separando en varias partes conforme aumenta  $\tau_3$ , mientras que  $B_{CHSH}$  mantiene una forma parecida en la mayoría de los tiempos hasta el caso 6) donde se observa una serie de mínimos muy marcados.

**CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS  
EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS**

**3.3. NO LOCALIDAD DE LOS EXPERIMENTOS DE STERN GERLACH CONSECUTIVOS**

**Desigualdad de Bell-Klyshko-Mermin**

Nuestro tratamiento para el estudio de correlaciones y el número de GDL en el sistema nos permite evaluar no localidad bipartita entre tres partes del sistema, el caso de mayor interés es el de la triada  $X$ - $Z$ - $\theta$ . La desigualdad de Bell-Klyshko-Mermin que usamos para este propósito es la siguiente [54, 66, 88, 89]:

$$\begin{aligned}
 -2 \leq B_{BKM} = & C(X, P_x, Z, P_z, \theta') + C(X, P_x, Z', P_z, \theta) \\
 & + C(X', P_x, Z, P_z, \theta) - C(X', P_x, Z', P_z, \theta') \leq 2.
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$

En este caso necesitamos fijar las variables  $P_x, P_z, X', Z'$  y  $\theta'$ . La verificación de la Ec. (3.33) puede ser llevada a cabo solo numéricamente y no es posible visualizar ninguna gráfica de  $B_{BKM}$  debido al número de GDL en la desigualdad de Bell-Klyshko-Mermin. Nuestro estudio de la desigualdad de la Ec. (3.33) nos da como valor máximo para  $B_{BKM}$  la cantidad 2.43257 con  $X = 0.815, Z = 1.546$  y  $\theta \approx \pi/4$ , demostrando la violación de la desigualdad (3.33) para las cantidades fijas  $P_x = 0.051, P_z = 0.089, X' = 0.83, Z' = 3.3$  y  $\theta' = \frac{\pi}{2}, \tau_2 = 2.7, \tau_3 = 4.7, k_2 = 0.3, k_3 = 0.3, x_0 = 4$  y  $z_0 = 4$ .

Una tabla para varios valores de las constantes muestran un esbozo del comportamiento de  $B_{BKM}$ , véase Tabla 3.2.

No.	$B_{BKM}$	$P_x$	$P_z$	$X'$	$Z'$	$\theta'$	$\tau_2$	$\tau_3$	$k_2$	$k_3$	$x_0$	$z_0$
1.	-2.01495	0.0515481	0.039598	0.83	1.5	$9\pi/10$	2.7	7	0.3	0.2	4	4
2.	-1.98623	0.0515481	0.039598	0.83	1.5	$4\pi/10$	2.7	7	0.3	0.2	4	4
3.	2.01033	0.0515481	0.039598	0.83	1.75	$4\pi/10$	2.7	7	0.3	0.2	4	4
4.	2.0196	0.0515481	0.039598	0.95	1.75	$4\pi/10$	2.7	7	0.3	0.2	4	4
5.	2.03421	0.0515481	0.039598	0.95	1.75	$\pi - (\pi/13)$	2.7	7	0.3	0.2	4	4
6.	2.42815	0.0515481	0.0897319	0.95	3.3	$\pi/2$	2.7	7	0.3	0.3	4	4
7.	2.43168	0.0515481	0.0897319	0.89	3.3	$\pi/2$	2.7	7	0.3	0.3	4	4
8.	2.43257	0.0515481	0.0897319	0.85	3.3	$\pi/2$	2.7	7	0.3	0.3	4	4
9.	1.76862	0.0954594	0.0954594	0.85	3.3	$\pi/2$	5	5	0.3	0.3	4	4
10.	-1	0.190919	0.190919	0.85	3.3	$\pi/2$	10	10	0.3	0.3	4	4
11.	$\approx 0$	0.190919	0.954594	0.85	3.3	$\pi/2$	10	50	0.3	0.3	4	4

Tabla 3.2: Valores para  $B_{BKM}$  para varios valores de los parámetros para el caso  $X$ - $Z$ - $\theta$ . Vemos que para tiempos grandes  $B_{BKM}$  se hace cada vez más pequeña.

**CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS  
EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS**

**3.3. NO LOCALIDAD DE LOS EXPERIMENTOS DE STERN GERLACH CONSECUTIVOS**

**Desigualdad de Svetlichny**

Nuestro tercer análisis de no localidad está dado por la desigualdad de Svetlichny [55, 86, 87] para  $X$ ,  $Z$  y  $\theta$ . Recordemos que esta desigualdad detecta correlaciones reales entre tres sistemas. La desigualdad de Svetlichny está dada por

$$\begin{aligned}
 -4 \leq B_S = & \mathbf{C}(X, P_x, Z, P_z, \theta) + \mathbf{C}(X, P_x, Z, P_z, \theta') \\
 & + \mathbf{C}(X, P_x, Z', P_z, \theta) - \mathbf{C}(X, P_x, Z', P_z, \theta') + \mathbf{C}(X', P_x, Z, P_z, \theta) \\
 & - \mathbf{C}(X', P_x, Z, P_z, \theta') - \mathbf{C}(X', P_x, Z', P_z, \theta) - \mathbf{C}(X', P_x, Z', P_z, \theta') \leq 4,
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

fijando  $P_x$ ,  $P_z$ ,  $X'$ ,  $Z'$  y  $\theta'$ . Nuestro estudio exhaustivo de la desigualdad de la Ec. (3.34) nos permite reportar la no violación de la desigualdad de Svetlichny para nuestro sistema. Obtenemos el máximo de  $B_S \lesssim 4$  para las cantidades fijas  $P_x = 0.043$ ,  $P_z = 0.066$ ,  $X' = 0.52$ ,  $Z' = 1.49$  y  $\theta' = \frac{\pi}{5}$ ,  $\tau_2 = 2.3$ ,  $\tau_3 = 3.5$ ,  $k_2 = 0.3$ ,  $k_3 = 0.3$ ,  $x_0 = 4.5$  y  $z_0 = 5.2$ .

Sin embargo, hemos verificado nuestro sistema con dos versiones débiles de la desigualdad de Svetlichny, la primera dada por la referencia [55],

$$\begin{aligned}
 B_{SV1} = & -\mathbf{C}(X, P_x, Z, P_z, \theta) + \mathbf{C}(X, P_x, Z', P_z, \theta) \\
 & + \mathbf{C}(X', P_x, Z, P_z, \theta) + \mathbf{C}(X', P_x, Z', P_z, \theta) + \mathbf{C}(X, P_x, Z, P_z, \theta') \\
 & + \mathbf{C}(X, P_x, Z', P_z, \theta') + \mathbf{C}(X', P_x, Z, P_z, \theta') - \mathbf{C}(X', P_x, Z', P_z, \theta') \leq 4,
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

y la segunda dada por la desigualdad 185 en la referencia [56],

$$\begin{aligned}
 B_{SV2} = & -\mathbf{C}(X, P_x, Z, P_z, \theta) - \mathbf{C}(X, P_x, Z', P_z, \theta) \\
 & + \mathbf{C}(X', P_x, Z, P_z, \theta) - \mathbf{C}(X', P_x, Z', P_z, \theta) - \mathbf{C}(X, P_x, Z, P_z, \theta') \\
 & + \mathbf{C}(X, P_x, Z', P_z, \theta') - \mathbf{C}(X', P_x, Z, P_z, \theta') - \mathbf{C}(X', P_x, Z', P_z, \theta') \leq 4.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

En ambos casos, para  $B_{SV1}$  y  $B_{SV2}$ , no encontramos ninguna violación para una gran variedad de casos para diferentes valores. Este resultado está en concordancia con el máximo hallado en la desigualdad de Bell-Klyshko-Mermin, Ec. (3.33), porque la máxima violación no es más grande que  $2\sqrt{2}$  para nuestro caso [54, 91].

**CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS  
EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS**

**3.4. METODOLOGÍA PARA EL CÁLCULO NUMÉRICO DE LAS FUNCIONES DE BELL**

### 3.4. Metodología para el cálculo numérico de las funciones de Bell

El cálculo numérico de las funciones de Bell para cada una de las desigualdades de la Sección 3.3 se llevó a cabo utilizando maximizaciones y minimizaciones numéricas en *Mathematica*. El programa creado para tal fin se ve esquematizado en el siguiente código

```

τ2 = 2.7
τ3 = 4.7
k2 = 0.3
k3 = 0.3
z0 = 4
x0 = 4

C(X, Px, Z, Pz, θ)

Px = (1/√2) * k23 * t2
Pz = (1/√2) * k33 * t3

Maximo = Maximize[C(X, Px, Z, Pz, θ), {X, Z, θ}]
Minimo = Minimize[C(X, Px, Z, Pz, θ), {X, Z, θ}]

M0 = Abs[NMaxValue[{C(X, Px, Z, Pz, θ), -35 ≤ X ≤ 35, -35 ≤ Z ≤ 35, -12 * π ≤ θ ≤ 12 * π}]]
M1 = Abs[NMaxValue[{C(X, Px, Z, Pz, θ), -35 ≤ X ≤ -30, -35 ≤ Z ≤ -30, -12 * π ≤ θ ≤ 12 * π}]]
M2 = Abs[NMinValue[{C(X, Px, Z, Pz, θ), -35 ≤ x ≤ -30, -35 ≤ z ≤ -30, -12 * π ≤ θ ≤ 12 * π}]]
.
.
.
M(n - 1) = Abs[NMaxValue[{C(X, Px, Z, Pz, θ), 30 ≤ X ≤ -35, 30 ≤ Z ≤ 35, -12 * π ≤ θ ≤ 12 * π}]]
Mn = Abs[NMinValue[{C(X, Px, Z, Pz, θ), 30 ≤ X ≤ -35, 30 ≤ Z ≤ 35, -12 * π ≤ θ ≤ 12 * π}]]

N = Max[Maximo, Minimo, M0, M1, M2, ..., Mn]

BBKM/N

V01 = Maximize[BBKM/N, θ], {X, Z, θ}]
V02 = Minimo = Minimize[BBKM/N, {X, Z, θ}]

V0 = Abs[NMaxValue[BBKM/N, -35 ≤ X ≤ 35, -35 ≤ Z ≤ 35, -12 * π ≤ θ ≤ 12 * π}]]
V1 = Abs[NMaxValue[BBKM/N, -35 ≤ X ≤ -30, -35 ≤ Z ≤ -30, -12 * π ≤ θ ≤ 12 * π}]]
V2 = Abs[NMinValue[BBKM/N, -35 ≤ x ≤ -30, -35 ≤ z ≤ -30, -12 * π ≤ θ ≤ 12 * π}]]
.
.
.
V(n - 1) = Abs[NMaxValue[BBKM/N, 30 ≤ X ≤ -35, 30 ≤ Z ≤ 35, -12 * π ≤ θ ≤ 12 * π}]]
Vn = Abs[NMinValue[BBKM/N, 30 ≤ X ≤ -35, 30 ≤ Z ≤ 35, -12 * π ≤ θ ≤ 12 * π}]]

BellMax = Max[V01, V02, V0, V1, V2, ..., Vn]

```

Como podemos apreciar en el esquema de arriba primero definimos las constantes que no formarán parte de la maximización como lo son los tiempos,  $\tau_2$  y  $\tau_3$ , las constantes  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $z_0$  y  $x_0$ , luego de eso definimos la función de correlación para cada caso. Los momentos también son constantes, en particular utilizamos el hecho de que  $P_{2,3} \cong (1/\sqrt{2}) * k_{2,3}^3 * t_{2,3}$  [15].

Luego de esto realizamos maximizaciones y minimizaciones en intervalos para normalizar nu-

## CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS

### 3.5. RELACIÓN ENTRE CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO EN LOS ESGC

---

méricamente la función de correlación y después tomamos los valores absolutos de estos máximos y mínimos y tomamos el mayor de ellos que llamamos  $N$ .

El siguiente paso es escribir la función de Bell para cada caso particular y dividimos sobre  $N$ .

Finalmente maximizamos y minimizamos la función de Bell normalizada para verificar si se viola la desigualdad para cada caso.

Una cuestión importante acerca de nuestro cálculo numérico es que nos fue imposible normalizar la función de correlación analíticamente a pesar de que nuestro estado final, Ec. (3.11), se encuentra normalizado. Pensamos que este fenómeno se debe a que el operador de Wigner, Ec. (3.10), al realizar el mapeo de cambio al espacio fase invalida la normalización de nuestro estado en el espacio de posiciones. Realizamos esfuerzos para poder normalizar la función de correlación con integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(X, P_x, Z, P_z, \theta) dV, \quad (3.37)$$

donde  $dV$  es un diferencial de una o más variables de la función de correlación. Como se puede observar este tipo de integrales son en su forma más general quintuples, por lo que calcularlas analíticamente es difícil o imposible. Esta es la principal razón por la que en nuestros cálculos optamos por una normalización numérica.

Otra cuestión importante que resaltar es que los valores utilizados para las constantes son valores aproximados a los reales del experimento [15, 16], los tiempos  $\tau_{2,3}$ , momentos  $P_{X,Z}$ , la intensidad del campo inhomogéneo y homogéneo con las constantes  $k_2, k_3$  y  $x_0, z_0$  respectivamente. Esto hace a nuestro trabajo comparable con resultados experimentales que pudieran llevarse a cabo.

### 3.5. Relación entre correlaciones y enredamiento en los ESGC

El enredamiento en el ESG ha sido ampliamente estudiado en años recientes, por ejemplo puede ver [16, 17, 50]. Uno de los principales objetivos de estas descripciones del enredamiento es la cuantificación del mismo por medio de medidas de enredamiento ya sea en sistemas discretos, continuos o híbridos.

Nuestro tratamiento de las correlaciones cuánticas es directamente equiparable con el estudio del enredamiento del ESG por Roston et. al.[16] y Piceno Martínez et. al. [50], debido a que mantenemos la misma descripción cuántica del ESG de [50] y la misma dependendencia temporal en la función de correlación, Ec. (3.22), y el enredamiento de [16, 50].

Para el caso de la desigualdad de CHSH, la máxima violación encontrada en la desigualdad de la Ec. (3.32) es alcanzada para  $\tau_2 = 6.8$ ,  $\tau_3 = 2.6$ ,  $k_2 = 0.3$ ,  $k_3 = 0.3$ . Para los valores del tiempo adimensional  $\tau_2 = 6.8$  con  $k_2 = 0.3$ , el máximo enredamiento entre  $X$  y  $\theta$  es casi alcanzado después del primer ESG, mientras que para  $\tau_3 = 2.6$  con  $k_3 = 0.3$ , el enredamiento sería pequeño; ver Figura 3.6. Por lo tanto, no hay una relación aparente entre el enredamiento y la existencia de máxima no localidad, la única cosa que podemos asegurar es que en presencia de máximas correlaciones cuánticas existe enredamiento.

