

Optimización de Seguimiento de Índice con Metaheurísticas

Tesis que para obtener el título de Maestría en Ciencias
de la Computación.

Presenta:

Julián Antonio Díaz Ayón

Directores de tesis:

Dra. María de Lourdes Sandoval Solís

Dr. Rogelio González Velázquez



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias de la Computación

Maestría en Ciencias de la Computación

México

Agosto, 2023

Resumen

Una *inversión* es comprometer una cantidad de dinero en un periodo de tiempo, con el fin de obtener un *rendimiento*. Usualmente, los inversionistas invierten en portafolios en vez de en activos individuales. En este contexto, un *activo* es un instrumento financiero que otorga a su comprador el derecho a recibir ingresos futuros por parte del vendedor, y un *portafolio de inversión* es una colección de activos. El seguimiento de índice es una estrategia pasiva de administración de portafolios de inversión, en la cual, se pretende crear y mantener un portafolio, con el objetivo de replicar los rendimientos de un *índice de mercado* (una función matemática de los precios de un conjunto de activos que representa el mercado o un sector del mercado). En general, es posible hacer una replicación total (todos los activos del índice); sin embargo, el seguimiento de índice consiste principalmente en la replicación parcial (un subconjunto de los activos del índice). Debido a que el seguimiento de índice es un problema NP-Completo, no existen algoritmos exactos eficientes que lo solucionen. Por lo tanto, los métodos heurísticos o metaheurísticos son apropiados para su solución. En este trabajo se presenta un algoritmo metaheurístico basado en el algoritmo de *búsqueda armónica* para resolver el problema de seguimiento de índice y se compara con el método *branch and bound*, para distintas instancias del problema.

Capítulo 1

Introducción

Este capítulo tiene como objetivo presentar al lector los conceptos fundamentales utilizados en los capítulos posteriores.

1.1. Inversiones

Durante la mayor parte de sus vidas, las personas, las empresas y los gobiernos ganan y gastan dinero. Generalmente sus ingresos no son iguales a sus gastos. Algunas veces, tienen más dinero del que quieren gastar; otras veces, quieren gastar más de lo que ganan. Estos desequilibrios las obligan, ya sea a solicitar créditos o ahorrar el dinero excedente [Fra12].

Cuando los ingresos exceden los gastos, usualmente se ahorra el exceso. Existen varias opciones de cómo disponer de este dinero adicional: se puede simplemente dejar ese dinero “bajo el colchón” hasta que se requiera gastarlo en el futuro.

Una mejor opción, es comprometer ese dinero por un periodo determinado de tiempo y recibir al final de ese periodo una cantidad mayor a la comprometida para hacer crecer ese dinero, a esto se le conoce como *inversión* [Fra12].

Suponiendo que la inversión no tiene riesgo (el pago futuro está garantizado) y que los precios de los bienes y servicios no aumentan con el tiempo (no hay inflación); al rendimiento obtenido por una inversión en estas condiciones se le llama *tasa de interés pura*. La tasa de interés pura es el rendimiento que esperan obtener aquellos que prestan su dinero, y el costo que están dispuestos a pagar aquellos que solicitan un crédito. De esta manera, la tasa de interés pura es determinada en los mercados debido a la oferta y la demanda de dinero.

Cuando el pago futuro no está garantizado (inversión con riesgo), usualmente se espera obtener un rendimiento adicional que compense el riesgo de perder una parte de, o toda la inversión. Adicionalmente, si los precios de los bienes y servicios aumentan con el tiempo (inflación), también se espera obtener un rendimiento adicional que compense la pérdida de poder de compra del dinero, por el tiempo en que este está comprometido.

Lo anterior permite dar una definición de inversión:

Definición 1.1.1 Una *inversión* es comprometer una cantidad de dinero durante un periodo de tiempo con el objetivo de obtener un pago futuro, de tal manera que el inversionista sea compensado por: (1) el tiempo por el cual el dinero está comprometido, (2) la tasa de inflación esperada durante el periodo de tiempo de la inversión y (3) el riesgo de que el pago futuro no se realice.

En general, el inversionista puede ser una persona física, un fondo de inversión, una corporación o un gobierno. Las inversiones pueden ser de cualquier tipo, no solo deuda, por ejemplo: inversión en equipo por una corporación, la administración de un portafolio por un fondo, inversión en acciones, en arte, bonos o bienes raíces por una persona física, entre otros [Fra12].

1.2. Instrumentos Financieros

Un *instrumento financiero* es un contrato entre dos partes: el *vendedor* y el *comprador*; al establecerse este contrato, el vendedor adquiere la obligación de realizar un pago futuro al comprador, y, de manera similar, el comprador adquiere el derecho de recibir ese pago futuro por parte del vendedor.

Definición 1.2.1 Un *instrumento financiero* es un contrato entre dos partes, el cual le otorga al comprador el derecho a un pago futuro por parte del vendedor, y al vendedor la obligación a realizar este pago al comprador.

Existen tres clases de instrumentos financieros:

1. **Deuda:** se refiere a los instrumentos que no tienen riesgo, tales como, bonos, depósitos bancarios a la vista, pagarés, entre otros.
2. **Equity (Capital contable):** se refiere a las *acciones* de una empresa.
3. **Derivados:** se refiere a los instrumentos cuyo valor depende del valor de otros instrumentos, tales como, *opciones*, *futuros*, *forwards*, *swaps*, entre otros.

1.2.1. Acciones

Las *acciones* de una empresa le dan a su poseedor derecho sobre los activos y los dividendos de la misma. Existen dos tipos principales de acciones: *acciones comunes* y *acciones preferentes*. Las acciones comunes usualmente le dan a sus poseedores derecho a voto y a recibir dividendos. Las acciones preferentes no tienen derecho a voto pero tienen preferencia respecto al pago de dividendos [Arr14].

Las compañías emiten acciones con el fin de financiarse. Estas acciones son comerciadas en los mercados financieros. Las acciones comerciadas en los mercados financieros están sujetas a la oferta y la demanda, por lo que, su precio puede variar con el tiempo.

1.2.2. Portafolios de Inversión

Un *portafolio de inversión* es una colección de uno o más instrumentos financieros, tales que juntos, componen una inversión. Los elementos individuales de un portafolio también son llamados *posiciones*. La administración de un portafolio implica *abrir* nuevas posiciones y *cerrar* posiciones existentes [Arr14].

Aunque es posible invertir en un solo instrumento financiero, invertir en un portafolio tiene varias ventajas. Si el portafolio se construye de manera adecuada, generalmente, el riesgo del portafolio es menor que el de sus componentes, mientras que el retorno de portafolio es mayor que el de sus componentes.

Debido a la flexibilidad extra que nos da la creación de los portafolios, usualmente son diseñados para cumplir ciertos objetivos de inversión: adaptarse a la tolerancia al riesgo de los inversionistas, invertir en un sector particular de la economía, invertir en instrumentos de renta fija, entre otros.

1.2.3. Fondos de Inversión

Un *fondo de inversión* es un vehículo de inversión que acumula el dinero de varios inversionistas para invertirlo de manera conjunta.

Los fondos de inversión acumulan el dinero de varios inversionistas para invertirlo en instrumentos financieros. El valor del fondo depende de los instrumentos que contiene.

Los inversionistas del fondo se conocen como *partícipes*, estos aportan dinero mediante la compra de participaciones. Este dinero se acumula en un fondo común y se utiliza para la compra de instrumentos financieros que son depositados en una *entidad depositaria*. Una *sociedad gestora* es la responsable de la administración del fondo.

Los fondos de inversión tienen algunas ventajas: le permiten a cualquier persona invertir su dinero sin la necesidad de tener que crear y administrar su propio portafolio, son administrados por profesionales, al acumular el dinero de muchos inversionistas pueden crear portafolios más flexibles, ventajas fiscales, etcétera.

Existen varios tipos de fondos de inversión: fondos de inversión de renta fija, fondos de inversión de renta variable, fondos de inversión mixtos, fondos de índice, entre otros.

De los distintos tipos de fondos de inversión, el interés de esta discusión se centra en los fondos de índice, los cuales tratan de crear un portafolio que imita el comportamiento de un índice de mercado.

1.2.4. Índices de Mercado

Un *índice de mercado* es una función matemática del precio de un conjunto de instrumentos financieros [Arr14]. En otras palabras, es un portafolio hipotético construido mediante una regla específica. El propósito de los índices es servir como referencia de la tendencia del mercado o un sector del mercado. Existen varias clases de índices de mercado: *índices de acciones*, que consideran solo

acciones de compañías; *índices de bonos*, que consideran solo bonos; e *índices compuestos*, que usualmente consideran todos los instrumentos financieros de un país.

Es importante reiterar una cosa para evitar confusiones: un índice de mercado no es un portafolio de instrumentos que se pueda comprar, sino solamente una función de los precios de esos instrumentos, es decir, no se puede comprar un índice de mercado de la manera en que se puede comprar una acción.

Una aplicación de los índices de mercado es calcular el retorno y el riesgo del mercado, o de un segmento del mercado en un periodo de tiempo específico. En ese sentido, los inversionistas utilizan el retorno y el riesgo de un índice como *benchmark* para evaluar el desempeño de un portafolio de inversión respecto al mercado o un sector del mercado [Fra12].

Otra aplicación de los índices de mercado es la de crear un portafolio de índice. Debido a que es muy difícil crear portafolios que puedan obtener mejores rendimientos que un índice específico, consistentemente a largo plazo; una alternativa es construir un portafolio que simule el comportamiento de dicho índice. Esto ha motivado la creación de fondos de inversión que siguen la estrategia de crear un portafolio que se comporte como un índice específico a largo plazo [Fra12].

1.3. Estrategias de Inversión

Respecto de las hipótesis sobre el mercado, y la manera de construir y administrar los portafolios de inversión, existen dos tipos de estrategias: *estrategias activas* y *estrategias pasivas*.

1.3.1. Estrategias Activas

En las estrategias activas, se busca crear un portafolio que maximice el rendimiento mientras se minimiza el riesgo. En otras palabras, se pretende crear un portafolio que “venza” al mercado. En ese sentido las estrategias activas se basan en la hipótesis de que el mercado es *ineficiente*, y por lo tanto buscan crear portafolios que exploten estas deficiencias.

Los portafolios contruidos siguiendo una estrategia activa, requieren de un alto mantenimiento ya que hay que rebalancearlo constantemente para obtener el máximo rendimiento al menor riesgo.

Aún cuando esta estrategia tuviera éxito, el alto mantenimiento implica altos costos operativos que disminuyen las ganancias. Adicionalmente, se ha visto que los fondos que siguen estrategias activas rara vez logran vencer al mercado a largo plazo.

1.3.2. Estrategias Pasivas

Las *estrategias pasivas* están basadas en la hipótesis de que el mercado es *eficiente*, por lo tanto, no tiene sentido intentar crear un portafolio que lo venza.

Entonces, lo que se busca es crear un portafolio que siga el comportamiento del mercado o de un sector del mercado.

Una manera de lograr lo anterior, es crear un portafolio que replique el comportamiento de un índice de mercado. Se puede crear este portafolio de seguimiento simplemente comprando todos los instrumentos del índice en las correctas proporciones obteniendo un portafolio que replique el índice a la perfección. Este enfoque tiene algunas desventajas: (1) algunos activos del índice pueden tener muy poca liquidez y (2) al pretender hacer una replicación perfecta tenemos que hacer rebalancear constantemente el portafolio, lo que implica altos costos operativos. Un mejor enfoque, es hacer una replicación parcial del índice, esto es, crear un portafolio que siga el comportamiento del índice pero que contenga solo un subconjunto de sus elementos. Esto se conoce como *problema de seguimiento de índice* (ITP por sus siglas en inglés).

El problema de seguimiento de índice consiste en la creación de un portafolio de inversión, haciendo una selección de K de los N elementos de un índice, y la selección de las cantidades de cada uno de los K instrumentos elegidos, tal que la diferencia entre el portafolio de seguimiento y el índice sea mínima, a esto se le pueden agregar restricciones operativas. Por lo tanto, el problema de seguimiento de índice es un problema de *optimización*.

Al hacer una selección óptima de K elementos de un total de N elementos, el problema de seguimiento de índice es una generalización del *problema de la mochila*, y debido a que el problema de la mochila es un problema NP-Hard [Ber18], el problema de seguimiento de índice es un problema NP-Hard.

