



**BUAP**

**BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA**

Facultad de Ingeniería  
Secretaría de Investigación y Estudios de Posgrado

**SIMULACIÓN DINÁMICA DE EDIFICIOS  
AGRIETADOS PARA LA DETECCIÓN  
DE DAÑO**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
**MAESTRO EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL**

PRESENTA:

**ALAN ALONSO RIVERS**

ASESOR Y CO-ASESOR:

**Dr. ROLANDO SALGADO ESTRADA**

**Dr. JOAQUIN LOZANO MERCADO**



Oficio No. 4324/13

**C. ALAN ALONSO RIVERS**

Pasante de la Maestría en Ingeniería Estructural  
Facultad de Ingeniería, BUAP.  
Presente

Por medio del presente, el suscrito Mtro. Edgar Iram Villagrán Arroyo, Director de la Facultad de Ingeniería, de acuerdo a su solicitud de aprobación de tema de tesis, le autoriza desarrollar el tema intitulado: **Simulación dinámica de edificios agrietados para la detección de daño.** Para obtener el grado de Maestro en Ingeniería Estructural. Asignándose como Asesor al Dr. Rolando Salgado Estrada y Co-asesor al Dr. Joaquín Lozano Mercado.

Sin otro particular de momento, reciba un cordial saludo.

A T E N T A M E N T E

"PENSAR BIEN, PARA VIVIR MEJOR"

H. Puebla de Zaragoza, ~~diciembre 12 de 2013.~~



M.I. EDGAR IRAM VILLAGRAN ARROYO  
DIRECTOR

C.c.p. Dr. Rolando Salgado Estrada, Asesor del Tema de Tesis.  
C.c.p. Dr. Joaquín Lozano Mercado, Co-asesor del Tema de Tesis.

C.c.p. Archivo

GJS/JLM/sco\*

H. Puebla Zaragoza a 4 de diciembre de 2015

M.I. Edgar Iram Villagrán Arroyo  
Director de la Facultad de Ingeniería,  
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla  
**PRESENTE:**

El suscribe **Dr. Rolando Salgado Estrada**, nombrado asesor del tema de tesis: **Simulación dinámica de edificios agrietados para la detección de daño**, informa a usted, por medio de la presente que después de haber revisado el contenido del documento, la metodología, así como la redacción del mismo, no tengo inconveniente en autorizar la impresión de dicha tesis, para que el estudiante de la Maestría en Ingeniería Estructural, **Ing. Alan Alonso Rivers**, pueda continuar su proceso de titulación.

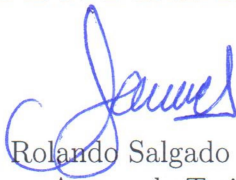
Czda. Adolfo Ruiz  
Cortines no. 455  
Fracc. Costa Verde,  
Boca del Río, Ver.  
correo-e:

[rosalgado@uv.mx](mailto:rosalgado@uv.mx)

La presente se extiende para su conocimiento y los efectos legales a que haya lugar.

Sin más por el momento me despido y quedo de usted para cualquier duda y/o aclaración.

**A T E N T A M E N T E**



Dr. Rolando Salgado Estrada  
Asesor de Tesis

# Agradecimientos

---

A la Universidad Benemérita Autónoma de Puebla y a su vez a la Facultad de Ingeniería, por abrirme las puertas en esta etapa de aprendizaje.

A los profesores internos y externos que me permitieron superarme en la rama de la ingeniería estructural con sus conocimientos, lecciones y enseñanzas.

Al Dr. Joaquín Lozano Mercado, por aceptar fungir como mi Co-Asesor en este trabajo y por todas las facilidades que me brindo como coordinador de la maestría.

Al Dr. Rolando Salgado Estrada, por el conocimiento, el tiempo y sobre todo la paciencia que me brindo en la elaboración de este trabajo. Gracias por aceptar ser mi asesor.

Al Ing. Jorge A. Miranda Moreno, por orientarme y guiarme en mis primeros trabajos en la ingeniería estructural.

Al Ing. Juan Capallera Cabada, por brindarme la oportunidad de trabajar junto a usted, por sus enseñanzas en la ingeniería, sus palabras de aliento y motivación. No solo en la ingeniería, también los consejos y lecciones de la vida que jamás las olvidare.

A mis colegas y compañeros de maestría que me brindaron su amistad en esta etapa, Antonio Maliachi, Alfredo Báez, Domingo Rodríguez, David Mireles, Hebert Ortiz, Javier Anaya, Martín Castillo, Miriam Castaños y Paulina Ocaña. *Gracias amigos.*

A mi familia, por sus palabras de aliento y cariño, en especial a mi madre Lulú que sin sus sacrificios y enseñanzas no sería quien soy; simplemente le debo todo.

# Dedicatoria

---

A quien me ha demostrado su apoyo incondicional.

A quien me motiva día a día a superarme.

A la persona que hace que mis problemas sean menos.

A quien me demostró comprensión y amor.

A quien es el motor de mi vida.

Leivy Lara Bautista

Gracias por paciencia y sobre todo por confiar en mí, sin ti jamás hubiera terminado este trabajo.

# Resumen

---

El objetivo principal de este trabajo es implementar un método de simulación dinámica de estructuras agrietadas para la determinación de la respuesta dinámica; con el fin de ser empleado para evaluar su comportamiento estructural.

El procedimiento contempla 6 grados de libertad por nudo, por lo cual pueden simularse estructuras agrietadas tridimensionales, para el cálculo de la respuesta dinámica (aceleración, velocidad y desplazamiento), la fuerza de excitación aleatoria se genera a base de una distribución normal la cual trata de simular intensidades de viento. Se considera que la estructura, en forma global, se mantiene dentro del rango elástico, por lo cual, la respuesta dinámica se puede determinar al desacoplar las contribuciones de cada uno de sus modos.

De las conclusiones del presente trabajo, se destaca el hecho de que en el método propuesto la presencia de daño (dependiendo de su ubicación e intensidad) modifica los parámetros modales de la estructura en forma muy cercana al encontrado en casos reales y en otros métodos semejantes propuestos para estructuras más simples. A partir de los parámetros dinámicos determinados del método propuesto se podrá simular estructuras agrietadas complejas y evaluar su integridad estructural mediante métodos matemáticos basados en vibraciones.

# Abstract

---

The main aim of this work is implement a dynamic simulation method for cracked structures for determining the dynamic response; in order to be used to evaluate the structural behaviour.

The process contemplates 6 degrees of freedom per node, which can be simulated three-dimensional cracked structures, for calculation the dynamic response (acceleration, velocity and displacement), the random excitation force is generated based on a normal distribution which is to simulate wind currents. It is considered that the structure, in general form, remains in the elastic range, therefore, the dynamic response can be determined by decoupling the contributions of each of its modes.

From the conclusions of this study, stands out the fact that in the proposed method in presence of damage (depending on their location and intensity) modify the modals parameters of the structure as close to real cases and other similar methods proposed for simpler structures. Based on the determined dynamics parameters of the proposed method may simulated cracked complex structures and evaluated their structural integrity by mathematical methods based on vibrations.

# Contenido

---

<b>Agradecimientos</b> .....	<b>iv</b>
<b>Dedicatoria</b> .....	<b>v</b>
<b>Resumen</b> .....	<b>vi</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>vii</b>
<b>Capítulo 1 Introducción</b> .....	<b>1</b>
1.1 Planteamiento del problema.....	3
1.2 Objetivos .....	4
1.2.1 Objetivo general .....	4
1.2.1 Objetivo específico.....	4
1.3 Hipótesis .....	5
1.4 Justificación .....	5
<b>Capítulo 2 Antecedentes de dinámica estructural</b> .....	<b>6</b>
2.1 Solución lineal de la ecuación de movimiento .....	7
2.1.1 Solución usando el método de superposición .....	8
2.2 Solución no lineal de la ecuación de movimiento .....	15
2.2.1 Método de aceleración promedio .....	17
2.2.2 Método de aceleración lineal .....	19
2.3 Diferencia entre la solución lineal y no lineal de la ecuación de movimiento .....	22
2.4 Teoría de vigas sujetas a flexión.....	23
2.4.1 Teoría de la viga Euler-Bernoulli.....	23
2.4.2 Teoría de la viga de Timoshenko .....	29
2.5 Introducción al Método de los Elementos Finitos (M.E.F.) .....	30
2.5.1 Funciones de forma y tipos de funciones .....	32
2.5.2 Formulación de las ecuaciones básicas del MEF.....	34
2.6 Mecánica de la fractura.....	40
2.6.1 Factores de intensidad de esfuerzo.....	41

2.6.2 El índice de energía liberada $\mathcal{G}$ .....	44
2.6.3 La relación entre K (Factores de intensidad de esfuerzo) y $\mathcal{G}$ (índice de energía liberada) .....	46
<b>Capítulo 3 Métodos de determinación de la respuesta dinámica de estructuras agrietadas</b> .....	<b>49</b>
3.1 Método de Christidies y Barr .....	49
3.1.1 Solución usando el método de superposición .....	50
3.1.2 Teoría de la viga agrietada .....	51
3.1.3 Método de Christidies y Barr modificado .....	60
3.2 Método de Shifrin y Ruotolo .....	63
3.3 Método de Zheng y Kessissoglou .....	66
3.4 Método de Bouboulas y Anafantis .....	70
3.5 Método de Caddemi y Caliô .....	74
3.6 El problema de la grieta que abre y cierra .....	81
3.7 Ventajas y desventajas de los métodos mencionados .....	84
<b>Capítulo 4 Simulación dinámica de edificios agrietados</b> .....	<b>86</b>
4.1 Propuesta para la simulación de edificios agrietados .....	86
4.2 Desarrollo del algoritmo del método de simulación .....	88
4.3 Comparación con otros métodos de simulación .....	90
4.3.1 Viga empotrada-libre, Shifrin y Ruotolo (1998) .....	90
4.3.2 Viga simplemente apoyada, Law y Lu (2005) .....	92
4.3.3 Marco de concreto reforzado, Bui y Mommessin (2014) .....	93
<b>Capítulo 5 Implementación del método de simulación dinámica en un edificio agrietado</b> .....	<b>95</b>
5.1 Características y propiedades del edificio agrietado a evaluar .....	95
5.2 Localización de las grietas en los elementos estructurales .....	98
5.3 Simulación dinámica del edificio con el método propuesto .....	104
<b>Capítulo 6 Conclusiones</b> .....	<b>120</b>
<b>Bibliografía y Referencias</b> .....	<b>105</b>

## ANEXO A

## ANEXO B

# Lista de Figuras

---

- Fig. 1.1** Diagrama de flujo de la tesis.
- Fig. 2.1** Función de carga modal.
- Fig. 2.2** Parámetros asociados con la base del método de aceleración lineal.
- Fig. 2.3a** Viga simplemente apoyada con un sistema de cargas cualquiera.
- Fig. 2.3b** Viga simplemente apoyada deformada por el sistema de cargas.
- Fig. 2.3c** Forma amplificada del tramo de viga entre las secciones A-A y B-B.
- Fig. 2.3d** Triangulo EBD paralela a la sección A-A.
- Fig. 2.4** Deformación de la sección transversal de la viga según la teoría de Timoshenko.
- Fig. 2.5** Tipos de nodos de un elemento.
- Fig. 2.6** Modelo para el cálculo de deflexiones de una viga aplicando el MEF.
- Fig. 2.7** Comparación grafica de la solución teórica con el MEF.
- Fig. 2.8** Esfuerzos cerca de la grieta en un material elástico.
- Fig. 2.9** Tres modos de deformación en la punta de la grieta.
- Fig. 2.10** Placa agrietada bajo una carga P.
- Fig. 2.11** Análisis de cierre de grietas.
- Fig. 3.1** Variación de la flexibilidad de una viga debido a una grieta en  $x_j$ .
- Fig. 3.2** Elemento agrietado y las fuerzas de adopción del método de Zheng.
- Fig. 3.3** Viga agrietada (a) Elemento viga con una grieta; (b) Modelo del elemento viga agrietada.
- Fig. 4.1** Elemento agrietado y las fuerzas actuantes en este procedimiento.
- Fig. 4.2** Diagrama de método de simulación.
- Fig. 4.3** Viga en cantiléver con una grieta fija y una móvil.
- Fig. 4.4** Relación de frecuencias variando la posición de la grieta.
- Fig. 4.5** Modelo de viga simplemente apoyada con daño.
- Fig. 4.6** Variación de la frecuencia fundamental correspondiente a diferentes posiciones de la grieta.
- Fig. 4.7** Marco de concreto reforzado con daño.

- Fig. 5.1** Sección transversal de columnas y vigas (cotas en cm).
- Fig. 5.2** Geometría del edificio de concreto reforzado a evaluar (cotas en cm).
- Fig. 5.3** Localización de elementos con daño en los niveles 1, 2 y 3 (cotas en cm).
- Fig. 5.4** Localización del daño en las trabes de niveles 1, 2 y 3 (cotas en cm).
- Fig. 5.5** Comparación de los primeros tres modos de vibrar del edificio sin daño calculados en SAP2000® y el método de simulación generalizado.
- Fig. 5.6** Comparación de los primeros tres modos de vibrar del edificio sin daño y con daño calculados con método de simulación generalizado.
- Fig. 5.7** Valores NMD para las formas modales del escenario de daño.
- Fig. 5.8** Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Desplazamiento) en el 1N.
- Fig. 5.9** Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Desplazamiento) en el 2N.
- Fig. 5.10** Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Desplazamiento) en el 3N.
- Fig. 5.11** Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Velocidad) en el 1N.
- Fig. 5.12** Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Velocidad) en el 2N.
- Fig. 5.13** Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Velocidad) en el 3N.
- Fig. 5.14** Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Aceleración) en el 1N.
- Fig. 5.15** Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Aceleración) en el 2N.
- Fig. 5.16** Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Aceleración) en el 3N.
- Fig. 5.17** Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Desplazamiento) en el 1N.
- Fig. 5.18** Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Desplazamiento) en el 2N.
- Fig. 5.19** Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Desplazamiento) en el 3N.
- Fig. 5.20** Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Velocidad) en el 1N.
- Fig. 5.21** Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Velocidad) en el 2N.
- Fig. 5.22** Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Velocidad) en el 3N.
- Fig. 5.23** Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Aceleración) en el 1N.
- Fig. 5.24** Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Aceleración) en el 2N.
- Fig. 5.25** Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Aceleración) en el 3N.
- Fig. 5.26** Estimación de la densidad espectral de potencia.

# Lista de Tablas

---

<b>Tabla 2.1</b>	Coordenadas y longitudes de los elementos.
<b>Tabla 2.2</b>	Comparación de resultados en los nudos entre soluciones exacta y el MEF.
<b>Tabla 4.1</b>	Primeras tres frecuencias en diferentes formas de simulación.
<b>Tabla 5.1</b>	Localización y profundidad de las grietas.
<b>Tabla 5.2</b>	Comparación de los cambios de frecuencias de vibrar del edificio sin daño.
<b>Tabla 5.3</b>	Comparación de valores MAC para el escenario sin daño.
<b>Tabla 5.4</b>	Comparación de los cambios de frecuencias de vibrar del edificio con daño.
<b>Tabla 5.5</b>	Comparación de valores MAC y NMD para del escenario con daño.

# Capítulo 1

## Introducción

---

Uno de los problemas más serios en las estructuras es la posibilidad de una falla catastrófica. A pesar de que las estructuras son diseñadas con cautela e inspeccionadas, tanto antes de su puesta en servicio como periódicamente durante su vida operativa, hay antecedentes en la literatura del colapso de estructuras agrietadas. Se tiene conocimiento que muchas estructuras, como edificios y puentes, comienzan a llegar a su etapa final de la vida útil y el daño estructural es más que evidente.

Con el paso del tiempo, las edificaciones pueden sufrir daño debido al uso, falta de mantenimiento y principalmente es por los eventos naturales de gran magnitud, como huracanes, hundimientos, sismos, inundaciones, etc. Durante terremotos de magnitudes grandes, el daño inducido a la estructura puede ser tal que la lleve al colapso dando como consecuencia pérdidas económicas y/o humanas. Por ello es de gran relevancia la detección del daño, como medida preventiva y herramienta para tomar decisiones como habitabilidad y/o reforzamiento.

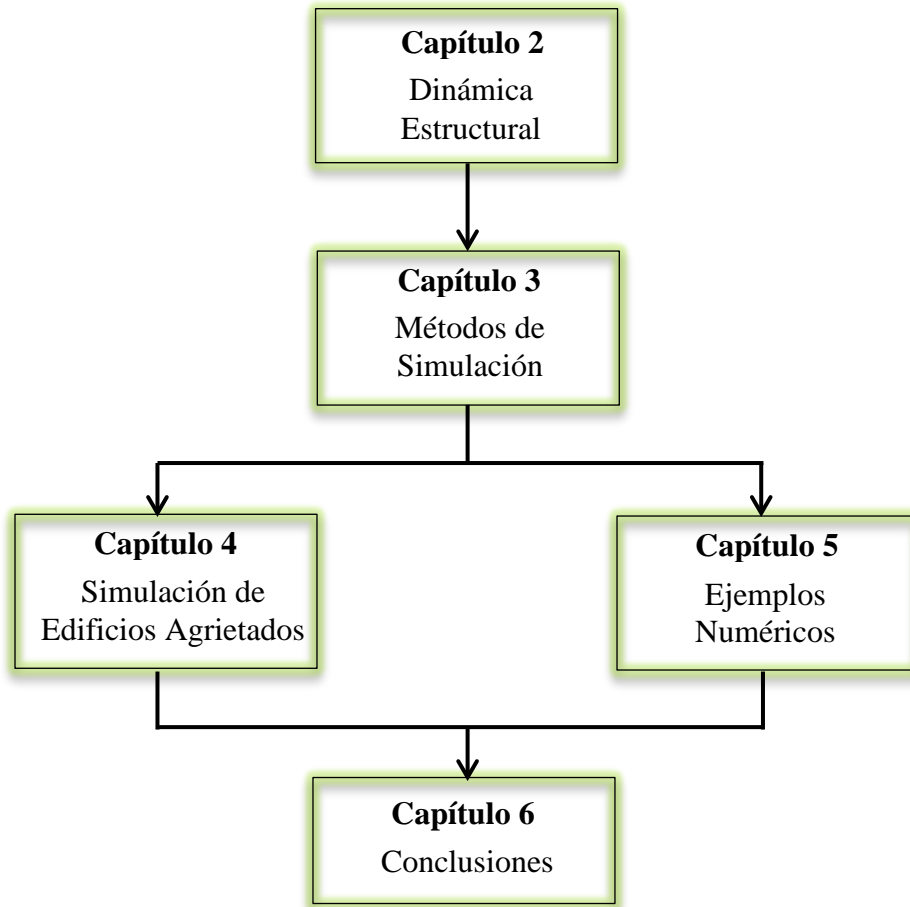
Como una solución ingenieril a este problema, se ha desarrollado un proceso de revisión conocido como Monitoreo de la Integridad Estructural (SHM, por sus siglas en inglés). Dicho proceso ha sido utilizado dentro de los sectores aeroespacial, civil y la infraestructura de la ingeniería mecánica, entre otros; el cual, ligado al monitoreo de la estructura permiten distinguir entre una estructura con daño y otra sin daño.

Con lo que respecta al ramo de la ingeniería civil, se empezaron a usar las técnicas de detección de daños a principios de los ochenta, con el uso del análisis de vibración de vigas agrietadas en estructuras, lo que significó una herramienta de gran ayuda para el desarrollo en la detección de daño; a

mediados de los años 90, se empezó a utilizar como base la simulación dinámica. En otras palabras, la simulación dinámica de estructuras agrietadas ha servido como herramienta para determinar métodos más confiables y detectar daño basado en el análisis de vibraciones.

Un elemento estructural con daño o agrietado presenta cambios en el comportamiento de su dinámica estructural. Es ahí, donde la simulación dinámica juega un papel importante, puesto que con ella se simulan daños en elementos estructurales con el fin de obtener parámetros dinámicos de la estructura tales como frecuencias, formas modales, amortiguamiento, curvatura de las formas modales, entre otros. También, dicho daño puede ser tal, que haga que entre el material en un estado no-lineal, el cual puede llegar a causar un cambio importante en la respuesta dinámica de la estructura y por lo tanto en los parámetros dinámicos necesarios para alimentar los métodos de detección de daños. En dicha simulación, los parámetros obtenidos pueden indicarnos si una estructura se encuentra con daño o no, lo que a su vez permite desarrollar métodos más precisos para la detección del mismo.

Este trabajo en investigación se divide en seis capítulos. En el primer capítulo se establece la metodología en estudio. En el capítulo 2 se da una introducción a los conocimientos esenciales de dinámica estructural y mecánica de la fractura necesarios para la comprensión de la simulación dinámica de estructuras agrietadas. En el capítulo 3 se describen los métodos de determinación de la respuesta dinámica de estructuras agrietadas. En el capítulo 4 se muestra la propuesta de simulación dinámica de edificios agrietados y a su vez es comparado con otros métodos de simulación con pruebas experimentales y teóricas. En el capítulo 5 se realiza la implementación del método de simulación dinámica propuesto. Finalmente se dan conclusiones sobre los resultados determinados de la comparación del método de simulación dinámica propuesto para edificios agrietados. En la Figura 1.1 se describe el diagrama de flujo de los temas antes mencionados.



**Fig. 1.1 Diagrama de flujo de la tesis**

## 1.1. Planteamiento del problema

El comportamiento dinámico de estructuras agrietadas es un tema actual de considerable interés en vista del potencial desarrollo en la automatización del monitoreo de la integridad de las estructuras, parece factible que los métodos puedan ser desarrollados utilizando la mecánica de la fractura y en base a cambios generales en la dinámica de una estructura.

Este problema ha llevado a la utilización de la dinámica estructural como una herramienta para el desarrollo de métodos de simulación

dinámica. La simulación dinámica de estructuras agrietadas es un proceso complejo que ha llevado a realizar aproximaciones del análisis dinámico de elementos estructurales fundamentales como lo son las vigas. Es decir, para una estructura tipo edificio, primero se encuentran los parámetros dinámicos de diferentes elementos estructurales (vigas, columnas, etc.) afectados por la presencia de una o varias grietas, una vez obtenidos dichos parámetros se procede al desarrollo de los métodos de detección de daño basado en estos parámetros.

A pesar de los diferentes métodos con los que se cuentan, este es un campo que requiere mayor trabajo de investigación en la ingeniería estructural por lo que es de esperarse que no se cuente con un método confiable, con la precisión requerida, para aplicarse en la detección de daño. Se cuentan con métodos que dan resultados aceptables, bajo ciertas condiciones ideales, sin embargo se requiere un método más robusto para su aplicación en la detección de daño. Lo anterior ha motivado al desarrollo de métodos de simulación dinámica con el fin de obtener parámetros dinámicos más precisos y así desarrollar métodos de detección de daño más confiables.

### **1.2. Objetivos**

#### **1.2.1. Objetivo general**

Desarrollar un método confiable para determinar parámetros dinámicos de edificios agrietados que puedan ser utilizados para conocer con mayor precisión su integridad estructural aplicando técnicas avanzadas de detección de daños.

#### **1.2.2. Objetivo específico**

Desarrollar un modelo numérico de simulación dinámica de estructuras agrietadas para la obtención de parámetros dinámicos fiables para una mayor rapidez de evaluación numérica.

Evaluar un edificio agrietado con el método de simulación dinámica propuesto para comparar los resultados obtenidos contra otros métodos de simulación dinámica ya establecidos.

### **1.3. Hipótesis**

A partir de la respuesta dinámica modificada de edificios agrietados, se obtendrán los parámetros dinámicos necesarios, con los cuales será posible conocer con mayor precisión su integridad estructural aplicando técnicas avanzadas de detección de daño.

### **1.4. Justificación**

La reciente implementación de métodos de simulación dinámica como herramienta para el desarrollo de métodos de detección de daño dentro de la ingeniería, ha dado la tarea a los investigadores de desarrollar métodos más fiables para obtener los parámetros dinámicos de estructuras agrietadas y con ellos optimizar la detección de daño.

Por tal motivo surge la necesidad de comprobar la veracidad de los métodos de simulación dinámica ya planteados, mediante una comparación de los parámetros obtenidos con los métodos establecidos y el método planteado en este trabajo. Los resultados de la comparación serán de gran ayuda ya que nos pueden dar una valuación de la confiabilidad que hay en el método de simulación dinámica planteado para la detección de daño. Además permitirá realizar modificaciones de los métodos de simulación ya planteados para aumentar su confiabilidad.

## Capítulo 2

### Antecedentes de dinámica estructural

---

Todas las estructuras físicas reales se comportan de forma dinámica cuando están sometidas a cargas o desplazamientos. Las fuerzas de inercia adicionales, a partir de la segunda ley de Newton, es igual a la masa por la aceleración. Si las cargas o desplazamientos son aplicados muy lento, las fuerzas de inercia pueden ser despreciables y un análisis estático puede ser justificable. Por lo tanto, el análisis dinámico es una simple extensión de un análisis estático.

Aunque la mayoría de las estructuras en la ingeniería civil pueden ser diseñadas apropiadamente considerando que las cargas fueran estáticas, existen algunas excepciones importantes, por lo tanto el diseñador debe ser capaz de distinguir entre cargas estáticas y dinámicas.

Un problema de dinámica estructural difiere de su contraparte estática en dos aspectos importantes. La primera que se hace notar, por definición, es la variación en el tiempo del problema dinámico. Debido a que ambas, carga y desplazamiento varían con el tiempo resulta evidente que un el problema dinámico no tiene una solución única como el estático; por lo que se deberá establecer una sucesión de resultados correspondientes a todo el tiempo de interés de la historia de respuesta. La segunda diferencia entre el problema dinámico y estático es que las fuerzas de inercia se oponen al aceleramiento de la estructura. En este sentido son las características más importantes en la distinción de los problemas de dinámica estructural.

### 2.1. Solución lineal de la ecuación de movimiento

La fuerza de equilibrio de un sistema de masa concentrada de varios grados de libertad en función del tiempo se puede expresar mediante la siguiente relación:

$$F(t)_I + F(t)_D + F(t)_S = F(t) \quad (2.1)$$

En el que los vectores de fuerzas en el tiempo “t” son:

$F(t)_I$  es un vector de fuerzas de inercia actuando en las masas

$F(t)_D$  es un vector de fuerzas de amortiguamiento o disipación de energía

$F(t)_S$  es un vector de fuerzas inerciales provocadas por la estructura

$F(t)$  es un vector de fuerzas externas aplicadas en la estructura

La ecuación (2.1) está basada en leyes físicas y es válida para sistemas lineales y no lineales si el equilibrio está formulado con respecto a la deformación geométrica de la estructura (E. Wilson, 2002).

Para muchos sistemas estructurales, la aproximación de un comportamiento estructural lineal está hecho para convertir el estado de equilibrio físico, ecuación (2.1), a la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden.

$$M\ddot{u}(t)_a + C\dot{u}(t)_a + Ku(t)_a = F(t) = \sum_{j=1}^J f_j \cdot g(t)_j \quad (2.2)$$

En donde M es la matriz de masa (concentrada o constante), C es la matriz de amortiguamiento viscoso (la cual es normalmente seleccionada para aproximar la energía de disipación en la estructura real) y K es la matriz de rigidez estática para el sistema de elementos estructurales. Los vectores que dependen del tiempo  $\ddot{u}(t)_a$ ,  $\dot{u}(t)_a$  and  $u(t)_a$  son aceleraciones, velocidades y desplazamientos absolutos en los nudos respectivamente.