Reportamos la no violación de la desigualdad de CHSH de los ESGC para tiempos,  $\tau_{2,3}$  donde el enredamiento es máximo, por ejemplo  $\tau_{2,3} = 10$  para  $k_{2,3} = 0.3$ , ver Tabla 3.1 y Figura 3.7, un resultado contraintuitivo a primera vista pero que concuerda con estudios previos de la no localidad con máximo enredamiento [92, 93], donde se prueba que estados máximamente enredados no violan desigualdades de tipo Bell.

Esperamos que para el caso con más GDL involucrados, el enredamiento en los ESGC tendrá un comportamiento similar al ESG original, está es una expectativa razonable. De esta forma, también reportamos la no violación de la desigualdad de Bell-Klyshko-Mermin y de las desigualdades de Svetlichny cuando  $\tau_{2,3} \rightarrow \infty$ , es decir, en estos casos, anticipamos la falta de correlaciones cuánticas cuando el enredamiento multipartita en aquellos casos es máximo.

**CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS  
EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS**

**3.5. RELACIÓN ENTRE CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO EN LOS ESGC**

---

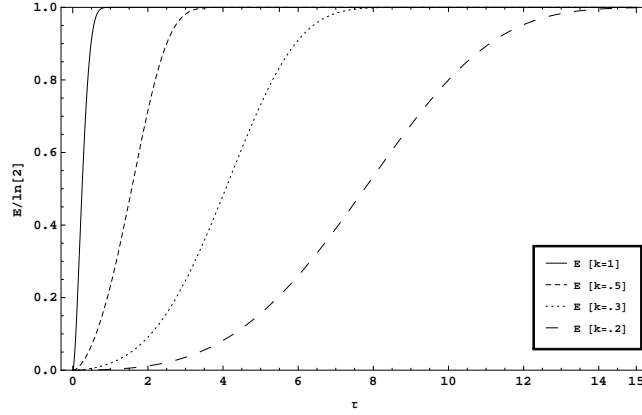


Figura 3.6: Entropía de enredamiento ( $E$ ) del ESG para varios valores de  $k$  para el tiempo  $\tau$ . En los ESGC, tenemos  $k_{2,3}$  y  $\tau_{2,3}$ , que son equivalentes a estas constantes sin numerar. De esta forma podemos directamente comparar el comportamiento temporal de las correlaciones cuánticas y el enredamiento en los ESGC dependiendo del parámetro  $k$ . Gráfica replicada de [50].

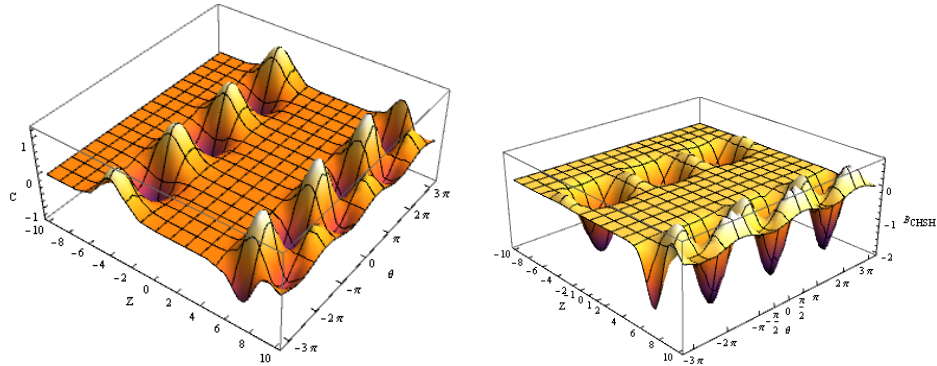


Figura 3.7: Gráfica de la función de correlación para el par  $Z$ - $\theta$  (izquierda) y para su correspondiente función de Bell,  $B_{CHSH}$  (derecha), para los valores que corresponden a  $X = 0.1$ ,  $P_x = 0.190919$ ,  $P_z = 0.190919$ ,  $Z' = 2.5$ ,  $\theta' = \pi/5$ ,  $\tau_2 = 10$ ,  $\tau_3 = 10$ ,  $k_2 = 0.3$ ,  $k_3 = 0.3$ ,  $x_0 = 4$  y  $z_0 = 4$  que corresponden al número 7 en la Tabla 3.1. Podemos ver de estas gráficas como la función de correlación y la de Bell son más pequeñas, comparadas con otros tiempos menores, debido a que existe máximo enredamiento en el sistema.

### 3.6. Distribución de probabilidad para los ESGCM

En esta sección mostraremos la distribución de probabilidad de los experimentos modificados, cuyo estado final escrito de la forma adimensional aparece en la Ec.(3.11), y veremos su comportamiento en el tiempo.

La densidad de probabilidad para este caso está dada como,

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_m(\tau_3) | \psi_m(\tau_3) \rangle = & |M|^2 \exp \left\{ \frac{-1}{4 [1 + (\tau_2 + \tau_3)^2]} \left\{ 2Z^2 + 4 (k_3^3 \tau_3^2)^2 - 16 (k_3^3 \tau_3)^2 [1 + (\tau_2 + \tau_3)^2] \right\} \right\} \\
 & \times \exp \left\{ \frac{-1}{4 [1 + (\tau_2 + \tau_3)^2]} \left\{ 2X^2 + 4 (k_2^3 \tau_2^2)^2 - 16 (k_2^3 \tau_2)^2 [1 - \tau_2^2 + 2\tau_2 (\tau_2 + \tau_3)] + 16 (k_2^3 \tau_2)^2 \tau_2 \tau_3 \right\} \right\} \\
 & \times \left( 2 \exp \left\{ \frac{-1}{4 [1 + (\tau_2 + \tau_3)^2]} (4\sqrt{2} k_3^3 \tau_3^2 Z) \right\} \right. \\
 & \times \left. \left( \cosh \left\{ \frac{-1}{4 [1 + (\tau_2 + \tau_3)^2]} (2X \{ 2\sqrt{2} k_2^3 \tau_2^2 + 4\sqrt{2} k_2^3 \tau_2 \tau_3 \}) \right\} \right) \right) \\
 & + \cos \left\{ \frac{-1}{4 [1 + (\tau_2 + \tau_3)^2]} (2X \{ 2\sqrt{2} k_2^3 \tau_2^2 (\tau_2 + \tau_3) - 4\sqrt{2} k_2^3 \tau_2 [1 + \tau_2 (\tau_2 + \tau_3)] \}) + 2\sqrt{2} k_2^3 \tau_2 x_0 \right\} \\
 & + 2 \exp \left\{ \frac{-1}{4 [1 + (\tau_2 + \tau_3)^2]} (-4\sqrt{2} k_3^3 \tau_3^2 Z) \right\} \\
 & \times \left( \cosh \left\{ \frac{-1}{4 [1 + (\tau_2 + \tau_3)^2]} (2X \{ 2\sqrt{2} k_2^3 \tau_2^2 + 4\sqrt{2} k_2^3 \tau_2 \tau_3 \}) \right\} \right) \\
 & - \cos \left\{ \frac{-1}{4 [1 + (\tau_2 + \tau_3)^2]} (2X \{ 2\sqrt{2} k_2^3 \tau_2^2 (\tau_2 + \tau_3) - 4\sqrt{2} k_2^3 \tau_2 [1 + \tau_2 (\tau_2 + \tau_3)] \}) + 2\sqrt{2} k_2^3 \tau_2 x_0 \right\} \Bigg) \Bigg) ,
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

con  $|M|^2$

$$\frac{1}{4} (\sigma_0)^{-2} \left[ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \right]^2 [1 + (\tau_2 + \tau_3)^2]^{-1} \exp \left[ -4 \left( (k_2^3 \tau_2)^2 + (k_3^3 \tau_3)^2 \right) \right] \tag{3.39}$$

Las Ecs. (3.38) y (3.39) toman en cuenta solamente la evolución del sistema en el plano  $X$ - $Z$ .

