



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA DE PUEBLA

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

TOPOLOGÍA CATEGÓRICA UNA INTRODUCCIÓN

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA
ENRIQUE CAMPOS MORALES

DIRECTORES DE TESIS
DR. AGUSTÍN CONTRERAS CARRETO
DR. JUAN ANGOA AMADOR

PUEBLA, PUE.

JUNIO, 2016

A Cataly y José Luis

AGRADECIMIENTOS

Muchas gracias por su apoyo a todos.

GRACIAS

Introducción

La teoría de categorías nos permite describir de una manera elegante y sintética teorías matemáticas engorrosas y truculentas. En este trabajo desarrollo desde los conceptos más básicos de teoría de categorías (capítulo 1), hasta representar de manera detallada los conceptos de reflexividad y co-reflexividad en cualquier categoría en particular en \mathbf{Top} y en algunas subcategorías de \mathbf{Top} (capítulo 2). Espero que lo minucioso de este trabajo ayude a los estudiantes que quieran introducirse en la teoría de categorías a que su entrada no sea tan escabrosa y sí, más divertida que “mi primer cantada con ella”.

El principal texto como referencia es *Categorical Topology* ([5]), desarrollando tanto las demostraciones como los ejemplos que solo han sido pergeñados en este texto.

Enrique Campos Morales
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
B. Universidad Autónoma de Puebla
Verano 2016

Índice general

Introducción	i
1. PRELIMINARES	1
1.1. Conceptos categóricos	1
1.1.1. Categorías y Funtores	1
1.1.2. Monomorfismos y epimorfismos	5
1.1.3. Diagramas y Límites	16
1.1.4. Categorías completas	30
1.2. Conceptos topológicos	37
2. REFLEXIONES Y CO-REFLEXIONES	61
2.1. Subcategorías reflexivas	61
2.2. $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categorías	70
2.3. Epi-reflexividad contra bi-reflexividad en \mathcal{Top}	78
Bibliografía	99

TOPOLOGÍA CATEGÓRICA UNA INTRODUCCIÓN

Enrique Campos Morales

INVIERNO 2016

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1. Conceptos categóricos

1.1.1. Categorías y Funtores

Definición 1.1. Una *categoría* \mathcal{A} consiste de dos clases \mathcal{O} y \mathcal{M} , dos funciones dom y cod de \mathcal{M} en \mathcal{O} y una función \circ de $D = \{(f, g) \mid f, g \in \mathcal{M} \text{ y } \text{cod } f = \text{dom } g\}$ en \mathcal{M} que satisfacen las siguientes condiciones:

- (1) Si (f, g) pertenece a \mathcal{M} , entonces $\text{dom}(g \circ f) = \text{dom } f$ y $\text{cod}(g \circ f) = \text{cod } g$. Suele denotarse a $\circ(f, g)$ por $g \circ f$ y se le llama la **composición de f con g** .
- (2) Si (f, g) y (g, h) pertenecen a D , entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- (3) Para cada X en \mathcal{O} , existe un elemento e en \mathcal{M} , tal que $\text{dom } e = \text{cod } e = X$, $f \circ e = f$, si $\text{dom } f = X$ y $e \circ g = g$, si $\text{cod } g = X$.
- (4) Para cualesquiera X e Y en \mathcal{O} , la clase $[X, Y]_{\mathcal{A}} = \{f \mid f \in \mathcal{M}, \text{dom } f = X \text{ y } \text{cod } f = Y\}$ es un conjunto. A veces se escribe $[X, Y]$ en lugar de $[X, Y]_{\mathcal{A}}$.

Los elementos de \mathcal{O} se llaman **objetos de \mathcal{A}** (o \mathcal{A} -objetos) y los elementos de \mathcal{M} se llaman **morfismos de \mathcal{A}** (o \mathcal{A} -morfismos). La clase \mathcal{O} se denotará también, por $\text{Ob}(\mathcal{A})$ y la clase de \mathcal{M} por $\text{Mor}(\mathcal{A})$. Si es necesario, usaremos la notación $\text{dom}_{\mathcal{A}}$, $\text{cod}_{\mathcal{A}}$, $\circ_{\mathcal{A}}$, $D_{\mathcal{A}}$ y $[\ , \]_{\mathcal{A}}$. Para un objeto X de \mathcal{A} el morfismo e dado en (3) se puede demostrar que es único y se llama **\mathcal{A} -identidad** de X y se denotará por 1_X . Para un morfismo f , $\text{dom } f$ se llama el **dominio de f** y $\text{cod } f$ se llama **codominio de f** . La proposición “ $f \in [X, Y]_{\mathcal{A}}$ ” se denota por $f : X \rightarrow Y$.

Definición 1.2. La *categoría vacía* es aquella en la que $\text{Ob}(\mathcal{A}) = \emptyset$, $\text{Mor}(\mathcal{A}) = \emptyset$, $\text{dom}_{\mathcal{A}} f = \text{cod}_{\mathcal{A}} f = \emptyset$ y $\circ_{\mathcal{A}} = \emptyset$.

Una categoría se llama **pequeña** si $\text{Mor}(\mathcal{A})$ es un conjunto (o equivalentemente $\text{Ob}(\mathcal{A})$ es un conjunto).

Una categoría se llama **discreta** si todo morfismo en \mathcal{A} es una identidad de algún objeto en \mathcal{A} , es decir, cuando $\text{Mor}(\mathcal{A}) = \{1_A \mid A \in \text{Ob}(\mathcal{A})\}$.

Una categoría se llama **concreta** si sus objetos son conjuntos y sus morfismos son una subclase de la clase de funciones entre conjuntos.

Ejemplo 1.3. (1) Si una categoría \mathcal{A} tiene un sólo objeto X , $\text{Mor}(\mathcal{A})$ es un conjunto que tiene estructura de monoide, esto es, $\text{Mor}(\mathcal{A}) = [X, X]$, $([X, X], \circ_{\mathcal{A}}, 1_X)$ es un monoide. Inversamente un monoide con unidad puede considerarse como una categoría con un sólo objeto; sea $(X, *, e)$ un monoide. Defínanse $\text{Ob}(\mathcal{A}) = \{X\}$, $\text{Mor}(\mathcal{A}) = \{x \mid x \in X\}$ y para x y x' en $\text{Mor}(\mathcal{A})$ $x \circ x' = x * x'$.

(2) **Conj**: La categoría de conjuntos. $\text{Ob}(\text{Conj})$ es la clase de todos los conjuntos, $\text{Mor}(\text{Conj})$ es la clase de todas las funciones entre conjuntos y las funciones dom , cod y \circ son las usuales. Es concreta.

(3) **Grp**: La categoría de grupos. $\text{Ob}(\text{Grp})$ es la clase de todos los grupos, $\text{Mor}(\text{Grp})$ es la clase de todos los homomorfismos entre grupos y las funciones dom , cod y \circ son las usuales. Es concreta.

(4) **Mod**: La categoría de módulos. $\text{Ob}(\text{Mod})$ es la clase de todos los módulos, $\text{Mor}(\text{Mod})$ es la clase de todos los homomorfismos entre módulos y las funciones dom , cod y \circ son las usuales. Es concreta.

(5) **Top**: La categoría de espacios topológicos. $\text{Ob}(\text{Top})$ es la clase de todos los espacios topológicos, $\text{Mor}(\text{Top})$ es la clase de todas las funciones continuas entre espacios topológicos y las funciones dom , cod y \circ son las usuales. Es concreta.

(6) **pTop**: La categoría de espacios topológicos punteados. $\text{Ob}(\text{pTop})$ es la clase de todas las parejas de la forma (X, x_0) , donde X es un espacio topológico y x_0 es un punto en X llamados puntos base, $\text{Mor}(\text{pTop})$, si $(X, x_0), (Y, y_0) \in \text{Ob}(\text{pTop})$, entonces $[(X, x_0), (Y, y_0)]_{\text{pTop}} := \{f \in [XY]_{\text{Top}} \mid f(x_0) = y_0\}$.

(7) **Productos de categorías**. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} categorías. Entonces la categoría producto $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ de \mathcal{A} y \mathcal{B} consiste de $\text{Ob}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \text{Ob}(\mathcal{A}) \times \text{Ob}(\mathcal{B})$, $\text{Mor}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \text{Mor}(\mathcal{A}) \times \text{Mor}(\mathcal{B})$, $\text{dom} = \text{dom}_{\mathcal{A}} \times \text{dom}_{\mathcal{B}}$, $\text{cod} = \text{cod}_{\mathcal{A}} \times \text{cod}_{\mathcal{B}}$ y \circ se define por $(h, k) \circ (f, g) = (h \circ_{\mathcal{A}} f, k \circ_{\mathcal{B}} g)$ para (f, g) y $(h, k) \in \text{Mor}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, con $(f, h) \in D_{\mathcal{A}}$ y $(g, k) \in D_{\mathcal{B}}$.

Definición 1.4. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} categorías, \mathcal{B} es una **subcategoría** de \mathcal{A} si satisface las siguientes condiciones:

- (1) Existe una inclusión $i : \text{Ob}(\mathcal{B}) \longrightarrow \text{Ob}(\mathcal{A})$.
- (2) Existe una inclusión $j : \text{Mor}(\mathcal{B}) \longrightarrow \text{Mor}(\mathcal{A})$.
- (3) $i \bullet \text{dom}_{\mathcal{B}} = \text{dom}_{\mathcal{A}} \bullet j$, $i \bullet \text{cod}_{\mathcal{B}} = \text{cod}_{\mathcal{A}} \bullet j$ y $j \bullet \circ_{\mathcal{B}} = \circ_{\mathcal{A}} \bullet k$. Donde \bullet es la composición de funciones entre clases y k es la función de $D_{\mathcal{B}}$ en $D_{\mathcal{A}}$ definida por $k(f, g) = (j(f), j(g))$.
- (4) Para cada X en $\text{Ob}(\mathcal{B})$, $j(1_X) = 1_{i(X)}$

Una subcategoría \mathcal{B} de una categoría \mathcal{A} se llama **plena** si, para todo X, Y en $\text{Ob}(\mathcal{B})$, $j([X, Y]_{\mathcal{B}}) = [X, Y]_{\mathcal{A}}$.

- Ejemplo 1.5.** (1) La categoría de grupos abelianos, denotada por \mathcal{Ab} es una subcategoría plena de \mathcal{Grp} cuya clases de objetos es la todos los grupos abelianos.
- (2) La categoría de los espacios T_i , denotada por \mathcal{Top}_i , es la subcategoría plena de \mathcal{Top} cuya clase de objetos es la de todos los espacios T_i para $i = 0, 1, 2, 3, 3,5, 4$.
- (3) **Intersección de categorías.** Sea \mathcal{A} una categoría, Λ una clase y \mathcal{A}_{λ} una subcategoría de \mathcal{A} para cada $\lambda \in \Lambda$: Entonces podemos definir la intersección $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_{\lambda}$ de la clase $\{\mathcal{A}_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda\}$ de subcategorías de \mathcal{A} , tal que $\text{Ob}(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_{\lambda}) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \text{Ob}(\mathcal{A}_{\lambda})$ y $\text{Mor}(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_{\lambda}) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \text{Mor}(\mathcal{A}_{\lambda})$.

Definición 1.6. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} categorías. \mathcal{D} es la **categoría cociente** de \mathcal{C} si satisface las siguientes condiciones:

- (1) $\text{Ob}(\mathcal{D}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$.
- (2) Existe una función sobreyectiva $m : \text{Mor}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Mor}(\mathcal{D})$.
- (3) $\text{dom}_{\mathcal{D}} \bullet m = \text{dom}_{\mathcal{C}}$, $\text{cod}_{\mathcal{D}} \bullet m = \text{cod}_{\mathcal{C}}$ y $m \bullet \circ_{\mathcal{C}} = \circ_{\mathcal{D}} \bullet n$. Donde n es una función de $D_{\mathcal{C}}$ en $D_{\mathcal{D}}$ definida por $n(f, g) = (m(f), m(g))$.

La categoría de homotopía de los espacios topológicos, \mathfrak{hTop} es la categoría cociente de \mathcal{Top} , con $\text{Ob}(\mathfrak{hTop}) = \text{Ob}(\mathcal{Top})$ y $\text{Mor}(\mathfrak{hTop})$ es la clase cociente de $\text{Mor}(\mathcal{Top})$ definida por la relación de equivalencia de “homotopía”.

Definición 1.7. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} categorías. \mathcal{B} es la **categoría dual** (u **opuesta**) de \mathcal{A} si satisface las siguientes condiciones:

- (1) $\text{Ob}(\mathcal{B}) = \text{Ob}(\mathcal{A})$.
- (2) $\text{Mor}(\mathcal{B}) = \text{Mor}(\mathcal{A})$.
- (3) Para la identidad $i : \text{Mor}(\mathcal{B}) \longrightarrow \text{Mor}(\mathcal{B})$, $\text{dom}_{\mathcal{B}} = \text{cod}_{\mathcal{A}} \bullet i$ y $\text{cod}_{\mathcal{B}} = \text{dom}_{\mathcal{A}} \bullet i$.
- (4) Para la función $j : D_{\mathcal{B}} \longrightarrow D_{\mathcal{A}}$ definida por $j(f, g) = (i(g), i(f))$, $i \bullet \circ_{\mathcal{B}} = \circ_{\mathcal{A}} \bullet j$.

Para cualquier categoría \mathcal{A} , la categoría dual \mathcal{B} de \mathcal{A} se puede construir con las condiciones anteriores y la denotaremos por \mathcal{A}^{OP} . Nótese que $(\mathcal{A}^{OP})^{OP} = \mathcal{A}$.

Definición 1.8. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} categorías. Un **functor** F de \mathcal{A} en \mathcal{B} es una función F de $\text{Mor}(\mathcal{A})$ en $\text{Mor}(\mathcal{B})$ que satisface las siguientes condiciones:

- (1) Si $\text{cod}_{\mathcal{A}} f = \text{dom}_{\mathcal{A}} g$, entonces $\text{cod}_{\mathcal{B}} F(f) = \text{dom}_{\mathcal{B}} F(g)$.
- (2) $F \bullet \circ_{\mathcal{A}} = \circ_{\mathcal{B}} \bullet F'$, donde F' es una función de $D_{\mathcal{A}}$ en $D_{\mathcal{B}}$ definida por $F'(f, g) = (F(f), F(g))$.
- (3) Si e es una \mathcal{A} -identidad de X en $\text{Ob}(\mathcal{A})$, entonces $F(e)$ es una \mathcal{B} -identidad de $Y = \text{dom}_{\mathcal{B}} F(e)$.

Un functor F de \mathcal{A} en \mathcal{B} se donotará por $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, \mathcal{A} y \mathcal{B} se llamarán un **dominio** y un **codominio** de F respectivamente.

Para cualquier X en $\text{Ob}(\mathcal{A})$, $\text{dom}_{\mathcal{B}} F(1_X)$ se denota por $F(X)$. Entonces tenemos una función F de $\text{Ob}(\mathcal{A})$ en $\text{Ob}(\mathcal{B})$. Un functor puede definirse como un par de funciones $F : \text{Ob}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{B})$ y $F : \text{Mor}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{B})$ que satisface las siguientes condiciones:

- (1) Para $f : X \rightarrow Y$ en $\text{Mor}(\mathcal{A})$, $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ en $\text{Mor}(\mathcal{B})$.
- (2) Para $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ en $\text{Mor}(\mathcal{A})$, $F(g \circ_{\mathcal{A}} f) = F(g) \circ_{\mathcal{B}} F(f)$ en $\text{Mor}(\mathcal{B})$.
- (3) $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

Para dos funtores $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$, podemos definir un functor $(G \circ F) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ por la función $G \bullet F : \text{Mor}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{C})$, el functor $G \circ F$ se llama la **composición** de F y G .

Si \mathcal{B} es una subcategoría de \mathcal{A} con las inclusiones $i : \text{Ob}(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{A})$ y $j : \text{Mor}(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{A})$ y j satisface las condiciones (1), (2) y (3) de la Definición 1.8. Entonces tenemos un functor $j : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, llamado **functor inclusión**.

Si $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ el functor inclusión $j : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ se llama **identidad** y se denota por $1_{\mathcal{A}}$.

Ejemplo 1.9. Sean $(X, \tau), (Y, \sigma) \in \text{Ob}(\text{Top})$, $f \in [(X, \tau)(Y, \sigma)]_{\text{Top}}$ y $f : X \rightarrow Y$ la función tal que para cada $x \in X$, $|f|(x) = f(x)$ Entonces $F : \text{Mor}(\text{Top}) \rightarrow \text{Mor}(\text{Conj})$ definido por $F(f) = |f|$ induce un functor $F : \text{Top} \rightarrow \text{Conj}$, llamado el **functor que olvida**.

Definición 1.10. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} categorías. Un **functor contravariante** $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ es una función F de $\text{Mor}(\mathcal{A})$ en $\text{Mor}(\mathcal{B})$ que satisface las siguientes condiciones:

- (1) Si $\text{cod}_{\mathcal{A}} f = \text{dom}_{\mathcal{A}} g$, entonces $\text{dom}_{\mathcal{B}} F(f) = \text{cod}_{\mathcal{B}} F(g)$.
- (2) $F \bullet \circ_{\mathcal{A}} = \circ_{\mathcal{B}} \bullet F''$, donde F'' es una función de $D_{\mathcal{A}}$ en $D_{\mathcal{B}}$ definida por $F''(f, g) = (F(g), F(f))$.
- (3) Si e es una \mathcal{A} -identidad de X en $\text{Ob}(\mathcal{A})$, then $F(e)$ es una \mathcal{B} -identidad de $Y = \text{dom}_{\mathcal{B}} F(e)$.

Si $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ son funtores, entonces la composición $G \bullet F$ de las funciones $F : \text{Mor}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{B})$ y $G : \text{Mor}(\mathcal{B}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{C})$, induce un funtor $(G \circ F) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$. Cuando F es un funtor y G es un funtor contravariante, tenemos un funtor contravariante $G \circ F$.

Si \mathcal{A}^{OP} es la categoría dual de \mathcal{A} , una función identidad $i : \text{Mor}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{A}^{OP})$ induce un funtor contravariante $i : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{OP}$. Para cualquier funtor contravariante $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, tenemos un funtor $F' : \mathcal{A}^{OP} \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $F = F' \circ i$.

Ejemplo 1.11. Sea \mathcal{A} una categoría arbitraria, $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ y $g \in [Y, Z]_{\mathcal{A}}$. Para $f \in [X, Y]_{\mathcal{A}}$, sea $F_X(g)(f) = g \circ_{\mathcal{A}} f : X \rightarrow Z$. Entonces tenemos una función $F_X(g) : [X, Y]_{\mathcal{A}} \rightarrow [X, Z]_{\mathcal{A}}$, que es un morfismo en **Conj**. Así obtenemos un funtor $F_X : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Conj}$. Si definimos una función $G^X(g) : [Z, X]_{\mathcal{A}} \rightarrow [Y, X]_{\mathcal{A}}$ por $G^X(g)(h) = h \circ_{\mathcal{A}} g : Y \rightarrow X$, obtenemos un funtor contravariante $G^X : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Conj}$.

1.1.2. Monomorfismos y epimorfismos

Definición 1.12. Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ de una categoría \mathcal{A} es un **isomorfismo** en \mathcal{A} (o un **\mathcal{A} -isomorfismo**) si existe un \mathcal{A} -morfismo $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$.

$f : X \rightarrow Y$ es una **sección** en \mathcal{A} si existe un \mathcal{A} -morfismo $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = 1_X$.

$f : X \rightarrow Y$ es una **retracción** en \mathcal{A} si existe un \mathcal{A} -morfismo $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g = 1_Y$.

Si $f : X \rightarrow Y$ es un isomorfismo, un morfismo $g : Y \rightarrow X$ que satisface $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$ es único. Por tanto g se llama el inverso de f y se denota por f^{-1} . Un \mathcal{A} -morfismo f es sección y retracción si, y sólo si f es un \mathcal{A} -isomorfismo.

Un objeto X de \mathcal{A} es **\mathcal{A} -isomorfo** con un \mathcal{A} -objeto Y , denotado por $X \approx Y$, si existe un \mathcal{A} -isomorfismo $f : X \rightarrow Y$. La relación “ \mathcal{A} -isomorfismo” es una relación de equivalencia en la clase de los $\text{Ob}(\mathcal{A})$.

Definición 1.13. Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ de \mathcal{A} es un **monomorfismo** en \mathcal{A} si, para cualesquiera morfismos $u, v : Z \longrightarrow X$ tal que $f \circ u = f \circ v$, implica que $u = v$.

Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ de \mathcal{A} es un **epimorfismo** en \mathcal{A} si, para cualesquiera morfismos $u, v : Y \longrightarrow Z$ tal que $u \circ f = v \circ f$, implica que $u = v$.

Proposición 1.14. (1) En cualquier categoría \mathcal{A} si $f : X \longrightarrow Y$ es una sección, entonces es un monomorfismo.

(2) En cualquier categoría \mathcal{A} si $f : X \longrightarrow Y$ es una retracción, entonces es un epimorfismo.

Demostración.

(1) Si $f : X \longrightarrow Y$ es una sección en \mathcal{A} , existe un \mathcal{A} -morfismo $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f = 1_X$. Sean $u, v : Z \longrightarrow X$ morfismos en \mathcal{A} tales que $f \circ u = f \circ v$, entonces $g \circ (f \circ u) = g \circ (f \circ v)$; asociando tenemos que $(g \circ f) \circ u = (g \circ f) \circ v$, lo que implica $1_X \circ u = 1_X \circ v$, así $u = v$. Por tanto f es un monomorfismo.

(2) Si $f : X \longrightarrow Y$ es una retracción en \mathcal{A} , existe un \mathcal{A} -morfismo $g : Y \longrightarrow X$ tal que $f \circ g = 1_Y$. Sean u y v \mathcal{A} -morfismos tales que $u \circ f = v \circ f$. Entonces $(u \circ f) \circ g = (v \circ f) \circ g$, es decir, $u = u \circ 1_Y = v \circ 1_Y = v$. Por lo tanto f es un epimorfismo.

□

Corolario 1.15. (1) Si $f : X \longrightarrow Y$ es un epimorfismo y una sección en \mathcal{A} , entonces es un isomorfismo en \mathcal{A} .

(2) Si $f : X \longrightarrow Y$ es un monomorfismo y una retracción en \mathcal{A} , entonces es un isomorfismo en \mathcal{A} .

Proposición 1.16. Supongamos que $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ y $h : X \longrightarrow Z$ son morfismos en una categoría \mathcal{A} tal que $h = g \circ f$.

(1) Si f y g son monomorfismos (respect. secciones) en \mathcal{A} , entonces h es un monomorfismo (respect. sección) en \mathcal{A} .

(2) Si f y g son epimorfismos (respect. retracciones) en \mathcal{A} , entonces h es un epimorfismo (respect. retracción) en \mathcal{A} .

(3) Si h es un monomorfismo (respect. sección) en \mathcal{A} , entonces f es un monomorfismo (respect. sección) en \mathcal{A} .

(4) Si h es un epimorfismo en (respect. retracción) \mathcal{A} , entonces g es un epimorfismo (respect. retracción) en \mathcal{A} .

Demostración.

- (1) Supóngase que f y g son monomorfismos en \mathcal{A} . Sean $u, v : W \rightarrow X$ morfismos en \mathcal{A} tales que $h \circ u = h \circ v$. Como $h \circ u = (g \circ f) \circ u$ y $h \circ v = (g \circ f) \circ v$, entonces $g \circ (f \circ u) = g \circ (f \circ v)$. Puesto que g es un monomorfismo $f \circ u = f \circ v$ y dado que f es también un monomorfismo $u = v$. Por tanto h es un monomorfismo.
- (2) Similar a (1).
- (3) supóngase que h es un monomorfismo en \mathcal{A} . Sean $u, v : W \rightarrow X$ morfismos tales que $f \circ u = f \circ v$, entonces $g \circ (f \circ u) = g \circ (f \circ v)$, entonces $h \circ u = (g \circ f) \circ u = (g \circ f) \circ v = h \circ v$. Puesto que h un monomorfismo $u = v$. Por tanto f es un monomorfismo.
- (4) Similar a (3).

□

Proposición 1.17. *En cualquier categoría concreta \mathcal{A} si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo inyectivo, entonces es un monomorfismo.*

Demostración. Supóngase que $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo inyectivo. Sean $u, v : Z \rightarrow X$ morfismos en \mathcal{A} tales que $f \circ u = f \circ v$. Afirmamos que $u = v$; en efecto si z en Z es tal que $u(z) \neq v(z)$, entonces $(f \circ u)(z) = f(u(z)) \neq f(v(z)) = (f \circ v)(z)$, ya que f es inyectivo, lo que contradice el hecho de que $f \circ u = f \circ v$. Por tanto f es un monomorfismo. □

Proposición 1.18. *En cualquier categoría concreta \mathcal{A} si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo sobreyectivo, entonces es un epimorfismo.*

Demostración. Supóngase que $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo sobreyectivo. Sean $u, v : Z \rightarrow X$ morfismos en \mathcal{A} tales que $u \circ f = v \circ f$. Sea y en Y , existe x en X tal que $y = f(x)$, así que $u(y) = u(f(x)) = v(f(x)) = v(y)$ para cada y en Y , luego $u = v$. Por tanto f es un epimorfismo. □

Definición 1.19. *Un morfismo en \mathcal{A} es un **bimorfismo**, si es un monomorfismo y un epimorfismo en \mathcal{A} .*

En cualquier categoría un isomorfismo es un bimorfismo. Pero el inverso no se cumple en general. Por ejemplo, en \mathbf{Top} una condensación (una función biyectiva y continua) no necesariamente es homeomorfismo.

Definición 1.20. *Una categoría \mathcal{A} es **balanceada**, si cada bimorfismo en \mathcal{A} es un isomorfismo en \mathcal{A} .*

Ejemplo 1.21. *Las categorías \mathbf{Conj} y \mathbf{Mod} son balanceadas los bimorfismos son los morfismos que son funciones biyectivas. \mathbf{Top} no es balanceada, como ya hemos dicho.*

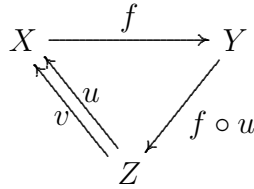
Proposición 1.22. Para las categorías \mathbf{Conj} , \mathbf{Grp} y \mathbf{Ab} ,

(1) Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ es un monomorfismo si, y sólo si f es una función inyectiva.

(2) Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ es un epimorfismo si, y sólo si f es sobreyectivo.

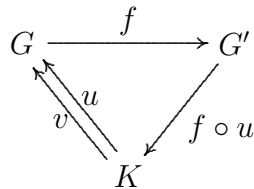
Demostración. En ambos casos sólo demostraremos la necesidad, la suficiencia se sigue de las Proposiciones 1.17 y 1.18. Para (1) se demostrará en cada caso que si f no es inyectiva, entonces f no es un monomorfismo. Sólo haremos los casos para \mathbf{Conj} y \mathbf{Grp} . Y para (2) se demostrará en cada caso que si f no es sobreyectivo, entonces f no es un epimorfismo.

(1) Supóngase que $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo en \mathbf{Conj} tal que $f(x_1) = f(x_2)$ y $x_1 \neq x_2$. Sea Z en $\text{Ob}(\mathbf{Conj})$ y sean $u, v : Z \rightarrow X$ funciones definidas por $u(z) = x_1$ y $v(z) = x_2$ para toda z en Z .



Tenemos que $f(u(z)) = f(x_1) = f(x_2) = f(v(z))$ implica que $f \circ u = f \circ v$ y $u \neq v$. Por tanto f no es un monomorfismo.

Puesto que $f : G \rightarrow G'$ en \mathbf{Grp} no es inyectivo, entonces $K := \text{Ker } f \neq \{1\}$ el cual es un $\text{Ob}(\mathbf{Grp})$. Sea $u : K \rightarrow G$ la inclusión y sea $v : K \rightarrow G$ definida por $v(k) = 1$ para toda k en K .



Sea k en K , $f(u(k)) = f(k) = 1' = f(1) = f(v(k))$, así $f \circ u = f \circ v$ y $u \neq v$. Por tanto f no es un monomorfismo.

(2) Supóngase que $f : X \rightarrow Y$ es un \mathbf{Conj} -morfismo que no es sobreyectivo, existe y_0 en Y tal que y_0 no pertenece a $f(X)$. Sea $Z = \{a, b\}$ un \mathbf{Conj} -objeto y defínanse \mathbf{Conj} -morfismos $u : Y \rightarrow Z$ por $u(y) = a$ para toda y en Y y

$$v(y) = \begin{cases} a & \text{si } y \in f(X) \\ b & \text{si } y \notin f(X) \end{cases}$$

Veamos que $u \circ f = v \circ f$. Sea x en X , se tiene que $(v \circ f)(x) = v(f(x)) = a = u(f(x)) = (u \circ f)(x)$. Así $u \circ f = v \circ f$ y $u \neq v$. Por tanto f no es un epimorfismo.

Supóngase que $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo en \mathcal{Grp} que no es sobreyectivo. Entonces $f(X)$ es un subgrupo propio de Y . Sea $S := \{yf(X) \mid y \in Y\} \cup \{P\}$ con $P \notin \{yf(X) \mid y \in Y\}$ y sea Z el conjunto de todas las funciones biyectivas de S a S . Para α y β en Z , defínase un producto $\alpha\beta$ por la composición $\alpha \circ \beta$, entonces Z es un grupo con este producto. Para y en Y defínanse elementos $\alpha_0, r(y), s(y)$ en Z como sigue:

$$\begin{aligned} \alpha_0(P) &= f(X) \\ \alpha_0(f(X)) &= P, \\ \alpha_0(y'f(X)) &= y'f(X) \text{ para } y' \notin f(X), \\ r(y)(P) &= P, \\ r(y)(y'f(X)) &= yy'f(X) \text{ para } y' \in Y \\ s(y) &= \alpha_0 r(y) \alpha_0^{-1} \end{aligned}$$

Nótese que $s(y)(P) = \alpha_0 r(y) \alpha_0^{-1}(P) = \alpha_0(yf(X))$, de donde se desprenden dos casos

$$s(y)(P) = \begin{cases} yf(X) & \text{si } y \notin f(X) \\ P & \text{si } y \in f(X) \end{cases}$$

Por otro lado $s(y)(y'f(X)) = \alpha_0 r(y) \alpha_0^{-1}(y'f(X)) = \alpha_0(yy'f(X))$, se tienen tres casos

$$s(y)(y'f(X)) = \begin{cases} yy'f(X) & \text{si } y' \notin f(X), yy' \notin f(X) \\ P & \text{si } y' \notin f(X), yy' \in f(X) \\ f(X) & \text{si } y' \in f(X) \end{cases}$$

Por último $s(y)(f(X)) = f(X)$ para todo y en Y .

Si $r, s : Y \rightarrow Z$ se definen por $y \xrightarrow{r} r(y)$ y $y \xrightarrow{s} s(y)$ para cada y en Y , veamos que r y s son homomorfismos de grupos. Sean y_1, y_2 en Y , demostraremos que $r(y_1 y_2)(p) = r(y_1) \circ r(y_2)(p)$ y $s(y_1 y_2)(p) = s(y_1) \circ s(y_2)(p)$, para toda p en S .

Si $p = P$, se tiene que:

$$\begin{aligned} r(y_1 y_2)(P) &= P \\ r(y_1) \circ r(y_2)(P) &= r(y_1)(r(y_2)(P)) = r(y_1)(P) = P \end{aligned}$$

Si $p = y' f(X)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} r(y_1 y_2)(y' f(X)) &= y_1 y_2 y' f(X) \\ r(y_1) \circ r(y_2)(y' f(X)) &= r(y_1)(r(y_2)(y' f(X))) = r(y_1)(y_2 y' f(X)) = y_1 y_2 y' f(X) \end{aligned}$$

Por lo tanto $r(y_1 y_2)(p) = r(y_1) \circ r(y_2)(p)$.

Ahora analizaremos s .

Si $p = P$, se tiene que:

$$s(y_1) \circ s(y_2)(P) = \begin{cases} s(y_1)(y_2 f(X)) & \text{si } y_2 \notin f(X) \\ s(y_1)(P) & \text{si } y_2 \in f(X) \end{cases}$$

$$s(y_1)(y_2 f(X)) = \begin{cases} y_1 y_2 f(X) & \text{si } y_2 \notin f(X), y_1 y_2 \notin f(X) \\ P & \text{si } y_2 \notin f(X), y_1 y_2 \in f(X) \\ f(X) & \text{si } y_2 \in f(X) \end{cases}$$

$$s(y_1)(P) = \begin{cases} y_1 f(X) & \text{si } y_2 \in f(X), y_1 \notin f(X) \\ P & \text{si } y_2 \in f(X), y_1 \in f(X) \end{cases}$$

$$s(y_1 y_2)(P) = \begin{cases} y_1 y_2 f(X) & \text{si } y_1 y_2 \notin f(X) \\ s(y_1)(P) & \text{si } y_1 y_2 \in f(X) \end{cases}$$

Por lo tanto $s(y_1 y_2)(p) = s(y_1) \circ s(y_2)(p)$.

Si $p = y' f(X)$, se tiene que:

$$s(y_1) \circ s(y_2)(y' f(X)) = \begin{cases} s(y_1)(y_2 y' f(X)) & \text{si } y' \notin f(X), y_2 y' \notin f(X) \\ s(y_1)(P) & \text{si } y' \notin f(X), y_2 y' \in f(X) \\ s(y_1)(f(X)) & \text{si } y' \in f(X) \end{cases}$$

Para $s(y_1)(y_2y'f(X))$ si $y' \notin f(X)$ y $y_2y' \notin f(X)$, se tiene que

$$s(y_1)(y_2y'f(X)) = \begin{cases} y_1(y_2y')f(X) & \text{si } y' \notin f(X), y_2y' \notin f(X), y_1(y_2y') \notin f(X) \\ P & \text{si } y' \notin f(X), y_2y' \notin f(X), y_1(y_2y') \in f(X) \end{cases}$$

Para $s(y_1)(P)$ si $y' \notin f(X)$ y $y_2y' \in f(X)$, se tiene que

$$s(y_1)(P) = \begin{cases} y_1f(X) & \text{si } y' \notin f(X), y_2y' \in f(X), y_1 \notin f(X) \\ P & \text{si } y' \notin f(X), y_2y' \in f(X), y_1 \in f(X) \end{cases}$$

Por último $s(y_1)(f(X)) = f(X)$.

$$s(y_1y_2)(y'f(X)) = \begin{cases} (y_1y_2)y'f(X) & \text{si } y' \notin f(X), y_1y_2 \notin f(X) \\ P & \text{si } y' \notin f(X), y_1y_2 \in f(X) \\ f(X) & \text{si } y' \in f(X) \end{cases}$$

Por lo tanto $s(y_1y_2)(p) = s(y_1) \circ s(y_2)(p)$.

Veamos que $r \circ f = s \circ f$

$$r(f(x))(P) = P$$

$$s(f(x))(P) = \alpha_0(f(x)f(X)) = P$$

$$r(f(x))(yf(X)) = \begin{cases} f(x)yf(X) & \text{si } y \notin f(X) \\ f(X) & \text{si } y \in f(X) \end{cases}$$

$$s(f(x))(yf(X)) = \alpha_0(f(x)yf(X)) = \begin{cases} f(x)yf(X) & \text{si } y \notin f(X) \\ f(X) & \text{si } y \in f(X) \end{cases}$$

Entonces tenemos que $r \circ f = s \circ f$ y $r \neq s$. Por tanto f no es un epimorfismo.

Supóngase que $f : G_1 \longrightarrow G_2$ es un $\mathcal{A}\mathbf{b}$ -morfismo tal que $f(G_1)$ es un subgrupo propio de G_2 . Como G_2 es un $\mathcal{A}\mathbf{b}$ -objeto, entonces $f(G_1)$ es un subgrupo normal de G_2 , podemos considerar el grupo cociente $G_2/f(G_1)$. Puesto que $f(G_1) \neq G_2$, $G_2/f(G_1)$ es distinto del grupo trivial. Considérense los $\mathcal{A}\mathbf{b}$ -morfismos $\pi : G_2 \longrightarrow G_2/f(G_1)$ la proyección y $c : G_2 \longrightarrow G_2/f(G_1)$ el homomorfismo cero. Sea g en G_1 , se tiene que $(\pi \circ f)(g) = \pi(f(g)) = f(g)f(G_1) = f(G) = c(f(g)) = (c \circ f)(g)$. Así $\pi \circ f = c \circ f$ y $\pi \neq c$. Por tanto f no es un epimorfismo.

□

Para una función continua e inyectiva $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos, sea Z el subespacio de Y con conjunto subyacente $f(X)$. Si tenemos una función continua sobreyectiva $g : X \rightarrow Z$ y un encaje $h : Z \rightarrow Y$ tales que $f = h \circ g$; entonces f es un encaje si, y sólo si g es un homeomorfismo. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.23. *Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ de una categoría \mathcal{A} es un **monomorfismo extremal** en \mathcal{A} , si siempre que un epimorfismo $g : X \rightarrow Z$ y un morfismo $h : Z \rightarrow Y$ son tales que $f = h \circ g$, entonces g es un isomorfismo.*

*Un epimorfismo $f : X \rightarrow Y$ de una categoría \mathcal{A} es un **epimorfismo extremal** en \mathcal{A} , si siempre que un morfismo $g : X \rightarrow Z$ y un monomorfismo $h : Z \rightarrow Y$ son tales que $f = h \circ g$, entonces h es un isomorfismo.*

En categorías balanceadas, todo monomorfismo es un monomorfismo extremal y todo epimorfismo es un epimorfismo extremal.

Para un enunciado S que involucra objetos y morfismos, podemos construir un enunciado S^{OP} invirtiendo todas las flechas de los morfismos en S . Si un enunciado S define una propiedad P para objetos y morfismos, entonces S^{OP} también define una propiedad para objetos y morfismos, que se denota por P^{OP} y se llama **propiedad dual** de P . La propiedad dual de P se nombra $co-P$, por ejemplo las secciones se llamarán co-retracciones. Si un enunciado S se cumple para una categoría \mathcal{A} , entonces S^{OP} se cumple para la categoría \mathcal{A}^{OP} . En general si un enunciado S se cumple para toda las categorías, entonces S^{OP} se cumple también para toda las categorías. Este hecho se llama **principio de dualidad para categorías**.

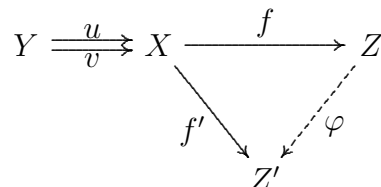
Definición 1.24. *Un **igualador**, en una categoría \mathcal{A} , de un par de morfismos $u, v : X \rightarrow Y$, es una pareja (Z, f) (o f más brevemente) que consiste de un objeto Z y un morfismo $f : Z \rightarrow X$ que satisface las siguientes condiciones:*

- (1) $u \circ f = v \circ f$.
- (2) Para cualquier pareja (Z', f') de un objeto Z' y morfismo $f' : Z' \rightarrow X$ con $u \circ f' = v \circ f'$, existe un único morfismo $\varphi : Z' \rightarrow Z$ tal que $f' = f \circ \varphi$.

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{f} & X \xrightarrow[u]{v} Y \\
 & \swarrow \varphi & \nearrow f' \\
 & Z' &
 \end{array}$$

*Una categoría \mathcal{A} tiene **igualadores** siempre que todo par de \mathcal{A} -morfismos con dominio y codominio común tienen un igualador.*

Dual: co-igualador; tiene co-igualadores

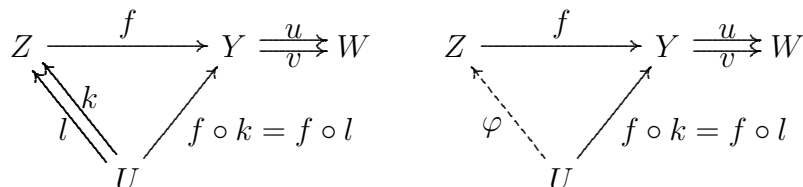


Proposición 1.25. *Si (Z, f) es un igualador de $u, v : Y \rightarrow W$, entonces $f : X \rightarrow Y$ es un monomorfismo extremal.*

Demostración. Supóngase que (Z, f) es un igualador de $u, v : Y \rightarrow W$. Veamos que f es un monomorfismo, sean $l, k : U \rightarrow Z$, monomorfismos tales que $f \circ l = f \circ k$, entonces

$$u \circ (f \circ k) = u \circ (f \circ l) = (u \circ f) \circ l = (v \circ f) \circ l = v \circ (f \circ l) = v \circ (f \circ k).$$

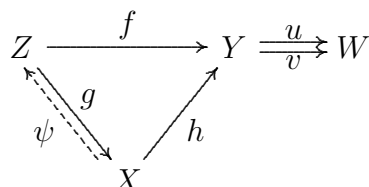
Por la propiedad universal de igualador existe un único morfismo $\varphi : U \rightarrow Z$ tal que $f \circ \varphi = f \circ k$. Por la unicidad de φ , se obtiene que $\varphi = k$; pero puesto que $f \circ k = f \circ l$, entonces $\varphi = l$; así $l = k$. Por tanto f es un monomorfismo.



Para demostrar que f es extremal, supóngase que $f = h \circ g$ donde $g : Z \rightarrow X$ es un epimorfismo y $h : X \rightarrow Y$ un morfismo, entonces

$$(u \circ h) \circ g = u \circ (h \circ g) = u \circ f = v \circ f = v \circ (h \circ g) = (v \circ h) \circ g.$$

Y puesto que g es un epimorfismo, $u \circ h = v \circ h$. Por la propiedad universal de igualador existe un único morfismo $\psi : X \rightarrow Z$ tal que $f \circ \psi = h$. Ahora $f \circ (\psi \circ g) = (f \circ \psi) \circ g = h \circ g = f = f \circ 1_X$, y como f es un monomorfismo, $\psi \circ g = 1_X$. De modo que g es una sección y un epimorfismo, por tanto es un isomorfismo (ver Corolario 1.15).