Todos los posibles tipos de cargas que dependen del tiempo, incluyendo el viento, olas y sismos, pueden ser representadas por una suma de “J” vectores espaciales  $\mathbf{f}_j$ , que no están en función del tiempo, y “J” funciones en el tiempo  $\mathbf{g}(\mathbf{t})_j$ .

El número de grados de libertad dinámicos son igual al número de masas concentradas en el sistema. El método de condensación estática elimina todos los desplazamientos sin masa asociada y por consecuencia reduce el número de ecuaciones de equilibrio dinámicas a resolver; sin embargo, puede aumentar significativamente la densidad y el ancho de banda de la matriz de rigidez condensada. En estructuras de tipo de edificio, en el que el diafragma rígido tiene solo tres masas asociadas a desplazamientos, este enfoque es eficaz y se utiliza de forma automática en la construcción de los modelos numéricos en programas de análisis.

Para la solución dinámica de sistemas estructurales arbitrarios, la eliminación de los desplazamientos sin masa asociada es, en general, ineficiente numéricamente. Por lo tanto las versiones modernas de programas de análisis no usan la condensación estática para retener la dispersión de la matriz de rigidez.

### 2.1.1 Solución usando el método de superposición

El método matemático fundamental usado para resolver la ecuación (2.2) es la separación de variables. Esta aproximación asume que la solución puede ser expresada de la siguiente forma:

$$u(t) = \phi Y(t) \tag{2.3a}$$

Donde  $\phi$  es una matriz de N por N que contiene N vectores espaciales que no están en función del tiempo, y  $\mathbf{Y}(\mathbf{t})$  es un vector que contiene N funciones en el tiempo. Por lo tanto, de la ecuación (2.3a) obtenemos:

$$\dot{u}(t) = \Phi \dot{Y}(t) \quad (2.3b)$$

$$\ddot{u}(t) = \Phi \ddot{Y}(t) \quad (2.3c)$$

Antes de obtener la solución, es necesario que las funciones espaciales satisfagan las condiciones de ortogonalidad de masa y rigidez:

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (2.4a)$$

$$\Phi^T K \Phi = \Omega^2 \quad (2.4b)$$

Donde  $I$  es una matriz unitaria y  $\Omega^2$  es una matriz diagonal la cual la diagonal principal está en términos de  $\omega_n^2$  (los términos de  $\omega_n$  son la frecuencia circular que está en unidades de rad/seg).

Sustituyendo las ecuaciones (2.3) en las (2.2) y previamente multiplicado por  $\Phi^T$ , se produce la siguiente matriz de  $N$  ecuaciones:

$$I \ddot{Y}(t) + d \dot{Y}(t) + \Omega^2 Y(t) = \sum_{j=1}^J p_j \cdot g(t)_j \quad (2.5)$$

Donde  $p_j = \Phi^T f_j$  son definidos como factores de participación modal para una función de carga  $j$ .

Para todas las estructuras reales, la matriz  $d$  de  $N$  por  $N$  no es diagonal, sin embargo, para desacoplar las ecuaciones modales, es necesario asumir amortiguación clásica donde no hay acoplamiento entre modos. Por lo tanto, los términos diagonales del amortiguamiento modal se definen como:

$$d_{nm} = 2\zeta_n \omega_n \quad (2.6)$$

Donde  $\zeta_n$  es un porcentaje del amortiguamiento crítico en el modo  $n$ .

Una ecuación modal desacoplada típica para sistemas estructurales lineales es de la siguiente forma:

$$\ddot{y}(t)_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{y}(t)_n + \omega^2y(t)_n = \sum_{j=1}^J p_{nj} \cdot g(t)_j \quad (2.7)$$

- **Solución a condiciones iniciales.** Sí el subíndice “n” es reducido, la ecuación (2.6) puede ser escrita para un modo típico como:

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta_n\omega_n\dot{y}(t) + \omega^2y(t) = 0 \quad (2.8)$$

En la cual se especifican el desplazamiento inicial  $y_0$  y la velocidad inicial  $\dot{y}_0$  como resultados de una carga previa sobre la estructura.

Para darle solución a la ecuación (2.8) se resumieron las constantes y funciones utilizadas en la siguiente lista (Wilson, 2002):

**Constantes:**

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$a_0 = 2\xi\omega$$

$$\bar{\omega} = \omega\xi$$

$$a_1 = \omega_D^2 - \bar{\omega}^2$$

$$\bar{\xi} = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$a_2 = 2\bar{\omega}\omega_D$$

**Funciones:**

$$S(t) = e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_D t)$$

$$C(t) = e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t)$$

$$\dot{S}(t) = -\bar{\omega}S(t) + \omega_D C(t)$$

$$\dot{C}(t) = -\bar{\omega}C(t) - \omega_D S(t)$$

$$\ddot{S}(t) = -a_1 S(t) - a_2 C(t) \qquad \ddot{C}(t) = -a_1 C(t) + a_2 S(t)$$

$$A_1(t) = C(t) + \bar{\xi} S(t) \qquad A_2(t) = (1/\omega_D) S(t)$$

La solución de la ecuación (2.8) puede escribirse de manera compacta como sigue:

$$y(t) = A_1(t)y_0 + A_2(t)\dot{y}_0 \qquad (2.9)$$

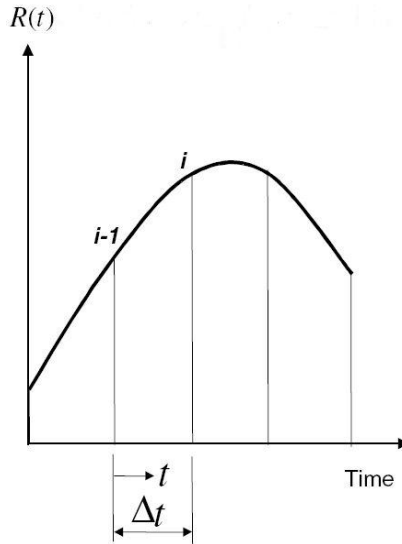
- **Solución general debido a cargas arbitrarias.** Para simplificar la notación, se suman todas las cargas para formar una ecuación modal típica como sigue:

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = R(t) \qquad (2.10)$$

Donde la carga modal  $R(t)$  es parte de una función polinomial (Ver Figura 2.1). Por lo tanto la ecuación diferencial que hay que resolver, dentro del intervalo  $i-1$  hasta  $i$ , se da de la siguiente forma para funciones de cargas lineales y cúbicas:

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta_n \omega_n \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = R_{i-1} + t\dot{R}_{i-1} + \frac{t^2}{2}\ddot{R}_{i-1} + \frac{t^3}{6}\dddot{R}_{i-1} \qquad (2.11)$$

A partir de la teoría básica de las ecuaciones diferenciales lineales, la solución general de la ecuación (2.11) es la suma de la solución homogénea y la solución particular la cual se muestra en la ecuación (2.12).



**Fig. 2.1** Función de carga modal

$$y(t) = b_1 S(t) + b_2 C(t) + b_3 + b_4 t + b_5 t^2 + b_6 t^3 \quad (2.12a)$$

La velocidad y aceleración asociadas con esta solución son:

$$\dot{y}(t) = b_1 \dot{S}(t) + b_2 \dot{C}(t) + b_4 + 2b_5 t + 3b_6 t^2 \quad (2.12b)$$

$$\ddot{y}(t) = b_1 \ddot{S}(t) + b_2 \ddot{C}(t) + 2b_5 + 6b_6 t \quad (2.12c)$$

Estas ecuaciones se pueden resumir en la siguiente ecuación matricial:

$$\bar{y}_i = \begin{bmatrix} y_i \\ \dot{y}_i \\ \ddot{y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(t) & C(t) & 1 & t & t^2 & t^3 \\ \dot{S}(t) & \dot{C}(t) & 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ \ddot{S}(t) & \ddot{C}(t) & 0 & 0 & 2.0 & 6t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} = B(t)b \quad (2.13)$$

Ahora es posible resolver para las constantes  $\mathbf{b}_i$ . Con las condiciones iniciales cuando  $t=0$  son  $\dot{y}(0) = \dot{y}_{i-1}$  and  $y(0) = y_{i-1}$ . Por lo tanto, de las ecuaciones (2.12a y 2.12b)

$$\dot{y}_{i-1} = \omega_D b_1 - \bar{\omega} b_2 + b_4 \quad (2.13a)$$

$$y_{i-1} = b_2 + b_3 \quad (2.13b)$$

La sustitución de las ecuaciones (2.12a, 2.12b y 2.12c) en las ecuaciones (2.11) y la configuración de los coeficientes de cada parte polinomial para ser iguales, producen las siguientes cuatro ecuaciones:

$$1: \quad R_{i-1} = \omega^2 b_3 + a_0 b_4 + 2b_5 \quad (2.14a)$$

$$t: \quad \dot{R}_{i-1} = \omega^2 b_4 + 2a_0 b_5 + 6b_6 \quad (2.14b)$$

$$t^2: \quad \ddot{R}_{i-1} = 2\omega^2 b_5 + 6a_0 b_6 \quad (2.14c)$$

$$t^3: \quad \dddot{R}_{i-1} = 6\omega^2 b_6 \quad (2.14d)$$

Estas seis ecuaciones, dadas por las ecuaciones (2.13a, 2.13b, 2.14a – 2.14d), pueden ser escritas de manera matricial como se muestra:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_{i-1} \\ y_{i-1} \\ R_{i-1} \\ \dot{R}_{i-1} \\ \ddot{R}_{i-1} \\ \dddot{R}_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_D & -\bar{\omega} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & a_0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 & 2a_0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\omega^2 & 6a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad \bar{\mathbf{R}}_{i-1} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{b} \quad (2.15)$$

Por lo tanto

$$\mathbf{b} = \mathbf{C} \bar{\mathbf{R}}_{i-1} \quad (2.16)$$

Esto nos da que la solución exacta (en forma matricial) de la ecuación modal debido a una carga de función cubica dentro de un paso en el tiempo es:

$$\bar{\mathbf{y}}_i = \mathbf{B}(\Delta t) \mathbf{C} \bar{\mathbf{R}}_{i-1} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{R}}_{i-1} \quad (2.17)$$

El algoritmo completo para cargas de funciones lineales o cúbicas se resume a continuación y con la ayuda de la computadora puede resolver la ecuación diferencial de movimiento en segundos. Por lo tanto, no hay necesidad de considerar otros métodos numéricos, como el de la Transformada Rápida de Fourier o la evaluación numérica de la integral de Duhamel, para resolver las ecuaciones de movimiento. A continuación se muestra el resumen del algoritmo (Wilson, 2002)

**Resumen de algoritmo:**

**1. Ecuación a resolver**

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta_n\omega_n\dot{y}(t) + \omega^2y(t) = R_{i-1} + t\dot{R}_{i-1} + \frac{t^2}{2}\ddot{R}_{i-1} + \frac{t^3}{6}\dddot{R}_{i-1}$$

**2. Cálculos iniciales**

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$a_0 = 2\xi\omega$$

$$\bar{\omega} = \omega\xi$$

$$a_1 = \omega_D^2 - \bar{\omega}^2$$

$$\bar{\xi} = \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$a_2 = 2\bar{\omega}\omega_D$$

$$S(\Delta t) = e^{-\xi\omega\Delta t} \sin(\omega_D\Delta t)$$

$$C(\Delta t) = e^{-\xi\omega\Delta t} \cos(\omega_D\Delta t)$$

$$\dot{S}(\Delta t) = -\bar{\omega}S(\Delta t) + \omega_D C(\Delta t)$$

$$\dot{C}(\Delta t) = -\bar{\omega}C(\Delta t) - \omega_D S(\Delta t)$$

$$\ddot{S}(\Delta t) = -a_1S(\Delta t) - a_2C(\Delta t)$$

$$\ddot{C}(\Delta t) = -a_1C(\Delta t) + a_2S(\Delta t)$$

$$\mathbf{B}(\Delta t) = \begin{bmatrix} S(\Delta t) & C(\Delta t) & 1 & \Delta t & \Delta t^2 & \Delta t^3 \\ \dot{S}(\Delta t) & \dot{C}(\Delta t) & 0 & 1 & 2\Delta t & 3\Delta t^2 \\ \ddot{S}(\Delta t) & \ddot{C}(\Delta t) & 0 & 0 & 2 & 6\Delta t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \omega_D & -\bar{\omega} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & a_0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 & 2a_0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\omega^2 & 6a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\omega^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}(\Delta t)\mathbf{C}$$

### 3. Solución recurrente $i=1,2$

- a)  $\ddot{R}_i = \frac{6}{\Delta t^2}(R_i - R_{i+1}) + \frac{2}{\Delta t}(\dot{R}_{i+1} - 2\dot{R}_i)$
- b)  $\ddot{R}_{i-1} = \frac{\ddot{R}_i - \ddot{R}_{i-1}}{\Delta t}$
- c)  $\bar{\mathbf{y}}_i = \mathbf{A}\bar{\mathbf{R}}_{i-1}$
- d)  $i = i + 1$  (Regresar al paso 3a)

## 2.2. Solución no lineal de la ecuación de movimiento

Cuando se consideran efectos no lineales, la ecuación (2.2) adquiere la siguiente forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + [\mathbf{F}(\mathbf{u}) - \mathbf{K}\mathbf{u}(t)] = \mathbf{F}(t) \quad (2.18)$$

Donde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{K}$  ya fueron definidas anteriormente.  $\mathbf{F}(\mathbf{u})$  es un vector de fuerzas que es una función no lineal del vector de desplazamiento  $\mathbf{u}(t)$ . Los vectores dependientes del tiempo  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  y  $\mathbf{F}(t)$  son el vector de aceleración, velocidad, desplazamiento y cargas externas aplicadas respectivamente.

Teóricamente, podríamos emplear métodos analíticos de solución para analizar estructuras de comportamiento no lineal de varios grados de libertad, pero la impracticabilidad de tal tarea es evidente ya que en cada interacción requeriría un número excesivo de cambios en las ecuaciones de

movimiento y el cálculo de nuevas condiciones iniciales en cada intervalo de comportamiento. Por tales motivos, el análisis dinámico de estructuras con comportamiento no lineal, se lleva a cabo con métodos numéricos al igual que para estructuras de comportamiento lineal, con el requisito adicional de conocer de antemano las curvas carga-deformación de los elementos resistentes.

El método más efectivo para resolver la ecuación no lineal de movimiento, es la integración paso a paso. En este método, se evalúa la respuesta en incrementos de tiempo  $\Delta t$ , de una magnitud adecuada para el cálculo. Al inicio de cada intervalo, se establece la condición de equilibrio dinámico; luego, la respuesta para un incremento  $\Delta t$ . El carácter no lineal de estos coeficientes es tomado en cuenta evaluándolos nuevamente al inicio de cada intervalo. Además, el desplazamiento y la velocidad al final de cada intervalo son tomados como las condiciones iniciales del siguiente paso. Por lo que podemos escribir la ecuación de movimiento (2.18) de manera incremental como:

$$M\Delta\ddot{u}_i + C\Delta\dot{u}_i + K\Delta u_i = \Delta F_i \quad (2.19)$$

Existen muchos procedimientos para efectuar la integración paso a paso. En este trabajo se describen dos métodos para la solución de la ecuación (2.19). (Cinco, 1990).

1. *Método de aceleración promedio*
2. *Método de aceleración constante*

Antes de abordar el método antes mencionado, trataremos el problema de la selección de un incremento de tiempo  $\Delta t$  apropiado; ya que la exactitud del método depende de la magnitud del incremento seleccionado. Para ello, pueden tomarse en cuenta los siguientes factores:

- El periodo natural de la estructura
- La relación de variación de la función de carga
- La complejidad de las curvas de rigidez y amortiguamiento

En general, la experiencia de varios investigadores ha demostrado que se obtienen resultados confiables si el incremento de tiempo  $\Delta t$  es tomado no mayor que la décima parte del periodo natural de la estructura.

$$\Delta t \leq T/10 \quad (2.20)$$

Para la segunda consideración el intervalo deberá ser lo suficientemente pequeño como para que represente adecuadamente la variación de la carga con respecto al tiempo; y por último, debe procurarse que no haya variaciones bruscas en las funciones que definen la rigidez y el amortiguamiento.

En general, se puede observar que es factible modelar el comportamiento no lineal con una serie sucesiva de comportamientos lineales cambiantes.

### 2.2.1 Método de aceleración promedio

La solución paso a paso de la ecuación de movimiento incremental es formulada por una relación simple entre el desplazamiento, velocidad y aceleración el cual asume que es válido para un paso en el tiempo  $h$ . En base en esto, los cambios incrementales de velocidad y desplazamiento pueden ser expresados en términos en cambio de aceleración, o los cambios en velocidad y aceleración, alternativamente pueden ser expresados en términos de desplazamientos incrementales. En cualquiera de los casos, solo un vector permanece desconocido de la ecuación de movimiento incremental (2.19) y el cual puede ser evaluado por cualquier procedimiento para solución de ecuaciones simultáneas.

Para este caso la ecuación de equilibrio pseudoestática incremental se expresa como:

$$\tilde{K}_c \Delta u = \Delta \tilde{F}_c \quad (2.20)$$

Donde el subíndice  $c$  denota la constante de aceleración media supuesta. La matriz de rigidez efectiva en este caso se da por:

$$\tilde{K}_c = K_0 + \frac{2}{h} C_0 + \frac{4}{h^2} M \quad (2.21)$$

Mientras que el vector de cargas efectivas incremental es:

$$\Delta \tilde{F}_c = \Delta F + 2C_0 \dot{u}_0 + M \left[ \frac{4}{h} \dot{u}_0 + 2\ddot{u}_0 \right] \quad (2.22)$$

El análisis paso a paso se lleva a cabo al utilizar la ecuación (2.20) para evaluar por primera vez  $\tilde{K}_c$  de la masa, amortiguamiento y propiedades de rigidez a partir de las condiciones al principio de paso de tiempo y también la evaluación  $\Delta \tilde{F}_c$  a partir de las propiedades de amortiguamiento así como los vectores de velocidad y aceleración al principio de cada paso en el tiempo con el incremento de carga especificada para cada paso. Entonces la ecuación simultanea (2.20) resulta que para el desplazamiento incremental  $\Delta u$ , debe tenerse en cuenta el cambio de valores de  $K_0$  y  $C_0$ ; en un análisis no lineal se requiere la descomposición para cada paso de tiempo, y esto es un importante esfuerzo de cálculo para un sistema con muchos grados de libertad.

Cuando el desplazamiento incremental es calculado, la velocidad incremental está dada por la siguiente expresión:

$$\Delta \dot{u} = \frac{2}{h} \Delta u - 2\dot{u}_0 \quad (2.23)$$

Los vectores de respuestas calculados para el tiempo  $t_1 = t_0 + h$  al final de cada paso del tiempo, sirven como los vectores iniciales para el siguiente paso. Sin embargo, para evitar la acumulación de errores, el vector inicial de aceleración se calcula directamente a partir de la condición de equilibrio al comienzo de la etapa, por lo tanto:

$$\Delta\ddot{u} = M^{-1}[F_0 - C\dot{u} - Ku] \quad (2.24)$$

### 2.2.2 Método de aceleración lineal

El método de aceleración promedio descrito anteriormente es un procedimiento conveniente y relativamente eficiente para análisis estructural no lineal; pruebas numéricas comparativas han demostrado que el método de aceleración lineal da mejores resultados utilizando cualquier longitud de ancho de paso.

En ciertos tipos de estructuras, en particular, edificios de varios niveles que se modelan con un grado de libertad por piso para conocer su respuesta plana o con tres grados de libertad para la respuesta tridimensional general, en tales situaciones el método de aceleración lineal es recomendable, en sustitución de las ecuaciones (2.20 – 2.23) por sus equivalentes para el método de aceleración lineal:

$$\tilde{K}_d \Delta u = \Delta \tilde{F}_d \quad (2.25)$$

$$\tilde{K}_d = K_0 + \frac{3}{h} C_0 + \frac{6}{h^2} M \quad (2.26)$$

$$\Delta \tilde{F}_d = \Delta F + C_0 \left[ 3\dot{u}_0 + \frac{h}{2} \ddot{u}_0 \right] + M \left[ \frac{6}{h} \dot{u}_0 + 3\ddot{u}_0 \right] \quad (2.27)$$

$$\Delta \dot{u} = \frac{3}{h} \Delta u - 3\dot{u}_0 - \frac{h}{2} \ddot{u}_0 \quad (2.28)$$

Con el fin de evitar la inestabilidad en la respuesta calculada por estas ecuaciones la longitud del paso de tiempo debe ser limitada por la siguiente condición:

$$h \leq \frac{1}{1.8} T_N \quad (2.29)$$

Donde  $T_N$  el periodo de vibrar más corto asociado con el problema característico del sistema. Cuando la respuesta requerida es debido a una carga de un sismo real o incluso de un pulso de carga puede implicar un esfuerzo computacional prohibido, por lo que se necesita la adopción de un procedimiento de integración incondicionalmente estable en lugar del algoritmo de aceleración lineal. Por supuesto, el método de aceleración constante podría utilizarse, pero una alternativa preferible puede ser una modificación incondicionalmente estable del método de aceleración lineal llamado Método de  $\theta$ -Wilson.

Esta modificación se basa en la suposición de que la aceleración varía linealmente durante un intervalo de cálculo extendida  $\tau = \theta h$ . Los parámetros asociados en esta suposición están representados en la Fig. 2.2. La aceleración incremental  $\hat{\Delta}\ddot{\mathbf{u}}$  se calcula con el procedimiento de aceleración estándar aplicada al paso del tiempo prolongado  $\tau$ ; a partir del incremento  $\Delta\ddot{\mathbf{u}}$  para el paso del tiempo normal  $h$  es obtenido por interpolación. Para un valor de  $\theta = 1$ , el procedimiento vuelve al método de aceleración lineal estándar, pero para  $\theta > 1.37$  llega a ser incondicionalmente estable.

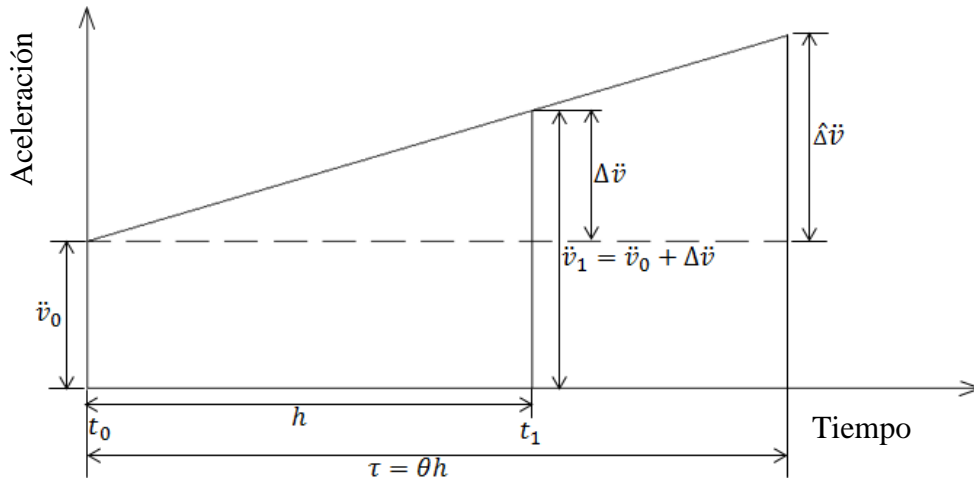


Fig. 2.2 Parámetros asociados con la base del método de aceleración lineal

El procedimiento de análisis se puede derivar simplemente reescribiendo las relaciones básicas del método de aceleración lineal para el paso de tiempo prolongado  $\tau$ . Por lo tanto:

$$\hat{\Delta}\dot{u} = \dot{u}_0\tau + \hat{\Delta}\ddot{u}\frac{\tau}{2} \quad (2.30)$$

$$\hat{\Delta}u = \dot{u}_0\tau + \ddot{u}_0\frac{\tau^2}{2} + \hat{\Delta}\ddot{u}\frac{\tau^2}{6} \quad (2.31)$$

El que el símbolo “^” denota un incremento asociado con el paso de tiempo prolongado. Resolviendo para expresar  $\hat{\Delta}\ddot{u}$  y  $\hat{\Delta}\dot{u}$  en términos de  $\hat{\Delta}u$  y sustituyendo en las ecuaciones de movimiento nos llevan a las ecuaciones:

$$\hat{K}\hat{\Delta}u = \hat{\Delta}F \quad (2.32)$$

$$\hat{K} = K_0 + \frac{3}{\tau}C_0 + \frac{6}{\tau^2}M \quad (2.33)$$

$$\hat{\Delta}F = \Delta F + C_0\left[3\dot{u}_0 + \frac{\tau}{2}\ddot{u}_0\right] + M\left[\frac{6}{\tau}\dot{u}_0 + 3\ddot{u}_0\right] \quad (2.34)$$

Finalmente la relación pseudoestática de la ecuación (2.32) puede ser resuelta para  $\hat{\Delta}u$  y sustituyendo el valor en la siguiente ecuación:

$$\hat{\Delta}\ddot{u} = \hat{\Delta}u\frac{6}{\tau^2} - \dot{u}_0\frac{6}{\tau} - 3\ddot{u}_0 \quad (2.35)$$

Para obtener el incremento de aceleración durante el paso de tiempo extendido. De esto, el incremento de aceleración para un paso de tiempo normal  $h$  se obtiene mediante interpolación lineal:

$$\Delta\ddot{u} = \frac{1}{\theta}\hat{\Delta}\ddot{u} \quad (2.36)$$

Y por lo que los vectores de velocidad y desplazamiento incrementales correspondientes son obtenidos de las ecuaciones (2.30, 2.31) pero con la forma de un paso en el tiempo normal  $h$ . Usando estos resultados, el análisis paso a paso procede exactamente como fue descrito en el método de aceleración promedio.

### **2.3. Diferencia entre la solución lineal y no lineal de la ecuación de movimiento**

Como se mostró en los temas anteriores, al analizar el comportamiento dinámico de sistemas lineales de varios grados de libertad, utilizando para ello el modelo que represente adecuadamente la estructura; hemos asumido que la fuerza de rigidez es proporcional al desplazamiento, así como que las fuerzas de amortiguamiento son proporcionales a la velocidad. Además, consideramos que la masa en el modelo permanece invariable con el tiempo.

Sin embargo, existen condiciones físicas para las cuales este modelo no representará apropiadamente el comportamiento real de la estructura modelada. En tales casos, es necesaria la introducción de un modelo donde las fuerzas de rigidez y amortiguamiento no sean proporcionales al desplazamiento y velocidad, respectivamente.

Con estas últimas consideraciones, la ecuación de movimiento resultante es no lineal, su solución matemática es muy compleja y frecuentemente será necesario hacer uso de algún método numérico para su integración.