Vemos en la Figura 3.8 la evolución temporal de la distribución de probabilidad para el plano  $X$ - $Z$ . Se observa que al pasar a través del segundo experimento de Stern-Gerlach las dos primeras áreas de probabilidad de hallar a las partículas se parten en dos para finalmente obtener cuatro áreas donde podremos encontrar a las partículas si colocáramos una pantalla al final del experimento. Esta división es debida al espín intrínseco de las partículas.

En la Figura 3.9 se pueden ver dos distribuciones de probabilidad pertenecientes a los momentos donde se hallaron las máximas violaciones de las desigualdades de la Sección 3.3, a diferencia de las distribuciones mostradas en la Figura 3.8 en estas no es posible observar dos distribuciones separadas de partículas por su espín, en su lugar solamente aparece un área circular relativamente uniforme.

**CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS  
EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS**  
3.6. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD PARA LOS ESGCM

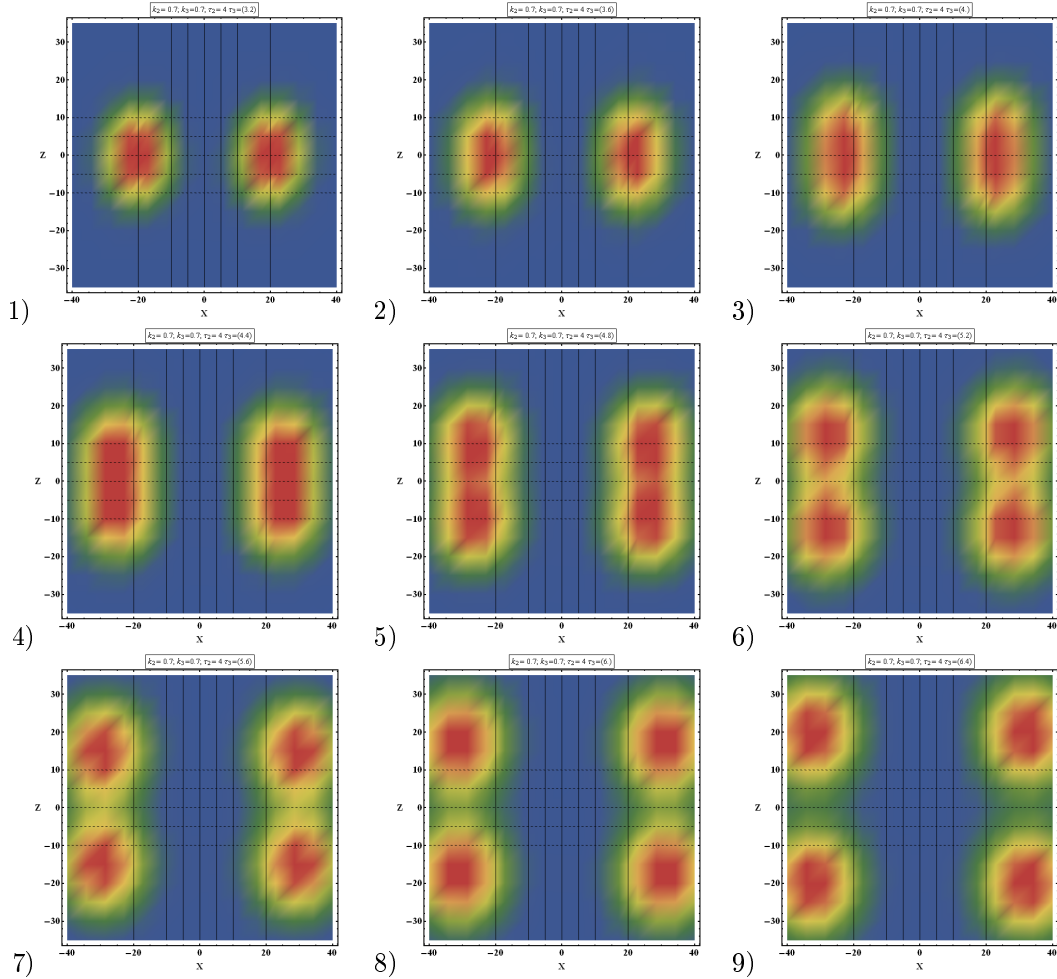


Figura 3.8: Gráficas de la densidad de probabilidad de los experimentos consecutivos de Stern-Gerlach modificados, Ec.(3.38), para las constantes  $k_2 = 0.7$ ,  $k_3 = 0.7$ ,  $x_0 = 4$  y  $\sigma_0 = 1$ . En la imagen 1) se observa la probabilidad al tiempo  $\tau_2 = 4$  y  $\tau_3 = 2.6$ , en las posteriores imágenes, de la 2) a la 9), se va aumentando el tiempo  $\tau_3$  en intervalos de 0.4 hasta el tiempo  $\tau_3 = 6.4$ . El tiempo  $\tau_3$  aparece en la parte de arriba de cada imagen. Vemos que conforme pasa el sistema a través del segundo experimento este actúa de una manera en que la probabilidad de encontrar a las partículas al salir se distribuye en cuatro diferentes regiones.

El cálculo y representación gráfica de la distribución de probabilidad de los experimentos consecutivos apoya la idea de que el experimento pensado acerca del steering, subsección 3.1.4, es correcto debido a la separación de la distribución de probabilidad en la Figura 3.8, esto hace mucho más robusta nuestra aseveración de que existe no localidad y no solamente no contextualidad en los experimentos consecutivos. Por otro lado la falta de una separación como la que aparece en la Figura 3.8 en la Figura 3.9 nos hace invocar nuevamente el concepto de distinguibilidad de estados, pues precisamente esta falta de separación podría considerarse ambigua para este caso, debido a que estamos encontrando que la distribución de probabilidad donde se halla violación posee una cierta área, que bien podríamos considerar de antemano dividida por un plano transversal y adjudicar el medio círculo de arriba al espín arriba y la mitad de abajo al espín abajo, acción que teóricamente realiza de una manera natural nuestra propuesta de operador de Wigner, Ec. (3.10). En otro orden de ideas, podría intentarse utilizar el estado de máxima no localidad que hemos

**CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS  
EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS**  
3.7. CONCLUSIONES

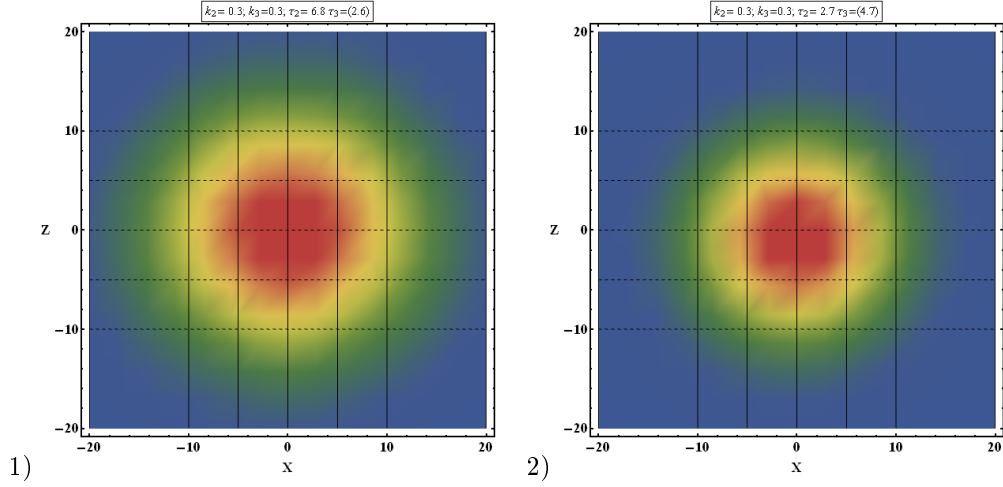


Figura 3.9: 1) Distribución de probabilidad para las constantes  $k_2 = 0.3$ ,  $k_3 = 0.3$ ,  $x_0 = 4$  y  $\sigma_0 = 1$  al tiempo  $\tau_2 = 6.8$  y  $\tau_3 = 2.6$  que corresponde al momento donde la máxima violación de la desigualdad CHSH fue hallada, véase Fig 3.4. 2) Distribución de probabilidad para las constantes  $k_2 = 0.3$ ,  $k_3 = 0.3$ ,  $x_0 = 4$  y  $\sigma_0 = 1$  al tiempo  $\tau_2 = 2.7$  y  $\tau_3 = 4.7$  que corresponde al momento donde la máxima violación de la desigualdad de Bell-Klyshko-Mermin fue encontrada.