□

Definición 1.26. Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ de una categoría \mathcal{A} es un **monomorfismo regular**, si existen morfismos u y v tales que (X, f) es un igualador de u y v .

Dual: **epimorfismo regular**.

Proposición 1.27. Para un morfismo f en cualquier categoría las siguientes implicaciones se cumplen:

- (1) f es isomorfismo $\implies f$ es sección $\implies f$ es monomorfismo regular $\implies f$ es monomorfismo extremal $\implies f$ es monomorfismo.
- (2) f es isomorfismo $\implies f$ es retracción $\implies f$ es epimorfismo regular $\implies f$ es epimorfismo extremal $\implies f$ es epimorfismo.

Demostración.

- (1) Que un isomorfismo f , sea una sección se sigue inmediatamente de la Definición 1.12.

Demostraremos que sección implica monomorfismo regular. Supóngase que $f : X \rightarrow Y$ es una sección; entonces existe un morfismo $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = 1_X$. Afirmamos que f es un igualador de 1_Y y $f \circ g$. En efecto, nótese que $1_Y \circ f = f \circ 1_X = f \circ (g \circ f) = (f \circ g) \circ f$. Supóngase que existe un morfismo f' tal que $1_Y \circ f' = (f \circ g) \circ f'$. Tenemos que $f' = (f \circ g) \circ f' = f \circ (g \circ f')$; si existiera otro morfismo h tal que $f \circ h = f'$, puesto que f es un monomorfismo (por la Proposición 1.14), entonces $h = g \circ f'$, es decir, la factorización es única. Por tanto f es un monomorfismo regular.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{1_Y} & Y \\
 & & & \searrow^{f \circ g} & \\
 & & Z & \xrightarrow{f'} & Y \\
 & \swarrow^{g \circ f'} & & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

Ahora veamos que monomorfismo regular implica monomorfismo extremal. Supongamos que $f : X \rightarrow Y$ es un monomorfismo regular, existen morfismos u y v tales que (X, f) es un igualador de u y v . Por la proposición 1.25, f es un monomorfismo extremal.

- (2) Se sigue de la dualización de (1).

□

Proposición 1.28. Sea \mathcal{A} una categoría y $f : X \rightarrow Y$ un \mathcal{A} -morfismo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) f es un isomorfismo.

(2) f es un epimorfismo y un monomorfismo extremal.

(3) f es un monomorfismo y un epimorfismo extremal.

Demostración. (1) implica (2) Supóngase que f es un isomorfismo en \mathcal{A} ; por la Proposición 1.14 f es una sección y un epimorfismo. Por la Proposición 1.27 se cumple (2).

(2) implica (1) Como f es un epimorfismo y un monomorfismo extremal, se sigue inmediatamente de $f = 1_Y \circ f$ que f es un isomorfismo.

(2) si, y sólo si (3) f es un isomorfismo en $\mathcal{A} \Leftrightarrow f$ es un isomorfismo en $\mathcal{A}^{OP} \Leftrightarrow f$ es un epimorfismo y un monomorfismo extremal en $\mathcal{A}^{OP} \Leftrightarrow f$ es un monomorfismo y un epimorfismo extremal en \mathcal{A} . \square

Corolario 1.29. En cualquier categoría las siguientes afirmaciones para un morfismo f son equivalentes:

(1) f es un isomorfismo.

(2) f es epimorfismo y sección.

(3) f es epimorfismo y monomorfismo extremal.

(4) f es monomorfismo y retracción.

(5) f es monomorfismo y epimorfismo extremal.

Demostración. La demostración se sigue inmediatamente de la Definición 1.12 y las Proposiciones 1.14, 1.15, 1.27 y 1.28. \square

Definición 1.30. Para un objeto X de una categoría \mathcal{A} , un **subobjeto** de X o un **monomorfismo en X** es un \mathcal{A} -monomorfismo $f : Y \rightarrow X$.

Sean $M(X)$ la clase de todos los monomorfismos en X y $f : Y \rightarrow X$, $g : Z \rightarrow X$ en $M(X)$, diremos que f es **isomorfo** a g , si existe un isomorfismo $\varphi : Y \rightarrow Z$ tal que $f = g \circ \varphi$.

La relación de “isomorfismo” es una relación de equivalencia en $M(X)$. (Algunas veces a cada clase de equivalencia se le llama subobjeto de X). Una subclase R de $M(X)$ es un **conjunto de representantes de monomorfismos en X** si es un conjunto y para cualquier f en $M(X)$ existe g en R tal que g esomorfo a f .

Conceptos duales: **objeto cociente o epimorfismo en X** y **conjunto de representantes de epimorfismos en X** .

Definición 1.31. Una categoría \mathcal{A} se dice **bien potenciada** o **localmente pequeña** si cada objeto X de \mathcal{A} tiene un conjunto de representantes de monomorfismos en X . Si para cada objeto X de \mathcal{A} la clase de monomorfismos en X , que son extremales tiene un conjunto de representantes de monomorfismos extremales en X , entonces \mathcal{A} es **(Mono ex)-bien potenciada**.

Dual: co-bien potenciada, (Epi ex)-bien potenciada.

1.1.3. Diagramas y Límites

Definición 1.32. Un funtor $D : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A}$ de una categoría pequeña \mathcal{K} (ver Definición 1.2) a una categoría \mathcal{A} , se llama **diagrama** D en \mathcal{A} sobre \mathcal{K} .

Ejemplo 1.33. Sea \mathcal{K}_2 una categoría con $Ob(\mathcal{K}_2) = \{1, 2\}$ y $Mor(\mathcal{K}_2) = \{1_1, 1_2, a : 1 \rightarrow 2\}$. Para un morfismo $f : X \rightarrow Y$ en una categoría \mathcal{A} , definimos un funtor $D : \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{A}$ por $D(1) = X$ y $D(2) = Y$ y $D(a) = f$, entonces tenemos un diagrama $D : \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{A}$, que se expresa por:

$$X \xrightarrow{f} Y$$

A veces cuando no es necesario especificar los objetos y morfismos de una categoría pequeña, \mathcal{K} se llama un **diagrama esqueleto** de D . Expresaremos una categoría pequeña con pocos morfismos mostrando todos sus objetos y todos sus morfismos con excepción de las identidades, por ejemplo, la categoría \mathcal{K}_2 se expresa por:

$$1 \xrightarrow{a} 2$$

El diagrama esqueleto de \mathcal{K}_2 es:

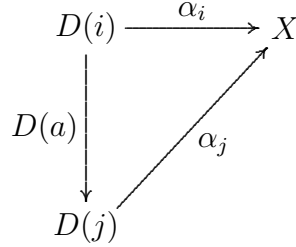
$$\bullet \longrightarrow \bullet \tag{1.1}$$

Es decir, la imagen de un funtor de \mathcal{K}_2 a \mathcal{A} tiene la forma del diagrama (1.1).

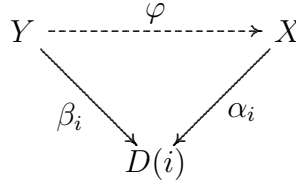
Definición 1.34. Sea $D : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A}$ un diagrama en \mathcal{A} sobre \mathcal{K} . Una pareja $(X, \{\alpha_i \mid i \in Ob(\mathcal{K})\})$ formada por un \mathcal{A} -objeto X y una familia de \mathcal{A} -morfismos $\alpha_i : X \rightarrow D(i)$ para i en $Ob(\mathcal{K})$ se llama una **fuerza natural** para D , si para cualquier \mathcal{K} -morfismo $a : i \rightarrow j$ se tiene que $D(a) \circ \alpha_i = \alpha_j$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha_i} & D(i) \\ & \searrow \alpha_j & \downarrow D(a) \\ & & D(j) \end{array}$$

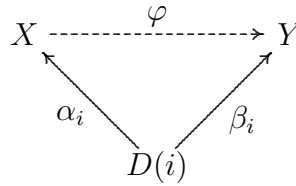
Dual: Una pareja $(\{\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\}, X)$ formada por un \mathcal{A} -objeto X y una familia de \mathcal{A} -morfismos $\alpha_i : D(i) \rightarrow X$ para i en $\text{Ob}(\mathcal{K})$ se llama un **sumidero natural** para D , si para cualquier \mathcal{K} -morfismo $a : i \rightarrow j$ se tiene que $\alpha_i = \alpha_j \circ D(a)$.



Definición 1.35. Para un diagrama D en \mathcal{A} sobre \mathcal{K} , una fuente natural $(X, \{\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ para D se llama un **límite** para D , si cumple lo siguiente: Para cualquier fuente natural $(Y, \{\beta_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ para D , existe un único morfismo $\varphi : Y \rightarrow X$ en \mathcal{A} tal que $\beta_i = \alpha_i \circ \varphi$ para cualquier i en $\text{Ob}(\mathcal{K})$. Llamaremos a φ **morfismo conector** de la fuente natural $(Y, \{\beta_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ a el límite $(X, \{\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$.



Dual: co-límite para un diagrama D .



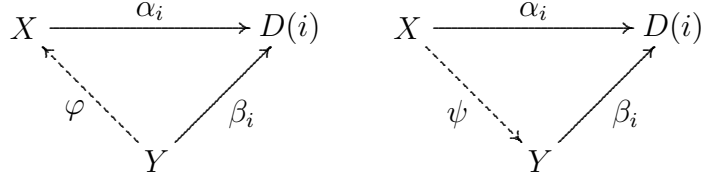
Con el siguiente ejemplo se muestra la causa de este nombre:

Ejemplo 1.36. Para un conjunto dirigido (Λ, \leq) , construiremos una categoría. Para cada $\lambda \in \Lambda$, consideremos un objeto λ y para cada λ, μ en Λ tales que $\lambda \leq \mu$, consideremos un morfismo $p_{\lambda\mu} : \mu \rightarrow \lambda$. La clase de estos objetos y estos morfismos forman una categoría pequeña que denotaremos por Λ .

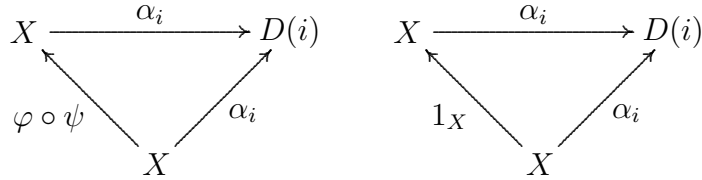
Sea \mathcal{A} la categoría **Conj**, **Grp** o **Top**. Un functor $D : \Lambda \rightarrow \mathcal{A}$ define un sistema inverso $(X_\lambda, f_{\lambda\mu})$ en \mathcal{A} por $X_\lambda = D(\lambda)$ y $f_{\lambda\mu} = D(p_{\lambda\mu})$. Entonces $(X, \{f_\lambda \mid \lambda \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ es un límite para el diagrama D sí, y sólo si $(X, \{f_\lambda \mid \lambda \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ es un límite inverso del sistema inverso $(X_\lambda, f_{\lambda\mu})$ en \mathcal{A} (ver Definición 1.74).

Proposición 1.37. Para un diagrama D en una categoría \mathcal{A} sobre \mathcal{K} , un límite $(X, \{\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ es único salvo isomorfismo.

Demostración. Supongamos que $(X, \{\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ y $(Y, \{\beta_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ son límites para D . Entonces existen únicos morfismos $\varphi : Y \rightarrow X$ y $\psi : X \rightarrow Y$ tales que $\beta_i = \alpha_i \circ \varphi$ y $\alpha_i = \beta_i \circ \psi$ para cada i en $\text{Ob}(\mathcal{K})$.

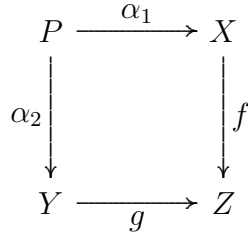


De aquí que $\alpha_i \circ (\varphi \circ \psi) = (\alpha_i \circ \varphi) \circ \psi = \beta_i \circ \psi = \alpha_i$ para cada i en $\text{Ob}(\mathcal{K})$ y esto implica que $\varphi \circ \psi$ es un morfismo conector de $(X, \{\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ al límite $(X, \{\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$.

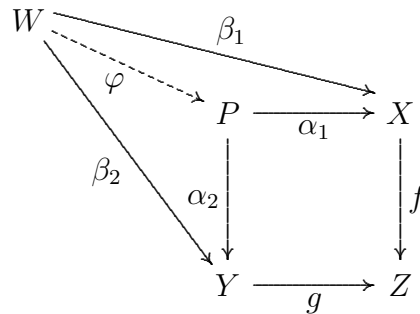


Puesto que $\alpha_i \circ 1_X = \alpha_i$ para cada i en $\text{Ob}(\mathcal{K})$, por la unicidad del morfismo conector, tenemos que $\varphi \circ \psi = 1_X$. Similarmente, $\psi \circ \varphi = 1_Y$, y esto significa que $(X, \{\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ y $(Y, \{\beta_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ son fuentes naturales isomorfas. \square

Definición 1.38. Dados dos \mathcal{A} -morfismos $f : X \rightarrow Z$ y $g : Y \rightarrow Z$, un diagrama conmutativo



se llama un **jalador de** (f, g) si para \mathcal{A} -morfismos $\beta_1 : W \rightarrow X$ y $\beta_2 : W \rightarrow Y$ tales que $f \circ \beta_1 = g \circ \beta_2$ existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi : W \rightarrow P$ tal que el siguiente diagrama



conmuta.

Una categoría \mathcal{A} **tiene jaladores** siempre que para cada (f, g) con $\text{cod } f = \text{cod } g$ de \mathcal{A} -morfismos tienen estos un jalador.

Dual: **empujador; tiene empujadores.**

Definición 1.39. Un \mathcal{A} -**producto** de una familia $\{X_i \mid i \in I\}$ de \mathcal{A} -objetos es una pareja $(\prod_{i \in I} X_i, \{\pi_i \mid i \in I\})$, que satisface las siguientes condiciones:

- (1) $\prod_{i \in I} X_i$ es un \mathcal{A} -objeto;
- (2) para cada j en I $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ es un \mathcal{A} -morfismo llamado **proyección**;
- (3) para cada pareja $(X, \{f_i \mid i \in I\})$ donde X es un \mathcal{A} -objeto y para cada j en I , $f_j : X \rightarrow X_j$ es un \mathcal{A} -morfismo, existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi : X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ tal que para cada i en I el triángulo

$$\begin{array}{ccc}
 X & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & \prod_{i \in I} X_i \\
 & \searrow f_j & \swarrow \pi_j \\
 & & X_j
 \end{array}$$

conmuta.

Una categoría \mathcal{A} **tiene productos** siempre que para todo conjunto I , cada familia de \mathcal{A} -objetos indexados por I tienen un \mathcal{A} -producto.

Dual: **co-producto; tiene co-productos.**

Proposición 1.40. Si $(\prod X_i, \{\pi_i \mid i \in I\})$ y $(\prod Y_i, \{\pi'_i \mid i \in I\})$ son productos de las familias $\{X_i \mid i \in I\}$ y $\{Y_i \mid i \in I\}$ respectivamente; y si para cada $i \in I$ existe un morfismo $f_i : X_i \rightarrow Y_i$, entonces existe un único morfismo $\prod f_i : \prod X_i \rightarrow \prod Y_i$ tal que $\pi'_j \circ \prod f_i = f_j \circ \pi_j$.

$$\begin{array}{ccc}
 \prod X_i & \xrightarrow{\prod f_i} & \prod Y_i \\
 \pi_i \downarrow & & \downarrow \pi'_i \\
 X_i & \xrightarrow{f_i} & Y_i
 \end{array}$$

Definición 1.41. Si $\{h_i \mid i \in I\}$ es una familia no vacía de \mathcal{A} -morfismos contenidos en $[A, B]_{\mathcal{A}}$, entonces (E, e) es un **igualador múltiple en \mathcal{A} de $\{h_i \mid i \in I\}$** si,

- (1) $e : E \rightarrow A$ es un \mathcal{A} -morfismo;
- (2) para cada i, j en I $h_i \circ e = h_j \circ e$;

- (3) si $e' : E' \rightarrow A$ es un \mathcal{A} -morfismo tal que para cada i, j en I $h_i \circ e' = h_j \circ e'$, existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi : E' \rightarrow E$ tal que para cada i en I el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 E' & \xrightarrow{\varphi} & E \\
 e' \searrow & & \nearrow e \\
 & A & \xrightarrow[h_j]{h_i} B
 \end{array}$$

conmuta.

Una categoría \mathcal{A} **tiene igualadores múltiples** siempre que toda familia no vacía de \mathcal{A} -morfismos que tienen dominio y codominio común indexada por un conjunto tienen un igualador múltiple.

Dual: **co-igualador múltiple; tiene co-igualadores múltiples.**

Definición 1.42. Una pareja (f, S) formada por un \mathcal{A} -morfismo $f : X \rightarrow Y$ y una fuente $S = \{f_i : X \rightarrow X_i \mid i \in I\}$ se llama un **jalador múltiple en \mathcal{A} de un sumidero** $\{g_i : X_i \rightarrow Y\}_{i \in I}$ si

- (1) $f = g_i \circ f_i$ para cada i en I ;
- (2) para cada pareja (f', S') con un \mathcal{A} -morfismo $f' : X' \rightarrow Y$ y una fuente $S' = \{f'_i : X' \rightarrow X_i \mid i \in I\}$ para la cual $f' = g_i \circ f'_i$ para cada i en I , existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi : X' \rightarrow X$ tal que para cada i en I el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 X' & & & & \\
 & \searrow f'_i & & & \\
 & & X & \xrightarrow{f_i} & X_i \\
 & \searrow \varphi & & & \\
 & & \downarrow f & & \nearrow g_i \\
 & & Y & &
 \end{array}$$

conmuta.

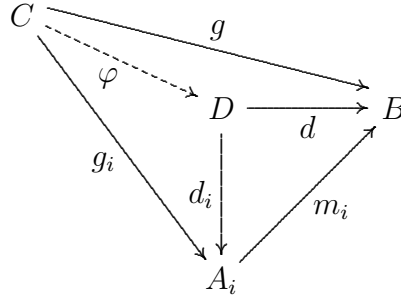
Una categoría \mathcal{A} **tiene jaladores múltiples** siempre que todo sumidero de \mathcal{A} -morfismos indexado por un conjunto tiene un límite.

Dual: **empujador múltiple; tiene empujadores múltiples.**

Definición 1.43. Para un objeto X de una categoría \mathcal{A} , un monomorfismo $f : Y \rightarrow X$ es un **subobjeto** de X . Dual: **objeto cociente**.

Definición 1.44. Si B es un \mathcal{A} -objeto y $\{(A_i, m_i) \mid i \in I\}$ es una familia de subobjetos de B , entonces la pareja (D, d) se llama una **una intersección en \mathcal{A} de $\{(A_i, m_i) \mid i \in I\}$** si,

- (1) $d : D \longrightarrow B$ es un \mathcal{A} -morfismo;
- (2) para cada i en I existe un \mathcal{A} -morfismo $d_i : D \longrightarrow A_i$ con la propiedad de que $m_i \circ d_i = d$;
- (3) si $g : C \longrightarrow B$ y para cada i en I , $g_i : C \longrightarrow A_i$ son tales que $m_i \circ g_i = g$, entonces existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi : C \longrightarrow D$ tal que para cada i en I el siguiente diagrama



conmuta.

Una categoría \mathcal{A} **tiene intersecciones** siempre que toda familia indexada por un conjunto de subobjetos de cada \mathcal{A} -objeto tienen una intersección.

Dual: co-intersección; tiene co-intersecciones.

Definición 1.45. Un \mathcal{A} -objeto X se llama un **objeto terminal para \mathcal{A}** si para cualquier \mathcal{A} -objeto B , $[B, X]_{\mathcal{A}}$ tiene un sólo elemento. Dual: **objeto inicial**.

Proposición 1.46. Para una categoría \mathcal{A} cada una de las siguientes nociones pueden ser definidas como el límite para un diagrama D en \mathcal{A} sobre un diagrama esqueleto \mathcal{K} conveniente: igualador, jalador, producto, objeto terminal, intersección, jalador múltiple e igualador múltiple.

Demostración.

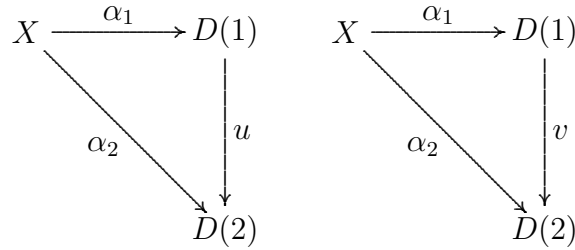
- (1) Igualador: Sea \mathcal{K} una categoría pequeña con $\text{Ob}(\mathcal{K}) = \{1, 2\}$, $\text{Mor}(\mathcal{A}) = \{1_1, 1_2, a, b : 1 \longrightarrow 2\}$ cuyo diagrama se expresa por

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2 .$$

Para u y v en $\text{Mor}(\mathcal{A})$, defínase un diagrama $D : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ por $D(a) = u$ y $D(b) = v$. Entonces $(X, \{\alpha_1, \alpha_2\})$ es un límite para D sí, y sólo si (X, α_1) es

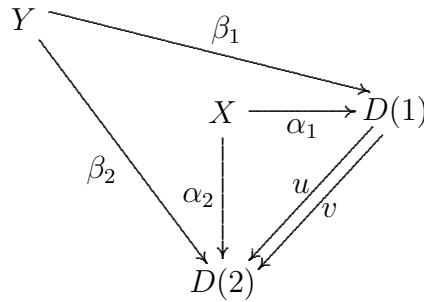
un igualador de (u, v) y $\alpha_2 = u \circ \alpha_1 = v \circ \alpha_1$.

Necesidad, súpongase que $(X, \{\alpha_1, \alpha_2\})$ es un límite para D . Veamos que (X, α_1) es un igualador de (u, v) . Nótese que $\alpha_1 : X \rightarrow D(1)$, además $u \circ \alpha_1 = v \circ \alpha_1$, ya que $(X, \{\alpha_1, \alpha_2\})$ es una fuente natural para D , entonces los triángulos

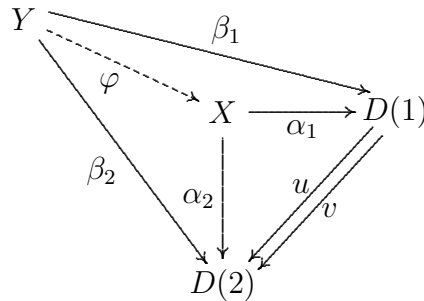


conmutan; o sea $u \circ \alpha_1 = \alpha_2 = v \circ \alpha_1$.

Sea $\beta_1 : Y \rightarrow D(1)$, además $u \circ \beta_1 = v \circ \beta_1$, si $\beta_2 := u \circ \beta_1 (= v \circ \beta_1)$, se tiene que $(Y, \{\beta_1, \beta_2\})$ es una fuente natural para D pues el siguiente diagrama



conmuta. Existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi : Y \rightarrow X$ tal que $\alpha_1 \circ \varphi = \beta_1$.



Por tanto (X, α_1) es un igualador de (u, v) .

Suficiencia, supóngase que (X, α_1) es un igualador de (u, v) . Entonces $\alpha_1 : X \rightarrow D(1)$, como $u \circ \alpha_1 = v \circ \alpha_1$ sea $\alpha_2 := u \circ \alpha_1$ (*). Veamos que $(X, \{\alpha_1, \alpha_2\})$ es un límite para D . Por (*) los triángulos

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha_1} & D(1) \\ & \searrow \alpha_2 & \downarrow u \\ & & D(2) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha_1} & D(1) \\ & \searrow \alpha_2 & \downarrow v \\ & & D(2) \end{array}$$

conmutan. Por lo que $(X, \{\alpha_1, \alpha_2\})$ es una fuente natural para D . Si $(Y, \{\beta_1, \beta_2\})$ es otra fuente natural para D , entonces los triángulos

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\beta_1} & D(1) \\ & \searrow \beta_2 & \downarrow u \\ & & D(2) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\beta_1} & D(1) \\ & \searrow \beta_2 & \downarrow v \\ & & D(2) \end{array}$$

conmutan. Luego $u \circ \beta_1 = \beta_2 = v \circ \beta_1$. Puesto que (X, α_1) es un igualador de (u, v) existe un único morfismo $\varphi : Y \rightarrow X$ tal que $\alpha_1 \circ \varphi = \beta_1$. Veamos que $\alpha_2 \circ \varphi = \beta_2$. En efecto, $\alpha_2 \circ \varphi = (u \circ \alpha_1) \circ \varphi = u \circ (\alpha_1 \circ \varphi) = u \circ \beta_1 = \beta_2$. Por tanto $(X, \{\alpha_1, \alpha_2\})$ es un límite para D .

(2) Jalador: El cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_1} & D(1) \\ p_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ D(2) & \xrightarrow{f_2} & D(0) \end{array}$$

en \mathcal{A} es un jalador de (f_1, f_2) sí, y sólo si la fuente $(P, \{p_i\}_{i \in \{0,1,2\}})$ es un límite del diagrama $D : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A}$, si \mathcal{K} es una categoría pequeña con $\text{Ob}(\mathcal{K}) = \{0, 1, 2\}$ y $\text{Mor}(\mathcal{K}) = \{1_0, 1_1, 1_2, m : 1 \rightarrow 0, n : 2 \rightarrow 0\}$, $D(m) = f_1$, $D(n) = f_2$ y además $p_0 = f_1 \circ p_1 = f_2 \circ p_2$; cuyo esqueleto es

$$\begin{array}{ccc} 2 & \xrightarrow{n} & 0 \\ & \searrow m & \\ 1 & \xrightarrow{m} & 0 \end{array} .$$

Como el cuadrado conmutativo es un jalador, si para cualquier otro cuadrado conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} P' & \xrightarrow{p'_1} & D(1) \\ p'_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ D(2) & \xrightarrow{f_2} & D(0) \end{array}$$

existe un único morfismo $\varphi : P' \rightarrow P$ tal que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} P' & & & & \\ & \searrow^{p'_1} & & & \\ & & P & \xrightarrow{p_1} & D(1) \\ & \searrow^{\varphi} & \downarrow p_2 & & \downarrow f_1 \\ & & D(2) & \xrightarrow{f_2} & D(0) \end{array}$$

conmuta, lo cual coincide con la definición de límite para D .

- (3) Producto: Sea I en $\text{Ob}(\mathcal{C}\text{onj})$ y sea \mathcal{K} una categoría discreta (ver Definición 1.2) con $\text{Ob}(\mathcal{K}) = I$. Para una familia $\{X_i \mid i \in I\}$ de \mathcal{A} -objetos defínase un diagrama $D : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A}$ por $D(i) = X_i$ para cada i en I . Entonces $(X, \{\alpha_i \mid i \in I\})$ es un límite para D sí, y sólo si es un producto de la familia $\{D(i) \mid i \in I\}$.

Necesidad, supóngase que $(X, \{\alpha_i \mid i \in I\})$ es un límite para D . Como \mathcal{K} es discreta los únicos \mathcal{K} -morfismos son las identidades. Sea $\beta_i : Y \rightarrow D(i)$ un \mathcal{A} -morfismo para cada i en $\text{Ob}(\mathcal{A})$. Puesto que \mathcal{K} es discreta se tiene que $\beta_i = D(a) \circ \beta_i$ para todo a en $\text{Mor}(\mathcal{K})$, entonces $(Y, \{\beta_i \mid i \in I\})$ es una fuente natural para D , por la propiedad universal del límite existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ tal que $\alpha_i \circ \varphi = \beta_i$. Por lo tanto $(X, \{\alpha_i \mid i \in I\})$ es un producto de la familia $\{D(i) \mid i \in I\}$.

Suficiencia, supóngase que $(X, \{\alpha_i \mid i \in I\})$ es un producto de $\{D(i) \mid i \in I\}$. Veamos que $(X, \{\alpha_i \mid i \in I\})$ es una fuente natural para D . Sea $1_i : i \rightarrow i$ en $\text{Mor}(\mathcal{K})$, se tiene que $\alpha_i = D(1_i) \circ \alpha_i$. Ahora sea $(Y, \{\beta_i \mid i \in I\})$ una fuente natural para D , por la propiedad universal del producto existe un único \mathcal{K} -morfismo $\varphi : Y \rightarrow X$ tal que $\alpha_i \circ \varphi = \beta_i$. Por lo tanto $(X, \{\alpha_i \mid i \in I\})$ es un límite para D .

- (4) Objeto terminal: Sea \mathcal{K} la categoría vacía y sea $D : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ un diagrama, entonces $(T, \{\alpha_i : T \longrightarrow D(i) \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ es un límite para D sí, y sólo si T es un objeto terminal para \mathcal{A} y $\{\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\} = \emptyset$.

Afirmamos que para todo \mathcal{A} -objeto, X , si $\{\beta : X \longrightarrow D(i) \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\} = \emptyset$, entonces $(X, \{\beta_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ es una fuente natural para D . Supóngase que $(X, \{\beta_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ no es una fuente natural para D , entonces existen i, j en $\text{Ob}(\mathcal{K})$, $\beta_i : X \longrightarrow D(i)$, $\beta_j : X \longrightarrow D(j)$ en $\text{Mor}(\mathcal{A})$ y $a : i \longrightarrow j$ en $\text{Mor}(\mathcal{K})$ tales que $\beta_j \neq D(a) \circ \beta_i$, lo que implica que existe β_j en $\{\beta_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\}$ una contradicción pues $\{\beta_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\} = \emptyset$. Por lo tanto $(T, \{\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ es una fuente natural para D .

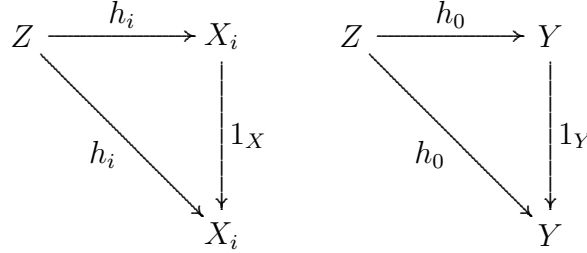
Necesidad, supóngase que $(T, \{\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ es un límite para D . Sea $\{\beta : X \longrightarrow D(i) \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\} = \emptyset$, entonces $(X, \{\beta_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ es una fuente natural para D , por la propiedad universal del límite existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi : X \longrightarrow T$ tal que $\alpha_i \circ \varphi = \beta_i$ para cada i en $\text{Ob}(\mathcal{K})$. Veamos que $\{\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\} = \emptyset$, supóngase que $\{\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\} \neq \emptyset$, existe α_j en $\{\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\}$ tal que $\beta_j = \alpha_j \circ \varphi$, entonces $\{\beta_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\} \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $\{\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\} = \emptyset$. Resta demostrar la unicidad de φ . Sea $\psi : X \longrightarrow T$ tal que $\alpha_i \circ \psi = \beta_i$, supóngase que existe j en $\text{Ob}(\mathcal{K})$ tal que $\alpha_j \circ \psi \neq \beta_j$, lo que implica que existe α_j en $\{\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\}$ lo cual es una contradicción; así $\varphi = \psi$. Por lo tanto T es un objeto terminal para D .

Suficiencia, supóngase que T es un objeto terminal para \mathcal{A} y $\{\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\} = \emptyset$, entonces $(T, \{\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ es una fuente natural para D . Sea $(X, \{\beta_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ una fuente natural para D , por la propiedad universal de objeto terminal existe un único morfismo $\varphi : X \longrightarrow T$ tal que $\alpha_i \circ \varphi = \beta_i$ para cada i en $\text{Ob}(\mathcal{K})$. Por lo tanto $(T, \{\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ es un límite para D .

- (5) Intersección: Sea I un conjunto, $0 \notin I$ y \mathcal{K} la categoría pequeña con $\text{Ob}(\mathcal{K}) = I \cup \{0\}$ y $\text{Mor}(\mathcal{K}) = \{1_i \mid i \in I\} \cup \{1_0\} \cup \{a : i \longrightarrow 0 \mid i \in I\}$. Para un familia $\{f_i : X_i \longrightarrow Y \mid i \in I\}$ de monomorfismos en una categoría \mathcal{A} , defínase un diagrama $D : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ por $D(i) = X_i$, $D(0) = Y$ y $D(a_i) = f_i$. Entonces $(X, \{g_i : X \longrightarrow X_i\} \cup \{g_0\})$ es un límite para D sí, y sólo si (X, g_0) es intersección de $\{f_i \mid i \in I\}$ y $f_i \circ g_i = g_0$.

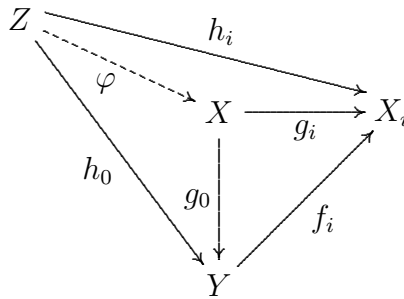
Necesidad, supóngase que $(X, \{g_i \mid i \in I\} \cup \{g_0\})$ es un límite para D . Veamos que (X, g_0) es intersección de $\{f_i \mid i \in I\}$. Puesto que $(X, \{g_i, g_0\})$ es fuente natural para D , se tiene que $f_i \circ g_i = g_0$ para cada i en I . Sean (Z, h_0) donde Z

es un \mathcal{A} -objeto, $h_0 : Z \rightarrow Y$ un \mathcal{A} -morfismo y sea $\{h_i : Z \rightarrow X_i \mid i \in I\}$ una familia de \mathcal{A} -morfismos. Si $h_0 := f_i \circ h_i$, entonces $(Z, \{h_i, h_0\})$ es una fuente natural para D .



Como $(X, \{g_i, g_0\})$ es un límite para D , existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi : Z \rightarrow X$ tal que $h_0 = g_0 \circ \varphi$. Por tanto (X, g_0) es una intersección de $\{f_i \mid i \in I\}$. La intersección es un subobjeto de Y y de los X_i . Defínase $g_i = d_i \circ t = d_i \circ s$, $g = d \circ t = d \circ s$; $m_i \circ g_i = m_i \circ (d_i \circ t) = d \circ t = g$, entonces existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi : C \rightarrow D$ tal que $g = d \circ \varphi$, pero $g = d \circ t = d \circ s$, luego $t = \varphi = s$.

Suficiencia, supóngase que (X, g_0) es una intersección de $\{f_i \mid i \in I\}$ y $g_0 = f_i \circ g_i$. Veamos que $(X, \{g_i, g_0\})$ es un límite para D . Nótese que $g_0 : X \rightarrow Y$ y sean $g_i : X_i \rightarrow Y$ tales que $f_i \circ g_i = g_0$ para cada i en I , entonces $(X, \{g_i, g_0\})$ es una fuente natural para D . Sea $(Z, \{h_i, h_0\})$ una fuente natural para D se tiene que $h_0 = f_i \circ h_i$. Como (X, g_0) es una intersección de $\{f_i \mid i \in I\}$ existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi : Z \rightarrow X$ tal que $h_0 = g_0 \circ \varphi$



Veamos que $g_i \circ \varphi = h_i$ para cada i en I . Puesto que $h_0 = g_0 \circ \varphi = (f_i \circ g_i) \circ \varphi$ y $h_0 = f_i \circ h_i$, entonces $f_i \circ (g_i \circ \varphi) = f_i \circ h_i$, lo que implica que $h_i = g_i \circ \varphi$ porque f_i es un monomorfismo para cada i en I . Por lo tanto $(X, \{g_i, g_0\})$ es un límite para D .

- (6) Jalador múltiple: En la definición anterior, si no se supone que cada \mathcal{A} -morfismo f_i , es un monomorfismo, El límite $(X, \{g_i : X \rightarrow X_i\} \cup \{g_0 : X \rightarrow Y\})$ para D se llama un jalador múltiple de $\{f_i \mid i \in I\}$. Nótese que si $I = \{1, 2\}$ el

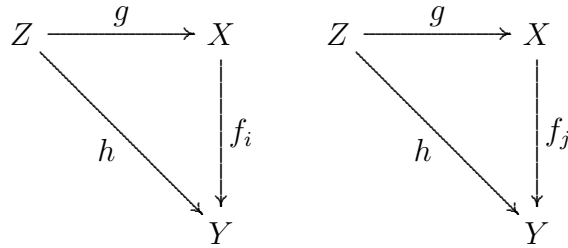
jalador múltiple de (f_1, f_2) coincide con su jalador.

Para un sumidero $(\{f_i : X_i \rightarrow Y \mid i \in I\}, Y)$ una fuente $(X, \{g_i \mid i \in I\} \cup \{g_0\})$ es un jalador múltiple del sumidero si

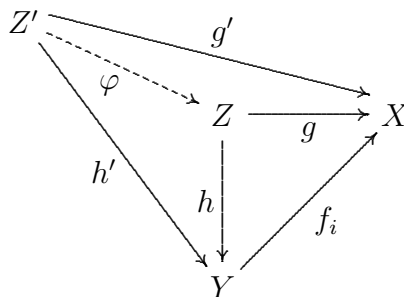
- (a) $g_0 = f_i \circ g_i$;
- (b) si $(Z, \{h_i : Z \rightarrow X_i\} \cup \{t : Z \rightarrow Y\})$ es una fuente tal que $t = f_i \circ h_i$ para cada i en I , existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi : Z \rightarrow X$ tal que $h_i = f_i \circ \varphi$ y $t = g_0 \circ \varphi$.

- (7) Igualador múltiple: Sea I un conjunto y \mathcal{K} una categoría pequeña con $\text{Ob}(\mathcal{K}) = \{1, 2\}$, $\text{Mor}(\mathcal{K}) = \{1_1, 1_2\} \cup \{a_i : 1 \rightarrow 2 \mid i \in I\}$. Para una familia de \mathcal{A} -morfismos defínase un diagrama $D : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A}$ por $D(a_i) = f_i$ para cada i en I . Entonces $(Z, \{g : Z \rightarrow X, h : Z \rightarrow Y\})$ es un límite para D sí, y sólo si (Z, g) es un igualador múltiple para $\{f_i \mid i \in I\}$ y $h = f_i \circ g = f_j \circ g$ para cada i y j en I .

Necesidad Supóngase que $(Z, \{g, h\})$ es un límite para D . Veamos que (Z, g) es un igualador de $\{f_i \mid i \in I\}$, $g : Z \rightarrow X$ y $h = f_i \circ g = f_j \circ g$ para cada i, j en I . Puesto que $(Z, \{g, h\})$ es una fuente natural para D , los triángulos

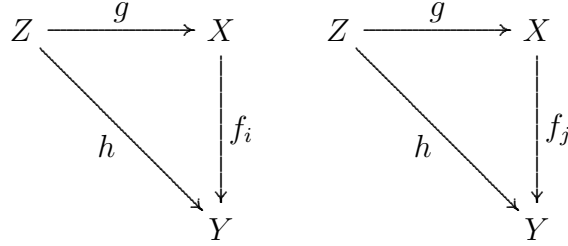


conmutan, entonces para cada i, j en I $f_i \circ g = h = f_j \circ g$. Sea (Z', g') una pareja con Z' un \mathcal{A} -objeto y $g' : Z' \rightarrow X$ un \mathcal{A} -morfismo tales que $f_i \circ g' = f_j \circ g'$ para cada i y j en I . Si $h' := f_i \circ g' = (f_j \circ g')$ se tiene que $(Z', \{g', h'\})$ es una fuente natural para D , entonces existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi : Z' \rightarrow Z$ tal que $g' = g \circ \varphi$ y $h' = h \circ \varphi$.

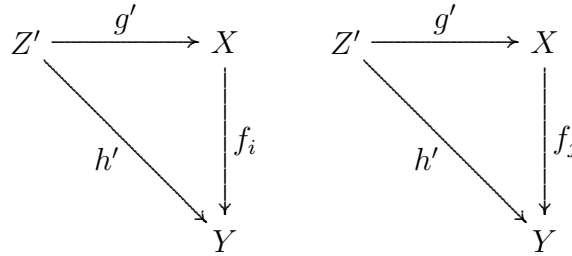


Por lo tanto (Z, g) es un igualador múltiple de $\{f_i \mid i \in I\}$.

Suficiencia, supóngase que (Z, g) es un igualador múltiple de $\{f_i \mid i \in I\}$, entonces $g : Z \rightarrow X$ y $f_i \circ g = f_j \circ g$ para cada i, j en I . Sea $h := f_i \circ g (= f_j \circ g)$, tenemos que los triángulos



conmutan; por lo que $(Z, \{g, h\})$ es una fuente natural para D . Sea $(Z', \{g', h'\})$ una fuente natural para D entonces los triángulos

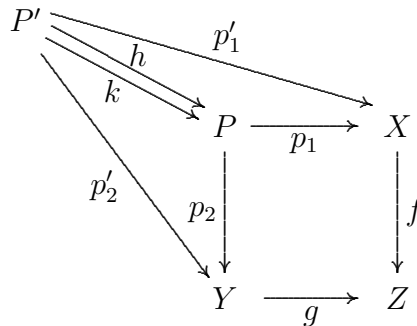


conmutan, así $f_i \circ g' = h' = f_j \circ g'$. Como (Z, g) es un igualador múltiple existe un único \mathcal{A} - morfismo $\varphi : Z' \rightarrow Z$ tal que $g' = g \circ \varphi$. Veamos que $h' = h \circ \varphi$; $h \circ \varphi = (f_i \circ g) \circ \varphi = f_i \circ g' = h'$. Por tanto (Z, g, h) es un límite para D .

□

Proposición 1.47. *Supóngase que $(P, \{p_1, p_2\})$ es un jalador de $(f : X \rightarrow Z, g : Y \rightarrow Z)$ y que f es un monomorfismo en \mathcal{A} . Entonces p_2 es un monomorfismo en \mathcal{A} el cual se llama una imágen inversa de f por g .*

Demostración. Supóngase que $(W, \{p_1, p_2\})$ es un jalador de $(f : X \rightarrow Z, g : Y \rightarrow Z)$ y que f es un monomorfismo en \mathcal{A} . Sean $h, k : P' \rightarrow P$ \mathcal{A} -morfismos tales que $p_2 \circ h = p_2 \circ k := p'_2$, entonces $f \circ p_1 \circ h = g \circ p_2 \circ h = g \circ p_2 \circ k = f \circ p_1 \circ k$.