1.4. Optimización

La *optimización* es un concepto fundamental en el análisis de muchos problemas complejos de decisión y asignación de recursos [Dav21]. Resolver un problema de decisión consiste en la selección de los valores de un conjunto de *variables*, mientras nos enfocamos en un *objetivo* diseñado para cuantificar la calidad de la decisión. Este objetivo es minimizado o maximizado, y está sujeto a ciertas *restricciones* que limitan la selección de los valores de las variables [Dav21].

El problema general de optimización matemática se puede expresar como:

$$\text{mín } \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1.4.1}$$

$$\text{sujeto a } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \tag{1.4.2}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \tag{1.4.3}$$

$$\mathbf{x} \in \mathcal{S}. \tag{1.4.4}$$

Donde \mathbf{x} es el vector de las variables de decisión, que pueden ser continuas, discretas o una combinación de ambas. La función $\mathbf{f} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^k$ expresa los objetivos, en el caso especial $k = 1$, solo tenemos un objetivo. La función $\mathbf{h} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^n$ expresa las restricciones que se igualan a cero, y la función $\mathbf{g} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^m$

representa las restricciones que son desiguales a cero. El espacio generado por las variables \mathbf{x} es el espacio de búsqueda S , y el espacio generado por la función objetivo \mathbf{f} es el espacio de soluciones.

Al enfrentar un problema de decisión que puede ser formulado en términos de un conjunto de variables de decisión, un conjunto de restricciones que limitan los valores que estas variables pueden tomar, y una o más funciones objetivo, se puede utilizar la optimización como tecnología para su análisis y solución.

Una vez que se formula el problema correctamente, la siguiente tarea es encontrar las soluciones óptimas del problema mediante algún algoritmo. Los algoritmos de optimización se pueden clasificar en dos clases: algoritmos deterministas y algoritmos estocásticos. Los algoritmos deterministas siempre siguen el mismo camino de búsqueda y obtienen la misma solución en distintas ejecuciones, siempre que las condiciones iniciales sean idénticas. Los algoritmos estocásticos por otro lado, utilizan números pseudoaleatorios, por lo tanto, dadas las mismas condiciones iniciales, el camino de búsqueda y la solución no necesariamente son los mismos en distintas ejecuciones [Yan14].

1.5. Metaheurísticas

La mayoría de los algoritmos de optimización clásicos son deterministas. Algunos, utilizan información del gradiente de la función objetivo, como el algoritmo Newton-Raphson; sin embargo, cuando la función es discontinua, no funcionan muy bien. En este caso, es necesario utilizar algoritmos que no necesitan calcular gradientes, como el algoritmo Nelder-Mead Simplex[Yan14].

Algunos problemas de optimización pueden ser muy difíciles de resolver. Esto, debido a que el problema puede ser altamente no lineal, discontinuo o tener muchos óptimos locales (multimodal). Para este tipo de problemas, los algoritmos deterministas pueden tener dificultades para encontrar la solución óptima, o incluso, una solución suficientemente buena.

Cuando los algoritmos clásicos fallan en encontrar soluciones satisfactorias, la alternativa es utilizar *metaheurísticas*. Las metaheurísticas son algoritmos estocásticos que buscan la solución óptima mediante “prueba y error”, combinando dos mecanismos básicos de búsqueda: *exploración* y *explotación*. La exploración se refiere a la búsqueda de soluciones lo más diversas posibles, con el fin de investigar el espacio de búsqueda lo más ampliamente posible y escapar de regiones que contengan óptimos locales. La explotación se refiere a la búsqueda de soluciones en regiones prometedoras que puedan contener a los óptimos globales. Una buena combinación de estos dos componentes puede asegurar encontrar los óptimos globales.

Las principales características de las metaheurísticas son: simplicidad, flexibilidad, que no necesitan calcular gradientes, y su capacidad para evitar óptimos locales [MML14]. La simplicidad se refiere a que la mayoría de las metaheurísticas se inspiran en ideas sencillas extraídas de la naturaleza: fenómenos físicos, comportamientos de animales o conceptos evolutivos. La flexibilidad se refiere a que, en general, las metaheurísticas pueden ser aplicadas a distintos proble-

mas sin la necesidad de hacer modificaciones importantes a la estructura del algoritmo. Gracias a que las metaheurísticas no necesitan calcular gradientes, pueden resolver una variedad más amplia de problemas que los algoritmos clásicos; en muchos problemas, calcular el gradiente podría ser muy costoso o hasta imposible, lo que hace que las metaheurísticas sean una muy buena opción para estos casos. Finalmente, debido a que las metaheurísticas realizan la búsqueda estocásticamente, tienen una mayor capacidad para escapar de los óptimos locales.

Las metaheurísticas se pueden dividir en dos clases: *metaheurísticas de trayectoria* y *metaheurísticas de población* [Yan14]. Las metaheurísticas de trayectoria inician con una sola solución y la van mejorando a lo largo del tiempo de ejecución, por ejemplo: *recocido simulado*. Las metaheurísticas de población inician con una población de soluciones y van mejorando esta población a lo largo del tiempo de ejecución, por ejemplo: *algoritmos genéticos*, *optimización de enjambre partículas* y *colonia artificial de hormigas*.

1.6. Conclusión

Este capítulo ha presentado los conceptos fundamentales para el desarrollo de los capítulos que siguen.

Debido a que, básicamente toda persona, empresa o gobierno gana y gasta dinero a lo largo de su vida, conocer y entender el concepto de inversión es importante. Una inversión es comprometer una cierta cantidad de dinero por un tiempo definido con el objetivo de obtener un rendimiento y compensar los riesgos de la inversión y la inflación. Es posible invertir en una gran variedad de activos: obras de arte, bienes raíces, maquinaria, instrumentos financieros, entre otros. En esta tesis solo se analizan las inversiones en una clase de instrumento financiero: las acciones de empresas. Es recomendable invertir en portafolios de inversión en vez de instrumentos individuales debido a que los portafolios usualmente tienen, tanto un mayor rendimiento como un menor riesgo. Crear un portafolio de inversión no es tarea sencilla, por lo tanto, es recomendable invertir a través de fondos de inversión, las cuales son empresas, que, a cargo de profesionales, crean y administran portafolios de inversión, con el dinero de los participantes del fondo.

Existen dos clases de estrategias de inversión: estrategias activas y estrategias pasivas. Las estrategias activas se basan en la hipótesis de que el mercado es ineficiente, y tratan de crear portafolios que lo venzan. Por otro lado, las estrategias pasivas, se basan en la hipótesis de que el mercado es eficiente y en consecuencia no puede ser vencido, por lo que, a lo máximo que se puede aspirar es obtener el mismo rendimiento que el mercado. Las estrategias activas crean portafolios que requieren de conocimiento experto y un alto mantenimiento, y por lo tanto, altos costos operativos. Entonces, aún cuando las estrategias activas puedan vencer al mercado, estos altos costos pueden disminuir considerablemente el rendimiento de la inversión. Más aún, se ha mostrado que los fondos de inversión que siguen una estrategia activa, en general, no son capaces

de obtener mejores rendimientos que el mercado o un sector de este a largo plazo de manera consistente. Debido a esto, las estrategias pasivas han ganado popularidad entre los fondos de inversión.

Si no es posible obtener mejores rendimientos que el mercado, lo conveniente es crear un portafolio que tenga el mismo rendimiento que el mercado o un sector de este. Una manera de lograr lo anterior, es crear un portafolio que replique un índice de mercado. Un índice de mercado es una función matemática de los precios de un conjunto de acciones, que usualmente representan un sector particular del mercado. Construir y administrar un portafolio que replique un índice de mercado; esto es, un portafolio de índice, da lugar al problema de seguimiento de índice.

El problema de seguimiento de índice es un problema de optimización entera mixta. Es posible emplear algoritmos clásicos deterministas para la solución del problema, pero debido a que es NP-Completo, estos algoritmos no son capaces de entregar el óptimo global de manera económica para muchas instancias del problema. Por lo tanto, una buena alternativa, es el uso de algoritmos metaheurísticos.

El resto de esta tesis se divide como sigue. En el capítulo dos, se describe la literatura relacionada al uso de metaheurísticas para solucionar el problema de seguimiento de índice. En el capítulo tres se presenta la formulación matemática del problema. En el capítulo cuatro se presentan los algoritmos propuestos para solucionar el problema. En el capítulo cinco se muestran los resultados de los experimentos computacionales realizados al resolver el problema. Finalmente, el capítulo seis concluye esta tesis.

Capítulo 2

Estado del Arte

La literatura que trata sobre la optimización de portafolios de inversión es basta, y en años recientes ha ganado aún más popularidad. La figura 2.1 muestra el número de publicaciones que aparecen en Scopus para las palabras de búsqueda: **portfolio optimization**, entre los años 2014-2022. Es posible ver la optimización de portafolios es un campo vigente, y que el interés en él, ha ido aumentando con el tiempo.

El uso de metaheurísticas en la optimización de portafolios también es un campo vigente y de creciente popularidad. La figura 2.2 muestra el número de publicaciones que aparecen en Scopus para la búsqueda: **portfolio optimization metaheuristic**, entre los años 2014-2022. La figura muestra que el uso de metaheurísticas para la optimización de portafolios no ha sido tan investigada, sin embargo, el interés en este campo también ha ido aumentando con el tiempo.

La literatura sobre el uso de metaheurísticas para resolver el ITP no siempre es fácil de encontrar debido a que, muchas veces, el título del trabajo no tiene las palabras *index tracking problem* explícitamente. Afortunadamente, [Doe+19] hace un excelente trabajo para sintetizar el *estado del arte* del uso de metaheurísticas para la solución de distintos problemas de optimización de portafolios. Presenta estrategias activas y estrategias pasivas; en particular, el ITP.

A continuación se describen los trabajos más recientes sobre la optimización de portafolios y en particular, el problema de seguimiento de índice.

El modelo de media-varianza para selección de portafolios propuesto por Markowitz [Mar52] marca el inicio de la teoría de portafolios. El ITP es una modificación del problema de optimización de portafolios resuelto por Markowitz.

La formulación más simple del ITP tiene varias limitaciones que impiden su aplicación en la práctica, por lo tanto, varias extensiones y modificaciones que consideran restricciones operativas, administrativas o costos de transacción, han sido desarrolladas. Beasley et al. [BMC03] desarrollan una formulación que considera costos de transacción y resuelve el ITP con un algoritmo evolutivo. Derigs y Nickel [DN04] consideran costos de transacción y otras restricciones complejas, y proponen resolver el ITP con una versión de recocido simulado de

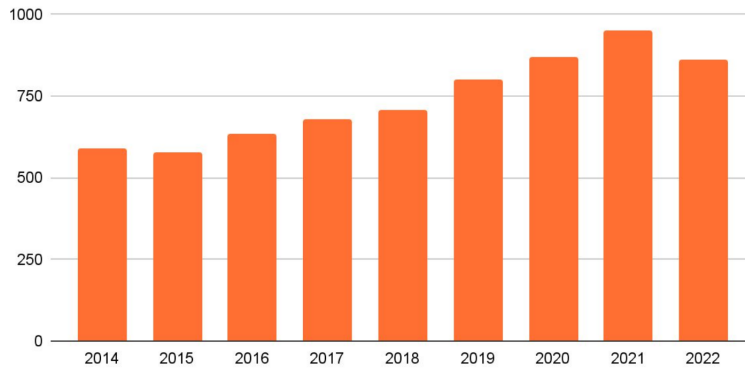


Figura 2.1: Se muestra el número de resultados en Scopus, para las palabras de búsqueda: portfolio optimization, entre los años 2014-2022.

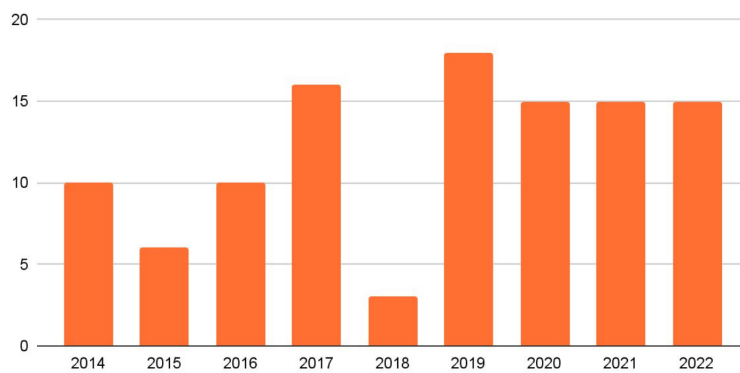


Figura 2.2: Se muestra el número de resultados en Scopus, para las palabras de búsqueda: portfolio optimization metaheuristic, entre los años 2014-2022.

dos fases.