encontrado y evolucionarlo en el vacío para que este presente una distinguibilidad mayor, debido al ensanchamiento de los paquetes de onda asociados al espín no incrementando su enredamiento como se observa en el modelo que hemos descrito, y de esta forma verificar las desigualdades de tipo Bell en estados con mayor distinguibilidad. Tal vez nos sea posible explorar esta idea en un trabajo posterior.

### 3.7. Conclusiones

En este capítulo hemos estudiado la no localidad de los ESGC. Hemos dado un repaso a temas y conceptos imprescindibles para poder entender la no localidad cuántica de una forma general y así poderla estudiar particularmente en nuestro sistema. Una discusión que existe actualmente es que no es posible encontrar no localidad en sistemas que tienen enredamiento entre sus propios GDL. Nosotros, con el apoyo de esta descripción y de varios otros trabajos, consideramos que el ESG y los ESGC son no locales. Además hemos demostrado que estos poseen la propiedad de steering.

Hemos encontrado violación de las desigualdades CHSH y de Bell-Klyshko-Mermin, sin embargo el estado evolucionado de los ESGC no viola las desigualdades de Svetlichny. Entonces concluimos que existe no localidad en los ESGC en el caso bipartita pero no podemos asegurar la existencia de no localidad tripartita ni enredamiento tripartita real debido a la falta de violación de las desigualdades de Svetlichny [54, 55, 57, 87, 91]. Este resultado no implica que una violación de la desigualdad de Svetlichny no puede existir para los ESGC pero no podemos proveer una prueba de la violación de tal desigualdad.

El resultado sorprendente del ESG con la separación espacial de los espines está también presente en la evolución de los ESGC, donde nuestra descripción del estado evolucionado indica la presencia de enredamiento entre espín y posición. Además de corroborar esto al realizar el cálculo de la distribución de probabilidad de los ESGC. El carácter cuántico de los ESGC cobra importancia cuando se prueba que las correlaciones entre posición y espín son no locales, y por lo tanto, naturalmente no clásico. Las correlaciones cuánticas del estado híbrido tripartita de los ESGC fueron exitosamente caracterizadas mediante una generalización de la función de correlación BW. La función propuesta dicotomiza los GDL espaciales usando el operador de paridad y combina esta

**CAPÍTULO 3. CORRELACIONES Y ENREDAMIENTO DE LOS  
EXPERIMENTOS CONSECUTIVOS**  
3.7. CONCLUSIONES

---

descripción con la usual para variables discretas [22]. Con estos resultados, los ESGC presentan un caso importante de no localidad híbrida.

Más aún, fue encontrado que la violación de la desigualdad CHSH para el par correlacionado  $Z-\theta$ ,  $Z$  siendo la dirección de la última separación dada por el ESG, tiene un máximo valor de 2.62. Esta es una sustancial y considerable violación, apreciablemente cerca al máximo valor para la violación de la desigualdad CHSH para dos sistemas de  $2\sqrt{2}$  [90]. También, una muy buena violación para este tipo de operadores de Bell [84, 85].

Por otro lado, la violación máxima de la desigualdad de Bell-Klyshko-Mermin encontrada para el estado de los ESGC es 2.43 para la terna  $X-Z-\theta$ . Esto prueba la no localidad tripartita de los ESGC, pero esta desigualdad detecta de igual forma la no localidad bipartita entre múltiples correlaciones entre pares. La violación encontrada es en este caso lejana al máximo posible de 4 para la desigualdad tripartita [54].

La no violación de las desigualdades de Svetlichny indica que no hay presencia de no localidad tripartita real ni enredamiento tripartita real en los experimentos consecutivos. Esto significa que el enredamiento y la no localidad tripartitas del experimento podría reducirse a un modelo de biparticiones del sistema, es decir que existen solamente correlaciones por pares de GDL. Podemos relacionar estos resultados con la presencia de enredamiento en el ESG. En el ESG usual, enredamiento híbrido se crea, tan pronto como existe interacción entre el haz de partículas y el campo inhomogéneo, incrementando con el tiempo de evolución con el campo hasta alcanzar el enredamiento máximo posible [16, 50]. En el punto de máximo enredamiento la distribución de probabilidad del ESG unitario se separa en dos secciones. Probamos que este fenómeno también sucede en los ESGC. Sin embargo, en la configuración completa no localidad bipartita no ha sido encontrada para parámetros de la evolución de los ESGC en los que esperamos enredamiento máximo. No localidad tripartita en la forma de una violación de la desigualdad de Bell-Klyshko-Mermin no es encontrada tampoco para parámetros que darían enredamiento máximo. Este resultado está de acuerdo con estudios previos donde se muestra que sistemas con enredamiento máximo presentan poca o nula no localidad. Podemos asegurar que en los puntos donde la no localidad ha sido encontrada, existe enredamiento tripartita en el estado de los ESGC, pero este enredamiento no es perfecto.

Finalmente, calculamos y revisamos la distribución de probabilidad de los experimentos consecutivos y encontramos que la famosa separación de espines está presente para nuestra función de onda de nuestro estado final evolucionado. La separación de nuestra función de onda apoya nuestro experimento pensado de steering y la presencia de no localidad de los experimentos consecutivos.



# Conclusiones Finales

En este trabajo de tesis doctoral hemos estudiado ampliamente a los experimentos de Stern-Gerlach consecutivos. Revisamos su dinámica en el tiempo utilizando un método que, hasta donde sabemos, no se había utilizado para describirlos. Tal dinámica nos indica que este sistema posee enredamiento entre sus GDL de posición y espín. Más aún, nos dedicamos a describir otras características cuánticas de este sistema, encontrando que los ESGC son un sistema no local, con presencia de steering, además, certificamos la existencia de enredamiento bipartita entre sus GDL. Para realizar tales tareas tuvimos que resolver la Ecuación de Schrödinger para cada uno de los experimentos consecutivos, obteniendo por primera vez la dinámica de este sistema de una manera completamente cuántica y así sentando las bases para estudios posteriores que tengan que ver con el ESG teórica o experimentalmente. Para poder estudiar las correlaciones presentes en el experimento propusimos una generalización de la función de correlación para el ESG unitario y usamos esta función como principal elemento en el estudio de desigualdades de tipo Bell, en las cuales encontramos violaciones que indican la presencia de no localidad y enredamiento. Estos resultados concuerdan con trabajos anteriores de no localidad cuántica y respaldan nuestra propuesta de función de correlación, de esta forma podemos decir que la función de correlación que propusimos puede ser utilizada en otros sistemas para el estudio de correlaciones cuánticas e incluso esperamos que en algún punto en el futuro existan trabajos experimentales que comprueben nuestro modelo.