Como se puede notar, para resolver un sistema lineal de varios grados de libertad y uno no lineal, se pueden ocupar métodos paso a paso en ambos casos con la diferencia que de la no proporcionalidad de la rigidez y el amortiguamiento en sistemas no lineales.

El análisis de un sistema con la resistencia estructural no lineal se puede formular mediante la expresión de los cambios de rigidez como desviaciones de la rigidez elástica lineal original en cada paso de tiempo. Cuando se tiene el caso en que el amortiguamiento no es proporcional a la velocidad, el paso esencial es el de separar la matriz de amortiguamiento en un componente proporcional que se desacopla por la transformación modal de coordenadas, además de un componente no proporcional que se transfiere al segundo término de la igualdad de las ecuaciones de movimiento donde sus efectos se representan como pseudo-fuerzas.

Debido a estos cambios de rigidez y amortiguamiento en cada paso del tiempo la respuesta dinámica de la estructura se ve afectada, por lo que para el estudio que se realiza en este trabajo es esencial tener en cuenta el comportamiento del sistema (lineal o no lineal) y obtener los parámetros dinámicos a partir de la respuesta adecuada de la estructura.

### **2.4. Teoría de vigas sujetas a flexión**

Las dos principales teorías de las vigas sujetas a flexión son las de Euler-Bernoulli y de Timoshenko, las cuales son de suma importancia junto a el método del elemento finito para el análisis de la mecánica de la fractura, que es la rama de la ingeniería junto con la dinámica estructural con la que se basan los métodos comprobados en este trabajo.

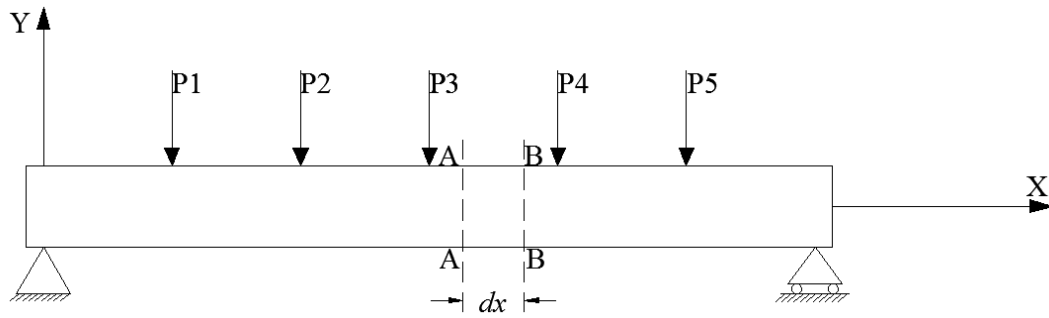
#### **2.4.1 Teoría de la viga Euler-Bernoulli**

La teoría de la viga Euler-Bernoulli se basa en tres hipótesis:

- 1) Los desplazamientos verticales de todos los puntos de una sección transversal son pequeños e iguales a los del eje neutro de la viga.
- 2) El desplazamiento lateral es nulo.
- 3) Las secciones transversales normales al eje de la viga son y permanecen planas antes y después de la deformación.

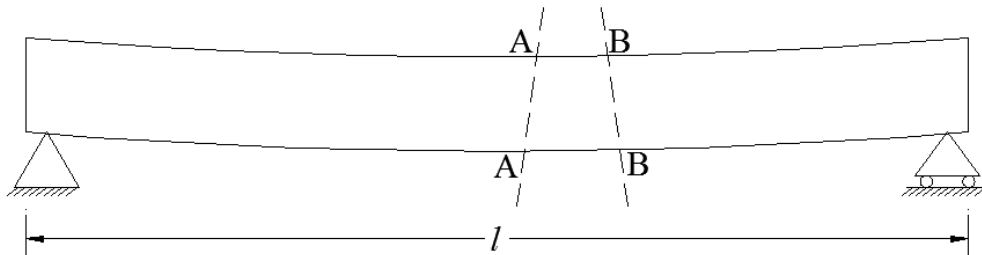
El objetivo de esta teoría es establecer las relaciones existentes entre las deformaciones de una viga de un material homogéneo y elástico y los momentos flexionantes producidos en la viga por un sistema cualquiera de cargas (González, 2008).

Considere una viga simplemente apoyada, con un sistema de cargas cualquiera, como se muestra en la Fig. 2.3a, en la cual se toman dos secciones A-A y B-B separadas a una distancia infinitesimal  $dx$ .



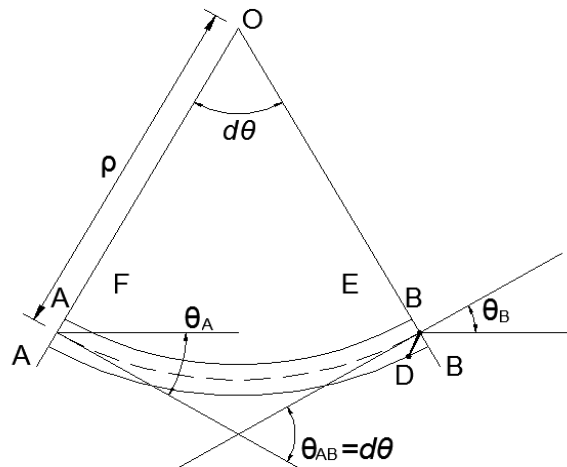
**Fig. 2.3a** Viga simplemente apoyada con un sistema de cargas cualquiera

Como se indica en la tercera hipótesis de esta teoría, las secciones transversales al deformarse la viga continúan siendo planas, por lo que se indica que las secciones  $A-A$  y  $B-B$  ya no son paralelas, pero siguen siendo perpendiculares al eje longitudinal de la viga, por lo que están representadas por líneas rectas (Ver Fig. 2.3b).



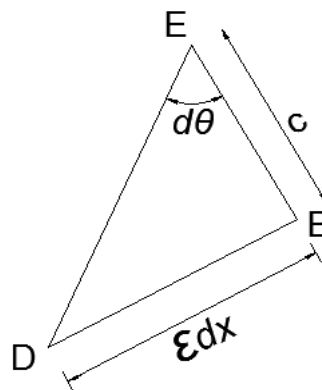
**Fig. 2.3b** Viga simplemente apoyada deformada por el sistema de cargas

En la Fig. 2.3c se muestra una forma amplificada del tramo de viga comprendido entre las secciones  $A-A$  y  $B-B$ . El ángulo formado por las tangentes en ambas secciones, o rotación entre las dos secciones es  $\theta_{AB}$  que se representa por  $d\theta$  ya que las secciones están separadas una distancia diferencial. Este ángulo es igual al formado al prolongar las líneas rectas de las secciones  $A-A$  y  $B-B$  al intersectarse en el punto  $O$ .



**Fig. 2.3c** Forma amplificada del tramo de viga entre las secciones A-A y B-B

Examínese ahora el triángulo EBD mostrado en la Fig. 2.3d, formado al trazar por el punto E una paralela a la sección A-A.



**Fig. 2.3d** Triángulo EBD paralela a la sección A-A

El lado DB representa el alargamiento que sufre la fibra inferior de la viga por efecto de la deformación. Su magnitud es igual a la deformación unitaria, a su vez, es igual al esfuerzo flexionante  $f$ , dividido entre el módulo de elasticidad del material  $E$ , de acuerdo con la ley de Hooke. Por lo tanto:

$$DB = f dx / E \quad (2.37)$$

El esfuerzo  $f$  se puede calcular con la fórmula de la flexión o la fórmula de la escuradría como:

$$f = Mc/I \quad (2.38)$$

donde:

- $M$  es el momento flexionante que actúa en la sección transversal.
- $c$  es la distancia del eje neutro a la fibra más alejada de la sección.
- $I$  es el momento de inercia de la sección.

Sustituyendo la ecuación 2.38 en la 2.37 se obtiene:

$$DB = (Mc/EI)dx \quad (2.39)$$

Observando el triángulo EBD y tomando en cuenta que las deformaciones son pequeñas, tenemos:

$$d\theta = DB/EB \quad (2.40)$$

Sustituyendo la ecuación 2.39 en la 2.40 y observando en la Fig. 2.3d que  $EB=c$ :

$$d\theta = (M/EI)dx \quad (2.41)$$

Como la distancia entre las secciones A-A y B-B es  $dx$ , observando la Fig. 2.3c puede plantearse la ecuación:

$$d\theta = dx/\rho \quad (2.42)$$

Donde  $\rho$  es el radio de curvatura y sustituyendo la ecuación 2.42 en la 2.41:

$$1/\rho = M/EI \quad (2.43)$$

El radio de curvatura es el recíproco de la curvatura, la cual se define como la razón de la variación de la dirección de una curva entre dos puntos de la misma. Si la dirección de la viga elástica en la sección A-A es  $\theta_A$  y en la sección B-B es  $\theta_B$ , (Ver Fig. 2.3c) el cambio de dirección es  $\theta_{AB} = d\theta$  y la razón de la variación es igual a este cambio angular entre la longitud del arco FE, que se representa como  $ds$ . Por lo tanto, si la curvatura se representa con la letra  $k$ , su valor será:

$$k = d\theta/ds \quad (2.44)$$

La tangente del ángulo  $\theta$  en cualquier punto es la pendiente de la curva:

$$\tan\theta = dy/dx \quad (2.45)$$

Derivando ambos miembros, simplificando y despejando  $d\theta/dx$  tenemos:

$$d\theta/dx = \frac{d^2y/dx^2}{\left[1 + \left(dy/dx\right)^2\right]} \quad (2.46)$$

Si los arcos son pequeños, su longitud se puede calcular por el teorema de Pitágoras como:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (2.47)$$

Donde se deduce:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right) = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} \quad (2.48)$$

Dividiendo la ecuación 2.46 entre la 2.48, y tomando en cuenta la definición de curvatura en la ecuación 2.44, así como la de radio de curvatura, que es el recíproco de la curvatura:

$$k = 1/\rho = \frac{d^2y/dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (2.49)$$

Si las deformaciones son pequeñas, como se está suponiendo, el término  $\frac{dy}{dx}$ , que representa la pendiente de la curva, es pequeño en comparación con la unidad, y su cuadrado es todavía más pequeño. Por lo tanto, el denominador de la ecuación 2.49 puede aproximarse a la unidad. Haciendo esta simplificación y sustituyendo el valor de  $1/\rho$  en la ecuación 2.43 se tiene:

$$d^2y/dx^2 = M/EI \quad (2.50)$$

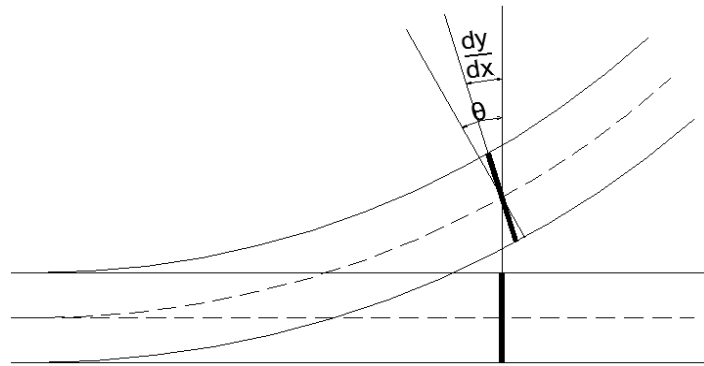
Por lo que de la ecuación 2.50 despejando  $M$  obtenemos la relación entre el momento flexión y la deflexión de la viga de Euler-Bernoulli.

$$M = EI \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \quad (2.51)$$

### 2.4.2 Teoría de la viga de Timoshenko

La hipótesis que diferencia de la viga de Timoshenko a la de Euler-Bernoulli es la de considerar que las secciones planas perpendiculares al eje longitudinal de la viga antes de la deformación, permanecen planas pero no necesariamente normales al eje después de la deformación.

En la teoría de Timoshenko no se desprecian las deformaciones debidas al cortante y por lo tanto es válida también para vigas cortas, por lo que esta hipótesis representa una mejor aproximación a la deformación real de la sección transversal (Ver Fig. 2.4).



**Fig. 2.4 Deformación de la sección transversal de la viga según la teoría de Timoshenko**

A partir de la Fig. 2.4 tenemos el ángulo  $\gamma$  entre la tangente a la línea del eje neutro longitudinal de la viga y la normal a la sección transversal después de la deformación, el cual indica la deformación por cortante.

$$\gamma = \theta - \left( \frac{dy}{dx} \right) \quad (2.52)$$

Sabiendo que la fuerza cortante  $V$  es:

$$V = kAG\gamma = kAG \left[ \theta - \left( \frac{dy}{dx} \right) \right] \quad (2.53)$$

Dónde:

- $V$  Fuerza cortante actuante en la sección transversal.
- $k$  coeficiente de cortante de Timoshenko.
- $A$  área de la sección transversal.
- $G$  módulo de rigidez cortante.
- $\gamma$  ángulo de deformación por cortante.

Ordenando la ecuación 2.53 y derivándola tenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{kGA} \frac{dV}{dx} \quad (2.54)$$

De la ecuación 2.41 despejamos  $d\theta/dx$  y sustituimos en la 2.54 para obtener:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{kGA} \frac{dV}{dx} + \frac{M}{EI} \quad (2.55)$$

En la ecuación 2.55 llegamos a la expresión donde se observa la relación del momento de flexión y la deformación de la viga incluyendo los efectos de deformación por cortante.

## **2.5. Introducción al Método de los Elementos Finitos (MEF).**

En la ingeniería existen muchos fenómenos físicos que se modelan mediante ecuaciones diferenciales. Dichas ecuaciones se consideran resueltas si se puede deducir analíticamente las funciones que satisfagan exactamente y que cumplan además con las condiciones iniciales o frontera del problema en particular.

Sin embargo debido a la complejidad de las condiciones particulares de algunos problemas no es posible encontrar una solución exacta. En dichos casos el problema se resuelve buscando una solución aproximada que dé resultados lo más cercanos a la solución real.

Una característica común de las soluciones aproximadas es que son funciones continuas en todo el dominio y de diferenciables en un número infinito de veces. Tomando en cuenta lo anterior mencionado, se puede definir en su forma más general que *el método de los elementos finitos es un procedimiento numérico para resolver problemas físicos gobernados por ecuaciones diferenciales.*

La aplicación del MEF tiene una estructura muy parecida a la del método de los desplazamientos, ampliamente utilizado en el análisis estructural. Tomando como referencia al método de los desplazamientos, la solución de problemas por el MEF incluye los siguientes aspectos generales:

- I. ***Discretización del dominio.*** La región donde se desea determinar la solución del problema se debe discretizar, esto significa que el dominio real se sustituye por elementos discretos mediante la elección de ciertos puntos nodales de coordenadas conocidas.
- II. ***Elección de las funciones de aproximación.*** Se debe elegir el orden de la aproximación: lineal, cuadrática o de mayor orden, y se debe plantear una función de interpolación para cada elemento.
- III. ***Formulación de las ecuaciones del MEF.*** Con las funciones de interpolación elegidas se aplica el método adecuado al problema analizado para obtener las ecuaciones finales que resuelven el problema.
- IV. ***Ensamble de los elementos.*** Una vez establecidas las ecuaciones del MEF para cada elemento se deben ensamblar de acuerdo con la posición que ocupan sus nodos, para formar un sistema general de ecuaciones que abarque todo el dominio.
- V. ***Solución del sistema de ecuaciones.*** El MEF genera un sistema de ecuaciones lineales con un gran número de incógnitas que se debe resolver aplicando algún método numérico eficiente.

VI. *Determinación de los valores aproximados.* Finalmente se determinan los valores aproximados de la función en los puntos nodales.

### 2.5.1. Funciones de forma y tipos de funciones.

La interpolación es un elemento clave del MEF, puesto que es a través de las funciones de forma, o interpolación, que se consigue reducir a la determinación de los desplazamientos de los nudos. Estas funciones deberán dar valores suficientemente aproximados de los desplazamientos de cualquier punto del elemento.

Las funciones de forma deben tener las siguientes propiedades:

- Derivabilidad
- Integrabilidad
- Semejanza con las leyes de distribución de desplazamientos
- Condición de polinomio completo

En cada elemento se pueden distinguir tres tipos de nudos, primarios, secundarios e intermedios.

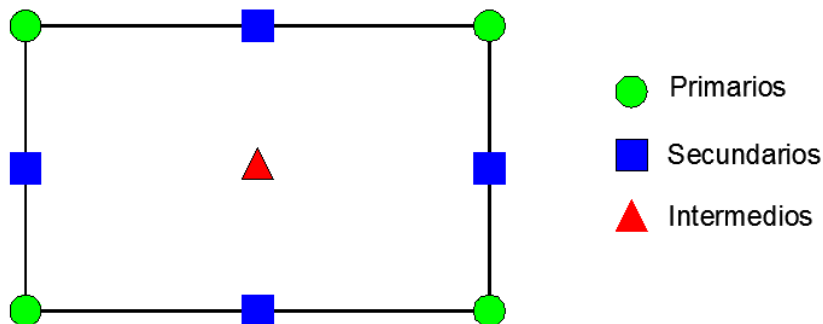


Fig. 2.5 Tipos de nodos de un elemento

Las funciones de forma se agrupan en dos familias principales en función del tipo de nodos:

- Serendipitys: en las que sólo existen nodos frontera (primarios y secundarios).
- Lagrangianas: Incluyen además nodos intermedios.

Con el fin de conseguir mayor ajuste de los elementos a la geometría del cuerpo, existe también una interpolación de tipo geométrico. Esto permite obtener elementos de lados curvos a partir de un elemento referencia.

Se debe proponer la función que representa la solución aproximada del problema dentro de los límites de cada elemento. Esta función generalmente es un polinomio del tipo:

$$\phi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n \quad (2.56)$$

Para la mayoría de los elementos, es posible construir sus respectivas funciones de interpolación empleando los conceptos básicos de la teoría de interpolación polinomial. Para esto se presentan los fundamentos de dos funciones de interpolación clásica, la basada en los polinomios de interpolación de Lagrange y la basada en los polinomios de interpolación de Hermite.

Las funciones de interpolación  $[N]$  dependen de las coordenadas y de la forma de interpolación (lineal, cuadrática, cubica, etc). Por esta razón también se les llama funciones de forma.

Con el fin de conseguir mayor ajuste de los elementos a la geometría del cuerpo, existe también una interpolación de tipo geométrico. Esto permite obtener elementos de lados curvos a partir de un elemento referencia.

### 2.5.2. Formulación de las ecuaciones básicas del MEF.

Para formular las ecuaciones básicas del MEF se aplicara el método que utiliza el principio del trabajo virtual. Para un elemento aislado en el que actúan sólo fuerzas distribuidas y concentradas axiales, la aplicación del principio de trabajo virtual conduce a la siguiente expresión:

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_\Gamma \{\delta u\}^T q d\Gamma + \{\delta u_i\}^T \{P_i\} \quad (2.57)$$

Donde:

- $\{\sigma\}$  es el vector de esfuerzos que está dado por  $\{\sigma\} = E\{\varepsilon\}$
- $E$  es el módulo de elasticidad
- $\{\varepsilon\}$  es el vector de deformación unitaria dado por  $\{\varepsilon\} = [B]\{a\}$
- $[B]$  es la matriz de deformación dependiente de las funciones de forma
- $\{a\}$  es el vector de desplazamientos nodales
- $\{\delta\varepsilon\}$  es el vector de deformaciones virtuales
- $\{\delta u\}$  es el vector de desplazamientos virtuales
- $q$  es la fuerza distribuida por unidad de longitud
- $\{\delta u_i\}$  es el vector de desplazamientos virtuales en los puntos donde están aplicadas las fuerzas concentradas
- $\{P_i\}$  es el vector de fuerzas concentradas
- $V$  es el volumen del cuerpo
- $\Gamma$  es la superficie externa donde están aplicadas las cargas distribuidas.

Los desplazamientos y deformaciones virtuales se pueden expresar como sigue:

$$\{\delta u\}^T = ([N]\{\delta a\})^T = \{\delta a\}^T [N]^T \quad (2.58)$$

$$\{\delta\varepsilon\}^T = ([B]\{\delta a\})^T = \{\delta a\}^T [B]^T \quad (2.59)$$

Considerando que  $d\Gamma = dx$  y  $dV = A dx$ , sustituyendo las ecuaciones 2.58 y 2.59 en la 2.57, factorizando y sabiendo que  $A$  es el área de la sección transversal del elemento y  $L$  la longitud del mismo.

$$\int_L \{\delta a\}^T [B]^T E [B] \{a\} A dx = \int_L \{\delta a\}^T [B]^T q dx + \{\delta a_i\}^T \{P_i\} \quad (2.60)$$

Considerando que los desplazamientos virtuales son arbitrarios, se puede simplificar la ecuación 2.60 para obtener la expresión final del MEF.

$$\left( \int_L [B]^T E A [B] dx \right) \{a\} = \int_L [N]^T q dx + \{P_i\} \quad (2.61)$$

La ecuación 2.61 se puede expresar en la forma estándar del MEF como:

$$[k]^e \{a\}^e = \{f\}^e \quad (2.62)$$

Donde:

$$[k]^e = \int_L [B]^T E A [B] dx \quad (2.63)$$

$$\{Q\}^e = \int_L [N]^T q dx \quad (2.64)$$

$$\{f\}^e = \{Q\} + \{P_i\} \quad (2.65)$$

En las expresiones anteriores,  $[k]$  es la matriz de rigidez del elemento,  $\{a\}$  es el vector de desplazamientos nodales,  $\{Q\}$  es el vector de fuerzas distribuidas y  $\{P_i\}$  el vector de fuerzas concentradas en los nodos del elemento.

La expresión 2.62 fue deducida para un elemento y representa la contribución de ese elemento al sistema total. La solución definitiva se obtiene como el ensamble de todos los elementos del sistema que se representa por la siguiente expresión:

$$[K]\{a\} = \{F\} \quad (2.66)$$

donde:

- $[K]$  es la matriz de rigidez general del sistema (ensamblada)
- $\{a\}$  es el vector de desplazamientos nodales (incógnita)
- $\{F\}$  es el vector de fuerzas nodales del sistema (ensamblado)

La matriz y los vectores de la ecuación 2.66 se determinan con las siguientes expresiones:

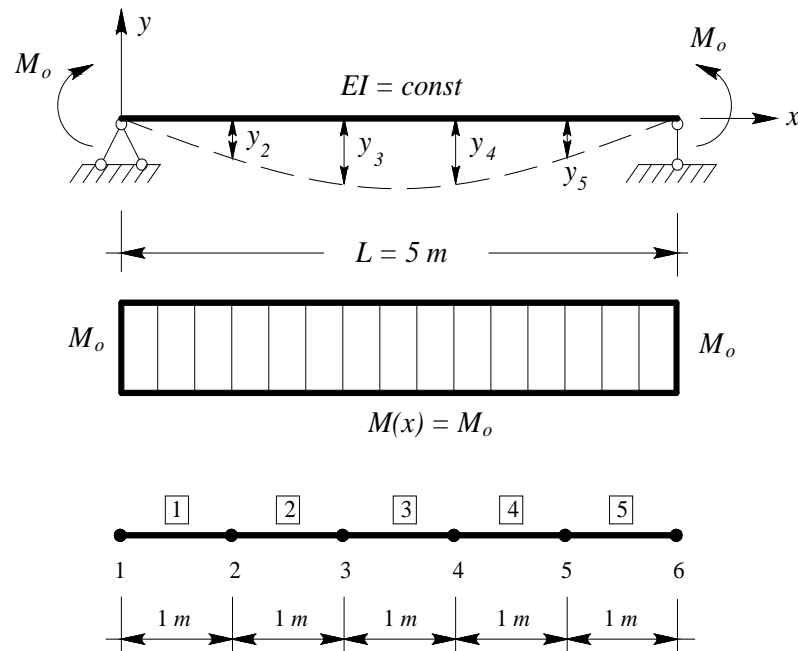
$$[K] = \sum_{e=1}^n [k]^e \quad (2.67)$$

$$\{a\} = \sum_{e=1}^n \{a\}^e \quad (2.68)$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^n \{f\}^e \quad (2.69)$$

En las ecuaciones (2.67-2.69) el símbolo de sumatoria no representa una suma algebraica, si no expresa el ensamble de los elementos de acuerdo con la forma que están unidos. Es decir, *el valor nodal de la función aproximada es igual a la contribución de los elementos que convergen en él.*

A continuación se muestra un ejemplo de una viga simplemente apoyada (Ver Fig. 2.6).



**Fig. 2.6 Modelo para el cálculo de deflexiones de una viga aplicando el MEF**

Se conoce que la ecuación diferencial de la elástica de la viga analizada es:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} - M(x) = 0 \quad (2.70)$$

Según la Fig. 2.6, las condiciones iniciales particulares de este problema son  $y(0) = 0$  y  $y(L) = 0$ . La viga se dividió en cinco elementos de igual longitud con ayuda de seis nodos. Los nodos y los elementos se numeran secuencialmente de izquierda a derecha. Las características de los elementos se indican en la Tabla 2.1.

Elemento No.	Nodos		Xi (m)	Xj (m)	Le (m)
	i	J			
1	1	2	0	1	1
2	2	3	1	2	1
3	3	4	2	3	1
4	4	5	3	4	1
5	5	6	4	5	1

**Tabla 2.1 Coordenadas y longitudes de los elementos**

La solución exacta de este problema está dada por la ecuación  $y = \frac{M_0 x}{2EI} (x - L)$ . En la Tabla 2.2 se comparan los resultados obtenidos aplicando la solución exacta y el MEF.

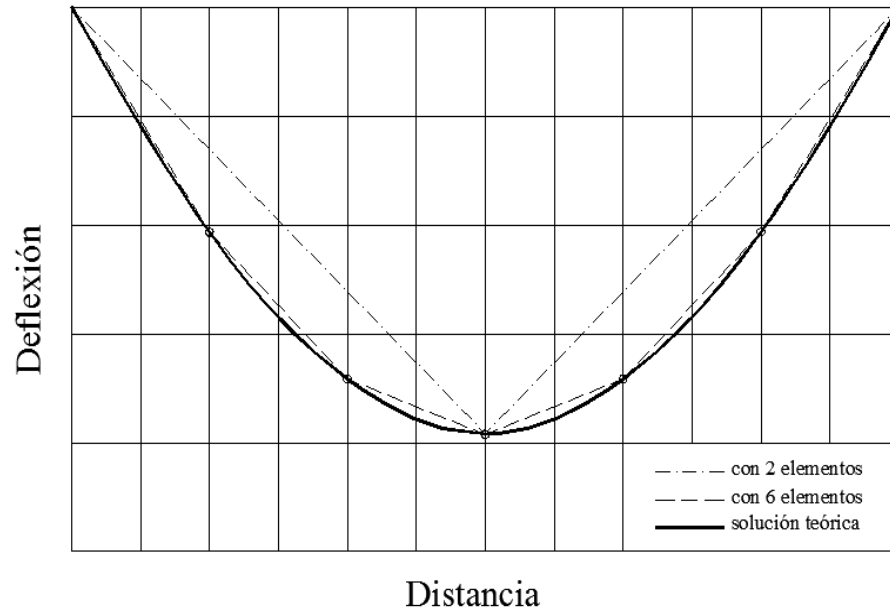
Solución	Nodo			
	2	3	4	5
Exacta	$-\frac{2M_0}{EI}$	$-\frac{3M_0}{EI}$	$-\frac{3M_0}{EI}$	$-\frac{2M_0}{EI}$
MEF	$-\frac{2M_0}{EI}$	$-\frac{3M_0}{EI}$	$-\frac{3M_0}{EI}$	$-\frac{2M_0}{EI}$

**Tabla 2.2 Comparación de resultados en los nodos entre las soluciones exacta y el MEF**

En la Tabla 2.2 se observa claramente que los resultados que arroja el MEF coinciden plenamente con la solución exacta. Es importante aclarar que esto último ocurre únicamente en los puntos nodales y sólo en el caso de elementos unidimensionales, pero no es una regla general. Para aclarar este punto se determinará la deflexión de la viga en la sección  $x = 2.5 m$  que coincide con ningún nodo.

