Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Formalismo canónico de Gitman-Lyakhovich-Tyutin aplicado a la teoría de alto orden de Maxwell-Chern-Simons

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

por

Diana Vanessa Castro Luna

Asesorada por

Dr. Alberto Escalante Hernández
IFUAP

Puebla Pue.
15 de diciembre de 2021

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Formalismo canónico de Gitman-Lyakhovich-Tyutin aplicado a la teoría de alto orden de Maxwell-Chern-Simons

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN FÍSICA APLICADA

por

Diana Vanessa Castro Luna

Asesorada por

Dr. Alberto Escalante Hernández
IFUAP

Puebla Pue.
15 de diciembre de 2021

Título: Formalismo canónico de Gitman-Lyakhovich-Tyutin aplicado a la teoría de alto orden de Maxwell-Chern-Simons
Estudiante: Diana Vanessa Castro Luna

COMITÉ

Dr. Gerardo Francisco Torres del Castillo
Presidente

Dr. Cupatitzio Ramírez Romero
Secretario

Dra. Iraís Rubalcava García
Vocal

Dr. Roberto Cartas Fuentevilla
IFUAP
Vocal

Dr. José de Jesús Toscano Chávez
Co-asesor

Dr. Alberto Escalante Hernández
IFUAP
Asesor

Dedicatoria.
A Urbano y Francisca
por todo el amor.

Agradecimientos

A lo largo de estos 24 años, muchas veces he dudado de mis elecciones y escoger una carrera fue una de ellas pero hoy finalmente concluyó que escogí bien y lo que a mis 18 años veía lejos e incapaz de lograr por fin pude completar. He tenido la fortuna de estudiar en una gran facultad pues en ella pude rodearme de buenos amigos y excelentes profesores que ayudaron a mi formación como futura física.

Quiero agradecer profundamente a *Urbano y Francisca*, sin ellos nada de esto hubiera sido posible, gracias por todo el amor y apoyo a lo largo de estos años. Gracias papá por dejarme estudiar alqo que me gusta y apasiona, es todo un orgullo ser tu hija y saber que aunque es poco lo que hago siempre te sientes orgulloso de mí, gracias por dar todo de ti para que estemos bien y aunque la mayor parte de la carrera estuviste lejos siempre te mantuviste en mi corazón; mamá sin tu amor no hubiera podido sobrevivir a esas noches de desvelo estudiando o haciendo tarea, gracias por preocuparte, por la rica comida que preparabas, por estar siempre conmigo aún en los momentos más oscuros. Saben que las palabras no me alcanzan para agredecer todo lo que han hecho por mí.

A mi hermana *Karla* por sus ánimos, su amistad, su apoyo y amor incondicional, por creer en mí y por darme su mano aún cuando estaba en el fondo, eres la mejor hermana que la vida pudo darme, gracias por darme tu ejemplo. A mis hermanos pequeños *Mauricio y Paola* por darme ánimos y ganas de seguir adelante para en un fututo poder ayudarlos, son especiales en mi vida.

Creo que mucho de lo que somos se debe a las personas que nos rodean, el escoger correctamente a los amigos no es una tarea fácil pero estoy segura que en esta vida he escogido bien a *Lilian* como mi mejor amiga, gracias por creer en mí, por estar a mi lado en los momentos difíciles, por las risas, por animarme a continuar y a escribir la tesis, no sé que haría sin tú bella compañia. Hay amigos que también estuvieron a mi lado cuando todo se vino abajo y hacerles mención será una pequeña forma de hacerles saber lo agradecida que estoy con ustedes, a *Omar, Nycoll, Oscar y Miguel A.* en verdad gracias.

La vida en la facultad no fue fácil pero conocí personas que me ayudaron a superarme y a creer en mí, quiero mencionar especialmente a *Evelin* que aunque no tomamos muchas materias juntas me dió su amistad incondicional. También quiero mencionar a una de las personas más importantes que conocí *Alexis*, gracias por tu confianza, por tus clases, tus pláticas y grandes consejos, sobretodo por creer en mí aún cuando yo no lo hacía, gracias por tu ejemplo y por motivarme a seguir adelante. A *Aldo, Marlene, Ana Karen, Suzuki, Aileen, Athziry y Jorge* por su hermosa amistad, por las risas, por la confianza, por las aventuras, soy afortunada de poder llamarlos amigos.

También quiero agradecer infinitamente a la vida por las amigas que conocí en Casa de Salud *Jazmín (Q.E.P.D), Kathya, Kaory y Liliana* por darme su apoyo, amor y amistad aún sin conocernos, por ser mi familia por unas cuantas semanas, por los ánimos y risas después de los fallidos intentos de morir.

El amor, al igual que la amistad es fundamental en esta vida así que quiero agradecer al hombre me cautivó y que aunque no estamos juntos, siempre estaré agradecida por haberle conocido *Gustavo*, gracias por los buenos y dolorosos momentos, por tus consejos y pláticas motivándome a seguir adelante.

Quiero agradecerle a mi asesor, el *Dr. Alberto Escalante* por ser un gran profesor y un gran ser humano, por recibirme gustosamente cuando le pregunté si podía realizar mi tesis con él, por

compartirme el gusto por la física-matemática en sus clases y en el proceso de realizar esta tesis. También quiero agradecerle por entender y no juzgar los problemas externos, y sobretodo por sus pláticas motivándome a seguir adelante con la vida y con el trabajo.
Les agradezco a los sinodales por aceptar con gusto ser parte del jurado, por su tiempo y disposición para darme sus comentarios sobre el presente trabajo para mejorar su calidad; a cada uno le admiro en el área en el que se desarrolla, les agradezco por ser parte de mi formación ya que algunos fueron mis profesores y aprendí mucho de ellos.
También quiero agradecer a la *Psic. Athenai Sánchez* por su gran ayuda en las terapias, muchas veces no hubiese sabido que hacer sin todas las herramientas y habilidades que me ha enseñado a lo largo de este tiempo siendo mi psicológa, gracias por desarrollar con amor su profesión y por inspirarme a trabajar en la salud mental. Y al *Lic. Javier Luna* gracias por entrenarme en el gimnasio, por lo ánimos, por su amistad, por ser una gran ejemplo de superación personal y por motivarme a no rendirme y trabajar en mi crecimiento personal.
Para terminar, quiero darme las gracias por no rendirme en el camino, por luchar para salir adelante a pesar de los malos ratos que has vivido, por estudiar y no darte por vencida, quiero felicitarte por aprender a creer en tí, sigue así.

¡Gracias infinitas a todos!

Resumen

En este trabajo se realizará el análisis de Gitman-Lyakhovich-Tyutin [GLT] aplicado a la teoría de alto orden de Maxwell-Chern-Simons en tres dimensiones. Nuestro análisis nos permitirá conocer exhaustivamente las características presentes en la teoría como son; las restricciones, el conteo de grados de libertad y se construirán los paréntesis de Dirac.

Introducción

Es bien conocido que las teorías de alto orden en las derivadas tienen un gran interés en la física. En efecto, desde 1850 con los trabajos desarrollados por Ostogradski analizando la formulación hamiltoniana de sistemas de alto orden [1], hasta nuestros días, dichos sistemas siguen teniendo un alto atractivo para la comunidad. Sistemas de alto orden aparecen en problemas como la generalización de la electrodinámica [2, 5], teoría de cuerdas [6], modelos para explicar el problema de la energía oscura [7, 9], y por supuesto en generalizaciones de gravedad, donde se incluyen términos cuadráticos en la curvatura y de dichos términos emergen derivadas de alto orden. Dichas generalizaciones son relevantes porque al menos por conteo de potencias, se asegura que dichas teorías modificadas de gravedad son renormalizables [10, 11]. Existen en la literatura sistemas de alto orden en las derivadas espaciales y en las derivadas temporales. Para estudiar los sistemas de alto orden en la derivada temporal y que además sean singulares, se tiene a la mano el formalismo conocido como Dirac-Ostrogradski [DO] [12]. En efecto, en dicho método lo que se considera es realizar una extensión del espacio fase. Básicamente lo que se hace es asociar el momento canónico conjugado al campo y a la derivada temporal del campo. Después, se realiza la identificación de las restricciones de manera usual como se hace en el formalismo de Dirac. Sin embargo, debido a que los sistemas de alto orden no son triviales, la identificación de las restricciones y por lo tanto de las simetrías, no es un ejercicio fácil de llevar a cabo. Debido a lo anterior, la comunidad ha estado buscando métodos alternativos al formalismo DO para realizar el análisis de sistemas de alto orden. Respecto a este punto, se tiene también a la mano el formalismo canónico llamado de Gitman-Lyakhovich-Tyutin [GLT] [12, 14]. El formalismo de GLT es una extensión del formalismo de DO, en dicho método lo que se considera es introducir un cambio de variable y asociarles multiplicadores de Lagrange a nivel de la acción, de tal manera que el orden de las derivadas temporales se reduzca y así poder trabajar como si se tuviera una teoría singular ordinaria. El formalismo GLT ha sido aplicado a modelos sencillos, pero no ha sido explotado del todo en una teoría de campo, salvo recientes trabajos que han sido usados para analizar modelos de juguete de gravedad [16] y a una teoría de alto orden llamada gravedad topológicamente masiva [17]. En dichos trabajos se muestra el alcance que tiene el formalismo de GLT para estudiar sistemas singulares de alto orden. En esencia, dicho formalismo es de cierta forma más sencillo de manejar que el DO y la identificación de las restricciones, así como la construcción de los paréntesis de Dirac, es más directa.

Tomando en cuenta lo anterior, en el presente trabajo de tesis de licenciatura, se propone estudiar el sistema de Maxwell-Chern-Simons [MCS] en tres dimensiones el cual es una teoría de alto orden. Cabe mencionar que el término de Chern-Simons no es la usual 3-forma que se conoce. En efecto, el nuevo término ahora es de alto orden y ya no es topológico como el término usual. A nivel lagrangiano, la teoría de MCS representa un sistema con grados de libertad masivo y no masivo. A nivel hamiltoniano se necesita averiguar cuáles serán sus restricciones y por ser una teoría de alto orden en las derivadas temporales, se necesita saber si el grado de libertad masivo representa un campo fantasma. En efecto, es bien conocido que en las teorías de alto orden en las derivadas temporales, presentan generalmente campos fantasmas, esto es, campos con energía de norma negativa. De hecho este es un problema común, incluso en modelos de gravedad como por ejemplo en la teoría de Weyl [18], donde se presume que los grados de libertad masivos son fantasmas y aunque la teoría se considera ser renormalizable, el problema de los campos fantasma ha sido un tema de investigación de los últimos años. Claro está que llegar al punto de ver si un campo es fantasma o no está fuera del alcance del presente trabajo, pero el análisis de GLT a la teoría de MCS permitirá que en trabajos futuros se pueda extender dicho análisis inclusive hasta llegar al tema de cuantización. Cabe mencionar que en la literatura ya se ha realizado el análisis de la teoría MCS usando el formalismo de DO [19], y con el presente trabajo de tesis se extenderán los resultados ya reportados en la literatura.

Índice general

Capítulo 1

Algoritmo de Dirac-Bergmann

En la física, cuando se quiere describir la dinámica de un sistema en el enfoque de la mecánica clásica, se hace a partir de una función lagrangiana. Actualmente, las lagrangianas de interés son aquellas que tienen una característica particular, dichas lagrangianas son llamadas singulares. El estudio de las lagrangianas singulares se realiza bajo el formalismo de Dirac, que permite tratar dichos sistemas de forma autoconsistente. Cabe mencionar que tiempo después Bergmann investigó la conexión que existe entre las restricciones e invariancias, completando los trabajos de Dirac y dando origen al formalismo que hoy conocemos como el de Dirac-Bergmann. Como veremos en este capítulo, podemos relacionar al algortimo de Dirac-Bergmann de la siguiente manera: puesto que las ecuaciones de movimiento son extremos para la acción y el sistema presenta restricciones, se utiliza un método análogo al método de los multiplicadores de Lagrange. En la práctica, la presencia de restricciones significa que la teoría bajo estudio presenta simetrías y dentro de dichas simetrías la que se considera más relevante es la llamada simetría de norma. En el presente capítulo veremos de qué forma se desarrolla el formalismo de Dirac-Bergmann y más adelante lo aplicaremos a la teoría de [MCS]. Finalmente, queremos comentar que gran parte de este capítulo ha sido resumido del trabajo de tesis que se presenta en [20].

1.1. Sistemas lagrangianos singulares

Para estudiar a los sistemas singulares, supongamos que el estado físico de un sistema mecánico puede ser descrito por un conjunto de coordenadas generalizadas (q^i).

$$S\left[q^i\right] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q^i(t), \dot{q}^i(t)\right) \tag{1.1}$$

donde q^i representa a las coordenadas, $\dot{q}^i$ a las velocidades, con $i = 1, 2, ..., N$. Además aquí t, que usualmente se asocia con el tiempo, es conocido como el parámetro de evolución y L es llamada función lagrangiana. El *principio de Hamilton*, que a nivel lagrangiano establece que: la trayectoria real que sigue un sistema dinámico, de entre todas las posibles, a través de las configuraciones $q^i(t_1)$ y $q^i(t_2)$ es tal que la acción (1.1) toma un valor extremo o estacionario. Las condiciones bajo las cuales lo anterior se cumple, son las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \tag{1.2}$$

siendo estas las ecuaciones de movimiento para la trayectoria clásica, calculando la derivada temporal tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\frac{dq^j}{dt}+\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{d\dot{q}^j}{dt}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0,$$

$$\ddot{q}^j\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j\partial \dot{q}^i}=\frac{\partial L}{\partial q^i}-\dot{q}^j\frac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial \dot{q}^i}. \tag{1.3}$$

De esta forma puede verse que las aceleraciones $\ddot{q}^i$ pueden expresarse de forma única por las posiciones q^i y las velocidades $\dot{q}^i$, si y sólo si la matriz Hessiana

$$A_{ij}=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j\partial \dot{q}^i} \tag{1.4}$$

es invertible. En otras palabras, esto es que el determinante no sea cero $\det A_{ij}\neq 0$. Está condición define a lo que llamaremos sistemas regulares, si esta condición no se satisface diremos que el sistema es *singular*.

Este análisis se desarrolló para sistemas discretos de partículas con un número finito de variables dinámicas, pero veremos más adelante que resulta un mero formalismo pasar a una teoría de campo.

1.2. Restricciones primarias

Dado que estamos interesados en la formulación hamiltoniana, se definen los momentos canónicos

$$P_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \tag{1.5}$$

En el caso que el determinante sea cero, la matríz Hessiana (1.4) no es invertible y como consecuencia en un sistema singular no podemos expresar a las velocidades unívocamente en función de los momentos p_i y coordenadas q^i. Esto significa que no todos los momentos son independientes y algunos pueden escribirse como una combinación de las siguientes relaciones

$$\phi^m(q,p)=0, \tag{1.6}$$

con $m=1,...,M$, las cuales se llaman *restricciones primarias*[1]. Una caracterísitica de estas restricciones es que para su obtención no se requirió de las ecuaciones de movimiento y además cuando se sustituyen en las ecuaciones (1.5), se obtiene una identidad.

De hecho, si se tienen M' ecuaciones independientes de la forma (1.6), implica que M' momentos p no se pueden escribir en términos de las $\dot{q}$'s, por lo que M' renglones de la matriz A_{ij} son cero. Así, que el rango de la matriz $\det A$ es $(N-M')$.[2] Además, se considera que este rango sea constante en el espacio $(q,\dot{q})$, o sea que el número de restricciones primarias independientes no varía, con lo cual la superficie Γ_p definida por las restricciones primarias es una subvariedad[3] de dimensión $2N-M'$ del espacio fase.

A su vez, no suponemos que las restricciones (1.6) sean independientes entre sí, por lo que en general $M'\leqslant M$.

[1] Esta terminología se debe a Bergmann

[2] La afirmación recíproca también es cierta.

[3] Siguiendo [21] la definición de subvariedad: Sea M en una variedad C^k de dimensión n. Un subconjunto $N(N\subset M)$ es una subvariedad de M, de dimensión $m(m\leq n)$, si existe un subatlas C^k de M, $\{(U_i,\phi_i)\}$, tal que $\phi_i(N\cap U_i)=\{(a^1,a^2,...,a^n)\in\mathbb{R}|a^{m+1}=a^{m+2}=...=a^n=0\}$. y el siguiente Teorema: Sean $f^1,f^2,...,f^m$ unas funciones diferenciables de valor real definidas en M. El conjunto $N\equiv\{p\in M|f^1(p)=f^2(p)=...=f^m(p)=0\}$ es una subvariedad de dimensión $n-m$ de M si para cualquier carta (U,ϕ) del atlas de M tal que U intersecta a N, la matriz de elementos $D_i(f^j\circ\phi^{-1})|_{\phi(p)}(1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m)$ es de rango m para $p\in N$ (D_i representan la i-ésima derivada parcial).

Una vez que encontramos las restricciones primarias, ¿qué nos garantiza que hemos encontrado todas? Una forma consiste en calcular el rango de la matriz Hessiana, $N - M'$, donde M' es el número de restricciones primarias independientes que se esperan. Debemos notar que las restricciones independientes $\phi^{m'}$ no tienen por qué venir dadas directamente de (1.5) como las ϕ^m, sino que pueden ser combinaciones lineales de estas últimas, por lo que conviene fijarse en los vectores nulos de la matriz Hessiana los cuales, por definicion, forman una base de la nulidad de A_{ij}. Si definimos V^μ los vectores nulos (con V_α^{mu} sus componentes), y ϕ^α las restricciones primarias que se han encontrado. Las restricciones primarias independientes se pueden obtener mediante la contracción

$$\Phi^\mu = V_\alpha^\mu \phi^\alpha. \tag{1.7}$$

Recordando que una condición necesaria y suficiente para que una transformación F tenga inversa, es que no existan dos puntos en el dominio que tengan la misma imagen en el codominio bajo dicha transformación, es fácil notar que la condición de no invertibilidad de las velocidades como función de las coordenadas y los momentos, implica que la inversa que va de las p's a las $\dot{q}$'s es, en general multivaluada.

Con la finalidad de mantener la transformación univaluada será necesario introducir parámetros extra, los multiplicadores de Lagrange.

1.3. Ecuaciones débiles y fuertes

Continuando en este contexto, conviene introducir el símbolo " $\approx$ " que se lee *débilmente igual.* Diremos entonces que dos funciones F y G son débilmente iguales, si lo son en la subvariedad del espacio fase definida Γ_p por las restricciones primarias, $\phi^m = 0$, lo cual se escribe como

$$F \approx G.$$

En particular, $\phi^m \approx 0$, el valor numérico de las restricciones es cero, aunque no se anulan indénticamente en todo el espacio fase, por lo que su paréntesis de Poisson no tiene por qué ser cero. Así, una regla nemotécnica para utilizar estas expresiones es primero realizar la operación del paréntesis y al final ocupar las restricciones.

En general, podemos escribir una función que es débilmente cero, $G \approx 0$, como combinación lineal de restricciones, esto es $G = g_m \phi^m$, con g_m alguna función del espacio fase. Por otra parte, una ecuación que se satisface en todo el espacio fase y no solo en la subvariedad $\phi^m = 0$ recibe el nombre de *fuerte*, y se utiliza el símbolo $=$ para representarla.

Una manera formal, para definir ecuaciones débiles y fuertes es la siguiente:

Definición 1. *Una funcional F del espacio fase, es débilmente igual a cero si*

$$F\,|_{\Gamma_p} = 0, \tag{1.8}$$

donde Γ_p es la subvariedad definida por las restricciones primarias (1.6).

Definición 2. *Una funcional F del espacio fase, se dice fuertemente igual a cero si*

$$F\,|_{\Gamma_p} = 0 \quad y \quad \left(\frac{\partial F}{\partial q^i}, \frac{\partial F}{\partial p_i}\right)|_{\Gamma_p} = 0, \tag{1.9}$$

con $\left(\frac{\partial F}{\partial q^i}, \frac{\partial F}{\partial p_i}\right)|_{\Sigma_1} = 0$, el conjunto formado por todas las derivadas parciales de F con respecto a las variables canónicas, evaluadas en Γ_p.

1.4. Condiciones sobre las funciones de restricción

Existen diferentes maneras de representar una superficie Γ_p dada por las restricciones primarias (1.6). Sin embargo, es necesario imponer condiciones en la elección de las funciones ϕ^m, para que sean consistentes con el formalismo hamiltoniano. A estas condiciones las llamaremos *condiciones de regularidad*.

A manera de motivación, uno esperaría que dada una restricción de la forma $f_m := \phi^m(q,p) \approx 0$, cualquier función de esta, por ejemplo, f^2, siga siendo cero en la subvariedad definida por ϕ^m y por lo tanto sigan siendo restricciones. Sin embargo, para que estas funciones definan una subvariedad de dimensión M' constante, como ya se vió, es necesario que el rango de la matriz jacobiana, $\left(\dfrac{\partial \phi^i}{\partial(q^j,p_j)}\right) = \left(\dfrac{\partial f^i}{\partial(q^j,p_j)}\right)$ sea constante e igual a M'.

La superficie de restricciones primarias puede ser cubierta por conjuntos abiertos, en cada uno de los cuales, las funciones ϕ^m pueden "*partirse*" en dos grupos, el primero consiste de las restricciones independientes, $\phi^{m'} = 0$ con $(m' = 1, ..., M')$, tales que $\left(\dfrac{\partial \phi^{m'}}{\partial(q^n,p_n)}\right)$ tiene rango M', y las dependientes, $\phi^{m'} = 0$ con $(\overline{m'} = M'+1, ..., M)$, que se satisfacen como consecuencia de las primeras.