El repaso de los antecedentes históricos relacionados con este trabajo nos amplió el panorama de posibilidades de estudio de nuestro sistema, además de mostrarnos como los ESGC han sido estudiados desde su concepción hasta nuestros días. El ESG es uno de los experimentos fundamentales de la Física y es debido darle un reconocimiento a casi 100 años de su realización, consideramos este trabajo de tesis como una forma de celebrar este acontecimiento.



# Bibliografía

- [1] Gerlach, W. y Stern, O. “Der experimentelle Nachweis des magnetischen Moments des Silberatoms”. *Zeitschrift für Physik*, 8: 110–111 (1922). doi:10.1007/BF01329580.
- [2] Gerlach, W. y Stern, O. “Das magnetische Moment des Silberatoms”. *Zeitschrift für Physik*, 9: 353–355 (1922). doi:10.1007/BF01326983.
- [3] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. y Lalöe, F. *Quantum Mechanics*, tomo 1. John Wiley and Sons Inc. (1977).
- [4] Griffiths, D. J. *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson Prentice Hall, 2<sup>a</sup> ed<sup>ón</sup>. (2004).
- [5] Feynman, R. P., Leighton, R. B. y Sands, M. *The Feynman Lectures on Physics*. Addison Wesley (1966).
- [6] Sakurai, J. J. *Modern Quantum Mechanics*. Prentice Hall (1993).
- [7] Sakurai, J. J. y Napolitano, J. J. *Modern Quantum Mechanics*. Pearson Education Limited, 2<sup>a</sup> ed<sup>ón</sup>. (2010).
- [8] Schmidt-Böcking, H., Schmidt, L., Lüdde, H. J., Trageser, W., Templeton, A. y Sauer, T. “The Stern-Gerlach Experiment Revisited”. *Eur. Phys. J. H*, 41 (4): 327–364 (2016). doi: 10.1140/epjh/e2016-70053-2.
- [9] Friedrich, B. y Herschbach, D. “Stern and Gerlach: How a bad cigar helped reorient atomic physics”. *Physics Today*, 56: 53 (2003).
- [10] Friedrich, B. y Herschbach, D. “Space quantization: Otto Stern’s lucky star”. *Daedalus*, 127: 165 (1998).
- [11] Uhlenbeck, G. E. “Fifty years of spin: Personal reminiscences”. *Phys. Today*, 29 (6): 43–48 (1976).
- [12] Benítez Rodríguez, E., Arévalo Aguilar, L. M. y Piceno Martínez, E. “A full quantum analysis of the Stern-Gerlach experiment using the evolution operator method: Analysing current issues in teaching quantum mechanics”. *Eur. J. Phys.*, 38 (2): 025403 (2017). doi:10.1088/1361-6404/aa51ad.
- [13] Platt, D. E. “A modern analysis of the Stern-Gerlach experiment”. *Am. J. Phys.*, 60: 306 (1992). doi:10.1119/1.17136.

- [14] Reinisch, G. “Stern-Gerlach experiment as the pioneer - and probably the simplest - quantum entanglement test?” *Phys Lett A*, 259: 427–430 (1999).
- [15] Potel, G., Barranco, F., Cruz-Barrios y Gómez-Camacho, J. “Quantum mechanical description of Stern-Gerlach experiments”. *Phys. Rev. A*, 71: 052106 (2005). doi:10.1103/PhysRevA.71.052106.
- [16] Roston, G. B., Casas, M., Plastino, A. y Plastino, A. R. “Quantum entanglement, spin 1/2 and the Stern-Gerlach experiment”. *Eur. J. Phys.*, 26: 657–672 (2005). doi:10.1088/0143-0807/26/4/012.
- [17] Home, D., Pan, A. K., Ali, M. M. y Majumdar, A. S. “Aspects of a nonideal Stern-Gerlach experiment and testable ramifications”. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 40: 13975 (2007). doi:10.1088/1751-8113/40/46/010.
- [18] Benítez Rodríguez, E., Arévalo Aguilar, L. M. y Piceno Martínez, E. “Corrigendum: ‘A full quantum analysis of the Stern–Gerlach experiment using the evolution operator method: Analysing current issues in teaching quantum mechanics’”. *Eur. J. Phys.*, 38: 069501 (2017). doi:10.1088/1361-6404/aa80a3.
- [19] Piceno Martínez, A. E., Benítez Rodríguez, E., Mendoza Fierro, J. A., Méndez Otero, M. M. y Arévalo Aguilar, L. M. “Quantum Nonlocality and Quantum Correlations in the Stern–Gerlach Experiment”. *Entropy*, 20 (4): 299 (2018). ISSN 1099-4300. doi:10.3390/e20040299. URL <http://www.mdpi.com/1099-4300/20/4/299>.
- [20] Ballentine, L. E. *Quantum Mechanics: A Modern Development*. World Scientific (1998).
- [21] Le Bellac, M. *Quantum Physics*. Cambridge University Press, New York (2006).
- [22] Wódkiewicz, K. “Nonlocality of the Schrödinger cat”. *New J. Phys.*, 2: 21–21 (2000). doi:10.1088/1367-2630/2/1/321.
- [23] Kronig, R. *The Samuel A. Goudsmit Papers, 1921–1979*, cap. Box 59 Folder 48 Spin history correspondence (). URL <https://repository.aip.org/islandora/object/nbla%3A233160#page/1/mode/1up>.
- [24] Goudsmit, S. A. “Fifty years of spin: It might as well be spin”. *Phys. Today*, 29 (6): 40–43 (1976).
- [25] Uhlenbeck, G. E. y Goudsmit, S. “Spinning electrons and the structure of spectra”. *Nature*, 117: 264–265 (1926).
- [26] Patil, S. H. “Quantum mechanical description of the Stern-Gerlach experiment”. *Eur. J. Phys.*, 19: 25 (1998). doi:10.1088/0143-0807/19/1/005.
- [27] Díaz Bulnes, J. y Oliveira, I. S. “Construction of exact solutions for the Stern-Gerlach effect”. *Brazilian Journal of Physics*, 31 (3): 488–495 (2001). ISSN 0103-9733. URL [http://www.sbfisica.org.br/bjp/files/v31\\_488.pdf](http://www.sbfisica.org.br/bjp/files/v31_488.pdf).