La sección  $x = 2.5\text{ m}$  se encuentra en el elemento 3, por lo tanto la deflexión aproximada según el MEF es  $y_{x=2.5} = -\frac{3M_0}{EI}$ . Por otra parte, la solución teórica en esa misma sección es  $y_{x=2.5} = -\frac{25M_0}{8EI}$ . Como se observa, hay una diferencia apreciable entre ambas soluciones.

También es importante mencionar que hay continuidad en los desplazamientos de los nodos pero no la hay en la pendiente de la función de desplazamientos, que en este caso representa el giro de la sección. Esto es, en un mismo nodo hay un solo desplazamiento pero hay dos pendientes: la del elemento anterior y la del elemento posterior. Esto está relacionado con el hecho de que en la solución del problema no se consideran los giros. En la Fig. 2.7 se comparan los resultados teóricos con los resultados del MEF utilizando mallas de dos y seis elementos.



**Fig. 2.7 Comparación gráfica de la solución teórica con el MEF**

De los resultados anteriores, es evidente que para mejorar los resultados de la solución aproximada se pueda optar por alguno de los siguientes caminos:

- Colocar nodos en las secciones donde se desea conocer la solución aproximada.
- Aumentar el número de elementos.
- Utilizar funciones de interpolación de mayor grado.

Con respecto al número de elementos que se necesitan para que la solución del MEF tenga la exactitud requerida es difícil de saber ya que cada problema es diferente, sólo se sabe que en general al aumentar el número de elementos mejora la exactitud de los resultados y se converge a una solución estable, pero también se incrementa sustancialmente el tiempo de cómputo y sobre todo el tiempo invertido en la preparación e introducción de datos al programa.

## **2.6. Mecánica de la fractura.**

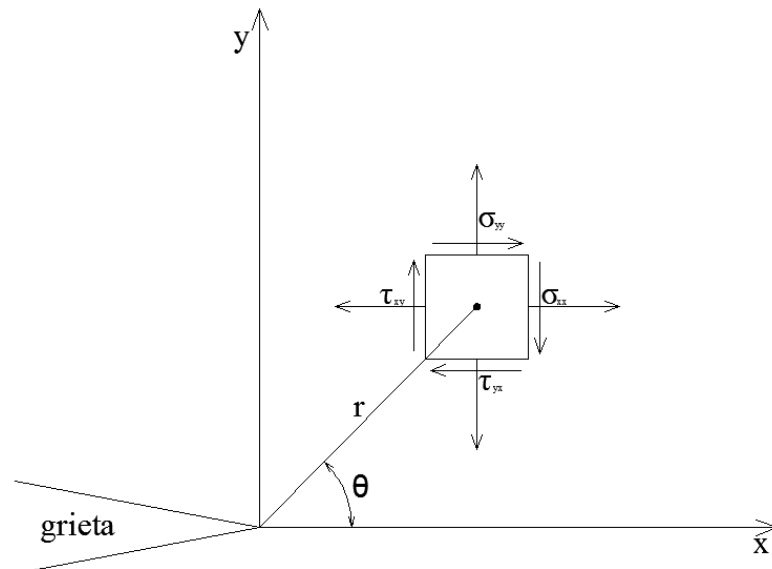
La mecánica de la fractura y particularmente la mecánica de la fractura elástica es una ciencia que estudia los mecanismos y procesos de propagación de grietas en sólidos, así como la distribución de tensiones y deformaciones que ocurren en un material agrietado o con discontinuidades, sometido a cierta tensión externa (Shi, 2009). Esta ciencia surgió con los trabajos fundamentales de Griffith (1921-1924) sobre ciertos criterios de propagación de grietas en sólidos y por esta razón se conoce como una formulación energética de la mecánica de la fractura.

En pocas palabras la formulación energética de la mecánica de la fractura consiste en comparar la energía disponible para la propagación de una grieta en una estructura con la energía necesaria para producir su agrietamiento. La energía disponible para el avance de grieta por unidad de

área se denomina tasa de liberación de energía ( $G$ ) y la energía necesaria para el agrietamiento se denomina tasa crítica de liberación de energía o energía de agrietamiento ( $G_{Ic}$ ).

### 2.6.1. Factores de intensidad de esfuerzo.

La teoría de la elasticidad permite obtener un estado de esfuerzos existente en un elemento  $dx dy$ , situado delante de la grieta. En la Fig. 2.8 se muestra esquemáticamente un elemento cerca del frente de la grieta en un material elástico y en dicha figura están representados los esfuerzos en el plano de dicho elemento. Para un análisis más acertado se consideran las coordenadas polares de los puntos  $(r, \theta)$ .



**Fig. 2.8** Esfuerzos cerca de la grieta en un material elástico

Una grieta puede estar sujeta a tres diferentes tipos de carga que causen desplazamiento entre las superficies de agrietamiento (Ver Fig. 2.9). Los factores de intensidad de esfuerzo para los tres diferentes tipos de carga a los cuales están sometidos se denominan como  $K_I$ ,  $K_{II}$  y  $K_{III}$  (Shi, 2009). A continuación se definen las tres diferentes formas de carga a la que se puede ser sometida un sólido, sus desplazamientos y sus respectivos factores de intensidad de esfuerzo.

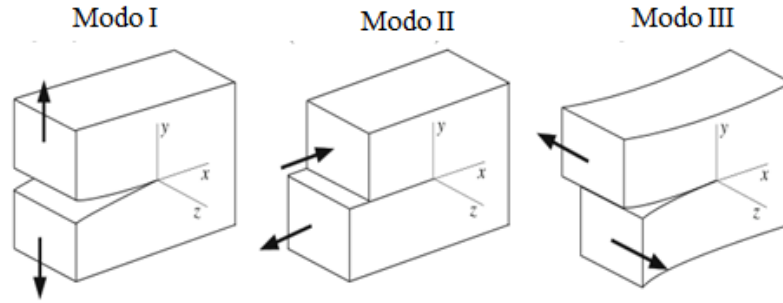


Fig. 2.9 Tres modos de deformación en la punta de la grieta

- **Modo I:** Es el modo de apertura, en el cual la grieta se abre debido a la aplicación de tensiones normales al plano de la grieta.

Esfuerzos cercanos a la grieta:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.69a)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.69b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.69c)$$

Desplazamientos cercanos a la grieta:

$$u_x = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( k - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.70a)$$

$$u_y = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( k + 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.70b)$$

- **Modo II:** Es el modo deslizante, en el que debido a la aplicación de tensiones cortantes en el plano de la fractura, se producen

desplazamientos longitudinales de las superficies de dicho plano.

Esfuerzos cercanos a la grieta:

$$\sigma_x = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.71a)$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.71b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (2.71c)$$

Donde  $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$  para tensiones y deformaciones planas,  $\sigma_z = 0$  para tensión plana y  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$  para deformación plana.

Desplazamientos cercanos a la grieta:

$$u_x = \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( k + 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.72a)$$

$$u_y = \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( k - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.72b)$$

- **Modo III:** Es el modo de rotura transversal, que corresponde al desplazamiento de las superficies de fractura en sentidos opuestos, debido a la aplicación de tensión cortante en planos diferentes al plano de fractura. Este último modo de deformación no ocurre para el problema en el plano elástico.

Esfuerzos cercanos a la grieta:

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.73a)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (2.73b)$$

Donde  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$ .

Desplazamientos cercanos a la grieta:

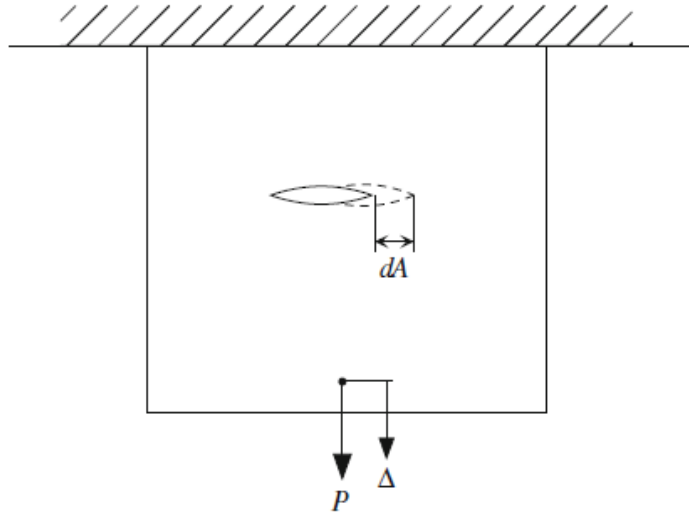
$$u_z = \frac{2K_{III}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.74)$$

Donde  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  es el módulo de cortante,  $k = 3 - 4\nu$  para deformación plana, y  $k = \frac{(3 - \nu)}{(1 + \nu)}$ .

### 2.6.2. El índice de energía liberada $\mathcal{G}$ .

El concepto de energía de Griffith es de carácter global: Para la propagación de una grieta, la energía acumulada en el sistema debe ser suficiente para superar la energía de fractura del material. Basado en la teoría de la fractura de Griffith, Irwin generalizó el concepto al definir un índice de energía liberada  $\mathcal{G}$ , la cual es una medida de la energía disponible para una propagación unitaria de la grieta y representa “La fuerza necesaria para provocar la propagación de una grieta” (Irwin, 1957).

En la Fig. 2.10 se muestra una placa bajo una carga  $P$ , la cual causea que la grieta se extienda una distancia  $dA$ , definiendo la carga como  $P$  el sistema está bajo control de la carga. La energía de fractura disipada en la propagación de la grieta se origina en el trabajo realizado por la fuerza externa  $Pd\Delta$  y la liberación de la energía elástica de deformación  $dU$  en el sistema, es decir:



**Fig. 2.10 Placa agrietada bajo una carga P**

$$\mathcal{G} = P \frac{d\Delta}{dA} - \frac{dU}{dA} \quad (2.75)$$

La energía de deformación de un sistema elástico está dada por:

$$U = \int_0^{\Delta} P d\Delta = \frac{P\Delta}{2} = \frac{CP^2}{2} \quad (2.76)$$

donde la relación  $\Delta = CP$  es empleada;  $C$  es la flexibilidad del sistema, la cual es la inversa de la rigidez de la placa.

$$\frac{d}{dA} = \frac{\partial}{\partial A} + \frac{dP}{dA} \frac{\partial}{\partial P} \quad (2.77)$$

Después sustituyendo la ecuación 2.76 y  $\Delta = CP$  en la ecuación 2.75, realizando las operaciones necesarias se tiene que el índice de energía liberada es:

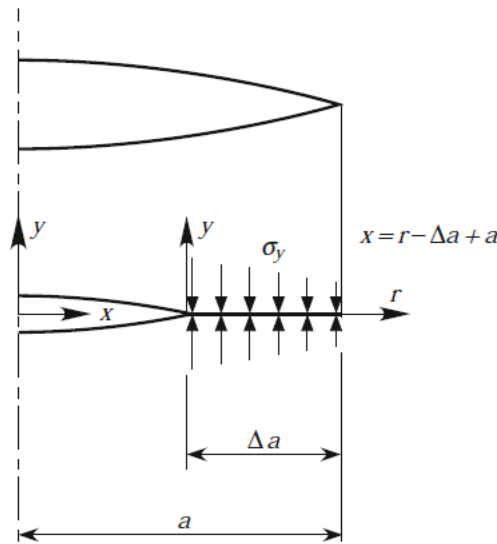
$$\mathcal{G} = \frac{P^2}{2} \frac{\partial C}{\partial A} \quad (2.78)$$

Teóricamente, si la derivada de la flexibilidad del espécimen cumple con respecto a la longitud de la grieta puede ser derivada experimentalmente o numéricamente por alguna solución de elemento finito, entonces el índice de energía liberada puede ser calculado con la ecuación 2.78.

**2.6.3. La relación entre K (Factores de intensidad de esfuerzo) y  $\mathcal{G}$  (índice de energía liberada).**

Los dos parámetros de la fractura anteriormente descritos son, los factores de intensidad de esfuerzo  $K$  y el índice de energía liberada  $\mathcal{G}$ . Mientras que el primer parámetro únicamente define los esfuerzos en la cercanía de la punta de la grieta y los desplazamientos, el segundo representa la fuerza que dirige a la apertura de la grieta. Obviamente, existe una relación entre estos dos parámetros, de la cual se deduce la ecuación 2.79 por Irwin (1957) con ayuda de la Fig. 2.11.

$$\mathcal{G} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{2K^2}{E\pi\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sqrt{\frac{\Delta a - r}{r}} dr \quad (2.79)$$



**Fig. 2.11** Análisis de cierre de grietas

La ecuación 2.79 conduce a la relación entre el índice energía liberada con los factores de intensidad de esfuerzo para los diferentes modos de apertura de la grieta:

### Modo I

$$G_I = \frac{K_I^2}{E} \quad (\text{Esfuerzo Plano}) \quad (2.80a)$$

$$G_I = (1 - \nu^2) \frac{K_I^2}{E} \quad (\text{Deformación Plana}) \quad (2.80b)$$

### Modo II

$$G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E} \quad (\text{Esfuerzo Plano}) \quad (2.81a)$$

$$G_{II} = (1 - \nu^2) \frac{K_{II}^2}{E} \quad (\text{Deformación Plana}) \quad (2.81b)$$

### Modo III

$$G_{III} = \frac{1}{1 - \nu} \frac{K_{III}^2}{E} \quad (\text{Esfuerzo Plano}) \quad (2.82a)$$

$$G_{III} = (1 - \nu^2) \frac{K_{III}^2}{E} \quad (\text{Deformación Plana}) \quad (2.82b)$$

A si el total de índice de energía liberada in combinación con los modos de abrirse de la grieta pueden ser obtenidas por superposición:

$$G = G_I + G_{II} + G_{III} = \frac{1}{E} \left( K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{1}{1 - \nu} K_{III}^2 \right) \quad (\text{Esfuerzo Plano}) \quad (2.83a)$$

$$G = G_I + G_{II} + G_{III} = \frac{1 - \nu^2}{E} \left( K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{1}{1 - \nu} K_{III}^2 \right) \quad (\text{Def. Plana}) \quad (2.83b)$$

Dado que los factores de intensidad de esfuerzo  $K$  fueron únicamente definidos para materiales elástico-lineal, se puede demostrar que las ecuaciones 2.80 a la 2.82 son válidas para todas las formas geométricas y

tipos de grietas. De hecho,  $\mathcal{G}$  incluso puede ser considerado como un parámetro físico definido en la punta de la grieta usando los campos de esfuerzos y desplazamientos cercanos a la grieta, como se muestra en la ecuación 2.79. Por lo tanto, la relación con  $K$  debe ser invariante, ya que los campos a la cercanía de la grieta fueron establecidos, independientemente de cualquier cambio específico. Para placas de un tamaño finito, la influencia de la forma geométrica del problema es reflejado en los factores de intensidad de esfuerzo  $K$ . Por consiguiente, es posible obtener  $\mathcal{G}$  para un problema de tamaño finito usando la relación entre  $\mathcal{G}$  y  $K$ .

## Capítulo 3

# Métodos de determinación de la respuesta dinámica de estructuras agrietadas

---

El desarrollo de los métodos para la detección de daño empezó a principios de los años 70 dentro de la industria energética. Dimarogonas en dos reportes internos para la compañía *General Electric*, desarrolló la teoría de vibración de ejes agrietados. Pafelias continuó con el trabajo de Dimarogonas, en un reporte formal de *General Electric* uso la teoría y experimentos de campo para el desarrollo de una metodología para la detección de daño en base a la velocidad crítica armónica y sub-armónica de la respuesta dinámica. Además ayudó en el desarrollo de instrumentación electrónica para el monitoreo de prevención de rotores dañados para ser usados como control de turbinas. A principios de los años 80 hubo una sustancial investigación académica en la materia.

En este capítulo se dará una descripción de los métodos de simulación dinámica que han surgido desde finales del siglo pasado hasta la primera década de este siglo.

### 3.1. Método de Christides y Barr

En el método de Christides y Barr (1984) se evalúa la ecuación diferencial y la asociación de las condiciones frontera de una viga Euler-Bernoulli con uno o más pares de grietas simétricas, la reducción a una dimensión espacial se logra utilizando integrales sobre la sección transversal después de ser elegidos esfuerzos, deformaciones, desplazamientos y momentos que sean plausibles.

La teoría de la viga de Euler-Bernoulli es bien conocida pero poco comprendida. La suposición de que está constituida debido a ciertos

desplazamientos, deformaciones y esfuerzos, es aparentemente simple pero al mismo tiempo inconsistente. Esta teoría puede ser derivada de una manera consistente solamente a través de integraciones espaciales sugeridas por el teorema variacional de Hu (1955). Dicho procedimiento es una herramienta útil aplicada para el desarrollo de la teoría de Christides y Barr. En esencia las suposiciones independientes para el desplazamiento, deformación, esfuerzo y momento son agrupadas en una declaración variacional para producir, después de la integración de la sección transversal de la viga, la ecuación de movimiento y su asociación con las condiciones frontera.

### 3.1.1 Teorema variacional

Si los componentes de desplazamiento son escritos como  $u_i$ , los componentes de deformación  $\gamma_{ij}$  y los componentes de esfuerzo  $\tau_{ij}$ , siendo  $i, j = 1, 2, 3$  refiriéndose con ello a los ejes cartesianos  $x, y, z$  y además  $p_i$  son las componentes de momento, tal que  $T = \frac{1}{2}\delta_{ij}p_i p_j$  es la densidad de energía cinética (donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker), entonces el principio variacional Hu-Washizu extendido (Barr, 1966) declara variaciones independientes arbitrarias  $\delta u_i, \delta \gamma_{ij}, \delta \tau_{ij}$  y  $\delta p_{ij}$ .

$$\int_V \left\{ [\tau_{ij} + F_i - \rho \dot{p}_i] \delta u_i + [\tau_{ij} - W_{\gamma_{ij}}] \delta \gamma_{ij} + \left[ \gamma_{ij} - \left( 1 - \frac{1}{2} \delta_{ij} \right) (u_{ij} + u_{ji}) \right] \delta \tau_{ij} + [\rho \dot{u}_i - T_{p_i}] \delta p_i \right\} dV + \int_{S_p} [\bar{g}_i - g_i] \delta u_i dS + \int_{S_u} [u_i - \bar{u}_i] \delta g_i dS = 0 \quad (3.1)$$

En la ecuación (3.1)  $W_{\gamma_{ij}}$  es la función de densidad de energía de deformación,  $\rho$  es la densidad.  $F_i$  y  $g_i$  son las fuerzas y la superficie de tracción respectivamente.  $V$  es el volumen total del sólido y  $S$  es la superficie externa. Las variables  $\bar{g}_i$  y  $\bar{u}_i$  denotan los valores prescritos de la superficie de tracción y la superficie de desplazamiento respectivamente, lo anterior actúa sobre la superficie  $S_p$  y después sobre la superficie  $S_u$ , las

variables  $S_u$  y  $S_p$  juntas representan la superficie total. La diferenciación con respecto al tiempo se identifica por  $(\dot{\phantom{x}})$ . Las comas en los subíndices denotan diferenciación de forma usual.

Para derivar la Teoría de la viga de Euler-Bernoulli sin daño a partir de la ecuación (3.1), regresando a la notación ingenieril por simpleza e integrando sobre la sección transversal de la viga y suponiendo variables independientes desconocidas dan las relaciones  $S = w''$ ,  $T = ES$  y  $P = \dot{w}$ , despreciando las fuerzas de cuerpo.

$$EI^{iv} + A\rho\dot{w} = 0 \quad (3.2)$$

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad,  $A$  es el área de la sección transversal e  $I$  es el momento de inercia de la sección.

Por lo que la ecuación (3.2) representa una viga Euler-Bernoulli sin daño.

### 3.1.2 Teoría de la viga agrietada

La introducción de grietas traerá cambios en la distribución de esfuerzos y deformaciones en la vecindad de secciones agrietadas. Es bien conocido que cerca de las grietas hay mayor concentración de esfuerzos y que sobre la sección dañada de la viga los esfuerzos no están distribuidos linealmente y todas las componentes de esfuerzos no son iguales a cero. Sin embargo siendo la dinámica global de la viga el interés, se supone que la distribución de los esfuerzos no es particularmente importante, así que se igualaran a cero.

Los cambios en la distribución de los esfuerzos y deformación cerca de la grieta son considerados usando una función  $f(x,z)$ , la cual tiene el

máximo valor en la punta de la grieta y el cual decrece con la distancia de la sección agrietada.

Por ello se asume que la presencia de la grieta no altera de ningún modo los campos de desplazamiento y velocidad. La suposición sigue la notación siguiente, para una viga uniforme en ausencia de fuerzas de cuerpo.

$$\left. \begin{aligned}
 u &= -zw'; \quad v = 0; \quad w = w(x, t) \\
 p_x &= 0; \quad p_y = 0; \quad p_z = P(x, t) \\
 \gamma_{xx} &= [-z + f(x, z)S(x, t)] \\
 \gamma_{yy} &= \gamma_{zz} = -v\gamma_{xx} \\
 \gamma_{xy} &= \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \\
 \tau_{xx} &= [-z + f(x, z)]T(x, t); \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, z, t) \\
 \tau_{yy} &= \tau_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \\
 F_x &= F_y = F_z = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Ahora estos valores pueden ser sustituidos en la ecuación (3.1) y las variaciones independientes de las incógnitas  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{T}$  pueden ser consideradas. Por simplicidad es preferente considerar las variaciones una a una.

### ***Termino de deformación-desplazamiento***

El termino deformación-desplazamiento de la ecuación (3.1) se convierte en una variación  $\delta T$  arbitraria e independiente.

$$\int_V \left[ \gamma_{xx} - \frac{\partial u}{\partial x} \right] \delta \tau_{xx} dV = \int_x \left\{ \int_A [(-z + f)S + zw''](-z + f) \delta T dA \right\} dx \quad (3.4)$$

La ecuación (3.4), define las integrales sobre la sección  $A$  como:

$$I = \int_A z^2 dA; K = \int_A z f dA; L = \int_A f^2 dA \quad (3.5)$$

Lo cual convierte a la ecuación (3.4) en:

$$\int_x [(I - 2K + L)S - (I - K)w''] \delta T dx \quad (3.6)$$

### ***Termino de esfuerzo-deformación***

El término esfuerzo deformación de la ecuación (3.1) está dado por:

$$\int_V \left\{ \left[ \tau_{xx} - \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xx}} \right] \delta \gamma_{xx} - \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yy}} \delta \gamma_{yy} - \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zz}} \delta \gamma_{zz} \right\} \delta S dV \quad (3.7)$$

Sustituyendo las cantidades de la ecuación (3.1) y usando la expresión  $W = \frac{1}{2} \lambda e^2 + G(\gamma_{xx}^2 + \gamma_{yy}^2 + \gamma_{zz}^2) + \frac{1}{2} G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)$  donde  $e$  es la dilatación  $(\gamma_{xx} + \gamma_{yy} + \gamma_{zz})$  y  $\lambda$  es la constante de Lamé, la expresión se simplifica de la siguiente forma:

$$\int_x \{(T - ES)(I - 2K + L)\} \delta S dx \quad (3.8)$$

### ***Termino velocidad-momento***

De manera similar el término de momento-velocidad es escrita usando la suposición de la ecuación (3.3) como:

$$\int_x (\rho A w - \rho P A) \delta P dx \quad (3.9)$$

**Termino de equilibrio dinámico**

El primer término de la ecuación (3.1) nos conduce a la ecuación de movimiento, usando la suposición de la ecuación (3.3) el término en cuestión nos conduce a lo siguiente:

$$\int_V \left[ \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \delta u + \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \rho \dot{p}_z \right) \delta w \right] dV =$$

$$\int_A \int_x \left\{ \left[ (-z + f)T \right]' + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right\} (-z \delta w') + \left[ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \rho \dot{p}_z \right] \delta w \right\} dx dA \quad (3.10)$$

El primer término de la ecuación (3.10) puede ser integrado por partes, teniendo en cuenta que  $\delta w' = \delta(\partial w / \partial x) = \partial(\delta w) / \partial x$  tenemos:

$$\int_A \int_x \left\{ \left( -z[(-z + f)T]' - z \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \right\} dx dA =$$

$$\int_A \left\{ -z[(-z + f)T]' - z \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right\} \delta w dA \Big|_x$$

$$- \int_A \int_x \left\{ -z[(-z + f)T]'' - \frac{\partial}{\partial x} \left( z \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \right\} (\delta w) dx dA \quad (3.11)$$

El último término de la ecuación (3.10) puede ser integrado por partes con respecto a  $z$  como sigue:

$$\int_x \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_y \int_z z \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz dy \right\} \delta w dx =$$

$$\int_y \int_x \frac{\partial}{\partial x} (z \tau_{xz}) \delta w dx dy \Big|_z - \int_A \int_x \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \delta w dx dA \quad (3.12)$$

La ecuación (3.11) por lo tanto contiene las siguientes condiciones frontera, que se incorporan con las otras condiciones de frontera de la ecuación (3.1).

$$\int_A \left\{ -z[(-z + f)T]' - z \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right\} \delta w dA|_x + \int_y \int_x \frac{\partial}{\partial x} (z\tau_{xz}) \delta w dx dy|_z \quad (3.13)$$

Los dos términos restantes de la ecuación (3.11) incorporados a la ecuación (3.10), la reducen a la siguiente forma:

$$\int_x \int_A \{ [(-z^2 + zf)T]'' - \rho \dot{P}_z \} \delta w dA dx \quad (3.14)$$