Varios autores han usado algoritmos genéticos (GA) para resolver el ITP, tanto puros como híbridos. Torrubiano y Suárez [RS09] proponen un algoritmo híbrido que combina GA con un solucionador determinista de programación cuadrática. Strub y Trautmann [ST17] emplean un GA para resolver el ITP, donde la aptitud de cada individuo es determinada usando programación cuadrática. Garcia et al. [GGO18] comparan el desempeño entre GA y el algoritmo de búsqueda tabú (TS), concluyendo que TS es más eficiente que GA al atacar el ITP.

Debido a su eficiencia, versiones modificadas o híbridas del algoritmo de evolución diferencial (DE) han sido aplicadas para resolver el ITP, obteniendo buenos resultados. Krink et al. [KMP09] usan un algoritmo híbrido que combina DE con búsqueda combinatoria. Scozzari et al. [Sco+13] presentan una formulación de programación cuadrática entera mixta que cumple con las reglas UCITS¹, y proponen un algoritmo híbrido que combina DE con un solucionador de programación cuadrática para resolverlo.

Otras metaheurísticas han sido usadas para resolver el ITP. Affolter et al. [Aff+16] usan varias versiones modificadas del algoritmo de hierba invasiva (IWO), pero no pudieron obtener mejores soluciones que los estándares de comparación considerados. Silva et al. [SSA22] usan el procedimiento de búsqueda voraz aleatoria adaptativa (GRASP), obteniendo soluciones de la misma calidad y en menor tiempo que las obtenidas con CPLEX y GA híbridos.

¹La normativa UCITS especifica en primer lugar las clases de activos en los que puede invertir un fondo, la forma en que las inversiones están vinculadas a estas clases de activos y las valoraciones que se puedan realizar en un fondo.

Capítulo 3

Planteamiento del Problema

Este capítulo presenta la formulación matemática del problema. Esta formulación está basada en [Arr14; MB14].

3.1. Definiciones

Se observa el precio de un índice de mercado I y los N instrumentos que lo componen a lo largo de los periodos $t = 0, 1, \dots, T$.

Definición 3.1.1 *Sea v_{it} el valor (precio) del activo i al tiempo t . Entonces, el retorno continuamente compuesto o retorno logarítmico del activo i en el tiempo t es:*

$$r_{it} = \log \left(\frac{v_{it}}{v_{it-1}} \right). \quad (3.1.1)$$

Definición 3.1.2 *Sea I_t el precio del índice al tiempo t . Entonces, el retorno continuamente compuesto o retorno logarítmico del índice en el tiempo t es:*

$$R_t^I = \log \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right). \quad (3.1.2)$$

Definición 3.1.3 *Sea X_i el número de unidades del activo en el portafolio \mathcal{P} en el tiempo T . Sea H el efectivo agregado o retirado en el tiempo T . Entonces, el valor total de \mathcal{P} en el tiempo T es*

$$C = \sum_{i=1}^N v_{iT} X_i + H. \quad (3.1.3)$$

Definición 3.1.4 Sea \mathcal{P} un portafolio de N activos, entonces $\forall i \in [1, 2, \dots, N]$, definimos

1. X_i es el número de unidades del activo i del portafolio \mathcal{P} .
2. $\varepsilon_i \in \mathbb{R}^+$ la proporción mínima de \mathcal{P} que se debe tener del activo i si el activo está presente.
3. $\delta_i \in \mathbb{R}^+$ la proporción máxima de \mathcal{P} que se debe tener del activo i si el activo está presente.
4. $f_i^b \in \mathbb{R}^+$ el costo proporcional de transacción asociado con comprar una unidad del activo i al tiempo T , tal que comprar una unidad del activo i al tiempo T tiene el costo: $f_i^b v_{iT}$.
5. $f_i^s \in \mathbb{R}^+$ el costo proporcional de transacción asociado con vender una unidad del activo i al tiempo T , tal que vender una unidad del activo i al tiempo T tiene el costo: $f_i^s v_{iT}$.
6. $F_i^b \in \mathbb{R}^+$ el costo fijo de comprar una unidad del activo i al tiempo T .
7. $F_i^s \in \mathbb{R}^+$ el costo fijo de vender una unidad del activo i al tiempo T .
8. $M_i^b \in \mathbb{Z}^+$ el máximo número de unidades del activo i que puede ser comprado al tiempo T , si es que se decide comprar el activo i .
9. $M_i^s \in \mathbb{Z}^+$ el máximo número de unidades del activo i que puede ser vendido al tiempo T , si es que se decide vender el activo i .
10. $\gamma \in [0, 1]$ el límite en la proporción de C que puede ser consumida como costos de transacción.

Definición 3.1.5 Sea X_i el número de unidades del activo i en el portafolio \mathcal{P} . Sea C el valor total de \mathcal{P} al tiempo T . Sea v_{iT} el precio del activo i en el tiempo T , entonces el peso

$$w_i = \frac{X_i v_{iT}}{C}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.1.4)$$

es la proporción del valor C de \mathcal{P} asignado al activo i .

Un portafolio \mathcal{P} está totalmente determinado por su vector de pesos $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_N)$.

Definición 3.1.6 Sea \mathcal{P} un portafolio de N activos. Sea w_i el peso del activo i . Sea r_{it} el retorno logarítmico del activo i al tiempo t . Entonces, el retorno logarítmico de \mathcal{P} al tiempo t es

$$R_t^{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^N w_i r_{it}. \quad (3.1.5)$$

Al resolver el ITP, se puede construir un portafolio desde cero, pero normalmente ya se tiene un portafolio \mathcal{P} construido, y lo que se quiere hacer, es simplemente actualizar los pesos para obtener un portafolio con mejor desempeño. Al actualizar \mathcal{P} , se obtiene un portafolio actualizado \mathcal{P}_a . Al realizar esta operación, se compran y venden unidades de los activos de \mathcal{P} . Para calcular los costos de transacción y otras cantidades importantes que aparecen en las restricciones del problema, resulta útil hacerlo en términos de las siguiente variables auxiliares, que son calculadas a partir de \mathbf{w} .

Definición 3.1.7 *Sea \mathcal{P} un portafolio de N activos. Sea \mathcal{P}_a el portafolio actualizado. Entonces, $\forall i \in [1, 2, \dots, N]$:*

1. $x_i \in \mathbb{Z}^+$ el número de unidades del activo i que se eligen tener en el nuevo portafolio \mathcal{P}_a .
2. $z_i = \begin{cases} 1, & x_i > 0, \\ 0, & x_i = 0. \end{cases}$
3. $y_i^b \in \mathbb{Z}^+$ el número de unidades del activo i que son compradas al tiempo T .
4. $y_i^s \in \mathbb{Z}^+$ el número de unidades del activo i que son vendidas al tiempo T .
5. $\alpha_i^b = \begin{cases} 1, & \text{si se compra al menos una unidad del activo } i \text{ al tiempo } T, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
6. $\alpha_i^s = \begin{cases} 1, & \text{si se vende al menos una unidad del activo } i \text{ al tiempo } T, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Debido a que las cantidades de dinero son grandes, podemos considerar $x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in [1, 2, \dots, N]$.

La manera de calcular x_i a partir de $w_i, \forall i \in [1, 2, \dots, N]$, es:

$$x_i = \frac{w_i C}{v_{iT}}. \quad (3.1.6)$$

3.2. Problema de Seguimiento de Índice

Ahora se describen las variables de decisión, las restricciones y la función objetivo del ITP.

3.2.1. Variables de Decisión

Las variables de decisión del ITP son los pesos del vector de pesos $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_N)$.

3.2.2. Restricciones

Las restricciones consideradas para el ITP son:

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (3.2.1)$$

$$\sum_{i=1}^N z_i = K \quad (3.2.2)$$

$$\varepsilon_i z_i \leq w_i \leq \delta_i z_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.2.3)$$

$$x_i = X_i + y_i^b - y_i^s, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.2.4)$$

$$\alpha_i^b + \alpha_i^s \leq 1, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.2.5)$$

$$y_i^b \leq M_i^b \alpha_i^b, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.2.6)$$

$$y_i^s \leq \min[M_i^s, X_i] \alpha_i^s, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.2.7)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{iT} x_i = C \quad (3.2.8)$$

$$\sum_{i=1}^N (f_i^b v_{iT} y_i^b + f_i^s v_{iT} y_i^s + F_i^b \alpha_i^b + F_i^s \alpha_i^s) \leq \gamma C \quad (3.2.9)$$

$$y_i^b, y_i^s, x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.2.10)$$

$$\alpha_i^b, \alpha_i^s, z_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.2.11)$$

La ecuación 3.2.1 garantiza que la suma de los pesos w_i sea igual a 1 (restricción de consistencia).

La ecuación (3.2.2) garantiza que solo haya K activos en el nuevo portafolio \mathcal{P}_a (restricción de cardinalidad).

La ecuación (3.2.3) garantiza que si el activo i no está en \mathcal{P}_a , entonces $x_i = 0$; también se asegura que si el activo i si se encuentra \mathcal{P}_a , entonces, el número de unidades del activo i se encuentre entre los límites permitidos.

La ecuación (3.2.4) expresa el número de unidades del activo i en \mathcal{P}_a , es decir, se tienen X_i unidades, se compran y_i^b y se venden y_i^s , lo que resulta en x_i unidades.

La ecuación (3.2.5) hace imposible que se puedan comprar y vender unidades del activo i al mismo tiempo si es que se decide hacer un cambio en las unidades de ese activo; es decir, se tienen tres opciones: comprar, vender, o no se modifica el número de unidades actual X_i .

La ecuación (3.2.6) garantiza que el número de unidades que se compran del activo i no exceda el máximo permitido M_i^b , si es que se va a comprar al menos una unidad de dicho activo. Es decir, esta ecuación fuerza $y_i^b = 0$ si $\alpha_i^b = 0$, y $y_i^b \leq M_i^b$ si $\alpha_i^b = 1$.

La ecuación (3.2.7) garantiza que el número de unidades que se venden del activo i no sea mayor que el mínimo entre: el mínimo permitido M_i^s o el número

de unidades X_i presentes, si es que se vende al menos una unidad de dicho activo. Es decir, esta ecuación fuerza $y_i^s = 0$ si $\alpha_i^s = 0$, y $y_i^s \leq \min(M_i^s, X_i)$ si $\alpha_i^s = 1$.

La ecuación (3.2.8) garantiza que el valor del nuevo portafolio \mathcal{P}_a al tiempo T , sea igual al valor del portafolio inicial \mathcal{P} más el cambio en el efectivo.

La ecuación (3.2.9) limita que el costo de transacción total no supere la cantidad γC .

La ecuación (3.2.10) establece que las variables enteras sean mayores o iguales a 0.

La ecuación (3.2.11) establece que las variables binarias toman el valor 0 o 1.

3.2.3. Función Objetivo

La función objetivo del ITP es:

Definición 3.2.1 *El promedio de los valores absolutos de la diferencia entre el rendimiento logarítmico del portafolio \mathcal{P} y el rendimiento logarítmico del índice I , es*

$$TE = \frac{\left(\sum_{t=1}^T |R_t^{\mathbf{w}} - R_t^I|\right)^{1/\beta}}{T} \quad (3.2.12)$$

donde $\beta \geq 1 \wedge \beta \in \mathbb{Z}$.

El ITP consiste en minimizar la función objetivo anterior sujeta a las restricciones consideradas.

Capítulo 4

Algoritmos

En este capítulo se discuten los algoritmos propuestos para resolver el ITP.

Los algoritmos deterministas siempre siguen el mismo camino de búsqueda y obtienen la misma solución en distintas ejecuciones, siempre que las condiciones iniciales sean idénticas. Los algoritmos estocásticos por otro lado, utilizan números pseudoaleatorios; por lo tanto, dadas las mismas condiciones iniciales, el camino de búsqueda y la solución no necesariamente son los mismos en distintas ejecuciones [Yan14].

4.1. Branch and Bound

Branch and Bound (B&B) es un método diseñado para resolver problemas de programación entera mixta (MILP), explotando la gran eficiencia de los algoritmos usados para resolver problemas de programación lineal (LP por sus siglas en inglés) [Tah17].