- [28] Berry, M. V. y Balazs, N. L. “Nonspreading wave packets”. *American Journal of Physics*, 47 (3): 264–267 (1979). doi:10.1119/1.11855.
- [29] Hsu, C. B., Berrondo, M. y Van Huele, J.-F. S. “Stern-Gerlach dynamics with quantum propagators”. *Phys. Rev. A*, 83: 012109 (2011). doi:10.1103/PhysRevA.83.012109.
- [30] Heisenberg, W. “Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik.” *Zeits. für Phys.*, 43 (3): 172–198 (1927). doi:10.1007/bf01397280.
- [31] Güttinger, P. “Das Verhalten von Atomen im magnetischen Drehfeld”. *Zeitschrift für Physik*, 73: 169–184 (1932). doi:10.1007/BF01351211.
- [32] Phipps, T. E. y Stern, O. “Über die Einstellung der Richtungsquantelung”. *Zeitschrift für Physik*, 73: 185–191 (1932). doi:10.1007/BF01351212.
- [33] Rigden, J. S. “Quantum states and precession: The two discoveries of NMR”. *Rev. Mod. Phys.*, 58: 433–448 (1986). doi:10.1103/RevModPhys.58.433. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.58.433>.
- [34] Frisch, R. y Segrè, E. “Über die Einstellung der Richtungsquantelung. II.” *Zeitschrift für Physik*, 80: 610–616 (1933). doi:10.1007/BF01335699.
- [35] Rosen, N. y Zener, C. “Double Stern-Gerlach experiment and related collision phenomena”. *Phys. Rev.*, 40: 502–507 (1932). doi:10.1103/PhysRev.40.502. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.40.502>.
- [36] Rabi, I. I. “Space quantization in a gyrating magnetic field”. *Phys. Rev.*, 51: 652–654 (1937). doi:10.1103/PhysRev.51.652. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.51.652>.
- [37] Rabi, I. I., Millman, S., Kusch, P. y Zacharias, J. R. “The molecular beam resonance method for measuring nuclear magnetic moments. the magnetic moments of  ${}^6_3\text{Li}$ ,  ${}^7_3\text{Li}$  and  ${}^{19}_9\text{F}$ ”. *Phys. Rev.*, 55: 526–535 (1939). doi:10.1103/PhysRev.55.526. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.526>.
- [38] Rabi, I. I., Ramsey, N. F. y Schwinger, J. “Use of rotating coordinates in magnetic resonance problems”. *Rev. Mod. Phys.*, 26: 167–171 (1954). doi:10.1103/RevModPhys.26.167. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.26.167>.
- [39] Schwinger, J. “On nonadiabatic processes in inhomogeneous fields”. *Phys. Rev.*, 51: 648–651 (1937). doi:10.1103/PhysRev.51.648. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.51.648>.
- [40] Toennies, J., Schmidt-Böcking, H., Friedrich, B. y Lower, J. “Otto Stern (1888–1969): The founding father of experimental atomic physics”. *Annalen der Physik*, 523 (12): 1045–1070 (2011). doi:10.1002/andp.201100228. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.201100228>, URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.201100228>.
- [41] McIntyre, D. H. *Quantum Mechanics*. Pearson Education Limited (2012).

- [42] Townsend, J. S. *A Modern Approach to Quantum Mechanics*. University Science Books (2012).
- [43] Schwinger, J. *Quantum Mechanics Symbolism of Atomic Measurements*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1<sup>a</sup> ed<sup>ón</sup>. (2001). ISBN 978-3-662-04589-3. doi:10.1007/978-3-662-04589-3.
- [44] García Quijas, P. C. y Arévalo Aguilar, L. M. “Overcoming misconceptions in quantum mechanics with the time evolution operator”. *Eur. J. Phys.*, 28: 147–159 (2007). doi:10.1088/0143-0807/28/2/001.
- [45] Arévalo Aguilar, L. M., Velasco Luna, F., Robledo-Sánchez, C. y Arroyo-Carrasco, M. L. “The infinite square well potential and the evolution operator method for the purpose of overcoming misconceptions in quantum mechanics”. *Eur J Phys*, 35: 025001 (2014).
- [46] García Quijas, P. C. y Arévalo Aguilar, L. M. “Factorizing the time evolution operator”. *Phys. Scr.*, 75: 185–194 (2007). doi:10.1088/0031-8949/75/2/012.
- [47] Peres, A. “When is a quantum measurement?” *Am J Phys*, 54 (8): 688–692 (1986). doi: <http://dx.doi.org/10.1119/1.14505>.
- [48] Venugopalan, A., Kumar, D. y Ghosh, R. “Environment-induced decoherence i. the Stern-Gerlach measurement”. *Phys. A*, 220: 563–575 (1995). doi:10.1016/0378-4371(95)00184-9.
- [49] Hannout, M., Hoyt, S., Kryowonos, A. y Widom, A. “Quantum measurement theory and the Stern-Gerlach experiment”. *Am. J. Phys.*, 66: 377 (1998). doi:10.1119/1.18876.
- [50] Piceno Martínez, A. E. y Arévalo Aguilar, L. M. “Quantifying the hybrid entanglement of the Stern-Gerlach Experiment using discrete reductions”. *Phys. Lett. A*, In Press (2021). doi:10.1016/j.physleta.2021.127200.
- [51] Ross, S. *A First Course in Probability*. Pearson, 8<sup>a</sup> ed<sup>ón</sup>. (2010). ISBN 13: 978-0-13-603313-4.
- [52] Bell, J. S. “On the Einstein Podolsky Rosen paradox”. *Physics*, 1 (3): 195–290 (1964).
- [53] Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony, A. y Holt, R. A. “Proposed experiment to test local hidden-variable theories”. *Phys. Rev. Lett.*, 23 (15): 880–884 (1969). doi:10.1103/physrevlett.23.880.
- [54] Gisin, N. y Bechmann-Pasquinucci, H. “Bell inequality, Bell states and maximally entangled states for n qubits”. *Phys. Lett. A*, 246 (1-2): 1–6 (1998). doi:10.1016/S0375-9601(98)00516-7.
- [55] Bancal, J.-D., Brunner, N., Gisin, N. y Liang, Y.-C. “Detecting genuine multipartite quantum nonlocality: A simple approach and generalization to arbitrary dimensions”. *Phys. Rev. Lett.*, 106: 020405 (2011). doi:10.1103/PhysRevLett.106.020405. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.020405>.
- [56] Bancal, J.-D., Barrett, J., Gisin, N. y Pironio, S. “Definitions of multipartite nonlocality”. *Phys. Rev. A*, 88: 014102 (2013). doi:10.1103/PhysRevA.88.014102. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.88.014102>.
- [57] Bancal, J.-D. *On the Device-Independent Approach to Quantum Physics*. Springer, Cham (2014). ISBN 978-3-319-01182-0. doi:10.1007/978-3-319-01183-7.

- [58] Einstein, A., Rosen, N. y Podolsky, B. “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?” *Phys. Rev.*, 47: 777–780 (1935). doi:10.1103/PhysRev.47.777. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.47.777>.
- [59] Bell, J. S. y Aspect, A. *La nouvelle cuisine, Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics: Collected Papers on Quantum Philosophy*. Cambridge University Press (2004). doi:10.1017/CBO9780511815676.026.
- [60] Benítez Rodríguez, E. y Arévalo Aguilar, L. M. “Disturbance-disturbance uncertainty relation: The statistical distinguishability of quantum states determines disturbance”. *Sci. Rep.*, 8: 4010 (2018). doi:10.1038/s41598-018-22336-3.
- [61] Kochen, S. y Specker, E. P. “The problem of hidden variables in quantum mechanics.” *J. Math. Mech.*, 17 (1): 59–87 (1967). URL <http://www.jstor.org/stable/24902153>.
- [62] Azzini, S., Mazzuchi, S., Moretti, V., Pastorello, D. y Pavesi, L. “Single-particle entanglement”. *Advanced Quantum Technologies*, pág. 2000014 (2020). doi:10.1002/qute.202000014.
- [63] Fuwa, M., Takeda, S., Zwierz, M., Wiseman, H. M. y Furusawa, A. “Experimental proof of nonlocal wavefunction collapse for a single particle using homodyne measurements”. *Nat Commun*, 6: 6665 (2015). doi:10.1038/ncomms7665.
- [64] Guerreiro, T., Monteiro, F., Martin, A., Brask, J. B., Vértesi, T., Korzh, B., Caloz, M., Bussi eres, F., Verma, V. B., Lita, A. E., Mirin, R. P., Nam, S. W., Marsilli, F., Shaw, M. D., Gisin, N., Brunner, N., Zbinden, H. y Thew, R. T. “Demonstration of Einstein-Podolsky-Rosen steering using single-photon path entanglement and displacement-based detection”. *Phys. Rev. Lett.*, 117: 070404 (2016). doi:10.1103/PhysRevLett.117.070404.
- [65] Ar evalo Aguilar, L. M. “Single-particle entanglement gives rise to truly nonlocal effects like single-particle steering”. *arXiv:2011.08286 [quant-ph]* (2020).
- [66] Ferraro, A. y Paris, M. G. A. “Nonlocality of two- and three-mode continuous variable systems”. *J. Opt. B: Quant. Semiclassical Opt.*, 7 (6): 174–182 (2005). doi:10.1088/1464-4266/7/6/003. URL <https://doi.org/10.1088/1464-4266/7/6/003>.
- [67] Ramanathan, R., Goyeneche, D., Muhammad, S., Mironowicz, P., Gr unfeld, M., Bourennane, M. y Horodecki, P. “Steering is an essential feature of non-locality in quantum theory”. *Nature Communications*, 9: 4244 (2018). doi:10.1038/s41467-018-06255-5.
- [68] Lee, J.-W., Lee, E. K., Chung, Y. W., Lee, H.-W. y Kim, J. “Quantum cryptography using single-particle entanglement”. *Phys. Rev. A*, 68: 012324 (2003). doi:10.1103/PhysRevA.68.012324. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.68.012324>.
- [69] Halder, S., Banik, M., Agrawal, S. y Bandyopadhyay, S. “Strong quantum nonlocality without entanglement”. *Physical Review Letters*, 122 (4): 040403 (2019). doi:10.1103/physrevlett.122.040403. URL <https://app.dimensions.ai/details/publication/pub.1111835311andhttp://arxiv.org/pdf/1808.00318>.