Realizando la doble diferenciación indicada e integrando sobre la sección transversal permite reescribir la ecuación (3.14) como sigue:

$$\int_x [K''T + 2K'T' + (K - I)T'' - \rho A \dot{P}] \delta w dx \quad (3.15)$$

### **Condiciones frontera**

En cuanto a las integrales de superficie  $S_p$  y  $S_u$  en la ecuación (3.1), se supondrá que las superficies laterales de la viga están libres de tracción externa, es decir  $\bar{g}_i = 0$ . La fuerza de superficie se obtiene a partir de los componentes de los esfuerzos de la expresión  $g_i = \tau_{ij}v_j$ . Si la viga es constante con respecto a la normal de la superficie lateral, tendrá ángulos rectos en su eje por lo que  $v_x$  es cero. Así las expresiones para  $g_i$  usando las suposiciones de la ecuación (3.3) son:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= \tau_{xx}v_x + \tau_{xy}v_y + \tau_{xz}v_z = \tau_{xz}v_z \\ g_y &= \tau_{xy}v_x + \tau_{yy}v_y + \tau_{yz}v_z = 0 \\ g_z &= \tau_{zx}v_x + \tau_{zy}v_y + \tau_{zz}v_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Por otro lado, en los extremos de la viga donde  $x = 0, l$ ,  $v_x = -1$  y  $v_x = +1$  respectivamente (suponiendo que la sección plana es normal al eje de la viga) y de las expresiones general de la ecuación (3.16)  $g_x$  se reduce a  $\pm\tau_{xx}$  y  $g_z$  a  $\pm\tau_{xz}$ . Las fuerzas  $g_i$  especificadas en los extremos, integradas sobre la sección, corresponden a una fuerza o momento aplicado. Las integrales de superficie en la ecuación (3.1) con los límites de  $z$  (es decir  $z_1$  y  $z_2$ ,  $z_2 > z_1$ ) toma la siguiente forma:

$$\int_x \int_y \{[0 - \tau_{xz}]_{z=z_2} \delta u + [0 + \tau_{xz}]_{z=z_1} \delta u\} dy dx \quad (3.17)$$

La ecuación (3.17) puede ser escrita como:

$$\left[ \int_x \int_y -\tau_{xz} \delta u dy dx \right]_{z_1}^{z_2} \quad (3.18)$$

Entonces usando la relación  $\delta u = -z\delta w'$  e integrando por partes con respecto a  $x$  se convierte en:

$$\left[ \int_y z\tau_{xz} \delta w dy \right]_x - \int_y \int_x \frac{\partial}{\partial x} (z\tau_{xz}) \delta w dx dy \Bigg|_{z_1}^{z_2} \quad (3.19)$$

El segundo término de la ecuación (3.19) se cancela con el último término de la expresión (3.13). El segundo término de la ecuación (3.13) puede ser integrado por partes con respecto a  $z$  y resulta un término el cual cancela el primer término de la ecuación (3.19). El resto de los términos de la ecuación (3.13) se aplican las condiciones frontera de  $x$ .

$$\int_A \{-z[(-z + f)T]' + \tau_{xz}\} \delta w \, dA \Big|_x \quad (3.20)$$

Del mismo modo, las integrales de superficie de la ecuación (3.1) sobre los extremos de la viga ( $x = 0$  y  $x = l$ ) toman la siguiente forma, cuando las fuerzas  $\bar{X}$  y  $\bar{Z}$  son prescritas.

$$\left[ \int_A \{(\bar{X} - \tau_{xx})\delta u + (\bar{Z} - \tau_{xz})\delta w\} dA \right]_{x=l} + \left[ \int_A \{(\bar{X} - \tau_{xx})\delta u + (\bar{Z} - \tau_{xz})\delta w\} dA \right]_{x=0} \quad (3.21)$$

Incorporando la ecuación (3.20) con la ecuación (3.21) y sustituyendo los valores de  $\delta u$ ,  $\delta w$  y  $\tau_{xx}$  de las suposiciones de la ecuación (3.3), la integral sobre la sección transversal puede ser realizada y resultando las condiciones frontera de la siguiente forma:

$$\left[ \left\{ - \int_A z \bar{X} \, dA + (K - I)T \right\} \delta w' + \left\{ \int_A \bar{Z} \, dA + (I - K)T' - K'T \right\} \delta w \right]_{x=l} - \left[ \left\{ - \int_A z \bar{X} \, dA + (K - I)T \right\} \delta w' + \left\{ \int_A \bar{Z} \, dA + (I - K)T' - K'T \right\} \delta w \right]_{x=0} \quad (3.22)$$

Por otra parte cuando los desplazamientos  $\bar{u}$  y  $\bar{w}$  se encuentran presentes las integrales de superficie de la ecuación (3.1) sobre los extremos de la viga ( $x = 0$  y  $x = l$ ) tenemos los siguientes términos de condiciones fronteras:

$$\left[ \left\{ (I - K)w' - \int_A \bar{u} (f - z) dA \right\} \delta T + \{(w - \bar{w})A\} \delta \tau_{xz} \right]_{x=l} - \left[ \left\{ (I - K)w' - \int_A \bar{u} (f - z) dA \right\} \delta T + \{(w - \bar{w})A\} \delta \tau_{xz} \right]_{x=0} \quad (3.23)$$

*Ecuaciones derivadas del problema*

Todo el estado variacional del problema puede ser ahora ensamblado usando la ecuación (3.1) y las ecuaciones de la expresión variacional (3.6), (3.8), (3.9) (3.15) junto con las condiciones de frontera dadas en las ecuaciones (3.21) y (3.22).

Las variaciones  $\delta\omega$ ,  $\delta\omega'$ ,  $\delta P$ ,  $\delta S$ ,  $\delta T$  y  $\delta\tau_{xz}$  son interpretadas como independientes entonces la ecuación (3.1) implica, para valores arbitrarios de estas variaciones, que cada expresión multiplicada por un término en el volumen integral debe ser independientemente cero.

De la ecuación (3.6) deformación-desplazamiento para  $\delta T$ :

$$S = Q(x)w'' \quad (3.24)$$

Donde  $Q(x) = (I - K)/(1 - 2K + L)$

De la ecuación (3.8) esfuerzo-deformación para  $\delta S$ :

$$T = ES \quad (3.25)$$

De la ecuación (3.9) velocidad-momento para  $\delta P$ :

$$P = \dot{w} \quad (3.26)$$

De la ecuación (3.15) equilibrio dinámico para  $\delta\omega$ :

$$K''T + 2K'T' + (K - I)T'' - \rho A\dot{P} = 0 \quad (3.27)$$

La ecuación (3.27) es la ecuación de movimiento. Se puede sustituir  $T$  y  $P$  en términos del desplazamiento  $\omega$  usando las ecuaciones (3.24-3.27) el resultado es el siguiente:

$$\begin{aligned} E(I - K)Q\omega^{iv} + 2E[Q'(I - K) - K'Q]\omega'' + \\ E[Q''(I - K) - 2K'Q' - K''Q]\omega'' + \rho A\dot{\omega} = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

### *La función de la grieta*

La teoría descrita es basada en la distribución de esfuerzos y deformaciones de la ecuación (3.3), que se encuentra afectada por la presencia de una o varias grietas por medio de la función  $f(x,z)$ . Es necesario establecer un valor de  $f$  para la evaluación de una sección transversal y geometría de la grieta.

Se asume que la grieta ocurre en pares simétricos una sobre la superficie superior  $z = -d$  de la viga y otra para la parte inferior  $z = d$  de la viga, ambas para el mismo valor de  $x$ . La profundidad de las grietas es  $a$  y el material permanente entre ellas es la profundidad  $2h$ .

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores y suponiendo la grieta en una posición  $x = x_i$ , la función  $f(x,z)$  ocurre en la distribución de esfuerzos  $\tau_{xx}$  en la forma:

$$f(x, z) = [z - mzH(h - |z|)]exp(-\alpha|x - x_i|/d) \quad (3.29)$$

Donde  $d$  es la profundidad de la sección de la viga,  $m = (I/I_r)$ ,  $I_r$  es momento de inercia reducido por el daño,  $H(h - |z|)$  es la función de unidad escalón,  $\alpha$  es una constante adimensional positiva que puede ser determinada de resultados experimentales y el uso de  $|x - x_i|$  proporciona el decaimiento simétrico en cada lado de la grieta.

Además, la distribución de esfuerzos puede ser escrita de manera general para el caso en el que la viga tiene grietas simétricas en diversos puntos, por lo que se presenta de la siguiente forma:

$$\tau_{xx}(x, z, t) = \{-z + [z - mzH(h - |z|)] \sum_i^n \exp(-\alpha|x - x_i|/d)\}T(x, t) \quad (3.30)$$

### 3.1.3 Método de Christides y Barr modificado

Este enfoque, basado en la teoría de Christides y Barr, calcula la flexibilidad a lo largo del elemento estructural propuesto por Salgado (2008), para su aplicación directa en un programa computacional.

Este procedimiento requiere que el exponente de tasa de atenuación  $\alpha_{cr}$  deba ser determinada experimentalmente para diferentes condiciones frontera y geométrica, aunque el exponente del esfuerzo ha sido reportado que no cambia mucho (Chondros *et al.*, 1998).

Christides y Barr (1984) determinaron el exponente de la tasa de atenuación que es igual a 0.67 para una viga simplemente apoyada con un par de grietas superficiales localizadas a la mitad del claro. Sin embargo, este valor fue obtenido para un espécimen donde la grieta fue simulada como una muesca. Un corte fino resulta en una flexibilidad local sustancialmente menor a la flexibilidad local debido a una grieta. El procedimiento propuesto por Christides y Barr considera un par de grietas simétricas, mientras que en las estructuras tipo puente, en los cuales se utiliza en mayor medida este método, el daño se caracteriza comúnmente por grietas superficiales en un lado. La deficiencia de este método puede ser compensado con la determinación de  $\alpha_{cr}$  a partir de pruebas experimentales sobre especímenes con grietas reales debido a fatiga.

En este contexto, Chondros *et al.* (1998) reportó la primera frecuencia natural de un viga de aluminio simplemente apoyada con daño. De esta manera, el valor del exponente de la tasa de atenuación que mejor se ajusta a la prueba experimental de la viga de aluminio es de 2.267.

La ecuación (3.28) puede ser expresada de manera más conveniente como sigue:

$$[E(I - N)Q\omega'''] + \rho A\ddot{\omega} = 0 \quad (3.31)$$

La ecuación (3.31) puede ser resuelta para diferentes condiciones frontera, por ejemplo en el caso de una viga simplemente apoyada con sección transversal rectangular ( $b \times h$ ) y un par de grietas simétricas (de profundidad  $a$ ), la ecuación (3.31) toma la siguiente forma:

$$[EIQ\omega'''] + \rho A\ddot{\omega} = 0 \quad (3.32)$$

Donde:

$$Q = \frac{1}{1 + C_{cr} \exp(-2\alpha_{cr}|x - x_j|/h)}, \quad C_{cr} = m_I - 1$$

De la ecuación (3.32), cuando las grietas no son consideradas  $I_c = I \therefore C_{cr} = 0$  y  $Q = 1$ , sustituyendo estos valores en la ecuación (3.32) tenemos:

$$EI\omega^{iv} + \rho A\ddot{\omega} = 0 \quad (3.33)$$

Mediante la comparación de las ecuaciones (3.32) y (3.33) se realiza comparando el comportamiento de la una viga agrietada en un lugar específico el cual es similar al comportamiento de una viga sin daño de rigidez a la flexión longitudinalmente variable. El efecto local de las grietas sobre la rigidez a la flexión,  $EI$ , se puede dar, de acuerdo a la ecuación (3.32), de la siguiente forma:

$$EI(x) = \frac{EI}{1 + C_{cr} \exp(-2\alpha_{cr}|x - x_j|/h)} \quad (3.34)$$

Como una simplificación, una variación lineal de la rigidez a la flexión a lo largo de los elementos fue propuesto por Salgado (2008) como indica en la Figura 3.1.

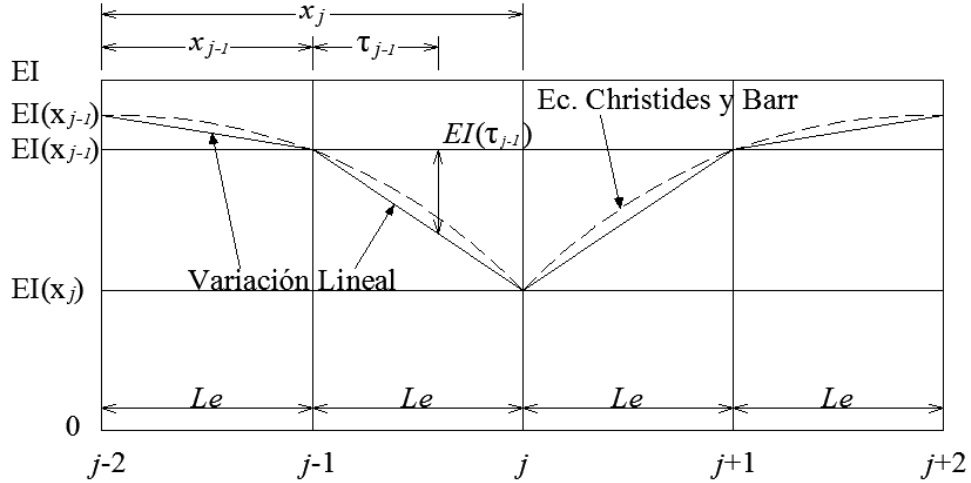


Fig. 3.1 Variación de la flexibilidad de una viga debido a una grieta en  $x_j$

- Variación lineal propuesta por Salgado
- Ecuación (3.34) propuesta por Christides y Barr

Bajo cada condición, la matriz de rigidez de cada elemento de Euler-Bernoulli con cuatro grados de libertad traslacionales en  $x$  y  $y$  (dos por nodo), usando un modelo de elemento finito se puede expresar como:

$$K_{e,i} = \frac{EI_1}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ & 4L_e^2 & -6L_e^2 & 2L_e^2 \\ \text{Simétrica} & & 12 & -6L_e \\ & & & 4L_e^2 \end{bmatrix} + \frac{Eg_m}{L_e^3} \begin{bmatrix} 6 & 2L_e & -6 & 4L_e \\ & L_e^2 & -2L_e & L_e^2 \\ \text{Simétrica} & & 6 & -4L_e \\ & & & 3L_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Donde  $EI_1$  es la rigidez a la flexión evaluada con la ecuación (3.34) en el primer nodo del elemento;  $L_e$  es la longitud del elemento;  $i$  es el elemento a ser evaluado y  $g_m$  es la diferencia entre la rigidez a la flexión del primer nodo y el segundo nodo del elemento.

En principio, la variación de la flexibilidad causada por las grietas es muy local y no tienen un efecto significativo de influencia en la flexibilidad de las cercanías de las grietas. Por lo tanto, varias grietas se pueden tomar en cuenta en el método modificado de Christides y Barr, calculando el valor mínimo o las flexibilidades en cada lugar a lo largo de la viga.

La matriz de rigidez global de la viga ( $\mathbf{K}$ ) fue formada ensamblando las matrices de rigidez individuales de los elementos ( $\mathbf{K}_{e,i}$ ). Las formas modales y sus correspondientes frecuencias naturales se obtuvieron a partir de la solución del problema de valores propios para el sistema dinámico de vibración libre no amortiguado. Es evidente que a partir de la Figura 3.1 que la suposición de variación lineal de la flexibilidad de la viga se puede considerar válida cuando se considera un número suficiente de elementos finitos en la cercanía de la grieta.

### 3.2 Método de Shifrin y Ruotolo

En este método (Shifrin, 1998), las frecuencias naturales y las formas modales correspondientes son obtenidas usando resortes de rotación sin masa para simular la presencia de grietas. El método conduce a un sistema de  $(n + 2)$  ecuaciones lineales para una viga con  $n$  grietas con un orden determinante más pequeño que otros métodos similares. Como resultado, el esfuerzo computacional requerido para encontrar las frecuencias naturales se reduce considerablemente.

En este enfoque la viga se divide en  $(n + 1)$  vigas conectadas por resortes sin masa que representan las  $n$  grietas. Para una sección transversal uniforme de la viga, la ecuación de oscilaciones transversales armónicas de cada sub-viga puede ser representada por:

$$EIy_j^{iv}(x) - \omega^2 \rho A y_j(x) \quad j = 1, \dots, n + 1, \quad x_{j-1} < x < x_j \quad (3.36)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia natural circular.

Este método calcula las frecuencias naturales introduciendo entre dos elementos condiciones para desplazamiento, momento flexionante y fuerzas cortantes. Las discontinuidades en la rotación del eje de la viga en los lugares de las grietas también se toman en cuenta. Esta condición es necesaria para garantizar el equilibrio entre la transmisión de momento flexionante y rotación de los resortes que simulan la grieta.

$$\left. \begin{aligned}
 y_j(x_j) &= y_{j+1}(x_j); \\
 y_j''(x_j) &= y_{j+1}''(x_j); \\
 y_j'''(x_j) &= y_{j+1}'''(x_j); \\
 y_{j+1}'(x_j) - y_j'(x_j) &= \Delta_j = c_j y_j''(x_j) \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

Donde  $c_j$  son las flexibilidades de los resortes rotacionales. De acuerdo con Rizos *et al.* (1990), para grietas en un solo lado, las flexibilidades pueden ser expresadas como:

$$\begin{aligned}
 c_j &= 5.436h f_{cr}(\delta_j), \\
 f_{cr}(\delta_j) &= 1.86\delta_j^2 - 3.95\delta_j^3 + 16.38\delta_j^4 - 37.23\delta_j^5 + 76.81\delta_j^6 - 126.90\delta_j^7 \\
 &+ 172.00\delta_j^8 - 143.94\delta_j^9 + 66.56\delta_j^{10}
 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Considerando estas suposiciones, la solución del problema se obtiene de las ecuaciones (3.39) a la (3.41):

$$y(x) = y_o(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_j}{2} |x - x_j| \quad (3.39)$$

$$y_o(x) = B_1^* \cos(\lambda x) + B_2 \sin(\lambda x) + B_3 \cosh(\lambda x) + B_4 \sinh(\lambda x)$$

$$+ \frac{\lambda}{4} \sum_{j=1}^n \Delta_j \int_0^x (\sinh(\lambda(x-s)) - \sin(\lambda(x-s))) |s - x_j| ds \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \Delta_i = & -B_1^* c_i \lambda^2 \cos(\lambda x_i) - B_2 c_i \lambda^2 \sin(\lambda x_i) + B_3 c_i \lambda^2 \cosh(\lambda x_i) + B_4 c_i \lambda^2 \sinh(\lambda x_i) \\ & + \frac{c_i \lambda^3}{4} \sum_{j=1}^n \Delta_j M_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.41)$$

Donde de  $B_1$  a  $B_4$  son coeficientes desconocidos;  $n$  es el número de grietas;  $x$  es la distancia medida desde el extremo izquierdo de la viga;  $y$  es la amplitud del desplazamiento de la viga en la posición  $x$ ;  $y'$  y  $y''$  denotan la primera y segunda derivada de  $y$  con respecto a la distancia  $x$ , respectivamente. Las otras variables son definidas como:

$$\lambda^4 = \omega^2 \rho A / (EI) \quad (3.42)$$

$$M_{ij}(\lambda) = \int_0^{x_i} (\sinh(\lambda(x_i - v)) + \sin(\lambda(x_i - v))) |v - x_j| dv \quad (3.43)$$

Donde  $\omega$  es la frecuencia circular;  $A$  es el área de la sección transversal y  $v$  es una variable de transformación.

La solución del sistema lineal de  $n + 4$  ecuaciones dadas por la ecuación (3.41) para  $B_1$  a  $B_4$  y  $\Delta_j$  necesitan la introducción de cuatro ecuaciones más, las cuales son obtenidas de las condiciones frontera de las vigas analizadas, la ecuación (3.39) para  $y_0(x = 0, L)$  y su segunda derivada  $y_0''(x = 0, L)$  en el caso de una viga simplemente apoyada; y  $y_0(x = 0, L)$  y su segunda derivada  $y_0''(x = 0, L)$  en el caso de una viga doblemente empotrada. Finalmente, las frecuencias naturales de una viga agrietada son calculadas de las raíces del polinomio ( $\lambda_1, \dots$  modos) que esta dado del determinante del sistema lineal de ecuaciones  $\mathbf{U}$ .

$$\det([U(\lambda)]) = 0 \quad (3.44)$$

Donde la matriz  $U(\lambda)$  puede ser expresada como sigue:

$$U(\lambda) = \begin{bmatrix} U_{1,1}(\lambda) & U_{1,2}(\lambda) & U_{1,j+2}(\lambda) \\ U_{2,1}(\lambda) & U_{2,2}(\lambda) & U_{2,j+2}(\lambda) \\ U_{i+2,1}(\lambda) & U_{i+2,2}(\lambda) & U_{i+2,j+2}(\lambda) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

### 3.3 Método de Zheng y Kessissoglou

Zheng y Kessissoglou (2004) propusieron un método de elemento finito para calcular el comportamiento dinámico de estructuras agrietadas. En este procedimiento los autores incorporaron el efecto de la distancia entre la grieta y el extremo derecho del elemento. Este efecto fue despreciado en métodos previos basados en elemento finito conduciendo a resultados menos precisos. Este método supera este problema al añadir una matriz general de flexibilidad  $C_{ovl}$  a la matriz de flexibilidades  $C$  como indica la ecuación (3.46).

$$C_{tot} = C + C_{ovl} = \begin{bmatrix} \frac{L_e}{EA} + c_{11} & -c_{12} & -c_{13} \\ -c_{21} & \frac{L_e^3}{3EI} + c_{22} & \frac{L_e^2}{2EI} + c_{23} \\ -c_{31} & \frac{L_e^2}{2EI} + c_{32} & \frac{L_e}{EI} + c_{33} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Los elementos  $c_{ij}$  de la matriz general de flexibilidad son calculados como:

$$c_{ij} = \int_{A_c} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial P_i \partial P_j} dA; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.47)$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{E} [(K_{I1} + K_{I2} + K_{I3})^2 + K_{I2}^2] \quad (3.48)$$

Donde  $K_{I1}$ ,  $K_{I2}$ ,  $K_{I3}$  y  $K_{I4}$  son los factores de intensidad de esfuerzo (SIFs por sus siglas en ingles) de la sección transversal uniforme de la viga para modos fundamentales I y II de la fractura causada por las fuerzas  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ ;  $A_c$  es el área de la sección en la ubicación de la grieta,  $P_i$  y  $P_j$  son las fuerzas en el lado derecho del elemento agrietado.

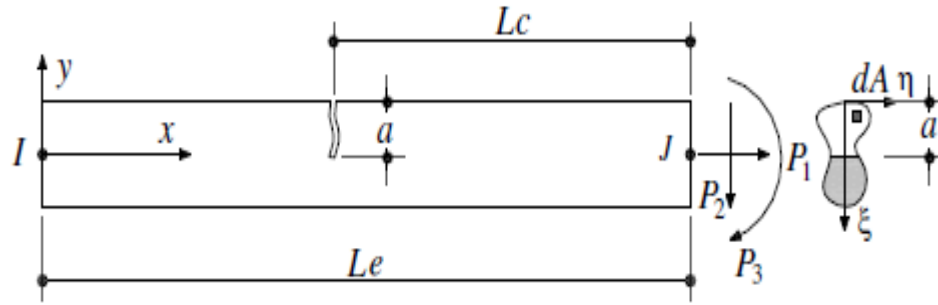


Fig. 3.2 Elemento agrietado y las fuerzas de adopción del método de Zheng

Los SIFs requeridos para este método pueden ser determinados para varias formas de secciones transversales usando el método propuesto por Ricci y Viola (2006). Este procedimiento determina los SIFs basado en la relación entre la energía liberada después de la extensión de la grieta por  $\Delta_a$  y la liberación a la ampliación de la grieta por  $\Delta_w$  (Kienzler y Herrmann, 1986).

$$-t_h \mathcal{G} = \frac{\partial U}{\partial a} = 2\beta_s \frac{\partial U}{\partial w} \quad (3.49)$$

Donde  $t_h$  es el espesor de la viga en la ubicación de la grieta. Para determinar los SIFs es necesario calcular  $\partial U / \partial w$  y estimar el parámetro adimensional  $\beta_s$ .

Kienzler y Hermann (1986) demostró que el cambio correspondiente en la energía de la viga se puede calcular como:

$$\frac{\partial U}{\partial w} = \begin{cases} -\frac{P_1^2}{2EA} \left( \frac{A}{A_c} - 1 \right) & \text{para carga axial} \\ -X \frac{P_2^2}{2GA} \left( \frac{A}{A_c} - 1 \right) & \text{para fuerza cortante} \\ -\frac{P_3^2}{2EI} \left( \frac{I}{I_c} - 1 \right) & \text{para momento flexionante} \end{cases} \quad (3.50)$$

Donde  $G$  es el módulo de cortante y  $X$  es el factor de cortante.

Sustituyendo la ecuación (3.50) y (3.48) en la ecuación (3.49) los SIFs son determinados como sigue:

$$K_{I1} = P_1 \sqrt{\frac{\beta_{sP_1}}{bA} \left( \frac{A}{A_c} - 1 \right)} \quad \beta_{sP_1} = \beta_s \frac{H^*}{E} \quad (3.51)$$

$$K_{I2} = P_2 \times L_c \sqrt{\frac{\beta_{sP_2}}{bI} \left( \frac{I}{I_c} - 1 \right)} \quad \beta_{sP_2} = \beta_s \frac{H^*}{E} \quad (3.52)$$

$$K_{I3} = P_3 \sqrt{\frac{\beta_{sP_2}}{bI} \left( \frac{I}{I_c} - 1 \right)} \quad (3.53)$$

$$K_{II2} = P_2 \sqrt{\frac{X\beta_{sP_2} 2(1+v)}{bA} \left( \frac{A}{A_c} - 1 \right)} \quad \beta_{sP_2} = \beta_s \frac{H^*}{E} \quad (3.54)$$

donde  $H^* = E$  para esfuerzo plano y  $H^* = E/(1 - \nu^2)$  para condiciones de deformación plana y  $\nu$  es la relación de Poisson.

El factor de pendiente  $\beta_s$  puede ser determinado por dos procedimientos: con modelos detallados de elemento finito de la zona agrietada y con especímenes experimentales representando la grieta. Ambos

procedimientos consumen demasiado tiempo y se salen del alcance de la tesis. Afortunadamente, Kienzler y Herrmann (1986) obtuvieron buenos resultados, en muchas aplicaciones, asumiendo  $\beta_s = 1$ . Nobile (2000) determino los SIFs para una viga simplemente apoyada con sección transversal rectangular. Los SIFs son razonables con los determinados por Ricci y Viola (2006) cuando  $\beta_s = 1$ . Además, Dunn *et al.* (1997) obtuvieron el factor de pendiente  $\beta_s$  de un modelo detallado de elemento finito de una viga de acero tipo I sujeta a flexión pura. Ellos determinaron que  $\beta_s$  está en función de relación de la profundidad de la grieta  $\delta = a/h$  esta indicado en la ecuación (3.55).

$$\beta_s = 1.16\delta_1^{-0.374} \quad (3.55)$$

Posteriormente los SIFs se calculan y por lo tanto la matriz general de flexibilidades, por lo que la matriz de un elemento agrietado  $\mathbf{K}_c$  para seis grados de libertad (tres por nodo, como se puede observar en la Fig. 3.2) se obtiene como sigue:

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{L}\mathbf{C}_{tot}^{-1}\mathbf{L}^T; \quad \mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -L_e & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

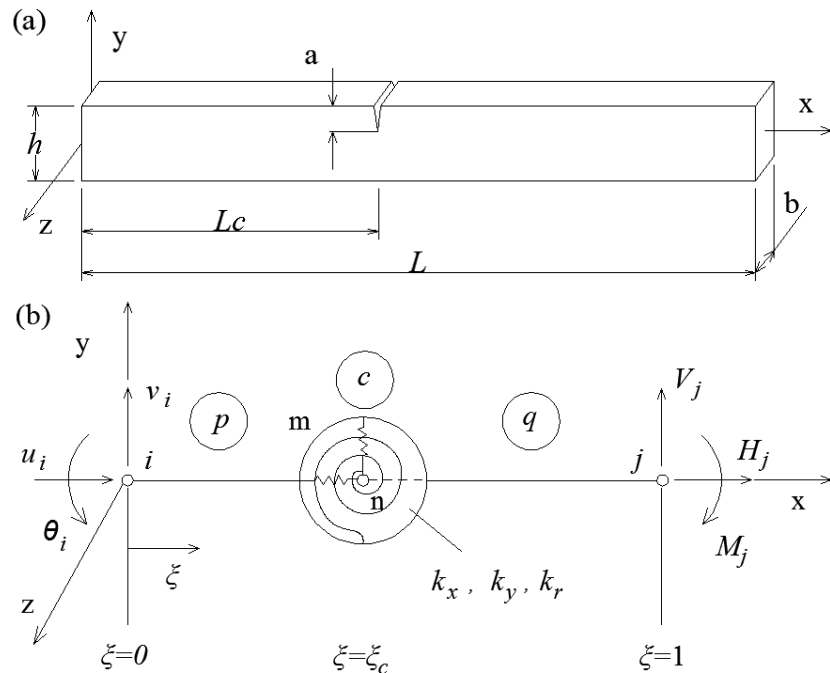
donde el superíndice  $\mathbf{T}$  indica la transpuesta de la matriz.