Dicho de otra manera, en la subvariedad $2N - M'$ dimensional definida por las restricciones primarias, localmente se pueden elegir restricciones de tal manera que haya M' independientes y las demás $(M - M')$ se satisfagan solo como consecuencia de las primeras, con lo que, localmente, estas pueden tomarse como las primeras M' coordenadas de una sistema regular de coordenadas. Con lo que además, $d\phi^1 \wedge d\phi^2 \wedge ... \wedge d\phi^{m'} \neq 0$.

1.5. Hamiltoniana canónica

Si tenemos un sistema regular, la transición de la formulación lagrangiana a la hamiltoniana se da mediante la transformada de Legendre. A pesar de que ahora, en un sistema singular ya no se podrán despejar todas las velocidad en términos de las coordenadas y los momentos, podemos definir la hamiltoniana canónica de la misma manera en que usualmente se definine la hamiltoniana

$$H_c := \dot{q}^i p_i - L. \tag{1.10}$$

La variación de la hamiltoniana implica lo siguiente

$$\begin{aligned} \delta H_c &= \dot{q}^i \delta p_i + \delta \dot{q}^i p_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i \\ &= \dot{q}^i \delta p_i - \frac{\delta L}{\partial q^i}\delta q^i. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Cabe resaltar que H_c es función de q y p, pero para este sistema tendremos que estas variables no son independientes debido a que tenemos restricciones primarias por lo que H_c sólo está bien definida en la subvariedad Γ_p. Debido a lo anterior, sí tenemos una transformación

$$H_c \to H_c + u_m \phi^m, \tag{1.12}$$

el formalismo debe mantenerse invariante (puesto que cualquier combinación lineal de restricciones es débilmente cero).

Recordemos que en el método de los multiplicadores de Lagrange a la función lagrangiana se le acopla una combinación lineal de restricciones, cuyos coeficientes son los multiplicadores.

$$\int L dt \to \int (L + \lambda_a \phi^a) dt. \tag{1.13}$$

Haciendo analogía al formalismo lagrangiano, tomamos la hamiltoniana (1.10) y acoplando las restricciones primarias (1.6) la acción toma la forma

$$\int (\dot{q}^i p_i - H_c)dt \to \int (\dot{q}^i p_i - H_c - u_m \phi^m)dt. \tag{1.14}$$

Tomando la variación de esta última acción,

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int [\dot{q}^i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial H_c}{\delta q^i}\delta q^i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\delta p_i - u_m \left(\frac{\partial \phi^m}{\delta q^i}\delta q^i + \frac{\partial \phi^m}{\partial p_i}\delta p_i \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial u_m}{\partial q_i}\delta q^i + \frac{\partial u_m}{\partial p_i}\delta p_i \right)\phi^m]dt \\ &= \int \left[\left(-\dot{p}^i - \frac{\partial H_c}{\partial q^i} - u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial q^i} \right)\delta q^i + \left(\dot{q}^i - \frac{\partial H_c}{\delta p_i} - u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_i} \right)\delta p_i \right] dt, \end{aligned} \tag{1.15}$$

lo anterior se hace tomando en cuenta que las variaciones $\delta q^i \mid_{t_1}^{t^2} = 0$ y haciendo uso de las restricciones. Se obtienen las ecuaciones de movimiento,

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_c}{\partial q^i} - u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial q^i}, \tag{1.16}$$

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_i}. \tag{1.17}$$

Las ecuaciones anteriores corresponden a las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Sabemos que las u_m son funciones arbitrarias de las coordenadas del espacio fase, por lo que en general las ecuaciones de movimiento (1.16) y (1.17) no van a estar determinadas de manera única, entonces necesitamos encontrar a las funciones u_m. Al final del proceso (después de encontradas todas las restricciones de la teoría e introducido todos los multiplicadores de Lagrange necesarios), si hubo multiplicadores que no se pudieron encontrar, significa que el sistema está indeterminado hasta funciones arbitrarias, pero recordando que la mécanica clásica es una teoría determinista se podría pensar que quizá esto tenga alguna relación con la libertad de norma de la teoría, y en efecto, se verá que las restricciones asociadas a estos multiplicadores serán las generadoreas de las transformaciones de norma de la teoría.

Si se define la transformada de Legendre del espacio de configuración $(q, \dot{q})$ a la superficie $\phi(q,p) = 0$ del espacio (q, p, u) dada por

$$\begin{aligned} q^n &= q^n, \\ p_n &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}(q, \dot{q}), \\ u_m &= u_m(q, \dot{q}), \end{aligned} \tag{1.18}$$

se ve que la transformación entre espacios de la misma dimensión $2N$ es invertible, puesto que se tiene

$$\begin{aligned} q^n &= q^n, \\ \dot{q}^n &= \frac{\partial H_c}{\partial p_n} + u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_n}, \\ q^n = q^n \dot{q}^n &= \frac{\partial H_c}{\partial p_n} + u_m \frac{\partial \phi^m}{\partial p_n}\phi(q,p) = 0. \end{aligned} \tag{1.19}$$

De esta manera la ecuaciones (1.18) implican (1.19) y viceversa. Así la invertibilidad de la transformación de Legendre cuando el determinante de la matriz Hessiana es cero, se puede recuperar agregando variables extras, los multiplicadores de Lagrange u.

1.6. Hamiltoniana primaria y restricciones secundarias

En este momento introducimos la hamiltoniana primaria, que surge de la transformación (1.12)

$$H_1 := H_c + u_m \phi^m. \tag{1.20}$$

Usando esto podemos reescribir las ecuaciones (1.16) y (1.17) de manera compacta en la forma[4]

$$\dot{g} = \{g, H_c\} + u_m \{g, \phi^m\} \tag{1.21}$$

donde $g = g(q,p)$ es una función arbitraria del espacio fase. En particular, si g es una de las coordenadas o los momentos, se recuperan las ecuaciones (1.16) y (1.17). Además, esta expresión puede reescribirse como

$$\dot{g} = \{g, H_c + u_m \phi^m\} := \{g, H_1\}, \tag{1.22}$$

cuya veracidad, se ve desarrollando

$$\begin{aligned}\dot{g} &= \{g, H_c\} + \{g, u_m \phi^m\} \\ &= \{g, H_c\} + u_m \{g, \phi^m\} + \{g, u_m\}\phi^m \\ &= \{g, H_c\} + u_m \{g, \phi^m\}.\end{aligned} \tag{1.23}$$

Para que el sistema tenga sentido al evolucionar en el tiempo, es necesario que este no salga de la subvariedad definida por las restricciones. Entonces, se espera que las restricciones no varien con el tiempo, esto es, $\dot{\phi}^m \approx 0$. Estas condiciones en lo siguiente serán llamadas *condiciones de consistencia*, las cuales pueden escribirse de la siguiente manera,

$$\dot{\phi}^i = \{\phi^i, H_1\} = \{\phi^i, H_c\} + u_m \{\phi^i, \phi^m\} \approx 0, \tag{1.24}$$

lo anterior se puede considerar como un sistema de ecuaciones lineales no-homogéneo para los multiplicadores de Lagrange u_m, dependiendo del comportamiento de este sistema se determinará si se pueden despejar todos o solamente algunos multiplicadores. Definiendo, $h^i = \{\phi^i, H_c\}$ y W la matriz cuyas entradas son $W^{im} = \{\phi^i, \phi^m\}$, este comportamiento se puede resumir en los siguientes casos:

Caso I: $h \neq 0$ (no todas $h^i \approx 0$) y $\det(W) \neq 0$.
Escribiendo el sistema de ecuaciones (1.24) en forma matricial

$$h + Wu \approx 0, \tag{1.25}$$

Como el $\det(W) \neq 0$, entonces W tiene inversa, por lo que todos los multiplicadores de Lagrange van a poder ser encontrados y estarán dados por

$$u = -W^{-1}h \quad \Rightarrow \quad u_m = -W^{-1}_{mi}\{\phi^i, H_c\}. \tag{1.26}$$

Si sustituimos (1.26) en (1.24), las ecuaciones de movimiento se podrán escribir como

$$\dot{g} = \{g, H_c\} - \{g, \phi^m\} W^{-1}_{mi} \{\phi^i, H_c\} := \{g, H_c\}_D, \tag{1.27}$$

[4] La definición y propiedades del paréntesis de Poisson se encuentran en el Apéndice A.

ésta es la definición del *paréntesis de Dirac*, del cual se hablará más adelante.

De este caso tenemos que todos los multiplicadores de Lagrange pueden ser encontrados, dadas las condiciones iniciales para un sistema, entonces las ecuaciones (1.27) determinan una evolución única, como lo vemos en la mecánica clásica. Nótese también que esta expresión es análoga a la que aparece en mécanica clásica, sólo que aquí se sustituye al paréntesis de Poisson por el de Dirac.[5]

Caso II: $h \neq 0$ y $\det(W) = 0$.

En este caso, puesto que tenemos $\det(W) = 0$, sólo K multiplicadores de Lagrange se podrán despejar, y una cantidad $M' - K$ (nulidad de W) quedarán indeterminados, por lo que la teoría seguirá conteniendo funciones arbitrarias, lo que es de interés en las teorías de norma.

De otro modo, sean V^i los vectores nulos de $W(i = 1, ..., M' - K)$ que, por definición, satisfacen

$$WV^i \approx 0, \tag{1.28}$$

con esto y (1.25) se obtiene

$$hV^i \approx 0, \tag{1.29}$$

que, en general, son funciones del espacio fase independientes de los multiplicadores. Estas i relaciones implican que existen i restricciones adicionales, a las cuales llamaremos *restricciones secundarias*.

Este es quizá, el caso más importante, pues es el que aparece en las teorías de norma, por ejemplo, Electrodinámica Clásica, Chern-Simons, Pontrijagin, Teorías tipo BF, Gravedad en 3 dimensiones, etc.

Caso III: $h = 0$ y $\det(W) \neq 0$.

Vemos de la relación (1.25) que ahora se tiene un sistema homogéneo,

$$Wu \approx 0, \tag{1.30}$$

y recordando los teoremas de sistemas de ecuaciones lineales, se tiene que existe la solución trivial, es decir, todos los multiplicadores de Lagrange son idénticamente cero. Por lo que el sistema se reduce a una igualdad, $0 \approx 0$.

Para evitar esta complicación, se impone que $\det W \approx 0$ como restricción secundaria.

Caso IV: $h = 0$ y $\det W = 0$.

En este caso, de la ecuación (1.25) al igual que en el caso III, tenemos

$$Wu \approx 0, \tag{1.31}$$

en cambio, como tenemos $\det W = 0$, si el rango de W es igual a K, una cantidad $M' - K$ de multiplicadores van a poder ser débilmente determinados. Cabe mencionar que el hecho de tener h igual cero puede venir de un hamiltoniano nulo, $H_c = 0$, con lo cual se tendría problemas para definir la evolución temporal del sistema dado por (1.22).

Ya agotada la información que se deriva de las relaciones de consistencia sobre las restricciones primarias y añadiendo las restricciones secundarias que se presentan en la teoría. Podemos construir, de manera análoga a como se hizo con la hamiltoniana primaria, una hamiltoniana secundaria,

$$H_2 := H_c + u_i \phi^i, \tag{1.32}$$

donde las ϕ^i son todas las restricciones (primarias y secundarias) que se han encontrado. Esta hamiltoniana contiene toda la información de todas las rectricciones halladas del sistema. Así, las ecuaciones de movimiento toman la forma,

[5] En mecánica clásica tenemos que la evolución temporal de alguna función, o traslación en el tiempo, se calcula con el paréntesis de Poisson de esta función con el hamiltoniano, y en el caso de que la función dependa explícitamente del tiempo se agrega la derivada parcial con respecto a t.

$$\dot{g} = \{g, H_c + u_i\phi^i\} := \{g, H_2\}. \tag{1.33}$$

Como hicimos antes, podemos calcular las relaciones de consistencia sobre las restricciones secundarias. Si terminando esto aparecen nuevas restricciones, a las que llamaremos terciarias, el proceso debe repertirese nuevamente (se construye la hamiltoninana terciaria y se vuelven a calcular las relaciones de consistencia sobre estas restricciones). Siguiendo con este proceso un número finito de veces, hasta que no aparezcan nuevas restricciones.

1.7. Reductibilidad

En la teoría, puede ocurrir que un conjunto de restricciones ϕ^k no sean todas independientes entre si, es decir, podemos expresar algunas a partir de las otras mediante una transformación lineal, se dice que la teoría presenta *reductibilidad*, de otro modo, se dice que se tiene el caso *irreducible*.

1.8. Condiciones sobre los multiplicadores y la hamiltoniana total

Una vez encontrado el conjunto completo de restricciones, denotémoslas por ϕ^μ (incluyendo primarias y secundarias). De las condiciones de consistencia para todas las restricciones se tiene,

$$\dot{\phi}^\mu = \{\phi^\mu, H_T\} = \{\phi^\mu, H_c\} + u_\nu\{\phi^\mu, \phi^\nu\} \approx 0, \tag{1.34}$$

con $\mu, \nu = 1, ..., J$, siendo J el número total de restricciones encontradas, y se introduce H_T el *hamiltoniano total.*

Como ya se había mencionado antes, las relaciones de consistencia (1.34) pueden tratarse como un sistema de ecuaciones lineales para los multiplicadores, u_ν; cuya solución general se puede escribir de la siguiente manera

$$u_\nu = U_\nu + V_\nu, \tag{1.35}$$

con U_ν una solución particular de las ecuaciones inhomogéneas y V_ν la solución más general del sistema homogéneo,

$$V_\nu\{\phi^\mu, \phi^\nu\} \approx 0. \tag{1.36}$$

Dado que V_ν es la solución más general, esta puede ser escrita como una combinación lineal de soluciones independientes del sistema homogéneo, por lo que $V_\nu = v_i V_\nu^i$ con $i = 1, ..., I$, donde I es el número de soluciones independientes del sistema homogéneo. Con lo anterior,

$$u_\nu = U_\nu + v_i V_\nu^i. \tag{1.37}$$

Considerando que las v^i son funciones totalmente arbitrarias, entonces las u_ν pueden separarse en una parte que se fija mediante las condiciones de consistencia y otra que permanece indeterminada. Lo cual se verá reflejado en la hamiltoniona total, y a su vez en las ecuaciones de movimiento,

$$\begin{aligned} H_T &:= H_c + u_\nu\phi^\nu \\ &= H_c + (U_\nu + v_i V_\nu^i)\phi^\nu \\ &= H_c + U_\nu\phi^\nu + v_i V_\nu^i\phi^\nu \\ &:= H_c + U_\nu\phi^\nu + v_i\phi^i, \end{aligned} \tag{1.38}$$

con $v_i V^i_\nu \phi^\nu := v_i \phi^i$. Ahora sustituyendo (1.38) en las ecuaciones de movimiento, tendremos que la evolución temporal es

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \{f, H_T\} = \{f, H_c + U_\nu \phi^\nu + v_i \phi^i\} \\ &:= \{f, H' + v_i \phi^i\} = \{f, H'\} + \{f, v_i \phi^i\} \\ &= \{f, H'\} + v_i\{f, \phi^i\} + \{f, v_i\}\phi^i = \{f, H'\} + v_i\{f, \phi^i\}, \end{aligned} \tag{1.39}$$

donde definimos $H' = H_c + U_\nu \phi^\nu$ y utilizando las restricciones $\phi^i \approx 0$. Estas ecuaciones contienen I funciones arbitrarias, y por construcción son equivalentes a las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrage (1.2); y más adelante veremos que H' es de primera clase, así como también las ϕ^i.

El hecho de que aparezcan funciones arbitrarias, marca una diferencia fundamental a lo que conocíamos de mecánica clásica, donde las condiciones iniciales tenían una evolución única del sistema, aquí por el contrario, las condiciones iniciales ya no tiene una evolución única, sino que ahora está indeterminada hasta funciones arbitrarias. Esto se va a relacionar con la libertad de norma de la teoría, como se verá más adelante.

1.9. Restricciones de primera y segunda clase

Hasta ahora la diferencia entre las restricciones primarias y secundarias ha sido irrelevante y se tratan al mismo nivel. Sin embargo, resulta fundamental separar las restricciones entre de primera y segunda clase, puesto que las primeras serán generadoras de las transformaciones de norma (un elemento fundamental en todo este análisis) y las segundas permitirán construir el Paréntesis de Dirac, veamos la siguiente definición

Definición 3. *Sea F una funcional del espacio fase, se dice que es de primera clase si su paréntesis de Poisson con todas la restricciones es débilmente cero,*

$$\{F, \phi^\mu\} \approx 0, \tag{1.40}$$

en otro caso, se dice que F es de segunda clase.[6]

Si tenemos F de primera clase, entonces $\{F, \phi^\mu\}$ tiene que ser fuertemente igual a alguna combinación lineal de restricciones ϕ, puesto que estas son las únicas cantidades independientes que son débilmente cero. Así,

$$\{F, \phi^\mu\} = f^\mu{}_\rho \phi^\rho, \tag{1.41}$$

de esta propiedad, inferimos el siguiente resultado.

Teorema 1. *El paréntesis de Poisson de dos cantidades de primera clase, es también de primera clase.*

Prueba: Sean F y S funcionales de primera clase, entonces $\{F, \phi^\mu\} = f^\mu{}_\rho \phi^\rho$ y $\{S, \phi^\mu\} = s^\mu{}_\rho \phi^\rho$. Considérese $\{\{F, S\}, \phi^\mu\}$, y utilizando la identidad de Jacobi,

$$\begin{aligned} \{\{F, S\}, \phi^\mu\} &= \{\{F, \phi^\mu\}, S\} - \{\{S, \phi^\mu\}, F\} \\ &= \{f^\mu{}_\rho \phi^\rho, S\} - \{s^\mu{}_\rho \phi^\rho, F\} \\ &= f^\mu{}_\rho\{\phi^\rho, S\} + \{f^\mu{}_\rho, S\}\phi^\rho - s^\mu{}_\rho\{\phi^\rho, F\} - \{s^\mu{}_\rho, F\}\phi^\rho \\ &= \left(f^\mu{}_\rho s^\rho{}_\alpha - s^\mu{}_\rho f^\rho{}_\alpha\right)\phi^\alpha + \left(\{f^\mu{}_\rho, S\}\phi^\rho - \{s^\mu{}_\rho, F\}\right)\phi^\rho \approx 0. \end{aligned} \tag{1.42}$$

[6]Basta con que F no sea débilmente cero con una restricción para que sea de segunda clase.

Como una aplicación de este concepto, podemos probar que H' como ϕ^α son de primera clase, lo cuál puede verse de la siguiente manera. Para demostrar que ϕ^i es de primera clase, recordemos que $v_i V^i_\nu \phi^\nu := v_i \phi^i$, con lo que el paréntesis es

$$\begin{aligned}\{\phi^i, \phi^\mu\} &= \{V^i_\nu \phi^\nu, \phi^\mu\} = V^i_\nu \{\phi^\nu, \phi^\mu\} + \{V^i_\nu, \phi^\mu\}\phi^\nu \\ &= V^i_\nu \{\phi^\nu, \phi^\mu\},\end{aligned} \tag{1.43}$$

y dado que V^i_ν es solución al sistema homogéneo de ecuaciones para los multiplicadores, esto es, $V^i_\nu \{\phi^\nu, \phi^\mu\} \approx 0$, se llega a la conclusión,

$$\{\phi^i, \phi^\mu\} \approx 0, \tag{1.44}$$

por lo tanto ϕ^i es una restricción de primera clase.

Del mismo modo, para mostrar que H' es de primera clase, se considera su paréntesis de Poisson con todas las restricciones,

$$\{H', \phi^\mu\} = \{H_c + U^\nu \phi^\nu, \phi^\mu\} = \{H_c, \phi^\mu\} + U_\nu \{\phi^\nu, \phi^\mu\} + \{U_\nu, \phi^\mu\}\phi^\nu, \tag{1.45}$$

sumándole un cero débil, ecuación (1.44),

$$\begin{aligned}\{H', \phi^\mu\} &= \{H_c, \phi^\mu\} + U_\nu \{\phi^\nu, \phi^\mu\} + v_i \{\phi^i, \phi^\mu\} \\ &= \{H_c + U_\nu \phi^\nu + v_i \phi^i, \phi^\mu\} \\ &= \{H_T, \phi^\mu\} = -\{\phi^\mu, H_T\} \approx 0.\end{aligned} \tag{1.46}$$

Esta última igualdad se satisface por condiciones de consistencia.

También puede verse que las ϕ^i forman un conjunto completo de restricciones de primera clase, por lo que cualquier restricción de primera clase es una combinación lineal de las ϕ^i (con coeficientes que son funciones del espacio fase), módulo términos cuadráticos en las restricciones de segunda clase. Si cualquier restricción primaria se puede escribir en esta forma, su paréntesis con todas las restricciones deber ser débilmente cero, lo cual se verifica fácilmente,

$$\{v_i \phi^i + w_{\mu\nu} \phi^\mu \phi^\nu, \phi^\rho\} = w_{\mu\nu}(\phi^\mu \{\phi^\nu, \phi^\rho\} + \{\phi^\mu, \phi^\rho\}\phi^\nu) \approx 0, \tag{1.47}$$

donde ϕ^i es de primera clase, ϕ^ν, ϕ^μ de segunda clase, $w_{\mu\nu}$ coeficientes del espacio fase, y utilizando al final las restricciones.