Como f es un monomorfismo se tiene que $p_1 \circ h = p_1 \circ k := p'_1$. Puesto que $p_i \circ h = p_i \circ k$ para cada i en $\{1, 2\}$ y por la propiedad universal del jalador se cumple que $h = k$. Y por tanto p_2 es un monomorfismo. \square

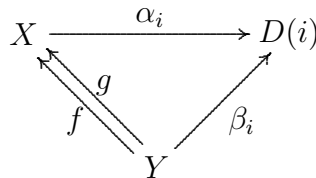
Una categoría \mathcal{A} tiene imagenes inversas siempre que para cada par de \mathcal{A} -morfismos $(f : X \rightarrow Z, g : Y \rightarrow Z)$, donde f es un monomorfismo, se puede extender para formar un jalador de (f, g) .

Dual: **co-igualador, empujador, co-producto, objeto inicial, co-intersección, empujador múltiple, co-igualador múltiple, co-imágen inversa.**

Las nociones de uniones e imagenes son también definidas (ver [6]), pero no son nociones duales de intersección e imágen inversa respectivamente.

Proposición 1.48. *Supóngase que $D : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A}$ es un diagrama en una categoría \mathcal{A} sobre una categoría pequeña \mathcal{K} y defínase una categoría (D) como sigue: $Ob(D)$ es la clase de todas las fuentes naturales $(X, \{\alpha_i\}_{i \in Ob(\mathcal{K})})$ para D y para $(X, \{\alpha_i\}_{i \in Ob(\mathcal{K})})$, $(Y, \{\beta_i\}_{i \in Ob(\mathcal{K})})$ en $Ob(D)$ el conjunto de (D) -morfismos $[(X, \{\alpha_i\}_{i \in Ob(\mathcal{K})}), (Y, \{\beta_i\}_{i \in Ob(\mathcal{K})})]_{(D)}$ consiste de todos los \mathcal{A} -morfismos $f : X \rightarrow Y$ tales que $\alpha_i = \beta_i \circ f$ para cada $i \in Ob(\mathcal{K})$. Entonces $(X, \{\alpha_i\}_{i \in Ob(\mathcal{K})})$ es un límite para D sí, y sólo si es un objeto terminal en (D) .*

Demostración. Necesidad, nótese que $dom_{(D)} = dom_{\mathcal{A}}$, $cod_{(D)} = cod_{\mathcal{A}}$ y si $B = \{(f, g) \mid cod_{\mathcal{A}} f = dom_{\mathcal{A}} g\}$, $\circ_{\mathcal{A}} : B \rightarrow Mor(\mathcal{A})$ definida por $\circ_{(D)}(f, g) = g \circ f$. Supóngase que $(X, \{\alpha_i\}_{i \in Ob(\mathcal{K})})$ es un límite para D . Sean $(Y, \{\beta_i\}_{i \in Ob(\mathcal{K})})$ en $Ob((D))$ y f, g en $[(Y, \{\beta_i\}_{i \in Ob(\mathcal{K})}), (X, \{\alpha_i\}_{i \in Ob(\mathcal{K})})]_{(D)}$. Tenemos que $\alpha_i \circ f = \beta_i = \alpha_i \circ g$ para cada i en $Ob(\mathcal{A})$



Como $(X, \{\alpha_i\}_{i \in Ob(\mathcal{K})})$ es un límite para D , f es único y $f = g$. Por tanto $(X, \{\alpha_i\}_{i \in Ob(\mathcal{K})})$ es un objeto terminal para (D) .

Suficiencia, supóngase que $(X, \{\alpha_i\}_{i \in Ob(\mathcal{K})})$ es un objeto terminal para (D) . Puesto que $(X, \{\alpha_i\}_{i \in Ob(\mathcal{K})})$ es un objeto en (D) , es una fuente natural para D . Sean $(Y, \{\beta_i\}_{i \in Ob(\mathcal{K})})$ una fuente natural para D , como $(X, \{\alpha_i\}_{i \in Ob(\mathcal{K})})$ es un objeto terminal en (D) se tiene que $[(Y, \{\beta_i\}_{i \in Ob(\mathcal{K})}), (X, \{\alpha_i\}_{i \in Ob(\mathcal{K})})]_{(D)}$ tiene un único morfismo $\varphi : Y \rightarrow X$ tal que $\alpha_i \circ \varphi = \beta_i$ para cada i en I . Por lo tanto $(X, \{\alpha_i\}_{i \in Ob(\mathcal{K})})$ es un límite para D . \square

En la categoría \mathbf{Ab} , el producto es el producto directo y el co-producto es la suma directa, mientras que en la categoría de \mathbf{Grp} el producto es el producto directo y el co-producto es el producto libre. En ambas categorías, el objeto inicial coincide con

el objeto terminal (llamado objeto cero, en general). \mathbf{Conj} y \mathbf{Top} no tienen objeto cero.

1.1.4. Categorías completas

Definición 1.49. Sea \mathcal{K} una categoría pequeña. Una categoría se llama \mathcal{K} -**completa** si para cualquier diagrama $D : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A}$ en \mathcal{A} sobre \mathcal{K} , existe un límite para D . \mathcal{A} se llama **completa** si para cualquier categoría pequeña \mathcal{K} , \mathcal{A} es \mathcal{K} -completa. \mathcal{A} se llama **finitamente completa** si para cualquier categoría pequeña finita \mathcal{K} (es decir, \mathcal{K} es un conjunto finito), \mathcal{A} es \mathcal{K} -completa.

Dual: \mathcal{K} -co-completa, co-completa, finitamente co-completa

Si \mathcal{A} es \mathcal{K} -completa para un diagrama esqueleto \mathcal{K} expresado por $\bullet \rightrightarrows \bullet$ entonces se dice que \mathcal{A} tiene igualadores (ver Proposición 1.46).

Teorema 1.50. Para una categoría \mathcal{A} , son equivalentes:

- (1) \mathcal{A} es completa.
- (2) \mathcal{A} tiene jaladores múltiples y objetos terminales.
- (3) \mathcal{A} tiene productos y jaladores.
- (4) \mathcal{A} tiene productos e imágenes inversas.
- (5) \mathcal{A} tiene productos e intersecciones finitas.
- (6) \mathcal{A} tiene productos e igualadores.
- (7) \mathcal{A} tiene productos e intersecciones.

Demostración.

(1) implica (2) Se sigue de la Proposición 1.46 Supóngase que \mathcal{A} es una categoría completa. Sea \mathcal{K}_1 una categoría pequeña con $\text{Ob}(\mathcal{K}_1) = I \cup \{0\}$, donde I es un conjunto y $0 \notin I$, $\text{Mor}(\mathcal{K}_1) = \{1_i \mid i \in I\} \cup \{1_0\} \cup \{a : i \rightarrow 0 \mid i \in I\}$ y sea $\mathcal{K}_2 = \emptyset$ la categoría vacía. Entonces \mathcal{A} es \mathcal{K}_1 -completa para el diagrama $D : \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{A}$ y también es \mathcal{K}_2 -completa para el diagrama $D : \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{A}$. Por lo tanto \mathcal{A} tiene jaladores múltiples y objetos terminales.

(2) implica (3) Se sigue del siguiente Lema:

Lema 1.51. Sean T un objeto terminal en \mathcal{A} , I un conjunto no vacío y $\{X_i \mid i \in I\}$ una familia de \mathcal{A} -objetos. $(X, \{p_i : X \rightarrow X_i \mid i \in I\}, t_X : X \rightarrow T)$ es un jalador múltiple de $\{t_i : X_i \rightarrow T \mid i \in I\}$ sí, y sólo si $(X, \{p_i \mid i \in I\})$ es producto de $\{X_i \mid i \in I\}$, donde $t_i : X_i \rightarrow T$, $i \in I$ y $t_X : X \rightarrow T$ son morfismos únicos por la propiedad de objeto terminal.

Demostración. Necesidad, supóngase que $(X, \{p_i \mid i \in I\} \cup \{t_X\})$ es un jalador múltiple de la familia $\{t_i \mid i \in I\}$ tal que $t_X = t_i \circ p_i$ para cada i en I .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p_i} & X_i \\ t_X \downarrow & & \nearrow t_i \\ T & & \end{array} .$$

Sea $(Y, t_Y : Y \rightarrow T)$ un jalador múltiple de $\{t_i \mid i \in I\}$ y sean $\pi_i : X \rightarrow X_i$ \mathcal{A} -morfismos tales que $t_i \circ \pi_i := t_Y$, entonces existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi : Y \rightarrow X$ tal que $p_i \circ \varphi = \pi_i$ y $t_X \circ \varphi = t_Y$. Por tanto $(X, \{p_i \mid i \in I\})$ es un producto de $\{X_i \mid i \in I\}$.

$$\begin{array}{ccccc} Y & & & & \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & \varphi & X & \xrightarrow{p_i} & X_i \\ & \searrow & \downarrow & & \nearrow \\ & t_Y & T & & \\ & & & & \end{array} .$$

Suficiencia, supóngase que $(X, \{p_i \mid i \in I\})$ es un producto de la familia $\{X_i \mid i \in I\}$ y t_i, t_X son único y $t_X := t_i \circ p_i$. Sea $(Y, \{\pi_i : Y \rightarrow X_i \mid i \in I\})$ un producto de $\{X_i \mid i \in I\}$, donde $t_Y := \pi_i \circ t_i$. Entonces existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi : Y \rightarrow X$ tal que $p_i \circ \varphi = \pi_i$. Veamos que $t_Y = t_X \circ \varphi$: $t_X \circ \varphi = (t_i \circ p_i) \circ \varphi = t_i \circ (p_i \circ \varphi) = t_i \circ \pi_i = t_Y$. Por tanto $(X, \{t_i \mid i \in I\})$ es un jalador múltiple de $\{t_i \mid i \in I\}$. \square

(3) implica (4) Basta considerar que si $(X, \{\alpha_1, \alpha_2\})$ es un jalador de (f, g) y f es un monomorfismo en \mathcal{A} , entonces α_2 es la imagen inversa de f por g .

(4) implica (5) Para una familia $\{f_i : X_i \rightarrow Y \mid i \in I\}$ de \mathcal{A} -monomorfismos con $I = \{1, 2\}$, una intersección $(W_2, \{\{g_i^2 : W_2 \rightarrow X_i \mid i \in I\} \cup \{g_0^2 : W_2 \rightarrow Y\}\})$ de (f_1, f_2) se obtiene por la formación de un jalador de (f_1, f_2) , es decir, por la imagen inversa de f_1 por f_2 . Para un conjunto finito I , una intersección de $\{f_i : X_i \rightarrow Y \mid i \in I\}$ puede obtenerse por la formación inductiva de imagenes inversas.

Demostración. Supóngase que \mathcal{A} tiene productos e imagenes inversas. Sea $(W_2, \{\{g_1^2 : W_2 \rightarrow X_1, g_2^2 : W_2 \rightarrow X_2\}\})$ un jalador de $(f_1 : X_1 \rightarrow Y, f_2 :$

$X_2 \longrightarrow Y$), entonces $f_1 \circ g_1^2 = f_2 \circ g_2^2$. Sea $g_0^2 := f_1 \circ g_1^2 = f_2 \circ g_2^2$

$$\begin{array}{ccc} W_2 & \xrightarrow{g_1^2} & X_1 \\ g_2^2 \downarrow & \searrow g_0^2 & \downarrow f_1 \\ X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y \end{array} .$$

Sean $h_i : Z \longrightarrow X_i$ \mathcal{A} -morfismos para i en $\{1, 2\}$ tales que $f_1 \circ h_1 = f_2 \circ h_2$. Sea $h := f_1 \circ h_1 = f_2 \circ h_2$. Entonces por la propiedad universal de jalador, existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi_2 : Z \longrightarrow W_2$ tal que $g_i^2 \circ \varphi_2 = h_i$ para $i \in \{1, 2\}$.

$$\begin{array}{ccccc} Z & & & & \\ & \searrow h_1 & & & \\ & & W_2 & \xrightarrow{g_1^2} & X_1 \\ & \searrow \varphi_2 & \downarrow g_2^2 & \searrow g_0^2 & \downarrow f_1 \\ & & X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y \end{array} .$$

Sea $\psi = g_0^2 \circ \varphi_2 : Z \longrightarrow Y$, Veamos que $\psi = h$

$$\psi = g_0^2 \circ \varphi_2 = (f_i \circ g_i^2) \circ \varphi_2 = f_i \circ (g_i^2 \circ \varphi_2) = f_i \circ h_i = h.$$

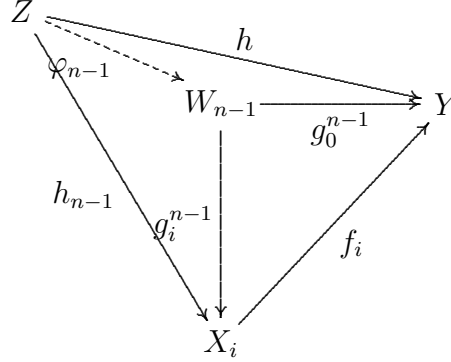
Por lo tanto (W_2, g_0^2) es una intersección de $\{f_1, f_2\}$.

Sea $(W_n, \{k_{n-1} : W_n \longrightarrow W_{n-1}, g_n^n : W_n \longrightarrow X_n\})$ un jalador de $(f_n : X_n \longrightarrow Y, g_0^{n-1} : W_{n-1} \longrightarrow Y)$, donde (W_{n-1}, g_0^{n-1}) es una intersección de $\{f_1, f_2, \dots, f_{n-1}\}$. Entonces $g_0^{n-1} \circ k_{n-1} = f_n \circ g_n^n$ y defínase $g_0^n = g_0^{n-1} \circ k_{n-1} = f_n \circ g_n^n$

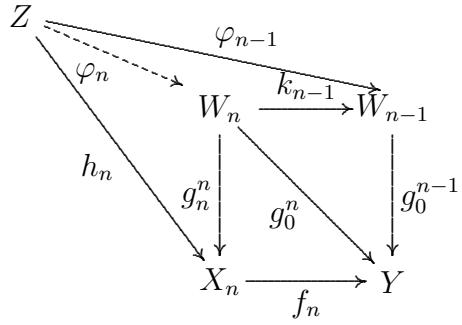
$$\begin{array}{ccc} W_n & \xrightarrow{k_{n-1}} & W_{n-1} \\ g_n^n \downarrow & \searrow g_0^n & \downarrow g_0^{n-1} \\ X_n & \xrightarrow{f_n} & Y \end{array} .$$

Por hipótesis (W_{n-1}, g_0^{n-1}) es una intersección de $\{f_1, f_2, \dots, f_{n-1}\}$, por lo que para cada i en $\{1, 2, \dots, n-1\}$ existen g_i^{n-1} tal que $f_i \circ g_i^{n-1} = g_0^{n-1}$ y como

$f_i \circ h_i = h$ existe un único $\varphi_{n-1} : Z \rightarrow W_{n-1}$ tal que $g_0^{n-1} \circ \varphi_{n-1} = h$.



Para cada i en $\{1, 2, \dots, n\}$ sea $h_i : Z \rightarrow X_i$ un \mathcal{A} -morfismo tal que $h = f_i \circ h_i$. Entonces por la propiedad universal de jalador, existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi_n : Z \rightarrow W_n$ tal que $k_{n-1} \circ \varphi_n = \varphi_{n-1}$ y $g_n^n \circ \varphi_n = h_n$.



Veamos que (W_n, g_0^n) es una intersección de $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$. Defínase $g_i^n = g_i^{n-1} \circ k_{n-1}$, para cada i en $\{1, 2, 3, \dots, n-1\}$, entonces $f_i \circ g_i^n = f_i \circ (g_i^{n-1} \circ k_{n-1}) = (f_i \circ g_i^{n-1}) \circ k_{n-1} = g_0^{n-1} \circ k_{n-1} = g_0^n$. Y como $f_n \circ g_n^n = g_0^n$, tenemos que $f_i \circ g_i^n = g_0^n$ para cada i en $\{1, 2, \dots, n\}$.

Resta demostrar que $g_0^n \circ \varphi_n = h$; en efecto $g_0^n \circ \varphi_n = (g_0^{n-1} \circ k_{n-1}) \circ \varphi_n = g_0^{n-1} \circ (k_{n-1} \circ \varphi_n) = g_0^{n-1} \circ \varphi_{n-1} = h$. Por lo tanto (W_n, g_0^n) es una intersección de $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$. \square

(5) implica (6) Se sigue del siguiente Lema:

Lema 1.52. *Supóngase que \mathcal{A} tiene productos finitos, sea $(\prod_{i \in \{1,2\}} X_i, \{\pi_{X_1}, \pi_{X_2}\})$ un \mathcal{A} -producto de $\{X_i \mid i \in \{1,2\}\}$. Para una pareja (f, g) de morfismos $f, g : X_1 \rightarrow X_2$ existe una pareja (f', g') de morfismos $f', g' : X_1 \rightarrow \prod X_i$ tal que $\pi_{X_1} \circ f' = 1_{X_1}$, $\pi_{X_2} \circ f' = f$, $\pi_{X_1} \circ g' = 1_{X_1}$, $\pi_{X_2} \circ g' = g$. Si $(Z, \{h, k : Z \rightarrow X_1, l : Z \rightarrow \prod X_i\})$ es una intersección de $\{f', g'\}$, entonces $h = k$ y (Z, h) es un igualador de f y g . Si (Z, h) es un igualador de f y g , entonces $(Z, \{h, h, f' \circ h\})$ es una intersección de $\{f', g'\}$.*

Demostración. Sean $f, g : X_1 \longrightarrow X_2$ y $1_{X_1} : X_1 \longrightarrow X_1$ \mathcal{A} -morfismos tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 & & X_2 \\
 & \nearrow g & \uparrow \pi_{X_2} \\
 X_1 & \xrightarrow{f} & \prod X_i \\
 & \searrow 1_{X_1} & \downarrow \pi_{X_1} \\
 & & X_1
 \end{array}$$

Aplicando la propiedad universal del producto a las fuentes $(X_1, \{f, 1_{X_1}\})$ y $(X_1, \{g, 1_{X_1}\})$, existen únicos \mathcal{A} -morfismos $f', g' : X_1 \longrightarrow \prod X_i$ tales que los diagramas

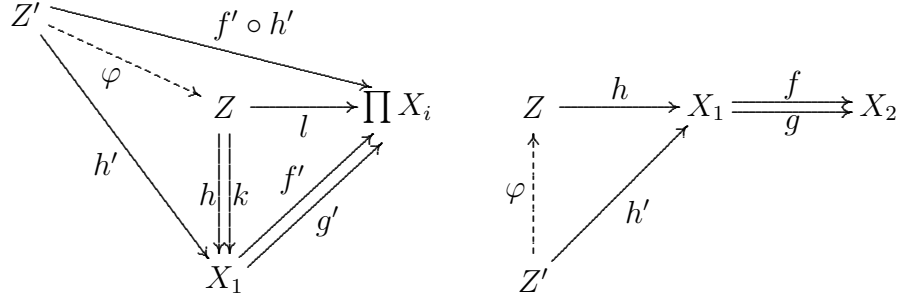
$$\begin{array}{ccc}
 X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\
 \vdots & \uparrow \pi_{X_2} & \vdots \\
 X_1 & \xrightarrow{f'} & \prod X_i \\
 \vdots & \downarrow \pi_{X_1} & \vdots \\
 X_1 & \xrightarrow{1_{X_1}} & X_1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 X_1 & \xrightarrow{g} & x_2 \\
 \vdots & \uparrow \pi_{X_2} & \vdots \\
 X_1 & \xrightarrow{g'} & \prod X_i \\
 \vdots & \downarrow \pi_{X_1} & \vdots \\
 X_1 & \xrightarrow{1_{X_1}} & X_1
 \end{array}$$

conmutan.

Supóngase que $(Z, \{h, k : Z \longrightarrow X_1\} \cup \{l : Z \longrightarrow \prod X_i\})$ es una intersección de $\{f', g'\}$. Veamos que $h = k$. Nótese que $f' \circ h = g' \circ k \Rightarrow \pi_{X_1} \circ f' \circ h = \pi_{X_1} \circ g' \circ k \Rightarrow 1_{X_1} \circ h = 1_{X_1} \circ k \Rightarrow h = k$.

Como (Z, l) es una intersección de $\{f', g'\}$ (ver Definición 1.44), se tiene que $f' \circ h = g' \circ k \Rightarrow \pi_{X_2} \circ f' \circ h = \pi_{X_2} \circ g' \circ k \Rightarrow f \circ h = g \circ k$. Sea $h' : Z' \longrightarrow X_1$ tal que $f \circ h' = g \circ h'$, puesto que $f = \pi_{X_2} \circ f'$ y $g = \pi_{X_2} \circ g'$, entonces $\pi_{X_2} \circ f' \circ h' = \pi_{X_2} \circ g' \circ h'$. Por otro lado $1_{X_1} \circ h' = 1_{X_1} \circ h' \Rightarrow \pi_{X_1} \circ f' \circ h' = \pi_{X_1} \circ g' \circ h'$, por la propiedad universal del producto $f' \circ h' = g' \circ h'$. Puesto que (Z, l) es una intersección de $\{f', g'\}$ existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi : Z' \longrightarrow Z$ tal que $l \circ \varphi = f' \circ h'$. Como $l = f' \circ h$, entonces $f' \circ h \circ \varphi = f' \circ h'$ y como f es cancelable por la izquierda $h \circ \varphi = h'$. Por lo tanto (Z, h) es un igualador de

f y g .

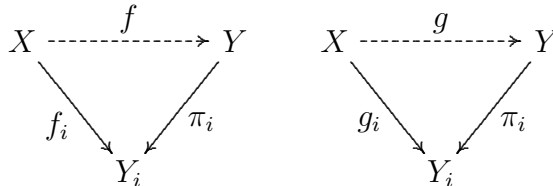


Supóngase que (Z, h) es un igualador de f y g (ver Definición 1.24), se tiene que $f \circ h = g \circ h \Rightarrow \pi_{X_2} \circ f' \circ h = \pi_{X_2} \circ g' \circ h$ y puesto que $1_{X_1} \circ h = 1_{X_1} \circ h \Rightarrow \pi_{X_1} \circ f' \circ h = \pi_{X_1} \circ g' \circ h$, por la propiedad universal del producto se tiene que $f' \circ h = g' \circ h$. Sea $h' : Z' \rightarrow X_1$ un \mathcal{A} -morfismo tal que $f' \circ h' = g' \circ h'$; $f' \circ h' = g' \circ h' \Rightarrow \pi_{X_2} \circ f' \circ h' = \pi_{X_2} \circ g' \circ h' \Rightarrow f \circ h' = g \circ h'$. Y puesto que (Z, h) es un igualador de f y g existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi : Z' \rightarrow Z$ tal que $h \circ \varphi = h'$, por lo que $f' \circ h \circ \varphi = f' \circ h'$. Resta demostrar que f' y g' son monomorfismos, $f' \circ h = f' \circ h' \Rightarrow \pi_{X_1} \circ f' \circ h = \pi_{X_1} \circ f' \circ h' \Rightarrow 1_{X_1} \circ h = 1_{X_1} \circ h' \Rightarrow h = h'$, similarmente $g' \circ h = g' \circ h'$. Por lo tanto $(Z, f' \circ h)$ es una intersección de $\{f', g'\}$. \square

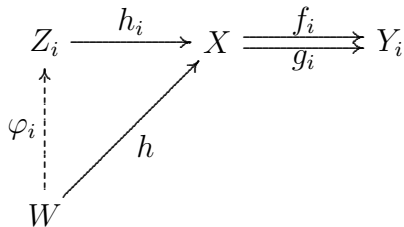
(6) implica (1) Primero demostraremos el siguiente Lema:

Lema 1.53. *Si \mathcal{A} tiene productos e igualadores, entonces tiene intersecciones de monomorfismos regulares.*

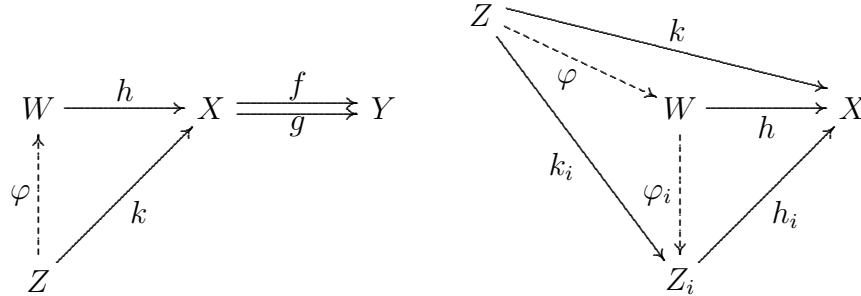
Demostración. Sea I un conjunto y para cada i en I sea $h_i : Z_i \rightarrow X$ un igualador de $f_i, g_i : X \rightarrow Y_i$. Para un \mathcal{A} -producto $(Y, \{\pi_i : Y \rightarrow Y_i\})$ de la familia $\{Y_i \mid i \in I\}$, existen \mathcal{A} -morfismos $f, g : X \rightarrow Y$ tales que $\pi_i \circ f = f_i$ y $\pi_i \circ g = g_i$ para cada i en I .



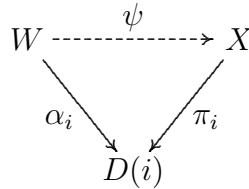
Sea $(W, h : W \rightarrow X)$ un igualador de f y g , $f \circ h = g \circ h \Rightarrow \pi_i \circ f \circ h = \pi_i \circ g \circ h \Rightarrow f_i \circ h = g_i \circ h$. Como (Z_i, h_i) es un igualador de f_i y g_i para cada i en I , existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi_i : W \rightarrow Z_i$ talque $h_i \circ \varphi_i = h$ para cada i en I .



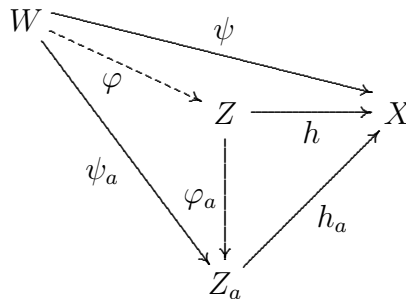
Supóngase que $k_i : Z \rightarrow Z_i$ y $k : Z \rightarrow X$ son \mathcal{A} -morfismos tales que $h_i \circ k_i = k$. Entonces para cada i en I , $\pi_i \circ g \circ k = g_i \circ h_i \circ k_i = f_i \circ h_i \circ k_i = \pi_i \circ f \circ k$ y por la propiedad universal del producto $g \circ k = f \circ k$. Puesto que (W, h) es un igualador de f y g existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi : Z \rightarrow W$ tal que $h \circ \varphi = k$. Hemos demostrado que $(W, \{\varphi_i \mid i \in I\} \cup \{h\})$ es una intersección de $\{(Z_i, h_i) \mid i \in I\}$. \square



Ahora si demostraremos (6) implica (1). Sea \mathcal{K} una categoría pequeña arbitraria y $D : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A}$ un diagrama en \mathcal{A} sobre \mathcal{K} . Construiremos un límite para D . Sea $(X, \{\pi_i : X \rightarrow D(i) \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ un \mathcal{A} -producto de la familia $\{D(i) \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\}$: Para cada \mathcal{K} -morfismo $a : i \rightarrow j$, sea $(Z_a, h_a : Z_a \rightarrow X)$ un igualador de $D(a) \circ \pi_i$ y π_j . Entonces existe una intersección $(Z, \{\varphi_a \mid a \in \text{Mor}(\mathcal{K})\} \cup \{h\})$ de $\{h_a \mid a \in \text{Mor}(\mathcal{K})\}$. Veamos que $(Z, \{\pi_i \circ h : Z \rightarrow D(i) \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ es un límite para D . Nótese que $D(a) \circ \pi_i \circ h = D(a) \circ \pi_i \circ (h_a \circ \varphi_a) = (D(a) \circ \pi_i \circ h_a) \circ \varphi_a = (\pi_j \circ h_a) \circ \varphi_a = \pi_j \circ (h_a \circ \varphi_a) = \pi_j \circ h$. Luego $(Z, \{\pi_i \circ h\})$ es una fuente natural para D . Ahora sea $(W, \{\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ una fuente natural para D . Por la propiedad universal del producto existe un único \mathcal{A} -morfismo $\psi : W \rightarrow X$ tal que $\alpha_i = \pi_i \circ \psi$.



Sea $\psi_a : W \rightarrow Z_a$ un \mathcal{A} -morfismo tal que $\psi = h_a \circ \psi_a$ para cada a en $\text{Mor}(\mathcal{A})$; por la propiedad universal de la intersección existe un único $\varphi : W \rightarrow Z$ tal que $h \circ \varphi = \psi$. De donde $\alpha_i = \pi_i \circ \psi = (\pi_i \circ h) \circ \varphi$.



Así $(Z, \{\pi_i \circ h\})$ es un límite para D y por lo tanto \mathcal{A} es una categoría completa.

- (1) implica (7) Se sigue del hecho de que en \mathcal{A} los productos e intersecciones son límites para un tipo de diagramas convenientes.
- (7) implica (5) Es obvia.

□

Teorema 1.54. *Para una categoría \mathcal{A} , son equivalentes:*

- (1) \mathcal{A} es finitamente completa.
- (2) \mathcal{A} tiene jaladores y objetos terminales.
- (3) \mathcal{A} tiene productos finitos y jaladores.
- (4) \mathcal{A} tiene productos finitos e imagenes inversas.
- (5) \mathcal{A} tiene productos finitos e intersecciones finitas.
- (6) \mathcal{A} tiene productos e igualadores.

Demostración. La demostración es similar a la del Teorema 1.50, basta considerar una categoría pequeña \mathcal{K} finita. □

Ejemplo 1.55. *Las categorías \mathbf{Conj} y \mathbf{Grp} son completas y co-completas. La subcategoría plena de \mathbf{Conj} que consiste de todos los conjuntos finitos es finitamente completa y finitamente co-completa, pero no es completa, ni co-completa.*

1.2. Conceptos topológicos

Definición 1.56. *Dadas una familia $\mathcal{E} = \{(X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ de espacios topológicos y un sumidero $\mathcal{S} = \{f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$, la **topología final o topología fuerte de Y respecto a la pareja $(\mathcal{E}, \mathcal{S})$** es la que tiene por subbase a la familia $\mathcal{H}_{(\mathcal{E}, \mathcal{S})} = \{A \subset Y \mid f_\alpha^{-1}(A) \in \tau_\alpha \text{ para cada } \alpha \in \mathcal{A}\}$.*

Ejemplo 1.57. (1) Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos. Entonces (Y, τ_Y) se llamará un espacio cociente de (X, τ_X) si existe una función cociente $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$, es decir, una función sobreyectiva $f : X \rightarrow Y$ tal que τ_Y es la topología final en Y con respecto a f . En este caso $\tau_Y = \{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in \tau_X\}$ se llamará la topología cociente con respecto a f .

- (2) Sea (X, τ_X) y sea \sim una relación de equivalencia en X , entonces la topología cociente en X/\sim , con respecto a la proyección natural $q : X \rightarrow X/\sim$ se denotará por τ_\sim ; obviamente $\tau_\sim = \{A \subset X/\sim \mid q^{-1}(A) \in \tau_X\}$, $(X/\sim, \tau_\sim)$ se llamará el espacio cociente de (X, τ_X) determinado por \sim .

(3) Sea $\{(X_i, \tau_{X_i}) \mid i \in I\}$ una familia de espacios topológicos indexados por un conjunto I . Entonces la topología final τ en $\prod_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} (X_i \times \{i\})$ con respecto a la familia $\{j_i : X_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_i \mid i \in I\}$ de inclusiones, definida por $j_i(x_i) = (x_i, i)$ para cada x_i en X_i , se llamará la suma topológica, $(\prod_{i \in I} X_i, \tau)$ se llamará el espacio suma de $\{(X_i, \tau_{X_i}) \mid i \in I\}$.

Proposición 1.58. Si $\mathcal{S} = \{f_\alpha : (X_\alpha, \tau_\alpha) \rightarrow (X, \tau) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ es un $\mathcal{T}\text{op}$ -sumidero, son equivalentes

- (1) \mathcal{S} es un $\mathcal{T}\text{op}$ -sumidero final.
- (2) Siempre que (Z, τ_Z) es un espacio topológico y $g : X \rightarrow Z$ es una función tal que $\{g \circ f_\alpha : (X_\alpha, \tau_\alpha) \rightarrow (Z, \tau_Z) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ es un $\mathcal{T}\text{op}$ -sumidero, entonces $g : (X, \tau) \rightarrow (Z, \tau_Z)$ es continua.
- (3) Si σ es una topología de X tal que $\{f_\alpha : (X_\alpha, \tau_\alpha) \rightarrow (X, \sigma) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ es un $\mathcal{T}\text{op}$ -sumidero, entonces $\sigma \subset \tau$.

Demostración. (1) implica (2). Supóngase que (Z, τ_Z) es un espacio topológico y $g : X \rightarrow Z$ es una función tal que para toda, α en \mathcal{A} $g \circ f_\alpha : (X_\alpha, \tau_\alpha) \rightarrow (Z, \tau_Z)$ es continua. Como \mathcal{S} es final, τ tiene como subbase a la familia $\mathcal{F}_{(\mathcal{E}, \mathcal{F})} = \{A \subset X \mid \forall \alpha \in \mathcal{A}, f_\alpha^{-1}(A) \in \tau_\alpha\}$, así que para demostrar que g es continua, basta darse cuenta que si A es un conjunto abierto en Z , entonces $f_\alpha^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f_\alpha)^{-1}$ es un conjunto abierto en X porque $g \circ f_\alpha$ es continua para cada α en \mathcal{A} .

(2) implica (3). Sea σ una topología de X tal que $\mathcal{S}' = \{f_\alpha : (X_\alpha, \tau_\alpha) \rightarrow (X, \sigma) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ es un $\mathcal{T}\text{op}$ -sumidero. Sea $1_X : (X, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$ la función identidad, entonces para cada α en \mathcal{A} la composición $1_X \circ f_\alpha : (X_\alpha, \tau_\alpha) \rightarrow (X, \tau)$ es continua y por (2) 1_X es continua y por tanto $\sigma \subset \tau$.

(3) implica (1). Sea σ la topología final de X respecto a la pareja $(\mathcal{G}, \mathcal{S}')$, donde $\mathcal{G} = \{(X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ y \mathcal{S}' es el sumidero $\{f_\alpha : X_\alpha \rightarrow X \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$. Entonces el sumidero $\mathcal{H} = \{f_\alpha : (X_\alpha, \tau_\alpha) \rightarrow (X, \sigma) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ es un $\mathcal{T}\text{op}$ -sumidero. Puesto que \mathcal{S} es un $\mathcal{T}\text{op}$ -sumidero la composición $1_X \circ f_\alpha : (X_\alpha, \tau_\alpha) \rightarrow (X, \tau)$ es continua, donde $1_X : (X, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$; por las implicaciones (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3), se tiene que $\tau \subset \sigma$. Y como \mathcal{H} es un $\mathcal{T}\text{op}$ -sumidero y estamos suponiendo (3), $\sigma \subset \tau$. Así $\tau = \sigma$ y con ello $\mathcal{S} = \mathcal{H}$ es $\mathcal{T}\text{op}$ -sumidero inicial. \square

Definición 1.59. Dadas una familia $\mathcal{E} = \{(Y_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ de espacios topológicos y una fuente $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$, la **topología inicial o topología débil de X respecto a la pareja $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$** es la que tiene por subbase a la familia $\mathcal{H}_{(\mathcal{E}, \mathcal{F})} = \{f_\alpha^{-1}(A) \mid \alpha \in \mathcal{A} \text{ y } A \in \tau_\alpha\}$.

Ejemplo 1.60. (1) Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) espacios topológicos. Entonces (Y, τ_Y) se llamará un subespacio de (X, τ_X) si existe un encaje $f : (Y, \tau_Y) \rightarrow (X, \tau_X)$,

es decir, una función inyectiva $f : Y \longrightarrow X$ tal que τ_Y es la topología inicial en Y con respecto a f . En este caso $\tau_Y = \{f^{-1}(A) \mid A \in \tau_X\}$ se llamará la topología del subespacio con respecto a f .

- (2) Sea (X, τ_X) y sea $U \subset X$, la topología del subespacio en U , con respecto a la inclusión $i : U \hookrightarrow X$ se denotará por τ_U y se llamará la topología relativa; obviamente $\tau_U = \{A \cap U \mid A \in \tau_X\}$, (U, τ_U) se llamará el subespacio de (X, τ_X) determinado por U .
- (3) Sea $\{(X_i, \tau_{X_i}) \mid i \in I\}$ una familia de espacios topológicos indexados por un conjunto I . Entonces la topología inicial τ en $\prod_{i \in I} X_i$ con respecto a la familia $\{\pi_i : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_i \mid i \in I\}$ de proyecciones, se llamará la topología producto, $(\prod_{i \in I} X_i, \tau)$ se llamará el espacio producto de $\{(X_i, \tau_{X_i}) \mid i \in I\}$.

Proposición 1.61. Si $\mathcal{F} = \{f_\alpha : (X, \tau) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una $\mathcal{T}\text{op}$ -fuente, son equivalentes

- (1) \mathcal{F} es una $\mathcal{T}\text{op}$ -fuente inicial.
- (2) Siempre que (Z, τ_Z) es un espacio topológico y $g : Z \longrightarrow X$ es una función tal que $\{f_\alpha \circ g : (Z, \tau_Z) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una $\mathcal{T}\text{op}$ -fuente, entonces $g : (Z, \tau_Z) \longrightarrow (X, \tau)$ es continua.
- (3) Si σ es una topología de X tal que $\{f_\alpha : (X, \sigma) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una $\mathcal{T}\text{op}$ -fuente, entonces $\tau \subset \sigma$.

Demostración. Dual de la Proposición 1.58 □

Proposición 1.62. En cualquier subcategoría plena de $\mathcal{T}\text{op}$,

- (1) Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo sí, y sólo si f es homeomorfismo.
- (2) Un morfismo $f : X \longrightarrow Y$ es un monomorfismo sí, y sólo si f es inyectivo.

Demostración. Sea \mathcal{A} una subcategoría plena de $\mathcal{T}\text{op}$.

- (1) Necesidad. Supóngase que $f : X \longrightarrow Y$ es un \mathcal{A} -isomorfismo, existe un \mathcal{A} -morfismo $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$. Nótese que f y g son continuas y $g = f^{-1}$, por lo tanto f es un homeomorfismo.

Suficiencia. Supóngase que $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo en \mathcal{A} , existe f^{-1} en $[X, Y]_{\mathcal{T}\text{op}}$, como \mathcal{A} es plena f^{-1} pertenece a $[X, Y]_{\mathcal{A}}$. Por lo tanto f es un \mathcal{A} -isomorfismo.

(2) Necesidad. Supóngase que $f : X \longrightarrow Y$ es tal que $f(x) = f(x')$ y $x \neq x'$. Sea Z un \mathcal{A} -objeto y defínanse $g : Z \longrightarrow X$ por $g(z) = x$ para toda z en Z y $h : Z \longrightarrow X$ por $h(z) = x'$ para cada z en Z . Nótese que g y h son $\mathcal{T}\mathbf{op}$ -morfismos. Veamos que $f \circ g = f \circ h$; en efecto sea z en Z , entonces $(f \circ g)(z) = f(g(z)) = f(x) = f(x') = f(h(z)) = (f \circ h)(z)$. Así $f \circ g = f \circ h$ y $g \neq h$. Por lo tanto f no es monomorfismo.

Suficiencia. Supóngase $f : X \longrightarrow Y$ es inyectiva. Puesto que $\mathcal{T}\mathbf{op}$ es concreta y \mathcal{A} es una subcategoría de $\mathcal{T}\mathbf{op}$, entonces \mathcal{A} es concreta, por la Proposición 1.17 f es un monomorfismo.

□

Ejemplo 1.63. La categoría $\mathcal{T}\mathbf{op}$ no es balanceada $1_X : (\{0, 1\}, \tau_{dis}) \longrightarrow (\{0, 1\}, \tau_{ind})$, es biyectiva y continua, pero su inversa no es continua, es decir, no es un isomorfismo.

Proposición 1.64. Sean $u, v : X \longrightarrow Y$ dos funciones continuas cualesquiera y $A = \{x \in X \mid u(x) = v(x)\}$. Si Y es T_2 , entonces A es un conjunto cerrado en X .

Demostración. Sea x en $X \setminus A$, entonces $u(x) \neq v(x)$ y como Y es T_2 , existen A_1 y A_2 conjuntos abiertos en Y ajenos, tales que $u(x)$ pertenece a A_1 y $v(x)$ pertenece a A_2 . Puesto que u y v son continuas $u^{-1}(A_1)$ y $v^{-1}(A_2)$ son conjuntos abiertos en X y por consiguiente $u^{-1}(A_1) \cap v^{-1}(A_2)$ es un conjunto abierto en X . Nótese que $u(u^{-1}(A_1) \cap v^{-1}(A_2))$ esta contenido en A_1 y $v(u^{-1}(A_1) \cap v^{-1}(A_2))$ esta contenido en A_2 , se tiene que $u^{-1}(A_1) \cap v^{-1}(A_2)$ esta contenido en $X \setminus A$; lo que implica que $X \setminus A$ es un conjunto abierto en X . Por lo tanto A es un conjunto cerrado en X . □

Corolario 1.65. Sean $u, v : X \longrightarrow Y$ dos funciones continuas tales que $u|_D = v|_D$, donde D es un conjunto denso en X . Si Y es T_2 , entonces $u = v$.

Demostración. Puesto que $u|_D = v|_D$, entonces D está contenido en $A = \{x \in X \mid u(x) = v(x)\}$ que es un conjunto cerrado. Luego, $X = \overline{D} \subset \overline{A} = A$; así $X = A$. Por lo tanto $u = v$. □

Lema 1.66. Si $f : X \longrightarrow Y$ es un $\mathcal{T}\mathbf{op}$ -epimorfismo, S es un subespacio de Y y $f(X)$ está contenido en S , entonces $S = Y$.