Se obtuvieron las frecuencias naturales de la viga usando un procedimiento convencional de valores propios, el cual requiere una matriz de masa de la viga directamente determinada de un modelo numérico. Para calcular las formas modales correspondientes, Zheng y Kessissoglou propusieron nuevas funciones de interpolación que satisfacen las condiciones de flexibilidad local en las ubicaciones de las grietas.

### 3.4 Método de Bouboulas y Anafantis

El objetivo de este método es introducir un elemento viga agrietada para el modelado de estructuras esqueléticas agrietadas, con la característica de que la grieta no se propaga. Basado en el método de rigidez directa, se propone la matriz de rigideces del elemento agrietado. La principal característica de la matriz de rigideces del elemento agrietado es que está en función de la profundidad de la grieta y su posición, y puede describir tanto el estado agrietado y no agrietado del elemento viga.

En la Figura 3.3(a) se muestra un elemento viga con una sección transversal  $b \times h$  y de longitud  $L$ . Una grieta que no se propaga y que siempre permanece abierta de profundidad  $a$  ubicada en distancia  $x = L_c$ . La grieta reduce localmente la rigidez del elemento y perturba la continuidad de los desplazamientos  $u, v$  y la rotación  $\theta$  (Ver Figura 3.3 (b)).



**Fig. 3.3** Viga agrietada (a) Elemento viga con una grieta; (b) Modelo del elemento viga agrietada.

Dos sub-vigas y la sección fracturada componen el elemento mostrado en la Figura 3.3. Cada una de estas sub-vigas  $p$  y  $q$  de longitud  $L_c$  y  $L - L_c$  respectivamente, es similar a un elemento y puede ser representado con la matriz de rigidez de un elemento barra estándar con la sustitución adecuada de su geometría y material. La sección fracturada descrita por la profundidad adimensional  $a_c = a/h$ , distancia  $\xi_c = L_c/L$  puede ser modelada con un elemento  $c$ . Este elemento tiene una longitud cero y está localizado entre los nodos  $m$  y  $n$  los cuales comparten las mismas coordenadas (Ver Figura 3.3 (b)). La flexibilidad o matriz de flexibilidades del elemento en el caso de estructuras en dos dimensiones es:

$$C_c = \begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xr} \\ 0 & c_{yy} & 0 \\ c_{rx} & 0 & c_{rr} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Donde los subíndices  $x$ ,  $y$  y  $r$  corresponden a la fuerza axial  $H$ , fuerza cortante  $V$  y momento flexionante  $M$ , respectivamente (Ver Figura 3.3 (b)). Los coeficientes de la matriz de flexibilidades  $C_c$  son obtenidos por un balance de energía entre el trabajo externo y el trabajo de la fractura. Por razones de simplicidad, los términos  $c_{xr}$  y  $c_{rx}$ , los cuales son responsables del acoplamiento entre la fuerza axial y el momento flexionante no son considerados. Así, la matriz de flexibilidades  $C_c$  se convierte en diagonal. Los coeficientes restantes pueden ser calculados cuando la profundidad de la grieta adimensional  $a_c$  se conoce de antemano. Los coeficientes son proporcionados por las siguientes ecuaciones:

$$c_{xx} = D \int_0^{a_c} x F_{xx}^2(x) dx \quad (3.58)$$

$$c_{yy} = 16DL \int_0^{a_c} x F_{yy}^2(x) dx \quad (3.59)$$

$$c_{rr} = \frac{36D}{h^2} \int_0^{a_c} x F_{rr}^2(x) dx \quad (3.60)$$

Donde  $D = 2\pi(1 - \nu^2)/Ebh^2$ ,  $\nu$  es la relación de Poisson,  $E$  es el módulo de Young,  $b$  y  $h$  son las dimensiones de la sección transversal, la variable ficticia  $x$  toma los valores de  $0 \leq x \leq a_c$ .  $F_{xx}$ ,  $F_{yy}$  y  $F_{rr}$  son funciones de corrección dadas de la siguiente forma:

$$F_{xx}(x) = \sqrt{(2/\pi x) \tan(\pi x/2)} \times \frac{0.752 + 2.02x + 0.37[1 - \sin(\pi x/2)]^3}{\cos(\pi x/2)} \quad (3.61)$$

$$F_{yy}(x) = \frac{1.122 - 0.561x + 0.085x^2 + 0.18x^3}{\sqrt{1-x}} \quad (3.62)$$

$$F_{rr}(x) = \sqrt{(2/\pi x) \tan(\pi x/2)} \times \frac{0.923 + 0.199[1 - \sin(\pi x/2)]^4}{\cos(\pi x/2)} \quad (3.63)$$

Ensamblando las ecuaciones de equilibrio de los elementos  $c$ ,  $p$  y  $q$  forma la ecuación de equilibrio de un elemento agrietado, considerando que los grados de libertad interiores ( $m$  y  $n$ ) están relacionados con los nudos exteriores ( $i$  y  $j$ ); queda la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{11} \\ K_{21}^T & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{p(i)} \\ U_{p(j)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{p(i)} \\ R_{p(j)} \end{Bmatrix} \quad (3.64)$$

O en su forma compacta

$$K_e U = R \quad (3.65)$$

Dado que se eliminan los grados de libertad de los nodos correspondientes  $m$  y  $n$ , la ecuación (3.65) describe un elemento con seis grados de libertad.

Los términos de la matriz de rigidez simétrica  $\mathbf{K}_e$  dependen de la profundidad adimensional  $a_c = a/h$  y de la posición adimensional de la grieta  $\xi_c = L_c/L$ . De este modo se puede formular la matriz con cualquier valor conocido de estas dos variables independientes. Por lo tanto, en el caso de  $a_c = 0$  la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_e$  del elemento presentado se convierte en la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_o$  de un elemento sin daño.

Los elementos de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}_e$  están dados por:

$$K_{11} = K_{p(ii)} + K_{p(im)}ABK_{p(im)}^T \quad (3.65)$$

$$K_{12} = K_{p(im)}AK_{q(nj)} \quad (3.66)$$

$$K_{21} = K_{q(nj)}^T(C_c + CAB)K_{p(im)}^T \quad (3.67)$$

$$K_{22} = K_{q(jj)} + K_{q(nj)}^TCAK_{q(nj)} \quad (3.68)$$

$$A = (-K_{p(mm)} - K_{q(nn)}C_cK_{p(mm)} - K_{p(nn)})^{-1} \quad (3.69)$$

$$B = (K_c + K_{q(nn)})C_c \quad (3.70)$$

$$C = C_c(K_{p(mm)} + K_c) \quad (3.71)$$

Tomando en cuenta que  $K_{c(mm)} = K_{c(nn)} = K_c$ ,  $K_{c(mn)} = K_{c(nm)} = -K_c$ ,  $K_c = C_c^{-1}$ , y  $C_c$  es la matriz diagonal derivada de la ecuación (3.57) despreciando los términos que se encuentran fuera de la diagonal principal.

La matriz de masa concentrada es empleada sin ninguna restricción. La matriz de masa concentrada para una viga bidimensional es:

$$M_0 = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Donde

$$m = \frac{\rho}{420} \begin{bmatrix} 210 & 0 & 0 \\ 0 & 210 & 0 \\ 0 & 0 & -35l^2 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Y  $l$ ,  $\rho$  son la longitud y la densidad del elemento respectivamente. Cuando una grieta de borde que no se propaga en el elemento, la pérdida de masa se considera despreciable. Por lo tanto con la matriz de rigidez y la matriz de masa podemos obtener los parámetros dinámicos como las frecuencias, formas modales, etc. mediante cualquier método de dinámica estructural.

### 3.5 Método de Caddemi y Caliò

En este método (Caddemi y Caliò *et. al.*, 2012) se presenta un nuevo enfoque, orientado a la evaluación de las frecuencias y modos de vibrar de estructuras agrietadas tipo marco. Este enfoque está basado en una solución de forma cerrada, derivada por Caddemi y Caliò (2009), para los modos de vibrar de una viga con múltiples grietas, que posee la misma estructura analítica de la viga sin daño, la cual es una función de solo cuatro constantes de integración, sin importar el número de las secciones transversales agrietadas que existan en la viga.

Con base de las expresiones explícitas proporcionadas para los modos propios se deriva la matriz de rigidez dinámica exacta explícita de la viga de Euler-Bernoulli con múltiples grietas. El conocimiento de la matriz de rigidez dinámica exacta explícita de la viga con múltiples grietas representa un resultado fundamental, ya que permite la evaluación directa de la matriz de rigidez dinámica global de la estructuras tipo marco en la presencia de un número arbitrario concentrado de daños a lo largo de sus miembros. La gran ventaja del enfoque propuesto es que los grados de libertad general de la estructura dañada son exactamente los mismos que los de la estructura

sin daño equivalente, independientemente del número de daños concentrados.

El modelo adoptado en este método está basado en el concepto que una grieta o daño concentrado afecta localmente la rigidez a la flexión de la viga. De acuerdo con el modelo ya considerado por Caddemi y Calò, la ecuación diferencial de movimiento que gobierna a las vigas de sección uniforme con múltiples grietas puede ser escrita como sigue:

$$\left[ E_o I_o \left( 1 - \sum_{i=1}^n \hat{\gamma}_i \delta(x - x_{oi}) u''(x, t) \right) \right]'' + m \ddot{u}(x, t) = 0 \quad (3.74)$$

Donde las primas denotan la diferenciación con respecto a la coordenada espacial  $x$  a lo largo del eje de la viga y el énfasis con los puntos indican la diferenciación con respecto al tiempo  $t$ .  $E_o$  es el módulo de Young,  $I_o$  es el momento de inercia de la sección transversal,  $m$  es la distribución de masa por unidad de longitud. En la ecuación (3.74) las  $n$  singularidades, dadas por las deltas de Dirac centradas en las coordenadas  $x_{oi}, i = 1, \dots, n$ , donde  $n$  representa el número de grietas y los parámetros  $\hat{\gamma}_i, i = 1, \dots, n$ , multiplicando las deltas de Dirac, están directamente relacionados con la rigidez rotacional de un resorte interno equivalente. Introduciendo la coordenada adimensional  $\xi = x/L$ , la ecuación diferencial (3.74) toma la siguiente forma:

$$\left[ \left( 1 - \sum_{i=1}^n \gamma_i \delta(\xi - \xi_{oi}) \right) u''(\xi, t) \right]'' + \frac{mL^4}{E_o I_o} \ddot{u}(\xi, t) = 0 \quad (3.75)$$

La función de desplazamiento  $u(\xi, t)$ , que aparece en la ecuación (3.75), la cual se da con el producto de dos funciones, la función  $\phi(\xi)$

depende de la coordenada espacial  $\xi$ , y la función  $y(t)$  depende del tiempo  $t$  como sigue:

$$u(\xi, t) = y(t)\phi(\xi) \quad (3.76)$$

y la sustitución de la función de desplazamiento en forma separada dada por la ecuación (3.76), en la ecuación (3.75) da las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad (3.77)$$

$$\left[ \left( 1 - \sum_{i=1}^n \gamma_i \delta(\xi - \xi_{oi}) \right) \phi''(\xi) \right]'' - \omega^2 \frac{mL^4}{E_o I_o} \phi(\xi) = 0 \quad (3.78)$$

Realizando una doble integración con respecto a  $\xi$  al primer término que contiene la distribución de deltas de Dirac, y simplificando con algebra tenemos:

$$\phi^{iv}(\xi) - \alpha^4 \phi(\xi) = B(\xi) \quad (3.79)$$

Donde el parámetro de frecuencia adimensional  $\alpha^4 = \omega^2(mL^4/E_o I_o)$  se ha introducido y la función  $B(\xi)$  recoge todos los términos de los deltas de Dirac y sus derivadas como se indica a continuación:

$$B(\xi) = \left[ \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi^{iv}(\xi) \delta(\xi - \xi_{oi}) + 2 \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi'''(\xi) \delta'(\xi - \xi_{oi}) + \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi''(\xi) \delta''(\xi - \xi_{oi}) \right]$$

La solución explicita de la ecuación (3.79) utilizando la teoría de funciones generalizadas se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 \phi(\alpha, \xi) = & C_1 \left\{ \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i [\sin \alpha(\xi - \xi_{oi}) + \sinh \alpha(\xi - \xi_{oi})] U(\xi - \xi_{oi}) + \sin \alpha \xi \right\} \\
 & + C_2 \left\{ \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n \lambda_i \nu_i [\sin \alpha(\xi - \xi_{oi}) + \sinh \alpha(\xi - \xi_{oi})] U(\xi - \xi_{oi}) + \cos \alpha \xi \right\} \\
 & + C_3 \left\{ \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n \lambda_i \zeta_i [\sin \alpha(\xi - \xi_{oi}) + \sinh \alpha(\xi - \xi_{oi})] U(\xi - \xi_{oi}) + \sinh \alpha \xi \right\} \\
 & + C_4 \left\{ \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n \lambda_i \eta_i [\sin \alpha(\xi - \xi_{oi}) + \sinh \alpha(\xi - \xi_{oi})] U(\xi - \xi_{oi}) + \cosh \alpha \xi \right\} \quad (3.80)
 \end{aligned}$$

Donde  $U(\xi - \xi_{oi})$  es la función escalón de Heaviside y el parámetro  $\lambda_i$  ( $0 \leq \lambda_i \leq \infty$ ) representa la intensidad de la grieta. Donde  $\lambda_i = 0$  corresponde a la inexistencia de grietas y  $\lambda_i = \infty$  corresponde a un daño total de la sección transversal. La relación entre el parámetro  $\lambda_i$  y la rigidez rotacional equivalente a la intensidad de la grieta es:

$$\lambda_i = \frac{E_o I_o}{L} \frac{1}{K_{eq,i}} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.81)$$

donde:

$$K_{eq} = \frac{E_o I_o}{h} \frac{1}{C(\beta)} \quad (3.82)$$

$E_o$  es el módulo de Young.

$I_o$  es el momento de inercia de la sección transversal.

$L$  la longitud de la barra.

$h$  es la altura de la sección transversal.

$C(\beta)$  es la conformidad local adimensional (depende del modelo de grieta utilizado).

$\beta = d/h$  es la relación entre la profundidad de la grieta y la altura de la sección transversal.

De acuerdo con Liebowitz y Claus (1968), Liebowitz *et al.* (1967), Rizos *et al.* (1990), y Okamura *et al.* (1969), la conformidad local adimensional  $C(\beta)$  fue calculada a partir de la función de densidad de energía de deformación y toma la siguiente forma:

$$C(\beta) = 5.346 (1.86\beta^2 - 3.95\beta^3 + 16.375\beta^4 - 37.226\beta^5 + 76.81\beta^6 - 126.9\beta^7 + 172\beta^8 - 143.97\beta^9 + 66.56\beta^{10}) \quad (3.83)$$

Ostachowicz y Krawczuk (1991) propusieron otra expresión para calcular la conformidad local adimensional  $C(\beta)$ :

$$C(\beta) = 6\pi\beta^2(0.6384 - 1.035\beta + 3.7201\beta^2 - 5.1773\beta^3 + 7.553\beta^4 - 7.332\beta^5 + 2.4909\beta^6) \quad (3.84)$$

Debe tenerse en cuenta, que los modelos de grietas basados en la reducción de la rigidez de la viga en las cercanías de la grieta pueden ser aproximadas por un enfoque que agrupa flexibilidad mediante la imposición de la discontinuidad de rotación debido a que la flexibilidad concentrada produce la rotación relativa de las secciones afectadas por la grieta. El modelo propuesto por Bilello (2001) da la siguiente expresión para la determinación de la conformidad adimensional  $C(\beta)$ :

$$C(\beta) = \frac{\beta(2 - \beta)}{0.9(\beta - 1)^2} \quad (3.85)$$

Chondros *et al.* (1998) propuso un modelo de flexibilidad concentrada equivalente a sus modelos continuos usando la siguiente expresión para  $C(\beta)$ :

$$C(\beta) = 6\pi(1 - \nu^2)(0.6272\beta^2 - 2.04533\beta^3 + 4.5948\beta^4 - 9.9736\beta^5 + 20.2948\beta^6 - 33.0351\beta^7 + 47.1063\beta^8 - 40.7556\beta^9 + 19.6\beta^{10}) \quad (3.86)$$

Por lo tanto, la relación entre el parámetro de daño  $\lambda_i$  adoptado para este método y los modelos de grietas clásicas se obtiene al sustituir la ecuación (3.82) en la (3.81).

$$\lambda_i = \frac{h}{L} C(\beta) \quad i = 1, \dots, n \quad (3.87)$$

Además los términos  $\mu_i(\alpha), v_i(\alpha), \zeta_i(\alpha), \eta_i(\alpha)$  que aparecen en la ecuación (3.62) están dados por:

$$\mu_j = \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_i \mu_i [-\sin \alpha(\xi_{oi} - \xi_{oj}) + \sinh \alpha(\xi_{oi} - \xi_{oj})] - \alpha^2 \sin \alpha \xi_{oj} \quad (3.88 a)$$

$$v_j = \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_i v_i [-\sin \alpha(\xi_{oi} - \xi_{oj}) + \sinh \alpha(\xi_{oi} - \xi_{oj})] - \alpha^2 \cos \alpha \xi_{oj} \quad (3.88 b)$$

$$\zeta_j = \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_i \zeta_i [-\sin \alpha(\xi_{oi} - \xi_{oj}) + \sinh \alpha(\xi_{oi} - \xi_{oj})] + \alpha^2 \sinh \alpha \xi_{oj} \quad (3.88 c)$$

$$\eta_j = \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_i \eta_i [-\sin \alpha(\xi_{oi} - \xi_{oj}) + \sinh \alpha(\xi_{oi} - \xi_{oj})] + \alpha^2 \cosh \alpha \xi_{oj} \quad (3.88 d)$$

Las constantes de integración  $C_1, C_2, C_3, C_4$  pueden ser fácilmente evaluadas al imponer las condiciones frontera más relevantes, como la viga simplemente apoyada (PP), viga empotrada (CF), viga doblemente empotrada (CC) y la viga libre de apoyos (FF).

Con el fin de obtener la matriz de rigidez dinámica de una viga con múltiples grietas, dos conjuntos de condiciones frontera tienen que ser especificados; las condiciones de frontera cinemáticas, que se expresa en términos de desplazamientos transversales y las rotaciones, y las condiciones de frontera naturales, que se expresa en términos de fuerzas cortantes y momentos flexionantes.

La matriz de rigidez dinámica  $K$  de la viga de Euler-Bernoulli en presencia de un número arbitrario grietas concentradas se obtiene de la siguiente manera:

$$K = \frac{E_o I_o}{L^2} = \begin{bmatrix} \delta & \theta & -\bar{\delta} & \bar{\theta} \\ \theta & \rho & -\theta^* & \varepsilon \\ -\bar{\delta} & -\theta^* & \delta^* & \hat{\theta} \\ \bar{\theta} & \varepsilon & \hat{\theta} & \hat{\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

donde:

$$\delta = 2 \frac{\alpha^3 [\alpha(cS + sC) + \alpha(Sg_2 + sg_4) + g_2d_4 - g_4d_2 + cd_4 - Cd_2]}{D}$$

$$\theta = \frac{\alpha^2 [2\alpha sS + \alpha(c + C)(g_2 - g_4) + \alpha(s + S)(g_1 + g_3) + (d_1 + d_3)(c - C + g_2 - g_4) + (d_4 - d_2)(s + S + g_1 + g_3)]}{D}$$

$$\bar{\delta} = 2 \frac{\alpha^3 [\alpha(s + S) + d_4 - d_2]}{D}$$

$$\bar{\theta} = 2 \frac{\alpha^3 (C - c + g_4 - g_2)}{D}$$

$$\rho = 2\alpha \frac{\alpha(sC - cS) - \alpha(cg_3 - Cg_1) - d_1(g_3 + S) + d_3(g_1 + s)}{D}$$

$$\theta^* = 2 \frac{\alpha^3 (C - c) + \alpha^2 (d_3 - d_1)}{D}$$

$$\varepsilon = 2\alpha^2 \frac{s - S + g_1 - g_3}{D}$$

$$\delta^* = \frac{[-\alpha^3 (C + c) + q_1 - q_3][\alpha(s + S) + d_4 - d_2] + [-\alpha^3 (s - S) + q_2 - q_4][\alpha(c - C) + d_1 - d_3]}{D}$$

$$\hat{\theta} = \frac{(C - c + g_4 - g_2)[\alpha^3 (C + c) - q_1 + q_3] - (S - s + g_3 - g_1)[\alpha^3 (S - s) - q_2 + q_4]}{D}$$

$$\hat{\rho} = \frac{(C - c + g_4 - g_2)[\alpha^2 (s + S) + p_1 - p_3] + (S - s + g_3 - g_1)[\alpha^2 (C + c) - p_2 + p_4]}{D}$$

El denominador  $D$  que aparece en los elementos de la matriz de rigidez está dado por:

$$D = 2\alpha(1 - cC) + g_1(d_4 - d_2) + g_2(d_1 - d_3) + g_3(d_2 - d_4) + g_4(d_3 - d_1) \\ -s[d_2 - d_4 + \alpha(g_3 - g_1)] - c[d_3 - d_1 + \alpha(g_4 - g_2)] \\ -S[d_4 - d_2 + \alpha(g_3 - g_1)] - C[d_1 - d_3 + \alpha(g_2 - g_4)]$$

donde:

$$s = \sin \alpha; \quad c = \cos \alpha; \quad S = \sinh \alpha; \quad C = \cosh \alpha$$

$$g_k = \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_{ki}(\alpha) S_i(\alpha, 1) \quad k = 1, \dots, 4$$

$$d_k = \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_{ki}(\alpha) S'_i(\alpha, 1) \quad k = 1, \dots, 4$$

$$p_k = \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_{ki}(\alpha) S''_i(\alpha, 1) \quad k = 1, \dots, 4$$

$$q_k = \frac{1}{2\alpha} \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_{ki}(\alpha) S'''_i(\alpha, 1) \quad k = 1, \dots, 4$$

$$\varepsilon_{1i} = \mu_i(\alpha); \quad \varepsilon_{2i} = v_i(\alpha); \quad \varepsilon_{3i} = \zeta_i(\alpha); \quad \varepsilon_{4i} = \eta_i(\alpha)$$

$$S(\alpha, 1) = \sin \alpha(1 - \xi_{oi}) + \sinh \alpha(1 - \xi_{oi});$$

$$S'(\alpha, 1) = \alpha \cos \alpha(1 - \xi_{oi}) + \alpha \cosh \alpha(1 - \xi_{oi});$$

$$S''(\alpha, 1) = -\alpha^2 \sin \alpha(1 - \xi_{oi}) + \alpha^2 \sinh \alpha(1 - \xi_{oi});$$

$$S'''(\alpha, 1) = -\alpha^3 \cos \alpha(1 - \xi_{oi}) + \alpha^3 \cosh \alpha(1 - \xi_{oi});$$

Con esto la matriz de rigidez dinámica global de un marco compuesto por barras con grietas concentradas, se puede obtener por un procedimiento de ensamble estándar, haciendo uso de la matriz de rigidez de cada barra dañada. El uso de las funciones de rigidez dinámica relacionadas con el algoritmo de Wittrick-Williams tiene la ventaja de proporcionar soluciones exactas, a diferencia de las soluciones aproximadas que se pueden obtener por el método de elementos finitos.

### 3.6 El problema de la grieta que abre y cierra

El estudio de estructuras agrietadas se complica cuando se anexa el problema de la grieta que abre y cierra. El comportamiento global de una

viga con daño de este tipo, es no lineal, debido a la apertura y cierre de las grietas durante la respuesta dinámica; sin embargo, puede ser considerado como una secuencia de fases lineales cada una de ellas caracterizadas por diferentes números y las posiciones de las grietas en estado abierto. Los cambios de frecuencias de vibración debido a la presencia de grietas que abren y cierran son más pequeños en comparación con las grietas que permanecen abiertas.

El efecto de las grietas que abren y cierran en la respuesta a la vibración de elementos estructurales dañados fue descubierto hace mucho. Kirmscher (1994) reportó que si la grieta de una viga de concreto se llena de suciedad o material cristalizado, o es lo suficientemente estrecha como para que la interferencia ocurra, el efecto sobre la frecuencia natural es la misma que la de una grieta de menor profundidad. Esta observación fue la base para una investigación más sistemática de los efectos de la apertura y cierre de las grietas.

Actis y Dimarogonas (1989), usaron el método del elemento finito para el estudio de una viga con daño simplemente apoyada. La grieta fue asumida como una grieta que abre y cierra. Ellos asumieron que cuando el momento flexionante cambia de signo, la grieta cambia de abierto a cerrado, o de cerrado a abierto. Cuando la grieta está abierta, una rigidez adicional  $-\delta K$  podría ser introducida. Por lo que, la ecuación de movimiento de un elemento estructural sin daño podría cambiar como:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K - \delta K]\{u\} = \{F\} \quad (3.90)$$

Donde  $[M]$  es la matriz de masa,  $[K]$  es la matriz de rigidez,  $\{u\}$  es el vector de desplazamientos y  $\{F\}$  es el vector de cargas.

Para grietas que abren y cierran se necesita un modelo lineal de resortes, ya que para una grieta de cierta profundidad, la constante de resorte equivalente se mantiene igual para ambas direcciones de carga. En

el caso de la grieta que abre y cierra durante la vibración, las constantes de resorte que aparecen deben ser diferentes cuando abren o cierran.

Ibrahim (1987) presentó una técnica de graficas enlace para modelos de grietas como un resorte torsional con dos constantes de resorte, una cuando está abierta y otra cuando está cerrada. Qian (1990) investigó los efectos de la apertura y cierre de la grieta sobre el comportamiento dinámico de una viga en cantiléver usando un modelo de elemento finito para el miembro agrietado. Un método numérico y una interpolación de Hermita fueron introducidos para la solución resultando ecuaciones de movimiento no lineales.