- [70] Pramanik, T., Adhikari, S., Majumdar, A. S., Home, D. y Pan, A. K. “Information transfer using a single particle path-spin hybrid entangled state”. *Phys. Lett. A*, 374: 1121–1125 (2010). doi:10.1016/j.physleta.2009.12.070.
- [71] Benítez Rodríguez, E. y Arévalo Aguilar, L. M. “A survey of the concept of disturbance in quantum mechanics”. *Entropy*, 21: 142 (2019). doi:10.3390/e21020142.
- [72] Stern, O. “Ein Weg zur experimentellen Prüfung der Richtungsquantelung im Magnetfeld”. *Zeitschrift für Physik*, 7: 249 (1921). doi:10.1007/BF01332793.
- [73] Benítez Rodríguez, E., Piceno Martínez, E. y Arévalo Aguilar, L. M. “Single-particle steering and nonlocality: The consecutive Stern-Gerlach Experiments”. *To be published* (2020). URL <https://arxiv.org/abs/2011.11797>.
- [74] Uola, R., Costa, A. C. S., Nguyen, H. C. y Gühne, O. “Quantum steering”. *Rev. Mod. Phys.*, 92: 015001 (2020). doi:10.1103/RevModPhys.92.015001. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.92.015001>.
- [75] Costa, A. C. S., Uola, R. y Gühne, O. “Steering criteria from general entropic uncertainty relations”. *Phys. Rev. A*, 98: 050104 (2018). doi:10.1103/PhysRevA.98.050104. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.98.050104>.
- [76] Costa, A. C. S., Uola, R. y Gühne, O. “Entropic steering criteria: Applications to bipartite and tripartite systems”. *Entropy*, 20: 763 (2018). doi:10.3390/e20100763.
- [77] Araújo, M., Hirsch, F. y Quintino, M. T. “Bell nonlocality with a single shot”. *Quantum*, 4: 353 (2020). ISSN 2521-327X. doi:10.22331/q-2020-10-28-353. URL <https://doi.org/10.22331/q-2020-10-28-353>.
- [78] Wiseman, H. M., Jones, S. J. y Doherty, A. C. “Steering, Entanglement, Nonlocality, and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox”. *Phys. Rev. Lett.*, 98: 140402 (2007). doi:10.1103/PhysRevLett.98.140402.
- [79] Abramsky, S. y Brandenburger, A. “The sheaf-theoretic structure of non-locality and contextuality”. *New J. Phys.*, 13: 113036 (2011). doi:10.1088/1367-2630/13/11/113036.
- [80] Grudka, A., Horodecki, K., Horodecki, P., Horodecki, R., Joshi, P., Klobus, W. y Wójcik, A. “Quantifying Contextuality”. *Phys. Rev. Lett.* (2014). doi:10.1103/PhysRevLett.112.120401.
- [81] Banaszek, K. y Wódkiewicz, K. “Testing quantum nonlocality in phase space”. *Phys. Rev. Lett.*, 82 (10): 2009–2013 (1999). doi:10.1103/physrevlett.82.2009. URL <https://doi.org/10.1103/physrevlett.82.2009>.
- [82] Ben-Benjamin, J. S., Kim, M. B., Schleich, W. P., Case, W. B. y Cohen, L. “Working in phase-space with Wigner and Weyl”. *Fortschr. Phys.*, 65 (6-8): 1600092 (2016). doi:10.1002/prop.201600092. URL <https://doi.org/10.1002/prop.201600092>.
- [83] Haug, F., Freyberger, M. y Wódkiewicz, K. “Nonlocality of a free atomic wave packet”. *Phys. Lett. A*, 321 (1): 6–13 (2004). doi:10.1016/j.physleta.2003.12.007. URL <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2003.12.007>.

- [84] Chen, Z.-B., Hou, G. y Zhang, Y.-D. “Quantum nonlocality and applications in quantum-information processing of hybrid entangled states”. *Phys. Rev. A*, 65 (3): 032317 (2002). doi:10.1103/physreva.65.032317. URL <https://doi.org/10.1103%2Fphysreva.65.032317>.
- [85] Chen, Z.-B., Pan, J.-W., Hou, G. y Zhang, Y.-D. “Maximal violation of Bell’s inequalities for continuous variable systems”. *Phys. Rev. Lett.*, 88 (4): 040406 (2002). doi:10.1103/physrevlett.88.040406. URL <https://doi.org/10.1103%2Fphysrevlett.88.040406>.
- [86] Svetlichny, G. “Distinguishing three-body from two-body nonseparability by a Bell-type inequality”. *Phys. Rev. D*, 35 (10): 3066–3069 (1987). doi:10.1103/physrevd.35.3066.
- [87] Lavoie, J., Kaltenbaek, R. y Resch, J. “Experimental violation of Svetlichny’s inequality”. *New J. Phys.*, 11: 073051 (2009). doi:10.1088/1367-2630/11/7/073051.
- [88] Mermin, N. D. “Extreme quantum entanglement in a superposition of macroscopically distinct states”. *Phys. Rev. Lett.*, 65: 1838–1840 (1990). doi:10.1103/PhysRevLett.65.1838. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.65.1838>.
- [89] Klyshko, D. N. “The Bell and GHZ theorems: a possible three-photon interference experiment and the question of nonlocality”. *Physics Letters A*, 172 (6): 399–403 (1993). doi:10.1016/0375-9601(93)90228-r. URL <https://doi.org/10.1016%2F0375-9601%2893%2990228-r>.
- [90] Cirel’son, B. S. “Quantum generalizations of Bell’s inequality”. *Lett. Math. Phys.*, 4 (2): 93–100 (1980). doi:10.1007/BF00417500.
- [91] Cereceda, J. L. “Three-particle entanglement versus three-particle nonlocality”. *Phys. Rev. A*, 66: 024102 (2002). doi:10.1103/PhysRevA.66.024102.
- [92] Junge, M. y Palazuelos, C. “Large violation of Bell inequalities wit low entanglement”. *Commun. Math. Phys.*, 306: 695–746 (2011). doi:10.1007/s00220-011-1296-8.
- [93] Vidick, T. y Wehner, S. “More nonlocality with less entanglement”. *Phys. Rev. A*, 83: 052310 (2011). doi:10.1103/PhysRevA.83.052310. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.052310>.