El primer algoritmo B&B fue desarrollado en 1960 por A. Land y G. Doig tanto para el problema de programación entera mixta, como para el problema de programación entera pura (ILP) [Tah17]. La estrategia del método B&B consiste en los siguientes pasos:

1. Relaja el espacio de solución del ILP removiendo las restricciones de integralidad convirtiéndolo en un espacio continuo.
2. Resuelve el LP obteniendo su óptimo continuo
3. Partiendo del óptimo continuo, divide el espacio de búsqueda recursivamente, produciendo dos subproblemas con cada división. Resuelve recursivamente los subproblemas hasta que todos los subproblemas hayan sido solucionados, discriminando los subproblemas cuya solución óptima continua sea peor que la mejor solución factible encontrada hasta el momento. Lo último se hace para evitar la enumeración completa.

B&B es uno de los métodos más populares para resolver MILP por lo que existen varias implementaciones, tanto libres como comerciales.

4.2. Búsqueda Armónica

El algoritmo de *Búsqueda Armónica* (HS, por sus siglas en inglés) es una metaheurística basada en la música desarrollado por Geem et al. en 2001 [GKL01]. La eficiencia de HS ha sido demostrada en varias aplicaciones: optimización de funciones, optimización en ingeniería, diseño de redes de distribución de agua, modelación de aguas subterráneas, despacho de energía, diseño de estructuras, enrutamiento de vehículos, entre otros [Gee09].

HS fue inspirada en la observación de que el objetivo de la música es encontrar la armonía perfecta. La composición de una pieza musical puede ser comparada con la solución de un problema de optimización. Por ejemplo, el proceso de improvisación de un compositor de Jazz puede ser comparado con el proceso de búsqueda de la solución óptima de un problema de optimización [Gee09].

Es posible simplificar el proceso de improvisación en música de la siguiente manera. Cuando un músico está improvisando, tiene tres opciones: (1) tocar una melodía conocida de forma exacta; (2) tocar una melodía conocida modificando las frecuencias de algunas notas; o (3) componer una melodía nueva o usar notas aleatorias [Gee09]. Basándose en las tres opciones anteriores Geem et al. desarrollaron los componentes básicos de HS: memoria de armonías, ajuste de frecuencia y aleatorización.

La memoria de armonías asegura que buenas melodías sean consideradas como elementos de nuevas melodías potencialmente mejores. HS considera un parámetro que controla la probabilidad de utilizar una nota de una melodía de la memoria de armonías: la tasa de aceptación de la memoria de armonías, $r_{accept} \in [0, 1]$.

El ajuste de la frecuencia consiste en modificar una nota de la melodía seleccionada y tiene dos parámetros: el ancho de banda b_{range} , y la tasa de ajuste de frecuencia r_{pa} . Normalmente, el ajuste de frecuencia se realiza de manera lineal como:

$$x_{new} = x_{old} + b_{range} \cdot \varepsilon, \quad (4.2.1)$$

donde x_{old} es un tono de almacenado en la memoria de armonías, x_{new} es el tono después del ajuste de frecuencia y $\varepsilon \in [-1, 1]$ es una variable aleatoria con distribución de probabilidad uniforme.

La aleatorización consiste en generar una nota de manera aleatoria con el objetivo de aumentar la diversidad de melodías.

El algoritmo 1 muestra el pseudocódigo para búsqueda armónica.

Algorithm 1 Búsqueda Armónica

Require: Número de iteraciones: $niter$, tasa de aceptación de la memoria de armonías: p_{accept} , tasa de ajuste de frecuencia: r_{pa} , rango de ajuste de frecuencia: b_{range} .

```
1:
2: Genera la memoria de armonías MA con melodías aleatorias
3:
4: for  $iter$  in  $1 : niter$  do
5:   for  $i$  in  $1 : dim$  do
6:
7:     if  $rand() < r_{accept}$  then
8:
9:       Elige una melodía  $x_{old}$  de MA aleatoriamente
10:       $x_{new}[i] \leftarrow x_{old}[i]$ 
11:
12:      if  $rand() < r_{pa}$  then
13:         $x_{new}[i] \leftarrow x_{old}[i] + b_{range} \cdot \varepsilon$ 
14:      end if
15:    else
16:      Elige un tono aleatoriamente para  $x_{new}[i]$ 
17:    end if
18:  end for
19:
20:  if  $x_{new}$  es mejor que la peor melodía de MA then
21:    Sustituye  $x_{new}$  por la peor melodía de MA
22:  end if
23: end for
24:
25: return La mejor melodía
```

4.2.1. Búsqueda Armónica Para Optimización de Portafolios

Tomando como inspiración el algoritmo original de HS, se propone una versión modificada para resolver el ITP, llamada *Búsqueda Armónica para Optimización de Portafolios* (HSPO, por sus siglas en inglés). El algoritmo 2 muestra el pseudocódigo de HSPO.

Algorithm 2 Búsqueda Armónica para Optimización de Portafolios

Require: Número de iteraciones $niter$ y probabilidad de realizar mutación de explotación $hmpa$.

```
1:
2: Genera la población inicial  $poblacion$ 
3:  $\alpha \leftarrow 1$ 
4: for  $iter$  in  $1 : niter$  do
5:
6:   Elije aleatoriamente un  $candidato$  de  $poblacion$ 
7:
8:   if  $rand() < hmpa$  then
9:      $candidato \leftarrow MUTACIONEXPLORACION(candidato, \alpha)$ 
10:  else
11:     $candidato \leftarrow MUTACIONEXPLORACION(candidato)$ 
12:  end if
13:
14:  if  $candidato$  es mejor que el peor elemento de  $poblacion$  then
15:    Sustituye el peor elemento de  $poblacion$  por  $candidato$ 
16:  end if
17:
18:   $\alpha \leftarrow 1 - (iter - 1)/niter$ 
19: end for
20:
21: return Mejor elemento de  $poblacion$ 
```

Inicialización

La población inicial es generada (línea 2). El tamaño de paso α es inicializado a 1 (línea 3).

Cuerpo Principal

El cuerpo principal del algoritmo se desarrolla en las líneas 4-19. El ciclo termina cuando se cumple el criterio de paro, en este caso, el número máximo de iteraciones. En cada iteración. Primero se elige aleatoriamente una solución llamada $candidato$, de la población llamada $poblacion$ (línea 6).

Se genera un número aleatorio con distribución uniforme en el rango $[0, 1]$ (línea 8). Si, el número aleatorio anterior es menor que $hmpa$, se realiza una mutación de explotación sobre *candidato* mediante la función MUTACIONEXPLOTACION (línea 9). De otra manera, se realiza una mutación de exploración sobre *candidato*, mediante la función MUTACIONEXPLORACION (línea 11).

Si *candidato* es mejor que la peor solución de de la población, entonces se sustituye la peor solución de la población por *candidato* (líneas 14-16).

Finalmente, el tamaño de paso α se reduce (línea 18).

Postprocesamiento

El algoritmo termina entregando la mejor solución de la población.

Operador de explotación

El algoritmo 3 muestra el pseudocódigo de la función MUTACIONEXPLOTACION. Esta función, se encarga de realizar la explotación o intensificación de las soluciones.

La función MUTACIONEXPLOTACION toma como parámetros, una solución w , el tamaño de paso α y los límites ε y δ . Se eligen dos números enteros: i y j , de tal manera que $w[i] > 0$ y $w[j] > 0$ (líneas 1-2). Se asigna a u , el producto del tamaño de paso α por un número aleatorio con distribución uniforme con rango $[0, \min(w[i] - \varepsilon, w[j] - \delta)]$ (línea 4); utilizar el término $\min(w[i] - \varepsilon, \delta - w[j])$ como límite superior de la distribución uniforme tiene como objetivo satisfacer la restricción 3.2.3 directamente, lo que mejora la eficiencia del algoritmo. α se va reduciendo con cada iteración, por lo que, u toma valores cada vez más pequeños, lo que permite hacer una búsqueda más fina alrededor de regiones prometedoras. La cantidad u es sumada a $w[j]$ y restada de $w[i]$ (líneas 6-7). La solución modificada es regresada (línea 9).

Adicionalmente, MUTACIONEXPLOTACION tiene una ventaja poderosa, y es que, todas las soluciones que entrega siempre satisfacen las restricciones

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (4.2.2)$$

$$\sum_{i=1}^N z_i = K \quad (4.2.3)$$

$$z_i \varepsilon_i \leq w_i \leq z_i \delta_i. \quad (4.2.4)$$

Debido a que le suma a un activo lo que le resta a otro. La satisfacción garantizada de las restricciones anteriores es una de las razones más importantes para realizar la explotación de esta manera.

Operador de exploración

El algoritmo 4 muestra el pseudocódigo de la función `MUTACIONEXPLORACION`. Esta función, se encarga de realizar la exploración o diversificación de las soluciones.

La función `MUTACIONEXPLORACION` toma como parámetro una solución w . Se eligen dos números enteros i y j , tal que $w[i] > 0$ y $w[j] == 0$ (líneas 1-2). Luego, se asigna el valor de $w[i]$ a $w[j]$ y a $w[i]$ se asigna el valor 0 (líneas 4-5). La solución modificada es regresada (línea 7).

`MUTACIONEXPLORACION` también satisface las restricciones (4.2.2), (4.2.3) y (4.2.4). Debido a que se intercambian los valores de un peso igual a cero y un peso mayor a cero. Por lo que, de manera similar a `MUTACIONEXPLOTACION`, es una manera efectiva de realizar la búsqueda.

Algorithm 3 `MUTACIONEXPLOTACION`

Require: Vector de pesos w , tamaño de paso α , los límites ε y δ .

- 1: Elije i tal que $w[i] > 0$
 - 2: Elije j tal que $w[j] > 0$
 - 3:
 - 4: $u \leftarrow \alpha \cdot \text{rand}(0, \min(w[i] - \varepsilon, \delta - w[j]))$
 - 5:
 - 6: $w[j] \leftarrow w[j] + u$
 - 7: $w[i] \leftarrow w[i] - u$
 - 8:
 - 9: **return** w
-

Algorithm 4 `MUTACIONEXPLORACION`

Require: Vector de pesos w .

- 1: Elije i tal que $w[i] > 0$
 - 2: Elije j tal que $w[j] == 0$
 - 3:
 - 4: $w[j] \leftarrow w[i]$
 - 5: $w[i] \leftarrow 0$
 - 6:
 - 7: **return** w
-

La razón de realizar la explotación y la exploración con las funciones `MUTACIONEXPLOTACION` y `MUTACIONEXPLORACION`, es por que producen soluciones que siempre cumplen las restricciones (4.2.2), (4.2.3) y (4.2.4), las cuales son, en general, difíciles de satisfacer.

4.2.2. Inicialización de la Población

La población inicial juega un papel importante en el desempeño de HSPO. Iniciar con una población de soluciones completamente aleatoria no es una buena

idea, debido a que, al comenzar con un vector inicial de pesos w_0 , sumado a las restricciones que limitan los costos de transacción, la solución óptima para una cierta instancia de ITP, está relativamente “cerca” de w_0 . Por lo anterior, una correcta construcción de la población inicial puede mejorar el desempeño HSPO.

La población inicial se construye con dos estrategias distintas para cada mitad. La primera mitad se construye partiendo del vector de pesos inicial w_0 y realizando mutaciones de acuerdo a la función `MUTACION`, la cual es una combinación de `MUTACIONEXPLORACION` y `MUTACIONEXPLOTACION`. El algoritmo 5 muestra el pseudocódigo de la función `MUTACION`.

La función `MUTACION` acepta como entrada un vector de pesos w y los límites ε y δ , elige dos números enteros aleatorios i y j , tales que $w[i] > 0$ y $w[j] \geq 0$ (línea 1). Si $w[j] == 0$, asigna a $w[j]$ el valor de $w[i]$, justo como en el operador de exploración (líneas 3-5). De otra manera, genera un número aleatorio u con distribución uniforme de rango $[0, \min(w[i] - \varepsilon, \delta - w[j])]$, lo suma a $w[j]$ y lo resta de $w[i]$ (líneas 7-9), justo `MUTACIONEXPLOTACION`. Finalmente, regresa el vector de pesos w .

La segunda mitad de la población inicial se construye creando un vector de pesos w_b , de tal manera que: $w_b[i] = 1/K \iff w_0[i] \geq 0$; y $w_b[i] = 0 \iff w_0[i] = 0$. Partiendo de w_b , se realizan perturbaciones mediante `MUTACION` para crear nuevas soluciones.