Cabe mencionar que la descomposición de H_T en H' y ϕ^i no es única, puesto que U_μ es cualquier solución del sistema inhomogéneo. Esto significa que si renombramos las v_i, se puede admitir en H' cualquier combinación lineal de las ϕ^i sin alterar la hamiltoniana total.

1.9.1. Separación de las restricciones de primera y segunda clase

Una vez teniendo el conjunto completo de restricciones, las restricciones de primera clase no tienen que ser directamente algunas de las restricciones primarias o secundarias; en general serán combinaciones de éstas. Para encontrarlas será necesario usar los vectores nulos de la matriz cuyas entradas son todos los paréntesis de Poisson entre las restricciones, para finalmente contraerlos con las restricciones y así obtener las restricciones de primera clase correctas (es decir, todas las restricciones de primera clase independientes entre sí de la teoría).

Fijémonos en W' una matriz $J \times J$ cuyas entradas son,

$$W'^{\alpha\beta} = \{\phi^\alpha, \phi^\beta\}, \tag{1.48}$$

donde ϕ^α son todas las restricciones primarias y secundarias encontradas y J es el número total de ellas.

Proposición. Si $\det W' \approx 0$, entonces hay R' restricciones de primera clase (con R' el rango de la matriz W').

Prueba. Si $\det W' = 0$ en la subvariedad definida por las restricciones, entonces $Rango W' = R' < J$ y la nulidad $(J - R') \neq 0$; con lo que se pueden encontrar $(J - R')$ vectores nulos, w^i con $(i = 1, ..., J - R')$, tales que

$$w^i_\alpha \{\phi^\alpha, \phi^\beta\} \approx 0, \tag{1.49}$$

debido a la linealidad, tenemos,

$$\{w^i_\alpha \phi^\alpha, \phi^\beta\} \approx 0, \quad \forall \phi^\beta \epsilon \Phi, \tag{1.50}$$

con $\Phi = \{\phi^\beta \mid \phi^\beta \textit{es una restriccion primaria o secundaria}\}$. De esta manera, las restricciones $w^i_\alpha \phi^\alpha$ forman un conjunto de $(J - R')$ restricciones de primera clase (puesto que su paréntesis de Poisson es cero con todas las restricciones). Así las restricciones de primera clase de la teoría son,

$$\gamma^i := w^i_\alpha \phi^\alpha. \tag{1.51}$$

Además de quedar probada la proposición, se muestra una manera sistemática de encontrar las restricciones de primera clase de la teoría.

Debido a que la separación de las restricciones entre de primera y segunda clase es relevante, nos conviene introducir una notación que tome en cuenta este hecho. Denotemos a las restricciones de primera clase por la letra griega γ y a las de segunda clase por χ.

Usando lo anterior, el número de restricciones de segunda clase será igual al rango de la matriz W', cuyas entradas son los paréntesis de Poisson, tomando la forma

$$W' = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \phi^0(y) & \phi^1(y) & \cdots & \phi^J(y) \end{array} \\ \begin{array}{c} \phi^0(x) \\ \phi^1(x) \\ \vdots \\ \phi^J(x) \end{array} & \begin{bmatrix} \{\phi^0,\phi^0\} & \{\phi^0,\phi^1\} & \cdots & \{\phi^0,\phi^J\} \\ \{\phi^1,\phi^0\} & \{\phi^1,\phi^1\} & \cdots & \{\phi^1,\phi^J\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\phi^J,\phi^0\} & \{\phi^J,\phi^1\} & \cdots & \{\phi^J,\phi^J\} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \gamma^i(y) & \chi^\alpha(y) \end{array} \\ \begin{array}{c} \gamma^i(y) \\ \chi^\beta \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C^{\alpha\beta} \end{pmatrix} \end{array} \tag{1.52}$$

donde $C^{\alpha\beta}$ es una matriz $R' \times R'$ antisimétrica e invertible sobre la superficie de restricciones.[7]. Además, el número de restricciones de segunda clase, que coincide con $Rango W' = R'$, debe ser par.[8]

[7] El que $C^{\alpha\beta}$ sea una matriz invertible se ve directamente a partir del hecho de que tiene rango R', puesto que el rango de una matriz da el número de renglones independientes, o dicho de otra manera, la matriz más grande que se puede construir a partir de la primera y cuyo determinante es distinto de cero. Está última condición da la invertibilidad de la matriz.

[8] Sí C es una matriz de tamaño $R' \times R'$, con R' el número de restricciones de segunda clase, si R' fuese impar implicaría que $\det C = 0$ (que contradice que R' sea el rango de W'). *Prueba*: Como C es antisimétrica y utlizando las propiedades del determinante, tenemos

$$detC = det(C^t) = det(-C) = (-1)^{R'} detC,$$

en el caso que R' fuese impar

$$detC = -detC \rightarrow detC = 0.$$

1.10. Transformaciones de Norma

Hemos visto, que partiendo de las condiciones iniciales, la evolución del sistema dada por las ecuaciones de movimiento, no esta determinada de forma única debido a la presencia de las funciones arbitrarias (los multiplicadores de Lagrange u). Esto nos lleva a preguntarnos, ¿cuál es el significado físico de tener funciones arbitrarias en las ecuaciones de movimiento? Sabemos que la mecánica clásica es una teoría determinista, por lo que si tenemos dos estados que comparten las mismas condiciones iniciales estos no deberían ser físicamente diferentes.

Tomando en cuenta lo anterior, consideremos dos estados de un sistema con restricciones de primera clase que tienen las mismas condiciones iniciales a un tiempo t_0 pero que su evolución dinámica difiere en el valor de los multiplicadores de Lagrange. Desarrollando en serie de Taylor y quedándonos a primer orden para la variable canónica F, tenemos

$$\begin{aligned} F(t) &= F(t_0) + \dot{F}\delta t \\ &= F(t_0) + (\{F, H'\} + v_i\{F, \phi^i\})\delta t, \end{aligned} \tag{1.53}$$

$$\begin{aligned} F'(t) &= F(t_0)\dot{F}'\delta t \\ &= F(t_0) + (\{F, H'\} + v_i\{F, \phi^i\})\delta t, \end{aligned} \tag{1.54}$$

respectivamente para cada estado, haciendo la resta de las ecuaciones se tiene,

$$\delta F(t) = F(t) - F'(t) = (v_i - v_i')\{F, \phi_i\}\delta t := \delta v_i\{F, \phi^i\}, \tag{1.55}$$

donde definimos $\delta v_i := (v_i - v_i')\delta t$. Viendo lo anterior nos damos cuenta que el estado físico del sistema se mantiene inalterado, bajo estas transformaciones aplicadas a las variables canónicas. Este cambio en las variables canónicas consiste en aplicar una transformación de contacto infinitesimales con una función generadora $\delta v_i \phi^i$.

Esto nos lleva a la conclusión de que las restricciones de primera clase no sólo restringen los valores iniciales, sino que también son generadoras de transformaciones infinitesimales de contacto, que corresponden a cambios en las q's y p's que no afectan al estado físico del sistema, y son estás a las que llamamos *transformaciones de norma*.

Podemos generalizar y probar lo siguiente,

1. El paréntesis de Poisson $\{\phi^i, \phi^j\}$ de cualesquiera dos restricciones de primera clase genera una transformación de norma.

2. El paréntesis de Poisson $\{\phi^i, H'\}$ de cualquier restricción primaria de primera clase con la hamiltoniana de primera clase H' genera una transformación de norma.

Utilizando las dos afirmaciones anteriores se puede ver que, si a una variable canónica F se le aplica una transformación de la forma (1.55) y posteriormente se evoluciona en el tiempo con H_T,

$$F' := F + \eta_i\{F, \phi^i\} \to (F')_1 := \{F', H_T\}, \tag{1.56}$$

y luego se le aplican las mismas transformaciones en orden inverso,

$$F_1 := \{F, H_T\} \to (F_1)' := F_1 + \eta_i\{F_1, \phi^i\}; \tag{1.57}$$

la diferencia

$$(F')_1 - (F_1)' = \eta_i\{F, \{\phi^i, H'\}\} + \eta_i v_j\{F, \{\phi^i, \phi^j\}\}, \tag{1.58}$$

es también una transformación de norma que deja inalterado el estado físico del sistema.

1.11. Grados de libertad

Una vez que hemos clasificado a las restricciones en de primera y segunda clase, tenemos lo necesario para proceder al conteo de grados de libertad. Antes de proceder al cálculo, definamos este concepto.

Definición 4. *Los grados de libertad de un sistema corresponde a el número de variables físicas independientes necesarias para describir el sistema.*

Haciendo una extrapolación de como se realiza el conteo de grados de libertad en Mecánica Elemental[9] vemos que el conteo se hace de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} GL = \frac{1}{2}\{&N \textit{ de variables canonicas} - N \textit{ de restricciones de 2da clase} \\ &-2\times N \textit{ de restricciones de 1era clase}\} \end{aligned} \tag{1.59}$$

Esto significa que el número de grados de libertad está dado por todas las variables canónicas independientes, q y p, menos todas las restricciones. El factor $1/2$ aparece para compensar el hecho de que usualmente los grados de libertad se refieren a las coordenadas generalizadas q^i, y al considerar todas las variables canónicas estamos considerando en realidad el doble. Y el dos que acompaña a las restricciones de primera clase, es debido a su doble carácter, tanto de restricción, como de generadores de transformaciones de norma. Dicho de otra manera la teoría presenta restricciones y transformaciones de norma, que pueden verse como condiciones adicionales que cumple la teoría.

1.12. La acción y la hamiltoniana extendidas

Si tenemos la hamiltoniana total como se definió anteriormente, esta toma en cuenta todas las restricciones (primarias y secundarias), sin embargo, en esta todavía no se hace una distinción entre restricciones de primera y segunda clase. Dirac conjeturó que todas las restricciones de primera clase son generadoras de transformaciones de norma, y propuso escribir las ecuaciones de movimiento recurriendo a una hamiltoniana que contenga la información de las restricciones de primera y segunda clase, por lo tanto una manera de hacer esta distinción es mediante una *hamiltoniana extendida* la cual esta dada por,

$$H_E = H' + v_a\gamma^a, \tag{1.60}$$

donde H' se define de la misma manera que antes, sólo que ahora se hace evidente que,

$$H' = H_c + U_j\chi^j. \tag{1.61}$$

Resaltemos que H_E es la que da la evolución dinámica del sistema, mediante las ecuaciones de movimiento,

$$\dot{F} = \{F, H_E\}; \tag{1.62}$$

y para las variables dinámicas invariantes de norma[10]. La evolución dinámica dada por H', H_1 y H_E es la misma. Para cualquier otra variable es necesario usar H_E, pues esta considera toda la libertad de norma del sistema. La introducción de una hamiltoniana extendida es una nueva característica del formalismo hamiltoniano, que extiende a la formulación lagrangiana para poder incluir de manera manifiesta la invarianza de norma.

[9] Recordemos que la manera en como se calculan los grados de libertad en Mecánica Elemental, es él número de coordenadas generalizadas menos el número de ecuaciones independientes de las restricciones.

[10] Variables tales que su paréntesis de Poisson con los generadores de norma γ^a es débilmente cero

Además las ecuaciones, (1.62) y (1.2), son por construcción, físicamente equivalentes aunque matemáticamente distintas.

Por otra parte, usando (1.62) se puede construir una acción de la forma,

$$S_E[q,p,v] = \int (p_n\dot{q}^n - H' - v_a\gamma^a)dt = \int (p_n\dot{q}^n - H_E)dt, \tag{1.63}$$

la cual se llamará *acción extendida* que, a diferencia de S dada por (1.14) contiene toda la información del sistema, es decir, considera la separación de restricciones entre primera y segunda clase, contiene la información de libertad de norma, y da como ecuaciones de movimiento

$$\dot{F} = \{F, H_E\} \tag{1.64}$$

y

$$\phi^a = \gamma^a \approx 0. \tag{1.65}$$

1.13. Paréntesis de Dirac

Debido a que la matriz $C^{\alpha\beta}$ es invertible, existe su inversa $C_{\alpha\beta}$ tal que

$$C^{\alpha\beta}C_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma. \tag{1.66}$$

Se define el *paréntesis de Dirac* entre dos funciones del espacio fase F y G como,

$$\{F,G\}_D = \{F,G\} + \{F,\chi^\alpha\}C_{\alpha\beta}\{\chi^\beta, G\}, \tag{1.67}$$

con $\{,\}$ el paréntesis de Poisson. El paréntesis de Dirac satisface las siguientes propiedades, sean F, G y R funciones arbitrarias del espacio fase:

$$\{F,G\}_D = -\{G,F\}_D \tag{1.68}$$

$$\{F,GR\}_D = \{F,G\}_D R + G\{F,R\}_D \tag{1.69}$$

$$\{\{F,G\}_D,R\}_D + \{\{R,F\}_D,G\}_D + \{\{G,R\}_D,F\}_D = 0 \tag{1.70}$$

$$\{\chi^\alpha, G\}_D = 0 \forall F \tag{1.71}$$

$$\{F,G\}_D \approx \{F,G\}, \text{G de primera clase y F arbitraria.} \tag{1.72}$$

La demostración de las propiedades anteriores es directa a partir de la definición del Paréntesis de Dirac, excepto en el caso de la identidad de Jacobi, pero su demostración no se tratará en este trabajo.

Si tomamos las ecuaciones de movimiento (1.64), debido a que H_E es de primera clase y usando la propiedad (1.72), pueden reescribirse como,

$$\dot{F} = \{F, H_E\}_D, \tag{1.73}$$

y por los mismos argumentos, el efecto de una transformación de norma se puede escribir como,

$$\{F,\gamma^a\} \approx \{F,\gamma^a\}_D, \quad \forall F. \tag{1.74}$$

En general, no es una tarea fácil contruir este paréntesis, puesto que se necesita encontrar la inversa de la matriz $C^{\alpha\beta}$.

1.14. Observables

Una *observable* (clásica) es, por definición, una función que es invariante de norma en la subvariedad definida por las restricciones, o dicho de otra forma, una observable es una función $\mathcal{O}$, cuyo paréntesis de Dirac es débilmente cero con las restricciones de primera clase

$$\{\mathcal{O}, \gamma^a\}_D \approx 0. \tag{1.75}$$

Por último, a estas funciones $\mathcal{O}$ se les llamó observables, pero el dar un significado experimental de estás va más allá de los alcances de la presente tesis. Además, es importante mencionar que las observables clásicas no necesariamente lo serán a nivel cuántico.

Capítulo 2

Formalismo de Gitman-Lyakhovich-Tyutin

Hemos mencionado anteriormente la importancia en la física de las teorías de alto orden en las derivadas, pues en la actualidad las teorías de campo de norma atraen gran atención, lo cual indica interés en las teorías de norma con derivadas de alto orden. La formulación canónica asociada a una lagrangiana regular[1] de un orden arbitrario finito en las derivadas fue desarrollado durante la mitad del siglo pasado por Ostrogradski. Un siglo después, Dirac abrió camino para construir la formulación canónica de sistemas descritos por una lagrangiana singular de primer orden en las derivadas, las ecuaciones de movimiento en el espacio fase son las llamadas ecuaciones de Hamilton-Dirac, solo para señalar que son una generalización de las ecuaciones de Hamilton clásicas como se vió en el capítulo 1. En este capítulo se inicia con la explicación de el análisis del formalismo de DO para realizar la formulación hamiltoniana, después se verá la generalización introducida por Gitman, Lyakhovich y Tyutin [13, 16].

2.1. Formalismo de Ostrogradski

En el estudio de los sistemas dinámicos, existe el *Teorema de Ostrogradski* [1], que demuestra la existencia de una inestabilidad en la función hamiltoniana, asociada a un sistema descrito por una función lagrangiana que contenga términos con derivadas temporales de orden mayor a uno en las variables de configuración.

Presentemos la construcción de Ostrogradski, primero para el caso de una dimensión para fijar conceptos y notación. Después presentamos el caso de dos dimensiones y finalizamos para un caso general de N dimensiones.

En el caso de una dimensión, la función lagrangiana se tendrá dada por

$$L = L(q, \dot{q}), \tag{2.1}$$

donde q es la posición y $\dot{q}$ es la primera derivada temporal, es decir, lo que comúnmente llamamos velocidad. Usando el principio de Hamilton enunciado en el capítulo 1, la evolución del sistema va a estar descrita por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{2.2}$$

[1] Por *regular* nos referimos a que la Hessiana del lagrangiano con respecto a las derivadas de alto orden es regular.

Si la lagrangiana del sistema es no degenerada[2], la ecuación (2.2) puede tomar la forma

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q}), \tag{2.3}$$

resultando en una ecuación diferencial de segundo orden respecto a sus derivadas temporales[3], lo que implica que la solución necesita dos condiciones iniciales, por ejemplo: el valor para la coordenada y el de su primera derivada en un valor inicial. El hecho de contar el número de condiciones iniciales necesarias para así tener un problema de Cauchy bien definido, nos proporciona la dimensión del espacio fase. Así, la evolución del sistema es descrita por una trayectoria en un espacio fase bidimensional en dos coordenadas canónicas Q y P definidas por

$$Q \equiv q \quad y \quad P \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \tag{2.4}$$

debido a que tenemos un sistema no degenerado, podemos invertir las transformaciones anteriores. La hamiltoniana puede obtenerse de forma usual, mediante la transformada de Legendre, esto es

$$H(Q, P) \equiv P\dot{q}(Q, P) - L(q(Q, P), \dot{q}(Q, P)). \tag{2.5}$$

Usando lo anterior, ahora fijémonos en un sistema descrito por la siguiente lagrangiana

$$L = L(q, \dot{q}, \ddot{q}), \tag{2.6}$$

donde la tercera variable en la lagrangiana, corresponde a la segunda derivada temporal, es decir, la aceleración. Si variamos la acción correspondiente a la lagrangiana (2.6) bajo el principio de Hamilton ya antes enunciado, obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) = 0, \tag{2.7}$$

las cuales al desarrollarse pueden escribirse como

$$q^{(4)} = F\left(q, \dot{q}, \ddot{q}, q^{(3)}\right). \tag{2.8}$$

Entonces, tendremos que el número de condiciones necesarias para la solución es cuatro. Continuando de forma análoga al caso anterior, la dimensión del espacio fase habrá aumentado a cuatro, así que el conjunto de variables canónicas será

$$Q_1 \equiv q \quad Q_2 \equiv \dot{q}, \tag{2.9}$$

$$P_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) \quad P_2 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \tag{2.10}$$

En este punto es importante señalar que la lagrangiana solo depende de tres variables independientes q, $\dot{q}$ y $\ddot{q}$ a pesar de que el espacio fase sea de dimensión cuatro. Además debido a la no degeneración, podemos encontrar las transformaciones inversas que nos permiten escribir a las variables del espacio de configuración en términos de tres variables del espacio fase y usarlas para escribir la hamiltoniana del sistema como

$$\begin{aligned} H(Q_1, Q_2, P_1, P_2) \equiv {} & P_1 Q_2 + P_2 \ddot{q}(Q_1, Q_2, P_2) \\ & - L(q(Q_1, Q_2, P_2), \dot{q}(Q_1, Q_2, P_2), \ddot{q}(Q_1, Q_2, P_2)). \end{aligned} \tag{2.11}$$

[2]La condición de no degeneración no es necesaria para aplicar el teorema, sin embargo, para sencillez del ejemplo se supone aquí.
[3]Explícitamente vemos que es la Ley de Newton.

La expresión anterior, nos indica que la hamiltoniana trae consigo algunas complicaciones; vemos que es lineal en el momento canónico P_1, lo que significa que ningún sistema de esta forma puede ser estable, ya que puede ser infinitamente negativo, esto significa que algún grado de libertad del sistema puede tener arbitrariamente energía negativa. Además, nótese el poder de la generalidad del resultado: se aplica a cualquier lagrangiana de la forma $L(q, \dot{q}, \ddot{q})$ que no sea degenerada. La única suposición que se pide es la no degeneración, y eso significa que no es posible eliminar $\ddot{q}$ por integración parcial. Esta es probablemente la razón por la que Newton tenía razón al suponer que las leyes de la física toman la forma de ecuaciones diferenciales de segundo orden cuando se expresan en términos de variables dinámicas fundamentales.

Consideremos el caso general $L = L(q, \dot{q}, ..., q^{(N)})$, que depende de un número arbitrario N de derivadas. Al igual que para los casos anteriores, las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes serán

$$\sum_{i=0}^{N} \left(-\frac{d}{dt}\right)^{i} \frac{\partial L}{\partial q^{(i)}} = 0, \tag{2.12}$$

para el caso de sistemas no degenerados tomarán la forma

$$q^{(2N)} = F\left(q, \dot{q}, ..., q^{(2N-1)}\right). \tag{2.13}$$

Para la solución de esta ecuación necesitamos de $2N$ condiciones iniciales y el espacio fase será $2N$ dimensional. Igualmente, se asignan las variables canónicas de Ostrogradski

$$Q_i \equiv q^{i-1}, \quad P_i \equiv \sum_{j=i}^{N} \left(-\frac{d}{dt}\right)^{j-1} \frac{\partial L}{\partial q^{(j)}}, \quad i = 1, ..., N, \tag{2.14}$$

la no degeneración significa que podemos resolver a $q^{(N)}$ en términos de las P_N y Q_i. Siguiendo lo anterior, podemos construir la hamiltoniana de forma usual como sigue

$$H(Q_i, P_i) = \sum_{i=1}^{N} P_i q^{(i)} - L. \tag{2.15}$$

En este caso, la hamiltoniana es lineal en $P_1, ..., P_{N-1}$, y solo con respecto a P_N podría estar acotada por abajo. Por lo tanto, la hamiltoniana es necesariamente inestable.