Demostración. Supóngase que $f : X \longrightarrow Y$ es un $\mathcal{T}\mathbf{op}$ -morfismo y S es un subespacio propio de Y que contiene a $f(X)$, existe un punto y_0 que no pertenece a S . Demostraremos que f no es un epimorfismo construyendo un espacio Z' y dos funciones u y v tales que son $u \circ f = v \circ f$, pero $u \neq v$. Para construir el espacio Z' , sean $\{P, Q\}$ un espacio discreto, Z el espacio producto de $Y \times \{P, Q\}$, $j : Y \longrightarrow Z$

definida por $j(y) = (y, P)$ y $k : Y \rightarrow Z$ definida por $k(y) = (y, Q)$ funciones continuas. Defínase una relación de equivalencia \sim en Z de la siguiente manera:

$$(y, P) \sim (y', P) \Leftrightarrow y = y' \in Y \setminus S,$$

$$(y, Q) \sim (y', Q) \Leftrightarrow y = y' \in Y \setminus S,$$

$$(y, P) \sim (y', Q) \Leftrightarrow y = y' \in S.$$

Tenemos el siguiente espacio cociente:

$Z' = \{\{(y, P)\} \mid y \in Y \setminus S\} \cup \{\{(y, Q)\} \mid y \in Y \setminus S\} \cup \{\{(y, P), (y, Q)\} \mid y \in S\}$ y $q : Z \rightarrow Z'$ la función cociente.

Defínanse morfismos $u = q \circ j : Y \rightarrow Z'$ y $v = q \circ k : Y \rightarrow Z'$ por $u(y) = \{(y, P)\}$ y $v(y) = \{(y, Q)\}$ respectivamente. Tenemos que $u \circ f = v \circ f$; en efecto, sea x_0 en X , entonces $(u \circ f)(x_0) = u(f(x_0)) = \{(f(x_0), P)\}$ y $(v \circ f)(x_0) = v(f(x_0)) = \{(f(x_0), Q)\}$. Como $f(x_0)$ pertenece a S , tenemos que $u \circ f = v \circ f$. Nótese que $u(y_0) = \{(y_0, P)\} \neq \{(y_0, Q)\} = v(y_0)$, así $u \neq v$. Por lo tanto f no es un epimorfismo. \square

Nótese que si A es un subconjunto de Y , entonces $(q^{-1}(q(j(A)))) = j(A) \cup k(A \cap S)$ y $(q^{-1}(q(k(A)))) = k(A) \cup j(A \cap S)$.

Sea (m, P) en $j(A)$ con m en A , entonces

$$q(m, P) = \begin{cases} \{(m, P)\} & \text{si } m \in A \setminus S \\ \{(m, P), (m, Q)\} & \text{si } m \in A \cap S \end{cases}$$

Por lo que

$$q(j(m)) = \begin{cases} \{(m, P)\} & \text{si } m \in A \setminus S \\ \{(m, P), (m, Q)\} & \text{si } m \in A \cap S \end{cases}$$

En ambos casos (m, P) pertenece a $q^{-1}(q(j(A)))$. Por tanto $j(A)$ está contenido en $q^{-1}(q(j(A)))$.

Sea (m, P) en $k(A \cap S)$ con m en $A \cap S$, entonces $q(m, Q) = \{(m, P), (m, Q)\}$, así $q(j(m)) = \{(m, P), (m, Q)\}$, en consecuencia (m, Q) pertenece a $q^{-1}(q(j(A)))$. Hemos demostrado que $j(A) \cup k(A \cap S)$ está contenido en $q^{-1}(q(j(A)))$.

Ahora sea (m, T) en $q^{-1}(q(j(A)))$, entonces $q(m, T) = q(j(A))$, existe m' en A tal que $q(m, T) = q(m', P)$, lo que implica que $(m, T) \sim (m', P)$. Tenemos dos casos. (i) Si $T = P$, entonces $m = m'$ y m pertenece a A . Por lo tanto $(m, T) = (m', P) =$

$j(m')$ pertenece a $q(j(A)) \cup k(A \cap S)$.

(ii) Si $T \neq P$, entonces $(m, T) = (m, Q) \sim (m', P)$ con m en A , en consecuencia $m = m'$ pertenece a $A \cap S$, por lo que (m, T) pertenece a $k(A \cap S)$. Hemos demostrado que $q^{-1}(q(j(A)))$ está contenido en $j(A) \cup k(A \cap S)$.

Por lo tanto $j(A) \cup k(A \cap S) = q^{-1}(q(j(A)))$.

Similarmente se demuestra que $(q^{-1}(q(k(A)))) = k(A) \cup j(A \cap S)$.

Diremos que una función continua $f : X \rightarrow Y$ es densa siempre que $Cl_Y(f(X)) = Y$. Un encaje cerrado $f : X \rightarrow Y$ es encaje que satisface $f(X) = Cl_Y(f(X))$.

Proposición 1.67. (1) En \mathcal{Top}_0 , un morfismo $f : X \rightarrow Y$ es un epimorfismo sí, y sólo si para cualquier y en Y , toda vecindad de y interseca a $f(X) \cap Cl_Y(\{y\})$.

(2) En \mathcal{Top} y \mathcal{Top}_1 un morfismo $f : X \rightarrow Y$ es un epimorfismo sí, y sólo si f es sobreyectivo.

(3) En \mathcal{Top}_2 y \mathcal{Top}_3 un morfismo $f : X \rightarrow Y$ es un epimorfismo sí, y sólo si f es denso.

Demostración. En (2) se demostrará la Necesidad, la suficiencia se sigue de la Proposición 1.18

(1) Necesidad. Sea $f : X \rightarrow Y$ morfismo en \mathcal{Top}_0 y sea $b(f(X)) = \{y \in Y \mid \text{ toda vecindad de } y \text{ interseca a } f(X) \cap Cl_Y(\{y\})\}$. Entonces $f(X) \subset b(f(X))$, supóngase que $b(f(X))$ es un subespacio propio de Y , existe un punto y_0 en Y que no pertenece a $b(f(X))$. Se demostrará que f no es un epimorfismo construyendo un espacio Z' y dos funciones u y v tales que son $u \circ f = v \circ f$, pero $u \neq v$. Para construir el espacio Z , sean $\{P, Q\}$ un espacio discreto y Z el espacio producto de $Y \times \{P, Q\}$, $j : Y \rightarrow Z$ definida por $j(y) = (y, P)$ y $k : Y \rightarrow Z$ definida por $k(y) = (y, Q)$ funciones continuas. Defínase una relación de equivalencia en Z de la siguiente manera:

$$(y, P) \sim (y', P) \Leftrightarrow y = y' \in Y \setminus b(f(X)),$$

$$(y, Q) \sim (y', Q) \Leftrightarrow y = y' \in Y \setminus b(f(X)),$$

$$(y, P) \sim (y', Q) \Leftrightarrow y = y' \in b(f(X)).$$

Tenemos el siguiente espacio cociente:

$$Z' = \{ \{(y, P)\} \mid y \in Y \} \cup \{ \{(y, Q)\} \mid y \in Y \} \cup \{ \{(y, P), (y, Q)\} \mid y \in b(f(X)) \}$$

y $q : Z \rightarrow Z'$ la función cociente.

Definanse morfismos $u = q \circ j : Y \longrightarrow Z'$ por $u(y) = \{(y, P)\}$ y $v = q \circ k : Y \longrightarrow Z'$ por $v(y) = \{(y, Q)\}$. Se tiene que $u \circ f = v \circ f$; en efecto, sea x_0 en X , entonces $(u \circ f)(x_0) = u(f(x_0)) = \{(f(x_0), P)\}$ y $(v \circ f)(x_0) = v(f(x_0)) = \{(f(x_0), Q)\}$. Como $f(x_0) \in b(f(X))$, tenemos que $u \circ f = v \circ f$. Por otro lado como y_0 pertenece a $Y \setminus b(f(X))$, entonces $u(y_0) = \{(y_0, P)\} \neq \{(y_0, Q)\} = v(y_0)$, así $u \neq v$. Por lo tanto f no es un epimorfismo.

Para completar la demostración resta demostrar que el espacio cociente Z' es un \mathcal{Top}_0 -objeto. Considérense dos puntos distintos de Z' . Existen seis casos en los que encontraremos un conjunto abierto que contiene a alguno de dichos puntos.

- I. $\{(y, P)\} \neq \{(y', P)\}$, con $y, y' \in Y \setminus b(f(X))$.
- II. $\{(y, Q)\} \neq \{(y', Q)\}$, con $y, y' \in Y \setminus b(f(X))$.
- III. $\{(y, P), (y, Q)\} \neq \{(y', P), (y', Q)\}$, con $y, y' \in b(f(X))$.
- IV. $\{(y, P)\} \neq \{(y', P), (y', Q)\}$, con $y \in Y \setminus b(f(X))$ y $y' \in b(f(X))$.
- V. $\{(y, Q)\} \neq \{(y', P), (y', Q)\}$, con $y \in Y \setminus b(f(X))$ y $y' \in b(f(X))$.
- VI. $\{(y, P)\} \neq \{(y, Q)\}$, con $y \in Y \setminus b(f(X))$.

- I. Sea $\{(y, P)\} \neq \{(y', P)\}$, con $y, y' \in Y \setminus b(f(X))$. Puesto que Y es un \mathcal{Top}_0 -objeto, y y y' son puntos distintos de Y , podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe un conjunto abierto, A , de Y tal que y pertenece a A y y' no pertenece a A . Sea $\bar{U} = u(A) \cup v(A)$, nótese que

$$\begin{aligned}
q^{-1}(\bar{U}) &= q^{-1}(u(A) \cup v(A)) \\
&= q^{-1}(q(j(A)) \cup q(k(A))) \\
&= q^{-1}(q(j(A))) \cup q^{-1}(q(k(A))) \\
&= j(A) \cup k(A \cap b(f(X))) \cup k(A) \cup j(A \cap b(f(X))) \\
&= j(A) \cup k(A) \\
&= (A \times \{P\}) \cup (A \times \{Q\})
\end{aligned}$$

es un conjunto abierto en Z y por tanto \bar{U} es un conjunto abierto en Z' . Es claro que $\{(y, P)\}$ pertenece a \bar{U} , sin embargo $\{(y', P)\}$ no pertenece a \bar{U} . En efecto, si $\{(y', P)\}$ pertenece a \bar{U} , entonces $\{(y', P)\}$ pertenece a $u(A) = q(j(A))$ o $\{(y', P)\}$ pertenece a $v(A) = q(k(A))$. Si $\{(y', P)\}$ pertenece a $q(j(A))$, existe y'' en A tal que $\{(y', P)\} = \{(y'', P)\}$, lo que contradice el hecho de que y' no pertenece a A . Si $\{(y', P)\}$ pertenece a $q(k(A))$, existe y'' en A tal que $\{(y', P)\} = \{(y'', Q)\}$, lo que es una contradicción pues y' no pertenece a $b(f(X))$.

- II. La demostración es similar a I.

- III. La demostración es similar a I.
- IV. Sea $\{(y, P)\} \neq \{(y', P), (y', Q)\}$, con $y \in Y \setminus b(f(X))$ y $y' \in b(f(X))$. Puesto que y no pertenece a $b(f(X))$, existe un conjunto abierto, A , tal que y pertenece a A , y' no pertenece a A y $A \cap b(f(X)) \neq \emptyset$. Sea $\bar{U} = u(A)$, es claro que $\{(y, P)\}$ pertenece a \bar{U} y $\{(y', P), (y', Q)\}$ no pertenece a \bar{U} . Nótese que $q^{-1}(\bar{U}) = A \times \{P\}$ es un abierto en Z y por lo tanto \bar{U} es un conjunto abierto en Z' .
- V. La demostración es similar a IV.
- VI. Sea $\{(y, P)\} \neq \{(y, Q)\}$, con $y \in Y \setminus b(f(X))$. Como y no pertenece a $b(f(X))$, existe un conjunto abierto, A , de Y tal que $A \cap (f(X) \cap Cl_Y(\{y\})) = \emptyset$. Sea $\bar{U} = q(j(A) \cup q(k(Y \setminus Cl_Y(\{y\}))) \cup q(j(Y \setminus Cl_Y(\{y\})))$. Si y pertenece a A , entonces $q(j(y))$ pertenece a \bar{U} . Pero $q(k(y))$ no pertenece a \bar{U} ya que: $q(k(y)) \in q(j(A))$ implica que existe y' en A tal que $q(k(y)) = q(j(y'))$, entonces $y = y'$ lo cual es una contradicción, pues y no pertenece a $b(f(X))$. Por otro lado si $q(k(y))$ pertenece a $q(k(Y \setminus Cl_Y(\{y\})))$, entonces existe y' en $Y \setminus Cl_Y(\{y\})$ tal que $q(k(y)) = q(k(y'))$, entonces $y = y'$ está en $Y \setminus Cl_Y(\{y\})$ lo cual es una contradicción. Por últimos si $q(k(y)) \in q(j(Y \setminus Cl_Y(\{y\})))$, entonces existe y' en $Y \setminus Cl_Y(\{y\})$ tal que $q(k(y)) = q(j(y'))$, entonces $y = y'$ pertenece a $Y \setminus Cl_Y(\{y\})$ lo cual es una contradicción.
- Para ver que \bar{U} es abierto, se demostrará el siguiente Lema.

Lema 1.68. $A \cap b(f(X)) \subseteq Y \setminus Cl_Y(\{y\})$.

Demostración. Sea y' en $A \cap b(f(X))$, entonces $y' \in b(f(X))$ y $A \in \mathcal{V}_{y'}$, luego $A \cap (f(X) \cap Cl_Y(\{y'\})) \neq \emptyset$, por lo que existe $f(x)$ en $A \cap Cl_Y(\{y'\})$.

Como $f(x)$ está en $f(X) \cap A$ y $A \cap (f(X) \cap Cl_Y(\{y\})) = \emptyset$, tenemos que $f(x)$ no pertenece a $Cl_Y(\{y\})$, así que existe U en $\mathcal{V}_{f(x)}$ tal que $U \subseteq Y \setminus Cl_Y(\{y\})$. Pero $f(x)$ pertenece a $Cl_Y(\{y'\})$, lo que implica $U \cap Cl_Y(\{y'\}) \neq \emptyset$, es decir, y' está en U , luego y' pertenece a $Y \setminus Cl_Y(\{y\})$. Por lo tanto $A \cap b(f(X)) \subseteq Y \setminus Cl_Y(\{y\})$. \square

Ahora veamos que $q^{-1}(\bar{U})$ es abierto en Z . Notemos que

$$q^{-1}(\bar{U}) = q^{-1}(q(j(A) \cup q(k(Y \setminus Cl_Y(\{y\}))) \cup q(j(Y \setminus Cl_Y(\{y\}))))).$$

$$\text{Pero } q^{-1}(q(j(A))) = j(A) \cup k(A \cap b(f(X))).$$

$$q^{-1}(q(j(Y \setminus Cl_Y(\{y\})))) = j(Y \setminus Cl_Y(\{y\})) \cup k(Y \setminus Cl_Y(\{y\}) \cap b(f(X))).$$

$$q^{-1}(q(k(Y \setminus Cl_Y(\{y\})))) = k(Y \setminus Cl_Y(\{y\})) \cup j(Y \setminus Cl_Y(\{y\}) \cap b(f(X))).$$

Por lo tanto

$$q^{-1}(\bar{U}) = [j(A) \cup k(A \cap b(f(X)))] \cup [j(Y \setminus Cl_Y(\{y\})) \cup k(Y \setminus Cl_Y(\{y\}) \cap b(f(X)))] \cup [k(Y \setminus Cl_Y(\{y\})) \cup j(Y \setminus Cl_Y(\{y\}) \cap b(f(X)))].$$

Así

$$\begin{aligned} q^{-1}(\overline{U}) \cap j(A) &= j(A) \cup j(Y \setminus Cl_Y(\{y\})) \cup j(Y \setminus Cl_Y(\{y\}) \cap b(f(X))) \\ &= j(A) \cup j(A \cup (Y \setminus Cl_Y(\{y\}))) \\ &= j(Y \setminus Cl_Y(\{y\})). \end{aligned}$$

El cual es abierto en Z pues $A \cup Y \setminus Cl_Y(\{y\})$ es abierto en Y y j es homeomorfismo.

También

$$\begin{aligned} q^{-1}(\overline{U}) \cap k(A) &= k(A \cap b(f(X))) \cup k(Y \setminus Cl_Y(\{y\}) \cap b(f(X))) \cup k(Y \setminus Cl_Y(\{y\})) \\ &= k(A \cap b(f(X))) \cup k(Y \setminus Cl_Y(\{y\})) \\ &= k((A \cap b(f(X))) \cup (Y \setminus Cl_Y(\{y\}))) \\ &= k(Y \setminus Cl_Y(\{y\})). \end{aligned}$$

Por consiguiente, como $Y \setminus Cl_Y(\{y\})$ es abierto en Y y k es homeomorfismo, $q^{-1}(\overline{U}) \cap k(Y)$ es abierto en Z . Por lo tanto $q^{-1}(\overline{U})$ es abierto en Z y \overline{U} es abierto en Z' .

Por lo tanto Z' es un \mathfrak{Top}_0 -objeto.

Suficiencia. Supóngase que $b(f(X)) = Y$ y sean $u, v : Y \rightarrow W$ \mathfrak{Top}_0 -morfismos con $u \circ f = v \circ g$. Afirmamos que $u = v$; si y es un punto en Y tal que $u(y) \neq v(y)$, existe un conjunto abierto A en W tal que $u(y)$ pertenece a A y $v(y)$ no pertenece a A . Entonces $u^{-1}(A)$ es una vecindad de y y existe y' en $u^{-1}(A) \cap f(X) \cap Cl_Y(\{y\})$. Así $u(y') = v(y')$ pertenece a $v(Cl_Y(\{y\})) \subset Cl_W(\{v(y)\})$. Por otro lado, $u(y')$ pertenece a A y $v(y)$ no pertenece a A esto es una contradicción. Por lo tanto, $u = v$ y f es un epimorfismo.

- (2) Necesidad. Supóngase que $f : X \rightarrow Y$ es un \mathcal{Top} -morfismo que no es sobreyectivo, existe y_0 en Y tal que y_0 no pertenece a $f(X)$. Sea $Z = \{0, 1\}$ con la topología discreta y defínanse funciones $u : Y \rightarrow Z$ por $u(y) = 0$ para toda y en Y y

$$v(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in f(X) \\ 1 & \text{si } y \notin f(X) \end{cases}$$

Nótese que u y v son funciones continuas tales que $u \circ f = v \circ f$. En efecto x_0 en X , se tiene que $(v \circ f)(x_0) = v(f(x_0)) = 0 = u(f(x_0)) = (u \circ f)(x_0)$. Así

$u \circ f = v \circ f$ y $u \neq v$. Por tanto f no es un epimorfismo.

Necesidad. Supóngase que $f : X \rightarrow Y$ es un \mathcal{Top}_1 -morfismo tal que $f(X)$ es un subespacio propio de Y , existe un punto y_0 que no pertenece a $f(X)$. Demostraremos que f no es un epimorfismo construyendo un espacio Z' y dos funciones u y v tales que son $u \circ f = v \circ f$, pero $u \neq v$. Para construir el espacio Z' , sean $\{P, Q\}$ un espacio discreto, Z el espacio producto de $Y \times \{P, Q\}$, $j : Y \rightarrow Z$ definida por $j(y) = (y, P)$ y $k : Y \rightarrow Z$ definida por $k(y) = (y, Q)$ funciones continuas. Defínase una relación de equivalencia \sim en Z de la siguiente manera:

$$(y, P) \sim (y', P) \Leftrightarrow y = y' \in Y \setminus f(X),$$

$$(y, Q) \sim (y', Q) \Leftrightarrow y = y' \in Y \setminus f(X),$$

$$(y, P) \sim (y', Q) \Leftrightarrow y = y' \in f(X).$$

Tenemos el siguiente espacio cociente:

$Z' = \{\{(y, P)\} \mid y \in Y\} \cup \{\{(y, Q)\} \mid y \in Y\} \cup \{\{(y, P), (y, Q)\} \mid y \in f(X)\}$ y $q : Z \rightarrow Z'$ la función cociente.

Defínase morfismos $u = q \circ j : Y \rightarrow Z'$ por $u(y) = \{(y, P)\}$ y $v = q \circ k : Y \rightarrow Z'$ por $v(y) = \{(y, Q)\}$. Tenemos que $u \circ f = v \circ f$; en efecto, sea x_0 en X , entonces $(u \circ f)(x_0) = u(f(x_0)) = \{(f(x_0), P)\}$ y $(v \circ f)(x_0) = v(f(x_0)) = \{(f(x_0), Q)\}$. Como $f(x_0) \in f(X)$, tenemos que $u \circ f = v \circ f$. Nótese que $u(y_0) = \{(y_0, P)\} \neq \{(y_0, Q)\} = v(y_0)$, así $u \neq v$. Por lo tanto f no es un epimorfismo.

Para completar la demostración resta demostrar que el espacio cociente Z' es un \mathcal{Top}_1 -objeto. Considérense dos puntos distintos de Z' . Existen seis casos en los que encontraremos conjuntos abiertos ajenos que contienen a dichos puntos.

- I. $\{(y, P)\} \neq \{(y', P)\}$, con $y, y' \in Y \setminus f(X)$.
- II. $\{(y, Q)\} \neq \{(y', Q)\}$, con $y, y' \in Y \setminus f(X)$.
- III. $\{(y, P), (y, Q)\} \neq \{(y', P), (y', Q)\}$, con $y, y' \in f(X)$.
- IV. $\{(y, P)\} \neq \{(y', P), (y', Q)\}$, con $y \in Y \setminus f(X)$ y $y' \in f(X)$.
- V. $\{(y, Q)\} \neq \{(y', P), (y', Q)\}$, con $y \in Y \setminus f(X)$ y $y' \in f(X)$.
- VI. $\{(y, P)\} \neq \{(y, Q)\}$, con $y \in Y \setminus f(X)$.

- I. Si $\{(y, P)\} \neq \{(y', P)\}$, entonces $y \neq y'$ con $y, y' \in Y \setminus f(X)$. Como Y es T_1 existen conjuntos abiertos en Y , A y A' tales que y pertenece a

A , y' pertenece a A' , y no pertenece a A' y y' no pertenece a A . Sean $\bar{U} = u(A) \cup v(A)$ y $\bar{U}' = u(A') \cup v(A')$, veamos que son conjuntos abiertos en Z' . Nótese que

$$\begin{aligned} q^{-1}(\bar{U}) &= q^{-1}(u(A) \cup v(A)) \\ &= q^{-1}(q(j(A) \cup k(A))) \\ &= j(A) \cup k(A \cap f(X)) \cup k(A) \cup j(A \cap f(X)) \\ &= j(A) \cup k(A) \end{aligned}$$

es un conjunto abierto en Z , similarmente $q^{-1}(\bar{U}') = j(A') \cup k(A')$ es un conjunto abierto en Z . Por consiguiente \bar{U} y \bar{U}' son conjuntos abiertos en Z' . Es claro que $\{(y, P)\} = u(y)$ pertenece a \bar{U} y $\{(y', P)\} = u(y')$ pertenece a \bar{U}' . Demostraremos que $\{(y', P)\}$ no pertenece a \bar{U} . Si $\{(y', P)\}$ pertenece a \bar{U} , entonces $\{(y', P)\}$ pertenece a $u(A)$ o $\{(y', P)\}$ pertenece a $v(A)$. Si $\{(y', P)\}$ pertenece a $u(A)$, entonces $\{(y', P)\} = \{(m, P)\}$ para algún m en $A \setminus f(X)$, lo que implica que $y' = m$ pertenece a A , una contradicción puesto que y' no pertenece a A . Si $\{(y', P)\}$ pertenece a $v(A)$, entonces $\{(y', P)\} = \{(m, Q)\}$ para algún m en $A \setminus f(X)$ lo cual no es posible puesto que y' y m no pertenecen a $f(X)$. Similarmente $\{(y, P)\}$ no pertenece a \bar{U}' .

- II. Si $\{(y, Q)\} \neq \{(y', Q)\}$, con $y, y' \in Y \setminus f(X)$. La demostración es similar a I.
- III. Si $\{(y, P), (y, Q)\} \neq \{(y', P), (y', Q)\}$, entonces $y \neq y'$ con $y, y' \in f(X)$. Como Y es T_1 existen conjuntos abiertos en Y , A y A' tales que y pertenece a A , y' pertenece a A' , y no pertenece a A' y y' no pertenece a A . Sean $\bar{U} = u(A) \cup v(A)$ y $\bar{U}' = u(A') \cup v(A')$. Puesto que $q^{-1}(\bar{U}) = q^{-1}(u(A)) \cup q^{-1}(v(A)) = j(A) \cup k(A)$ y $q^{-1}(\bar{U}') = j(A') \cup k(A')$ son conjuntos abiertos en Z . Entonces \bar{U} y \bar{U}' son conjuntos abiertos en Z' . Es claro que $\{(y, P), (y, Q)\}$ pertenece a \bar{U} y $\{(y', P), (y', Q)\}$ pertenece a \bar{U}' . Veamos que $\{(y', P), (y', Q)\}$ no pertenece a \bar{U} . Si $\{(y', P), (y', Q)\}$ pertenece a \bar{U} , entonces $\{(y', P), (y', Q)\}$ pertenece a $u(A)$ o $\{(y', P), (y', Q)\}$ pertenece a $v(A)$. Si $\{(y', P), (y', Q)\}$ pertenece a $u(A)$, entonces $\{(y', P), (y', Q)\} = \{(m, P), (m, Q)\}$ para algún m en $A \cap f(X)$, lo que implica que $y' = m$ pertenece a A , una contradicción puesto que y' no pertenece a A . Si $\{(y', P), (y', Q)\}$ pertenece a $v(A)$, entonces $\{(y', P), (y', Q)\} = \{(m, P), (m, Q)\}$ para algún m en $A \cap f(X)$, entonces $y' = m$ pertenecen a A una contradicción. Similarmente $\{(y, P), (y, Q)\}$ no pertenece a \bar{U}' .
- IV. Si $\{(y, P)\} \neq \{(y', P), (y', Q)\}$, entonces $y \neq y'$ con $y \in Y \setminus f(X)$ y $y' \in f(X)$. Como Y es T_1 existen conjuntos abiertos en Y , A y A' tales que y pertenece a A , y' pertenece a A' , y no pertenece a A' y y' no pertenece a A . Sean $\bar{U} = u(A) \cup v(A)$ y $\bar{U}' = u(A') \cup v(A')$. Puesto que

$q^{-1}(\overline{U}) = q^{-1}(u(A)) \cup q^{-1}(v(A)) = j(A) \cup k(A)$ y $q^{-1}(\overline{U}') = j(A') \cup k(A')$ son conjuntos abiertos en Z . Entonces \overline{U} y \overline{U}' son conjuntos abiertos en Z' . Es claro que $\{(y, P)\}$ pertenece a \overline{U} y $\{(y', P), (y', Q)\}$ pertenece a \overline{U}' . Veamos que $\{(y, P)\}$ no pertenece a \overline{U}' . Si $\{(y, P)\}$ pertenece a \overline{U}' , entonces $\{(y, P)\}$ pertenece a $u(A)$ o $\{(y, P)\}$ pertenece a $v(A)$. Si $\{(y, P)\}$ pertenece a $u(A)$, entonces $\{(y, P)\} = \{(m, P)\}$ para algún m en $A \setminus f(X)$, lo que implica que $y' = m$ pertenece a A , una contradicción puesto que y' no pertenece a A . Si $\{(y, P)\}$ pertenece a $v(A)$, entonces $\{(y, P)\} = \{(m, P)\}$ para algún m en $A \cap f(X)$, entonces $y' = m$ pertenecen a $f(X)$ una contradicción. Similarmente $\{(y', P), (y', Q)\}$ no pertenece a \overline{U} .

- V. Si $\{(y, Q)\} \neq \{(y', P), (y', Q)\}$, con $y \in Y \setminus f(X)$ y $y' \in f(X)$. La demostración es similar a IV.
- VI. Si $\{(y, P)\} \neq \{(y, Q)\}$, con $y \in Y \setminus f(X)$. Puesto que Y es T_1 , entonces $\{y\} = Cl_Y\{y\}$ y $U = Y \setminus Cl_Y\{y\}$ es un conjunto abierto en Y . Nótese que y no pertenece a $b(f(X))$ pues y no está en $f(X)$, existe una vecindad de y , A , tal que $A \cap (f(X) \cap \{y\})$ y además $A \cap f(X)$ está contenida en U . Sean $\overline{U} = u(A) \cup v(U) \cup u(U)$ y $\overline{U}' = v(A) \cup v(U) \cup u(U)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
q^{-1}(\overline{U}) &= q^{-1}(u(A) \cup v(U) \cup u(U)) \\
&= q^{-1}(q(j(A)) \cup q(k(U)) \cup q(j(U))) \\
&= q^{-1}(q(j(A))) \cup q^{-1}(q(k(U))) \cup q^{-1}(q(j(U))) \\
&= j(A) \cup k(A \cap f(X)) \cup k(U) \cup j(U \cap f(X)) \cup j(U) \cup k(U \cap f(X)) \\
&= j(A \cup U) \cup k(U)
\end{aligned}$$

y $q^{-1}(\overline{U}') = k(A \cup U) \cup j(U)$ son conjuntos abiertos en Z . En consecuencia \overline{U} y \overline{U}' son conjuntos abiertos en Z' . Es claro que $\{(y, P)\}$ pertenece a \overline{U} y $\{(y, Q)\}$ pertenece a \overline{U}' . Se puede demostrar que $\{(y, P)\}$ no pertenece a \overline{U}' y que $\{(y, Q)\}$ no pertenece a \overline{U} .

Por lo tanto Z' es un \mathfrak{Top}_1 -objeto.

- (3) Necesidad. Supóngase que $f : X \rightarrow Y$ es un \mathcal{Top}_2 -morfismo tal que $f(X)$ no es densa en Y , es decir, tal que $Cl_Y(f(X))$ es en subespacio propio de Y . Demostraremos que f no es un epimorfismo construyendo un espacio Z' y dos funciones u y v tales que son $u \circ f = v \circ f$, pero $u \neq v$. Para construir el espacio Z' , sean $\{P, Q\}$ un espacio discreto, Z el espacio producto de $Y \times \{P, Q\}$, $j : Y \rightarrow Z$ definida por $j(y) = (y, P)$ y $k : Y \rightarrow Z$ definida por $k(y) = (y, Q)$ funciones continuas. Defínase una relación de equivalencia \sim en Z de la siguiente manera:

$$(y, P) \sim (y', P) \Leftrightarrow y = y' \in Y \setminus Cl_Y(f(X)),$$

$$(y, Q) \sim (y', Q) \Leftrightarrow y = y' \in Y \setminus Cl_Y(f(X)),$$

$$(y, P) \sim (y', Q) \Leftrightarrow y = y' \in Cl_Y(f(X)).$$

Tenemos el siguiente espacio cociente:

$Z' = \{\{(y, P)\} \mid y \in Y\} \cup \{\{(y, Q)\} \mid y \in Y\} \cup \{\{(y, P), (y, Q)\} \mid y \in Cl_Y(f(X))\}$ y $q : Z \longrightarrow Z'$ la función cociente.

Definanse morfismos $u = q \circ j : Y \longrightarrow Z'$ por $u(y) = \{(y, P)\}$ y $v = q \circ k : Y \longrightarrow Z'$ por $v(y) = \{(y, Q)\}$. Tenemos que $u \circ f = v \circ f$; en efecto sea x_0 en X , entonces $(u \circ f)(x_0) = u(f(x_0)) = \{(f(x), P)\}$ y $(v \circ f)(x_0) = v(f(x_0)) = \{(f(x), Q)\}$. Como $f(x_0) \in Cl_Y(f(X))$, tenemos que $u \circ f = v \circ f$. Nótese que si $y \in Y \setminus Cl_Y(f(X))$, entonces $u(y) = \{(y, P)\} \neq \{(y, Q)\} = v(y)$, así $u \neq v$. Por lo tanto f no es un epimorfismo.

Para completar la demostración resta demostrar que el espacio cociente Z' es un \mathcal{Top}_2 -objeto. Considérense dos puntos distintos de Z' . Existen seis casos en los que encontraremos conjuntos abiertos ajenos que contienen a dichos puntos.

- I. $\{(y, P)\} \neq \{(y', P)\}$, con $y, y' \in Y \setminus Cl_Y(f(X))$.
- II. $\{(y, Q)\} \neq \{(y', Q)\}$, con $y, y' \in Y \setminus Cl_Y(f(X))$.
- III. $\{(y, P), (y, Q)\} \neq \{(y', P), (y', Q)\}$, con $y, y' \in Cl_Y(f(X))$.
- IV. $\{(y, P)\} \neq \{(y', P), (y', Q)\}$, con $y \in Y \setminus Cl_Y(f(X))$ y $y' \in Cl_Y(f(X))$.
- V. $\{(y, Q)\} \neq \{(y', P), (y', Q)\}$, con $y \in Y \setminus Cl_Y(f(X))$ y $y' \in Cl_Y(f(X))$.
- VI. $\{(y, P)\} \neq \{(y, Q)\}$, con $y \in Y \setminus Cl_Y(f(X))$.

- I. Si $\{(y, P)\} \neq \{(y', P)\}$, entonces $y \neq y'$ con $y, y' \in Y \setminus Cl_Y(f(X))$. Como Y es T_2 existen conjuntos abiertos en Y ajenos, A y A' tales que y pertenece a A y y' pertenece a A' . Por otro lado como $Cl_Y(f(X))$ es cerrado en Y , se tiene que $V = Y \setminus Cl_Y(f(X))$ es un conjunto abierto en Y . En consecuencia $U = A \cap V$ y $U' = A' \cap V$ son conjuntos abiertos en Y ajenos, tales que y pertenece a U y y' pertenece a U' . Sean $\bar{U} = u(U)$ y $\bar{U}' = u(U')$, veamos que son conjuntos abiertos en Z' . Puesto que $U \cap Cl_Y(f(X)) = \emptyset$, entonces

$$\begin{aligned} q^{-1}(\bar{U}) &= q^{-1}(u(U)) \\ &= q^{-1}(q(j(U))) \\ &= j(U) \cup k(U \cap Cl_Y(f(X))) \\ &= j(U) \end{aligned}$$

es un conjunto abierto en Z , similarmente $q^{-1}(\overline{U'}) = j(U')$ es un conjunto abierto en Z . Por consiguiente \overline{U} y $\overline{U'}$ son conjuntos abiertos en Z' . Es claro que $\{(y, P)\} = u(y)$ pertenece a \overline{U} y $\{(y', P)\} = u(y')$ pertenece a $\overline{U'}$. Resta demostrar que $\overline{U} \cap \overline{U'} = \emptyset$. Si \bar{x} pertenece a $\overline{U} \cap \overline{U'}$, entonces $\bar{x} = \{(m, P)\}$ con m en $U \setminus Cl_Y(f(X))$ y $\bar{x} = \{(m', P)\}$ con m' en $U' \setminus Cl_Y(f(X))$, lo que implica que $m = m'$ pertenece a U' , una contradicción puesto que $U \cap U' = \emptyset$. También puede suceder que $\bar{x} = \{(m, P), (m, Q)\}$ con m en $U \cap Cl_Y(f(X))$ y $\bar{x} = \{(m', P), (m', Q)\}$ con m' en $U' \cap Cl_Y(f(X))$, así $m = m'$ pertenece a U' , lo que contradice que $U \cap U' = \emptyset$.

- II. Si $\{(y, Q)\} \neq \{(y', Q)\}$, con $y, y' \in Y \setminus Cl_Y(f(X))$. La demostración es similar a (I).
- III. Si $\{(y, P), (y, Q)\} \neq \{(y', P), (y', Q)\}$, entonces $y \neq y'$ con $y, y' \in Cl_Y(f(X))$. Como Y es T_2 existen conjuntos abiertos en Y ajenos, A y A' tales que y pertenece a A y y' pertenece a A' . Sean $\overline{U} = (u(A) \cup v(A))$ y $\overline{U'} = (u(A') \cup v(A'))$, veamos que son conjuntos abiertos en Z' . Nótese que

$$\begin{aligned} q^{-1}(\overline{U}) &= q^{-1}(u(A)) \cup q^{-1}(v(A)) \\ &= q^{-1}(q(j(A))) \cup q^{-1}(q(k(A))) \\ &= j(A) \cup k(A \cap Cl_Y(f(X))) \cup k(A) \cup j(A \cap Cl_Y(f(X))) \\ &= j(A) \cup k(A) \end{aligned}$$

que es un conjunto abierto en Z , similarmente $q^{-1}(\overline{U'}) = j(A') \cup k(A')$ es un conjunto abierto en Z . En consecuencia \overline{U} y $\overline{U'}$ son conjuntos abiertos en Z' . Es claro que $\{(y, P), (y, Q)\}$ pertenece a \overline{U} y $\{(y', P), (y', Q)\}$ pertenece a $\overline{U'}$. Se puede demostrar que $\overline{U} \cap \overline{U'} = \emptyset$.

- IV. Si $\{(y, P)\} \neq \{(y', P), (y', Q)\}$, entonces $y \neq y'$ con $y \in Y \setminus Cl_Y(f(X))$ y $y' \in Cl_Y(f(X))$. Como Y es T_2 existen conjuntos abiertos en Y ajenos, A y A' tales que y pertenece a A y y' pertenece a A' . Puesto que $V = Y \setminus Cl_Y(f(X))$ es un conjunto abierto en Y , se tiene que $U = A \cap V$ es un conjunto abierto en Y . Sean $\overline{U} = u(U)$ y $\overline{U'} = (u(A') \cup v(A'))$. Hemos visto que $q^{-1}(\overline{U})$ y $q^{-1}(\overline{U'})$ son conjuntos abiertos en Z y por consiguiente \overline{U} y $\overline{U'}$ son conjuntos abiertos en Z' . Es claro que $\{(y, P)\}$ pertenece a \overline{U} y $\{(y', P), (y', Q)\}$ pertenece a $\overline{U'}$. Se puede demostrar que $\overline{U} \cap \overline{U'} = \emptyset$.
- V. Si $\{(y, Q)\} \neq \{(y', P), (y', Q)\}$, con $y \in Y \setminus Cl_Y(f(X))$ y $y' \in Cl_Y(f(X))$. La demostración es similar a (IV).
- VI. Si $\{(y, P)\} \neq \{(y, Q)\}$, con $y \in Y \setminus Cl_Y(f(X))$. El conjunto $V = Y \setminus Cl_Y(f(X))$ es abierto en Y , nótese que $V \cap Cl_Y(f(X)) = \emptyset$. Sean $\overline{U} = u(V)$ y $\overline{U'} = v(V)$, se tiene que $q^{-1}(\overline{U}) = j(V)$ y $q^{-1}(\overline{U'}) = k(V)$ son

conjuntos abiertos en Z . En consecuencia \bar{U} y \bar{U}' son conjuntos abiertos en Z' . Es claro que $\{(y, P)\}$ pertenece a \bar{U} y $\{(y', Q)\}$ pertenece a \bar{U}' . Se puede demostrar que $\bar{U} \cap \bar{U}' = \emptyset$.

Por lo tanto Z' es un \mathfrak{Top}_2 -objeto.

Suficiencia. Supóngase que $f : X \rightarrow Y$ es una función densa en \mathfrak{Top}_2 . Sean $u, v : Y \rightarrow Z$ morfismos en \mathfrak{Top}_2 tales que $u \circ f = v \circ f$, entonces $u|_{f(X)} = v|_{f(X)}$. Por el Corolario 1.65, se tiene que $u = v$. Por lo tanto f es un epimorfismo.

La demostración para el caso de \mathfrak{Top}_3 es similar a la de \mathfrak{Top}_2 . Resta demostrar que Z' es un \mathfrak{Top}_3 -objeto; ya se ha demostrado que Z' es un \mathfrak{Top}_1 -objeto. Veamos que Z' es regular.