La razón de seguir la estrategia anterior para la segunda mitad, es porque los parámetros ε y δ no solo restringen el peso mínimo y máximo de cada activo, sino también, el tamaño K del portafolio de seguimiento. Por ejemplo, en los experimentos se eligen los valores: $\varepsilon = 0.01$ y $\delta = 1$, lo hace que se tenga un valor máximo de $K = 100 = 1/0.01$ en el portafolio de seguimiento. Como $\delta = 1$, se tiene un valor mínimo de $K = 1 = 1/1$. Entonces, para valores grandes de K , la solución óptima para una instancia de ITP, pudiera estar “cerca” de w_b .

Algorithm 5 `MUTACION`

Require: Vector de pesos w y límites ε y δ .

```

1: Elije  $i, j$ , tal que  $w[i] > 0 \wedge w[j] \geq 0$ 
2:
3: if  $w[j] == 0$  then
4:    $w[j] \leftarrow w[i]$ 
5:    $w[i] \leftarrow 0$ 
6: else
7:    $u \leftarrow \text{rand}(0, \min(w[i] - \varepsilon, \delta - w[j]))$ 
8:    $w[j] \leftarrow w[j] + u$ 
9:    $w[i] \leftarrow w[i] - u$ 
10: end if
11:
12: return  $w$ 

```

4.3. Tratamiento de Restricciones

El ITP es un problema de optimización con restricciones. Los operadores de mutación de HSPO están diseñados de tal manera que puedan ayudar a tratar con algunas de las restricciones del ITP, pero no con todas. Propiamente, HSPO no tiene un mecanismo que trate con todas las restricciones del ITP, por lo que alguna técnica de tratamiento de restricciones debe ser empleada. El método elegido para tratar las restricciones del ITP es el *método de penalización*.

4.3.1. Método de Penalización

El método de penalización es una técnica clásica para tratar con las restricciones de un problema de optimización. El método de penalización intenta convertir un problema de optimización restringido en un problema de optimización sin restricciones, incluyéndolas en una nueva función objetivo. Esto introduce nuevos parámetros al problema, pero si sus valores se eligen adecuadamente, el problema puede ser resuelto efectivamente por una gran variedad de algoritmos [Yan14].

Dado un problema de optimización general

$$\text{mín } \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4.3.1)$$

$$\text{sujeto a } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (4.3.2)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \quad (4.3.3)$$

$$\mathbf{x} \in \mathcal{S}. \quad (4.3.4)$$

Se puede definir una nueva función objetivo penalizada ϕ :

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x}). \quad (4.3.5)$$

Donde $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ es el término de penalización definido por:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \sum_i \mu_i H_i[h_i(\mathbf{x})] |h_i(\mathbf{x})| + \sum_j \nu_j G_j[g_j(\mathbf{x})] g_j(\mathbf{x}). \quad (4.3.6)$$

Aquí, μ_i y ν_j son los factores constantes de penalización; y H_i y G_i son funciones índice definidas como:

$$H_i = \begin{cases} 1 & \text{si } |h_i(\mathbf{x})| - \epsilon \geq 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.3.7)$$

y

$$G_j = \begin{cases} 1 & \text{si } g_j > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.3.8)$$

Donde ϵ es un factor de tolerancia que se le permite a las restricciones de igualdad. Se utiliza este factor de tolerancia, debido a que satisfacer una restricción de igualdad, es computacionalmente casi imposible con números flotantes.

En la implementación se considera $\mu_i = \nu_j = 1, \forall i, j$. Que funciona bien para este caso. Es importante mencionar que los valores de μ_i y ν_i dependen de la escala del problema, por lo que se debe tener cuidado en la elección de los valores para distintos problemas.

4.4. Conclusión

En este capítulo se presentaron los algoritmos que se usaron para resolver el ITP: B&B y HSPO.

B&B es un método popular para resolver problemas MILP tal como el ITP, debido a su desempeño. Sin embargo, B&B tiene limitaciones y no es totalmente eficaz. Por esta razón, se propone el algoritmo metaheurístico HSPO con el objetivo de obtener un mejor desempeño al resolver el ITP.

HSPO hace uso de un operador de exploración que le permite encontrar el subconjunto de los activos del índice que debe incluir el portafolio de seguimiento, y de un operador de explotación que le permite encontrar los pesos de cada activo. Además, estos operadores, durante el procesos de búsqueda, producen soluciones que siempre satisfacen las restricciones de cardinalidad y de consistencia, las cuales son en general, difíciles de satisfacer. Adicionalmente, emplea dos estrategias de inicialización de la población inicial; esta inicialización mejora la convergencia del algoritmo. Todas estas características hacen que HSPO tenga un buen desempeño para resolver el ITP.

En el siguiente capítulo se presentan los resultados de los experimentos computacionales realizados con el objetivo de investigar el desempeño de HSPO, y como se compara con el paquete de programación matemática HiGHS que tiene una implementación de B&B.

Capítulo 5

Resultados Computacionales

Este capítulo se dedica a analizar los resultados de los experimentos computacionales.

5.1. Datos

Los datos se toman de <http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/indtrackinfo.html>. En la liga anterior se encuentran cinco conjuntos de datos que contienen los precios históricos de cinco índices y sus activos componentes a lo largo de 290 semanas, recopiladas de Marzo de 1992 a Septiembre de 1997: Hang Seng (31 activos), DAX 100 (85 activos), FTSE 100 (89 activos), S&P 100 (98 activos) y Nikkei 225 (225 activos).

En la misma liga se encuentran tres conjuntos de datos adicionales con el mismo número de periodos, pero no se menciona el nombre del índice al que corresponden ni la fecha en la que fueron obtenidos. Estos datos consideran índices de un mayor número de activos componentes: 457, 1318 y 2151.

En los experimentos que siguen, los portafolios de seguimiento son optimizados utilizando los datos correspondientes en los periodos $[0, 145]$, produciendo el *error de seguimiento de la muestra* (ESM). Adicionalmente, se emplean los periodos $[146, 290]$ para calcular el *error de seguimiento fuera de la muestra* (ESFM). Mientras el ESM es directamente optimizado por los algoritmos descritos, el ESFM es una medida del desempeño del portafolio de seguimiento en datos que no han sido vistos por los algoritmos.

5.2. Infraestructura

Todos los experimentos fueron realizados en el mismo ambiente con las siguientes características:

Equipo de cómputo

1. CPU: AMD Ryzen 5 5600G, 3.9 GHz.
2. RAM: ADATA Spectrix D50, 2×8 Gb, 3200 MHz.
3. MOBO: ASUS PRIME B550M-K.

Software

1. Sistema operativo: Ubuntu 20.04.
2. Lenguaje de programación: Julia.
3. Lenguaje de modelación para programación matemática: JuMP.
4. Solucionador de programación matemática: HiGHS.

5.3. Dependencia del Tamaño del Índice N

Para investigar el desempeño de los algoritmos descritos, se resuelve el ITP para distintos índices; es decir, problemas de tamaño distinto. En este experimento, se quiere ver si el desempeño de los algoritmos descritos depende del tamaño del índice.

Para estas instancias del problema, se consideran los siguientes parámetros:

1. $K = 10$.
2. Valor de portafolio inicial de $C_0 = 10^6$.
3. Portafolio inicial tal que, $w_i = (1/K)$, para $i = 1, \dots, K$, y $w_i = 0 \forall i > K$.
4. $X_i = (w_i C)/(v_{iT})$.
5. $\varepsilon_i = 0.01$ y $\delta_i = 1, \forall i$.
6. $f_i^b = f_i^s = 0.01$ y $F_i^b = F_i^s = 0, \forall i$.
7. $M_i^b = C/v_{iT}$ y $M_i^s = X_i, \forall i$.

Para la función objetivo consideramos $\beta = 1$.

5.3.1. HiGHS

La tabla 5.1 muestra el ESM y el ESFM obtenidos con HiGHS para distintas instancias del ITP. Se utilizaron los parámetros por defecto de HiGHS con excepción de un tiempo límite de 3,600s. Las columnas de la tabla 5.1 muestran: el número de activos del índice, el valor de K , el valor de γ , el ESM, el ESFM, y el tiempo de cómputo. Si HiGHS alcanza el tiempo límite (3,600s), entrega el mejor valor de la función objetivo que ha encontrado hasta ese momento, sin embargo, esta solución es subóptima. Como se puede ver, HiGHS alcanza el límite de tiempo en todas las instancias consideradas.

N.º de activos	K	γ	ESM	ESFM	Tiempo (s)
89	10	0.01	0.00449	0.00614	3600
98	10	0.01	0.00426	0.00544	3600
225	10	0.01	0.00384	0.00716	3600
457	10	0.01	0.00677	0.01376	3600
1318	10	0.01	0.00984	0.01865	3600
2151	10	0.01	0.00696	0.01530	3600

Tabla 5.1: Se muestran los resultados obtenidos por HiGHS al variar N. Las columnas muestran: el número de activos totales del índice, el valor de K , el valor de γ , el error de seguimiento para los datos de entrenamiento, el ESM, el ESFM y el tiempo de cómputo.

5.3.2. HSPO

Para medir el desempeño de HSPO al resolver el ITP, se realizan 20 ejecuciones independiente de HSPO con los siguientes parámetros:

1. Tamaño de población: 1000.
2. $hmpa$: 0.5.
3. Número de iteraciones: 1,000,000.

ESM

La tabla 5.2 muestra los resultados obtenidos por HSPO. Las columnas de la tabla 5.2 muestran: el número de activos del índice, el valor de K , el valor de γ , el valor mínimo, el máximo, la media y la desviación estándar del ESM, el valor medio del ESFM y la media de los tiempos de ejecución.

N	K	γ	ESM				ESFM Media	Tiempo (s) Media
			Mín	Máx	Media	DE		
89	10	0.01	0.00448	0.00449	0.00449	0.00000	0.00718	28.3
98	10	0.01	0.00415	0.00433	0.00423	0.00005	0.00605	30.8
225	10	0.01	0.00346	0.00399	0.00372	0.00016	0.00756	59.6
457	10	0.01	0.00629	0.00665	0.00644	0.00011	0.01329	109.8
1318	10	0.01	0.00773	0.00872	0.00823	0.00024	0.01864	276.3
2151	10	0.01	0.00662	0.00731	0.00700	0.00018	0.01467	430.9

Tabla 5.2: Se muestran los resultados obtenidos por HSPO al variar N. Las columnas muestran: el número de activos del índice, el valor de K , el valor de γ , el mínimo, el máximo, la media y la desviación estándar del ESM, el valor medio del ESFM y la media de los tiempos de ejecución.

Los resultados en este experimento muestran que HSPO es capaz de obtener resultados comparables en mucho menor tiempo que HiGHS. Para algunas instancias, HSPO obtiene ligeramente mejores resultados que HiGHS, mientras que para otras, HSPO obtiene resultados ligeramente peores pero en un tiempo mucho menor. La tabla 5.3 muestra la comparación del ESM obtenido por HiGHS contra el ESM mínimo, máximo y medio obtenidos por HSPO. Para $N = 89$, $N = 457$ y $N = 1318$, el ESM de la peor solución obtenida por HSPO es igual o menor que el ESM de la solución obtenida por HiGHS. Es importante destacar que para $N = 1318$, HSPO obtiene resultados considerablemente mejores que HiGHS. Para $N = 98$ y $N = 225$, el ESM de la peor solución de HSPO es ligeramente mayor al ESM de la solución obtenida por HiGHS, pero el ESM medio de HSPO es mejor que el ESM de HiGHS. Para todos los índices, el mejor resultado de HSPO es mejor que el resultado obtenido por HiGHS. La figura 5.1 muestra en una gráfica los datos de la tabla 5.3, la línea punteada azul representa el ESM de HiGHS, mientras que las líneas sólidas representan el ESM mínimo, máximo y medio de HSPO, en naranja, verde y rosa respectivamente. La figura muestra más claramente que HSPO obtiene un mejor ESM que HiGHS, en la mayoría de las instancias del problema consideradas.

En general, HSPO es capaz de obtener mejores soluciones que HiGHS, considerando además que HSPO es considerablemente más rápido que HiGHS.

N	K	γ	HiGHS (ESM)	HSPO (ESM)		
				Mín	Máx	Media
89	10	0.01	0.00449	0.00448	0.00449	0.00449
98	10	0.01	0.00426	0.00415	0.00433	0.00422
225	10	0.01	0.00384	0.00346	0.00399	0.00372
457	10	0.01	0.00677	0.00629	0.00665	0.00644
1318	10	0.01	0.00984	0.00773	0.00872	0.00823
2151	10	0.01	0.00696	0.00662	0.00731	0.00700

Tabla 5.3: Se muestra la comparación de los resultados obtenidos por HiGHS y HSPO al variar N . Las columnas muestran: el número de activos totales que posee, el valor de K , el valor de γ , el ESM obtenido por HiGHS, el ESM mínimo, máximo y medio obtenidos por HSPO.