Bayly (1996) y Happawana (1991) estudiaron los efectos de la magnitud de las perturbaciones sobre la localización de las formas modales para sistemas de vibración no lineales. Aplicando la técnica de perturbación regular a la ecuación característica del sistema, obtuvieron las expresiones algebraicas para los valores propios como una serie de potencias en el pequeño parámetro o perturbación con una precisión aceptable. Shen y Chu (1992) investigaron la existencia de las grietas de fatiga por la excitación de las estructuras en diferentes frecuencias y usando un estudio numérico para el análisis de la respuesta.

Chondros y Dimarogonas *et. al.* (2001) usaron la teoría de vigas agrietadas para la predicción de los cambios de frecuencias en una viga simplemente apoyada con una grieta que abre y cierra. En esta investigación se asume que se realizó para un sistema lineal paso a paso. Este modelo de grieta solo tiene dos estados, cuando está totalmente abierta y cuando está completamente cerrada, y la frecuencia no depende de su amplitud. También se asume que la transición de abierto a cerrado ocurre a su vez que la viga regresa estado sin deformar.

Caddemi y Calìò *et. al.* (2010) estudiaron la respuesta dinámica de una viga de Euler-Bernoulli en presencia de múltiples grietas concentradas que abren y cierran. En el estudio la respuesta no lineal de una viga que tiene

grietas que abren y cierran se evaluó para determinar las propiedades modales exactas de una viga en fases lineales.

Debido al avance realizado en los últimos años sobre la presencia de grietas que abren y cierran, es necesario tomar en cuenta el efecto que producen este tipo de grietas para poder tener una mejor precisión en los resultados de parámetros modales de la respuesta dinámica de estructuras para mejorar los métodos de detección de daños.

### **3.7 Ventajas y desventajas de los métodos mencionados**

El método de Christides y Barr modificado es el más simple de aplicar pero también el menos preciso. El método de Shifrin y Routulo da resultados más exactos pero presenta dificultades cuando se obtiene la respuesta dinámica de la estructura con muchos grados de libertad y múltiples grietas. El método de Zheng y Kessissoglou tiene la ventaja de dar los resultados tan precisos como el método de Shifrin e incluso con varios grados de libertad y número múltiple de grietas, también el procedimiento es fácil de implementar en un programa conceptual y poder evaluar estructuras más complejas. El método de Boubola y Anafantis utiliza la rigidez local para simular el comportamiento de una grieta en un elemento barra, una ventaja de este método es que se puede desarrollar un método estructural matricial a partir de un programa de cómputo, una desventaja que presenta el método es que fue desarrollado para una grieta por elemento lo cual limita el alcance que se quiere obtener. El método de Caddemi y Caliô también utiliza la rigidez local para modelar la grieta, con la ventaja que se puede incluir todas las grietas que sean necesarias dentro del análisis para la obtención de los parámetros dinámicos y para cualquier tipo de estructuras, el problema es que como se resuelve con cálculo diferencial se tiene que encontrar las constantes de integración para cada diferente elemento frontera, lo cual se hace tedioso hasta cierto punto. Con

lo anterior se puede llegar a la conclusión que el mejor método para realizar la simulación dinámica de edificios agrietados es el método de Zheng y Kessissoglo.

# Capítulo 4

## Simulación dinámica de edificios agrietados

En este capítulo se llevará a cabo la evaluación del método propuesto de simulación dinámica. Los resultados serán comparados con otros métodos para validar su precisión con diferentes modelos.

### 4.1 Propuesta para la simulación de edificios agrietados

El análisis de edificios agrietados se realizó usando modelos reticulares con elementos barra (tanto en vigas como en columnas). Los parámetros modales (frecuencias y formas modales) de edificios agrietados se obtuvieron mediante la modificación del procedimiento propuesto por Zheng y Kessissoglou (2004), el cual fue descrito en el Capítulo 3. En este trabajo, el procedimiento antes mencionado se generalizó para estructuras con hasta seis grados de libertad por nodo. Para lo cual, la matriz de flexibilidad total para 6 grados de libertad de una barra con una grieta abierta se determina mediante la ecuación (4.1).

$$C_{ovl} = \begin{bmatrix} c_{11} & -c_{12} & -c_{13} & -c_{14} & -c_{15} & -c_{16} \\ -c_{21} & c_{22} & -c_{23} & -c_{24} & -c_{25} & c_{26} \\ -c_{31} & -c_{32} & c_{33} & -c_{34} & c_{35} & -c_{36} \\ -c_{41} & -c_{42} & -c_{43} & c_{44} & -c_{45} & -c_{46} \\ -c_{51} & -c_{52} & c_{53} & -c_{54} & c_{55} & -c_{56} \\ -c_{61} & c_{62} & -c_{63} & -c_{64} & -c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \quad (4.1a)$$

$$C_{in} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^3}{3EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & \frac{L^3}{3EI} & L & \frac{L^2}{2EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{EI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L^2 & GJ & L & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{3EI} & 0 & \frac{L}{EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \quad (4.1b)$$

$$C_{tot} = C_{in} + C_{ovl} \quad (4.1)$$

donde  $C_{tot}$  es la matriz de flexibilidades total,  $C_{in}$  es la matriz de flexibilidades del elemento intacto (sin daño),  $C_{ovl}$  es la matriz de flexibilidades general con daño y los elemento de la matriz de flexibilidad general con daño se calculan de:

$$c_{ij} = \int_{A_c} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial P_i \partial P_j} dA; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.2)$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{E} \left[ (K_{I1} + K_{I2} + K_{I3} + K_{I5} + K_{I6})^2 + (K_{II2} + K_{II3})^2 + \frac{1 + \nu}{E} K_{III4}^2 \right] \quad (4.3)$$

siendo  $K$  los Factores de Intensidad de Esfuerzos (SIFs, por sus siglas en ingles) de la sección transversal uniforme de una viga para los modos fundamentales de fractura I, II y III causados por las fuerzas  $P_1, P_2, \dots, P_6$ .  $A_c$ ,  $E$  y  $\nu$  son el área de la sección transversal agrietada, el módulo de Young y el coeficiente de Poisson del material, respectivamente. Las fuerzas  $P_i$  y  $P_j$  de la ecuación (4.2), son las que están actuando sobre el lado derecho del elemento mostrado en la Figura 4.1.

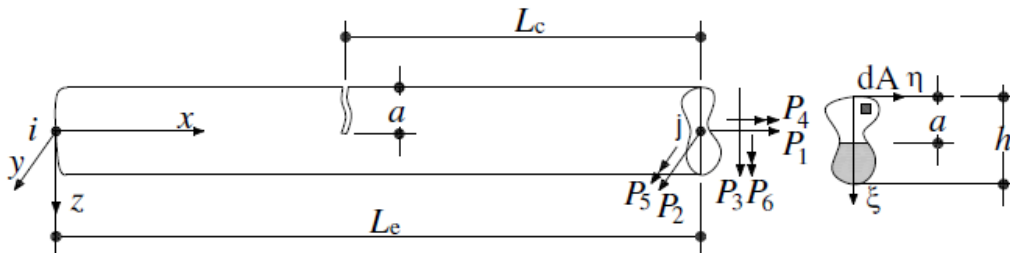


Fig. 4.1 Elemento agrietado y las fuerzas actuantes en este procedimiento.

Los SIFs se determinaron de acuerdo con el procedimiento propuesto por Ricci y Viola (2006) a través de ecuaciones 4.4 a la 4.8:

$$K_{I1} = P_1 \sqrt{\frac{\beta_s P_1}{bA} \left( \frac{A}{A_c} - 1 \right)}; \quad (4.4)$$

$$K_{I2,3} = P_{2,3} L_c \sqrt{\frac{\beta_s P_{2,3}}{bI_{z,y}} \left( \frac{I_{z,y}}{I_{cz,y}} - 1 \right)}; \quad (4.5)$$

$$K_{I5,6} = P_{5,6} \sqrt{\frac{\beta_s P_{5,6}}{bI_{z,y}} \left( \frac{I_{z,y}}{I_{cz,y}} - 1 \right)}; \quad (4.6)$$

$$K_{II2,3} = P_{2,3} \sqrt{\frac{X \beta_s P_{2,3} 2(1 + \nu)}{bA} \left( \frac{A}{A_c} - 1 \right)}; \quad (4.7)$$

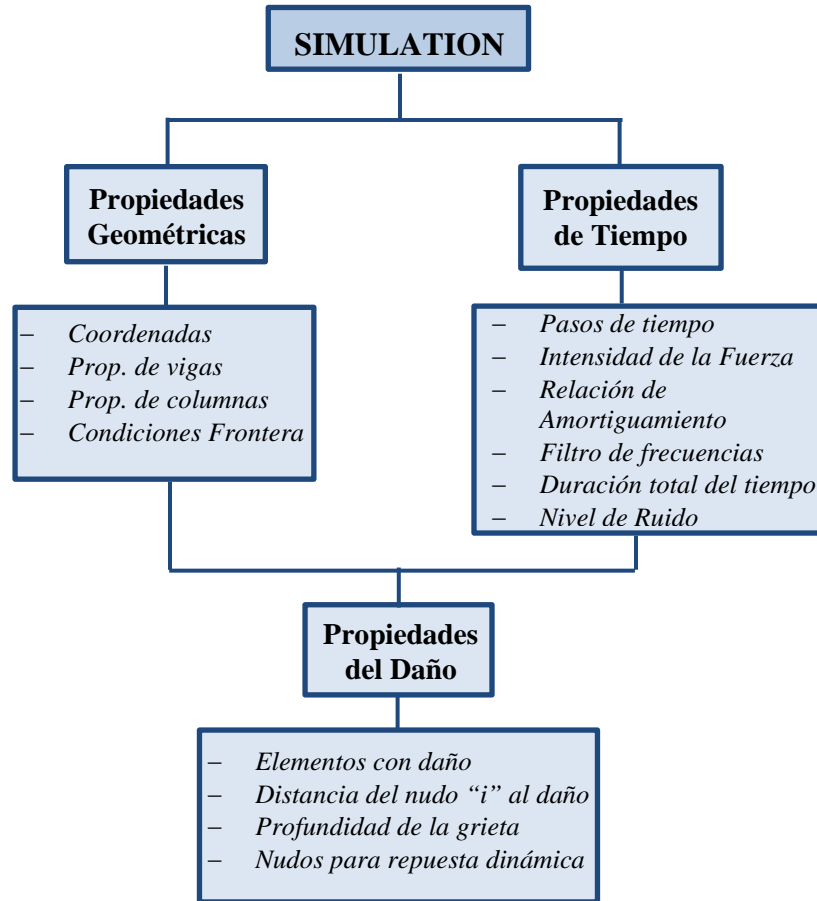
$$K_{III4} = P_4 \sqrt{\frac{\beta_s P_4}{bJ} \left( \frac{J}{J_c} - 1 \right)}; \quad (4.8)$$

Donde  $\beta_s$  son los factores de pendiente,  $I$  es el momento de inercia,  $J$  es el momento polar de inercia,  $b$  es el ancho de la sección transversal,  $X$  es el factor de cortante y el subíndice  $c$  indica las propiedades de la sección agrietada. Para una mejor explicación de este método puede consultarse el Capítulo 3.

Después de calcular los parámetros modales, la respuesta dinámica del edificio agrietado se determina usando el algoritmo recursivo de orden superior propuesto por Wilson (2002).

## 4.2 Desarrollo del algoritmo del método de simulación

El algoritmo de simulación propuesto en este trabajo, el cual fue nombrado “simulation”, consta principalmente de tres secciones (*Propiedades Geométricas*, *Propiedades de Tiempo* y *Propiedades del Daño*), las cuales se muestran en la Figura 4.2 y en la cual se describe brevemente el proceso programación del método de simulación.



**Fig. 4.2 Diagrama de método de simulación.**

El método de simulación propuesto para analizar edificios agrietados se implementó usando la plataforma de Matlab<sup>®</sup>. El proceso empleado para su programación se enlista en los siguientes pasos:

- Se obtienen las propiedades geométricas de los elementos barra y sus coordenadas.
- Si existe un elemento barra agrietada se calculan sus propiedades geométricas con daño.
- Con las propiedades de las barras (con daño o sin daño) se calculan las matrices de rigidez y de masas.
- Se genera una fuerza aleatoria a base de una distribución normal con un rango de intensidades determinado por un análisis de viento.

- Se realiza un análisis modal de la estructura.
- Con los parámetros modales y utilizando el algoritmo recursivo de orden superior propuesto por Wilson (2002) se calcula su respuesta dinámica (aceleración, velocidad y desplazamiento).
- Se grafican los parámetros modales con daño o sin daños, según sea el caso.

El objetivo principal de este método de simulación es determinar parámetros dinámicos fiables de edificios agrietados que puedan ser utilizados para conocer con mayor precisión su integridad estructural mediante el uso de técnicas avanzadas de detección de daños.

### 4.3 Comparación con otros métodos de simulación

Para validar el método de simulación propuesto se compararon los parámetros dinámicos de otros métodos de simulación en tres distintos modelos propuestos. El primero modelo es una viga empotrada en un extremo y libre en el otro, en la cual se analiza el efecto de una grieta fija y la otra móvil a lo largo de toda la barra, este modelo fue empleado por Shifrin y Ruotolo (1998) para validar su método. En el segundo modelo se muestra una viga simplemente apoyada en la cual se evalúan sus parámetros dinámicos cuando se tiene una grieta abierta cambiando a diferentes posiciones a lo largo de la viga con diferente relación de profundidad, este modelo fue propuesto por Law y Lu (2005). Por último, se compararon los parámetros dinámicos con una prueba experimental de un marco de concreto reforzado con acelerómetros en distintas posiciones, este modelo fue empleado por Bui y Mommessin (2014).

#### 4.3.1. Viga empotrada-libre, Shifrin y Ruotolo (1998)

En este caso se analiza una viga de  $L = 0.80$  m que esta empotrada en un extremo y libre en el otro, a la cual se le simularon dos grietas. La primera grieta será de una profundidad de  $a_1 = 2$  mm y a una distancia de  $x_1 = 0.12$  m a partir del extremo empotrado y la segunda grieta variará de

posición desde el extremo empotrado hasta el extremo libre con una profundidad de 2 mm (Ver Fig. 4.3).

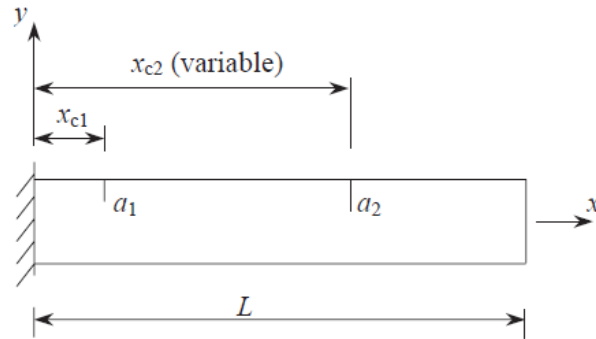


Fig. 4.3 Viga en cantiléver con una grieta fija y una móvil.

La viga en cantiléver bajo análisis cuenta con las siguientes propiedades: longitud  $L = 0.80$  m, sección transversal rectangular con un ancho de  $b = 0.02$  m y una altura de  $h = 0.02$  m, un módulo de Young  $E = 2.1 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>, con una densidad del material de  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>.

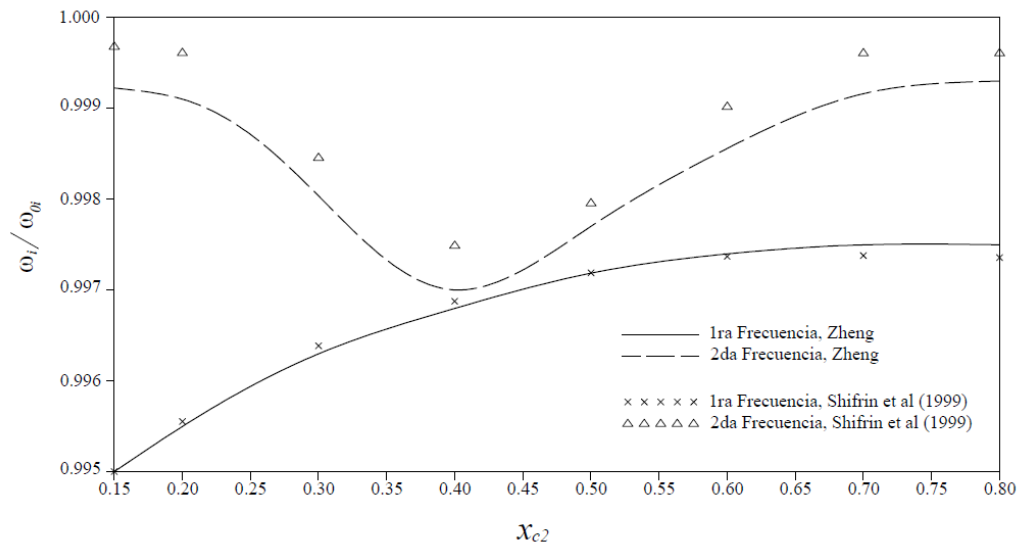


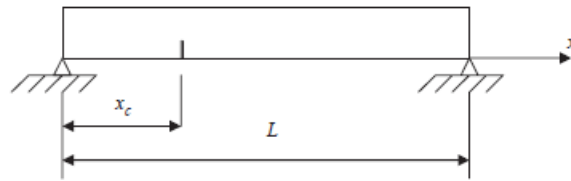
Fig. 4.4 Relación de frecuencias variando la posición de la grieta.

Como se puede observar en la Fig. 4.4 en la primera frecuencias el método desarrollado Zheng generalizado (implementado en el presente trabajo) da resultados muy cercanos a los desarrollados por Shifrin (1999). En el segundo modo de frecuencias existe un poco de diferencia en los

valores obtenidos con el método de Zheng, por lo que podemos concluir que es un método más sensible en el segundo modo a los cambios de rigidez que el método de Shifrin (1999).

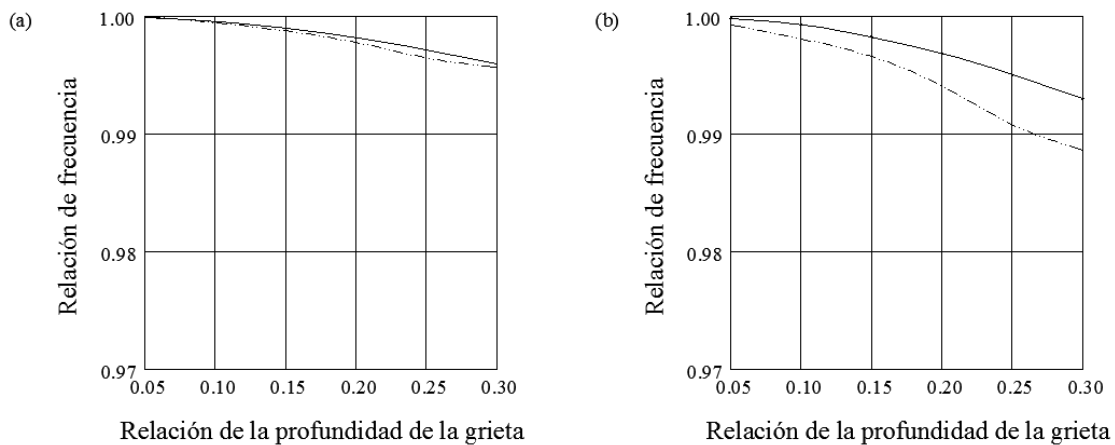
### 4.3.2 Viga simplemente apoyada, Law y Lu (2005)

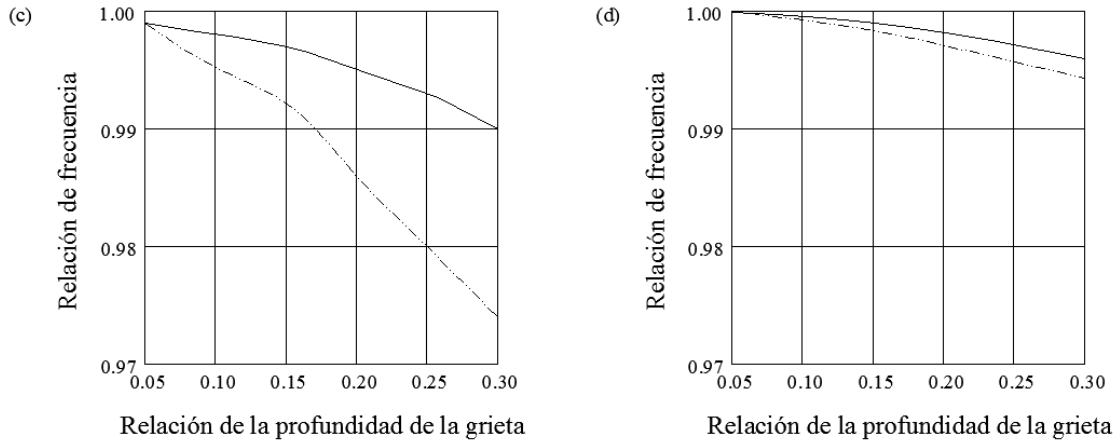
Para el modelo de la viga simplemente apoyada (*Ver Fig. 4.5*) se comparó la relación entre la frecuencia fundamental con daño entra la frecuencia fundamental sin daño con diferentes relaciones de profundidad de grieta de 0.05 a 0.30 en diferentes distancias  $xc_1 = 4$  m,  $xc_2 = 7$  m,  $xc_3 = 15$  m y  $xc_4 = 25$  m. La viga cuenta con las siguientes propiedades: longitud  $L = 30$  m, sección transversal rectangular con un ancho de  $b = 0.6$  m y una altura de  $h = 1$  m, un módulo de Young  $E = 5 \times 10^{10}$  N/m<sup>2</sup> y con una densidad del material por longitud de  $\rho A = 5 \times 10^3$  kg/m.



**Fig. 4.5 Modelo de viga simplemente apoyada con daño.**

En Figura 4.5 se muestra la comparación de los resultados del modelo propuesto por Law y Lu (2005) con el método de simulación propuesto.



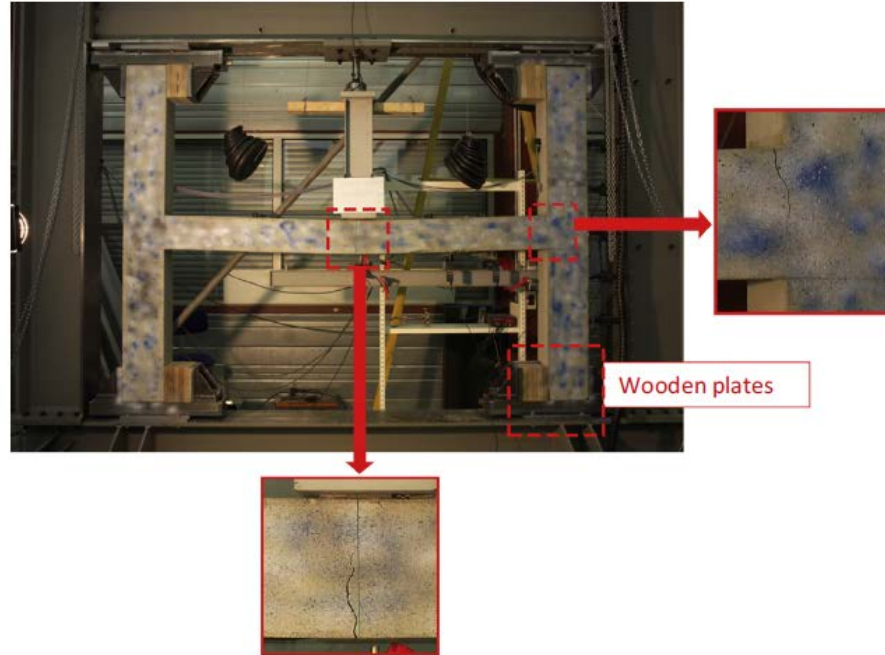


**Fig. 4.6 Variación de la frecuencia fundamental correspondiente a diferentes posiciones de la grieta (- - - Law y Lu, —Zheng, (a)  $x_c=4m$ , (b)  $x_c=7m$ , (c)  $x_c=15m$ , (d)  $x_c=25m$ .**

A partir de la Fig. 4.6 se puede concluir que cerca de los apoyos los dos métodos de simulación se comportan de manera similar ya que no se nota gran diferencia entre las relaciones de frecuencias fundamentales, en cambio al mover el daño al centro del claro de la viga, el método de simulación de Zheng no se nota tan sensible como en el método de simulación de Law y Lu (2005).

#### 4.3.3 Marco de concreto reforzado, Bui y Mommessin (2014)

En este modelo se compararon los resultados de una prueba experimental de un marco de concreto reforzado con daño y los parámetros dinámicos de dicho marco empleando el método de simulación propuesto. El marco de concreto reforzado se compone de dos columnas de 2 m de longitud con una sección transversal de 20 x 25 cm y una viga de 2.27 m de longitud con sección transversal de 20 x20 cm.



**Fig. 4.7 Marco de concreto reforzado con daño.**

El daño del marco de concreto reforzado se encuentra en el centro y en los extremos de la viga como se muestra en la Fig. 4.7 con una profundidad de 100 mm, con una resistencia a la compresión del concreto de 22 MPa, el módulo de Young de 20 GPa y con una densidad del material de  $\rho = 24 \text{ KN/m}^3$ .

Escenario	Frecuencias (Hz)		
	f 1	f 2	f 3
<b>Prueba Experimental</b>	73.20	85.50	195.30
<b>M.E.F.</b>	60.87	83.10	188.70
<b>Zheng Generalizado</b>	77.52	121.18	211.68

**Tabla 4.1 Primeras tres frecuencias en diferentes formas de simulación.**

En la Tabla 4.1 podemos observar que existen diferencias entre los tres diferentes formas de simulación dinámica, la prueba experimental, por método de elemento finito y Zheng generalizado.

## Capítulo 5

# Implementación del método de simulación dinámica en un edificio agrietado

---

En esta sección se llevó a cabo la simulación dinámica de un edificio de concreto reforzado agrietado. El daño se simuló en las vigas principales mediante grietas verticales. Las grietas se localizaron en algunas vigas cerca de los apoyos y en otras al centro del claro. Estas grietas representan el daño causado por un sismo de gran magnitud. Se eligió este modelo de edificio por la facilidad de modelación en la implementación del método de simulación dinámica. La respuesta dinámica del edificio agrietado se determinó usando el procedimiento propuesto por Zheng y Kessissoglou generalizado.

### 5.1. Características y propiedades del edificio agrietado a evaluar

El edificio adoptado está estructurado a base de marcos rígidos de concreto reforzado y con sistemas de piso a base de losas macizas que trabajan como un diafragma rígido, la cimentación del edificio es superficial. El edificio está localizado en la ciudad de Veracruz sobre un suelo arenoso competente para la descarga que el edificio transmite. Este edificio fue diseñado conforme a los estándares del código del ACI (2005) y las recomendaciones de los manuales de Comisión Federal de Electricidad (2008) para el diseño por sismo y por viento. Las secciones transversales de los elementos vigas y columnas son de 25x50 cm y de 50x50 cm respectivamente, con un  $f'c$  de 25 MPa y un módulo de elasticidad  $E=22000$  MPa como se puede observar en la Figura 5.1 y la geometría del edificio se muestra en la Figura 5.2. También se consideró que el edificio es un modelo lineal-lineal, es decir que existe linealidad material y geométrica.