- I. Sea $\{(y, P)\}$ en Z' , con y en $Y \setminus Cl_Y(f(X))$ y sea \bar{O} un conjunto abierto en Z' con $\{(y, P)\}$ en \bar{O} . Nótese que $V = Y \setminus Cl_Y(f(X))$ y $u^{-1}(\bar{O})$ son conjuntos abiertos en Y que contienen a y . Sea $W = V \cap u^{-1}(\bar{O})$, como Y es un espacio regular y y está en W , existe un conjunto abierto A tal que $y \in A \subset Cl_Y(A) \subset W$. Demostraremos que $\bar{U} = u(A)$ es un conjunto abierto en Z' tal que $\{(y, P)\} \in \bar{U} \subset Cl_{Z'}(\bar{U}) \subset \bar{O}$. Puesto que $A \cap Cl_Y(f(X)) = \emptyset$, $q^{-1}(\bar{U}) = q^{-1}(u(A)) = j(A)$ es un conjunto abierto en Z y por consiguiente \bar{U} es un conjunto abierto en Z' , es claro que $\{(y, P)\} \in \bar{U}$. Veamos que $\bar{U} \subset \bar{O}$; sea z en \bar{U} , entonces existe m en $A \subset W$ tal que $z = u(m)$, como m está en W , se tiene que $m = u^{-1}(\bar{O})$, así $u(m)$ pertenece a \bar{O} . Para ver que $Cl_{Z'}(\bar{U}) \subset \bar{O}$, nótese que $Cl_{Z'}(\bar{U}) = Cl_{Z'}(u(A))$ y $q^{-1}(u(Cl_Y(A))) = j(Cl_Y(A))$ es un conjunto cerrado en Z , en consecuencia $u(Cl_Y(A))$ es un conjunto cerrado en Z' ; así $Cl_{Z'}(u(A)) = u(Cl_Y(A))$. Sea z en $Cl_{Z'}(\bar{U})$, existe l en $Cl_Y(A) \subset W$ tal que $z = u(l)$ y como l está en W , se tiene que $l = u^{-1}(\bar{O})$, así $u(l)$ pertenece a \bar{O} . Por lo tanto Z' es un espacio regular.
- II. Sea $\{(y, Q)\}$ en Z' , con y en $Y \setminus Cl_Y(f(X))$ y sea \bar{U} un conjunto abierto en Z' con $\{(y, Q)\}$ en \bar{U} . La demostración es similar a la de I.
- III. Sea $\{(y, P), (y, Q)\}$, con y en $Cl_Y(f(X))$ y sea \bar{U} un conjunto abierto en Z' con $\{(y, P), (y, Q)\}$ en \bar{U} . Nótese que $u^{-1}(\bar{O})$ y $v^{-1}(\bar{O})$ son conjuntos abiertos en Y que contienen a y . Sea $W = u^{-1}(\bar{O}) \cap v^{-1}(\bar{O})$, como Y es un espacio regular y y está en W , existe un conjunto abierto A tal que $y \in A \subset Cl_Y(A) \subset W$. Demostraremos que $\bar{U} = u(A) \cup v(A)$ es un conjunto abierto en Z' tal que $\{(y, P), (y, Q)\} \in \bar{U} \subset Cl_{Z'}(\bar{U}) \subset \bar{O}$. Obsérvese que $q^{-1}(\bar{U}) = q^{-1}(u(A) \cup v(A)) = j(A) \cup k(A)$ es un conjunto abierto en Z y por consiguiente \bar{U} es un conjunto abierto en Z' . Puesto que y está en $A \cap Cl_Y(f(X))$, implica que $\{(y, P), (y, Q)\} \in \bar{U}$. Veamos

que $\bar{U} \subset \bar{O}$; sea z en \bar{U} , entonces z pertenece a $u(A) \cup v(A)$. Si z está en $u(A)$, existe m en $A \subset W$ tal que $z = u(m)$, como m está en W , se tiene que m pertenece a $u^{-1}(\bar{O}) \cap v^{-1}(\bar{O})$, así $u(m)$ pertenece a \bar{O} y $v(m)$ pertenece a \bar{O} . Así z pertenece a \bar{O} . Similarmente si z está en $v(A)$, entonces z pertenece a \bar{O} . Para ver que $Cl_{Z'}(\bar{U}) \subset \bar{O}$, nótese que $Cl_{Z'}(\bar{U}) = Cl_{Z'}(u(A)) \cup Cl_{Z'}(v(A))$, $q^{-1}(u(Cl_Y(A))) = j(Cl_Y(A)) \cup k(A \cap Cl_Y(A))$ y $q^{-1}(v(Cl_Y(A))) = k(Cl_Y(A)) \cup j(A \cap Cl_Y(A))$ son conjuntos cerrados en Z , en consecuencia $u(Cl_Y(A))$ y $v(Cl_Y(A))$ son conjuntos cerrados en Z' . Por consiguiente $Cl_{Z'}(u(A)) = u(Cl_Y(A))$, $Cl_{Z'}(v(A)) = v(Cl_Y(A))$ y $Cl_{Z'}(\bar{U}) = u(Cl_Y(A)) \cup v(Cl_Y(A))$. Sea z en $Cl_{Z'}(\bar{U})$, entonces z pertenece a $u(Cl_Y(A)) \cup v(Cl_Y(A))$. Si z está en $u(Cl_Y(A))$, existe l en $Cl_Y(A) \subset W$ tal que $z = u(l)$ y como l está en W , se tiene que $l = u^{-1}(\bar{O})$, así $u(l)$ pertenece a \bar{O} . De manera similar si z está en $v(Cl_Y(A))$, entonces z pertenece a \bar{O} . Por lo tanto Z' es un espacio regular. □

Proposición 1.69. (1) En \mathcal{Top} y \mathcal{Top}_1 un morfismo $f : X \rightarrow Y$ es un monomorfismo extremal sí, y sólo si es un encaje.

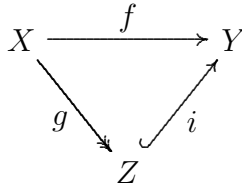
(2) En \mathcal{Top}_2 y \mathcal{Top}_3 un morfismo $f : X \rightarrow Y$ es un monomorfismo extremal sí, y sólo si es un encaje cerrado.

(3) En \mathcal{Top}_0 , un morfismo $f : X \rightarrow Y$ es un monomorfismo extremal sí, y sólo si es un encaje cerrado frontal, es decir, un encaje que satisface la siguiente condición: Si cualquier vecindad de y interseca a $f(X) \cap Cl\{y\}$, entonces $y \in f(X)$.

(4) En \mathcal{Top} y \mathcal{Top}_i para $i = 0, 1, 2, 3$, un morfismo $f : X \rightarrow Y$ es un epimorfismo extremal sí, y sólo si es una función cociente.

Demostración.

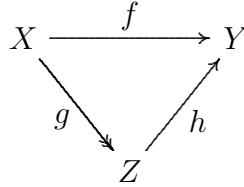
(1) Necesidad. Supóngase que $f : X \rightarrow Y$ es un monomorfismo extremal en \mathcal{Top} . Sea $Z = f(X)$ con la topología inicial con respecto a la inclusión $i : Z \rightarrow Y$. Defínase $g : X \rightarrow Z$ por $g(x) = f(x)$ para cada x en X . Nótese que el siguiente diagrama



conmuta. La función g es sobreyectiva, ya que para toda y en $f(X)$, existe x en X tal que $y = f(x) = i^{-1}(f(x)) = g(x)$. Como f es un monomorfismo

extremal, entonces g es un isomorfismo. Por tanto f es un encaje.

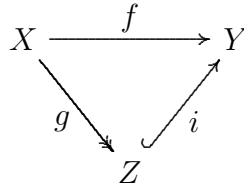
Suficiencia. Supóngase que $f : X \rightarrow Y$ es un encaje. Sea $f = h \circ g$, donde g es un epimorfismo. La función f es un monomorfismo porque es inyectiva, resta demostrar que g es un isomorfismo.



Como f es inyectiva, entonces g es inyectiva y por consiguiente biyectiva. Además $g^{-1} : Z \rightarrow X$ es continua porque $f \circ g^{-1} = h$ es continua y τ_X es la topología inicial de X respecto a f . Así g es un isomorfismo. Por lo tanto f es un monomorfismo extremal.

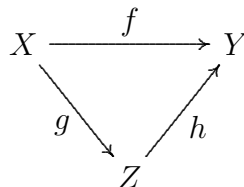
La demostración para \mathcal{Top}_1 es idéntica a la de \mathcal{Top} .

- (2) Necesidad. Supóngase que $f : X \rightarrow Y$ es un monomorfismo extremal en \mathcal{Top}_2 . Sea $Z = Cl_Y(f(X))$ con la topología inicial con respecto a la inclusión $i : Z \rightarrow Y$. Defínase $g : X \rightarrow Z$ por $g(x) = f(x)$ para cada x en X . Nótese que el siguiente diagrama



conmuta. Como g es densa y f es un monomorfismo extremal, entonces g es un isomorfismo, es decir, f es un homeomorfismo entre X y $Cl_Y(f(X))$, es decir, $Cl_Y(f(X)) = f(X)$. Por tanto f es un encaje cerrado.

Suficiencia. Supóngase que $f : X \rightarrow Y$ es un encaje cerrado. Sea $f = h \circ g$ una factorización de f , donde g es un epimorfismo. La función f es un monomorfismo porque es inyectiva, resta demostrar que g es un isomorfismo.



Nótese que $h(Z) = h(Cl_Z(g(X))) \subset Cl_Y(h(g(X))) = Cl_Y(f(X)) = f(X)$. Así $h(Z)$ está contenido en $f(X)$. Defínase $h' : Z \rightarrow f(X)$ por $h'(z) = h(z)$ para toda z en Z , se tiene que $i \circ h' = h$. Existe $j : Cl_Y(f(X)) \rightarrow X$ tal que $j \circ f = 1_X$, obsérvese que

$$(j \circ h \circ g)(x) = j(h(g(x))) = j(i(h'(g(x)))) = j(i(g(x))) = j(g(x)) = j(h'(g(x)))$$

por otro lado $(j \circ h \circ g)(x) = (j \circ f)(x) = x$; así $(j \circ h') \circ g = 1_X$. En consecuencia g es co-retracción y epimorfismo, por lo tanto, g es isomorfismo.

La demostración para \mathcal{Top}_3 es idéntica a la de \mathcal{Top}_2 .

- (3) Necesidad. Supóngase que $f : X \rightarrow Y$ es un monorfismo extremal en \mathcal{Top}_0 . Sea $Z = b(f(X))$ un subespacio de Y y sea $f = h \circ g$, donde g es un epimorfismo en \mathcal{Top}_0 y h la inclusión. Defínase $g : X \rightarrow Z$ por $g(x) = f(x)$ para cada x en X . Nótese que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g & \nearrow i \\ & & Z \end{array}$$

conmuta. Como g es un epimorfismo en \mathcal{Top}_0 y f es un monomorfismo extremal, entonces g es un isomorfismo, es decir, f es un homeomorfismo entre X y $b(f(X))$, es decir, $b(f(X)) = f(X)$. Por tanto f es un encaje cerrado frontal.

Suficiencia. Supóngase que $f : X \rightarrow Y$ es un encaje cerrado frontal en \mathcal{Top}_0 , es decir, $b(f(X)) = f(X)$. Sean $f = h \circ g$ con $g : X \rightarrow Z$ un epimorfismo y $h : Z \rightarrow Y$ un morfismo en \mathcal{Top}_0 . Para cada z en Z y para cualquier vecindad U de $h(z)$, existe un punto z' en $h^{-1}(U) \cap g(X) \cap Cl_Z(\{z\})$. Entonces $h(z')$ pertenece a $U \cap f(X) \cap Cl_Y(\{h(z)\})$ y por tanto, $h(z)$ pertenece a $b(f(X)) = f(X)$. Como f es inyectiva, entonces g es inyectiva y existe $k : Z \rightarrow X$ tal que $k \circ g = 1_X$. Además como f es inicial y $h = f \circ k$, entonces k es continua. Por lo tanto, g es un isomorfismo y f es un monomorfismo extremal en \mathcal{Top}_0 .

- (4) Necesidad. Supóngase que $f : X \rightarrow Y$ es un epimorfismo extremal en \mathcal{Top} . Defínase una relación de equivalencia \sim en X por $x_1 \sim x_2$ sí, y sólo si $f(x_1) = f(x_2)$. Sean $g : X \rightarrow X/\sim$ una identificación en \mathcal{Top} y $h : X/\sim \rightarrow Y$ un morfismo en \mathcal{Top} definido por $h([x]) = f(x)$. Veamos que h está bien definida; sean $[x_1]$ y $[x_2]$ en X/\sim tales que $[x_1] = [x_2]$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$, lo que implica $h([x_1]) = h([x_2])$. Además h es inyectiva, en efecto sean $[x_1]$ y $[x_2]$ en X/\sim tales que $[x_1] \neq [x_2]$, entonces $h([x_1]) = f(x_1) \neq f(x_2) = h([x_2])$, así h

es monomorfismo en \mathcal{Top} . Nótese que $f = h \circ g$, en efecto sea x en X , entonces $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h([x]) = f(x)$. Puesto que $h \circ g$ es continua, entonces por la propiedad universal de la topología final del cociente h es continua. Puesto que f es epimorfismo extremal y h es monomorfismo, entonces h es isomorfismo en \mathcal{Top} y por consiguiente homeomorfismo. Hemos demostrado que f es composición de una identificación y un homeomorfismo, por lo tanto es una función cociente.

La demostración para un \mathcal{Top}_i -objeto X , es idéntica a la de \mathcal{Top} . Resta demostrar que h es un morfismo en \mathcal{Top}_i

\mathcal{Top}_0 . Sean $[x_1]$ y $[x_2]$ en X/\sim tales que $[x_1] \neq [x_2]$, se tiene que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Dado que $f(x_1), f(x_2)$ pertenecen a Y y Y está en $\text{Ob}(\mathcal{Top}_0)$, sin pérdida de generalidad existe un conjunto abierto A en Y tal que $f(x_1)$ pertenece a A y $f(x_2)$ no pertenece a A , nótese que $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en X y $g^{-1}(h^{-1}(A)) = f^{-1}(A)$, por lo que $(h^{-1}(A))$ es un conjunto abierto en X/\sim . Obsérvese que $[x_1]$ está en $h^{-1}(A)$ y $[x_2]$ no pertenece a $h^{-1}(A)$, así $h([x_1]) = f(x_1)$ pertenece a A y $h([x_2]) = f(x_2)$ no pertenece a A . Por lo tanto, $X/\sim \in \text{Ob}(\mathcal{Top}_0)$ y h es un morfismo en \mathcal{Top}_0 .

\mathcal{Top}_1 . Sean $[x_1]$ y $[x_2]$ en X/\sim tales que $[x_1] \neq [x_2]$, se tiene que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Dado que $f(x_1), f(x_2)$ pertenecen a Y y Y está en $\text{Ob}(\mathcal{Top}_1)$, existen A_1 y A_2 conjuntos abiertos en Y tales que $f(x_1)$ pertenece a A_1 y $f(x_2)$ pertenece a A_2 , pero $f(x_1) \notin A_2$ y $f(x_2) \notin A_1$, $f^{-1}(A_1)$ y $f^{-1}(A_2)$ son conjuntos abiertos en X ; por otro lado $g^{-1}(h^{-1}(A_1)) = f^{-1}(A_1)$ y $g^{-1}(h^{-1}(A_2)) = f^{-1}(A_2)$, por lo que $(h^{-1}(A_1))$ y $(h^{-1}(A_2))$ son conjuntos abiertos en X/\sim . Nótese que $[x_1] \in h^{-1}(A_1)$ y $[x_2] \in h^{-1}(A_2)$, pero $[x_2] \notin h^{-1}(A_2)$ y $[x_2] \notin h^{-1}(A_1)$. Así $h([x_1]) = f(x_1) \in A_1$ y $h([x_2]) = f(x_2) \in A_2$, pero $h([x_1]) = f(x_1) \notin A_2$ y $h([x_2]) = f(x_2) \in A_1$. Por lo tanto, $X/\sim \in \text{Ob}(\mathcal{Top}_1)$ y h es un morfismo en \mathcal{Top}_1 .

\mathcal{Top}_2 . Sean $[x_1]$ y $[x_2]$ en X/\sim tales que $[x_1] \neq [x_2]$, se tiene que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Dado que $f(x_1), f(x_2)$ están en Y y Y pertenece a $\text{Ob}(\mathcal{Top}_2)$, existen A_1 y A_2 conjuntos abiertos en Y tales que $f(x_1)$ pertenece a A_1 , $f(x_2)$ pertenece a A_2 y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$; nótese que x_1 está en $f^{-1}(A_1)$ y x_2 pertenece a $f^{-1}(A_2)$, además $f^{-1}(A_1)$ y $f^{-1}(A_2)$ son conjuntos abiertos en X . Por otro lado $g^{-1}(h^{-1}(A_1)) = f^{-1}(A_1)$ y $g^{-1}(h^{-1}(A_2)) = f^{-1}(A_2)$, por lo que $(h^{-1}(A_1))$ y $(h^{-1}(A_2))$ son conjuntos abiertos en X/\sim . Obsérvese que $[x_1]$ en $h^{-1}(A_1)$ y $[x_2]$ en $h^{-1}(A_2)$ implican $h([x_1]) = f(x_1)$ pertenece a A_1 y $h([x_2]) = f(x_2)$ pertenece a A_2 , $h^{-1}(A_1) \cap h^{-1}(A_2) = h^{-1}(A_1 \cap A_2) = \emptyset$. Por lo tanto, $X/\sim \in \text{Ob}(\mathcal{Top}_2)$ y h es un morfismo en \mathcal{Top}_2 .

continua $\psi : Y/\sim \rightarrow Z$ tal que $k = \psi \circ q$ coincide con φ .

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \xrightarrow{1_Y} & Y & \xrightarrow{k} & Z \\
 \downarrow q & & \downarrow q' & \nearrow l & \\
 Y/\sim & \xrightarrow{1_{Y'}} & Y/R & &
 \end{array}$$

En \mathbf{Top} el objeto terminal es el espacio que consiste de un sólo punto, y el objeto inicial es el espacio vacío.

Para las funciones continuas $f : X \rightarrow W$ y $g : Y \rightarrow W$ sea $(\prod X_i, \{\pi_1, \pi_2\})$ el producto de X_1 y X_2 , y (Z, h) un igualador de $f \circ \pi_1$ y $g \circ \pi_2$, donde $Z = \{(x, y) \in X \mid f(x) = g(y)\}$ es un subespacio de $\prod X_i$ y $h : Z \rightarrow \prod X_i$ la inclusión. Entonces $(Z, \{\pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h\})$ es un jalador de (f, g) en \mathbf{Top} .

$$\begin{array}{ccccc}
 W & & & & \\
 \swarrow h & & \pi_1 \circ h & & \\
 \prod X_i & \xrightarrow{\pi_1} & X & & \\
 \downarrow \pi_2 & & \downarrow f & & \\
 Y & \xrightarrow{g} & Z & & \\
 \swarrow \pi_2 \circ h & & & &
 \end{array}$$

Obsérvese que dado (x, y) en Z , se tiene que $(f \circ (\pi_1 \circ h))(x, y) = f(\pi_1(h(x, y))) = f(\pi_1(x, y)) = f(x) = g(y) = g(\pi_2(x, y)) = g(\pi_2(h(x, y))) = g \circ (\pi_2 \circ h)(x, y)$. Sean $\alpha_1 : V \rightarrow X$ y $\alpha_2 : V \rightarrow Y$ funciones continuas tales que $f \circ \alpha_1 = g \circ \alpha_2$. Por la propiedad universal del producto existe una única función continua $\alpha : V \rightarrow \prod X_i$ tal que $\alpha_i = \pi_i \circ \alpha$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & V & & \\
 & \swarrow \alpha_1 & \downarrow \alpha & \searrow \alpha_2 & \\
 X & \xleftarrow{\pi_1} & \prod X_i & \xrightarrow{\pi_2} & Y \\
 & \searrow f & & \swarrow g & \\
 & & Z & &
 \end{array}$$

Y como (Z, h) es un igualador de $f \circ \pi_1$ y $g \circ \pi_2$, existe una única función continua

$\varphi : V \longrightarrow Z$ tal que $\alpha = h \circ \varphi$. Nótese que $(\pi_i \circ h) \circ \varphi = \pi_i \circ (h \circ \varphi) = \pi_i \circ \alpha = \alpha_i$.

$$\begin{array}{ccccc}
 W & \xleftarrow{h} & \prod X_i & \xrightarrow[\text{\scriptsize } g \circ \pi_2]{\text{\scriptsize } f \circ \pi_1} & Z \\
 & \swarrow \varphi & \nearrow \alpha & & \\
 & & V & &
 \end{array}$$

Supóngase que existe $\psi : V \longrightarrow Z$ tal que $\alpha = h \circ \psi$, entonces $(\pi_i \circ h) \circ \psi = \alpha_i$, así $\pi_i \circ (h \circ \psi) = \pi_i \circ \alpha$, lo que implica que $h \circ \psi = \alpha = h \circ \varphi$, como h es un monomorfismo $\psi = \varphi$. Por lo tanto $(Z, \{\pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h\})$ es un jalador de (f, g) .

Proposición 1.71. En \mathcal{Top} y en \mathcal{Top}_i para $i = 0, 1, 2, 3$, todo monomorfismo extremal es un monomorfismo regular.

Demostración. Supóngase que $f : X \longrightarrow Y$ es un \mathcal{Top} -monomorfismo extremal, entonces f es un encaje. Sea $Z = Y \times \{P, Q\}$ y $Z' = Z / \sim$, como en la Proposición 1.67

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow[\text{\scriptsize } j]{\text{\scriptsize } k} Z \xrightarrow{q} Z'$$

Nótese que $u(f(x)) = q(f(x), P) = \{(f(x), P)\} = \{f(x), Q\} = q(f(x), Q) = v(f(x))$, porque $f(x)$ pertenece a $f(X)$. Sea $g : X' \longrightarrow Y$ tal que $u \circ g = v \circ g$. Veamos que $g(X')$ está contenido en $f(X)$. Sea w en X' , si $g(w)$ no pertenece a $f(X)$ tenemos que $u(g(w)) = \{(g(w), P)\} \neq \{g(w), Q\} = v(g(w))$, una contradicción; así $g(w)$ pertenece a $f(X)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow[\text{\scriptsize } u]{\text{\scriptsize } v} & Z' \\
 & \swarrow \varphi & \nearrow g & & \\
 & & X' & &
 \end{array}$$

Puesto que f es inyectiva, existe $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$. Si w en X' , entonces $\varphi(w) = (f^{-1} \circ g)(w) = f^{-1}(g(w))$, es decir, $\varphi = f^{-1} \circ g$ implica $f \circ \varphi = g$.

Para el caso de \mathcal{Top}_0 dada $f : X \longrightarrow Y$ basta considerar el conjunto $b(f(X))$. Entonces f es un monomorfismo regular si f es un encaje frontal.

Para el caso de \mathcal{Top}_1 dada $f : X \longrightarrow Y$ basta considerar el conjunto $f(X)$. Entonces f es un monomorfismo regular si f es un encaje.

Para el caso de \mathcal{Top}_2 y \mathcal{Top}_3 dada $f : X \rightarrow Y$ basta considerar el conjunto $Cl_Y(f(X))$. Entonces f es un monomorfismo regular si f es un encaje cerrado. \square

Proposición 1.72. *\mathcal{Top} y \mathcal{Top}_i para $i = 0, 1, 2, 3$ son bien potenciadas y co-bien potenciadas.*

Demostración. Dado un número cardinal k . Entonces existe un conjunto Q de \mathcal{Top} -objetos tal que todo \mathcal{Top} -objeto (Y, η) que satisface $|Y| \leq k$ es isomorfo a un objeto de Q . Sea Z un conjunto tal que $|Z| = k$ y sea (Y, η) un \mathcal{Top} -objeto tal que $|Y| \leq k$. Entonces Y es equipotente a un subconjunto X de Z , es decir, existe una función biyectiva $f : Y \rightarrow X$. Por (*) existe un única \mathcal{Top} -estructura τ en X tal que $f : (Y, \eta) \rightarrow (X, \tau)$ es un isomorfismo. Ahora sea $Q = \{(X, \tau) \in \mathcal{Top} \mid X \subset Z\}$ y \mathcal{M}_X el conjunto de todos los \mathcal{Top} -objetos con conjunto subyacente X . Entonces $Q = \bigcup_{X \in \mathcal{P}(Z)} \mathcal{M}_X$ es un conjunto.

Sea $f : (Y, \eta) \rightarrow (X, \tau)$ un monomorfismo en \mathcal{Top} . Entonces $|Y| \leq |X| = k$ porque f es inyectiva. Por la observación anterior, existe un conjunto de representantes de monomorfismos con codominio (X, τ) . Por tanto \mathcal{Top} es bien potenciada.

Sea $f : (Y, \eta) \rightarrow (X, \tau)$ un epimorfismo en \mathcal{Top} . Para cada y en Y elegimos un único x en $f^{-1}(y)$. Entonces una función inyectiva $h : Y \rightarrow X$ se define por $h(y) = x$ para cada y en Y . Como f es sobreyectiva $|Y| \leq |X| = k$, entonces existe un conjunto de representantes de epimorfismos con dominio (X, τ) . Por tanto \mathcal{Top} es co-bien potenciada. \square

Proposición 1.73. *\mathcal{Top} es completa y co-completa.*

Demostración. Puesto que \mathcal{Top} tiene productos e igualadores, por la Proposición 1.50 \mathcal{Top} es completa. \square

Definición 1.74. *Dado un conjunto dirigido (A, \preceq) . Un **sistema inverso** sobre A en \mathcal{Top} es un par $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ donde $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ es una colección de \mathcal{Top} -objetos y $\mathcal{F} = \{f_{\alpha\beta} \mid \alpha \preceq \beta; \alpha, \beta \in A\}$ es una colección de \mathcal{Top} -morfismos con las propiedades siguientes:*

$$(1) f_{\beta\alpha} : \mathcal{X}_\beta \rightarrow \mathcal{X}_\alpha.$$

$$(2) f_{\alpha\alpha} = 1_{\mathcal{X}_\alpha}.$$

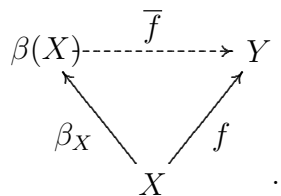
$$(3) f_{\gamma\alpha} = f_{\gamma\beta} \circ f_{\beta\alpha}.$$

Es usual denotar mediante $\langle X_\alpha, f_{\beta\alpha}, A \rangle$ el sistema inverso descrito anteriormente. El llamado también límite proyectivo X del sistema inverso $\langle X_\alpha, f_{\beta\alpha}, A \rangle$ se define como se indica.

$$X = \lim_{\leftarrow} X_\alpha = \left\{ (x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \mid x_\alpha = f_{\beta\alpha}(x_\beta); \alpha \preceq \beta \right\}$$

Dado que el límite inverso está contenido en el producto de los X_α , entonces podemos considerar las restricciones de las proyecciones $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$, las cuales claramente satisfacen $\pi_\alpha = f_{\beta\alpha} \circ \pi_\beta$.

Teorema 1.75. (Stone-Čech) Si X es un espacio de Tychonoff, entonces para cada espacio de Hausdorff compacto Y y cada función continua $f : X \rightarrow Y$, existe una única función continua $\bar{f} : \beta(X) \rightarrow Y$ tal que hace conmutar el diagrama



Capítulo 2

REFLEXIONES Y CO-REFLEXIONES

2.1. Subcategorías reflexivas

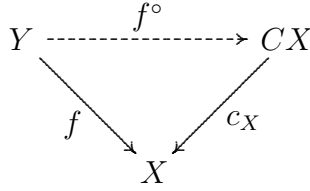
Definición 2.1. Una subcategoría \mathcal{B} de una categoría \mathcal{A} se llama **reflexiva en \mathcal{A}** (o una **subcategoría reflexiva de \mathcal{A}**) si, cualquier \mathcal{A} -objeto, X , tiene una \mathcal{B} -reflexión $r_X : X \rightarrow RX$, es decir, existe un \mathcal{A} -morfismo $r_X : X \rightarrow RX$ que satisfacen las siguientes condiciones:

- (1) $RX \in \text{Ob}(\mathcal{B})$.
- (2) Para cualquier \mathcal{A} -morfismo $f : X \rightarrow Y$ con $Y \in \text{Ob}(\mathcal{B})$, existe un único \mathcal{B} -morfismo $f^\circ : RX \rightarrow Y$ tal que $f^\circ \circ r_X = f$, f° se llama **extensión de f** .

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \overset{f^\circ}{\dashrightarrow} & \\ RX & & \\ & \swarrow r_X & \nearrow f \\ & X & \end{array}$$

Dual: Una subcategoría \mathcal{B} de una categoría \mathcal{A} se llama **co-reflexiva en \mathcal{A}** (o una **subcategoría co-reflexiva de \mathcal{A}**) si, cualquier \mathcal{A} -objeto, X , tiene una \mathcal{B} -co-reflexión $c_X : CX \rightarrow X$, es decir, existe un \mathcal{A} -morfismo $c_X : CX \rightarrow X$ que satisfacen las siguientes condiciones:

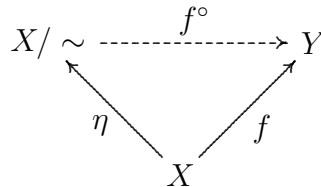
- (1) $CX \in \text{Ob}(\mathcal{B})$.
- (2) Para cualquier \mathcal{A} -morfismo $f : Y \rightarrow X$ con $Y \in \text{Ob}(\mathcal{B})$, existe un único \mathcal{B} -morfismo $f^\circ : Y \rightarrow CX$ tal que $f^\circ \circ c_X = f$, f° se llama **co-extensión de f** .



Ejemplo 2.2. (1) Sea X un \mathcal{Top} -objeto, defínase una relación \sim en X por: $x \sim y$ para x, y en X sí, y sólo si toda vecindad de x contiene a y y toda vecindad de y contiene a x . Entonces tenemos una relación de equivalencia \sim en X . La función cociente $\eta : X \rightarrow X/\sim$ definida por $\eta(x) = [x]$ es una \mathcal{Top}_0 -reflexión.

Primero demostraremos que η es una función abierta y X tiene la topología inicial. Sea A un conjunto abierto en X , demostraremos que $\eta^{-1}(\eta(A)) = A$. Es claro que $A \subseteq \eta^{-1}(\eta(A))$. Ahora, sea x un punto en $\eta^{-1}(\eta(A))$, entonces $\eta(x) \in \eta(A)$, existe un punto $y \in A$ tal que $\eta(x) = \eta(y)$, esto es, $[x] = [y]$. Como A es una vecindad de y se tiene que $x \in A$; así $\eta^{-1}(\eta(A)) \subseteq A$. Por lo tanto η es una función abierta. Veamos que X tiene la topología inicial. Sea A un conjunto abierto en X , como hemos visto $\eta^{-1}(\eta(A)) = A$. Por lo tanto η es inicial.

Ahora demostraremos que η es una \mathcal{Top}_0 -reflexión. Veamos que X/\sim pertenece a los $Ob(\mathcal{Top}_0)$. Sean $[x]$ y $[y]$ puntos distintos en X/\sim , entonces $[x] \cap [y] = \emptyset$. Supóngase que existe una vecindad V de x tal que $y \notin V$, el otro caso es similar existe una vecindad U de y tal que $x \notin U$. Como η es abierta existe un abierto $W = \eta(V)$ tal que $[x] \in W$ y $[y] \notin W$. Por lo tanto X/\sim es T_0 . Sea $f : X \rightarrow Y$ una función con Y un \mathcal{Top}_0 -objeto, entonces el morfismo $f^\circ : X/\sim \rightarrow Y$ definido por $f^\circ([x]) = f(x)$ para todo $[x]$ en X/\sim . f° está bien definida, sean $[x] = [x']$ y supóngase que $f(x)$ y $f(x')$ son puntos distintos de Y , puesto que Y es T_0 , existe una vecindad W de x tal que $x' \notin W$, entonces $x \in f^{-1}(W)$ como $x = x'$ implica que $x' \in f^{-1}(W)$, por lo que $y \in f(W)$, lo cual no es posible; así que $f(x) = f(x')$. Observemos que dado $x \in X$, $(f^\circ \circ \eta)(x) = f^\circ(\eta(x)) = f^\circ([x]) = f(x)$. Por lo tanto, f° es continuo ya que satisface que $f^\circ \circ \eta = f$ y X tiene la topología inicial.



(2) Sea \mathbf{Seq} la subcategoría plena de \mathcal{Top} de todos los espacios secuenciales. Si X es un \mathcal{Top} -objeto, defínase una topología por $\tau' = \{A \subset X \mid X \setminus A \text{ es secuencialmente cerrado en } X\}$. Así $1_X : (X, \tau') \rightarrow (X, \tau)$ es la \mathbf{Seq} -co-reflexión. En efecto sea $f : Y \rightarrow (X, \tau)$ una función continua con Y un \mathcal{Top} -objeto y defínase la función $f^\circ : Y \rightarrow (X, \tau')$ por $f^\circ(x) = f(x)$ es continua

en Seq y satisface que $1_X \circ f^\circ = f$.

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \overset{f^\circ}{\dashrightarrow} & (X, \tau') \\
 & \searrow f & \swarrow 1_X \\
 & (X, \tau) &
 \end{array}$$

Proposición 2.3. *Sea \mathcal{B} una subcategoría reflexiva de una categoría \mathcal{A} y sea $r_X : X \rightarrow RX$ la \mathcal{B} -reflexión del \mathcal{A} -objeto X . Entonces se cumple lo siguiente:*

- (1) Si $f, g : RX \rightarrow Z$ son \mathcal{B} -morfismos y $f \circ r_X = g \circ r_X$, entonces $f = g$.
- (2) r_X es esencialmente única.

Demostración.

- (1) Puesto que r_X es una \mathcal{B} -reflexión, para $f \circ r_X$ existe un único \mathcal{B} -morfismo $(f \circ r_x)^\circ$ tal que $f \circ r_X = (f \circ r_X)^\circ \circ r_X$; trivialmente f satisface $f \circ r_X = f \circ r_X$, por la unicidad de $(f \circ r_X)^\circ$ se tiene que $f = (f \circ r_X)^\circ$. Para $g \circ r_X$ existe un único \mathcal{B} -morfismo $(g \circ r_x)^\circ$ tal que $g \circ r_X = (g \circ r_X)^\circ \circ r_X$ y además $g \circ r_X = g \circ r_X$, en consecuencia $g = (g \circ r_X)^\circ$. Como $f \circ r_X = g \circ r_X$, también se cumple $(f \circ r_X)^\circ = (g \circ r_X)^\circ$. Por lo tanto $f = g$.
- (2) Sea $s_X : X \rightarrow SX$ otra \mathcal{B} -reflexión de X . Entonces existen \mathcal{B} -morfismos $(s_X)^0 : RX \rightarrow SX$ y $(r_X)^0 : SX \rightarrow RX$ tales que $(s_X)^0 \circ r_X = s_X$ y $(r_X)^0 \circ s_X = r_X$. Por tanto $(s_X)^0 \circ (r_X)^0 \circ s_X = s_X$ y $(r_X)^0 \circ (s_X)^0 \circ r_X = r_X$. Por (1) tenemos que $(s_X)^0 \circ (r_X)^0 = 1_{SX}$ y $(r_X)^0 \circ (s_X)^0 = 1_{RX}$. Es decir, r_X es esencialmente única.

□

Dualizando obtenemos:

Proposición 2.4. *Sea \mathcal{B} una subcategoría co-reflexiva de una categoría \mathcal{A} y sea $c_X : Y \rightarrow X$ la \mathcal{B} -co-reflexión del \mathcal{A} -objeto X . Entonces se cumple lo siguiente:*

- (1) Si $f, g : Z \rightarrow Y$ son \mathcal{B} -morfismos y $c_X \circ f = c_X \circ g$, entonces $f = g$.
- (2) c_X es esencialmente única.

Definición 2.5. *Sea \mathcal{B} una subcategoría reflexiva de una categoría \mathcal{A} y denótese la \mathcal{B} -reflexión de cada \mathcal{A} -objeto X por $r_X : X \rightarrow RX$. Para un \mathcal{A} -morfismo $f : X \rightarrow Y$, denotamos a un \mathcal{B} -morfismo $Rf : RX \rightarrow RY$ como $Rf = (r_Y \circ f)^\circ$, es decir, $Rf \circ r_X = r_Y \circ f$. Asignando Rf a f , obtenemos un funtor $R : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, el cual llamaremos un **\mathcal{B} -reflector**.*

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & Y \\
\downarrow r_X & \searrow r_Y \circ f & \downarrow r_Y \\
RX & \xrightarrow{Rf} & RY
\end{array}$$

Proposición 2.6. *Sea \mathcal{B} una subcategoría reflexiva de \mathcal{A} . Entonces \mathcal{B} es una subcategoría plena de \mathcal{A} sí, y sólo si para cada \mathcal{B} -objeto, X , la identidad $1_X : X \rightarrow X$ es una \mathcal{B} -reflexión.*

Demostración. Necesidad. Supóngase que \mathcal{B} es una subcategoría plena de \mathcal{A} . Sea X un \mathcal{B} -objeto y sea $f : X \rightarrow Y$ un \mathcal{A} -morfismo con Y en $\text{Ob}(\mathcal{B})$. Si $f^\circ = f$ se tiene que $f = f^\circ \circ 1_X$. Puesto que \mathcal{B} es plena y X, Y son \mathcal{B} -objetos, entonces f° es un \mathcal{B} -morfismo. Resta demostrar que f° es único; sea $g : X \rightarrow Y$ un \mathcal{B} -morfismo tal que $f = g \circ 1_X$, pero $g \circ 1_X = g$, se tiene que $g = f = f^\circ$. Por lo tanto 1_X es una \mathcal{B} -reflexión.

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f^\circ} & Y \\
\swarrow 1_X & & \searrow f \\
& X &
\end{array}$$

Suficiencia. Supóngase que para todo X en $\text{Ob}(\mathcal{B})$ la identidad es una \mathcal{B} -reflexión. Sea $f : X \rightarrow Y$ un \mathcal{A} -morfismo con Y un \mathcal{B} -objeto. Como 1_X es una \mathcal{B} -reflexión, existe un único \mathcal{B} -morfismo tal que $f = f^\circ \circ 1_X = f^\circ$. En consecuencia f es un \mathcal{B} -morfismo y por consiguiente $[X, Y]_{\mathcal{A}}$ está contenido en $[X, Y]_{\mathcal{B}}$; puesto que \mathcal{B} es una subcategoría de \mathcal{A} , se tiene que $[X, Y]_{\mathcal{B}}$ está contenido en $[X, Y]_{\mathcal{A}}$. Por lo tanto, \mathcal{B} es plena en \mathcal{A} . \square

Proposición 2.7. *Sea \mathcal{B} una subcategoría de una categoría \mathcal{A} y \mathcal{C} una subcategoría plena de \mathcal{B} que satisface la siguiente condición: Para cualquier \mathcal{B} -objeto, X , existe un \mathcal{C} -objeto, Y , y un \mathcal{B} -isomorfismo $\varphi : X \rightarrow Y$. Entonces \mathcal{C} es reflexiva en \mathcal{A} sí, y sólo si \mathcal{B} es reflexiva en \mathcal{A} .*

Demostración. Necesidad. Supóngase que \mathcal{C} es reflexiva en \mathcal{A} y sea X un \mathcal{A} -objeto, existe una \mathcal{C} -reflexión $r_X : X \rightarrow RX$ con RX en $\text{Ob}(\mathcal{C})$ y por consiguiente en $\text{Ob}(\mathcal{B})$. Sea $f : X \rightarrow Y$ un \mathcal{A} -morfismo con Y en $\text{Ob}(\mathcal{B})$, existen W en $\text{Ob}(\mathcal{C})$ y un \mathcal{B} -isomorfismo $\varphi : Y \rightarrow W$. Para $\varphi \circ f$ existe un único \mathcal{C} -morfismo $(\varphi \circ f)^\circ$ tal que $(\varphi \circ f)^\circ \circ r_X = \varphi \circ f$, nótese que $(\varphi \circ f)^\circ$ pertenece a $\text{Mor}(\mathcal{B})$ por ser \mathcal{C} plena en

\mathcal{B} ; luego $\varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f)^\circ$ es un \mathcal{B} -morfismo tal que $\varphi^{-1} \circ (\varphi \circ f)^\circ \circ r_X = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f = f$.

$$\begin{array}{ccc}
 RX & \xrightarrow{(\varphi \circ f)^\circ} & W \\
 \swarrow r_X & & \nearrow \varphi \\
 & X & \xrightarrow{f} Y
 \end{array}$$

Suficiencia. Supóngase que $g, h : RX \rightarrow Y$ son \mathcal{B} -morfismos tales que $g \circ r_X = h \circ r_X = f$, entonces $\varphi \circ g \circ r_X = \varphi \circ h \circ r_X = \varphi \circ f$; nótese que $\varphi \circ g$ y $\varphi \circ h$ son \mathcal{C} -morfismos por la Proposición 2.3 $\varphi \circ g = \varphi \circ h$ y como φ es isomorfismo tenemos que $g = h$. Así r_X es una \mathcal{B} -reflexión y por lo tanto \mathcal{B} es reflexiva en \mathcal{A} .

Supóngase que \mathcal{B} es reflexiva en \mathcal{A} y sea X un \mathcal{A} -objeto, existe una \mathcal{B} -reflexión $r_X : X \rightarrow RX$ con RX en $\text{Ob}(\mathcal{B})$, existen W en $\text{Ob}(\mathcal{C})$ y un \mathcal{B} -isomorfismo $\varphi : RX \rightarrow W$. Sea $f : X \rightarrow Y$ un \mathcal{A} -morfismo con Y en $\text{Ob}(\mathcal{C})$, existe un único \mathcal{B} -morfismo $f^\circ : RX \rightarrow Y$ tal que $f^\circ \circ r_X = f$. Nótese que $f^\circ \circ \varphi^{-1} : W \rightarrow Y$ es un \mathcal{B} -morfismo y por consiguiente un \mathcal{C} -morfismo tal que $f^\circ \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ r_X = f$. Supóngase que $g, h : W \rightarrow Y$ son \mathcal{C} -morfismos tales que $g \circ \varphi \circ r_X = h \circ \varphi \circ r_X = f$, $g \circ \varphi$ y $h \circ \varphi$ son \mathcal{B} -morfismos por la Proposición 2.3 $g \circ \varphi = h \circ \varphi$ y como φ es isomorfismo tenemos que $g = h$. Así $\varphi \circ r_X$ es una \mathcal{C} -reflexión y por lo tanto \mathcal{C} es reflexiva en \mathcal{A} . \square

Una subcategoría \mathcal{B} de una categoría \mathcal{A} se dice **cerrada bajo isomorfismos** siempre que dados un \mathcal{B} -objeto X y un \mathcal{A} -isomorfismo $\varphi : X \rightarrow Y$, implica que Y es un \mathcal{B} -objeto.

De ahora en adelante, asumiremos que todas las subcategorías son plenas y cerrada bajo isomorfismos.

Definición 2.8. Sea \mathcal{E} una clase de morfismos de una categoría \mathcal{A} que es cerrada bajo la composición con isomorfismos. Una subcategoría reflexiva \mathcal{B} de una categoría \mathcal{A} se llama **\mathcal{E} -reflexiva en \mathcal{A}** si, cada \mathcal{B} -reflexión r_X de cada \mathcal{A} -objeto, X , pertenece a \mathcal{E} . Para el caso $\mathcal{E} = \text{Epi } \mathcal{A}$ la clase de todos los epimorfismos en \mathcal{A} , \mathcal{B} se llama **epi-reflexiva en \mathcal{A}** y similarmente usaremos notaciones **Mono \mathcal{A}** , **Bi \mathcal{A}** y **Epi \mathcal{A}** con las terminologías **mono-reflexiva**, **bi-reflexiva** y **epi ex-reflexiva**.