ESFM

Otro ángulo de análisis importante es el ESFM del portafolio de seguimiento, el cual es, el error de seguimiento del portafolio en los periodos que no han sido usados para su optimización; en este caso, los periodos 146-290. Mientras que el análisis del ESM tiene su importancia en la medición del desempeño de los algoritmos durante la optimización; el análisis del ESFM habla sobre el desempeño del comportamiento promedio del portafolio de seguimiento hacia el futuro, una vez que ha sido construido. Vale la pena mencionar que se puede hacer una analogía entre el ESM y el ESFM de un portafolio, con el *error*

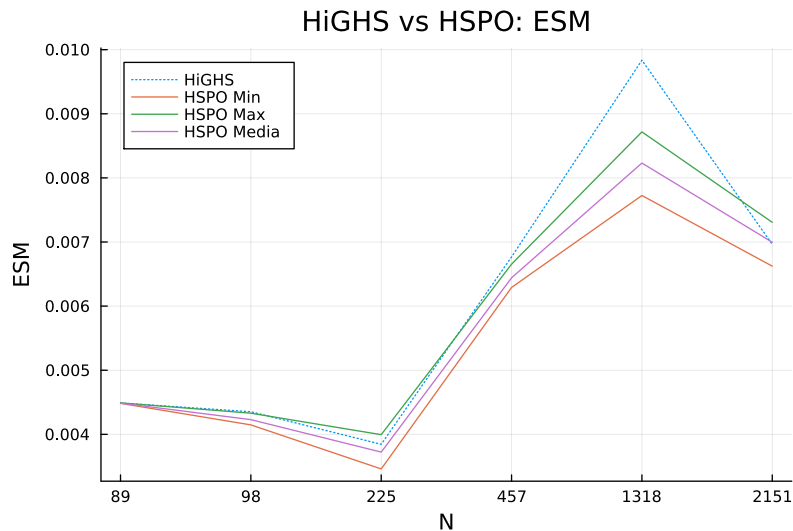


Figura 5.1: Se muestra la comparación del ESM obtenido por HiGHS contra el ESM obtenido por HSPO, al variar el tamaño del índice N . La línea punteada azul representa el ESM de HiGHS. Las líneas sólidas representan el ESM mínimo, máximo y medio de HSPO; en naranja, verde y rosa respectivamente.

cuadrático medio de entrenamiento y el error cuadrático medio de prueba de algún modelo de aprendizaje computacional.

La tabla 5.4 muestra el ESFM obtenido por HiGHS comparado con el ESFM medio obtenido por HSPO. Se observa que HiGHS y HSPO obtienen resultados similares. Es interesante observar que, para una instancia del ITP específica, si un algoritmo obtiene un mejor ESM que el otro algoritmo, esto no necesariamente implica que ese algoritmo obtenga un mejor ESFM que su competidor. Por ejemplo, para $N = 89$, HiGHS obtiene un ESM igual a 0.00449, y HSPO obtiene un ESM medio igual a 0.00449; mientras que HiGHS obtiene un ESFM igual a 0.00614, y HSPO obtiene un ESFM medio igual a 0.00718. Para $N = 2151$, por ejemplo, los papeles se invierten. La figura 5.2 muestra gráficamente los datos de la tabla 5.4. En la figura, la línea punteada azul representa el ESFM de HiGHS y la línea sólida naranja el ESFM medio de HSPO.

Como es de esperarse, el ESFM es mayor que el ESM para cada instancia y para ambos métodos. No obstante, el peor ESFM tanto para HiGHS como para HSPO es aproximadamente 2% (Para $N=1318$). Lo cual muestra un muy buen desempeño de los dos algoritmos, especialmente considerando que se están utilizando 145 periodos futuros para calcular el ESFM, y como cada periodo corresponde a una semana, esto son casi tres años, donde tenemos un portafolio de seguimiento, que en promedio, tiene un error de solamente un 2% en el peor de los casos. Recordando además, que HSPO resuelve el problema en mucho menor tiempo que HiGHS. Por lo que, si bien, ambos métodos producen

resultados muy similares, HSPO lo hace de manera mucho más barata.

N	K	γ	HiGHS (ESFM)	HSPO (ESFM medio)
89	10	0.01	0.00614	0.00718
98	10	0.01	0.00544	0.00605
225	10	0.01	0.00716	0.00756
457	10	0.01	0.01376	0.01329
1318	10	0.01	0.01865	0.01864
2151	10	0.01	0.01530	0.01467

Tabla 5.4: Se muestra la comparación del ESFM obtenido por HiGHS y HSPO al resolver distintas instancias del ITP. Las columnas muestran: el número de activos del índice N , el valor de K , el valor de γ , el ESFM obtenido por HiGHS y el ESFM medio obtenidos por HSPO.

5.4. Dependencia del Tamaño del Portafolio K

En este experimento, se investiga el desempeño de los algoritmos descritos, al variar el tamaño K del portafolio de seguimiento.

Para estas instancias del problema, se consideran los siguientes parámetros:

1. Valor de portafolio inicial de $C_0 = 10^6$.
2. Portafolio inicial tal que, $w_i = (1/K)$, para $i = 1, \dots, K$, y $w_i = 0 \forall i > K$.
3. $X_i = (w_i C)/(v_{iT})$.
4. $\varepsilon_i = 0.01$ y $\delta_i = 1, \forall i$.
5. $f_i^b = f_i^s = 0.01$ y $F_i^b = F_i^s = 0, \forall i$.
6. $M_i^b = C/v_{iT}$ y $M_i^s = X_i, \forall i$.

Para la función objetivo consideramos $\beta = 1$.

En este experimento se utiliza el índice FTSE 100, de tamaño $N = 98$, variando el tamaño K del portafolio de seguimiento.

5.4.1. HiGHS

La tabla 5.5 muestra los resultados obtenidos por HiGHS, para el índice FTSE 100 y distintos valores de K . Se utilizaron los parámetros por defecto de HiGHS, con un tiempo límite de 3,600s. Las columnas de la tabla 5.5 muestran: el número de activos N del índice, el tamaño K del portafolio de seguimiento, el valor de γ , el valor de ESM, el valor de ESFM, y el tiempo de ejecución respectivamente. Nuevamente, el hecho de que HiGHS alcance el tiempo límite implica que entrega una solución subóptima.

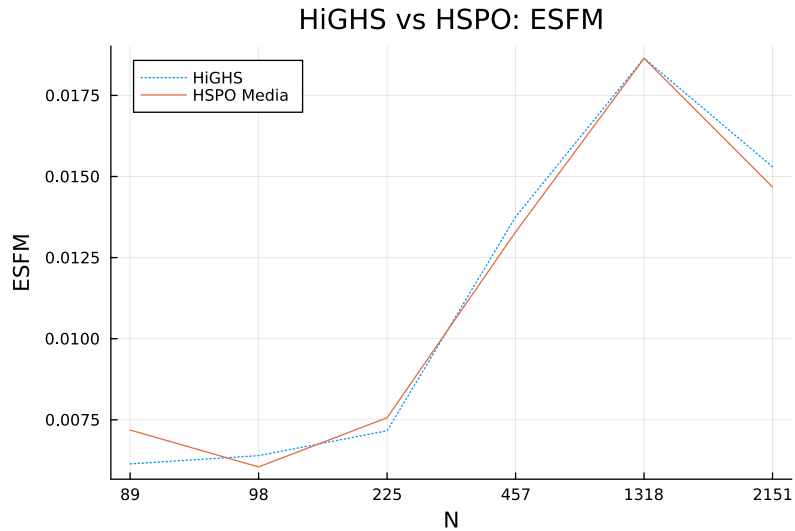


Figura 5.2: Se muestra la comparación del ESFM obtenido por HiGHS contra el ESFM obtenido por HSPO, al variar el tamaño del índice N . La línea punteada azul representa el ESFM de HiGHS. La línea sólida naranja representa el ESFM medio de HSPO.

5.4.2. HSPO

Para investigar el desempeño de HSPO cuando se varía K , se realizaron 20 ejecuciones independientes con los parámetros siguientes:

1. Tamaño de población: 1000.
2. $hmpa$: 0.5,
3. Número de iteraciones: 1,000,000.

ESM

La tabla 5.6 muestra los resultados de estas 20 ejecuciones. Las columnas muestran: el número N de activos del índice, el tamaño K del portafolio de seguimiento, el valor de γ , el valor mínimo, máximo, medio y la desviación estándar del ESM, el ESFM medio, y el tiempo de ejecución medio, respectivamente. En este caso, todos los experimentos se realizan sobre un mismo índice (FTSE 100), por lo que, el tiempo de ejecución es aproximadamente igual para cada ejecución.

HSPO obtiene resultados comparables con HiGHS pero en mucho menor tiempo. En cada instancia, el mejor resultado de HSPO es mejor que el resultado de HiGHS. La tabla 5.7 muestra la comparación de los resultados obtenidos

N.º de activos	K	γ	ESM	ESFM	Tiempo (s)
98	10	0.01	0.00426	0.00544	3600
	15	0.01	0.00329	0.00452	3600
	20	0.01	0.00235	0.00375	3600
	25	0.01	0.00202	0.00338	3600
	30	0.01	0.00150	0.00267	3600
	40	0.01	0.00094	0.00241	3600

Tabla 5.5: Se muestran los resultados obtenidos por HiGHS al resolver el ITP para el índice FTSE 100 para distintos valores de K .

N	K	γ	ESM				ESFM Media	Tiempo (s) Media
			Mín	Máx	Media	DE		
98	10	0.01	0.00415	0.00433	0.00423	0.00006	0.00605	28.0
	15	0.01	0.00299	0.00315	0.00304	0.00004	0.00497	28.1
	20	0.01	0.00214	0.00243	0.00224	0.00008	0.00370	28.2
	25	0.01	0.00183	0.00194	0.00188	0.00003	0.00336	27.9
	30	0.01	0.00149	0.00159	0.00153	0.00003	0.00300	28.2
	40	0.01	0.00097	0.00111	0.00105	0.0004	0.00264	29.1

Tabla 5.6: Se muestran los resultados obtenidos por HSPO al resolver el ITP para el índice FTSE 100 para distintos valores de K .

por HiGHS contra los obtenidos por HSPO. Las columnas de la tabla 5.7 muestran: el tamaño de índice N ; el tamaño de portafolio K ; el valor de γ ; el ESM obtenido por HiGHS; y el ESM mínimo, máximo y medio obtenidos por HSPO; respectivamente. Los resultados muestran que para $K = 15, K = 25$, el ESM máximo obtenido por HSPO es mejor que el ESM obtenido por HiGHS. Para $K = 10$ y $K = 20$, los ESM medio y mínimo de HSPO son mejores que el ESM de HiGHS solamente. Para $K = 30$, solo el ESM mínimo de HSPO es mejor que el ESM de HiGHS. El ESM mínimo de HSPO es mejor que el ESM de HiGHS para todas las instancias, excepto para $N = 40$. La figura 5.3 muestra gráficamente los resultados anteriores donde se aprecia la ventaja de HSPO sobre HiGHS. En la figura, la línea punteada azul representa el ESM de HiGHS. Las líneas sólidas representan el ESM mínimo, máximo y medio de HSPO, en naranja, verde y rosa respectivamente.

ESFM

La tabla 5.8 muestra la comparación del ESFM obtenido por HiGHS y el ESFM medio obtenido por HSPO. Observaciones similares a los casos donde se varía N se puede hacer para los casos donde se varía K . En particular, que un ESM mejor que el competidor no necesariamente implica un ESFM mejor. En el peor de los casos, el ESFM de ambos es aproximadamente 0.6%, lo que

N	K	γ	HiGHS (ESM)	HSPO (ESM)		
				Mín	Máx	Media
98	10	0.01	0.00426	0.00415	0.00433	0.00423
	15	0.01	0.00329	0.00299	0.00315	0.00304
	20	0.01	0.00235	0.00214	0.00243	0.00224
	25	0.01	0.00202	0.00183	0.00194	0.00188
	30	0.01	0.00150	0.00149	0.00159	0.00153
	40	0.01	0.00094	0.00097	0.00111	0.00105

Tabla 5.7: Se muestra la comparación de los resultados obtenidos por HSPO y HiGHS al resolver el ITP para el índice FTSE 100 para distintos valores de K .

muestra un muy buen desempeño considerando que se calcula en 145 periodos fuera de la muestra usada para la optimización, al igual que para los casos donde se varía el tamaño de índice N . Es importante destacar nuevamente, que HSPO resuelve el problema mucho más rápido que HiGHS; produciendo soluciones comparables (en algunos casos mejores y en otros peores), mucho más baratas. La figura 5.4 muestra gráficamente los datos de la tabla 5.8. La línea punteada azul representa el ESFM de HiGHS y la línea sólida naranja representa el ESFM medio de HSPO.