Para resumir, el Teorema de Ostrogradski puede establecerse de la siguiente manera [15]: si una lagrangiana no degenerada contiene derivadas en el tiempo de orden superior, hay al menos una inestabilidad lineal en la hamiltoniana del sistema. Además la construcción de Ostrogradski implica que existe una inestabilidad lineal en los hamiltonianos asociados con los lagrangianos que dependen de más de una derivada temporal de tal manera que las derivadas superiores no pueden eliminarse por integración parcial.

De manera general, algunos comentarios pueden hacerse. Está claro que la construcción de Ostrogradski es aplicable solo a aquellas lagrangianas con derivadas de orden superior no degeneradas, es decir, la lagrangiana $L = L\left(q, \dot{q}, ..., q^{(N)}\right)$ no puede dar lugar a restricciones de ningún tipo; las lagrangianas restringidas de orden superior están más allá del alcance del enfoque de Ostrogradski.

2.2. Extensión del formalismo de Ostrogradski

Ya vimos que para una teoría con derivadas de alto orden, Ostrogradski consideró por primera vez la formulación hamiltoniana, pero su método no puede aplicarse directamente a teorías singulares.[4] Para el análisis de sistemas singulares con derivadas de alto orden, se realizan modificaciones

[4]Entre las que se encuentran las teorías de norma.

del método de Ostrogradski y se extienden los resultados de la sección anterior para una teoría de campo para así llegar a la generalización de Gitman-Lyakhovich-Tyutin [GLT][12, 13].

En lo que respecta a la generalización GLT, consideremos la lagrangiana para una teoría de campo y supongamos que ésta es una función de g^{α}, con $\alpha = 1, ..., n$, y sus derivadas temporales hasta algunos órdenes N_{α}, de forma que $N_{\alpha} \geq \tilde{N}_{\alpha}$, $N_{\alpha} > 0$, donde $\tilde{N}_{\alpha}$ son los órdenes de las derivadas más altas de g que realmente entran en L. De esta forma, puede escribirse a la lagrangiana como

$$L = L\left(g, \partial_{\mu} g, \partial_{\mu}\partial_{\nu} g, ...\right). \tag{2.16}$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen bajo la variación de la acción correspondiente respecto de los campos g^{α},

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\alpha}} = \sum_{l=0}^{N_{\alpha}} (-1)^{l} \partial_{\mu 1} ... \partial_{\mu l} \frac{\partial L}{\partial g^{\alpha}_{\mu 1, ..., \mu l}}, \tag{2.17}$$

donde el orden más alto de derivación que pueden tener es igual a $N + N_{\alpha}$, con $N = maxN_{\alpha}$. Por lo tanto, es natural referirse a todas las ecuaciones que contienen solo $g^{\alpha}, g^{\alpha(1)}, ..., g^{\alpha(N+N_{\alpha-1})}$ como las restricciones en el formalimo lagrangiano (para teorías con derivadas de hasta orden N_{α}). Luego, consideremos la matriz

$$M_{\alpha\beta} = \frac{\partial^{2} L}{\partial g^{\alpha(N_{\alpha})} \partial g^{\beta(N_{\beta})}}, \tag{2.18}$$

que en analogía a lo expuesto en el capítulo 1, será la matriz Hessiana para una teoría con derivadas de orden superior y cuyo determinante permitirá definir el carácter singular de una teoría. Una teoría con lagrangiana L, que considere derivadas de hasta orden N_{α} recibe el nombre de *singular* si el determinante de la Hessiana (2.18) es cero, de otra forma la teoría se dice *no singular*. Ciertamente, para una teoría no singular $N_{\alpha} = \tilde{N}_{\alpha}$.

Si una teoría es singular [14], se puede demostrar que de forma general, en el formalismo lagrangiano existen restricciones, y las ecuaciones de movimiento pueden ser degeneradas. Si las ecuaciones de movimiento son degeneradas, éstas están relacionadas por identidades y el número de identidades corresponde al grado de degeneración. Esto último indica la invariancia de la acción bajo transformaciones de norma con un número correspondiente de parámetros. Sin embargo, cabe señalar que para las teorías no singulares con derivadas superiores, las ecuaciones de movimiento de Lagrange no son degeneradas y, por lo tanto, no se estará tratando con teorías de norma.

Siguiendo con la extensión para la formulación hamiltoniana del capítulo 1 a sistemas con derivadas de orden superior, se introducen las siguientes variables

$$q^{\alpha}_{s} = g^{\alpha(s-1)} \quad y \quad v^{\alpha} = g^{\alpha(N_{\alpha})}, \quad s = 1, ..., N_{\alpha}. \tag{2.19}$$

Ahora, denotaremos a la lagrangiana en que aplicaremos los cambios de variable (2.19) por L^{v} y consideramos la siguiente acción

$$S = \int \left[L^{v} + \sum_{s=0}^{N_{\alpha}-1} p^{s}_{\alpha} (\dot{q}^{\alpha}_{s} - q^{\alpha}_{s+1}) + p^{N_{\alpha}}_{\alpha} (\dot{q}^{\alpha}_{N_{\alpha}} - v^{\alpha}) \right] dt, \tag{2.20}$$

donde $\dot{q}^{\alpha}_{s} = q^{\alpha}_{s+1}$ y $\dot{q}^{\alpha}_{N_{\alpha}} = v^{\alpha}$. De manera que las ecuaciones de movimiento correspondientes toman la forma

$$\dot{p}^{1}_{\alpha} = \frac{\partial L^{v}}{\partial q^{\alpha}_{1}}, \tag{2.21}$$

$$\dot{p}^{s+1}_{\alpha} = \frac{\partial L^{v}}{\partial q^{\alpha}_{s+1}}, \quad s = 1, ..., N_{\alpha} - 1, \tag{2.22}$$

$$\dot{q}_s^\alpha = q_{s+1}^\alpha, \quad \dot{q}_{N_\alpha}^\alpha = v^\alpha, \quad s = 1, ..., N_\alpha, \tag{2.23}$$

$$p_\alpha^{N_\alpha} = \frac{\partial L^v}{\partial v^\alpha}. \tag{2.24}$$

Las variables p_α^s corresponden a los momentos canónicos conjugados a las coordenadas q_s^α, que desde el punto de vista variacional de la acción (2.46) las variables p_α^s son tratadas como multiplicadores.

La ecuaciones (2.21 - 2.24), en el sector $q_1^\alpha \equiv g^\alpha$, son equivalentes a las ecuaciones de Lagrange (2.17). En efecto, combinando las ecuaciones (2.23) y (2.24), además de volver a las variables originales se obtiene

$$p_\alpha^s = \sum_{l=s}^{N_\alpha} (-1)^{l-s} \frac{d^{l-s}}{dt^{l-s}} \left(\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha(l)}} \right), \quad s = 1, ..., N_\alpha. \tag{2.25}$$

Ahora, si introducimos la función hamiltoniana de la forma

$$H = \sum_{s=1}^{N_\alpha - 1} p_\alpha^s q_{s+1}^\alpha + p_\alpha^{N_\alpha} v^\alpha - L^v, \tag{2.26}$$

las ecuaciones(2.21 - 2.24), pueden reescribirse como

$$\dot{q}_s^\alpha = \{q_s^\alpha, H\}, \tag{2.27}$$

$$\dot{p}_\alpha^s = \{p_\alpha^s, H\}, \quad s = 1, ..., N_\alpha, \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial H}{\partial v^\alpha} = 0. \tag{2.29}$$

Además, la acción (2.20) toma la siguiente forma si introducimos la función H

$$S = \int \left[\sum_{s=1}^{N_\alpha} p_\alpha^s \dot{q}_s^\alpha - H \right] dt. \tag{2.30}$$

2.3. Formalismo de Gitman-Lyakhovich-Tyutin

Hasta este punto tenemos los ingredientes necesarios para considerar una teoría singular. En este caso, las ecuaciones (2.24) no poseen solución para cada v, por lo tanto la construcción de Ostrogradski no es aplicable directamente; sin embargo, al igual que en el capítulo 1, consideremos que el determinante de la Hessiana, definida en (2.18), es cero, y además definimos

$$rango(M_{\alpha\beta}) = R, \quad n - R = m > 0. \tag{2.31}$$

Podemos considerar que el menor del rango máximo en la Hessiana se ubique en la esquina superior izquierda. Entonces podemos usar la siguiente notación y además v^α y $p_\alpha^{N_\alpha}$ se dividen en dos grupos:

$$V^i = v^i, \quad P^i = p_i^{N_i}, \quad i = 1, ..., R, \tag{2.32}$$

$$\lambda^\alpha = v^{R+\alpha}, \quad \pi_\alpha = p_{R+\alpha}^{N_{R+\alpha}}, \quad \alpha = 1, ..., m,$$

$$det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial V^i \partial V^j}\right) = 0, \tag{2.33}$$

donde, la condición (2.32) permite escribir todas las V's de las primeras R ecuaciones en (2.24) como

$$V^i = \tilde{V}^i(q, P, \lambda). \tag{2.34}$$

A continuación, si sustituimos (2.34) en las m ecuaciones restantes de (2.24), y utlizando la siguente notación

$$f_a = \frac{\partial L^v}{\partial \lambda^a} \mid_{V=\tilde{V}} = \frac{\partial L^v}{\partial \lambda^a}, \tag{2.35}$$

$$Phi_a^1 = \frac{\partial H}{\partial \lambda^a} \mid_{V=\tilde{V}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda^a}, \tag{2.36}$$

obtenemos las siguientes relaciones

$$\Phi_a^1 = \pi_a - f(q, P), \tag{2.37}$$

las cuales no contienen λ. Éstas funciones resultan ser restricciones y corresponderán a las restricciones primarias, así como en el formalismo para teorías sin derivadas de orden superior desarrollado en el capítulo 1. Continuando, si sustituimos (2.32) en las ecuaciones de movimiento (2.22) y (2.23), estas resultan

$$\dot{q}_s^\alpha = \{q_s^\alpha, H^1\}, \tag{2.38}$$

$$\dot{p}_\alpha^s = \{P_\alpha^s, H^1\}, \tag{2.39}$$

$$\Phi_a^1 = 0, \tag{2.40}$$

donde $H^1 = H + \lambda^a \Phi_a^1$, es la *hamiltoniana primaria*.

En este punto, podemos darnos cuenta de que para teorías singulares con derivadas de orden superior, podemos construir las restricciones primarias y en consecuencia la hamiltoniana primaria, así que ahora es posible seguir de forma análoga a la formulación de Dirac para un análisis hamiltoniano. Entonces bastará extender los resultados del capítulo 1 a estas teorías una vez teniendo las restricciones primarias, como se realizará en los capítulos 3 y 4 para las teorías que son objeto de estudio de este trabajo de tesis.

2.3.1. Formalismo de Gitman-Lyakhovich-Tyutin para sistemas de segundo orden

En concreto, las teorías próximas a tratar están descritas con a lo más, derivadas temporales de segundo orden, por lo cual en esta subsección se desarrolla el formalismo GLT para la obtención de restricciones primarias y la información fundamental para proceder a la Dirac, específicamente para sistemas de segundo orden.

Fijémonos en una lagrangiana L que depende de segundas derivadas de los campos

$$L = L(g_{\mu\nu}; g_{\mu\nu,\alpha}; g_{\mu\nu,\alpha\beta}), \tag{2.41}$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica y $g_{\mu\nu,\alpha}, g_{\mu\nu,\alpha\beta}$ son la primera y segunda derivada, respectivamente. La variación de la acción correspondiente a la lagrangiana (2.41) respecto de la métrica, conduce al equivalente de las ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas de segundo orden con la forma

$$E^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\alpha g_{\mu\nu})} \right) + \partial_\beta \partial_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\beta \partial_\alpha g_{\mu\nu})} \right) = 0. \tag{2.42}$$

Por otra parte, si desarrollamos las derivadas de las ecuaciones en (2.42) ellas originan una ecuación de movimiento de hasta cuarto orden en derivadas de la métrica, por lo que trabajar con este tipo de sistemas complica el análisis hamiltoniano.

Es por esto, que un mejor enfoque consiste en introducir ciertas variables, a fin de obtener una reducción a primer orden en las derivadas temporales de los campos, que es donde encuentra su base la metodología de GLT [16]. Entonces, podemos expresar a la lagrangiana (2.41) separando las derivadas espaciales de las temporales como

$$L = L\left(g_{\mu\nu}; g_{\mu\nu,0}; g_{\mu\nu,k}; g_{\mu\nu,00}; g_{\mu\nu,0k}; g_{\mu\nu,km}\right), \tag{2.43}$$

siguiendo el formalismo GLT, se introducen las siguientes variables

$$G_{\mu\nu} = \dot{g}_{\mu\nu} \quad \text{y} \quad v_{\mu\nu} = \dot{G}_{\mu\nu}, \tag{2.44}$$

con las que podemos escribir a la lagrangiana (2.43) de la siguiente forma

$$L^v = L^v\left(g_{\mu\nu}; G_{\mu\nu}; g_{\mu\nu,k}; v_{\mu\nu}; G_{\mu\nu,k}; g_{\mu\nu,km}\right). \tag{2.45}$$

ahora solo aparece la derivada temporal de primer orden de los campos. La introducción de las variables (2.44) a (2.43) obliga a introducir estas mismas como restricciones mediante multiplicadores de Lagrange en la acción, de manera que

$$S = \int \tilde{L} d^n x = \int \left[L^v + \pi^{\mu\nu}(\dot{g_{\mu\nu}} - G_{\mu\nu}) + P^{\mu\nu}(\dot{G}_{\mu\nu} - v_{\mu\nu}) \right] d^n x, \tag{2.46}$$

los multiplicadores de Lagrange $\pi^{\mu\nu}$ y $P^{\mu\nu}$ actúan como los momentos congujados a $g_{\mu\nu}$ y $G_{\mu\nu}$ respectivamente. Variando esta acción (2.46), podemos obtener las siguientes ecuaciones de movimiento haciendo que las variables se anulen en la frontera

$$\frac{\delta \tilde{L}}{\delta \pi^{\mu\nu}} = \dot{g}_{\mu\nu} - G_{\mu\nu} = 0, \tag{2.47}$$

$$\frac{\delta \tilde{L}}{\delta P^{\mu\nu}} = \dot{G}_{\mu\nu} - v_{\mu\nu} = 0, \tag{2.48}$$

$$\frac{\delta \tilde{L}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial L^v}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_k \left(\frac{\partial L^v}{\partial(\partial_k g_{\mu\nu})} \right) + \partial_k \partial_m \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_k \partial_m g_{\mu\nu})} \right) - \dot{\pi}^{\mu\nu} = 0, \tag{2.49}$$

$$\frac{\delta \tilde{L}}{\delta G_{\mu\nu}} = \frac{\partial L^v}{\partial G_{\mu\nu}} - \partial_k \left(\frac{\delta L^v}{\partial(\partial_k G_{\mu\nu})} \right) - \pi^{\mu\nu} - \dot{P}^{\mu\nu} = 0, \tag{2.50}$$

$$\frac{\delta \tilde{L}}{\delta v^{\mu\nu}} = \frac{\partial L^v}{\partial v_{\mu\nu}} - P^{\mu\nu} = 0. \tag{2.51}$$

Estas ecuaciones son las equivalentes a las ecuaciones de Lagrange en (2.42). Ahora, la ventaja de poder escribir un sistema de segundo orden en derivadas temporales de primer orden de los campos, nos permite escribir a la hamiltoniana de la forma usual

$$H = \pi^{\mu\nu} \dot{g}_{\mu\nu} + P^{\mu\nu} \dot{G}_{\mu\nu} - \tilde{L} = \pi^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + P^{\mu\nu} v_{\mu\nu} - L^v. \tag{2.52}$$

Los paréntesis de Poisson asociados a nuestra nueva hamiltoniana son

$$\{g_{\alpha\beta}, \pi^{\mu\nu}\} = \{G_{\alpha\beta}, P^{\mu\nu}\} = \frac{1}{2}(\delta^\mu_\alpha + \delta^\nu_\beta + \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha), \tag{2.53}$$

y el paréntesis de Poisson para cualesquiera dos funcionales A y B respecto de las variables canónicas será

$$\{A, B\} = \frac{\delta A}{\delta g_{\mu\nu}}\frac{\delta B}{\delta \pi^{\mu\nu}} + \frac{\delta A}{\delta G_{\mu\nu}}\frac{\delta B}{\delta P^{\mu\nu}} - \frac{\delta B}{\delta g_{\mu\nu}}\frac{\delta A}{\delta \pi^{\mu\nu}} - \frac{\delta B}{\delta G_{\mu\nu}}\frac{\delta A}{\delta P^{\mu\nu}}, \tag{2.54}$$

vemos que las ecuaciones de movimiento asociadas a las variables canónicas siguiendo el formalismo hamiltoniano usual resultan

$$\dot{g}_{\mu\nu} = \{g_{\mu\nu}, H\} = \frac{\delta H}{\delta \pi^{\mu\nu}} = G_{\mu\nu}, \tag{2.55}$$

$$\dot{G}_{\mu\nu} = \{G_{\mu\nu}, H\} = \frac{\delta H}{\delta P^{\mu\nu}} = v_{\mu\nu}, \tag{2.56}$$

$$\dot{\pi}^{\mu\nu} = \{\pi^{\mu\nu}, H\} = -\frac{\delta H}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\delta L^v}{\delta g_{\mu\nu}}, \tag{2.57}$$

$$\dot{P}^{\mu\nu} = \{P^{\mu\nu}, H\} = -\frac{\delta H}{\delta G_{\mu\nu}} = \frac{\delta L^v}{\delta G_{\mu\nu}}. \tag{2.58}$$

Si bien las ecuaciones anteriores son equivalentes a las ecuaciones en (2.42), estas no son equivalentes a las obtenidas mediante la formulación hamiltoniana, ya que es claro que la ecuación (2.58) no se obtiene. Entonces si de (2.51) consideramos la expresión

$$\frac{\partial L^v}{\partial v_{\mu\nu}} - P^{\mu\nu} = 0, \tag{2.59}$$

vemos que está perdida. Si la lagrangiana es no singular (es decir, la Hessiana es no nula), debería ser posible resolver (2.59) para $v_{\mu\nu}$ y de forma autoconsistente obtener la dinámica de los pares congujados $(g_{\mu\nu}, \pi^{\mu\nu})$ y $(G_{\mu\nu}, P^{\mu\nu})$ sin ninguna restricción. Sin embargo, en el caso de que se tratase con una lagrangiana singular, es en (2.59) donde se expresa la singularidad de la lagrangiana ya que lo anterior no sería posible resolver, entonces deben tratarse como las restricciones primarias de la teoría.

Capítulo 3

Formalismo GLT aplicado al término de Chern-Simons de alto orden

En este capítulo aplicaremos el formalismo GLT al término de Chern-Simons de alto orden. Sin embargo, por completez de nuestro trabajo, primero aplicaremos el formalismo de Ostrogradski. Posteriormente, vamos a comparar los resultados con los que se obtengan en el formalismo GLT. Cabe mencionar que estos resultados no se encuentran reportados en la literatura y es una contribución original de este trabajo.

3.1. Formalismo de Ostrogradski aplicado a la acción de Chern-Simons de alto orden

La acción de Chern-Simons de alto orden está dada por [19]

$$L = \frac{1}{2\theta}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\Box A_\mu \partial_\nu A_\nu, \tag{3.1}$$

a continuación hacemos la descomposición de la lagrangiana, separando las componentes espaciales y temporales obteniendo

$$L = \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\Box A_0 \partial_i A_j - \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\Box A_i \partial_0 A_j + \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\Box A_i \partial_j A_0, \tag{3.2}$$

desarrollando el D'Alembertiano $\Box$ se obtiene

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\partial^0\partial_0 A_0 \partial_i A_j + \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\nabla^2 A_0 \partial_i A_j - \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\partial^0\partial_0 A_i \partial_0 A_j \\ & - \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\nabla^2 A_i \partial_0 A_j + \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\partial^0\partial_0 A_i \partial_j A_0 + \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\nabla^2 A_i \partial_j A_0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

En este trabajo, se usará la convención de la métrica $\eta = (-1,1,1)$, $\partial_\alpha = (\partial_0, \partial^i)$ y $\partial^\alpha = (-\partial_0, \partial^i)$. De esta manera, la acción toma la forma

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\ddot{A}_0 \partial_i A_j + \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\nabla^2 A_0 \partial_i A_j + \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\ddot{A}_i \dot{A}_j - \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\nabla^2 A_i \dot{A}_j - \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\ddot{A}_i \partial_j A_0 \\ & + \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\nabla^2 A_i \partial_j A_0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Reagrupando obtendremos la forma de la lagrangiana con la que empezaremos nuestro análisis. La lagrangiana está dada por

$$L = \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\left(-\ddot{A}_0 + \nabla^2 A_0\right)\partial_i A_j - \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\left(-\ddot{A}_i + \nabla^2 A_i\right)\dot{A}_j + \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\left(-\ddot{A}_i + \nabla^2 A_i\right)\partial_j A_0. \quad (3.5)$$

Cabe comentar que la anterior lagrangiana describe a una teoría de alto orden en las derivadas temporales, y a continuación vamos a presentar el formalismo de Ostrogradski para conocer sus simetrías.