Proposición 2.9. Si \mathcal{B} es epi-co-reflexiva en \mathcal{A} , entonces \mathcal{B} es mono-co-reflexiva en \mathcal{A} .

Demostración. Supóngase que \mathcal{B} es una subcategoría epi-co-reflexiva de \mathcal{A} . Sea X un \mathcal{A} -objeto y sea $c_X : CX \rightarrow X$ la \mathcal{B} -co-reflexión de X . Sean f y g \mathcal{A} -morfismos tales que $f, g : Y \rightarrow CX$ y $c_X \circ f = c_X \circ g$. Puesto que Y es un \mathcal{A} -objeto existe un epimorfismo co-reflexión $c_Y : CY \rightarrow Y$. Ahora $c_X \circ (f \circ c_Y) = (c_X \circ f) \circ c_Y = (c_X \circ g) \circ c_Y = c_X \circ (g \circ c_Y)$. Como $f \circ c_Y$ y $g \circ c_Y$ son \mathcal{B} -morfismos, por la Proposición

2.4 se sigue que $f \circ c_Y = g \circ c_Y$ y por ser c_Y epimorfismo se tiene que $f = g$. Por tanto c_X es un monomorfismo. \square

Proposición 2.10. *Si \mathcal{B} es mono-reflexiva en \mathcal{A} , entonces \mathcal{B} es epi-reflexiva en \mathcal{A} .*

Demostración. Se sigue dualizando la Proposición anterior. \square

Definición 2.11. *Un objeto S de una categoría \mathcal{A} se llama un **separador** si, $f, g : X \rightarrow Y$ son \mathcal{A} -morfismos diferentes, entonces existe un \mathcal{A} -morfismo $x : S \rightarrow X$ tal que $f \circ x \neq g \circ x$.*

*Dual: **co-separador**.*

Ejemplo 2.12. (1) *En \mathbf{Conj} y \mathbf{Top} , todos los objetos no vacíos son separadores. Sea S un \mathbf{Top} -objeto distinto del vacío y sean $f, g : X \rightarrow Y$ \mathbf{Top} -morfismos diferentes, entonces que existe x_0 en X tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Sea $\bar{x} : S \rightarrow X$ definida por $\bar{x}(s) = x_0$ para toda s en S , entonces $(f \circ \bar{x})(s) = f(x_0) \neq g(x_0) = (g \circ \bar{x})(s)$.*

(2) *En \mathbf{Grp} y \mathbf{Ab} , el grupo aditivo \mathbb{Z} de todos los enteros es un separador. Sean $\alpha, \beta : G \rightarrow H$ \mathbf{Grp} -morfismos diferentes, entonces que existe g en G tal que $\alpha(g) \neq \beta(g)$. Sea $\bar{x} : \mathbb{Z} \rightarrow G$ definida por $\bar{x}(n) = g^n$ para toda n en \mathbb{Z} , entonces $(f \circ \bar{x})(1) = \alpha(g) \neq \beta(g) = (g \circ \bar{x})(1)$.*

Proposición 2.13. *Supóngase que una categoría \mathcal{A} tiene un separador S y \mathcal{B} es una subcategoría de \mathcal{A} la cual contiene a S . Entonces \mathcal{B} es bi-co-reflexiva en \mathcal{A} si, y sólo si es co-reflexiva en \mathcal{A} .*

Demostración. Basta demostrar la suficiencia. Supóngase que \mathcal{B} es co.reflexiva en \mathcal{A} y S está en \mathcal{B} . Sea X un \mathcal{A} -objeto y sea $c_X : CX \rightarrow X$ la \mathcal{B} -reflexión de X y sean $f, g : X \rightarrow Y$ \mathcal{A} -morfismos tales que $f \circ c_X = g \circ c_X$. Entonces para cada \mathcal{A} -morfismo $h : S \rightarrow X$ existe un único \mathcal{B} -morfismo $h^\circ : S \rightarrow CX$ que satisface $c_X \circ h^\circ = h$. Así $f \circ h = f \circ c_X \circ h^\circ = g \circ c_X \circ h^\circ = g \circ h$. Como S es un separador $f = g$. Se sigue que c_X es un epimorfismo, por consiguiente \mathcal{B} es epi-co-reflexiva; por la Proposición 2.9 es mono-co-reflexiva y por tanto bi-co-reflexiva. \square

Observación. La proposición anterior tiene aplicaciones para \mathbf{Top} y sus subcategorías, sin embargo, la noción dual tiene pocas. En efecto, un espacio topológico, X , es un co-separador en \mathbf{Top} sí, y sólo si contiene un subespacio discreto no trivial.

Ejemplo 2.14. (1) *Sea X un espacio Tychonoff. La compactación de Ston-Čech $\beta_X : X \rightarrow \beta X$ de X es un encaje denso de X sobre un espacio compacto de Hausdorff βX con la propiedad universal.*

$$\begin{array}{ccc}
 \beta X & \overset{f^\circ}{\dashrightarrow} & Y \\
 \swarrow \beta_X & & \nearrow f \\
 & X &
 \end{array}$$

Esto significa que la categoría \mathbf{CompT}_2 es una subcategoría \mathcal{E} -reflexiva de la categoría \mathbf{Tyc} , donde \mathbf{Tyc} (respectivamente \mathbf{CompT}_2) es la subcategoría plena de \mathbf{Top} de todos los espacios de Hausdorff completamente regulares (respectivamente de todos los espacios de Hausdorff compactos) y \mathcal{E} es la clase de todos los encajes densos en \mathbf{Tyc} .

- (2) \mathbf{Ab} es una subcategoría epi-reflexiva de \mathbf{Grp} . La reflexión $r_X : X \rightarrow RX$ es la abelianización de $a_G : G \rightarrow G/[G, G]$, donde $[G, G]$ es el subgrupo conmutador de G . Sea $h : G \rightarrow A$ un \mathbf{Grp} -morfismo con A un \mathbf{Ab} -objeto. Obsérvese que $G/[G, G]$ es un \mathbf{Ab} -objeto y $[G, G] \leq \ker h$. Por el primer teorema de isomorfismos existe un único \mathbf{Ab} -morfismo $h^\circ : G/[G, G] \rightarrow A$ tal que $h = h^\circ \circ a_G$.

$$\begin{array}{ccc} G/[G, G] & \overset{h^\circ}{\dashrightarrow} & A \\ & \swarrow a_G \quad \searrow h & \\ & G & \end{array}$$

- (3) La subcategoría plena \mathbf{Ind} de \mathbf{Top} de todos los espacios indiscretos es bi-reflexiva en \mathbf{Top} . Si $f^\circ = f$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau_{ind}) & \overset{f^\circ}{\dashrightarrow} & (Y, \tau') \\ & \swarrow 1_X \quad \searrow f & \\ & (X, \tau) & \end{array}$$

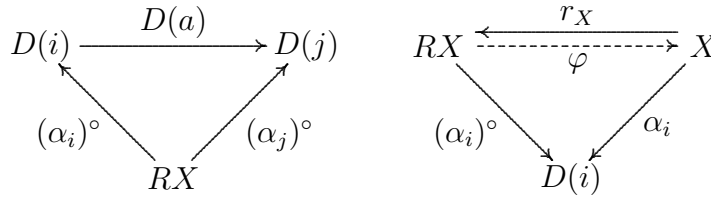
- (4) La subcategoría plena \mathbf{Dis} de \mathbf{Top} de todos los espacios discretos es bi-co-reflexiva en \mathbf{Top} . Sean X un \mathbf{Top} -objeto, CX un espacio discreto con el mismo conjunto subyacente de X y $c_X : CX \rightarrow X$ el \mathbf{Top} -morfismo indicado por la función identidad. Entonces c_X es la co-reflexión de X . Si $f^\circ = f$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (Y, \tau') & \overset{f^\circ}{\dashrightarrow} & (X, \tau_{dis}) \\ & \searrow f \quad \swarrow 1_X & \\ & (X, \tau) & \end{array}$$

Definición 2.15. Sea \mathcal{K} una categoría pequeña, \mathcal{B} es cerrada en \mathcal{A} bajo \mathcal{K} -límites sí, para cualquier diagrama $D : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{B}$ en \mathcal{B} sobre \mathcal{K} , un límite para $E \circ D$ es un límite pra D .

Proposición 2.16. Si \mathcal{B} es reflexiva en \mathcal{A} , entonces \mathcal{B} es cerrada bajo \mathcal{K} -límites para cualquier categoría pequeña \mathcal{K} .

Demostración. Sea $D : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{B}$ un diagrama y $(X, \{\alpha_i : X \rightarrow D(i) \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ un límite para $E \circ D$. Demostraremos que X es un \mathcal{B} -objeto. Sea $r_X : X \rightarrow RX$ la \mathcal{B} -reflexión de X . Entonces para cada $i \in \text{Ob}(\mathcal{K})$ existe un \mathcal{B} -morfismo $(\alpha_i)^\circ : RX \rightarrow D(i)$ tal que $(\alpha_i)^\circ \circ r_X = \alpha_i$ y $(RX, \{(\alpha_i)^\circ \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ es una fuente natural para $E \circ D$. Entonces existe un morfismo $\varphi : RX \rightarrow X$ tal que $\alpha_i \circ \varphi = (\alpha_i)^\circ$ para cada $i \in \text{Ob}(\mathcal{K})$. Así $\alpha_i \circ \varphi \circ r_X = \alpha_i$, por la unicidad del conector $\varphi \circ r_X = 1_X$. Por la Proposición 2.3, se tiene que $r_X \circ \varphi = 1_{RX}$, en consecuencia r_X es isomorfismo y por tanto, X es un \mathcal{B} -objeto.

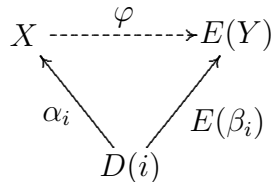


□

Concluimos esta sección demostrando la relación entre subcategorías reflexivas y co-límites.

Proposición 2.17. *Supóngase que \mathcal{B} es una subcategoría reflexiva de una categoría \mathcal{A} con funtor inclusión $E : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ y reflector $R : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y supóngase que $D : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{B}$ es un diagrama en \mathcal{B} sobre una categoría pequeña \mathcal{K} . Entonces si existe un co-límite para $E \circ D : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A}$, entonces existe un co-límite para D .*

Demostración. Supóngase que $(X, \{\alpha_i : D(i) \rightarrow X \mid i \in \text{Ob}(K)\})$ es un co-límite para $E \circ D$. Demostraremos que $(RX, \{r_X \circ \alpha_i : RD(i) \rightarrow RX \mid i \in \text{Ob}(K)\})$ es un co-límite para $R \circ D : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{B}$. Es claro que RX es un \mathcal{B} -objeto y $r_X \circ \alpha_i : E(D(i)) \rightarrow RX$ es un \mathcal{B} -morfismo para cada i en $\text{Ob}(K)$. Sea $a : i \rightarrow j$ un \mathcal{K} -morfismo, tenemos que $r_X \circ \alpha_i = r_X \circ \alpha_j \circ E(D(a)) = r_X \circ \alpha_j \circ D(a)$ para cada i en $\text{Ob}(K)$. De aquí que $(RX, \{r_X \circ \alpha_i : RD(i) \rightarrow RX \mid i \in \text{Ob}(K)\})$ es un sumidero natural para D . Sea $(Y, \{\beta_i : D(i) \rightarrow Y \mid i \in \text{Ob}(K)\})$ un sumidero natural para D . Veamos que $(E(Y), \{E(\beta_i) : E(D(i)) \rightarrow E(Y) \mid i \in \text{Ob}(K)\})$ es un sumidero natural para $E \circ D$. Nótese que $E(Y)$ es un \mathcal{A} -objeto y $E(\beta_i) : E(D(i)) \rightarrow E(Y)$ son \mathcal{A} -morfismos para cada i en $\text{Ob}(K)$. Sea $a : i \rightarrow j$ un \mathcal{K} -morfismo, tenemos que $E(\beta_i) = E(\beta_j \circ D(a)) = E(\beta_j) \circ E(D(a))$. Así $(Y, \{\beta_i\})$ es un sumidero natural para $E \circ D$. Como $(X, \{\alpha_i\})$ es un co-límite para $E \circ D$ existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi : X \rightarrow E(Y)$ con $E(\beta_i) = \varphi \circ \alpha_i$ para cada i en $\text{Ob}(K)$.



Puesto que \mathcal{B} es reflexiva en \mathcal{A} existe un único morfismo $\varphi^\circ : RX \longrightarrow E(Y)$ tal que $\varphi = \varphi^\circ \circ r_X$.

$$\begin{array}{ccc} RX & \overset{\varphi^\circ}{\dashrightarrow} & E(Y) \\ & \swarrow r_X \quad \searrow \varphi & \\ & X & \end{array}$$

Así $\beta_i = E(\beta_i) = \varphi \circ \alpha_i = \varphi^\circ \circ r_X \circ \alpha_i$ para cada i en $\text{Ob}(K)$. Supóngase que existe un \mathcal{B} -morfismo $\psi : RX \longrightarrow Y$ tal que $\psi \circ r_X \circ \alpha_i = \beta_i$ para cada i en $\text{Ob}(K)$. Entonces $E(\psi) : E(RXE) \longrightarrow (Y)$ es un \mathcal{A} -morfismo con $E(\psi \circ r_X \circ \alpha_i) = E(\beta_i)$ para cada i en $\text{Ob}(K)$. Por lo tanto $E(\psi) \circ r_X = \varphi$ y como $E(\psi) = \psi$ se tiene que $\psi \circ r_X \circ \alpha_i = \psi$ lo que implica que $\psi = \varphi^\circ$. Por lo tanto $(RX, \{r_X \circ \alpha_i\})$ es un co-límite para D . \square

Corolario 2.18. *Si una categoría \mathcal{A} es co-completa y \mathcal{B} es una subcategoría reflexiva de \mathcal{A} , entonces \mathcal{B} es co-completa.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 2.17 y del hecho que $E \circ D$ es un diagrama en \mathcal{A} sobre \mathcal{K} . \square

Proposición 2.19. *Supóngase que \mathcal{B} es una subcategoría reflexiva de \mathcal{A} con funtor inclusión $E : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ y reflector $R : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ y que $D : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ es un diagrama en \mathcal{A} sobre \mathcal{K} . Entonces si $(X, \{\alpha_i : D(i) \longrightarrow X \mid i \in \text{Ob } \mathcal{K}\})$ es un co-límite para D , entonces $(RX, \{R\alpha_i : RD(i) \longrightarrow RX \mid i \in \text{Ob } \mathcal{K}\})$ es un co-límite para $R \circ D : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{B}$.*

Demostración. Es claro que RX es un \mathcal{B} -objeto y $R\alpha_i$ es un \mathcal{B} -morfismo para cada i en $\text{Ob}(\mathcal{K})$. Veamos que $(RX, \{R\alpha_i : RD(i) \longrightarrow RX \mid i \in \text{Ob}(K)\})$ es un sumidero natural para $R \circ D$. Sea $a : i \longrightarrow j$ un \mathcal{K} -morfismo; puesto que $(X, \{\alpha_i : D(i) \longrightarrow X \mid i \in \text{Ob } \mathcal{K}\})$ es una fuente natural para D , entonces $\alpha_i = \alpha_j \circ D(a)$, aplicando el reflector se obtiene $R\alpha_i = R(\alpha_j \circ D(a)) = R\alpha_j \circ RD(a)$. Así, $(RX, \{R\alpha_i \mid i \in \text{Ob}(K)\})$ es una fuente natural para $R \circ D$.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} D(i) & \xrightarrow{\alpha_i} & X \\ D(a) \downarrow & \searrow \alpha_j & \\ D(j) & & \end{array} & \xrightarrow{R} & \begin{array}{ccc} RD(i) & \xrightarrow{R\alpha_i} & RX \\ RD(a) \downarrow & \searrow R\alpha_j & \\ RD(j) & & \end{array} \end{array}$$

Sea $(Y, \{\beta_i : RD(i) \longrightarrow Y \mid i \in \text{Ob}(K)\})$ una fuente natural para $R \circ D$. Veamos que $(E(Y), \{E(\beta_i \circ r_{D(i)}) : D(i) \longrightarrow E(Y) \mid i \in \text{Ob}(\mathcal{K})\})$ es una fuente natural para D . Sea $a : i \longrightarrow j$ un \mathcal{K} -morfismo, para $D(a) : D(i) \longrightarrow D(j)$ existe un \mathcal{B} -morfismo $RD(a)$ tal que $r_{D(j)} \circ D(a) = RD(a) \circ r_{D(i)}$, como $(Y, \{\beta_i\})$ es una fuente natural

para $R \circ D$ se tiene que $\beta_i = \beta_j \circ RD(a)$, entonces $\beta_i \circ r_{D(i)} = \beta_j \circ RD(a) \circ r_{D(i)} = \beta_j \circ r_{D(j)} \circ D(a)$; aplicando el funtor inclusión $E(\beta_i \circ r_{D(i)}) = E(\beta_j \circ r_{D(j)} \circ D(a)) = E(\beta_j \circ r_{D(j)}) \circ E(D(a))$. Por lo tanto, $(Y, \{\beta_i \mid i \in \text{Ob}(K)\})$ es una fuente natural para D .

Como $(X, \{\alpha_i : D(i) \rightarrow X \mid i \in \text{Ob}(K)\})$ es un co-límite para D , existe un único \mathcal{A} -morfismo $\varphi : X \rightarrow E(Y)$ tal que $\alpha_i \circ \varphi = E(\beta_i) \circ E(r_{D(i)})$. Por otro lado, como r_X es una \mathcal{B} -reflexión existe un único \mathcal{B} -morfismo $\varphi^\circ : RX \rightarrow Y$ tal que $\varphi = \varphi^\circ \circ r_X$.

$$\begin{array}{ccc}
 D(i) & \xrightarrow{\alpha_i} & X \\
 & \searrow E(\beta_i) \circ E(r_{D(i)}) & \downarrow \varphi \\
 & & E(Y)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 RX & \xrightarrow{\varphi^\circ} & Y \\
 & \swarrow r_X & \searrow \varphi \\
 & X &
 \end{array}$$

Veamos que $\varphi^\circ \circ R\alpha_i = \beta_i$; dado que $R\alpha_i \circ r_{D(i)} = r_X \circ \alpha_i$, entonces $\varphi^\circ \circ R\alpha_i \circ r_{D(i)} = \varphi^\circ \circ r_X \circ \alpha_i = \varphi \circ \alpha_i = E(\beta_i \circ r_{D(i)}) = \beta_i \circ r_{D(i)}$; puesto que $\varphi^\circ \circ R\alpha_i$ y β_i son \mathcal{B} -morfismos, por la Proposición 2.3 se tiene que $\varphi^\circ \circ R\alpha_i = \beta_i$. Sea $\psi : RX \rightarrow Y$ un \mathcal{B} -morfismo tal que $\psi \circ R\alpha_i = \beta_i$. Nótese que $\psi = \varphi^\circ$ si $\psi \circ r_X \circ \alpha_i = \beta_i \circ r_{D(i)}$; puesto que $\beta_i = \psi \circ R\alpha_i$, entonces $\beta_i \circ r_{D(i)} = \psi \circ R\alpha_i \circ r_{D(i)} = \psi \circ r_X \circ \alpha_i$, en consecuencia $\psi = \varphi^\circ$. Por lo tanto $(RX, \{R\alpha_i : RD(i) \rightarrow RX \mid i \in \text{Ob}(K)\})$ es un co-límite para $R \circ D$. \square

2.2. $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categorías

En esta sección \mathcal{E} y \mathcal{M} son clases de morfismos en una categoría \mathcal{A} la cual es cerrada bajo la composición con isomorfismos.

Definición 2.20. Una categoría \mathcal{A} es $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorizable si, para cada \mathcal{A} -morfismo $f : X \rightarrow Y$ existe una terna (Z, g, h) que consiste de un \mathcal{A} -objeto Z y morfismos $g : X \rightarrow Z$ en \mathcal{E} , $h : Z \rightarrow Y$ en \mathcal{M} tales que $f = h \circ g$. La terna (Z, g, h) se llama $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorización de f .

Una categoría \mathcal{A} se llama **singularmente** $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorizable si, es $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorizable y para dos $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorizaciones (Z, g, h) y (Z', g', h') de cualquier morfismo f , existe un isomorfismo $\varphi : Z \rightarrow Z'$ tal que $h = h' \circ \varphi$ y $g' = \varphi \circ g$.

Una categoría \mathcal{A} tiene la **propiedad de la $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -diagonalización** si siempre que los morfismos $f : W \rightarrow X$, $g : W \rightarrow Y$, $h : X \rightarrow Z$ y $k : Y \rightarrow Z$ satisfacen que $h \circ f = k \circ g$, $f \in \mathcal{E}$ y $k \in \mathcal{M}$, entonces existe un morfismo $d : X \rightarrow Y$ tal que $g = d \circ f$ y $h = k \circ d$, d se llama un **morfismo diagonal** (o una **diagonal**) del cuadrado (f, g, h, k) .

Una categoría \mathcal{A} se llama $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoría si, es $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorizable y tiene la propiedad de la $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -diagonalización.

Ejemplo 2.21. (1) $\mathcal{T}\text{op}$ es una (Epi ex, Mono)-categoría. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces $f = m \circ q$ es la factorización deseada, donde $q : X \rightarrow X/\sim$ es la proyección natural ($x \sim x'$ sí, y sólo si $f(x) = f(x')$) y $m : X/\sim \rightarrow Y$ se define por $m([x]) = f(x)$ la cual existe por la propiedad universal del cociente. Veamos que m está bien definida y es inyectiva. m está bien definida. Sean $[x] = [x']$ para $x \in X$, entonces $f(x) = f(x')$, así $m([x]) = f(x) = f(x') = m([x'])$. m es inyectiva. sean $[x]$ y $[x'] \in X/\sim$ con $m([x]) = m([x'])$, es decir, $f(x) = f(x')$, entonces $x \sim x'$, de este modo $[x] = [x']$. Puesto que q es una función cociente y m es inyectiva, q es un epimorfismo extremal y m es un monomorfismo. En consecuencia $\mathcal{T}\text{op}$ es (Epi ex, Mono)-factorizable. Veamos que tiene la propiedad de la (Epi ex, Mono)-diagonalización. Sea

$$\begin{array}{ccc}
 (X, \tau_X) & \xrightarrow{f} & (Y, \tau_Y) \\
 \downarrow g & \swarrow d & \downarrow h \\
 (Z, \tau_Z) & \xrightarrow{k} & (W, \tau_W)
 \end{array}$$

un cuadrado conmutativo con f un $\mathcal{T}\text{op}$ -epimorfismo extremal y k un $\mathcal{T}\text{op}$ -monomorfismo. Veamos que para todo $y \in Y$, se tiene que $h(y) \in \text{Im}(k)$. Sea $y \in Y$, como f es sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Notemos que $k(g(x)) = h(f(x)) = h(y)$, así que $h(y) \in \text{Im}(k)$. Denotamos $k^{-1} : \text{Im}(k) \rightarrow Z$, por consiguiente $d = k^{-1} \circ h$ está bien definida. Entonces $d = k^{-1} \circ h$ es el morfismo diagonal deseado; $d \circ f = k^{-1} \circ h \circ f = k^{-1} \circ k \circ g = g$ y $k \circ d = k \circ k^{-1} \circ h = h$. Por lo tanto $\mathcal{T}\text{op}$ es una (Epi ex, Mono)-categoría.

(2) $\mathcal{T}\text{op}$ es una (Epi, Mono ex)-categoría. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces $f = i \circ f'$ es una factorización de f , donde $f' : X \rightarrow f(X)$ esta definida por $f'(x) = f(x)$ para cada $x \in X$ e $i : f(X) \rightarrow Y$ es la inclusión. Como f es sobreyectiva, es un epimorfismo y como i es un encaje, es un monomorfismo extremal. En consecuencia $\mathcal{T}\text{op}$ es (Epi, Mono ex)-factorizable. Veamos que tiene la propiedad de la (Epi, Mono ex)-diagonalización. Sea

$$\begin{array}{ccc}
 (X, \tau_X) & \xrightarrow{f} & (Y, \tau_Y) \\
 \downarrow g & \swarrow d & \downarrow h \\
 (Z, \tau_Z) & \xrightarrow{k} & (W, \tau_W)
 \end{array}$$

un cuadrado conmutativo con f un $\mathcal{T}\text{op}$ -epimorfismo y k un $\mathcal{T}\text{op}$ -monomorfismo extremal. Entonces $d = k^{-1} \circ h$ es el morfismo diagonal deseado; $d \circ f =$

$k^{-1} \circ h \circ f = k^{-1} \circ k \circ g = g$ y $k \circ d = k \circ k^{-1} \circ h = h$. Por lo tanto $\mathcal{T}\mathbf{op}$ es una (Epi, Mono ex)-categoría.

- (3) $\mathcal{T}\mathbf{op}$ es una (Bi, Inicial)-categoría. Sea $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y τ_{ini} es la topología inicial en X , entonces $f = f \circ 1_X$ es la factorización deseada, donde $1_X : (X, \tau_X) \rightarrow (X, \tau_{ini})$. En consecuencia $\mathcal{T}\mathbf{op}$ es (Bi, Inicial)-factorizable.

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau_X) & \xrightarrow{f} & (Y, \tau_Y) \\ & \searrow 1_X & \nearrow f \\ & (X, \tau_{ini}) & \end{array}$$

Veamos que tiene la propiedad de la (Bi, Inicial)-diagonalización. Sea

$$\begin{array}{ccc} (X, \tau_X) & \xrightarrow{f} & (Y, \tau_Y) \\ \downarrow g & \swarrow d & \downarrow h \\ (Z, \tau_Z) & \xrightarrow{k} & (W, \tau_W) \end{array}$$

un cuadrado conmutativo con f un $\mathcal{T}\mathbf{op}$ -bimorfismo y k un Inicial-morfismo. Entonces $d = g \circ f^{-1}$ es el morfismo diagonal deseado; $d \circ f = g \circ f^{-1} \circ f = g$ y $k \circ d = k \circ g \circ f^{-1} = h \circ f \circ f^{-1} = h$. Por lo tanto $\mathcal{T}\mathbf{op}$ es una (Bi, Inicial)-categoría.

Proposición 2.22. Si $\mathcal{E} \subset \mathbf{Epi} \mathcal{A}$ o $\mathcal{M} \subset \mathbf{Mono} \mathcal{A}$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) \mathcal{A} es una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoría.
- (2) (a) \mathcal{E} y \mathcal{M} son cerradas bajo composiciones.
(b) \mathcal{A} es singularmente $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorizable.

Demostración. (1) \Rightarrow (2)(a) Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ morfismos en \mathcal{E} y (W, h, k) una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorización de $g \circ f$. Entonces existe una diagonal $d : Y \rightarrow W$ del cuadrado (f, h, g, k) tal que $h = d \circ f$ y $g = k \circ d$. Para el cuadrado $(g, d, 1_Z, k)$ existe una diagonal $d' : Z \rightarrow W$ tal que $d = d' \circ g$ y $1_Z = k \circ d'$. De aquí, $k \circ d' \circ k = k$. Por otro lado, $d' \circ k \circ h = d' \circ g \circ f = d \circ f = h$. Puesto que k pertenece a $\mathbf{Mono} \mathcal{A}$ o h pertenece a $\mathbf{Epi} \mathcal{A}$, $d' \circ k = 1_W$ y por tanto k es un isomorfismo. Así

tenemos que $g \circ f$ pertenece a \mathcal{E} .

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow h & \searrow d & \downarrow g \\
 W & \xrightarrow{k} & Z
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{g} & Z \\
 \downarrow d & \searrow d' & \downarrow 1_Z \\
 W & \xrightarrow{k} & Z
 \end{array}$$

(1) \Rightarrow (2)(b) Supóngase que (Z, g, h) y (Z', g', h') son dos $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorizaciones de $f : X \rightarrow Y$. Entonces existen morfismos $d : Z \rightarrow Z'$ y $d' : Z' \rightarrow Z$ tales que $g' = d \circ g$, $h = h' \circ d$, $g = d' \circ g'$ y $h' = h \circ d'$.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{g} & Z \\
 \downarrow g' & \searrow d & \downarrow h \\
 Z' & \xrightarrow{h'} & Y
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{g} & Z \\
 \downarrow g' & \searrow d' & \downarrow h \\
 Z' & \xrightarrow{h'} & Y
 \end{array}$$

Tenemos que $d \circ d' \circ g' = d \circ g = g'$ y $h' \circ d \circ d' = h \circ d' = h'$. Si $g' \in \text{Epi } \mathcal{A}$, entonces $d \circ d' = 1_{Z'}$ y si $h' \in \text{Mono } \mathcal{A}$, entonces $d \circ d' = 1_{Z'}$. En ambos casos $d \circ d' = 1_{Z'}$. Análogamente como $d' \circ d \circ g = d' \circ g' = g$ y $h \circ d' \circ d = h' \circ d = h$, entonces $d' \circ d = 1_Z$. Así que, d es isomorfismo y $d \circ g = g'$ y $h' \circ d = h$.

(2) \Rightarrow (1) Como \mathcal{A} es singularmente $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorizable, \mathcal{A} es $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorizable. Resta demostrar que tiene la propiedad de la $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -diagonalización. Sea (f, g, h, k) un cuadrado tal que $h \circ f = k \circ g$ con f en \mathcal{E} y k en \mathcal{M} . Sean $g = m \circ e$ y $h = m' \circ e'$. $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorizaciones. Puesto que \mathcal{E} y \mathcal{M} son cerradas bajo la composición $e' \circ f$ pertenece a \mathcal{E} y $k \circ m$ pertenece a \mathcal{M} . Entonces $m' \circ (e' \circ f)$ y $(k \circ m) \circ e$ son $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorizaciones de $h \circ f$, existe un isomorfismo $\varphi : V \rightarrow U$ tal que $m' = (k \circ m) \circ \varphi$ y $e = \varphi \circ (e' \circ f)$.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow g & \searrow e & \downarrow h \\
 W & \xrightarrow{k} & Z \\
 & \nearrow m & \nearrow m' \\
 & U & \xleftarrow{\varphi} V
 \end{array}$$

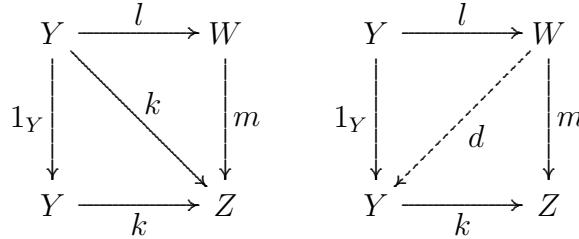
Nótese que si $d = m \circ \varphi \circ e'$, entonces $d \circ f = (m \circ \varphi \circ e') \circ f = m \circ (\varphi \circ e' \circ f) = m \circ e = g$ y $k \circ d = k \circ (m \circ \varphi \circ e') = (k \circ m \circ \varphi) \circ e' = m' \circ e' = h$. Así d es el morfismo diagonal deseado. Por tanto \mathcal{A} es una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoría. \square

Proposición 2.23. Si \mathcal{A} es una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoría con $\mathcal{E} \subset \text{Epi } \mathcal{A}$, las siguientes condiciones para un morfismo $k : Y \rightarrow Z$ son equivalentes.

- (1) $k \in \mathcal{M}$.
- (2) Para cualesquiera morfismos $f : W \rightarrow X$, $g : W \rightarrow Y$, $h : X \rightarrow Z$ tales que $h \circ f = k \circ g$ y $f \in \mathcal{E}$, entonces existe una diagonal $d : X \rightarrow Y$ tal que $g = d \circ f$ y $h = k \circ d$.
- (3) Si $k = m \circ l$ con $l : Y \rightarrow W$ en \mathcal{E} y $m : W \rightarrow Z$, entonces l es un isomorfismo.

Demostración.

1. (1) implica (2). Supongamos que $k \in \mathcal{M}$. Sean f, g y h morfismos tales que $h \circ f = k \circ g$ con $f \in \mathcal{E}$. Como \mathcal{A} es una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoría tiene la propiedad de la $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -diagonalización, existe $d : X \rightarrow Y$ tal que $g = d \circ f$ y $h = k \circ d$.
2. Sea $k = m \circ l$ con $l \in \mathcal{E}$. Como $k = k \circ 1_Y = m \circ l$, existe un morfismo diagonal $d : Y \rightarrow W$ tal que $1_Y = d \circ l$, entonces l es co-retracción y como también es epimorfismo. Por lo tanto, l es isomorfismo.



3. Sea $K = m \circ l$ una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorización de k . Puesto que \mathcal{A} es cerrada bajo la composición con isomorfismos y $m \in \mathcal{M}$, entonces $k \in \mathcal{M}$.

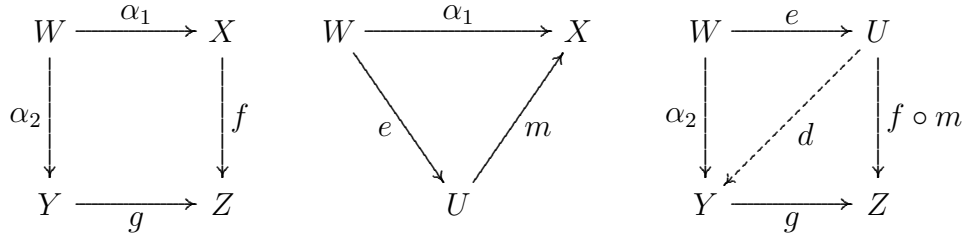
□

Corolario 2.24. Si \mathcal{A} es una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoría con $\mathcal{E} \subset \text{Epi } \mathcal{A}$, \mathcal{M} satisface lo siguiente.

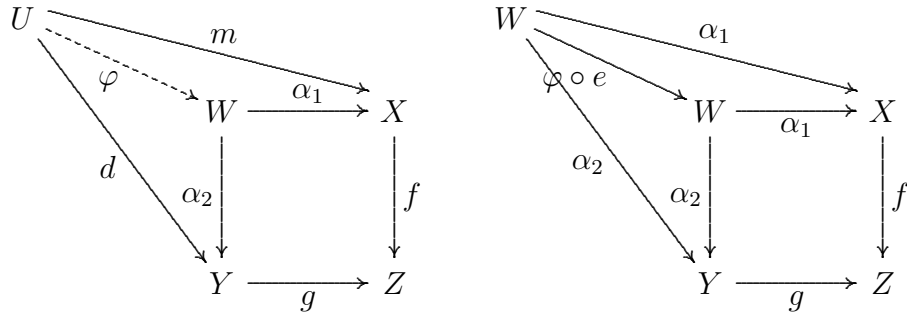
- (1) Si $(W, \{\alpha_1 : W \rightarrow X, \alpha_2 : W \rightarrow Y\})$ es un jalador de $(f : X \rightarrow Z, g : Y \rightarrow Z)$ y si $g \in \mathcal{M}$, entonces $\alpha_1 \in \mathcal{M}$.
- (2) \mathcal{M} es cerrada bajo intersecciones y productos.

Demostración.

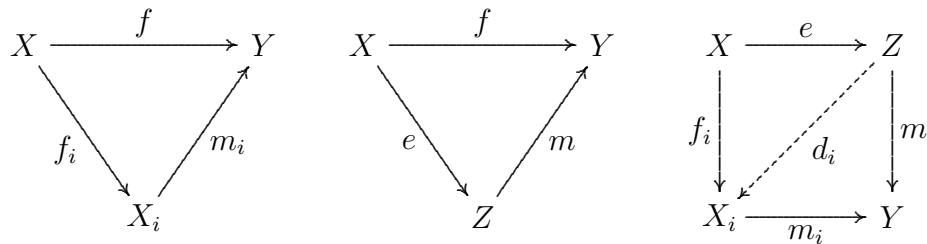
- (1) Supóngase que $(W, \{\alpha_1 : W \rightarrow X, \alpha_2 : W \rightarrow Y\})$ es un jalador de $(f : X \rightarrow Z, g : Y \rightarrow Z)$ con $g \in \mathcal{M}$. Sea $\alpha_1 = m \circ e$ una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorización de α_1 con e en \mathcal{E} y m en \mathcal{M} , existe un morfismo diagonal $d : U \rightarrow Y$ tal que $\alpha_2 = d \circ e$ y $f \circ m = g \circ d$.



Por la propiedad universal del jalador existe un único morfismo $\varphi : U \rightarrow W$ tal que $d = \alpha_2 \circ \varphi$ y $m = \alpha_1 \circ \varphi$. Esto implica que $\alpha_1 \circ (\varphi \circ e) = (\alpha_1 \circ \varphi) \circ e = m \circ e = \alpha_1$ y $\alpha_2 \circ (\varphi \circ e) = (\alpha_2 \circ \varphi) \circ e = d \circ e = \alpha_2$; de aquí que $\varphi \circ e = 1_W$, es decir, e es una co-retracción y un epimorfismo, en consecuencia e es isomorfismo. Por la Proposición 2.23 $\alpha_1 \in \mathcal{M}$.

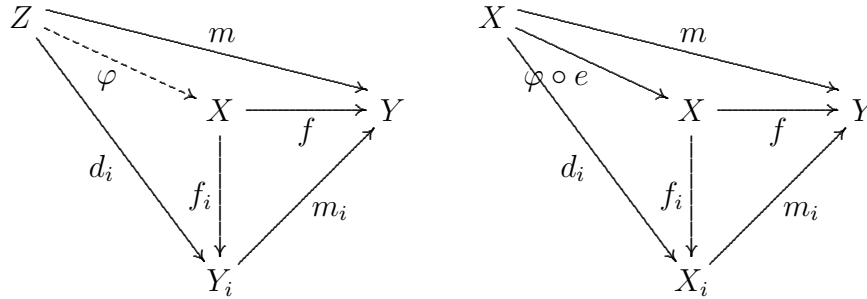


- (2) Supóngase que (X, f) es una intersección de $\{(X_i, m_i) \mid i \in I\}$ con m_i en \mathcal{M} para cada i en I . Sea $f = m \circ e$ una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorización de f con e en \mathcal{E} y m en \mathcal{M} . Entonces para cada i en I existe un morfismo diagonal $d_i : Z \rightarrow X_i$ tal que $f_i = d_i \circ e$ y $m = m_i \circ d_i$.

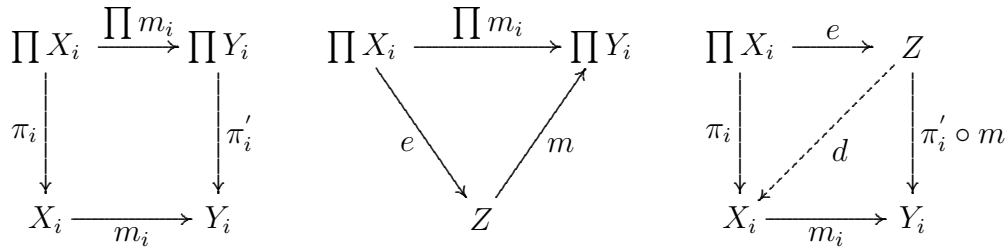


Por la propiedad universal de la intersección existe un único morfismo $\varphi : Z \rightarrow X$ tal que $m = f \circ \varphi$ y $d_i = f_i \circ \varphi$. Esto implica que $f \circ (\varphi \circ e) = (f \circ \varphi) \circ e = m \circ e = f$; de aquí que $\varphi \circ e = 1_X$, es decir, e es una co-retracción

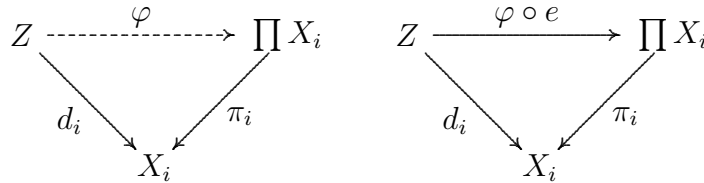
y un epimorfismo, en consecuencia e es isomorfismo. Por la Proposición 2.23 $f \in \mathcal{M}$.



- (3) Sea $\prod f_i : \prod X_i \rightarrow \prod Y_i$ un producto de la familia $\{m_i : X_i \rightarrow Y_i$ donde $m_i \in \mathcal{M}$ para cada $i \in I$. Sea $\prod m_i = m \circ e$ una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorización de $\prod m_i$.



Como $e \in \mathcal{E}$ y $m \in \mathcal{M}$, para cada $i \in I$ $(\pi'_i \circ m) \circ e = \pi'_i \circ (m \circ e) = \pi'_i \circ \prod m_i = m_i \circ \pi_i$ (ver Proposición 1.40), existe un morfismo $d_i : Z \rightarrow X_i$ para cada $i \in I$ tal que $\pi_i = d_i \circ e$ y $\pi'_i \circ m = m_i \circ d_i$. Por la propiedad universal del producto existe un "único morfismo $\varphi : Z \rightarrow \prod X_i$ tal que $d_i = \pi_i \circ \varphi$. Nótese que para todo $i \in I$, $\pi_i \circ (\varphi \circ e) = (\pi_i \circ \varphi) \circ e = d_i \circ e = \pi_i$, lo que implica que $\varphi \circ e = 1_{\prod X_i}$, es decir, e es una co-retracción y un epimorfismo, en consecuencia e es isomorfismo. Por la Proposición 2.23 $\prod m_i \in \mathcal{M}$.



□

Nótese que $\text{Epi } \mathcal{Top} \supset \text{Bi } \mathcal{Top}$ y $\text{Mono ex } \mathcal{Top} \subset \text{Inicial } \mathcal{Top}$; además si $f : X \rightarrow Y$ es inicial y X es un espacio T_0 , entonces f es un encaje.

Definición 2.25. Una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoría se llama \mathcal{E} -co-bien potenciada si para cada objeto X de \mathcal{A} , la clase de todos los morfismos que pertenecen a \mathcal{E} que tienen como dominio a X tiene un conjunto de representantes.