N	K	γ	HiGHS (ESFM)	HSPO (ESFM)
98	10	0.01	0.00544	0.00605
	15	0.01	0.00452	0.00497
	20	0.01	0.00375	0.00370
	25	0.01	0.00338	0.00336
	30	0.01	0.00267	0.00300
	40	0.01	0.00241	0.00264

Tabla 5.8: Se muestra la comparación del ESFM obtenido por HSPO y HiGHS al resolver el ITP para el índice FTSE 100 para distintos valores de K . Las columnas muestran: el número de activos del índice N , el valor de K , el valor de γ , el ESFM obtenido por HiGHS y el ESFM medio obtenidos por HSPO.

5.5. Dependencia del Límite del Costo de Transacción

En este experimento, se investiga el desempeño de los algoritmos descritos, al variar el costo total de transacción γ del portafolio de seguimiento.

Para estas instancias del problema, se consideran los siguientes parámetros:

1. Valor de portafolio inicial de $C_0 = 10^6$.

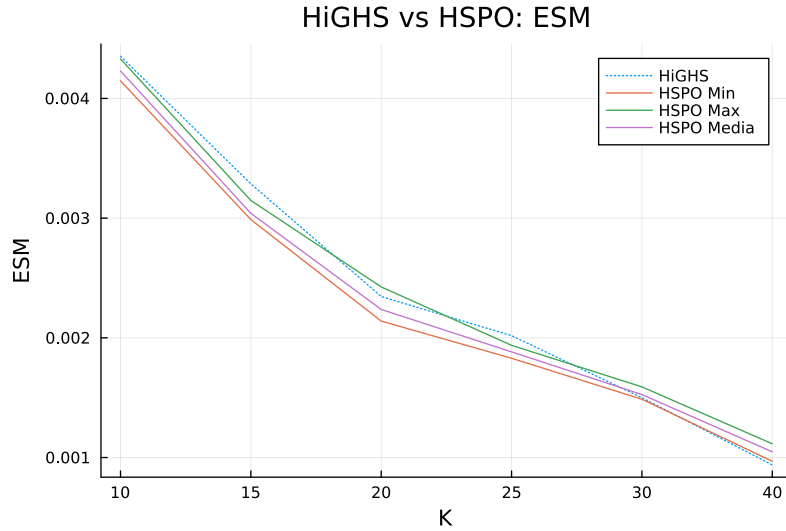


Figura 5.3: Se muestra la comparación del ESM obtenido por HiGHS contra el ESM obtenido por HSPO al variar el tamaño del portafolio de seguimiento K . La línea punteada azul representa el ESM de HiGHS. Las líneas sólidas representan el ESM mínimo, máximo y medio de HSPO; en naranja, verde y rosa respectivamente.

2. Portafolio inicial tal que, $w_i = (1/K)$, para $i = 1, \dots, K$, y $w_i = 0 \forall i > K$.
3. $X_i = (w_i C)/(v_{iT})$.
4. $\varepsilon_i = 0.01$ y $\delta_i = 1, \forall i$.
5. $f_i^b = f_i^s = 0.01$ y $F_i^b = F_i^s = 0, \forall i$.
6. $M_i^b = C/v_{iT}$ y $M_i^s = X_i, \forall i$.

Para la función objetivo consideramos $\beta = 1$.

En este experimento se utiliza el índice FTSE 100, de tamaño $N = 98$, variando el límite del costo de transacción γ del portafolio de seguimiento.

5.5.1. HiGHS

La tabla 5.9 muestra los resultados obtenidos por HiGHS, para el índice FTSE 100 y distintos valores de γ . Se utilizaron los parámetros por defecto de HiGHS, con un tiempo límite de 3,600s. Las columnas de la tabla 5.9 muestran: el número de activos N del índice, el tamaño K del portafolio de seguimiento, el valor de γ , el valor de ESM, el valor de ESFM, y el tiempo de ejecución respectivamente. Nuevamente, el hecho de que HiGHS alcance el tiempo límite implica que entrega una solución subóptima.

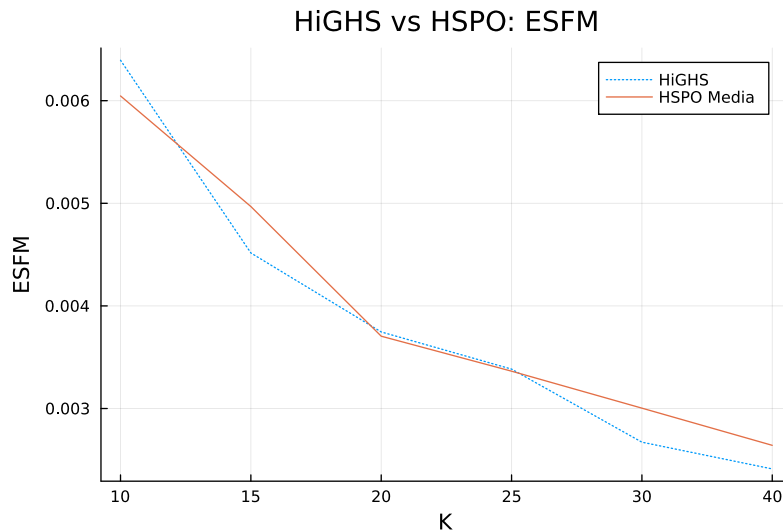


Figura 5.4: Se muestra la comparación del ESFM obtenido por HiGHS contra el ESFM obtenido por HSPO al variar el tamaño del portafolio de seguimiento K . La línea punteada azul representa el ESFM de HiGHS. La línea sólida naranja representa el ESFM medio de HSPO.

5.5.2. HSPO

Para investigar el desempeño de HSPO cuando se varía γ , se realizaron 20 ejecuciones independientes con los parámetros siguientes:

1. Tamaño de población: 1000.
2. $hmpa$: 0.5,
3. Número de iteraciones: 1,000,000.

ESM

La tabla 5.10 muestra los resultados de estas 20 ejecuciones. Las columnas muestran: el número N de activos del índice, el tamaño K del portafolio de seguimiento, el valor de γ , el valor mínimo, máximo, medio y la desviación estándar del ESM, el ESFM medio, y el tiempo de ejecución medio, respectivamente.

La tabla 5.11 muestra la comparación de los resultados obtenidos por HSPO y HiGHS al resolver el ITP para el índice FTSE 100 para distintos valores de γ . Se observa que HSPO es capaz de obtener soluciones comparables a HiGHS en menor tiempo. En todas las instancias, el mínimo obtenido por HSPO es mejor que el resultado obtenido por HiGHS. También, el ESM medio obtenido por HSPO es menor que el ESM obtenido por HiGHS en todas las instancias excepto para $\gamma = 0.0150$. El desempeño de HSPO es significativamente superior

N.º de activos	K	γ	ESM	ESFM	Tiempo (s)
98	10	0.0100	0.00426	0.00544	3600
		0.0125	0.00366	0.00636	3600
		0.0150	0.00321	0.00562	3600
		0.0175	0.00330	0.00561	3600
		0.0200	0.00377	0.00539	3600

Tabla 5.9: Se muestran los resultados obtenidos por HiGHS al resolver el ITP para el índice FTSE 100 para distintos valores de γ .

N	K	γ	ESM				ESFM Media	Tiempo (s) Media
			Mín	Máx	Media	DE		
98	10	0.0100	0.00415	0.00433	0.00423	0.00006	0.00605	28.0
		0.0125	0.00348	0.00369	0.00356	0.00007	0.00583	30.6
		0.0150	0.00319	0.00340	0.00322	0.00005	0.00572	30.7
		0.0175	0.00306	0.00332	0.00310	0.00008	0.00540	31.8
		0.0200	0.00306	0.00330	0.00310	0.00006	0.00537	31.7

Tabla 5.10: Se muestran los resultados obtenidos por HSPO al resolver el ITP para el índice FTSE 100 para distintos valores de γ .

para $\gamma = 0.200$. La figura 5.5 muestra los resultados anteriores: la línea punteada azul representa el ESM obtenido por HiGHS; las líneas sólidas representan el ESM mínimo, máximo y medio obtenidos por HSPO, en naranja, verde y rosa respectivamente.

ESFM

La tabla 5.12 muestra la comparación del ESFM obtenido por HiGHS y el ESFM medio obtenido por HSPO. Los resultados obtenidos por HSPO son comparables con los resultados de HiGHS.

5.6. Conclusión

Los experimentos demuestran que para distintas instancia de ITP, HSPO es capaz de encontrar mejores soluciones en un menor tiempo que HiGHS. En otras instancias, HSPO obtiene ligeramente peores soluciones, pero también lo hace en un menor tiempo.

Al resolver el ITP son importantes dos cantidades, el ESM y el ESFM. El ESM es el error de seguimiento del portafolio durante la optimización; mientras que el ESFM es el error de seguimiento del portafolio en los periodos que no han sido usados para su optimización, esto es, los periodos que siguen después de los datos usados en la construcción del portafolio. Es decir, durante la construcción

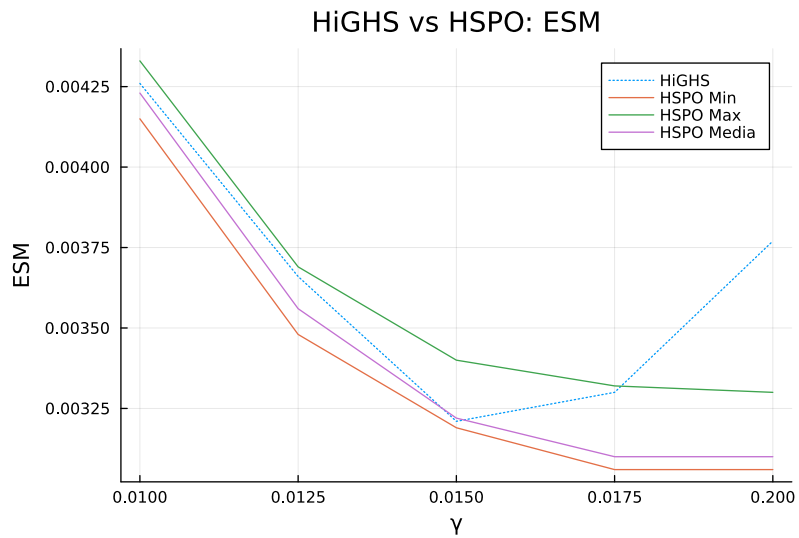


Figura 5.5: Se muestra la comparación del ESM obtenido por HiGHS contra el ESM obtenido por HSPO al variar γ . La línea punteada azul representa el ESM de HiGHS. Las líneas sólidas representan el ESM mínimo, máximo y medio de HSPO; en naranja, verde y rosa respectivamente.

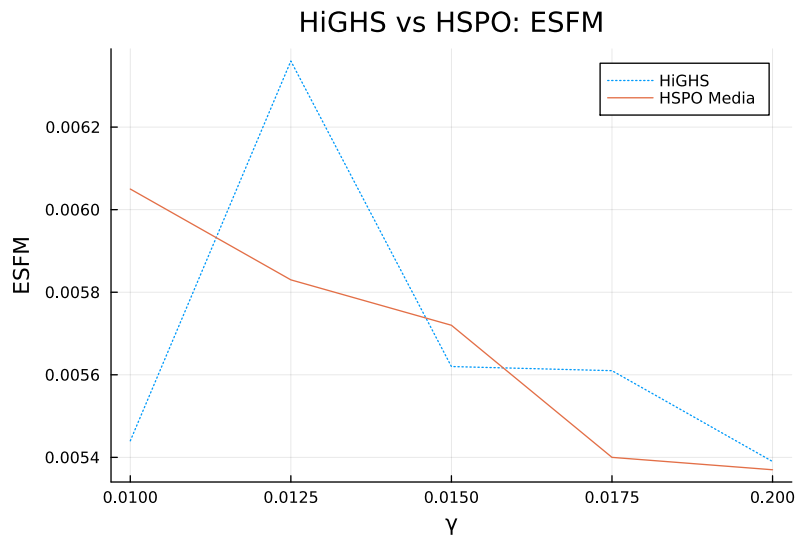


Figura 5.6: Se muestra la comparación del ESFM obtenido por HiGHS contra el ESFM obtenido por HSPO al variar γ . La línea punteada azul representa el ESFM de HiGHS. La línea sólida naranja representa el ESFM medio de HSPO.