Primero, calculamos los momentos canónicos $(\pi^0, \pi^i, \tilde{\pi}^0, \tilde{\pi}^i)$ asociados a los campos $(A_0, A_i, \dot{A}_0, \dot{A}_i)$. Podemos ver en este punto que se ha extendido el espacio fase al considerar a la velocidad como nueva variable canónica. Los momentos asociados están dados por

$$\pi^0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_0} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{A}_0} = \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\partial_i \dot{A}_j, \quad (3.6)$$

$$\tilde{\pi}^0 = \frac{\partial L}{\partial \ddot{A}_0} = -\frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\partial_i A_j, \quad (3.7)$$

$$\pi^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{A}_i} = -\frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\ddot{A}_j + \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\partial_j \dot{A}_0, \quad (3.8)$$

$$\tilde{\pi}^i = \frac{\partial L}{\partial \ddot{A}_i} = \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}(\dot{A}_j - \partial_j A_0). \quad (3.9)$$

De lo anterior podemos identificar las siguientes restricciones primarias:

$$\pi^0 - \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\partial_i \dot{A}_j = 0, \quad (3.10)$$

$$\tilde{\pi}^0 + \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}\partial_i A_j = 0, \quad (3.11)$$

$$\tilde{\pi}^i - \frac{1}{2\theta}\epsilon^{0ij}(\dot{A}_j - \partial_j A_0) = 0, \quad (3.12)$$

Vemos que para este sistema singular (3.8) no es restricción debido a que es posible despejar la aceleración y escribirla en términos del momento y de la velocidad. Por otra parte, el hamiltoniano asociado está definido por

$$H_c = \dot{A}_\alpha \pi^\alpha + \ddot{A}_\alpha \tilde{\pi}^\alpha - L, \quad (3.13)$$

donde, utilizando los siguientes desarrollos

$$\dot{A}_\alpha \pi^\alpha + \ddot{A}_\alpha \tilde{\pi}^\alpha - L = \dot{A}_0 \pi^0 + \dot{A}_i \pi^i + \ddot{A}_0 \tilde{\pi}^0 + \ddot{A}_i \tilde{\pi}^i - L,$$

$$\begin{aligned} &= \dot{A}_0 \pi^0 + \dot{A}_i \pi^i + \ddot{A}_0 \tilde{\pi}^0 + \ddot{A}_i \tilde{\pi}^i - \left(-\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\ddot{A}_0 \partial_i A_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_0 \partial_i A_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\ddot{A}_i \dot{A}_j \right. \\ &\left. -\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_i \dot{A}_j - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\ddot{A}_i \partial_j A_0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_0 \partial_i A_j \right), \end{aligned}$$

$$= \dot{A}_0\pi^0 + \dot{A}_i\pi^i + \ddot{A}_0\tilde{\pi}^0 + \ddot{A}_i\tilde{\pi}^i - \left(\ddot{A}_0\tilde{\pi}^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_0\partial_i A_j + \ddot{A}_i\tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_i\dot{A}_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_i\partial_j A_0\right),$$

obtenemos que el hamiltoniano está dado por

$$H_c = \dot{A}_0\pi^0 + \dot{A}_i\pi^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_0\partial_i A_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_i\dot{A}_j - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_i\partial_j A_0. \tag{3.14}$$

Por otra parte, utilizando la restricción (3.12) vemos que podemos despejar el segundo término

$$\tilde{\pi}^i = \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\dot{A}_j - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0,$$

$$\tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\dot{A}_j = -\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0,$$

y sustituyendo en (3.14)

$$\begin{aligned}
H_c &= \dot{A}_0\pi^0 + \dot{A}_i\pi^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_0\partial_i A_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_i\dot{A}_j + \nabla^2 A_i(\tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\dot{A}_j)\\
&= \dot{A}_0\pi^0 + \dot{A}_i\pi^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_0\partial_i A_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_i\dot{A}_j + \nabla^2 A_i\tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_i\dot{A}_j
\end{aligned}$$

$$= \dot{A}_0\pi^0 + \dot{A}_i\pi^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_0\partial_i A_j + \nabla^2 A_i\tilde{\pi}^i, \tag{3.15}$$

tomando nuevamente (3.12) y despejando ahora al campo $\dot{A}_j$

$$\tilde{\pi}^l = \frac{\epsilon^{lj}}{2\theta}(\dot{A}_j - \partial_j A_0),$$

$$2\theta\tilde{\pi}^l = \epsilon^{lj}\dot{A}_j - \epsilon^{lj}\partial_j A_0,$$

$$\epsilon_{lk}2\theta\tilde{\pi}^l = \epsilon_{lk}\epsilon^{lj}\dot{A}_j - \epsilon_{lk}\epsilon^{lj}\partial_j A_0,$$

$$\epsilon_{lk}2\theta\tilde{\pi}^l = \dot{A}_k - \partial_k A_0,$$

$$\dot{A}_k = \epsilon_{lk}2\theta\tilde{\pi}^l + \partial_k A_0,$$

finalmente, aplicando esto último en (3.15)

$$= \dot{A}_0\pi^0 + (\epsilon_{ji}2\theta\tilde{\pi}^j + \partial_i A_0)\pi^i + \nabla^2 A_i\tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_0\partial_i A_j,$$

$$= \dot{A}_0\pi^0 + (-\epsilon_{ij}2\theta\tilde{\pi}^j + \partial_i A_0)\pi^i + \nabla^2 A_i\tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_0\partial_i A_j,$$

así obteniendo lo siguiente

$$H_c = \dot{A}_0\pi^0 - 2\theta\pi^i\epsilon_{ij}\tilde{\pi}^j + \pi^i\partial_i A_0 + \nabla^2 A_i\tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_0\partial_i A_j. \tag{3.16}$$

Resumiendo, tenemos el hamiltoniano canónico

$$H_c = \int \left(\dot{A}_0 \pi^0 - 2\theta \pi^i \epsilon_{ij} \tilde{\pi}^j + \pi^i \partial_i A_0 + \nabla^2 A_i \tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \nabla^2 A_0 \partial_i A_j \right) dx^2, \tag{3.17}$$

y tenemos las siguientes restricciones primarias

$$\gamma_0 = \pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i \dot{A}_j = 0, \tag{3.18}$$

$$\gamma_1 = \tilde{\pi}^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i A_j = 0, \tag{3.19}$$

$$\gamma_i = \tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} (\dot{A}_j - \partial_j A_0) = 0. \tag{3.20}$$

Ahora, para hallar restricciones secundarias, lo haremos mediante las relaciones de consistencia dadas por

$$\dot{\gamma}_\mu = \{\gamma^\mu, H_p\} = 0, \tag{3.21}$$

donde $H_p = H_c + \int d^2x \Omega_\mu \gamma^\mu$, es el hamiltoniano primario, y Ω_μ son multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones. Para este propósito, calcularemos los paréntesis de Poisson entre todas las restricciones primarias, obteniendo

$$\{\gamma_0, \gamma_0\} = \left\{ \pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i \dot{A}_j, \pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i \dot{A}_j \right\} = 0,$$

$$\{\gamma_0, \gamma_1\} = \left\{ \pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i \dot{A}_j, \tilde{\pi}^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i A_j \right\} = 0,$$

$$\{\gamma_0, \gamma_i\} = \left\{ \pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i \dot{A}_j, \tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \dot{A}_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_j A_0) \right\} = \frac{\epsilon^{kl}}{\theta} \partial_l \delta^2(x-y).$$

Calculemos la relación de consistencia de la restricción primaria γ^0, la cual está dada por

$$\dot{\gamma}^0 = \{\gamma^0, H_p\} = \left\{ \gamma^0(x), H_c(y) + \int dy^2 \Omega_\mu \gamma^\mu(y) \right\} \tag{3.22}$$

$$= \left\{ \gamma^0(x), H_c(y) \right\} + \left\{ \gamma^0(x), \int dy^2 \Omega_\mu \gamma^\mu(y) \right\},$$

desarrollando el primer término tenemos

$$
\begin{aligned}
\{\gamma^0(x), H_c(y)\} &= \left\{\pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i \dot{A}_j, \int \dot{A}_0\pi^0 - 2\theta\pi^k\epsilon_{kl}\tilde{\pi}^l + \pi^k\partial_k A_0 + \nabla^2 A_k\tilde{\pi}^k - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\nabla^2 A_0\partial_k A_l dy^2\right\} \\
&= \left\{\pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i \dot{A}_j, \int \pi^k\partial_k A_0 - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\nabla^2 A_0\partial_k A_l - 2\theta\pi^k\epsilon_{kl}\tilde{\pi}^l + \nabla^2 A_k\tilde{\pi}^k dy^2\right\} \\
&= \left\{\pi^0, \int \pi^k\partial_k A_0 - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\nabla^2 A_0\partial_k A_l dy^2\right\} + \left\{-\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i \dot{A}_j, -2\theta\pi^k\epsilon_{kl}\tilde{\pi}^l + \nabla^2 A_k\tilde{\pi}^k dy^2\right\} \\
&= \left\{\pi^0, \int \pi^k\partial_k A_0 dy^2\right\} - \left\{\pi^0, \int \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\nabla^2 A_0\partial_k A_l dy^2\right\} + \left\{\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i \dot{A}_j, \int 2\theta\pi^k\epsilon_{kl}\tilde{\pi}^l dy^2\right\} \\
&- \left\{\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i \dot{A}_j, \int \nabla^2 A_k\tilde{\pi}^k dy^2\right\} \\
&= \int \pi^k\partial_k\left\{\pi^0, A_0\right\} dy^2 - \int \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k A_l\nabla^2\left\{\pi^0, A_0\right\} dy^2 + \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i 2\theta\epsilon_{kl}\pi^k\left\{\dot{A}_j, \tilde{\pi}^l\right\} dy^2 \\
&- \int \frac{\epsilon_{ij}}{2\theta}\partial_i\nabla^2 A_k\left\{\dot{A}_j, \tilde{\pi}^k\right\} dy^2 \\
&= -\pi^k\partial_k + \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k A_l\nabla^2 + \partial_k\pi^k - \frac{\epsilon^{ik}}{2\theta}\partial_i\nabla^2 A_k = 2\partial_k\pi^k.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, vemos que el segundo término corresponde a lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\left\{\gamma^0(x), \int dy^2\Omega_\mu\gamma^\mu(y)\right\} &= \int dy^2\Omega_0\{\gamma^0, \gamma^0\} + \Omega_1\{\gamma^0, \gamma^1\} + \Omega_l\{\gamma^0, \gamma^l\} \\
&= \int dy^2\frac{\epsilon^{kl}}{\theta}\partial_l\delta^2(x-y)\Omega_l = \frac{\epsilon^{kl}}{\theta}\partial_l\Omega_l,
\end{aligned}
$$

entonces de la relación (3.22) obtenemos la siguiente restricción

$$
\dot{\gamma}^0 = 0 = 2\partial_k\pi^k + \frac{\epsilon^{kl}}{\theta}\partial_l\Omega_l. \tag{3.23}
$$

Por otra parte, ahora calcularemos la relación de consistencia de la restricción primaria γ^1. De esta manera obtenemos

$$
\dot{\gamma}^1 = \{\gamma^1, H_p\} = \left\{\gamma^1(x), H_c(y) + \int dy^2\Omega_\mu\gamma^\mu(y)\right\} \tag{3.24}
$$

$$
= \left\{\gamma^1(x), H_c(y)\right\} + \left\{\gamma^1(x), \int dy^2\Omega_\mu\gamma^\mu(y)\right\},
$$

entonces desarrollando el primer paréntesis

$$\begin{aligned}
\left\{\gamma^1(x), H_c(y)\right\} &= \left\{\tilde{\pi}^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j, \int \dot{A}_0\pi^0 - 2\theta\pi^k\epsilon_{kl}\tilde{\pi}^l + \pi^k\partial_k A_0 + \nabla^2 A_k\tilde{\pi}^k - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\nabla^2 A_0\partial_k A_l dy^2\right\} \\
&= \left\{\tilde{\pi}^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j, \int \dot{A}_0\pi^0 - 2\theta\pi^k\epsilon_{kl}\tilde{\pi}^l + \pi^k\partial_k A_0 dy^2\right\} \\
&= \left\{\tilde{\pi}^0, \int \dot{A}_0\pi^0 dy^2\right\} + \left\{\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j, \int -2\theta\pi^k\epsilon_{kl}\tilde{\pi}^l + \pi^k\partial_k A_0 dy^2\right\} \\
&= \left\{\tilde{\pi}^0, \int \dot{A}_0\pi^0 dy^2\right\} - \left\{\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j, \int 2\theta\pi^k\epsilon_{kl}\tilde{\pi}^l dy^2\right\} + \left\{\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j, \int \pi^k\partial_k A_0 dy^2\right\} \\
&= \int \pi^0\left\{\tilde{\pi}^0, \dot{A}_0\right\} dy^2 - \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i 2\theta\epsilon_{kl}\tilde{\pi}^l\{A_j, \pi^k\}dy^2 + \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i\partial_k A_0\{A_j, \pi^k\}dy^2 \\
&= -\pi^0 - \int \epsilon^{ij}\epsilon_{kl}\partial_i\tilde{\pi}^l\delta_j^k\delta^2(x-y)dy^2 + \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i\partial_k A_0\delta_j^k\delta^2(x-y)dy^2 \\
&= -\pi^0 + \int \epsilon^{ik}\epsilon_{lk}\partial_i\tilde{\pi}^l\delta^2(x-y)dy^2 + \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i\partial_j A_0\delta^2(x-y)dy^2 \\
&= -\pi^0 + \partial_i\tilde{\pi}^i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i\partial_j A_0.
\end{aligned}$$

Ahora siguiendo con el otro paréntesis tenemos

$$\left\{\gamma^1(x), \int dy^2\Omega_\mu\gamma^\mu(y)\right\} = \int dy^2\Omega_0\{\gamma^1, \gamma^0\} + \Omega_1\{\gamma^1, \gamma^1\} + \Omega_1\{\gamma^1, \gamma^l\} = 0,$$

entonces de la relación (3.24) se tiene la siguiente restricción secundaria

$$\dot{\gamma}^1 = \pi^0 - \partial_i\tilde{\pi}^i = 0. \tag{3.25}$$

Finalmente, calculemos la evolución de la restricción γ^i, es decir

$$\dot{\gamma}^i = \{\gamma^i, H_p\} = \left\{\gamma^i(x), H_c(y) + \int dy^2\Omega_\mu\gamma^\mu(y)\right\} \tag{3.26}$$

$$= \left\{\gamma^i(x), H_c(y)\right\} + \left\{\gamma^i(x), \int dy^2\Omega_\mu\gamma^\mu(y)\right\},$$

tenemos para el primer término

$$
\begin{aligned}
\left\{\gamma^i(x), H_c(y)\right\} &= \left\{\tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\dot{A}_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0, \int \dot{A}_0\pi^0 - 2\theta\pi^k\epsilon_{kl}\tilde{\pi}^l + \pi^k\partial_k A_0 + \nabla^2 A_k\tilde{\pi}^k - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\nabla^2 A_0\partial_k A_l dy^2\right\} \\
&= \left\{\tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\dot{A}_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0, \int \dot{A}_0\pi^0 - 2\theta\pi^k\epsilon_{kl}\tilde{\pi}^l + \nabla^2 A_k\tilde{\pi}^k dy^2\right\} \\
&= \left\{-\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\dot{A}_j, \int -2\theta\pi^k\epsilon_{kl}\tilde{\pi}^l + \nabla^2 A_k\tilde{\pi}^k dy^2\right\} + \left\{\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0, \int \dot{A}_0\pi^0 dy^2\right\} \\
&= \left\{\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\dot{A}_j, \int 2\theta\pi^k\epsilon_{kl}\tilde{\pi}^l dy^2\right\} - \left\{\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\dot{A}_j, \int \nabla^2 A_k\tilde{\pi}^k dy^2\right\} + \left\{\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0, \int \dot{A}_0\pi^0 dy^2\right\} \\
&= \int \epsilon^{ij}\epsilon_{kl}\pi^k\left\{\dot{A}_j, \tilde{\pi}^l\right\} dy^2 - \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_k\left\{\dot{A}_j, \tilde{\pi}^k\right\} dy^2 + \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j\dot{A}_0\left\{A_0, \pi^0\right\} dy^2 \\
&= \int \epsilon^{ij}\epsilon_{kl}\pi^k\delta^l_j\delta^2(x-y)dy^2 - \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_k\delta^k_j\delta^2(x-y)dy^2 + \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j\dot{A}_0\delta^2(x-y)dy^2 \\
&= \int \epsilon^{ij}\epsilon_{kj}\pi^j\delta^2(x-y)dy^2 - \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_j\delta^2(x-y)dy^2 + \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j\dot{A}_0\delta^2(x-y)dy^2 \\
&= \pi^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i\dot{A}_0.
\end{aligned}
$$

Veamos que para el segundo término

$$
\begin{aligned}
\left\{\gamma^i(x), \int dy^2\Omega_\mu\gamma^\mu(y)\right\} &= \int dy^2\Omega_0\{\gamma^i, \gamma^0\} + \Omega_1\{\gamma^i, \gamma^1\} + \Omega_1\{\gamma^i, \gamma^l\} \\
&= \int dy^2\Omega_0\{\gamma^i, \gamma^0\} = \int -\frac{\epsilon^{kl}}{\theta}\Omega_0\partial_l\delta^2(x-y)dy^2 = -\frac{\epsilon^{kl}}{\theta}\partial_l\Omega_0,
\end{aligned}
$$

entonces de (3.26) obtenemos lo siguiente, además nos damos cuenta que esta no es una restricción secundaria

$$
\dot{\gamma}^i = \pi^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i\dot{A}_0 - \frac{\epsilon^{kl}}{\theta}\partial_l\Omega_0 = 0. \tag{3.27}
$$

Continuando el análisis, calculemos la evolución de γ^1, para esto llamemos $\Gamma^0 = \dot{\gamma}^1 = \pi^0 - \partial_i\tilde{\pi}^i = 0$, entonces tenemos lo siguiente

$$
\dot{\Gamma}^0 = \left\{\Gamma^0(x), H_c(y)\right\} + \int dy^2\Omega_0\{\Gamma^0, \gamma^0\} + \Omega_1\{\Gamma^0, \gamma^1\} + \Omega_1\{\Gamma^0, \gamma^l\}. \tag{3.28}
$$

Para esto, calculemos los paréntesis de Poisson del segundo término

$$
\left\{\Gamma^0, \gamma^0\right\} = \left\{\pi^0 - \partial_i\tilde{\pi}^i, \pi^0 - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k\dot{A}_l\right\} = 0,
$$

$$
\left\{\Gamma^0, \gamma^1\right\} = \left\{\pi^0 - \partial_i\tilde{\pi}^i, \tilde{\pi}^0 + \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k A_l\right\} = 0,
$$

$$
\left\{\Gamma^0, \gamma^l\right\} = \left\{\pi^0 - \partial_i\tilde{\pi}^i, \tilde{\pi}^l - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\dot{A}_l + \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_l A_0\right\} = 0,
$$

vemos que son cero, entonces la evolución es

$$
\begin{aligned}
\left\{\Gamma^0(x), H_c(y)\right\} &= \left\{\pi^0 - \partial_i\tilde{\pi}^i, \int \dot{A}_0\pi^0 - 2\theta\pi^k\epsilon_{kl}\tilde{\pi}^l + \pi^k\partial_k A_0 + \nabla^2 A_k\tilde{\pi}^k - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\nabla^2 A_0\partial_k A_l dy^2\right\} \\
&= \left\{\pi^0, \int \pi^k\partial_k A_0 - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\nabla^2 A_0\partial_k A_l dy^2\right\} \\
&= \left\{\pi^0, \int \pi^k\partial_k A_0 dy^2\right\} + \left\{\pi^0, \int -\frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\nabla^2 A_0\partial_k A_l dy^2\right\} \\
&= \int \pi^k\partial_k\left\{\pi^0, A_0\right\}dy^2 - \int \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k A_l\nabla^2\left\{\pi^0, A_0\right\} \\
&= -\int \pi^k\partial_k\delta^2(x-y)dy^2 + \int \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k A_l\nabla^2\delta^2(x-y) \\
&= \partial_k\pi^k + \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k\nabla^2 A_l.
\end{aligned}
$$

De aquí, encontramos una nueva restricción, esta será terciaria y está dada por

$$
\dot{\Gamma}^0 = \partial_k\pi^k + \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k\nabla^2 A_l = 0. \tag{3.29}
$$

Resumiendo, se encontró el siguiente conjunto de restricciones

$$
\gamma_0 = \pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i\dot{A}_j = 0, \tag{3.30}
$$

$$
\gamma_1 = \tilde{\pi}^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j = 0, \tag{3.31}
$$

$$
\gamma_i = \tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}(\dot{A}_j - \partial_j A_0) = 0, \tag{3.32}
$$

$$
\Gamma^0 = \pi^0 - \partial_i\tilde{\pi}^i = 0, \tag{3.33}
$$

$$
\chi^0 = \partial_i\pi^i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2\partial_i A_j = 0. \tag{3.34}
$$

Debido a que no hay más restricciones, ahora pasaremos a separarlas en restricciones de primera clase y de segunda clase. Para ello calculemos los paréntesis de Poisson entre todas las restricciones, obteniendo

$$
\left\{\gamma^0, \gamma^0\right\} = \left\{\pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i\dot{A}_j, \pi^0 - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k\dot{A}_l\right\} = 0,
$$

$$
\left\{\gamma^0, \gamma^1\right\} = \left\{\pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i\dot{A}_j, \tilde{\pi}^0 + \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k A_l\right\} = 0,
$$

$$
\left\{\gamma^0, \gamma^1\right\} = \left\{\pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i\dot{A}_j, \tilde{\pi}^k - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\dot{A}_l + \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_l A_0\right\} = \frac{\epsilon^{kl}}{\theta}\partial_l\delta^2(x-y),
$$

$$
\left\{\gamma^0, \Gamma^0\right\} = \left\{\pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i\dot{A}_j, \pi^0 - \partial_k\tilde{\pi}^k\right\} = 0,
$$

$$
\left\{\gamma^0, \chi^0\right\} = \left\{\pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i\dot{A}_j, \partial_k\pi^k + \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\nabla^2\partial_k A_l\right\} = 0,
$$

entonces γ^0 es de segunda clase.