Definición 2.26. Una subcategoría \mathcal{B} de una categoría \mathcal{A} se llama:

- (1) **Cerrada bajo producto** (resp. **co-productos**) en \mathcal{A} siempre que $(X, \{\pi : X \rightarrow X_i \mid i \in I\})$ (resp. $(\{j_i : X_i \rightarrow Y \mid i \in I\}, Y)$) es un producto (resp. co-producto) en \mathcal{A} tal que X_i pertenece a $\text{Ob}(\mathcal{B})$ para cada i en I , entonces X (resp. Y) pertenece a $\text{Ob}(\mathcal{B})$.
- (2) **Cerrada bajo monomorfismos extremales** (resp. **epimorfismos extremales**) en \mathcal{A} siempre que $f : X \rightarrow Y$ es un monomorfismo extremal (resp. epimorfismo extremal) en \mathcal{A} tal que Y (resp. X) pertenece a $\text{Ob}(\mathcal{B})$, entonces X (resp. Y) pertenece a $\text{Ob}(\mathcal{B})$.

Teorema 2.27. (Caracterización de las subcategorías \mathcal{E} -reflexivas) Supóngase que \mathcal{A} es una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoría \mathcal{E} -co-bien potenciada con $\mathcal{E} \subset \text{Epi } \mathcal{A}$ y que \mathcal{A} tiene productos. Entonces, para una subcategoría plena y cerrada bajo isomorfismos \mathcal{B} de \mathcal{A} , las siguientes condiciones son equivalentes:

- (1) \mathcal{B} es \mathcal{E} -reflexiva en \mathcal{A} .
- (2) \mathcal{B} es cerrada bajo productos y satisface que si $f : X \rightarrow Y$ pertenece a \mathcal{M} y Y pertenece a $\text{Ob}(\mathcal{B})$, entonces X pertenece a $\text{Ob}(\mathcal{B})$.

Demostración. (1) \implies (2) Como \mathcal{B} es reflexiva en \mathcal{A} por la Proposición 1.82., \mathcal{B} es cerrada bajo productos. Sea $f : X \rightarrow Y$ en \mathcal{M} y $Y \in \text{Ob}(\mathcal{B})$. Para la \mathcal{B} -reflexión $r_X : X \rightarrow RX$, de X existe una extensión $f^\circ : RX \rightarrow Y$ tal que $f = f^\circ \circ r_X$. Entonces para el cuadrado $(r_X, 1_X, f^\circ, f)$ existe una diagonal $d : RX \rightarrow X$ tal que $d \circ r = 1_X$ y $f^\circ = f \circ d$. Como r_X pertenece a \mathcal{A} y $\mathcal{E} \subset \text{Epi } \mathcal{A}$, entonces es epimorfismo y co-retracción y por tanto isomorfismo y puesto que \mathcal{B} es cerrada bajo isomorfismos entonces se tiene que $X \in \text{Ob}(\mathcal{B})$.

(2) \implies (1) Supóngase que $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$. Como \mathcal{A} es \mathcal{E} -co-bien potenciada existe un conjunto de representantes de \mathcal{E} , $\{f_i : X \rightarrow Y_i \mid i \in I\}$ con Y_i en $\text{Ob}(\mathcal{B})$ para cada i en I . Sea $(Y, \{p_i : Y \rightarrow Y_i \mid i \in I\})$ el producto de la familia $\{Y_i \mid i \in I\}$ en \mathcal{A} . Como \mathcal{B} es cerrada bajo productos $Y \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ y por la propiedad universal del producto existe un único \mathcal{A} -morfismo $f : X \rightarrow Y$ tal que $p_i \circ f = f_i$ para cada $i \in I$. Sea $(Z, g : X \rightarrow Z, h : Z \rightarrow Y)$ una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorización de f tal que $f = h \circ g$ con g en \mathcal{E} , h en \mathcal{M} y $f = h \circ g$. Puesto que h pertenece a \mathcal{M} y Y está en $\text{Ob}(\mathcal{B})$ entonces Z pertenece a $\text{Ob}(\mathcal{B})$. Afirmamos que g es una \mathcal{B} -reflexión de X . En efecto, sea $k : X \rightarrow W$ un \mathcal{A} -morfismo con $W \in \text{Ob}(\mathcal{B})$. Si $(V, l : X \rightarrow V, m : V \rightarrow W)$ es una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -factorización de k tal que $k = m \circ l$ con $l \in \mathcal{E}$ y $m \in \mathcal{M}$, existe $j \in I$ y un isomorfismo $n : Y_j \rightarrow W$ tal que $l = n \circ f_j$ y puesto que g es un epimorfismo, $k^\circ = m \circ n \circ p_j \circ h$ es el único morfismo de Z a W para el cual $k^\circ \circ g = m \circ n \circ p_j \circ h \circ g = m \circ n \circ p_j \circ f = m \circ l = k$. Por lo tanto g es una \mathcal{B} -reflexión de X . \square

Corolario 2.28. Si \mathcal{A} es una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ -categoría \mathcal{E} -co-bien potenciada con $\mathcal{E} \subset \text{Epi } \mathcal{A}$ la cual tiene productos. Entonces se cumple lo siguiente.

- (1) La intersección de cualquier clase de subcategorías \mathcal{E} -reflexivas de \mathcal{A} es \mathcal{E} -reflexiva en \mathcal{A} .
- (2) Para cualquier subcategoría \mathcal{B} de \mathcal{A} , existe una subcategoría \mathcal{E} -reflexiva \mathcal{B}^* de \mathcal{A} que satisface las siguientes condiciones:
 - (a) $\mathcal{B}^* \supset \mathcal{B}$.
 - (b) Si \mathcal{B}' es una subcategoría \mathcal{E} -reflexiva de \mathcal{A} y $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}' \supset \mathcal{B}^*$.
- (3) Un \mathcal{A} -objeto X pertenece a \mathcal{B}^* sí, y sólo si existe un conjunto $\{X_i \mid i \in I\}$ de \mathcal{B} -objetos X_i y un morfismo $f : X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ que pertenece a \mathcal{M} .

La categoría \mathcal{B}^* se llamará una envolvente \mathcal{E} -reflexiva de \mathcal{B} en \mathcal{A} y se denota por $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}(\mathcal{B})$. Para un \mathcal{A} -objeto X , la envolvente \mathcal{E} -reflexiva $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}(X)$ de X en \mathcal{A} está también definida. Un \mathcal{A} -objeto Y pertenece a $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}(X)$ sí, y sólo si existen un conjunto I y un morfismo $f : Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ que pertenece a \mathcal{M} con $X = X_i$ para cada $i \in I$.

Ejemplo 2.29. (1) Sea $f : X \rightarrow Y$ un monomorfismo en \mathbf{Top} y sea Y un espacio T_0 (respectivamente T_1, T_2). Entonces X es un espacio T_0 (respectivamente T_1, T_2). Como \mathbf{Top} es una (Epi ex, Mono)-categoría, $\mathbf{Top}_0, \mathbf{Top}_1$ y \mathbf{Top}_2 son subcategorías epi-reflexivas de \mathbf{Top} respectivamente.

(2) Sea $f : X \rightarrow Y$ inicial en \mathbf{Top} y Y un espacio regular (respectivamente completamente regular). Entonces X es regular (respectivamente completamente regular). Por tanto las categorías \mathbf{Reg} y \mathbf{Creg} son bi-reflexivas en \mathbf{Top} , donde \mathbf{Reg} (respectivamente \mathbf{Creg} es la subcategoría plena de \mathbf{Top} de todos los espacios regulares (respectivamente completamente regulares).

2.3. Epi-reflexividad contra bi-reflexividad en \mathbf{Top}

Para las subcategorías bi-reflexivas \mathbf{Reg} y \mathbf{Creg} de \mathbf{Top} mencionadas en la última sección, tenemos que $\mathbf{Reg} \cap \mathbf{Top}_0 = \mathbf{Top}_3$ y $\mathbf{Creg} \cap \mathbf{Top}_0 = \mathbf{T}\eta\mathbf{c}$ son epi-reflexivas pero no bi-reflexivas en \mathbf{Top} . Las envolventes bi-reflexivas de \mathbf{Top}_3 y $\mathbf{T}\eta\mathbf{c}$ en \mathbf{Top} son \mathbf{Reg} y \mathbf{Creg} respectivamente. En esta sección consideraremos las relación entre subcategorías epi-reflexivas y bi-reflexivas de \mathbf{Top} en general. Primero recordaremos algunas propiedades de los espacios T_0 y demostraremos que \mathbf{Top}_0 tiene una propiedad especial en \mathbf{Top} .

Sean D_0, D_1 y D_2 espacios topológicos con el mismo conjunto subyacente que tiene dos puntos P, Q y con las topologías $\{\emptyset, \{P, Q\}\}, \{\emptyset, \{P\}, \{P, Q\}\}$ y $\{\emptyset, \{P\}, \{Q\}, \{P, Q\}\}$, respectivamente.

Proposición 2.30. Para un espacio topológico son equivalentes:

- (1) X es un espacio T_0 .
- (2) Existe un conjunto Λ y un monomorfismo $f : X \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ con $X_\lambda = D_1$ para cada λ en Λ .
- (3) Cualquier función continua $f : D_0 \longrightarrow X$ es constante.
- (4) Cualquier función inicial con dominio X es un encaje.

Demostración. (1) implica (2). Supóngase que X es un espacio T_0 . Sea $\mathcal{F} = \{f : X \longrightarrow D_1 \mid f \text{ es continua}\}$, existe un conjunto Λ tal que $\mathcal{F} = \{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} = C(X, D_1)$. Si $X_\lambda = D_1$ para cada λ en Λ , entonces $D_1^\Lambda = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Por la propiedad universal del producto existe una función continua $f : X \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ tal que $\pi_\lambda \circ f = f_\lambda$.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\quad f \quad} & \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \\
 & \searrow f_\lambda & \swarrow \pi_\lambda \\
 & & D_1
 \end{array}$$

Veamos que \mathcal{F} separa puntos y por consiguiente f es inyectiva. Sean x, x' puntos distintos en X . Como X es T_0 , existe A en τ_X tal que $x \in A$ y $x' \notin A$. Defínase $g : X \longrightarrow D_1$ por $g(A) = P$ y $g(X \setminus A) = Q$. Obsérvese que $g^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $g^{-1}(D_1) = X$ y $g^{-1}(\{P\}) = A$, por lo que g es continua. Para λ en Λ existe f_λ tal que $g = f_\lambda$, además $g(x) = f_\lambda(x) = P$ y $g(x') = f_\lambda(x') = Q$; luego $f_\lambda(x) \neq f_\lambda(x')$. Por otro lado $\pi_\lambda(f(x)) = f_\lambda(x) \neq f_\lambda(x') = \pi_\lambda(f(x'))$, en consecuencia $f(x) \neq f(x')$. Por lo tanto, f es inyectiva.

(2) implica (1) Sean x, x' puntos distintos en X . Como $f : X \longrightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es inyectiva por ser monomorfismo, entonces $\mathcal{F} = \{h : X \longrightarrow D_1 \mid h \text{ es continua}\}$ separa puntos de X . En efecto, dados $x, x' \in X$ como $f(x) \neq f(x')$, existe λ en Λ tal que $\pi_\lambda(f(x)) \neq \pi_\lambda(f(x'))$; sea $h = \pi_\lambda \circ f : X \longrightarrow D_1$. Entonces $h(x) \neq h(x')$. Sin pérdida de generalidad $h(x) = P$ y $h(x') = Q$. Sea $A := h^{-1}(\{P\})$, entonces A es un conjunto abierto en X , $x \in A$, pero $x' \notin A$. Por lo tanto, X es T_0 .

(1) implica (3) Si $f : D_0 \longrightarrow X$ es continua y X es T_0 , entonces $f(P) = f(Q)$, ya que si $f(P) \neq f(Q)$, entonces existe un conjunto A en X tal que $f(P) \in A$ y $f(Q) \notin A$. En consecuencia $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en D_0 que no es \emptyset ni D_0 , lo cual no es posible.

(3) implica (1) Supóngase X no es T_0 , existen x y x' puntos distintos en X tales que para todo conjunto abierto A en X , se tiene que $x \in A$ implica que $x' \in A$ y $x' \in A$ implica que $x \in A$. Defínase $f : D_0 \longrightarrow X$ por $f(P) = x$ y $f(Q) = x'$. Si A es un conjunto abierto tal que $x \in A$, entonces $f^{-1}(A) = D_0$ y si $x \notin A$, entonces

$f^{-1}(A) = \emptyset$. Por lo tanto, f es continua, pero no es constante, ya que si $x' \in A$, entonces $x \in A$ lo cual no es posible.

(3) implica (4) Sea $f : X \rightarrow Y$ una función inicial. Veamos que f es inyectiva y por tanto encaje. Sean x y $x' \in X$ tales que $f(x) = f(x')$. Defínase $g : D_0 \rightarrow X$ por $g(P) = x$ y $g(Q) = x'$. Nótese que $f(g(P)) = f(x) = f(x') = f(g(Q))$, en consecuencia $f \circ g : D_0 \rightarrow Y$ es una función constante y por tanto continua. Como f es inicial, entonces g es continua y por hipótesis es constante, es decir, $x = g(P) = g(Q) = x'$. Por lo tanto, f es un encaje.

(4) implica (1) Antes de demostrar la implicación, hagamos la siguiente:

Observación. Si X es un espacio topológico, entonces $C(X, D_1)$ es una fuente inicial.

Demostración. Sea A un conjunto abierto en X y sea $f : X \rightarrow D_1$ la función constante definida por $f(x) = P$ para todo $x \in X$, Si $A = \emptyset$, entonces $A = f^{-1}(\emptyset)$. Si $A = X$, entonces $A = f^{-1}(D_1)$. Ahora sea A un conjunto abierto distinto del vacío y el total, sean x y $x' \in X$ puntos distintos tales que $x \in A$ y $x' \notin A$. Defínase $f : X \rightarrow D_1$ por

$$f(x) = \begin{cases} P & \text{si } x \in A \\ Q & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Entonces $f^{-1}(\{P\}) = A$ y f es continua. Hemos demostrado que todo conjunto abierto A en X es de la forma $f^{-1}(O)$ con O un conjunto abierto en D_1 y que f pertenece a $C(X, D_1)$. Por lo tanto, $C(X, D_1)$ es una fuente inicial.

Sea $C(X, D_1) = \{f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ por la propiedad universal del producto existe una única función continua $\Delta C(X, D_1) : X \rightarrow D_1^\Lambda$ tal que para cada λ en Λ hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Delta C(X, D_1)} & D_1^\Lambda \\ & \searrow f_\lambda & \swarrow \pi_\lambda \\ & & D_1 \end{array}$$

Puesto que $C(X, D_1)$ es inicial y $f_\lambda = \pi_\lambda \circ \Delta C(X, D_1)$ para cada λ en Λ , entonces $\Delta C(X, D_1)$ es inicial. Por hipótesis $\Delta C(X, D_1)$ es un encaje, por lo tanto X es homeomorfo a un subespacio de D_1^Λ que es T_0 . Por lo tanto, X es T_0 . \square

Proposición 2.31. Para una subcategoría epi-reflexiva \mathcal{A} de \mathbf{Top} se cumple:

(1) \mathcal{A} es bi-reflexiva en \mathbf{Top} si, y sólo si contiene a D_0 .

- (2) Si \mathcal{A} no es bi-reflexiva en \mathcal{Top} , entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{Top}_0$.
- (3) Si \mathcal{A} es bi-reflexiva en \mathcal{Top} , entonces $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{Top}_0$ y $\mathcal{A} \cap \mathcal{Top}_0$ es epi-reflexiva pero no bi-reflexiva en \mathcal{Top} .

Demostración.

- (1) Necesidad. Supóngase \mathcal{A} es bi-reflexiva en \mathcal{Top} . Nótese que la \mathcal{A} -reflexión $r_{D_0} : D_0 \rightarrow RD_0$ de D_0 es biyectiva, por lo tanto RD_0 es indiscreto, además $r_{D_0}^{-1} : RD_0 \rightarrow D_0$ es continua lo que implica que r_{D_0} es homeomorfismo. Por lo tanto D_0 pertenece a \mathcal{A} .

Para la suficiencia, hagamos primero la siguiente

Observación. Si $f : X \rightarrow Y$ es inicial, entonces existe un conjunto I y un encaje $g : X \rightarrow Y \times D_0^I$.

Demostración. Sea $\mathcal{F} = D_0^X \cup \{f\} = \{f_i \mid i \in I\}$. Veamos que \mathcal{F} es inicial. Sea A un conjunto abierto en X , como f es inicial existe un conjunto abierto O en Y tal que $f^{-1}(O) = A$. Por lo tanto, \mathcal{F} es inicial. Ahora comprobemos que \mathcal{F} separa puntos. Sean x, x' puntos distintos en X y defínase $h : X \rightarrow D_0$ por $h(x) = P$ y $h(x') = Q$. En consecuencia $h \in D_0^X \subseteq \mathcal{F}$ y $h(x) \neq h(x')$. Por lo tanto, \mathcal{F} separa puntos. Como \mathcal{F} es inicial y separa puntos la función $g = \Delta\mathcal{F} : X \rightarrow Y \times D_0^I$ es un encaje.

Puesto que \mathcal{Top} es (Bi, Inicial)-categoría, bi-co-bien potenciada, por el Teorema 2.27 \mathcal{A} es bi-reflexiva en \mathcal{Top} sí, y sólo si \mathcal{A} es cerrada bajo productos y funciones iniciales. Veamos que \mathcal{A} es cerrada bajo funciones iniciales: sea $f : X \rightarrow Y$ una función inicial con Y un \mathcal{A} -objeto. Dado que \mathcal{Top} es (Epi, Mono ex)-categoría, entonces \mathcal{A} es cerrada bajo productos y monomorfismos extremales. Por la observación anterior existe un encaje $g : X \rightarrow Y \times D_0^I$ y como D_0 pertenece a \mathcal{A} , entonces D_0^I pertenece a \mathcal{A} y puesto que g es monomorfismo extremal se tiene que X pertenece a \mathcal{A} ; en consecuencia \mathcal{A} es cerrada bajo funciones iniciales. Por lo tanto \mathcal{A} es bi-reflexiva \mathcal{Top} .

- (2) Supóngase que existe un espacio topológico X tal que $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ y $X \notin \text{Ob}(\mathcal{Top}_0)$. Entonces X contiene un subespacio homeomorfo a D_0 , es decir, $D_0 \in \text{Ob}(\mathcal{A})$. Por (1) \mathcal{A} no es bi-reflexiva en \mathcal{Top} .
- (3) Supóngase que \mathcal{A} es bi-reflexiva en \mathcal{Top} , entonces D_0 es un \mathcal{A} -objeto, pero D_0 no es T_0 , por tanto, $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{Top}_0$. Puesto que \mathcal{A} es epi-reflexiva y \mathcal{Top}_0 es epi-reflexiva en \mathcal{Top} , entonces $\mathcal{A} \cap \mathcal{Top}_0$ es epi-reflexiva. Como D_0 no es un $\text{Ob}(\mathcal{A} \cap \mathcal{Top}_0)$, se tiene que $\mathcal{A} \cap \mathcal{Top}_0$ no es bi-reflexiva.

□

En el siguiente Teorema mostramos que existen tantas subcategorías bi-reflexivas de \mathcal{Top} como epi-reflexivas que no son bi-reflexivas

Teorema 2.32. *Sea G la colección de todas las subcategorías bi-reflexivas de \mathcal{Top} y H la colección de todas las subcategorías de \mathcal{Top} que son epi-reflexivas pero no bi-reflexivas en \mathcal{Top} . Entonces existe una correspondencia uno a uno entre G y H .*

Demostración. Sean $\sigma : G \rightarrow H$ y $\tau : H \rightarrow G$ funciones definidas por $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{Top}_0 \cap \mathcal{A}$, \mathcal{A} en G y $\tau(\mathcal{B}) = \mathcal{Top}_{Bi}(\mathcal{B})$ (la envolvente bi-reflexiva de \mathcal{B} en \mathcal{Top} , ver Corolario 2.28 (2)), \mathcal{B} en H . Demostraremos que son biyectivas e inversas una de la otra. Primero sea X un \mathcal{A} -objeto para \mathcal{A} en G y sea $\eta : X \rightarrow X/\sim$ la \mathcal{Top}_0 -reflexión de X (véase el ejemplo 2.2). Entonces por el axioma de elección existe una función $\xi : X/\sim \rightarrow X$ entre conjuntos tal que $\eta \circ \xi = 1_{X/\sim}$. Como $\eta \circ \xi = 1_{X/\sim}$ es continua y $\{\eta\}$ es fuente inicial, tenemos que ξ es continua; además ξ es co-retacción. Por la Proposición 1.27, ξ es un monomorfismo extremal y por tanto, un encaje. Como $X \in \mathcal{A}$, X/\sim pertenece a $\text{Ob}(\mathcal{Top}_0 \cap \mathcal{A})$. Puesto que η es inicial, X pertenece a $\text{Ob}(\mathcal{Top}_{Bi}(\mathcal{Top}_0 \cap \mathcal{A}))$. Por consiguiente $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Top}_{Bi}(\mathcal{Top}_0 \cap \mathcal{A})$. Es claro que $\mathcal{Top}_{Bi}(\mathcal{Top}_0 \cap \mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ y tenemos que $\mathcal{A} = \mathcal{Top}_{Bi}(\mathcal{Top}_0 \cap \mathcal{A})$, es decir, $\tau \circ \sigma = 1_G$.

Ahora sea $X \in \text{Ob}(\mathcal{Top}_0 \cap \mathcal{Top}_{Bi}(\mathcal{B}))$ para \mathcal{B} en H . Entonces $X \in \text{Ob}(\mathcal{Top}_{Bi}(\mathcal{B}))$ y existen un conjunto de \mathcal{B} -objetos $\{X_i \mid i \in I\}$ y un morfismo $f : X \rightarrow \prod X_i$ con $\prod X_i \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ (ver Corolario 2.28 (3)). Puesto que \mathcal{Top} es (Bi, Inicial)-categoría f es inicial y como X es un espacio T_0 , f es un encaje. En consecuencia $X \in \text{Ob}(\mathcal{B})$. Así, $\mathcal{Top}_0 \cap \mathcal{Top}_{Bi}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$. Por otro lado puesto que \mathcal{B} no es bi-reflexiva en \mathcal{Top} se tiene que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{Top}_0$ y por definición $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{Top}_{Bi}(\mathcal{B})$. Así, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{Top}_0 \cap \mathcal{Top}_{Bi}(\mathcal{B})$ y por lo tanto, $\mathcal{B} = \mathcal{Top}_0 \cap \mathcal{Top}_{Bi}(\mathcal{B})$, esto es, $\sigma \circ \tau = 1_H$. □

Definición 2.33. *Sea l un operador que asocia a cada espacio X una función $l_X : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ del conjunto potencia de X en sí mismo. Si l satisface las condiciones (1), (3)-(5) siguientes, se llama un **operador límite superior** y si l satisface las condiciones (2)-(5) siguientes, se llama un **operador límite inferior**.*

Para cualesquiera $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{Top})$, se tiene:

- (1) Si $Z \in \mathcal{P}(X)$, entonces $Cl_X(Z) \subset l_X(Z)$.
- (2) Si $Z \in \mathcal{P}(X)$, entonces $Z \subset l_X(Z) \subset Cl_X(Z)$.
- (3) Si Z_1 y $Z_2 \in \mathcal{P}(X)$, entonces $l_X(Z_1 \cup Z_2) = l_X(Z_1) \cup l_X(Z_2)$
- (4) $l_X(\emptyset) = \emptyset$
- (5) Si $f : X \rightarrow Y$ es continua y $Z \in \mathcal{P}(X)$, entonces $f(l_X(Z)) \subset l_Y(f(Z))$.

Para un operador límite superior l , un espacio X se llama ***l-separable*** si siempre que $l_X(Z) = Cl_X(Z)$ para Z subconjunto de X y para un operador límite inferior k , X se llama ***k-separable*** si siempre que $Z = k_X(Z)$ para Z subconjunto de X , entonces $Z = Cl_X(Z)$. Para un operador límite superior o inferior l , la subcategoría de \mathcal{Top} que consiste de todos los espacios l -separables se denotará por $S(l)$.

Cualquier operador límite satisface las siguientes condiciones::

- (6) Si A y B son subconjuntos de X , entonces $A \subset B$ implica $l_X(A) \subset l_X(B)$. En efecto, supongamos que $A \subseteq B$. Notemos que $l_X(A) \cup l_X(B) = l_X(A \cup B) = l_X(B)$. Por lo tanto, $l_X(A) \subseteq l_X(B)$.
- (7) Si $f : X \rightarrow Y$ es una función y A un subconjunto de Y con $l_X(A) = A$, entonces $l_X(f^{-1}(A)) = f^{-1}(A)$.

Proposición 2.34. Sea \mathcal{A} una subcategoría plena y cerrada bajo isomorfismos de \mathcal{Top} . Entonces

- (1) \mathcal{A} es bi-reflexiva en \mathcal{Top} sí, y sólo si existe un operador límite superior l tal que $\mathcal{A} = S(l)$.
- (2) \mathcal{A} es bi-co-reflexiva en \mathcal{Top} sí, y sólo si existe un operador límite inferior k tal que $\mathcal{A} = S(k)$.

Demostración.

- (1) Necesidad. Supóngase que \mathcal{A} es bi-reflexiva en \mathcal{Top} . Sea $r_X : X \rightarrow RX$ la \mathcal{A} -reflexión (r_X es biyectiva). Para Z en $\mathcal{P}(X)$ definimos $l_X(Z) = r_X^{-1}(Cl_{RX}(r_X(Z)))$. Demostraremos que l_X es un operador límite superior.

- (1) $Cl_X(Z) \subset r_X^{-1}(Cl_{RX}(r_X(Z)))$. Sea Z en $\mathcal{P}(X)$,

$$Cl_X(Z) = r_X^{-1}(r_X(Cl_X(Z))) \subset r_X^{-1}(Cl_{RX}(r_X(Z))).$$

- (2) $r_X^{-1}(Cl_{RX}(r_X(Z_1 \cup Z_2))) = r_X^{-1}(Cl_{RX}(r_X(Z_1))) \cup r_X^{-1}(Cl_{RX}(r_X(Z_2)))$. Sea Z_1 y Z_2 en $\mathcal{P}(X)$

$$\begin{aligned} r_X^{-1}(Cl_{RX}(r_X(Z_1 \cup Z_2))) &= r_X^{-1}(Cl_{RX}(r_X(Z_1) \cup r_X(Z_2))) \\ &= r_X^{-1}[(Cl_{RX}(r_X(Z_1))) \cup (Cl_{RX}(r_X(Z_2)))] \\ &= r_X^{-1}(Cl_{RX}(r_X(Z_1))) \cup r_X^{-1}(Cl_{RX}(r_X(Z_2))) \end{aligned}$$

- (3) $r_X^{-1}(Cl_{RX}(r_X(\emptyset))) = \emptyset$

- (4) Sea $f : X \rightarrow Y$ un $\mathcal{T}\text{op}$ -morfismo. Veamos que $f(r_X^{-1}(Cl_{RX}(r_X(Z)))) \subset r_Y^{-1}(Cl_{RY}(r_Y(f(Z))))$. Demostraremos que $r_Y(f(r_X^{-1}(Cl_{RX}(r_X(Z)))) \subset Cl_{RY}(r_Y(f(Z)))$. Puesto que r_X es una \mathcal{A} -reflexión y RY está en \mathcal{A} , para $r_Y \circ f : X \rightarrow RY$ existe un único \mathcal{A} -morfismo $Rf : RX \rightarrow RY$ tal que $r_Y \circ f = Rf \circ r_X$; nótese que $r_Y \circ f \circ r_X^{-1} = Rf \circ r_X \circ r_X^{-1} = Rf$, porque r_X es biyectiva. De donde

$$\begin{aligned} r_Y(f(r_X^{-1}(Cl_{RX}(r_X(Z)))) &= Rf(Cl_{RX}(r_X(Z))) \\ &\subset Cl_{RY}(Rf(r_X(Z))) = Cl_{RY}(r_Y(f(Z))) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ r_X \downarrow & \searrow r_Y \circ f & \downarrow r_Y \\ RX & \xrightarrow{Rf} & RY \end{array}$$

Resta demostrar que $\mathcal{A} = S(l)$. Sea X un \mathcal{A} -objeto, basta demostrar que $l_X(Z) = Cl_X(Z)$. Nótese que $r_X = 1_X$, por lo que $l_X(Z) = r_X^{-1}(Cl_{RX}(r_X(Z))) = Cl_{RX}(Z) = Cl_X(Z)$. Por lo tanto, X es un $S(l)$ -objeto. Sea X un $S(l)$ -objeto. Obsérvese que $l_X(Z) = Cl_X(Z)$ sí, y sólo si $r_X^{-1}(Cl_{RX}(r_X(Z))) = Cl_X(Z)$, entonces r_X es un isomorfismo y puesto que \mathcal{A} es cerrada bajo isomorfismos, se tiene que X es isomorfo a RX ; como $RX \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, entonces $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$.

Suficiencia. Supongamos que existe un operador límite superior l tal que $\mathcal{A} = S(l)$. Demostraremos que $S(l)$ es cerrada bajo productos y funciones iniciales.

Sea $l_X : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ un operador límite superior y sea $f : X \rightarrow Y$ una función inicial con Y un $S(l)$ -objeto. Veamos que X es un $S(l)$ -objeto, para esto es suficiente demostrar que $l_X(Z) \subseteq Cl_X(Z)$ para todo Z en $\mathcal{P}(X)$. Sea $x \in l_X(Z)$ y O un conjunto abierto en X tal que $O = f^{-1}(A)$ para algún conjunto abierto A en Y y $x \in O$. Entonces $f(x) \in f(l_X(Z)) \subset l_Y(f(Z)) = Cl_Y(f(Z))$, de donde $A \cap f(Z) \neq \emptyset$. Sea $y \in A \cap f(Z)$; existe $x' \in Z$ tal que $y = f(x')$; así, $x' \in f^{-1}(A) \cap Z$, lo cual implica que $O \cap Z \neq \emptyset$ para todo conjunto abierto O en X tal que $x \in O$. En consecuencia $x \in Cl_X(Z)$ y por lo tanto, $l_X(Z) \subseteq Cl_X(Z)$.

Sea $\{X_i \mid i \in I\}$ una familia de $S(l)$ -objetos y $(X = \prod X_i, \{\pi_i : \prod X_i \rightarrow X_i\})$ su producto topológico. Entonces $l_X : \mathcal{P}(\prod X_i) \rightarrow \mathcal{P}(\prod X_i)$

Nótese que si X es un $\text{Ob } S(l)$ -objeto y si Z es un conjunto cerrado en X , entonces $l_X(Z) = Cl_X = Z$

Sea τ_X la topología producto y τ_{l_X} la topología generada por $\{X \setminus l_X(Z) \mid Z \subseteq X\}$ (es base para una topología). Los conjuntos cerrados en (X, τ_{X_i}) son $\{\cap_{i \in I} l_X(Z_i) \mid Z_i \subseteq X\}$.

Si F es un conjunto cerrado en X_i , entonces, como $X_i \in \text{Ob } S(l)$ se tiene que $l_{X_i}(F) = Cl_{X_i}(F) = F$. Entonces por la propiedad (7) de la observación que le sigue a la Definición 2.33, se tiene que $l_X(\pi^{-1}(F)) = \pi^{-1}(F)$ y, si $A \in \tau_{X_i}$ y $x \in A$, existe $Z \subseteq X$ tal que $x \in X \setminus l_X(Z) \subseteq A$. Así todo subbásico de τ_X es un básico de τ_{X_i} . Por lo tanto, $\tau_X \subseteq \tau_{X_i}$.

Sea $F_i \subseteq X_i$ un conjunto cerrado para cada $i \in I$, entonces $l_X(F_i) = F_i$

Nótese que $\pi^{-1}(F_i) = F_i \times \prod_{i \neq j} X_j = l_X(F_i \times \prod_{i \neq j} X_j)$.

Por otro lado $\prod Cl_X(F_i) \times \prod Cl_{X_j} = F_i \times \prod_{i \neq j} X_j$.

Por lo tanto, π_i es continua para cada $i \in I$.

Por lo tanto $\tau_{l_X} = \tau_X$

$Z \subseteq Cl_X(Z) = \cap l_X(Z_i) \subseteq l_X(Z_i)$ para cada $i \in I$.

$l_X(Z) \subseteq l_X(Z_i)$

$l_X(Z) \subseteq \cap_{i \in I} l_X(Z_i) = Cl_X(Z)$

Lema. $A_i \subseteq X_i$ con X_i un $S(l)$ -objeto para cada $i \in I$.

Sea $x \in l_X(\prod A_i) = \prod Cl_{X_i}(A_i)$, esto es, para cada $i \in I$ $\pi_i(x) \in Cl_{X_i}(A_i)$.

$\pi_i(x) \in \pi_i(l_X(\prod A_i)) \subseteq l_{X_i}(\pi_i(\prod A_i)) = l_{X_i}(A_i) = Cl_{X_i}(A_i)$

Por lo tanto, $\pi_i(x) \in Cl_{X_i}(A_i)$ para cada $i \in I$.

(2) Necesidad. Supóngase que \mathcal{A} es bi-co-reflexiva en \mathcal{Top} . Sea $c_X : CX \rightarrow X$ la \mathcal{A} -co-reflexión (c_X es biyectiva). Para Z en $\mathcal{P}(X)$ definimos $k_X(Z) = c_X(Cl_{CX}(c_X^{-1}(Z)))$. Demostraremos que k_X es un operador límite inferior.

(1) $Z \subseteq c_X(Cl_{CX}(c_X^{-1}(Z))) \subseteq Cl_X(Z)$. Sea Z en $\mathcal{P}(X)$ y $z \in Z$, entonces $c_X^{-1}(z) \in c_X^{-1}(Z)$, por lo que $c_X^{-1}(z) \in Cl_{CX}(c_X^{-1}(Z))$, en consecuencia $z \in c_X(Cl_{CX}(c_X^{-1}(Z)))$.

Sea Z en $\mathcal{P}(X)$, entonces

$$c_X(Cl_{CX}(c_X^{-1}(Z))) \subset Cl_X(c_X(c_X^{-1}(Z))) = Cl_X(Z).$$

(2) $c_X(Cl_{CX}(c_X^{-1}(Z_1 \cup Z_2))) = c_X(Cl_{CX}(c_X^{-1}(Z_1))) \cup c_X(Cl_{CX}(c_X^{-1}(Z_2)))$. Sea

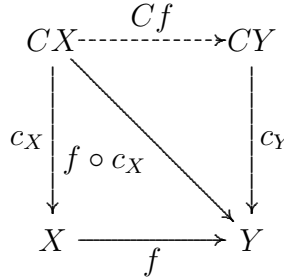
Z_1 y Z_2 en $\mathcal{P}(X)$

$$\begin{aligned} c_X(Cl_{CX}(c_X^{-1}(Z_1 \cup Z_2))) &= c_X(Cl_{CX}(c_X^{-1}(Z_1) \cup c_X^{-1}(Z_2))) \\ &= c_X[(Cl_{CX}(c_X^{-1}(Z_1))) \cup (Cl_{CX}(c_X^{-1}(Z_2)))] \\ &= c_X(Cl_{CX}(c_X^{-1}(Z_1))) \cup c_X(Cl_{CX}(c_X^{-1}(Z_2))) \end{aligned}$$

(3) $c_X(Cl_{CX}(c_X^{-1}(\emptyset))) = \emptyset$

(4) Sea $f : X \rightarrow Y$ un $\mathcal{T}\text{op}$ -morfismo. Veamos que $f(c_X(Cl_{CX}(c_X^{-1}(Z)))) \subset c_Y(Cl_{CY}(c_Y^{-1}(f(Z))))$. Demostraremos que $c_Y^{-1}(f(c_X(Cl_{CX}(c_X^{-1}(Z)))) \subset Cl_{CY}(c_Y^{-1}(f(Z)))$. Puesto que c_Y es una \mathcal{A} -reflexión y CX está en \mathcal{A} , para $f \circ c_X : CX \rightarrow Y$ existe un único \mathcal{A} -morfismo $Cf : CX \rightarrow CY$ tal que $f \circ c_X = c_Y \circ Cf$; nótese que $c_Y^{-1} \circ f \circ c_X = Cf$, porque c_Y es biyectiva. De donde

$$\begin{aligned} c_Y^{-1}(f(c_X(Cl_{CX}(c_X^{-1}(Z)))) &= Cf(Cl_{CX}(c_X^{-1}(Z))) \\ &\subset Cl_{CY}(Cf(c_X^{-1}(Z))) = Cl_{CY}(c_Y^{-1}(f(Z))) \end{aligned}$$



Resta demostrar que $\mathcal{A} = S(k)$. Sea X un \mathcal{A} -objeto, basta demostrar que $l_X(Z) = Cl_X(Z)$. Nótese que $c_X = 1_X$, por lo que $k_X(Z) = c_X(Cl_{CX}(c_X^{-1}(Z))) = Z$, entonces $Cl_{CX}(Z) = Z = Cl_X(Z)$. Por lo tanto, X es un $S(k)$ -objeto.

Sea X un $S(k)$ -objeto. Obsérvese que $l_X(Z) = Cl_X(Z)$ sí, y sólo si $r_X^{-1}(Cl_{RX}(r_X(Z))) = Cl_X(Z)$, entonces r_X es un isomorfismo y puesto que \mathcal{A} es cerrada bajo isomorfismos, se tiene que X es isomorfo a RX ; como RX pertenece a \mathcal{A} , entonces X pertenece a \mathcal{A} .

Suficiencia. Demostraremos que $S(k)$ es cerrada bajo co-productos y funciones cocientes.

Sea $\{X_i \mid i \in I\} \subset \text{Ob}(S(k))$ y $(X = \coprod X_i, \{j_i : X_i \rightarrow X\})$ su co-producto topológico. Sea $l_X : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ un operador límite inferior. Veamos que

X es un $S(k)$ -objeto, sea Z en $\mathcal{P}(X)$ con $k_X(Z) = Z$ por 2.33 (7) se tiene que $k_{X_i}(j_i^{-1}(Z)) = j_i^{-1}(Z)$ para cada $i \in I$; como $X_i \in \text{Ob}(S(k))$ para cada $i \in I$, entonces $j_i^{-1}(Z) = Cl_{X_i}(Z)$ para cada $i \in I$. Puesto que $\{j_i \mid i \in I\}$ es un sumidero final, se tiene que Z es cerrado en X . Por lo tanto, X es un $S(k)$ -objeto.

Sea $l_X : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ un operador límite inferior y sea $f : X \rightarrow Y$ una función cociente con X un $S(k)$ -objeto. Veamos que Y es un $S(k)$ -objeto, sea Z en $\mathcal{P}(Y)$ con $k_Y(Z) = Z$ entonces 2.33 (7) implica que $k_X(f^{-1}(Z)) = f^{-1}(Z)$; como $X \in \text{Ob}(S(k))$, entonces $f^{-1}(Z) = Cl_X(Z)$ y puesto que f es una función cociente, se tiene que Z es cerrado en X . Por lo tanto, Y es un $S(k)$ -objeto.

□

Ejemplo 2.35. Sea X un espacio topológico y Z en $\mathcal{P}(X)$. Defínase las funciones $l_X^i : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ para $i = 0, 1, 2, 3$ como sigue:

(a) $l_X^0(Z) = \{x \in X \mid Cl_X(\{x\}) \cap Cl_X(Z) \neq \emptyset\}$. Veamos que l_X^0 define un operador límite superior.

(1) $Cl_X(Z) \subset l_X^0(Z)$. Sea $x \in Cl_X(Z)$, puesto que $x \in Cl_X(\{x\})$, entonces $x \in Cl_X(\{x\}) \cap Cl_X(Z)$. Por lo tanto $x \in l_X^0(Z)$

(2) $l_X^0(Z_1 \cup Z_2) = l_X^0(Z_1) \cup l_X^0(Z_2)$. Sea $x \in l_X^0(Z_1 \cup Z_2)$, entonces

$$\begin{aligned} x \in Cl_X(\{x\}) \cap Cl_X(Z_1 \cup Z_2) &= Cl_X(\{x\}) \cap (Cl_X(Z_1) \cup Cl_X(Z_2)) = \\ &= (Cl_X(\{x\}) \cap Cl_X(Z_1)) \cup (Cl_X(\{x\}) \cap Cl_X(Z_2)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x \in l_X^0(Z_1) \cup l_X^0(Z_2)$. Ahora sea $z \in l_X^0(Z_1) \cup l_X^0(Z_2)$. Supongamos que $z \in l_X^0(Z_1)$, como $Z_1 \subseteq Z_1 \cup Z_2$, entonces $l_X^0(Z_1) \subseteq l_X^0(Z_1 \cup Z_2)$ porque l_X^0 es monotono y así $z \in l_X^0(Z_1 \cup Z_2)$. Por lo tanto, $l_X^0(Z_1 \cup Z_2) = l_X^0(Z_1) \cup l_X^0(Z_2)$.

(3) $l_X^0(\emptyset) = \emptyset$. Puesto que $Cl_X(\emptyset) = \emptyset$, se cumple por vacuidad.

(4) Sea $f : X \rightarrow Y$ un \mathcal{Top} -morfismo. Veamos que $f(l_X^0(Z)) = l_Y^0(f(Z))$. Sea $f(x) \in f(l_X^0(Z))$ con $x \in l_X^0(Z)$, entonces $Cl_X(\{x\}) \cap Cl_X(Z) \neq \emptyset$ y existe $y \in Cl_X(\{x\}) \cap Cl_X(Z)$. En consecuencia, $f(y) \in f(Cl_X(\{x\}) \cap Cl_X(Z)) \subset f(Cl_X(\{x\})) \cap f(Cl_X(Z)) \subset Cl_Y(\{f(x)\}) \cap Cl_Y(f(Z))$. Por lo tanto, $f(x) \in l_Y^0(f(Z))$

(b) $l_X^1(Z) = \{x \in X \mid \text{existe un punto } y \in Cl_X(Z) \text{ tal que para cualesquiera subconjuntos abiertos } U \text{ y } V \text{ con } x \in U, y \in V \text{ tienen intersección no vacía}\}$. Veamos que l_X^1 define un operador límite superior.