N	K	γ	HiGHS (ESM)	HSPO (ESM)		
				Mín	Máx	Media
98	10	0.0100	0.00426	0.00415	0.00433	0.00423
		0.0125	0.00366	0.00348	0.00369	0.00356
		0.0150	0.00321	0.00319	0.00340	0.00322
		0.0175	0.00330	0.00306	0.00332	0.00310
		0.0200	0.00377	0.00306	0.00330	0.00310

Tabla 5.11: Se muestra la comparación de los resultados obtenidos por HSPO y HiGHS al resolver el ITP para el índice FTSE 100 para distintos valores de γ .

N	K	γ	HiGHS (ESFM)	HSPO (ESFM)
98	10	0.0100	0.00544	0.00605
		0.0125	0.00636	0.00583
		0.0150	0.00562	0.00572
		0.0175	0.00561	0.00540
		0.0200	0.00539	0.00537

Tabla 5.12: Se muestra la comparación del ESFM obtenido por HSPO y HiGHS al resolver el ITP para el índice FTSE 100 para distintos valores de γ .

del portafolio de seguimiento, los algoritmos tratan de optimizar el ESM; luego, el ESFM es el desempeño del portafolio de seguimiento hacia el futuro, en los datos que el algoritmo aun no ha visto.

Durante la optimización, variar el tamaño del índice N , no tiene un impacto significativo en el desempeño de HSPO, fuera de que le toma más tiempo en alcanzar el número de iteraciones máximo. Obteniendo resultados comparables (en algunas instancias, ligeramente mejores, en otras ligeramente peores) a HiGHS, en mucho menor tiempo.

Al variar el tamaño del portafolio de seguimiento K , el desempeño de HSPO es mejor que el desempeño de HiGHS en la mayoría de las instancias consideradas, excepto para $K = 40$.

Al variar el costo de transacción total γ se observa nuevamente la superioridad de HSPO, en particular para $\gamma = 0.200$ donde el desempeño de HSPO es significativamente superior.

Al analizar el ESFM, es interesante observar que, para una instancia del ITP específica, si un algoritmo obtiene un mejor ESM que el otro algoritmo, esto no necesariamente implica que ese algoritmo obtenga un mejor ESFM que su competidor. Tanto al variar el tamaño del índice N como al variar el tamaño del portafolio de seguimiento K o el costo de transacción total γ , los portafolios optimizados mediante ambos métodos tienen un desempeño similar, considerando la alta varianza del problema. En el peor de los casos, el portafolio de seguimiento tiene un error de seguimiento que no supera el 2%, lo que es impresionante, considerando que los periodos usados para calcular el ESFM abarcan

casi tres años.

En general el desempeño de HSPO es bueno, ya que es capaz de obtener soluciones de una calidad igual o mejor que HiGHS en mucho menor tiempo.

Capítulo 6

Conclusiones

El ITP es un problema de optimización entera mixta. Es posible emplear métodos clásicos para su solución. Sin embargo, al ser un problema NP-Hard, los algoritmos metaheurísticos son una alternativa atractiva.

En ese sentido, se propone un algoritmo metaheurístico basado en HS, llamado HSPO. HSPO realiza la búsqueda de las soluciones óptimas, haciendo uso de dos operadores de búsqueda (de explotación y exploración) que producen soluciones que satisfacen directamente dos restricciones problemáticas: restricción de cardinalidad y restricción de consistencia. El operador de exploración se encarga de encontrar el subconjunto óptimo de los activos del portafolio, y el operador de explotación se encarga de encontrar los pesos óptimos dado un subconjunto de activos. Estos dos operadores son aplicados de manera estocástica. Debido a las características anteriores, HSPO muestra una buena capacidad de convergencia.

Se realizaron experimentos computacionales para medir el desempeño de HSPO. Como línea base se utilizó el software de programación matemática HiGHS, que emplea el algoritmo Branch and Bound.

HiGHS no pudo encontrar la solución óptima en el tiempo límite (3,600s) en la mayoría de las instancias del ITP consideradas. Por su parte, HSPO termina cuando se cumplen las iteraciones máximas fijadas (1,000,000 en estos experimentos). El desempeño de HSPO varía de una instancia del problema a otra. No obstante, en general, HSPO tiene mejor desempeño que HiGHS obteniendo mejores soluciones en menos tiempo.

Dos cantidades merecen análisis en el ITP: el ESM y el ESFM. El ESM es el error de seguimiento durante la optimización; mientras que el ESFM es el error de seguimiento del portafolio en datos futuros.

Durante la optimización, HSPO muestra un desempeño consistente al variar el tamaño del índice N . En promedio HSPO tiene un desempeño comparable con HiGHS. En cada instancia, el ESM de la mejor solución encontrada es mejor que el ESM de la solución encontrada por HiGHS. En el caso del ESM medio, hay instancias donde HSPO obtiene resultados ligeramente mejores que HiGHS y otras donde obtiene resultados ligeramente peores.

Al variar el tamaño del portafolio de seguimiento K , HSPO supera a HiGHS excepto para $K = 40$.

Al analizar el ESFM, y no obstante la naturaleza estocástica del problema, se observa que el desempeño de HSPO es consistentemente comparable con el desempeño de HiGHS para todas las instancias consideradas. Tanto para el caso de variar el tamaño del índice, como para el caso de variar el tamaño del portafolio. Adicionalmente, es destacable que en el peor de los casos el ESFM no supere el 2%, considerando que los datos de prueba abarcan casi tres años. Lo que muestra que los portafolios optimizados cumplen con el objetivo de imitar el comportamiento del índice respectivo.

La ventaja principal de HSPO sobre HiGHS es el tiempo de ejecución, mostrando que HSPO puede encontrar mejores soluciones en menor tiempo. Sin embargo, ya que HSPO es un método estocástico, no siempre encuentra una mejor solución que HiGHS; no obstante, debido a su corto tiempo de ejecución, podemos hacer varias ejecuciones para tratar de encontrar el óptimo global.

Como trabajo futuro, resulta interesante hacer modificaciones a HSPO para obtener una mejor eficiencia y emplear otros algoritmos metaheurísticos. También, HSPO puede ser utilizado inmediatamente para la optimización de otro tipo de portafolios como el portafolio de Markowitz.

Bibliografía

- [Mar52] Harry Markowitz. «PORTFOLIO SELECTION*». En: *The Journal of Finance* 7.1 (1952), págs. 77-91. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>.
- [GKL01] ZW Geem, JH Kim y GV Loganathan. «A new heuristic optimization algorithm: Harmony search». En: *SIMULATION* 76.2 (feb. de 2001), págs. 60-68. ISSN: 0037-5497. DOI: 10.1177/003754970107600201.
- [BMC03] JE Beasley, N Meade y TJ Chang. «An evolutionary heuristic for the index tracking problem». En: *EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONAL RESEARCH* 148.3 (ago. de 2003), págs. 621-643. ISSN: 0377-2217. DOI: 10.1016/S0377-2217(02)00425-3.
- [DN04] U Derigs y NH Nickel. «On a local-search heuristic for a class of tracking error minimization problems in portfolio management». En: *ANNALS OF OPERATIONS RESEARCH* 131.1-4 (oct. de 2004), págs. 45-77. ISSN: 0254-5330. DOI: 10.1023/B:ANOR.0000039512.98833.5a.
- [Gee09] Zong Woo Geem. *Music-Inspired Harmony Search Algorithm: Theory and Applications*. Studies in Computational Intelligence. Springer, 2009. ISBN: 978-3-642-00185-7.
- [KMP09] Thiemo Krink, Stefan Mittnik y Sandra Paterlini. «Differential evolution and combinatorial search for constrained index-tracking». En: *ANNALS OF OPERATIONS RESEARCH* 172.1 (nov. de 2009), págs. 153-176. ISSN: 0254-5330. DOI: 10.1007/s10479-009-0552-1.
- [RS09] Ruben Ruiz-Torrubiano y Alberto Suarez. «A hybrid optimization approach to index tracking». En: *ANNALS OF OPERATIONS RESEARCH* 166.1 (feb. de 2009). Symposium on Applied Mathematical Programming and Modeling (APMOD 2006), Madrid, SPAIN, JUN 18-21, 2006, págs. 57-71. ISSN: 0254-5330. DOI: 10.1007/s10479-008-0404-4.
- [Fra12] Keith C. Brown Frank K. Reilly. *Investment Analysis & Portfolio Management*. CENEAGE Learning, 2012. ISBN: 978-0-538-48210-3.

- [Sco+13] Andrea Scozzari y col. «Exact and heuristic approaches for the index tracking problem with UCITS constraints». En: *ANNALS OF OPERATIONS RESEARCH* 205.1 (mayo de 2013), págs. 235-250. ISSN: 0254-5330. DOI: 10.1007/s10479-012-1207-1.
- [Arr14] Argimiro Arratia. *Computational Finance An Introductory Course with R*. Atlantis Studies in Computational Finance and Financial Engineering. Atlantis Press, 2014. ISBN: 978-94-6239-070-6.
- [MB14] H. Mezali y J. E. Beasley. «Index tracking with fixed and variable transaction costs». En: *OPTIMIZATION LETTERS* 8.1 (ene. de 2014), págs. 61-80. ISSN: 1862-4472. DOI: 10.1007/s11590-012-0534-0.
- [MML14] Seyedali Mirjalili, Seyed Mohammad Mirjalili y Andrew Lewis. «Grey Wolf Optimizer». En: *ADVANCES IN ENGINEERING SOFTWARE* 69 (mar. de 2014), págs. 46-61. ISSN: 0965-9978. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2013.12.007.
- [Yan14] Xin-She Yang. *Nature-Inspired Optimization Algorithms*. Elsevier, 2014. ISBN: 978-0-12-416743-8.
- [Aff+16] K. Affolter y col. «Invasive weed optimization for solving index tracking problems». En: *SOFT COMPUTING* 20.9, SI (sep. de 2016). 1st International Conference on Soft Computing and Machine Intelligence (ISCMI), New Delhi, INDIA, 2014, págs. 3393-3401. ISSN: 1432-7643. DOI: 10.1007/s00500-015-1799-x.
- [ST17] Oliver Strub y Norbert Trautmann. «A Genetic Algorithm for the UCITS-Constrained Index-Tracking Problem». En: *2017 IEEE CONGRESS ON EVOLUTIONARY COMPUTATION (CEC)*. IEEE Congress on Evolutionary Computation. IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), SPAIN, JUN 05-08, 2017. IEEE; IEEE Computat Intelligence Soc; Univ Pais Vasco; CEC. 2017, págs. 822-829. ISBN: 978-1-5090-4601-0.
- [Tah17] Hamdy A. Taha. *Operations Research: An Introduction*. Pearson, 2017. ISBN: 978-1-292-16554-7.
- [Ber18] Jens Vygen Bernhard Korte. *Combinatorial Optimization Theory and Algorithms*. Algorithms and Combinatorics. Springer, 2018. ISBN: 978-3-662-56039-6.
- [GGO18] Fernando Garcia, Francisco Guijarro y Javier Oliver. «Index tracking optimization with cardinality constraint: a performance comparison of genetic algorithms and tabu search heuristics». En: *NEURAL COMPUTING & APPLICATIONS* 30.8 (oct. de 2018), págs. 2625-2641. ISSN: 0941-0643. DOI: 10.1007/s00521-017-2882-2.
- [Doe+19] Jana Doering y col. «Metaheuristics for rich portfolio optimisation and risk management: Current state and future trends». En: *OPERATIONS RESEARCH PERSPECTIVES* 6 (2019). DOI: 10.1016/j.orp.2019.100121.

- [Dav21] Yinyu Ye David G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming*. International Series in Operations Research & Management Science. Springer, 2021. ISBN: 978-3-030-85450-8.
- [SSA22] Julio Cezar Soares Silva, Diogo Ferreira de Lima Silva y Adiel Teixeira de Almeida Filho. «An enhanced GRASP approach for the index tracking problem». En: *INTERNATIONAL TRANSACTIONS IN OPERATIONAL RESEARCH* (2022). ISSN: 0969-6016. DOI: 10 . 1111/itor.13163.