$$\{\gamma^1,\gamma^0\} = \left\{\tilde{\pi}^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j, \pi^0 - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k \dot{A}_l\right\} = 0,$$

$$\{\gamma^1,\gamma^1\} = \left\{\tilde{\pi}^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j, \tilde{\pi}^0 + \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k A_l\right\} = 0,$$

$$\{\gamma^1,\gamma^i\} = \left\{\tilde{\pi}^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j, \tilde{\pi}^k - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\dot{A}_l + \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_l A_0\right\} = 0,$$

$$\{\gamma^1,\Gamma^0\} = \left\{\tilde{\pi}^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j, \pi^0 - \partial_k\tilde{\pi}^k\right\} = 0,$$

$$\{\gamma^1,\chi^0\} = \left\{\tilde{\pi}^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j, \partial_k\pi^k + \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\nabla^2\partial_k A_l\right\} = 0,$$

entonces γ^1 es de primera clase.

$$\{\gamma^i,\gamma^0\} = \left\{\tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\dot{A}_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0, \pi^0 - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k \dot{A}_l\right\} = -\frac{\epsilon^{ki}}{2\theta}\partial_k\delta^2(x-y)$$

$$\{\gamma^i,\gamma^1\} = \left\{\tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\dot{A}_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0, \tilde{\pi}^0 + \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k A_l\right\} = 0,$$

$$\{\gamma^i,\gamma^l\} = \left\{\tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\dot{A}_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0, \tilde{\pi}^k - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\dot{A}_l + \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_l A_0\right\} = 0,$$

$$\{\gamma^i,\Gamma^0\} = \left\{\tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\dot{A}_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0, \pi^0 - \partial_k\tilde{\pi}^k\right\} = 0,$$

$$\{\gamma^i,\chi^0\} = \left\{\tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\dot{A}_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0, \partial_k\pi^k + \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\nabla^2\partial_k A_l\right\} = 0,$$

entonces γ^i es de segunda clase.

$$\{\Gamma^0,\gamma^0\} = \left\{\pi^0 - \partial_i\tilde{\pi}^i, \pi^0 - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k \dot{A}_l\right\} = 0,$$

$$\{\Gamma^0,\gamma^1\} = \left\{\pi^0 - \partial_i\tilde{\pi}^i, \tilde{\pi}^0 + \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k A_l\right\} = 0,$$

$$\{\Gamma^0,\gamma^i\} = \left\{\pi^0 - \partial_i\tilde{\pi}^i, \tilde{\pi}^k - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\dot{A}_l + \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_l A_0\right\} = 0,$$

$$\{\Gamma^0,\Gamma^0\} = \{\pi^0 - \partial_i\tilde{\pi}^i, \pi^0 - \partial_k\tilde{\pi}^k\} = 0,$$

$$\{\Gamma^0,\chi^0\} = \left\{\pi^0 - \partial_i\tilde{\pi}^i, \partial_k\pi^k + \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\nabla^2\partial_k A_l\right\} = 0,$$

entonces Γ^0 es de primera clase.

$$\{\chi^0,\gamma^0\} = \left\{\partial_i\pi^i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2\partial_i A_j, \pi^0 - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k \dot{A}_l\right\} = 0,$$

$$\left\{\chi^0, \gamma^1\right\} = \left\{\partial_i \pi^i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 \partial_i A_j, \tilde{\pi}^0 + \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k A_l\right\} = 0,$$

$$\left\{\chi^0, \gamma^i\right\} = \left\{\partial_i \pi^i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 \partial_i A_j, \tilde{\pi}^k - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\dot{A}_l + \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_l A_0\right\} = 0,$$

$$\left\{\chi^0, \Gamma^0\right\} = \left\{\partial_i \pi^i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 \partial_i A_j, \pi^0 - \partial_k \tilde{\pi}^k\right\} = 0,$$

$$\left\{\chi^0, \chi^0\right\} = \left\{\partial_i \pi^i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 \partial_i A_j, \partial_k \pi^k + \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\nabla^2 \partial_k A_l\right\} = 0,$$

entonces χ^0 es de primera clase.

Fijémonos en las restricciones (3.30 - 3.34), tomando (3.32) y calculando su derivada parcial respecto a x^i tenemos

$$\partial_i\left(\tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\dot{A}_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0\right) = 0$$
$$\partial_i \tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i \dot{A}_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i \partial_j A_0 = 0$$

$$\partial_i \tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i \dot{A}_j = 0, \tag{3.35}$$

ahora haciendo la resta de (3.30) y (3.35) tenemos

$$\left(\pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i \dot{A}_j\right) - \left(\partial_i \tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i \dot{A}_j\right) = 0,$$

$$\pi^0 - \partial_i \tilde{\pi}^i = 0.$$

Nos damos cuenta que obtenemos la restricción (3.33), entonces concluimos que las restricciones (3.30) y (3.32) no son independientes entre sí, así que para este sistema tendremos el siguiente conjunto de restricciones correctas:

$$\gamma_1 = \tilde{\pi}^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j = 0, \tag{3.36}$$

$$\gamma_i = \tilde{\pi}^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\dot{A}_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0 = 0, \tag{3.37}$$

$$\Gamma^0 = \pi^0 - \partial_i \tilde{\pi}^i = 0, \tag{3.38}$$

$$\chi^0 = \partial_i \pi^i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 \partial_i A_j = 0. \tag{3.39}$$

Clasificándolas en restricciones de primera y segunda clase tenemos

primera	segunda
γ^1	γ^i
Γ^0	
χ^0	

Teniendo la clasificación anterior, ahora podemos realizar el conteo de grados de libertad (1.59) definido en el capítulo 1

$$\begin{aligned} GL = \frac{1}{2}\{ & N\ de\ variables\ canonicas - N\ de\ restricciones\ de\ 2da\ clase \\ & -2 \times N\ de\ restricciones\ de\ 1era\ clase\} \end{aligned} \tag{3.40}$$

sustituyendo

$$\begin{aligned} G_L &= \frac{1}{2}\left[12 - 2(3) - 2\right] \\ &= \frac{1}{2}[12-8] = \frac{4}{2} \\ &= 2, \end{aligned}$$

concluimos que usando esta clasificación de restricciones para la acción de Chern-Simons, tenemos 2 grados de libertad para el sistema, por lo que no es una teoría topológica. Estos dos grados de libertad representan a un campo de norma masivo y un campo de norma no masivo.

3.2. Formalismo de GLT aplicado a la acción de Chern-Simons de alto orden

Para esta parte, partimos de la lagrangiana (3.5) de la sección anterior, la cual está dada por

$$L = \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\left(-\ddot{A}_0 + \nabla^2 A_0\right)\partial_i A_j - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\left(-\ddot{A}_i + \nabla^2 A_i\right)\dot{A}_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\left(-\ddot{A}_i + \nabla^2 A_i\right)\partial_j A_0. \tag{3.41}$$

Ahora siguiendo el formalismo GLT, vamos a introducir el siguiente conjunto de dos nuevas variables definidas por

$$\dot{A}_\alpha = G_\alpha, \tag{3.42}$$

y

$$V_\alpha = \dot{G}_\alpha \quad \Longrightarrow \quad V_\alpha = \ddot{A}_\alpha, \tag{3.43}$$

reescribiendo el lagrangiano con estas nuevas variables tenemos

$$L = \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\left(-V_0 + \nabla^2 A_0\right)\partial_i A_j - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\left(-V_i + \nabla^2 A_i\right)G_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\left(-V_i + \nabla^2 A_i\right)\partial_j A_0 \tag{3.44}$$

Esta será la lagrangiana con la que se realizará el análisis, de acuerdo a lo visto en el capítulo 2, calculemos los momentos asociados a las variables V

$$P^\alpha = \frac{\partial L}{\partial V_\alpha}, \tag{3.45}$$

obteniendo

$$P^0 = \frac{\partial L}{\partial V_0} = -\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j, \tag{3.46}$$

$$P^i = \frac{\partial L}{\partial V_i} = \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} G_j - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0, \tag{3.47}$$

donde podemos identificar las siguientes restricciones primarias

$$\Lambda^0 = P^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j, \tag{3.48}$$

$$\Lambda^i = P^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} G_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0. \tag{3.49}$$

Podemos ver que tenemos menos restricciones primarias que respecto a las obtenidas en DO. Usando los momentos calculados, podemos obtener el correspondiente hamiltoniano canónico, que está dado por

$$H_c = \pi^\alpha G_\alpha + P^\alpha V_\alpha - L,$$

extendiendo las variables y usando (3.44)

$$\begin{aligned} H_c = \pi^0 G_0 + \pi^i G_i + P^0 V_0 + P^i V_i - \bigg(& -\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} V_0 \partial_i A_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_0 \partial_i A_j \\ & + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} V_i G_j - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_i G_j - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} V_i \partial_j A_0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_i \partial_j A_0 \bigg) \end{aligned}$$

obtenemos la siguiente expresión para el hamiltoniano canónico

$$\begin{aligned} H_c = & \pi^0 G_0 + \pi^i G_i + P^0 V_0 + P^i V_i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} V_0 \partial_i A_j - \frac{\epsilon^{ij}}{\theta}\nabla^2 A_0 \partial_i A_j \\ & - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} V_i G_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_i G_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} V_i \partial_j A_0. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Ahora bien, para la evolución de las restricciones es necesario realizar el cálculo de los paréntesis de Poisson entre ellas. Cabe recordar que los paréntesis fundamentales de la teoría son los siguientes:

$$\begin{aligned} \left\{A_\alpha, \pi^\beta\right\} &= \delta_\alpha^\beta \delta^2(x-y), \\ \left\{G_\alpha, P^\beta\right\} &= \delta_\alpha^\beta \delta^2(x-y). \end{aligned}$$

Continuando, tenemos lo siguiente

$$\left\{\Lambda^0, \Lambda^0\right\} = \left\{P^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j, P^0 + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_l A_k\right\} = 0, \tag{3.51}$$

$$\left\{\Lambda^0, \Lambda^l\right\} = \left\{P^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j, P^l - \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} G_k + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k A_0\right\} = 0, \tag{3.52}$$

$$\left\{\Lambda^l, \Lambda^m\right\} = \left\{P^l - \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} G_k + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k A_0, P^m - \frac{\epsilon^{mn}}{2\theta} G_n + \frac{\epsilon^{mn}}{2\theta}\partial_n A_0\right\} = -\frac{\epsilon^{lm}}{\theta}\delta^2(x-y). \tag{3.53}$$

Para encontrar las restricciones secundarias de la teoría, tenemos las relaciones de consistencia dadas por

$$\dot{\Lambda}_\alpha = \{\Lambda_\alpha, H_p\} = 0, \tag{3.54}$$

donde $H_p = H_c + \int \alpha_0 \Lambda^0(y) dy^2 + \int \alpha_l \Lambda^l(y) dy^2$ es el hamiltoniano primario correspondiente.

La relación de consistencia para Λ^0 se calcula como

$$\dot{\Lambda}^0 = \{\Lambda^0, H_p\} = \int \{\Lambda^0, H_c\} dy^2 + \int \alpha_0 \{\Lambda^0, \Lambda^0\} dy^2 + \int \alpha_i \{\Lambda^0, \Lambda^i\} dy^2, \tag{3.55}$$

usando (3.51) y (3.52) tenemos que los dos últimos términos son cero, entonces

$$\dot{\Lambda}^0 = \int \left\{ P^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i A_j, H_c \right\} dy^2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
\dot{\Lambda}^0 &= \int \left\{ P^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i A_j, \pi^0 G_0 + \pi^l G_l \right\} dy^2 \\
&= \int \left\{ P^0, \pi^0 G_0 \right\} dy^2 + \int \left\{ \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i A_j, \pi^l G_l \right\} dy^2 \\
&= \int \pi^0 \left\{ P^0, G_0 \right\} dy^2 + \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i \left\{ A_j, \pi^l \right\} G_l dy^2 \\
&= \int -\pi^0 \delta^2(x-y) dy^2 + \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i \delta^l_j \delta^2(x-y) G_l dy^2 \\
&= -\pi^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i G_j = 0,
\end{aligned}$$

así de la relación (3.55) obtenemos la siguiente restricción secundaria

$$\Gamma^0 = \pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i G_j = 0. \tag{3.56}$$

Haciendo el cálculo para la restricción Λ^i tenemos

$$\dot{\Lambda}^i = \{\Lambda^i, H_p\} = \int \{\Lambda^0, H_c\} dy^2 + \int \alpha_0 \{\Lambda^i, \Lambda^0\} dy^2 + \int \alpha_l \{\Lambda^i, \Lambda^l\} dy^2, \tag{3.57}$$

donde el segundo término es cero por (3.52) y para el tercero usaremos (3.53)

$$\dot{\Lambda}^i = \int \left\{ P^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} G_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_j A_0, H_c \right\} dy^2 - \int \alpha_l \frac{\epsilon^{il}}{\theta} \delta^2(x-y) dy^2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
\dot{\Lambda}^i &= \int \left\{ P^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} G_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_j A_0, \pi^0 G_0 + \pi^l G_l + P^l V_l - \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} V_l G_k + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} \nabla^2 A_l G_k \right\} dy^2 - \frac{\epsilon^{il}}{\theta} \alpha_l \\
&= \int \left\{ P^i, \pi^l G_l - \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} V_l G_k + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} \nabla^2 A_l G_k \right\} dy^2 + \int \left\{ -\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} G_j, P^l V_l \right\} dy^2 + \int \left\{ \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_j A_0, \pi^o G_0 \right\} dy^2 - \frac{\epsilon^{il}}{\theta} \alpha_l \\
&= \int \left\{ P^i, G_l \right\} \pi^l dy^2 - \int \left\{ P^i, G_k \right\} \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} V_l dy^2 + \int \left\{ P^i, G_k \right\} \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} \nabla^2 A_l dy^2 - \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \left\{ G_j, P^l \right\} V_l dy^2 \\
&+ \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_j \left\{ A_0, \pi^0 \right\} G_0 dy2 - \frac{\epsilon^{il}}{\theta} \alpha_l \\
&= \int -\pi^l \delta^l_i \delta^2(x-y) dy^2 - \int \delta^i_k \delta^2(x-y) \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} V_l dy^2 - \int \delta^i_k \delta^2(x-y) \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} \nabla^2 A_l dy^2 - \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \delta^l_j \delta^2(x-y) V_l dy^2 \\
&+ \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_j G_0 \delta^2(x-y) dy2 - \frac{\epsilon^{il}}{\theta} \alpha_l \\
&= -\pi^i + \frac{\epsilon^{li}}{2\theta} V_l - \frac{\epsilon^{li}}{2\theta} \nabla^2 A_l - \frac{\epsilon^{il}}{2\theta} V_l + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_j G_0 - \frac{\epsilon^{il}}{\theta} \alpha_l = 0,
\end{aligned}$$

así de (3.57) obtenemos lo siguiente

$$\dot{\Lambda}^i = \pi^i + \frac{\epsilon^{il}}{\theta}V_l - \frac{\epsilon^{il}}{2\theta}\nabla^2 A_l - \frac{\epsilon^{il}}{2\theta}\partial_l G_0 + \frac{\epsilon^{il}}{\theta}\alpha_l = 0, \tag{3.58}$$

además vemos que esta no es una reestrición pues tenemos asociados multiplicadores de Lagrange.

Siguiendo con el formalismo, veamos la evolución para la restricción secundaria Γ^0, entonces

$$\dot{\Gamma}^0 = \int \left\{\Gamma^0(x), H_c(y)\right\} dy^2 + \int \alpha_0 \left\{\Gamma^0, \Lambda^0\right\} dy^2 + \int \alpha_l \left\{\Gamma^0, \Lambda^l\right\} dy^2 = 0,$$

vemos que el segundo término es cero pues no hay contribuciones de los campos, entonces

$$\begin{aligned}
\dot{\Gamma}^0 &= \int \left\{\Gamma^0(x), H_c(y)\right\} dy^2 + \int \alpha_l \left\{\Gamma^0, \Lambda^l\right\} dy^2 \\
&= \int \left\{\pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i G_j, P^l V_l - \frac{\epsilon^{lk}}{\theta}\nabla^2 A_0 \partial_l A_k + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}V_l\partial_k A_0\right\} dy^2 \\
&+ \int \alpha_l \left\{\pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i G_j, P^l + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k A_0\right\} dy^2 \\
&= -\int \frac{\epsilon^{lk}}{\theta}\nabla^2\partial_l A_k \left\{\pi^0, A_0\right\} dy^2 - \int \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k V_l \left\{\pi^0, A_0\right\} dy^2 - \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i \left\{G_j, P^l\right\} V_l dy^2 \\
&+ \int \alpha_l \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k \left\{\pi^0, A_0\right\} dy^2 - \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i \left\{G_j, P^l\right\} \alpha_l dy^2 \\
&= \int \frac{\epsilon^{lk}}{\theta}\nabla^2\partial_l A_k \delta^2(x-y) dy^2 + \int \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k V_l \delta^2(x-y) dy^2 - \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i \delta^l_j \delta^2(x-y) dy^2 \\
&- \int \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\alpha_l \partial_k \delta^2(x-y) dy^2 - \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i \delta^l_j \delta^2(x-y) dy^2 \\
&= \frac{\epsilon^{lk}}{\theta}\nabla^2\partial_l A_k + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k V_l - \frac{\epsilon^{il}}{2\theta}\partial_i V_l - \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\alpha_l \partial_k - \frac{\epsilon^{il}}{2\theta}\partial_k \alpha_l = 0
\end{aligned},$$

así tenemos que

$$\dot{\Gamma}^0 = \frac{\epsilon^{lk}}{\theta}\nabla^2\partial_l A_k - \frac{\epsilon^{lk}}{\theta}\partial_l V_k - \frac{\epsilon^{lk}}{\theta}\partial_l \alpha_k = 0. \tag{3.59}$$

Fijándonos en lo siguiente, si calculamos la derivada parcial respecto a x^i de (3.58) tenemos

$$\partial_i \left(\pi^i + \frac{\epsilon^{il}}{\theta}V_l - \frac{\epsilon^{il}}{2\theta}\nabla^2 A_l - \frac{\epsilon^{il}}{2\theta}\partial_l G_0 + \frac{\epsilon^{il}}{\theta}\alpha_l\right) = 0$$

$$\partial_i \pi^i + \frac{\epsilon^{il}}{\theta}\partial_i V_l - \frac{\epsilon^{il}}{2\theta}\nabla^2\partial_i A_l + \frac{\epsilon^{il}}{\theta}\partial_i \alpha_l = 0, \tag{3.60}$$

y sumando las ecuaciones (3.59) y (3.60)

$$\frac{\epsilon^{il}}{\theta}\nabla^2\partial_i A_l - \frac{\epsilon^{il}}{\theta}\partial_i V_l - \frac{\epsilon^{il}}{\theta}\partial_i \alpha_l + \left(\partial_i \pi^i + \frac{\epsilon^{il}}{\theta}\partial_i V_l - \frac{\epsilon^{il}}{2\theta}\nabla^2\partial_i A_l + \frac{\epsilon^{il}}{\theta}\partial_i \alpha_l\right) = 0,$$

obteniendo una nueva restricción

$$\Sigma^0 = \partial_i \pi^i + \frac{\epsilon^{il}}{2\theta}\nabla^2\partial_i A_l = 0. \tag{3.61}$$

Para la evolución de Σ^0 tenemos lo siguiente

$$\dot{\Sigma}^0 = \int \left\{\Sigma^0(x), H_c(y)\right\} dy^2 + \int \alpha_0 \left\{\Sigma^0, \Lambda^0\right\} dy^2 + \int \alpha_l \left\{\Sigma^0, \Lambda^l\right\} dy^2 = 0, \tag{3.62}$$

donde

$$\left\{\Sigma^0, \Lambda^0\right\} = \left\{\partial_i \pi^i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 \partial_i A_j, P^0 + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_l A_k\right\} = 0,$$

$$\left\{\Sigma^0, \Lambda^l\right\} = \left\{\partial_i \pi^i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 \partial_i A_j, P^l - \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}G_k + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k A_0\right\} = 0,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\dot{\Sigma}^0 &= \int \left\{\Sigma^0(x), H_c(y)\right\} dy^2 \\
&= \int \left\{\partial_i \pi^i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 \partial_i A_j, \pi^l G_l + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}V_0 \partial_l A_k - \frac{\epsilon^{lk}}{\theta}\nabla^2 A_0 \partial_l A_k + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\nabla^2 A_l G_k\right\} dy^2 \\
&= \int \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_i V_0 \partial_l \{\pi^i, A_k\} dy^2 - \int \frac{\epsilon^{lk}}{\theta}\nabla^2 A_0 \partial_i \partial_l \{\pi^i, A_k\} dy^2 + \int \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_i \nabla^2 G_k \{\pi^i, A_l\} dy^2 \\
&+ \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 \partial_i G_l \{A_j, \pi^l\} dy^2 \\
&= -\int \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_i V_0 \partial_l \delta^i_k \delta^2(x-y) dy^2 + \int \frac{\epsilon^{lk}}{\theta}\nabla^2 A_0 \partial_i \partial_l \delta^i_k \delta^2(x-y) dy^2 - \int \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_i \nabla^2 G_k \delta^i_l \delta^2(x-y) dy^2 \\
&+ \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 \partial_i G_l \delta^l_j \delta^2(x-y) dy^2 \\
&= \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k \partial_l V_0 + \frac{\epsilon^{lk}}{\theta}\partial_k \partial_l \nabla^2 A_0 - \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k \nabla^2 G_k + \frac{\epsilon^{il}}{2\theta}\partial_i \nabla^2 G_l = 0.
\end{aligned}$$

obteniendo un cero, por lo que concluimos que ya no tenemos más restricciones.