(1) $Cl_X(Z) \subset l_X^1(Z)$. Sea $x \in Cl_X(Z)$, entonces para conjuntos abiertos A y A' en X con $x \in A$ y $x \in A'$, entonces $A \cap A' \neq \emptyset$.

(2) $l_X^1(Z_1 \cup Z_2) = l_X^1(Z_1) \cup l_X^1(Z_2)$. Sea $x \in l_X^1(Z_1 \cup Z_2)$, entonces existe $y \in Cl_X(Z_1 \cup Z_2) = Cl_X(Z_1) \cup Cl_X(Z_2)$, tal que para cualesquiera conjuntos abiertos U y V en X , tales que si $x \in U$, $y \in V$ entonces $U \cap V \neq \emptyset$. Sean A y A' conjuntos abiertos en X , como se definieron antes

(I) Si $y \in Cl_X(Z_1)$, $x \in A$ e $y \in A'$, entonces $A \cap A' \neq \emptyset$. Por lo tanto $x \in l_X^1(Z_1)$.

(II) Si $y \in Cl_X(Z_2)$, $x \in A$ e $y \in A'$, entonces $A \cap A' \neq \emptyset$. Por lo tanto $x \in l_X^1(Z_2)$.

Sea $x \in l_X^1(Z_1) \cup l_X^1(Z_2)$, entonces $x \in l_X^1(Z_1)$ o $x \in l_X^1(Z_2)$. Si $x \in l_X^1(Z_1)$, existe $y_1 \in Cl_X(Z_1)$ por lo que $y_1 \in Cl_X(Z_1) \cup Cl_X(Z_2) = Cl_X(Z_1 \cup Z_2)$. Sean A y A' conjuntos abiertos en X , $x \in A$ y $y_1 \in A'$, entonces $A \cap A' \neq \emptyset$. Ahora si $x \in l_X^1(Z_2)$, existe $y_2 \in Cl_X(Z_2)$ por lo que $y_2 \in Cl_X(Z_1) \cup Cl_X(Z_2) = Cl_X(Z_1 \cup Z_2)$. Sean A y A' conjuntos abiertos en X , $x \in A$ y $y_2 \in A'$, entonces $A \cap A' \neq \emptyset$.

(3) $l_X^1(\emptyset) = \emptyset$. Por definición $l_X^1(\emptyset) = \{x \in X \mid \text{existe un punto } y \in Cl_X(\emptyset) = \emptyset \text{ tal que para cualesquiera subconjuntos abiertos } U \text{ y } V \text{ con } x \in U, y \in V \text{ tienen intersección no vacía}\} = \emptyset$. Se cumple por vacuidad.

(4) Sea $f : X \rightarrow Y$ un **Top**-morfismo. Veamos que $f(l_X^1(Z)) = l_Y^1(f(Z))$. Sea $f(x) \in f(l_X^1(Z))$ con $x \in l_X^1(Z)$, existe $y \in Cl_X(Z)$, entonces $f(y) \in f(Cl_X(Z)) \subset Cl_Y(f(Z))$. Sean A y A' conjuntos abiertos en Y tales que $f(x) \in A$ y $f(y) \in A'$, se tiene que $x \in f^{-1}(A)$ y $y \in f^{-1}(A')$. Nótese que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A') = f^{-1}(A \cap A') \neq \emptyset$, en consecuencia $A \cap A' \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f(x) \in l_Y^1(f(Z))$

(c) $l_X^2(Z) = \{x \in X \mid \text{para cualesquiera subconjuntos abiertos } U \text{ y } V \text{ con } x \in U, Z \subset V \text{ tienen intersección no vacía}\}$. Veamos que l_X^2 define un operador límite superior.

(1) $Cl_X(Z) \subset l_X^2(Z)$. Sea $x \in Cl_X(Z)$ y A, A' conjuntos abiertos en X con $x \in A$ y $Z \subset A'$. Afirmamos que $A \cap A' \neq \emptyset$; en efecto, $A \cap Z \neq \emptyset$ y $A \cap Z \subset A \cap A'$. Por lo tanto $A \cap A' \neq \emptyset$.

(2) $l_X^2(Z_1 \cup Z_2) = l_X^2(Z_1) \cup l_X^2(Z_2)$. Sea $x \in l_X^2(Z_1 \cup Z_2)$ y consideremos A, A_1 y A_2 conjuntos abiertos en X tales que $x \in A, Z_1 \subseteq A_1$ y $Z_2 \subseteq A_2$. Puesto que $Z_1 \cup Z_2 \subseteq A_1 \cup A_2$ y $A_1 \cup A_2$ es un conjunto abierto en X , entonces $A \cap (A_1 \cup A_2) = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \neq \emptyset$, lo cual implica que $A \cap A_1 \neq \emptyset$ o $A \cap A_2 \neq \emptyset$, por lo que $x \in l_X^2(Z_1)$ o $x \in l_X^2(Z_2)$. Por lo tanto $x \in l_X^2(Z_1) \cup l_X^2(Z_2)$.

Sea $x \in l_X^2(Z_1) \cup l_X^2(Z_2)$, entonces $x \in l_X^2(Z_1)$ o $x \in l_X^2(Z_2)$. Si $x \in l_X^2(Z_1)$. Sean A y A' conjuntos abiertos en X tales que $x \in A$ y $Z_1 \cup Z_2 \subset A'$. Como $Z_1 \subset Z_1 \cup Z_2$ y $Z_1 \subset A'$ entonces $A \cap A' \neq \emptyset$. Ahora si $x \in l_X^2(Z_2)$. Sean A y A' conjuntos abiertos en X tales que $x \in A$ y $Z_1 \cup Z_2 \subset A'$. Como $Z_2 \subset Z_1 \cup Z_2$ y $Z_2 \subset A'$ entonces $A \cap A' \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in l_X^2(Z_1 \cup Z_2)$.

(3) $l_X^2(\emptyset) = \emptyset$. Si $x \in l_X^2(\emptyset)$, puesto que \emptyset, X son conjuntos abiertos en X y $x \in X$, $\emptyset \subset \emptyset$, entonces $X \cap \emptyset = \emptyset$, pero esto no puede suceder. Por lo tanto, $l_X^2(\emptyset) = \emptyset$.

(4) Sea $f : X \rightarrow Y$ un $\mathcal{T}\text{op}$ -morfismo. Veamos que $f(l_X^2(Z)) = l_Y^2(f(Z))$. Sea $f(x) \in f(l_X^2(Z))$ con $x \in l_X^2(Z)$. Sean A y A' conjuntos abiertos en Y con $f(x) \in A$ y $f(Z) \subset A'$, entonces $x \in f^{-1}(A)$ y $Z \subset f^{-1}(A')$. Puesto que $x \in l_X^2(Z)$, $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(A')$ son conjuntos abiertos en X , se tiene que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A') = f^{-1}(A \cap A') \neq \emptyset$, en consecuencia $A \cap A' \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f(x) \in l_Y^2(f(Z))$.

(d) $l_X^3(Z) = \{x \in X \mid \text{no existe una funci3n continua } f : X \rightarrow [0, 1] \text{ con } f(x) = 0 \text{ y } f(Z) \subset \{1\}\}$. Veamos que l_X^3 define un operador l3mite superior.

(1) $Cl_X(Z) \subset l_X^3(Z)$. Sea $x \in Cl_X(Z)$ y sup3ngase que existe una funci3n continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ con $f(x) = 0$ y $f(Z) \subset \{1\}$. Puesto que $f^{-1}(\{1\})$ es un conjunto cerrado en X , entonces $A = X \setminus f^{-1}(\{1\})$ es un conjunto abierto en X . Notemos que $x \in A$, ya que $f(x) = 0$, as3 que $x \notin f^{-1}(\{1\})$, entonces existe $z \in A \cap Z$, por lo que $f(z) = 1$, entonces $z \in f^{-1}(\{1\})$, lo que implica que $z \in A$, una contradicci3n.

(2) $l_X^3(Z_1 \cup Z_2) = l_X^3(Z_1) \cup l_X^3(Z_2)$. Veamos que $l_X^3(Z_1 \cup Z_2) \subseteq l_X^3(Z_1) \cup l_X^3(Z_2)$. Sup3ngase que $x \notin l_X^3(Z_1) \cup l_X^3(Z_2)$, existen funciones continuas $f_i : X \rightarrow [0, 1]$ tales que $f_i(x) = 0$ y $f_i(Z_i) \subset \{1\}$ para i en $\{1, 2\}$. Para todo $x \in X$ tal que $0 \leq f(x) \leq 1$.

Sea

$$f_1 \vee f_2 = \frac{f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|}{2},$$

n3tese que

$$f_1 \vee f_2(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } f_2(x) \leq f_1(x) \\ f_2(x) & \text{si } f_1(x) \leq f_2(x) \end{cases}$$

Por otro lado sea $y \in Z_1 \cup Z_2$; si $y \in Z_1$, entonces $f_1(y) = 1$, luego $f_2(y) \leq f_1(y)$, por lo que $f_1 \vee f_2(y) = f_1(y) = 1$. Similarmente si $y \in Z_2$, entonces $f_1 \vee f_2(y) = f_2(y) = 1$. As3 que existe $f_1 \vee f_2 : X \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $f_1 \vee f_2(x) = 0$ y $f_1 \vee f_2(Z) \subseteq \{1\}$ lo cual no es posible.

$l_X^3(Z_1) \cup l_X^3(Z_2) \subseteq l_X^3(Z_1 \cup Z_2)$. Sea $x \in l_X^3(Z_1) \cup l_X^3(Z_2)$ y supóngase que $x \notin l_X^3(Z_1 \cup Z_2)$, existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(Z_1 \cup Z_2) \subset \{1\}$, entonces $f(x) = 0$ y $f(Z_1) \subset \{1\}$ y $f(x) = 0$ y $f(Z_2) \subset \{1\}$, entonces $x \notin l_X^3(Z_1)$ y $x \notin l_X^3(Z_2)$. Por lo tanto, $x \notin l_X^3(Z_1) \cup l_X^3(Z_2)$ una contradicción.

(3) $l_X^3(\emptyset) = \emptyset$. Si $x \in l_X^3$ para toda $f : X \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $f(x) = 0$ o $f(\emptyset) \subseteq \{1\}$, la función f es continua, $f(x) \neq 0$ y $f(\emptyset) \not\subseteq \{1\}$. Así que para toda $f : X \rightarrow [0, 1]$ continua $f(x) \neq 0$, pero $f \equiv 0$ lo que contradice lo anterior.

(4) Sea $f : X \rightarrow Y$ un **Top**-morfismo. Veamos que $f(l_X^3(Z)) \subseteq l_Y^3(f(Z))$. Sea $y = f(x) \in f(l_X^3(Z))$ con $x \in l_X^3(Z)$. Supóngase que existe un **Top**-morfismo $h : Y \rightarrow [0, 1]$ tal que $h(y) = 0$ y $h(f(X)) \subset \{1\}$. Puesto que $y = f(x) \in f(l_X^3(Z))$, entonces $h \circ f : X \rightarrow [0, 1]$ es tal que $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y) = 0$ y $(h \circ f)(Z) = h(f(Z)) \subset \{1\}$, luego $x \notin l_X^3(Z)$ una contradicción. Por lo tanto, $f(l_X^3(Z)) \subseteq l_Y^3(f(Z))$.

Entonces obtenemos un operador límite superior l^i para $i = 0, 1, 2, 3$.

Un espacio X es un R_0 -espacio si $x \in Cl_X(\{y\})$ para $x, y \in X$, entonces $y \in Cl_X(\{x\})$.

Un espacio X es un R_1 -espacio si F es un conjunto cerrado en X y si $x \notin F, y \in F$, entonces existen conjuntos abiertos U, V en X tales que $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

X es l^0 -separable sí y sólo si es un R_0 -espacio.

Demostración. Supóngase que X es l^0 -separable. Sean $x, y \in X$ con $x \in Cl_X(\{y\}) = l^0(\{y\})$, entonces $Cl_X(\{x\}) \cap Cl_X(\{y\}) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $y \in l^0(\{x\}) = Cl_X(\{x\})$.

Supóngase que X es un R^0 -espacio, tenemos que demostrar que $Cl_X(Z) = l_X^0(Z)$. Puesto que para todo subconjunto Z de X se cumple que $Cl_X(Z) \subseteq l_X^0(Z)$, sólo hay que demostrar $l_X^0(Z) \subseteq Cl_X(Z)$. Sea $x \in l_X^0(Z)$, existe $y \in Cl_X(\{x\}) \cap Cl_X(Z)$. Sea A un conjunto abierto en X y $x \in A$, como $y \in Cl_X(\{x\})$ y $x \in Cl_X(\{y\})$ por ser X R^0 -espacio, entonces $A \cap \{y\} \neq \emptyset$, lo que implica que $y \in A$; así, $A \cap Z \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in Cl_X(Z)$ y X es l^0 -separable.

X es l^1 -separable sí y sólo si es un R_1 -espacio.

Demostración. Supóngase que X es l^1 -separable. Sean $x, y \in X$ y C un conjunto cerrado en X tales que $x \notin C$ y $y \in C$. Puesto que $x \notin C = Cl_X(C) = l_X^1(C)$, existen conjuntos abiertos A y A' en X tales que $x \in A, y \in A'$ y $A \cap A' = \emptyset$.

Supóngase que X es un R^1 -espacio, tenemos que demostrar que $Cl_X(Z) = l_X^1(Z)$. Puesto que para todo subconjunto Z de X se cumple que $Cl_X(Z) \subseteq l_X^1(Z)$, sólo hay que demostrar $l_X^1(Z) \subseteq Cl_X(Z)$. Sea $x \in l_X^1(Z)$ y sea A un

conjunto abierto en X con $x \in A$. Si $A \cap Z = \emptyset$, $Z \subset X \setminus A$ y $x \notin X \setminus A$ donde $X \setminus A$ es un conjunto cerrado en X . Como $x \in l_X^1(Z)$ existe un punto $y \in Cl_X(Z) \subset X \setminus A$. Puesto que X es un R^1 -espacio existen conjuntos abiertos A, A' en X tales que $x \in A, y \in A'$ y $A \cap A' = \emptyset$ lo que contradice el hecho de que $x \in l_X^1$. En consecuencia $A \cap Z \neq \emptyset$ y $x \in Cl_X(Z)$.

$S(l^2) = \mathcal{R}eg$

Demostración. Sean X un $S(l^2)$ -objeto, $x \in X$ y C un conjunto cerrado en X tal que $x \notin C$. Nótese que $C = Cl_X(C) = l_X^2(C)$, entonces $x \notin l_X^2(C)$, existen conjuntos abiertos A y A' en X tales que $x \in A, C \subset A'$ y $A \cap A' = \emptyset$.

Sea X en $\text{Ob}(\mathcal{R}eg)$, veamos que $l_X^2(Z) \subseteq Cl_X(Z)$ para cualquier Z en $\mathcal{P}(X)$. Sean Z en $\mathcal{P}(X)$, $x \in l_X^2(Z)$ y A un conjunto abierto en X con $x \in A$. Tenemos que $X \setminus A$ es cerrado y $x \notin X \setminus A$, como X es regular existen conjuntos abiertos A, A' en X tales que $x \in A, X \setminus A \subset A'$ y $A \cap A' = \emptyset$. Afirmamos que $A \cap Z \neq \emptyset$; en efecto, si $A \cap Z = \emptyset$, entonces $Z \subset X \setminus A \subset A'$ y $x \in A$. Puesto que $x \in l_X^2(C)$, entonces $A \cap A' = \emptyset$ una contradicción. Por lo tanto, $A \cap Z \neq \emptyset$ y $x \in Cl_X(Z)$.

$S(l^3) = \mathcal{C}reg$

Demostración. Sean X un $S(l^3)$ -objeto, $x \in X$ y C un conjunto cerrado en X tal que $x \notin C$. Nótese que $C = Cl_X(C) = l_X^3(C)$, entonces $x \notin l_X^3(C)$, existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal $f(x) = 0$ y $f(Z) \subseteq \{1\}$.

Sea X en $\text{Ob}(\mathcal{C}reg)$, veamos que $l_X^3(Z) \subseteq Cl_X(Z)$ para cualquier Z en $\mathcal{P}(X)$. Sean Z en $\mathcal{P}(X)$, $x \in l_X^3(Z)$ y A un conjunto abierto en X con $x \in A$. Tenemos que $X \setminus A$ es cerrado y $x \notin X \setminus A$, como X es completamente regular existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal $f(x) = 0$ y $f(Z) \subseteq \{1\}$. Afirmamos que $A \cap Z \neq \emptyset$; en efecto, si $A \cap Z = \emptyset$, entonces $Z \subset X \setminus A$, en particular $f(Z) \subseteq \{1\}$ y $f(x) = 0$ $x \in A$ una contradicción, pues $x \in l_X^3(C)$. Por lo tanto, $A \cap Z \neq \emptyset$ y $x \in Cl_X(Z)$.

$S(l^0) \cap \mathcal{T}op_0 = \mathcal{T}op_1$.

Demostración. Sea $X \in \text{Ob}(S(l^0) \cap \mathcal{T}op_0)$ y sean x, x' puntos distintos en X . Puesto que X es T_0 , existe un conjunto abierto A en X tal que $x \in A$ y $x' \notin A$. Si $x' \notin Cl_X(\{x\})$, existe un conjunto abierto A' en X con $x' \in A'$ tal que $A' \cap \{x\} = \emptyset$, lo que implica $x \notin A'$. Puesto que X es R^0 -espacio, si $x' \in Cl_X(\{x\})$, entonces $x \in Cl_X(\{x'\})$, de donde $A \cap \{x'\} \neq \emptyset$ y $x' \in A$ una contradicción.

Sea X un $\mathcal{T}op_1$ -objeto, entonces X es un $\mathcal{T}op_0$ -objeto. Resta demostrar que X es un $S(l^0)$ -objeto. Sean $x, x' \in X$ con $x \in Cl_X(\{x'\})$, veamos que $x' \in Cl_X(\{x\})$. Sea A un conjunto abierto en X con $x' \in A$. Afirmamos que $A \cap \{x\} \neq \emptyset$. Si $x \notin A$, como X es T_1 , existen conjuntos abiertos A_1 y A_2 en X tal que $x \in A_1 \setminus A_2$ y $x' \in A_2 \setminus A_1$, entonces $A_1 \cap \{x'\} \neq \emptyset$, de donde $x' \in A_1$ una cotradicción. Por lo tanto, $A \cap \{x\} \neq \emptyset$.

$S(l^1) \cap \mathcal{Top}_0 = \mathcal{Top}_2$. Demostración. Sea X en $\text{Ob}(S(l^1) \cap \mathcal{Top}_0)$. Veamos que X es un \mathcal{Top}_2 , sean x y x' puntos distintos en X . Puesto que X es T_0 existe un conjunto abierto A en X tal que $x \in A$ y $x' \notin A$. Obsérvese que $X \setminus A$ es un conjunto cerrado, $x \notin X \setminus A$ y $x' \in X \setminus A$ y como X es un R^1 -espacio, existen conjuntos abiertos A_1 y A_2 en X tales que $x \in A_1$, $x' \in A_2$ y $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Sea X un \mathcal{Top}_2 -objeto. Veamos que X es un $S(l^1)$ -objeto. Sea C un conjunto cerrado en X , $x, x' \in X$ tales que $x \notin C$ y $x' \in C$. Puesto que X es T_2 , existen conjuntos abiertos A_1 y A_2 en X tales que $x \in A_1$, $x' \in A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

$$S(l^2) \cap \mathcal{Top}_0 = \mathcal{Reg} \cap \mathcal{Top}_0 = \mathcal{Top}_3.$$

$$S(l^3) \cap \mathcal{Top}_0 = \mathcal{Creg} \cap \mathcal{Top}_0 = \mathcal{Top}_3.$$

Ejemplo 2.36. Sea X un espacio topológico y Z en $\mathcal{P}(X)$. Defínase las funciones $k_X^i : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ como sigue:

$$k_X^0(Z) = Z.$$

$$k_X^1(Z) = \{x \in X \mid \text{existe un subespacio indiscreto } S \text{ de } X \text{ con } x \in Cl_S(Z \cap S)\}.$$

(1) $Z \subset k_X^1(Z) \subset Cl_X(Z)$. $Z \subset k_X^1(Z)$. Sea $x \in Z$ y $S = (\{x\}, \{\emptyset, \{x\}\})$ un subespacio de X . Si A es un conjunto abierto en X y $x \in A$, entonces $A \cap \{x\} = \{x\}$, donde $\{x\}$ es un conjunto abierto en S . Si $x \notin A$, entonces $A \cap \{x\} = \emptyset$, donde \emptyset es un conjunto abierto en S . Por lo tanto, la topología de $\{x\}$ como subespacio de X es la indiscreta. En consecuencia, $x \in Cl_S(Z \cap S) = \{x\}$.

$k_X^1(Z) \subset Cl_X(Z)$. Sea $x \in k_X^1(Z)$, entonces existe un subespacio indiscreto S de X tal que $x \in Cl_S(Z \cap S) = Cl_X(Z \cap S) \cap S \subseteq Cl_X(Z) \cap S \subseteq Cl_X(Z)$.

(2) $k_X^1(Z_1 \cup Z_2) = k_X^1(Z_1) \cup k_X^1(Z_2)$. Sea $x \in k_X^1(Z_1 \cup Z_2)$ y $x \notin k_X^1(Z_1)$, entonces existe un subespacio indiscreto S tal que $x \in Cl_S((Z_1 \cup Z_2) \cap S) = Cl_S((Z_1 \cap S) \cup (Z_2 \cap S)) = Cl_S(Z_1 \cap S) \cup Cl_S(Z_2 \cap S)$, pero como $x \notin Cl_S(Z_1 \cap S)$, entonces $x \in Cl_S(Z_2 \cap S)$. Por lo tanto, $x \in k_X^1(Z_1) \cup k_X^1(Z_2)$. Sea $x \in k_X^1(Z_1) \cup k_X^1(Z_2)$, entonces $x \in k_X^1(Z_1)$ o $x \in k_X^1(Z_2)$. Si $x \in k_X^1(Z_1)$, existe un subespacio indiscreto S tal que $x \in Cl_S(Z_1 \cap S) \subset Cl_S((Z_1 \cup Z_2) \cap S)$. Por lo tanto $x \in k_X^1(Z_1 \cup Z_2)$. Similarmente si $x \in k_X^1(Z_2)$, entonces $x \in k_X^1(Z_1 \cup Z_2)$.

(3) $k_X^1(\emptyset) = \emptyset$. Sea $x \in X$, si $x \in k_X^1(\emptyset)$, existe un subespacio indiscreto S tal que $x \in Cl_S(\emptyset \cap S) = \emptyset$ una contradicción. En consecuencia $x \notin k_X^1(\emptyset)$ y $k_X^1(\emptyset) = \emptyset$.

(4) Sea $f : X \rightarrow Y$ un \mathcal{Top} -morfismo. Veamos que $f(k_X^1(Z)) = k_Y^1(f(Z))$. Sea $f(x) \in f(k_X^1(Z))$ con $x \in k_X^1(Z)$, existe un subespacio indiscreto S tal que $x \in Cl_S(Z \cap S)$, entonces $f(x) \in f(Cl_S(Z \cap S)) \subset Cl_{f(S)}(f(Z \cap S)) \subset$

$Cl_{f(S)}(f(Z) \cap f(S))$.

Sea $f' = f|_S^{f(S)} : S \rightarrow f(S)$ continua. Veamos que $f(S)$ es un subespacio indiscreto de Y . Sea A un conjunto abierto en $f(S)$ distinto del vacío, existe $f'(x) = f(x) \in A$ con $x \in S$. Obsérvese que $(f')^{-1}(A) = (f|_S^{f(S)})^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en S y $x \in (f')^{-1}(A) = (f|_S^{f(S)})^{-1}(A)$, entonces $(f')^{-1}(A) = (f|_S^{f(S)})^{-1}(A) = S$. Por otro lado $f'(S) = f'((f')^{-1}(A)) \subseteq A \subseteq f(S) = f'(S)$, lo cual implica que $A = f'(S) = f(S)$. Por lo tanto, $f(x) \in k_X^1(f(Z))$.

$k_X^2(Z) = \{x \in X \mid \text{existe un subespacio finito } F \text{ de } X \text{ con } x \in Cl_F(Z \cap F)\}$.

(1) $Z \subset k_X^2(Z) \subset Cl_X(Z)$. $Z \subset k_x^2(Z)$. Sea $x \in Z$, entonces $x \in Cl_X(Z \cap \{x\}) \cap (\{x = Cl_{\{x\}}(Z \cap \{x\})\})$.

$k_X^1 Z \subset Cl_X(Z)$. Sea $x \in k_X^1(Z)$, entonces existe un subespacio finito F de X tal que $x \in Cl_F(Z \cap F) = Cl_X(Z \cap F) \cap F \subseteq Cl_X(Z) \cap F \subseteq Cl_X(Z)$.

(2) $k_X^2(Z_1 \cup Z_2) = k_X^2(Z_1) \cup k_X^2(Z_2)$. Sea $x \in k_X^2(Z_1 \cup Z_2)$ y $x \notin k_X^1(Z_1)$, entonces existe un subespacio finito F tal que $x \in Cl_F((Z_1 \cup Z_2) \cap F) = Cl_F((Z_1 \cap F) \cup (Z_2 \cap F)) = Cl_F(Z_1 \cap F) \cup Cl_F(Z_2 \cap F)$, pero como $x \notin Cl_F(Z_1 \cap F)$, entonces $x \in Cl_F(Z_2 \cap F)$. Por lo tanto, $x \in k_X^2(Z_1) \cup k_X^2(Z_2)$. Sea $x \in k_X^2(Z_1) \cup k_X^2(Z_2)$, entonces $x \in k_X^2(Z_1)$ o $x \in k_X^2(Z_2)$. Si $x \in k_X^2(Z_1)$, existe un subespacio finito F tal que $x \in Cl_F(Z_1 \cap F) \subset Cl_F((Z_1 \cup Z_2) \cap F)$. Por lo tanto, $x \in k_X^2(Z_1 \cup Z_2)$. Similarmente si $x \in k_X^2(Z_2)$, entonces $x \in k_X^2(Z_1 \cup Z_2)$.

(3) $k_X^2(\emptyset) = \emptyset$. Sea $x \in X$, si $x \in k_X^2(\emptyset)$, existe un subespacio finito F tal que $x \in Cl_F(\emptyset \cap F) = \emptyset$ una contradicción. En consecuencia $x \notin k_X^2(\emptyset)$ y $k_X^2(\emptyset) = \emptyset$.

(4) Sea $f : X \rightarrow Y$ un \mathcal{Top} -morfismo. Veamos que $f(k_X^2(Z)) = k_Y^2(f(Z))$. Sea $f(x) \in f(k_X^2(Z))$ con $x \in k_X^2(Z)$, existe un subespacio finito F tal que $x \in Cl_F(Z \cap F)$, entonces $f(x) \in f(Cl_F(Z \cap F)) \subset Cl_{f(F)}(f(Z \cap F)) \subset Cl_{f(F)}(f(Z) \cap f(F))$. Por lo tanto, $f(x) \in k_Y^2(f(Z))$.

$k_X^3(Z) = \{x \in X \mid \text{existe una sucesión en } A \text{ que converge a } x\}$.

(1) $Z \subset k_X^3(Z) \subset Cl_X(Z)$. $Z \subset k_x^3(Z)$. Sea $x \in Z$ y sea $x_n = x$ para toda n en \mathbb{N} , entonces x_n converge a x .

$k_X^1 Z \subset Cl_X(Z)$. Sea $x \in k_X^3(Z)$, entonces existe una sucesión $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en Z tal que x_n converge a x .

(2) $k_X^3(Z_1 \cup Z_2) = k_X^3(Z_1) \cup k_X^3(Z_2)$. Sea $x \in k_X^3(Z_1 \cup Z_2)$, entonces existe una sucesión $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en $Z_1 \cup Z_2$ tal que x_n converge a x ...

Sea $x \in k_X^3(Z_1) \cup k_X^3(Z_2)$, entonces $x \in k_X^3(Z_1)$ o $x \in k_X^3(Z_2)$. Si $x \in k_X^3(Z_1)$, existe una sucesión en $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en $Z_1 \subset Z_1 \cup Z_2$ tal que

x_n converge a x . Similarmente si $x \in k_X^3(Z_2)$, existe una sucesión en $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en $Z_2 \subset Z_1 \cup Z_2$ tal que x_n converge a x . Por lo tanto, $x \in k_X^3(Z_1 \cup Z_2)$.

- (3) $k_X^3(\emptyset) = \emptyset$. Sea $x \in X$, si $x \in k_X^3(\emptyset)$, existe una sucesión $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}$ en \emptyset una contradicción. En consecuencia $x \notin k_X^3(\emptyset)$ y $k_X^3(\emptyset) = \emptyset$.
- (4) Sea $f : X \rightarrow Y$ un **Top**-morfismo. Veamos que $f(k_X^3(Z)) = k_Y^3(f(Z))$. Sea $f(x) \in f(k_X^3(Z))$ con $x \in k_X^3(Z)$, existe una sucesión $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en Z tal que x_n converge a x . Nótese que $\{f(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset f(Z)$ y puesto que f es continua, setiene que $f(x_n)$ converge a $f(x)$. Por lo tanto, $f(x) \in k_Y^3(f(Z))$.

$k_X^4(Z) = \{x \in X \mid \text{existe un subespacio compacto } K \text{ de } X \text{ con } x \in Cl_K(Z \cap K)\}$.

- (1) $Z \subset k_X^4(Z) \subset Cl_X(Z)$. $Z \subset k_x^4(Z)$. Sea $x \in Z$, entonces $x \in Cl_X(\{x\} \cap Z) \cap \{x\} = Cl_{\{x\}}(\{x\} \cap Z) = \{x\}$.
 $k_X^4 Z \subset Cl_X(Z)$. Sea $x \in k_X^4(Z)$, entonces existe un subespacio compacto K de X tal que $x \in Cl_K(Z \cap K) = Cl_X(Z \cap K) \cap K \subseteq Cl_X(Z) \cap K \subseteq Cl_X(Z)$.
- (2) $k_X^4(Z_1 \cup Z_2) = k_X^4(Z_1) \cup k_X^4(Z_2)$. Sea $x \in k_X^4(Z_1 \cup Z_2)$ y $x \notin k_X^4(Z_1)$, entonces existe un subespacio compacto K tal que $x \in Cl_K((Z_1 \cup Z_2) \cap K) = Cl_K((Z_1 \cap K) \cup (Z_2 \cap K)) = Cl_K(Z_1 \cap K) \cup Cl_K(Z_2 \cap K)$, pero como $x \notin Cl_K(Z_1 \cap K)$, entonces $x \in Cl_K(Z_2 \cap K)$. Por lo tanto, $x \in k_X^4(Z_1) \cup k_X^4(Z_2)$.
 Sea $x \in k_X^4(Z_1) \cup k_X^4(Z_2)$, entonces $x \in k_X^4(Z_1)$ o $x \in k_X^4(Z_2)$. Si $x \in k_X^4(Z_1)$, existe un subespacio compacto K tal que $x \in Cl_K(Z_1 \cap K) \subset Cl_K((Z_1 \cup Z_2) \cap K)$. Por lo tanto $x \in k_X^4(Z_1 \cup Z_2)$. Similarmente si $x \in k_X^4(Z_2)$, entonces $x \in k_X^4(Z_1 \cup Z_2)$.
- (3) $k_X^4(\emptyset) = \emptyset$. Sea $x \in X$, si $x \in k_X^4(\emptyset)$, existe un subespacio compacto K tal que $x \in Cl_K(\emptyset \cap K) = \emptyset$ una contradicción. En consecuencia $x \notin k_X^4(\emptyset)$ y $k_X^4(\emptyset) = \emptyset$.
- (4) Sea $f : X \rightarrow Y$ un **Top**-morfismo. Veamos que $f(k_X^4(Z)) = k_Y^4(f(Z))$. Sea $f(x) \in f(k_X^4(Z))$ con $x \in k_X^4(Z)$, existe un subespacio compacto K tal que $x \in Cl_K(Z \cap K)$. Nótese que $f' = f|_K^{f(K)} : K \rightarrow f(K)$ es continua, entonces $f'(x) \in f(Cl_K(Z \cap K)) \subset Cl_{f(K)}(f(Z \cap K)) \subset Cl_{f(K)}(f(Z) \cap f(K))$. Por lo tanto, $f(x) \in k_Y^4(f(Z))$.

$k_X^5(Z) = Cl_X(Z)$.

Entonces cada k^i es un operador límite inferior para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Tenemos entonces que los $Ob(S(k^i))$ consisten de todos los espacios que satisfacen cada una de las condiciones a continuación:

$S(k^0) = \mathbf{Dis}$, espacios discretos.

Demostración. Sea X un $S(k^0)$ -objeto y sea $Z \subset X$. Veamos que Z es un conjunto cerrado en X . Puesto que X es k^0 -separable y $Z = k_X^0(Z)$, entonces $Z = Cl_X(Z)$.

Sean X un \mathbf{Dis} -objeto, $Z \subset X$ y $k_X^0(Z) = Z$. Como X es un espacio discreto, entonces $Z = Cl_X(Z)$.

$S(k^1) =$ sumas topológicas de espacios indiscretos.

Lema. Sea $\{S_i \mid i \in I\}$ una familia de subespacios indiscretos de un espacio X tales que $\bigcap S_i \neq \emptyset$, entonces $\bigcup S_i$ es indiscreto.

Sea A un conjunto abierto en X tal que $A \cap (\bigcup S_i) \neq \emptyset$, existe S_1 tal que $A \cap S_1 \neq \emptyset$, entonces $A \cap S_1 = S_1$. Sea S_i $i \in I$, si $y \in S_1 \cap S_i$, entonces $S_1 \cap S_i \neq \emptyset$

$y \in A \cap (S_1 \cap S_i) = (A \cap S_1) \cap S_i = S_1 \cap S_i = (A \cap S_i) \cap S_1 = A \cap S_i$, entonces $A \cap S_i \neq \emptyset$. Por lo tanto $A \cap (\bigcup S_i) = \bigcup S_i$.

Sean X un $S(k^2)$ -espacio y $x \in X$, defínase $\mathcal{A}_x = \{S \subseteq X \mid S \text{ es un subespacio indiscreto y } x \in S\}$. Veamos que $\bigcup \mathcal{A}_x$ es indiscreto. Sea A un conjunto abierto en X tal que $A \cap (\bigcup \mathcal{A}_x) \neq \emptyset$, existe S tal que $A \cap S \neq \emptyset$. En particular $A \cap S = S$.

Ahora sea S' en $\bigcup \mathcal{A}_x$, como $S \cap S' \neq \emptyset$, existe $y \in S \cap S' = (A \cap S) \cap S' = (A \cap S') \cap S$, entonces $A \cap S' \neq \emptyset$ en consecuencia $A \cap S' = S'$. Por lo tanto, $A \cup \bigcup \mathcal{A}_x = \bigcup \mathcal{A}_x$.

$k_X^1(\bigcup \mathcal{A}_x) \subseteq \bigcup \mathcal{A}_x$. Sea $y \in k_X^1(\bigcup \mathcal{A}_x)$, existe un subespacio S indiscreto de X tal que $y \in Cl_S((\bigcup \mathcal{A}_x) \cap S)$. Sea A un conjunto abierto en X con $x \in A \cap S$, $A \cap S = S$. Demostraremos que existe C en $\bigcup \mathcal{A}_x$ tal que $y \in C$

$S \cap (S \cap (\bigcup \mathcal{A}_x)) \neq \emptyset$

$S \cap (S \cap (\bigcup \mathcal{A}_x)) = (S \cap S) \cap (\bigcup_{C \in \mathcal{A}_x} C \cap S)$

Existe un espacio discreto $C \in \bigcup \mathcal{A}_x$ tal que $C \cap S \neq \emptyset$. Puesto que $C \cap S \neq \emptyset$, entonces $S \cup C$ es indiscreto, $x \in C \cup S$ entonces $C \cup S \in \bigcup \mathcal{A}_x$. Pero $y \in S$, entonces $y \in C \cup S \in \bigcup \mathcal{A}_x$.

Defínase una relación \sim en X como sigue para x, y en X , $x \sim y$ sí, y sólo si existe un subespacio indiscreto S de X tal que $x \in S$ y $y \in S$. Es claro que $x \sim x$ y nótese que si $x \sim y$, entonces $y \sim x$. Supóngase que $x \sim y$ y $y \sim x$,

existen S_1 y S_2 subespacios indiscretos tales que $x, y \in S_1$ y $y, z \in S_2$, entonces $y \in S_1 \cup S_2$. Puesto que $S_1 \cup S_2$ es un subespacio indiscreto y $x, z \in S_1 \cup S_2$, se tiene que $x \sim z$. Por lo tanto \sim es una relación de equivalencia en X .

$[x] = \bigcup \mathcal{A}_x$. Sea $y \in [x]$, entonces $y \sim x$, existe un subespacio indiscreto tal que $x, y \in S$. Por lo tanto, $y \in \bigcup \mathcal{A}_x$. Sea $y \in \bigcup \mathcal{A}_x$, existe un subespacio indiscreto S tal que $x, y \in S$, entonces $x \sim y$. Por lo tanto, $y \in [x]$.

Por el Axioma de Elección existe $I \subset X$ un sistema completo de representantes, $X = \bigoplus_{x \in I} [x]$.

Sea $X = \bigoplus_{i \in I} S_i$ donde S_i es un subespacio indiscreto de X para cada $i \in I$. Sea Z en $\mathcal{P}(X)$ tal que $k_X^1(Z) = Z$, nótese que si $x \in Cl_X(Z) = \bigcup_{S_i \cap Z \neq \emptyset} Cl_{S_i}(S_i \cap Z)$, entonces $x \in k_X^1(Z) = Z$.

$S(k^2) = \mathcal{A}_{gen}$, espacios finitamente generados.

Sea X un $S(k^2)$ -objeto, $C \subset X$ tal que $C \cap F$ es un conjunto cerrado en X para todo $F \subset X$ finito. Veamos que C es un conjunto cerrado en X , para esto basta demostrar que $k_X^2(C) \subset C$. Sea $x \in k_X^2(C)$, existe un subconjunto finito F tal que $x \in Cl_F(C \cap F) = (C \cap F)$, en consecuencia $x \in C$; así C es un conjunto cerrado en X . Por lo tanto, X es un \mathcal{A}_{gen} -espacio.

Sea X un \mathcal{A}_{gen} -objeto y sea $C \subset X$ tal que $k_X^2(C) = C$

Veamos que C es un conjunto cerrado en X . Sea $F \subset X$ un conjunto finito; demostraremos que $Cl_F(C \cap F) = C \cap F$. Sea $x \in Cl_F(C \cap F) \subset F$, entonces $x \in k_X^2(C) = C$, en consecuencia $x \in C \cap F$, Así $C \cap F$ es un conjunto cerrado en X . Por lo tanto, X es un $S(k^2)$ -objeto.

$S(k^3) = \mathcal{Seq}$, espacios secuenciales.

Sea X un $S(k^3)$ -objeto y sea $C \subset X$. Supóngase que para toda sucesión $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en C tal que x_n converge a x implica que $x \in C$. Veamos que C es cerrado, para esto es suficiente demostrar que $k_X^3(C) \subset C$. Sea $x \in k_X^3(C)$, existe una sucesión $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tal que x_n converge a x , entonces $x \in C$. Por lo tanto, X es un \mathcal{Seq} -objeto.

Sea X un \mathcal{Seq} -objeto y sea $Z \subset X$ con k_X^3 . Sea $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión en Z tal que x_n converge a x , entonces $x \in k_X^3$, es decir, $x \in Z$, como X es un espacio secuencial Z es un conjunto cerrado en X . Por lo tanto X es un $S(k^3)$ -objeto.

$S(k^4) = \mathcal{Comp}_{gen}$, k -espacios.

Sea X un $S(k^4)$ -objeto, $C \subset X$ tal que $C \cap K$ es un conjunto cerrado en X

para todo $K \subset X$ compacto. Veamos que C es un conjunto cerrado en X , para esto basta demostrar que $k_X^4(C) \subset C$. Sea $x \in k_X^4(C)$, existe un subconjunto compacto K tal que $x \in Cl_K(C \cap K) = (C \cap K)$, en consecuencia $x \in C$; así C es un conjunto cerrado en X . Por lo tanto, X es un \mathbf{Comp}_{gen} -espacio.

Sea X un \mathbf{Comp}_{gen} -objeto y sea $C \subset X$ tal que $k_X^4(C) = C$. Veamos que C es un conjunto cerrado en X . Sea $F \subset X$ un conjunto compacto; demostraremos que $Cl_K(C \cap K) = C \cap K$. Sea $x \in Cl_K(C \cap K) \subset K$, entonces $x \in k_X^4(C) = C$, en consecuencia $x \in C \cap K$, Así $C \cap K$ es un conjunto cerrado en K . Por lo tanto, X es un $S(k^4)$ -objeto.

$$S(k^5) = \mathbf{Top}.$$

Bibliografía

- [1] S. Baron *Note on epi in T_0* , Canad. Math. Bull. II, 503 - 504, 1968.
- [2] R. Engelking *General Topology*, Revised and completed edition. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [3] H. Herlich *Limit-operators and topological coreflections*, Trans. AMS 146, 203-210, 1969.
- [4] H. Herlich and G. E. Strecker *Category Theory*, Heldermann Verlag, Berlin, 1979.
- [5] R. Nakagawa *Categorical Topology*, Chapter 14 in *Topics in General Topology*, K. Morita, J. Nagata, Eds., Elsevier Science Publishers B.V, North-Holland, 1989.
- [6] B. Mitchel *Theory of Categories*, Academic Press, New York, 1965.