Resumiendo tenemos lo siguiente:

$$\Lambda^0 = P^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j = 0 \tag{3.63}$$

$$\Lambda^i = P^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}G_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0 = 0 \tag{3.64}$$

$$\Gamma^0 = \pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i G_j = 0 \tag{3.65}$$

$$\sigma^0 = \partial^i \pi^i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 \partial_i A_j = 0 \tag{3.66}$$

Calculamos los paréntesis de Poisson entre restricciones para hacer la clasificación en restricciones de primera y segunda clase.

$$\{\Lambda^0, \Lambda^0\} = \left\{P^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j, P^0 + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_l A_k\right\} = 0,$$

$$\{\Lambda^0, \Lambda^l\} = \left\{P^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j, P^l - \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}G_k + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k A_0\right\} = 0,$$

$$\{\Lambda^0, \Gamma^0\} = \left\{P^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j, \pi^0 - \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_l G_k\right\} = 0,$$

$$\{\Lambda^0, \Sigma^0\} = \left\{P^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j, \partial_l \pi^l + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\nabla^2 \partial_l A_k\right\} = 0,$$

Λ^0 es de primera clase.

$$\{\Lambda^i, \Lambda^0\} = \left\{P^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}G_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0, P^0 + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_l A_k\right\} = 0,$$

$$\{\Lambda^i, \Lambda^l\} = \left\{P^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}G_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0, P^l - \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}G_k + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k A_0\right\} = -\frac{\epsilon^{il}}{\theta}\delta^2(x-y),$$

$$\{\Lambda^i, \Gamma^0\} = \left\{P^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}G_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0, \pi^0 - \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_l G_k\right\} = \frac{\epsilon^{ij}}{\theta}\partial_j \delta^2(x-y),$$

$$\{\Lambda^i, \Sigma^0\} = \left\{P^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}G_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0, \partial_l \pi^l + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\nabla^2 \partial_l A_k\right\} = 0,$$

Λ^i es de segunda clase.

$$\{\Gamma^0, \Lambda^0\} = \left\{\pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i G_j, P^0 + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_l A_k\right\} = 0,$$

$$\{\Gamma^0, \Lambda^l\} = \left\{\pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i G_j, P^l - \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}G_k + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k A_0\right\} = -\frac{\epsilon^{il}}{\theta}\partial_j \delta^2(x-y),$$

$$\{\Gamma^0, \Gamma^0\} = \left\{\pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i G_j, \pi^0 - \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_l G_k\right\} = 0,$$

$$\{\Gamma^0, \Sigma^0\} = \left\{\pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i G_j, \partial_l \pi^l + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\nabla^2 \partial_l A_k\right\} = 0,$$

Γ^0 es de segunda clase.

$$\{\Sigma^0, \Lambda^0\} = \left\{\partial_i \pi^i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 \partial_i A_j, P^0 + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_l A_k\right\} = 0,$$

$$\{\Sigma^0, \Lambda^l\} = \left\{\partial_i \pi^i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 \partial_i A_j, P^l - \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}G_k + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k A_0\right\} = 0,$$

$$\{\Sigma^0, \Gamma^0\} = \left\{\partial_i \pi^i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 \partial_i A_j, \pi^0 - \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_l G_k\right\} = 0,$$

$$\{\Sigma^0, \Sigma^0\} = \left\{\partial_i \pi^i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 \partial_i A_j, \partial_l \pi^l + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\nabla^2 \partial_l A_k\right\} = 0,$$

Σ^0 es de primera clase.

Hasta este momento, para este sistema encontramos lo siguiente Λ^0 y Λ^i son restricciones primarias, Γ^0 es secundaria y Σ^0 es terciaria. También observamos que Λ^0 y Σ^0 son de primera clase mientras que Λ^i y Γ^0 son de segunda clase.

3.3. Conteo de grados de libertad

Si hacemos el conteo de grados de libertad (1.59) usando esta clasificación tendremos

$$G_L = \frac{1}{2}\left[12 - 2(2) - 3\right] = \frac{1}{2}[12 - 7] = \frac{5}{2}$$

lo cual no coincide con lo antes obtenido utilizando el formalismo de Ostrogradsky. Ayudándonos del álgebra lineal y los vectores nulos de la matriz formada por los paréntesis de Poisson entre todas las restricciones, podemos encontrar que las restricciones de primera clase están dadas por:

$$\Lambda^0 = 0 \qquad\qquad \Sigma^0 = 0 \qquad\qquad \Gamma^0 - \partial_i \Lambda^i = 0.$$

Calculemos la derivada parcial respecto a x^i para la restricción Λ^i

$$\partial_i \Lambda^i = \partial_i \left(P^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} G_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_j A_0 \right) = 0$$

$$\partial_i \Lambda^i = \partial_i P^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i G_j = 0,$$

entonces $\Gamma^0 - \partial_i \Lambda^i = 0$ es

$$\pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i G_j - \left(\partial_i P^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i G_j \right) = 0,$$

$$\pi^0 - \partial_i P^i = 0, \tag{3.67}$$

y obtenemos una nueva restricción que es combinación lineal de Γ^0 y Λ^i.

Finalmente tenemos la siguiente clasificación, restricciones de primera clase

$$P^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i A_j = 0, \tag{3.68}$$

$$\partial_i \pi^i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \nabla^2 \partial_i A_j = 0, \tag{3.69}$$

$$\pi^0 - \partial_i P^i = 0, \tag{3.70}$$

y de segunda clase

$$P^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} G_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_j A_0 = 0. \tag{3.71}$$

Haciendo nuevamente el conteo de grados de libertad con esta clasificación

$$G_L = \frac{1}{2}[12 - 2(3) - 2] = \frac{1}{2}[12 - 8] = \frac{4}{2} = 2,$$

obtenemos 2 grados de libertad, lo que era esperado para este sistema y reproduciendo de otra manera lo que se reportó en DO.

Capítulo 4

Formalismo GLT aplicado al sistema de alto orden Maxwell-Chern-Simons

En este capítulo se aplicará el formalismo GLT a la teoría de Maxwell-Chern-Simons de alto orden. Realizar este análisis para la teoría de MCS nos permite familiarizarnos con el formalismo, pues usando esto podemos analizar teoría como energía oscura [7], teoría de cuerdas [6], teorías no conmutativas [8], y modelos de alto orden de gravedad. Este análisis va a compararse con los resultados reportados en la literatura usando el formalimo de DO.

4.1. Formalismo de GLT aplicado a la acción de Maxwell-Chern-Simons de alto orden

Para comenzar el análisis, consideremos el lagrangiano para la acción MCS de alto orden dada por [19]

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda}}{2\theta}\Box A_\mu \partial_\nu A_\lambda, \tag{4.1}$$

donde el campo está definido como $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Análogamente al capítulo anterior, hacemos la descomposición para separar la parte espacial y temporal

$$L = -\frac{1}{2}F_{0i}F^{0i} - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\left(-\ddot{A}_0 + \nabla^2 A_0\right)\partial_i A_j - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\left(-\ddot{A}_i + \nabla^2 A_i\right)\dot{A}_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\left(-\ddot{A}_i + \nabla^2 A_i\right)\partial_j A_0,$$

obteniendo

$$\begin{aligned} L = &-\frac{1}{2}\left(\partial_0 A_i - \partial_i A_0\right)\left(-\partial_0 A_i + \partial_i A_0\right) - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\left(-\ddot{A}_0 + \nabla^2 A_0\right)\partial_i A_j \\ &- \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\left(-\ddot{A}_i + \nabla^2 A_i\right)\dot{A}_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\left(-\ddot{A}_i + \nabla^2 A_i\right)\partial_j A_0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Siguiendo el formalismo GLT tomamos las nuevas variables G_α y V_α dadas por (3.42) y (3.43) y reescribimos el lagrangiano obteniendo

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{G_i^2}{2} - G_i\partial_i A_0 + \frac{(\partial_i A_0)^2}{2} - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\left(-V_0 + \nabla^2 A_0\right)\partial_i A_j \\ & - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\left(-V_i + \nabla^2 A_i\right)G_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\left(-V_i + \nabla^2 A_i\right)\partial_j A_0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Calculando los momentos canónicos asociados a los campos y sabiendo que $P^\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial V_\alpha}$ tenemos:

$$P^0 = \frac{\partial L}{\partial V_0} = -\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j, \tag{4.4}$$

$$P^i = \frac{\partial L}{\partial V_i} = \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}G_j - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0, \tag{4.5}$$

de lo anterior podemos identificar las siguientes restricciones primarias

$$\Lambda^0 = P^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j = 0, \tag{4.6}$$

$$\Lambda^i = P^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}G_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0 = 0. \tag{4.7}$$

Luego, escribamos el hamiltoniano correspondiente al formalismo dado por

$$H_c = \pi^\alpha G_\alpha + P^\alpha V_\alpha - L,$$

separando la parte espacial y temporal

$$H_c = \pi^0 G_0 + \pi^i G_i + P^0 V_0 + P^i V_i - L,$$

entonces escribimos

$$\begin{aligned} H_c = {} & \pi^0 G_0 + \pi^i G_i + P^0 V_0 + P^i V_i - \frac{G_i^2}{2} + G_i\partial_i A_0 - \frac{(\partial_i A_0)^2}{2} + \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} \\ & - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\left(-V_0 + \nabla^2 A_0\right)\partial_i A_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\left(-V_i + \nabla^2 A_i\right)G_j - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\left(-V_i + \nabla^2 A_i\right)\partial_j A_0, \end{aligned}$$

agrupando términos tenemos

$$\begin{aligned} H_c = {} & \left(\pi^i - \frac{G^i}{2} + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}V_j - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 A_j + \partial_i A_0\right)G_i + \left(P^i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0\right)V_i + \left(P^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j\right)V_0 \\ & + \pi^0 G_0 - \frac{(\partial_i A_0)^2}{2} + \frac{1}{4}F_{ij}^2 - \frac{\epsilon^{ij}}{\theta}\nabla^2 A_0 \partial_i A_j. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Para el cálculo de la evolución temporal, revisemos los paréntesis de Poisson entre las restricciones, recordando que los paréntesis de Poisson fundamentales son:

$$\begin{aligned} \left\{A_\alpha, \pi^\beta\right\} &= \delta_\alpha^\beta \delta^2(x-y), \\ \left\{G_\alpha, P^\beta\right\} &= \delta_\alpha^\beta \delta^2(x-y), \end{aligned}$$

tenemos

$$\left\{\Lambda^0,\Lambda^0\right\}=\left\{P^0+\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_iA_j,P^0+\frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_lA_k\right\}=0, \tag{4.9}$$

$$\left\{\Lambda^0,\Lambda^l\right\}=\left\{P^0+\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_iA_j,P^l-\frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}G_k+\frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_kA_0\right\}=0, \tag{4.10}$$

$$\left\{\Lambda^l,\Lambda^m\right\}=\left\{P^l-\frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}G_k+\frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_kA_0,P^m-\frac{\epsilon^{mn}}{2\theta}G_n+\frac{\epsilon^{mn}}{2\theta}\partial_nA_0\right\}=-\frac{\epsilon^{lm}}{\theta}\delta^2(x-y), \tag{4.11}$$

Para calcular la evolución de las restricciones, sabemos que las relaciones de consistencia están dadas por

$$\dot{\Lambda}_\alpha=\{\Lambda_\alpha,H_p\}=0, \tag{4.12}$$

donde $H_p=H_c+\int\alpha_0\Lambda^0(y)dy^2+\int\alpha_l\Lambda^l(y)dy^2$ corresponde al hamiltoniano primario de MCS.

Comencemos con el cálculo de la relación de consistencia para Λ^0

$$\dot{\Lambda}^0=\{\Lambda^0,H_p\}=\int\{\Lambda^0,H_c\}dy^2+\int\alpha_0\{\Lambda^0,\Lambda^0\}dy^2+\int\alpha_i\{\Lambda^0,\Lambda^i\}dy^2, \tag{4.13}$$

usando los resultados (4.9) y (4.10) vemos que los dos últimos términos son cero, entonces

$$\dot{\Lambda}^0=\int\left\{P^0+\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_iA_j,H_c\right\}dy^2=0,$$

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda}^0&=\int\left\{P^0+\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_iA_j,\pi^0G_0+\pi^lG_l\right\}dy^2\\&=\int\left\{P^0,\pi^0G_0\right\}dy^2+\int\left\{\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_iA_j,\pi^lG_l\right\}dy^2\\&=\int\pi^0\left\{P^0,G_0\right\}dy^2+\int\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i\left\{A_j,\pi^l\right\}G_ldy^2\\&=\int-\pi^0\delta^2(x-y)dy^2+\int\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i\delta^l_j\delta^2(x-y)G_ldy^2\\&=-\pi^0+\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_iG_j(x)=0,\end{aligned}$$

así de (4.13) obtenemos la siguiente restricción secundaria

$$\Gamma^0=\dot{\Lambda}^0=\pi^0-\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_iG_j=0. \tag{4.14}$$

Continuando, veamos la relación de consistencia para Λ^i tenemos

$$\dot{\Lambda}^i=\{\Lambda^i,H_p\}=\int\{\Lambda^0,H_c\}dy^2+\int\alpha_0\{\Lambda^i,\Lambda^0\}dy^2+\int\alpha_l\{\Lambda^i,\Lambda^l\}dy^2, \tag{4.15}$$

donde el segundo término es igual a cero por (4.10) y para el tercer término usaremos (4.11)

$$\dot{\Lambda}^i=\int\left\{P^i-\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}G_j+\frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_jA_0,H_c\right\}dy^2-\int\alpha_l\frac{\epsilon^{il}}{\theta}\delta^2(x-y)dy^2=0,$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\Lambda}^i &= \int \left\{ P^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} G_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_j A_0, H_c \right\} dy^2 - \frac{\epsilon^{ij}}{\theta} \alpha_l \\
&= \int \left\{ P^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} G_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_j A_0, \left(\pi^l - \frac{G_l}{2} + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} V_k - \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} \nabla^2 A_k + \partial_l A_0 \right) G_l + P^l V_l + \pi^0 G_0 \right\} dy^2 - \frac{\epsilon^{ij}}{\theta} \alpha_l \\
&= \int \left\{ P^i, \pi^l G_l - \frac{G_l}{2} G_l + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} V_k G_l - \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} \nabla^2 A_k G_l + \partial_l A_0 G_l \right\} dy^2 - \int \left\{ \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} G_j, P^l V_l \right\} dy^2 \\
&+ \int \left\{ \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_j A_0, \pi^0 G_0 \right\} dy^2 - \frac{\epsilon^{il}}{\theta} \alpha_l \\
&= \int \pi^l \left\{ P^i, G_l \right\} dy^2 - \int \frac{G_l}{2} \left\{ P^i, G_l \right\} dy^2 + \int \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} V_k \left\{ P^i, G_l \right\} dy^2 - \int \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} \nabla^2 A_k \left\{ P^i, G_l \right\} dy^2 \\
&\int \partial_l A_0 \left\{ P^i, G_l \right\} dy^2 + \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_j G_0 \left\{ A_0, \pi^0 \right\} dy^2 - \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} V_l \left\{ G_j, P^l \right\} dy^2 - \frac{\epsilon^{il}}{\theta} \alpha_l \\
&= - \int \pi^l \delta_l^i \delta^2(x-y) dy^2 + \int \frac{G_l}{2} \delta_l^i \delta^2(x-y) dy^2 - \int \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} V_k \delta_l^i \delta^2(x-y) dy^2 + \int \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} \nabla^2 A_k \delta_l^i \delta^2(x-y) dy^2 \\
&- \int \partial_l A_0 \delta_l^i \delta^2(x-y) dy^2 + \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_j G_0 \delta^2(x-y) dy^2 - \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} V_l \delta_j^l \delta^2(x-y) dy^2 - \frac{\epsilon^{il}}{\theta} \alpha_l \\
&= -\pi^i + \frac{G_i}{2} - \frac{\epsilon^{ik}}{2\theta} V_k + \frac{\epsilon^{ik}}{2\theta} \nabla^2 A_k - \partial_i A_0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_j G_0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} V_j - \frac{\epsilon^{il}}{\theta} \alpha_l = 0,
\end{aligned}
$$

entonces de (4.15) resulta lo siguiente

$$
\pi^i - G^i + \frac{\epsilon^{ik}}{\theta} V_k - \frac{\epsilon^{ik}}{2\theta} \nabla^2 A_k + \partial_i A_0 - \frac{\epsilon^{ik}}{2\theta} \partial_k G_0 + \frac{\epsilon^{ik}}{\theta} \alpha_k = 0, \tag{4.16}
$$

vemos que esta no es una restricción pues tiene asociados a los multiplicadores de Lagrange.

Ahora veamos la evolución para $\Gamma^0 = \pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i G_j$,

$$
\dot{\Gamma}^0 = \left\{ \Gamma^0, H_p \right\} = \int \left\{ \Gamma^0, H_c \right\} dy^2 + \int \alpha_0 \left\{ \Gamma^0, \Lambda^0 \right\} dy^2 + \int \alpha_i \left\{ \Gamma^0, \Lambda^i \right\} dy^2. \tag{4.17}
$$

Calculemos los paréntesis entre las restricciones

$$
\left\{ \Gamma^0, \Lambda^0 \right\} = \left\{ \pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i G_j, P^0 + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} \partial_l A_k \right\} = 0, \tag{4.18}
$$

$$
\left\{ \Gamma^0, \Lambda^0 \right\} = \left\{ \pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta} \partial_i G_j, P^l - \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} G_k + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} \partial_k A_0 \right\} = -\frac{\epsilon^{kl}}{\theta} \partial_k \partial^2 (x-y), \tag{4.19}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\dot{\Gamma}^0 &= \int \left\{\Gamma^0, H_c\right\} dy^2 + \int \alpha_i \left\{\Gamma^0, \Lambda^i\right\} dy^2 \\
&= \int \left\{\pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i G_j, \partial_l A_0 G_l + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k A_0 V_l - \frac{1}{2}(\partial_l A_0)^2 - \frac{\epsilon^{lk}}{\theta}\nabla^2 A_0 \partial_l A_k + P_l V_l\right\} dy^2 \\
&+ \int \left\{\pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i G_j, P^l + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k A_0\right\} dy^2 \\
&= \int \left\{\pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i G_j, -A_0 \partial_l G_l - \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta} A_0 \partial_k V_l - \frac{1}{2}(\partial_l A_0)(\partial^l A_0) - \frac{\epsilon^{lk}}{\theta} A_0 \partial_l \nabla^2 A_k + P_l V_l\right\} dy^2 \\
&+ \int \left\{\pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i G_j, P^l + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k A_0\right\} dy^2 \\
&= -\int \partial_l G_l \{\pi^0, A_0\} dy^2 - \int \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k V_l \{\pi^0, A_0\} dy^2 - \int \partial_l A_0 \partial^l \{\pi^0, A_0\} dy^2 - \int \frac{\epsilon^{lk}}{\theta}\partial_l \nabla^2 A_k \{\pi^0, A_0\} dy^2 \\
&- \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i \{G_j, P^l\} V_l dy^2 + \int \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k \{\pi^0, A_0\} \alpha_l dy^2 - \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i \{G_j, P^l\} \alpha_l dy^2 \\
&= \int \partial_l G_l \delta^2(x-y) dy^2 + \int \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k V_l \delta^2(x-y) dy^2 + \int \partial_l A_0 \partial^l \delta^2(x-y) dy^2 + \int \frac{\epsilon^{lk}}{\theta}\partial_l \nabla^2 A_k \delta^2(x-y) dy^2 \\
&- \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i \delta^l_j \delta^2(x-y) V_l dy^2 - \int \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k \delta^2(x-y) \alpha_l dy^2 - \int \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i \delta^l_j \delta^2(x-y) \alpha_l dy^2 \\
&= \partial_l G^l + \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k V_l + \partial_l A_0 \partial^l + \frac{\epsilon^{lk}}{\theta}\partial_l \nabla^2 A_k - \frac{\epsilon^{il}}{2\theta}\partial_i V_l - \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\alpha_l \partial_k - \frac{\epsilon^{il}}{2\theta}\partial_i \alpha_l \\
&= \partial_l G^l - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k V_l - \nabla^2 A_0 + \frac{\epsilon^{lk}}{\theta}\partial_l \nabla^2 A_k - \frac{\epsilon^{il}}{2\theta}\partial_i V_l - \frac{\epsilon^{kl}}{2\theta}\partial_k \alpha_l - \frac{\epsilon^{il}}{2\theta}\partial_i \alpha_l = 0.
\end{aligned}
$$

Entonces de (4.17) tenemos lo siguiente:

$$
\dot{\Gamma}^0 = \partial_i G^i - \frac{\epsilon^{il}}{\theta}\partial_i V_l - \nabla^2 A_0 + \frac{\epsilon^{il}}{\theta}\partial_i \nabla^2 A_l - \frac{\epsilon^{il}}{\theta}\partial_i \alpha_l = 0. \tag{4.20}
$$

Calculemos la derivada parcial respecto de x^i de la ecuación (4.16)

$$
\partial_i \left(\pi^i - G^i + \frac{\epsilon^{ik}}{\theta} V_k - \frac{\epsilon^{ik}}{2\theta}\nabla^2 A_k + \partial_i A_0 - \frac{\epsilon^{ik}}{2\theta}\partial_k G_0 + \frac{\epsilon^{ik}}{\theta}\alpha_k\right) = 0
$$

$$
\partial_i \pi^i - \partial_i G^i + \frac{\epsilon^{ik}}{\theta}\partial_i V_k - \frac{\epsilon^{ik}}{2\theta}\partial_i \nabla^2 A_k + \nabla^2 A_0 + \frac{\epsilon^{ik}}{\theta}\partial_i \alpha_k = 0, \tag{4.21}
$$

sumando las relaciones (4.20) y (4.21)

$$
\partial_i G^i - \frac{\epsilon^{ik}}{\theta}\partial_i V_k - \nabla^2 A_0 + \frac{\epsilon^{ik}}{\theta}\partial_i \nabla^2 A_k - \frac{\epsilon^{ik}}{\theta}\partial_i \alpha_k + \left(\partial_i \pi^i - \partial_i G^i + \frac{\epsilon^{ik}}{\theta}\partial_i V_k - \frac{\epsilon^{ik}}{2\theta}\partial_i \nabla^2 A_k + \nabla^2 A_0 + \frac{\epsilon^{ik}}{\theta}\partial_i \alpha_k\right) = 0,
$$

obteniendo la siguiente restricción

$$
\Sigma^0 = \partial_i \pi^i + \frac{\epsilon^{ik}}{2\theta}\partial_i \nabla^2 A_k = 0, \tag{4.22}
$$

la evolución de esta última será igual a cero, como vimos en el capítulo anterior para la ecuación (3.63), $\dot{\Sigma}^0 = 0$, entonces ya no tendremos más restricciones.

Resumiendo, para esta teoría hemos encontrado lo siguiente:

$$\Lambda^0 = P^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j = 0, \tag{4.23}$$

$$\Lambda^i = P^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}G_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0 = 0, \tag{4.24}$$

$$\Gamma^0 = \pi^0 - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i G_j = 0, \tag{4.25}$$

$$\Sigma^0 = \partial_i \pi^i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i \nabla^2 A_j = 0. \tag{4.26}$$

Además usando la relación $\Gamma^0 - \partial_i \Lambda^i = 0$ encontramos la siguiente restricción:

$$\pi^0 - \partial_i P^i = 0. \tag{4.27}$$

Finalmente, tenemos que el conjunto de restricciones correctas para este sistema será

$$P^0 + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_i A_j = 0, \tag{4.28}$$

$$\partial_i \pi^i + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\nabla^2 \partial_i A_j = 0, \tag{4.29}$$

$$\pi^0 - \partial_i P^i = 0, \tag{4.30}$$

$$P^i - \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}G_j + \frac{\epsilon^{ij}}{2\theta}\partial_j A_0 = 0. \tag{4.31}$$

además tenemos que (4.28) a (4.30) son de primera clase y (4.31) es de segunda clase, que concuerda con lo que se obtuvo en el capítulo anterior.

Además si hacemos el conteo de grados de libertad, obtenemos que para la teoría de MCS tenemos 2 grados de libertad usando esta clasificación para las restricciones, sin embargo no significan los mismo que para CS, aquí tendremos que representan a un fotón masivo y a un fotón no masivo. Pero agregar este término de CS para dotar de masa al fotón no fue el primero que se introdujó, tenemos la acción de Maxwell-Proca en la cuál al calcular las ecuaciones de movimiento tenemos un fotón masivo, la diferencia es que Maxwell-Proca no es una teoría invariante de norma pues no presenta restricciones de primera clase como la teoría de MCS.

4.2. Paréntesis de Dirac

Sabemos de la teoría que las restricciones de segunda clase nos permiten construir los paréntesis de Dirac, definimos la matriz cuyas entradas son las restricciones de segunda clase:

$$C^{lm} = \left\{\Lambda^l, \Lambda^m\right\} = -\frac{\epsilon^{lm}}{\theta}\delta^2(x-y),$$

y el paréntesis de Dirac visto en el capítulo 1 dado por (1.67)

$$\{f,g\}_D = \{f,g\}_P - \int \{f,\chi^\alpha\}\,(C_{\alpha\beta})^{-1}\left\{\chi^\beta, g\right\} dy^2, \tag{4.32}$$

donde $(C_{\alpha\beta})^{-1}$ es la matriz inversa de $C^{\alpha\beta}$ dada por

$$(C_{\alpha\beta})^{-1} = \theta\epsilon_{\alpha\beta}\delta^2(x-y).$$

Calculemos los paréntesis de Dirac

$$\begin{aligned}\left\{A_0(x),\pi^0(y)\right\}_D &= \left\{A_0(x),\pi^0(y)\right\} - \int \left\{A_0(x),\chi^l(u)\right\}(C_{lm})^{-1}\left\{\chi^m(v),\pi^0(y)\right\} dudv \\ &= \delta^2(x-y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\{A_i(x),\pi^j(y)\right\}_D &= \left\{A_i(x),\pi^j(y)\right\} - \int \left\{A_i(x),\chi^l(u)\right\}(C_{lm})^{-1}\left\{\chi^m(v),\pi^j(y)\right\} dudv \\ &= \delta_i^j\delta^2(x-y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\{A_0(x),A_0(y)\right\}_D &= \left\{A_0(x),A_0(y)\right\} - \int \left\{A_0(x),\chi^l(u)\right\}(C_{lm})^{-1}\left\{\chi^m(v),A_0(y)\right\} dudv \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\{A_i(x),A_j(y)\right\}_D &= \left\{A_i(x),A_j(y)\right\} - \int \left\{A_i(x),\chi^l(u)\right\}(C_{lm})^{-1}\left\{\chi^m(v),A_j(y)\right\} dudv \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\{G_0(x),P^0(y)\right\}_D &= \left\{G_0(x),P^o(y)\right\} - \int \left\{G_0(x),\chi^l(u)\right\}(C_{lm})^{-1}\left\{\chi^m(v),P^0(y)\right\} dudv \\ &= \delta^2(x-y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\{G_i(x),P^j(y)\right\}_D &= \left\{G_i(x),P^j(y)\right\} - \int \left\{G_i(x),\chi^l(u)\right\}(C_{lm})^{-1}\left\{\chi^m(v),P^j(y)\right\} dudv \\ &= \delta_i^j\delta^2(x-y) - \int \left\{G_i(x),P^l(u)\right\}\left(\theta\epsilon_{lm}\delta^2(u-v)\right)\left\{-\frac{\epsilon^{mn}}{2\theta}G_n(v),P^j(y)\right\} dudv \\ &= \delta_i^j\delta^2(x-y) - \int \delta_i^l\delta^2(x-u)\left(\theta\epsilon_{lm}\delta^2(u-v)\right)\left(-\frac{\epsilon^{mn}}{2\theta}\delta_n^j\delta^2(v-y)\right) dudv \\ &= \delta_i^j\delta^2(x-y) + \delta_i^l\delta_n^j\frac{\epsilon_{lm}}{2}\epsilon^{mn}\delta^2(x-y) \\ &= \delta_i^j\delta^2(x-y) + \frac{\epsilon_{im}}{2}\epsilon^{mj}\delta^2(x-y) \\ &= \delta_i^j\delta^2(x-y) - \frac{\epsilon_{im}}{2}\epsilon^{jm}\delta^2(x-y) \\ &= \delta_i^j\delta^2(x-y) - \frac{1}{2}\delta_i^j\delta^2(x-y) \\ &= \frac{\delta_i^j}{2}\delta^2(x-y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{\pi^0(x),\pi^0(y)\right\}_D &= \left\{\pi^0(x),\pi^0(y)\right\} - \int \left\{\pi^0(x),\chi^l(u)\right\}(C_{lm})^{-1}\left\{\chi^m(v),\pi^0(y)\right\}dudv \\
&= -\int \left\{\pi^0(x),\frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k A_0(u)\right\}\left(\theta\epsilon_{lm}\delta^2(u-v)\right)\left\{\frac{\epsilon^{mn}}{2\theta}\partial_n A_0(v),\pi^0(y)\right\}dudv \\
&= -\int \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k\left(-\delta^2(x-u)\right)\left(\theta\epsilon_{lm}\delta^2(u-v)\right)\left(\frac{\epsilon^{mn}}{2\theta}\partial_n\delta^2(v-y)\right)dudv \\
&= \int \frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial_k\theta\epsilon_{lm}\frac{\epsilon^{mn}}{2\theta}\partial_n\delta^2(x-u)\delta^2(u-v)\delta^2(v-y)dudv \\
&= \frac{\epsilon^{lk}}{4\theta}\epsilon_{lm}\epsilon^{mn}\partial_k\partial_n\delta^2(x-y) \\
&= \frac{\epsilon^{kn}}{4\theta}\partial_k\partial_n\delta^2(x-y) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{\pi^i(x),\pi^j(y)\right\}_D &= \left\{\pi^i(x),\pi^j(y)\right\} - \int \left\{\pi^i(x),\chi^l(u)\right\}(C_{lm})^{-1}\left\{\chi^m(v),\pi^j(y)\right\}dudv \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{G_0(x),G_0(y)\right\}_D &= \left\{G_0(x),G_0(y)\right\} - \int \left\{G_0(x),\chi^l(u)\right\}(C_{lm})^{-1}\left\{\chi^m(v),G_0(y)\right\}dudv \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{G_i(x),G_j(y)\right\}_D &= \left\{G_i(x),G_j(y)\right\} - \int \left\{G_i(x),\chi^l(u)\right\}(C_{lm})^{-1}\left\{\chi^m(v),G_j(y)\right\}dudv \\
&= \left\{G_i(x),G_j(y)\right\} - \int \left\{G_i(x),P^l(u)\right\}\left(-\theta\epsilon_{lm}\delta^2(u-v)\right)\left\{P^m(v),G_j(y)\right\}dudv \\
&= -\int \left(\delta^l_i\delta^2(x-u)\right)\left(\theta\epsilon_{lm}\delta^2(u-v)\right)\left(-\partial^m_j\delta^2(v-y)\right)dudv \\
&= \delta^j_i\theta\epsilon_{lm}\delta^m_j\delta^2(x-y) \\
&= \theta\epsilon_{ij}\delta^2(x-y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{P^i(x),P^j(y)\right\}_D &= \left\{P^i(x),P^j(y)\right\} - \int \left\{P^i(x),\chi^l(u)\right\}(C_{lm})^{-1}\left\{\chi^m(v),P^j(y)\right\}dudv \\
&= \left\{P^i(x),P^j(y)\right\} - \int \left\{P^i(x),-\frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}G_k(u)\right\}\left(\theta\epsilon_{lm}\delta^2(u-v)\right)\left\{-\frac{\epsilon^{mn}}{2\theta}G_n(v),P^j(y)\right\}dudv \\
&= -\left(\frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\partial^i_k\delta^2(x-u)\right)\left(\theta\epsilon_{lm}\delta^2(u-v)\right)\left(-\frac{\epsilon^{mn}}{2\theta}\delta^j_n(v-y)\right)dudv \\
&= \int \frac{\epsilon^{lk}}{4\theta}\delta^i_k\epsilon_{lm}\epsilon^{mn}\delta^j_n\delta^2(x-u)\delta^2(u-v)\delta^2(v-y)dudv \\
&= \frac{\epsilon^{li}}{4\theta}\epsilon_{lm}\epsilon^{jm}\delta^2(x-y) \\
&= \frac{\delta^i_m}{4\theta}\epsilon^{mj}\delta^2(x-y) \\
&= \frac{\epsilon^{ij}}{4\theta}\delta^2(x-y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left\{G_i(x), \pi^0(y)\right\}_D &= \left\{G_i(x), \pi^0(y)\right\} - \int \left\{G_i(x), \chi^l(u)\right\} (C_{lm})^{-1} \left\{\chi^m(v), \pi^0(y)\right\} dudv \\
&= \left\{G_i(x), \pi^0(y)\right\} - \int \left\{G_i(x), P^l(u)\right\} (\theta\epsilon_{lm}\delta^2(u-v)) \left\{\frac{\epsilon^{mn}}{2\theta}\partial_n A_0(v), \pi^0(y)\right\} dudv \\
&= -\int \left(\delta_i^l \delta^2(x-u)\right) (\theta\epsilon_{lm}\delta^2(u-v)) \left(\frac{\epsilon^{mn}}{2\theta}\partial_n \delta^2(v-y)\right) dudv \\
&= -\int \delta_i^l \theta \epsilon_{lm} \frac{\epsilon^{mn}}{2\theta} \partial_n \delta^2(x-u)\delta^2(u-v)\delta^2(v-y) dudv \\
&= -\epsilon_{im}\frac{\epsilon^{mn}}{2}\partial_n\delta^2(x-y) \\
&= \epsilon_{im}\frac{\epsilon^{nm}}{2}\partial_n\delta^2(x-y) = \frac{\delta_i^n}{2}\partial_n\delta^2(x-y) \\
&= \frac{1}{2}\partial_i\delta^2(x-y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\{P^i(x), \pi^0(y)\right\}_D &= \left\{P^i(x), \pi^0(y)\right\} - \int \left\{P^i(x), \chi^l(u)\right\} (C_{lm})^{-1} \left\{\chi^m(v), \pi^0(y)\right\} dudv \\
&= \left\{P^i(x), \pi^0(y)\right\} - \int \left\{P^i(x), -\frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}G_k(u)\right\} (\theta\epsilon_{lm}\delta^2(u-v)) \left\{\frac{\epsilon^{mn}}{2\theta}\partial_n A_0(v), \pi^0(y)\right\} dudv \\
&= -\int \left(\frac{\epsilon^{lk}}{2\theta}\delta_k^i \delta^2(x-u)\right) (\theta\epsilon_{lm}\delta^2(u-v)) \left(\frac{\epsilon^{mn}}{2\theta}\partial_n \delta^2(v-y)\right) dudv \\
&= -\int \frac{\epsilon^{lk}}{4\theta}\delta_k^i \epsilon_{lm}\epsilon^{mn}\partial_n \delta^2(x-u)\delta^2(u-v)\delta^2(v-y) dudv \\
&= -\frac{\epsilon^{lk}}{4\theta}\delta_k^i \epsilon_{lm}\epsilon^{mn}\partial_n\delta^2(x-y) \\
&= -\frac{\epsilon^{li}}{4\theta}\epsilon_{lm}\epsilon^{mn}\partial_n\delta^2(x-y) \\
&= -\frac{\delta_m^i}{4\theta}\epsilon^{mn}\partial_n\delta^2(x-y) = -\frac{\epsilon^{in}}{4\theta}\partial_n\delta^2(x-y) \\
&= -\frac{\epsilon^{ij}}{4\theta}\partial_j\delta^2(x-y).
\end{aligned}
$$

En resumen, para la teoría MCS tenemos los siguientes paréntesis de Dirac:

$$\{A_0(x), \pi^0(y)\}_D = \delta^2(x-y), \tag{4.33}$$

$$\{A_i(x), \pi^j(y)\}_D = \delta_i^j\delta^2(x-y), \tag{4.34}$$

$$\{G_0(x), P^0(y)\}_D = \delta^2(x-y), \tag{4.35}$$

$$\{G_i(x), P^j(y)\}_D = \frac{\delta_i^j}{2}\delta^2(x-y), \tag{4.36}$$

$$\{G_i(x), G_j(y)\}_D = \theta\epsilon_{ij}\delta^2(x-y), \tag{4.37}$$

$$\{P^i(x), P^j(y)\}_D = \frac{\epsilon^{ij}}{4\theta}\delta^2(x-y), \tag{4.38}$$

$$\{G_i(x), \pi^0(y)\}_D = \frac{1}{2}\partial_i \delta^2(x-y), \tag{4.39}$$

$$\{P^i(x), \pi^0(y)\}_D = -\frac{\epsilon^{ij}}{4\theta}\partial_j \delta^2(x-y). \tag{4.40}$$

los cuáles serán útiles en el análisis de cuantización. Para terminar, comentaremos que si se realiza el cálculo de las transformaciones de norma tendremos que (4.29) es la restricción de primera clase que hace que la teoría de MCS sea una teoría de norma.

Capítulo 5

Conclusiones

Como pudimos observar, en este trabajo de tesis, se aplicaron los formalismos de DO y GLT a las teorías de alto orden de Chern-Simons y de MCS. Respecto al formalismo de DO pudimos observar que para realizar el análisis hamiltoniano, es necesario extender el espacio fase considerando a los campos y sus derivadas temporales como variables canónicas. La identificación de las restricciones no es tan directa y se tienen que trabajar a mano la clasificación de las mismas para obtener resultados consistentes.

Por otra parte, en el formalismo de GLT se introdujo un cambio de variables de tal manera que el orden de derivada temporal se redujo. La identificación de las restricciones fue más directa y con la ayuda de los vectores nulos se pudieron encontrar las restricciones correctas. Con la correcta identificación de las restricciones, se pudieron encontrar los paréntesis de Dirac que serán útiles en el análisis de cuantización en trabajos posteriores. Los resultados de DO se reprodujeron usando un formalismo alternativo, de tal manera que este trabajo muestra resultados consistentes. Los resultados que se encontraron en la sección de CS son una aportación original de este trabajo y en lo que respecta a MCS se ha extendido lo que se encuentra reportado en la literatura.

Finalmente, cabe mencionar que el formalismo GLT puede aplicarse a sistemas con una estructura más complicada y el presente trabajo es una referencia de cómo aplicar dicho formalismo, esperando que pueda servir a futuros estudios de otras teorías.

Apéndice A

Paréntesis de Poisson

Al igual que en la mecánica clásica, para el estudio del comportamiento de las teorías con restricciones, el concepto del paréntesis de Poisson es una herramienta muy útil, así definimos al paréntesis de Poisson [22] entre dos funciones arbitrarias del espacio fase como

$$\{f(q,p), g(q,p)\} = \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}. \tag{A.1}$$

Además cumple las siguientes propiedades algebraicas, sean f, g, h funciones arbitrarias:

1. Antisimetría: $\{f, g\} = -\{g, f\}$.
2. Linealidad: $\{c_1 f + c_2 g, h\} = c_1\{f, h\} + c_2\{g, h\}$, con c_1 y c_2 constantes.
3. Regla del producto: $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$.
4. Existencia de elementos nulos: $\{c, f\} = 0, \quad \forall c$, constante.
5. Identidad de Jacobi: $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$.
6. Paréntesis de Poisson fundamentales

$$\{q^i, q^j\} = 0 = \{p_i, p_j\},$$

$$\{q^i, p_j\} = \delta^i_j.$$

Bibliografía

[1] M. Ostrogradski, *Memoires de l'Academie Imperiale des Science de Saint-Petersbourg*, IV, 385 (1850); in Variatsionnye printzipy mekhaniki, ed. L. S. Polak (Fizmatgiz, 1959), p. 315.

[2] B. Podolsky, Phys. Rev. 62, 68 (1942).

[3] B. Podolsky and C. Kikuchi, Phys. Rev. 65, 228 (1944).

[4] B. Podolsky and C. Kikuchi, Phys. Rev. 67, 184 (1945).

[5] J. A. Wheeler and R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 21, 425 (1949).

[6] D. A. Eliezer and R. P. Woodard, Nucl. Phys. B 325, 389, (1989).

[7] G. W. Gibbons; arXiv:hep-th/0302199.

[8] C. S. Chu, J. Lukierski and W. J. Zarkrzewski, Nucl. Phys. B, 632, 219, (2002).

[9] R. P. Woodard, Lect. Notes Phys. 720, 403 (2007).

[10] K. S. Stelle, Phys. Rev. D16 , 953, (1977).

[11] E. S. Fradkin, A.A. Tseytlin, Nucl. Phys. B201 , 469, (1982).

[12] D.M. Gitman, I.V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints*, in: Springer Series in Nuclear and Particle Physics, Springer, (1990).

[13] D. M. Gitman, S. L. Lyakhovich, and I. V. Tyutin, Izvestiya Vuz. Fiz. 26, 61, (1983), Sov. Phys. J., 730 (1984).

[14] D. M. Gitman, S. L. Lyakhovich, and I. V. Tyutin, Izvestiya Vuz. Fiz. 28, 37, (1985).

[15] J. M. Pons, *Ostrogradski's Theorem for higher-order singular Lagrangians*, Lett. Math. Phys. 17, 181.189 (1989). https://doi.org/10.1007/BF00401583

[16] R. N. Ghalati, N. Kiriushcheva and S. V. Kuzmin, Mod. Phys. Lett. A22: 17-28, (2007).

[17] A. Escalante, Jorge-Hernández-Aguilar, Eur. Phys. J. C 81, 678 (2021).

[18] J. Kluson, M. Oksanen, A. Tureanu, Phys. Rev. D 89, 064043, (2014).

[19] S. Kumar, Int. J. Mod. Phys. A18, 1613-1622, (2003).

[20] I. Rubalcava García, *Análisis Hamiltoniano de teorías BF*, tesis de maestría FCFM, (2010).

[21] G. F. Torres del Castillo, *Differentiable Manifolds: A Theorical Physics Approach*, Birkhäuser, 2012.

[22] H. Goldstein, C. P. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, 3ra ed., Pearson, 2011.