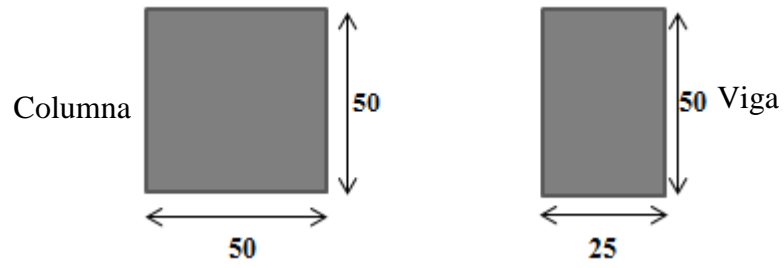
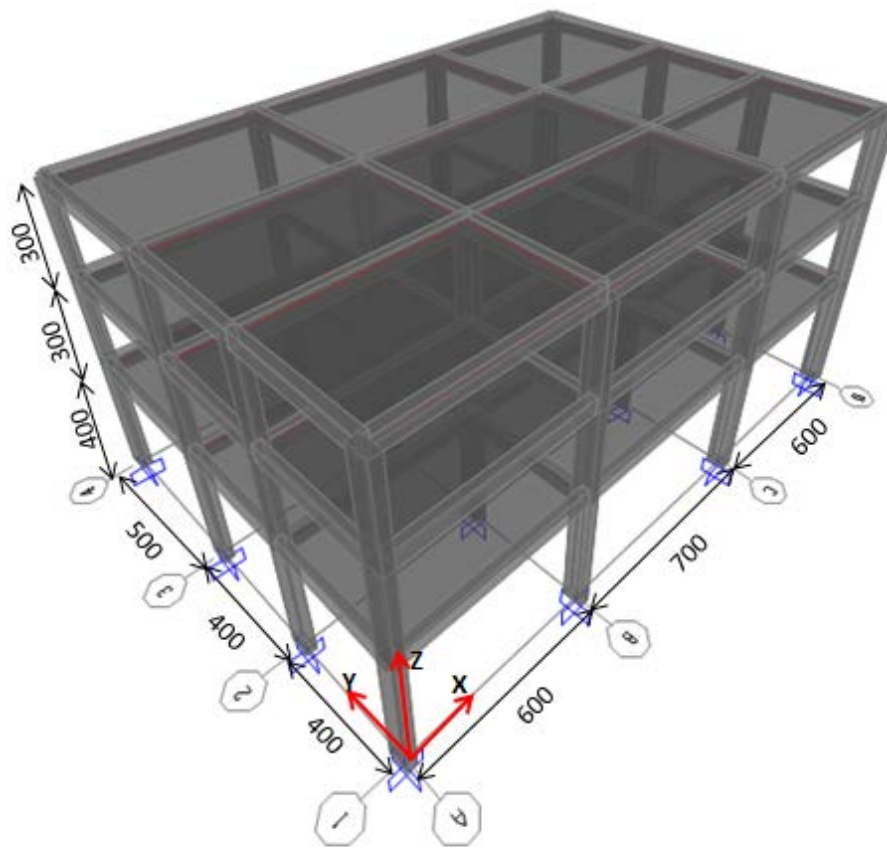
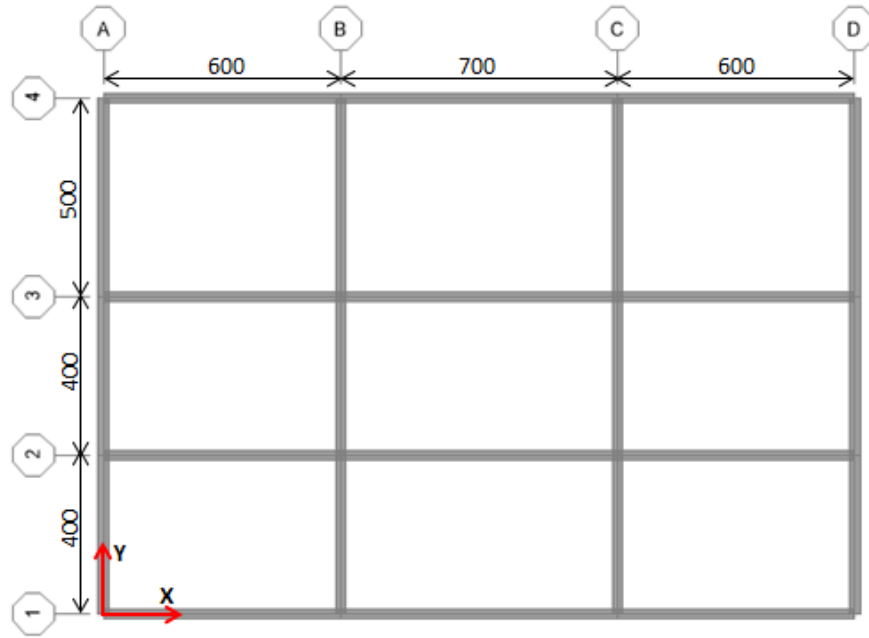


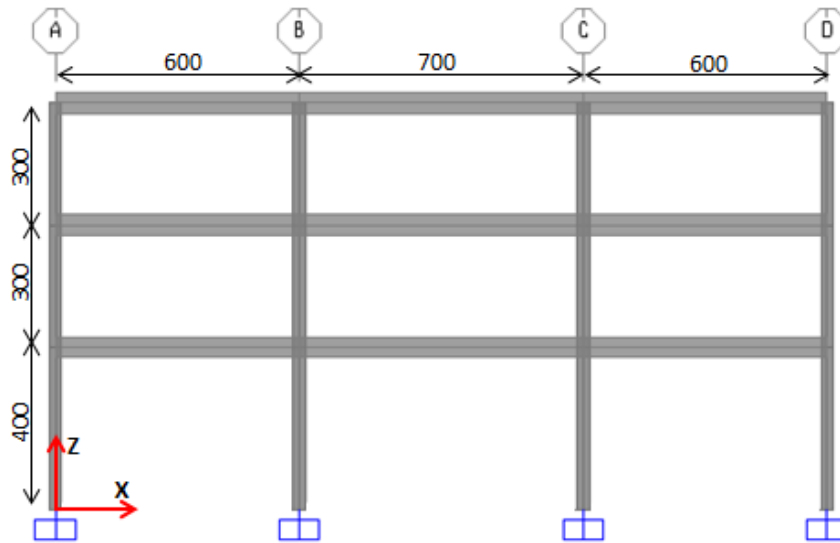
Fig. 5.1 Sección transversal de columnas y vigas (cotas en cm).



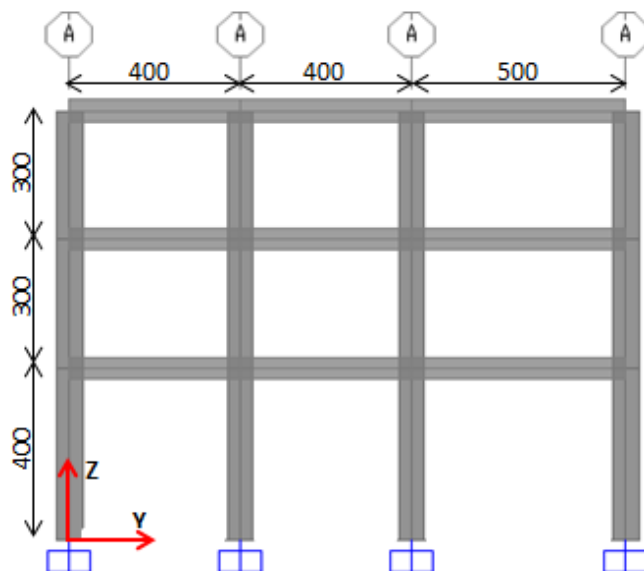
EDIFICIO DE ANALISIS EN 3D



PLANTA EN NIVELES DEL 1 AL 3 (TIPO)



MARCO TIPO DEL EJE "X"



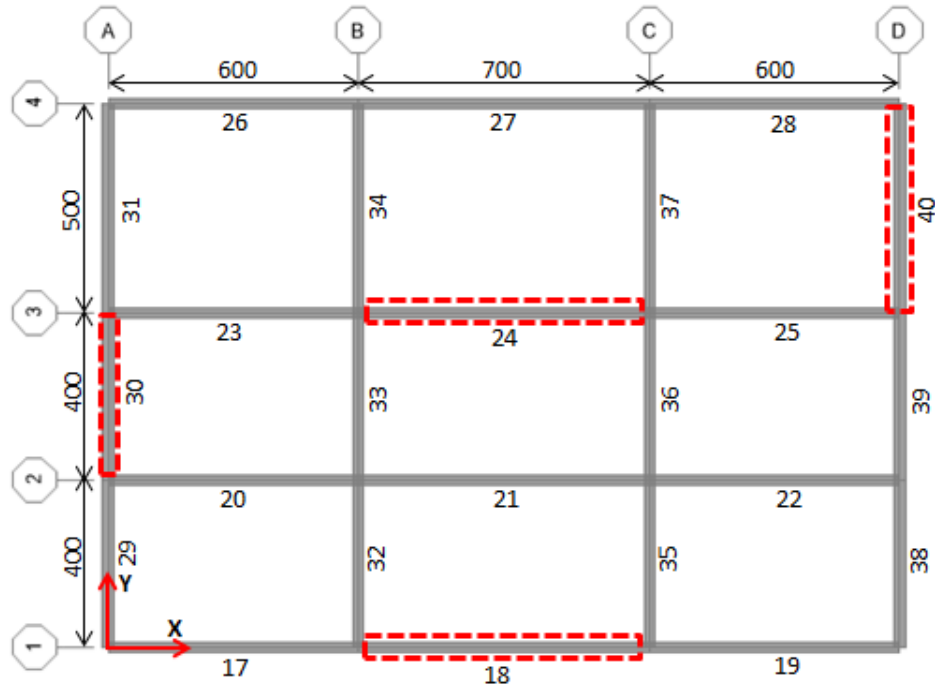
**MARCO TIPO DEL EJE "Y"**

**Fig. 5.2 Geometría del edificio de concreto reforzado a evaluar (cotas en cm).**

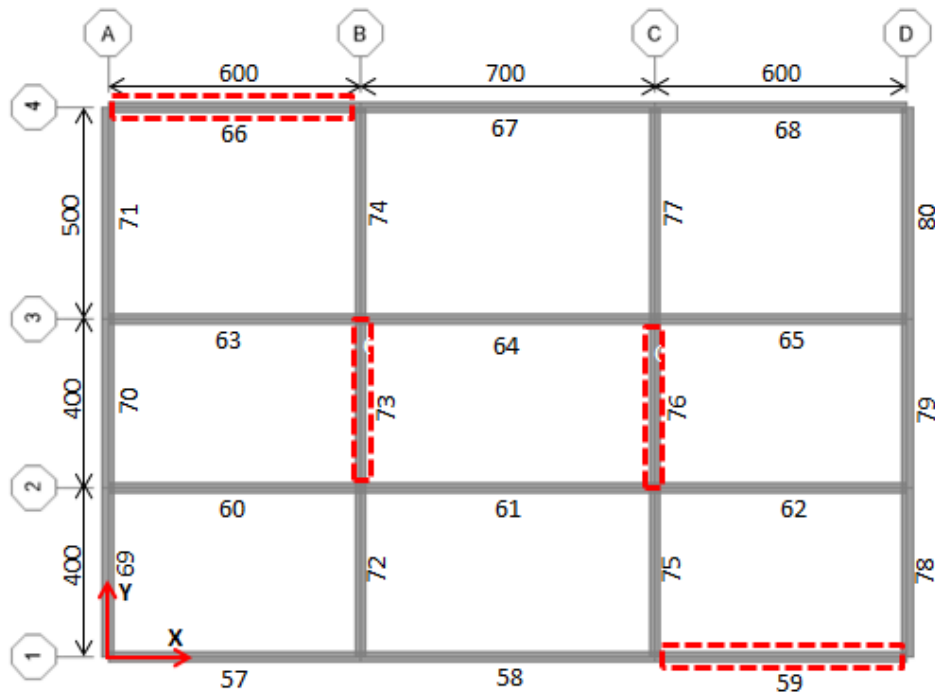
### **5.2. Localización de las grietas en los elementos estructurales**

El diseño del edificio fue hecho en base a la teoría de columna fuerte - viga débil, por lo cual el edificio no llegó al colapso y el daño más severo que recibió fue en las vigas, como se muestra en la Figura 5.3. La mayoría de las grietas marcadas están en los extremos y al centro del claro, ya que es donde se presentan los mayores momentos debido a sus condiciones frontera y de carga (Ver Figura 5.4). La secuencia y magnitud del daño marcado en cada nivel fue debido a la presencia de torsión en el edificio por la excentricidad de cargas que se le dio al ser ocupado para un diferente destino para el que fue diseñado. Ya que en su principio el edificio fue considerado con un destino de oficinas y ahora se utilizó como bodega, al concentrar mucho peso en ciertas zonas del edificio en diferentes niveles hizo cambiar su centro de masas y alejarlo del centro de rigideces provocando una excentricidad que produjo la torsión en el evento sísmico.

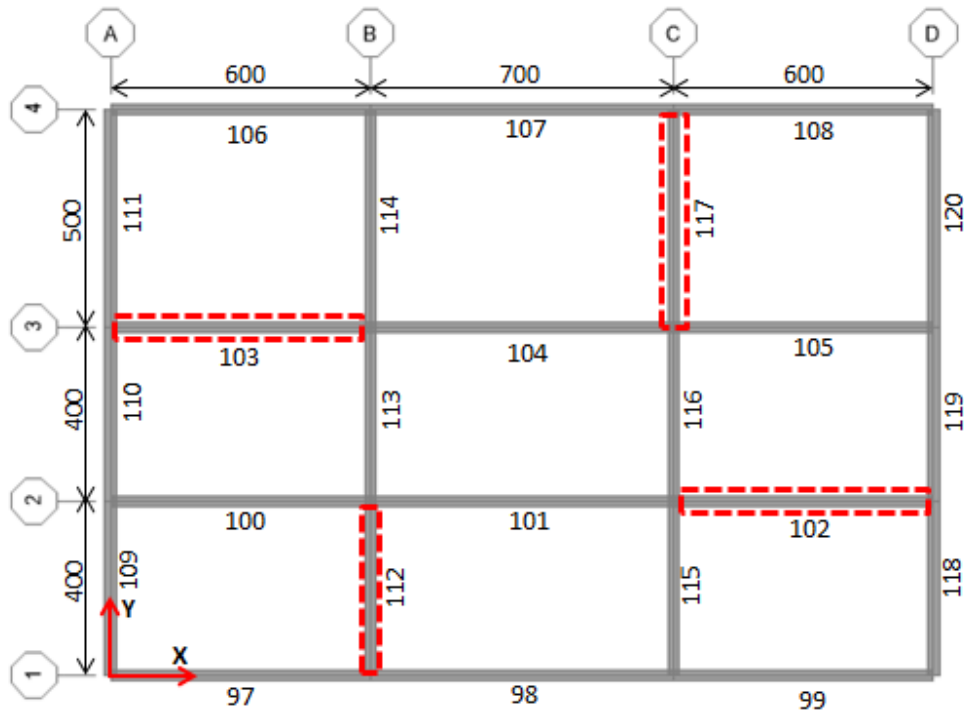
# Implementación del método de simulación dinámica en un edificio agrietado



PLANTA NIVEL 1

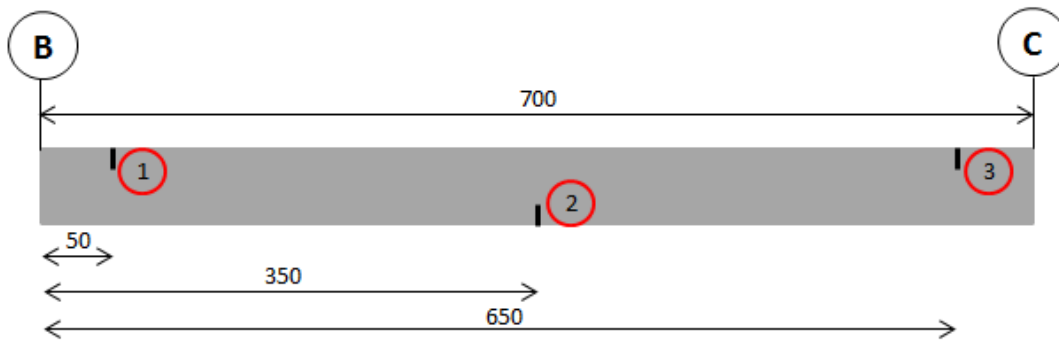


PLANTA NIVEL 2

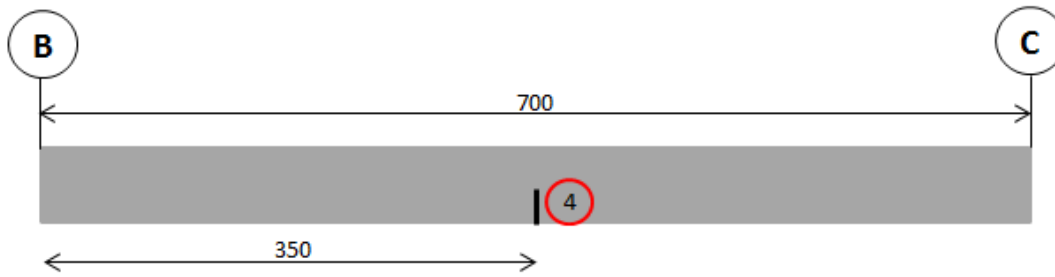


PLANTA NIVEL 3

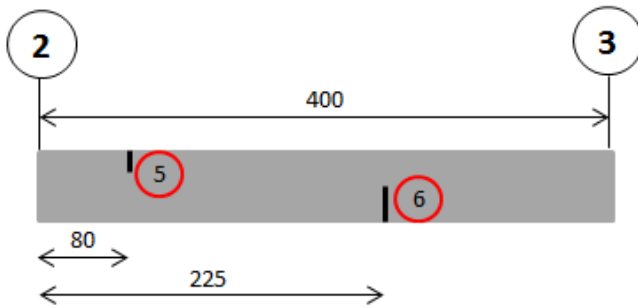
Fig. 5.3 Localización de elementos con daño en los niveles 1, 2 y 3 (cotas en cm).



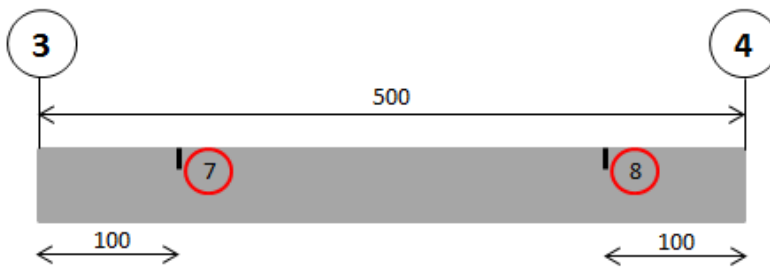
TRABE 18 EN EJE 1 ENTRE EJES B-C NIVEL 1



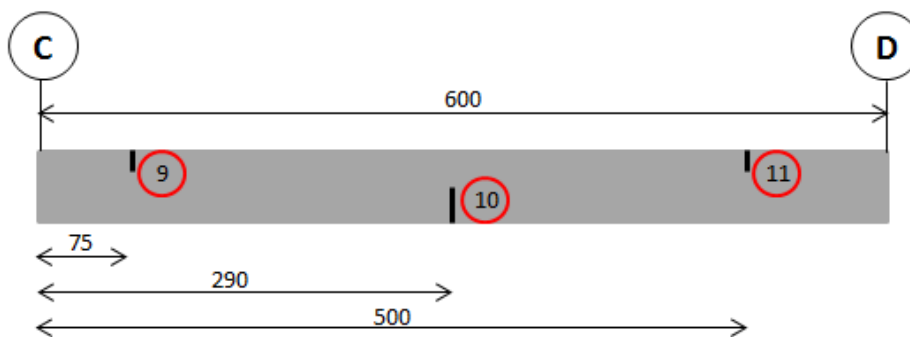
TRABE 24 EN EJE 3 ENTRE EJES B-C NIVEL 1



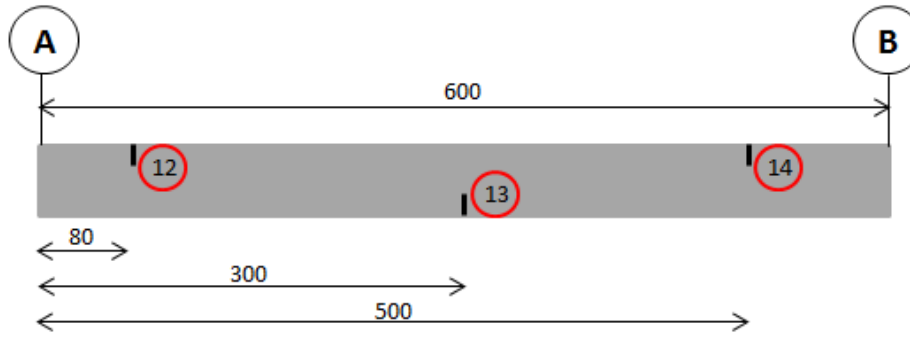
TRABE 30 EN EJE A ENTRE EJES 2-3 NIVEL 1



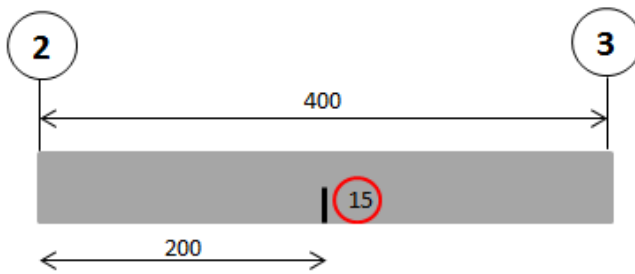
TRABE 40 EN EJE D ENTRE EJES 3-4 NIVEL 1



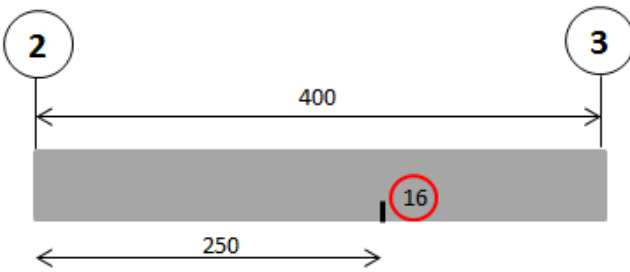
TRABE 59 EN EJE 1 ENTRE EJES C-D NIVEL 2



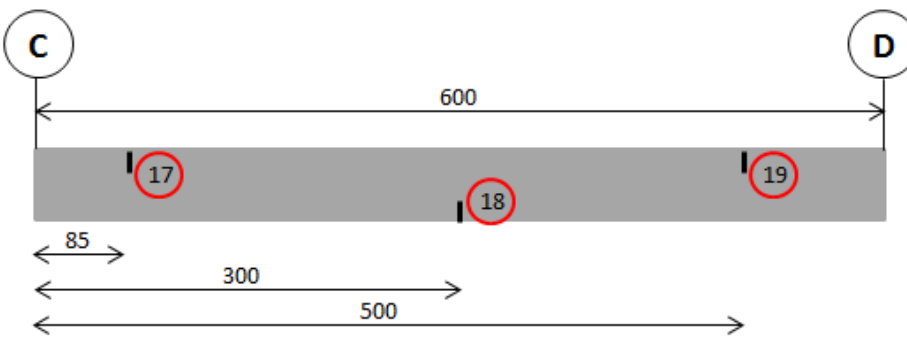
TRABE 66 EN EJE 4 ENTRE EJES A-B NIVEL 2



TRABE 73 EN EJE B ENTRE EJES 2-3 NIVEL 2



TRABE 76 EN EJE C ENTRE EJES 2-3 NIVEL 2



TRABE 102 EN EJE 2 ENTRE EJES C-D NIVEL 3

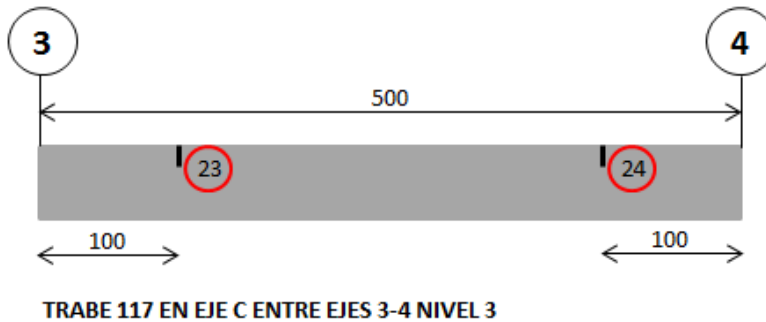
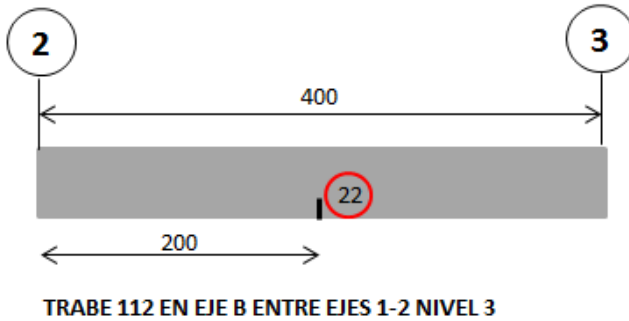
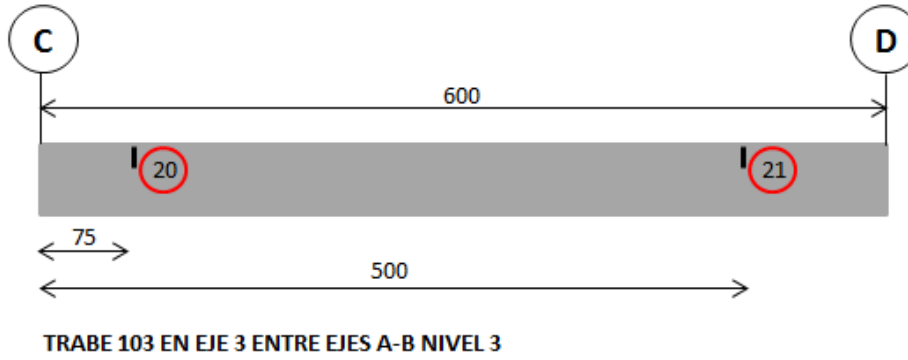


Fig. 5.4 Localización del daño en las traves de niveles 1, 2 y 3 (cotas en cm).

Para una mejor interpretación de la localización del daño y la profundidad de las grietas se muestra la Tabla 5.1.

Nivel	Número de barra	Identificación de grietas	Distancia de Nudo izquierdo a la grieta (cm)	Profundidad de la grieta (mm)
1	18	1	50	100
		2	350	150
		3	650	100
	24	4	350	220
	30	5	80	100
		6	225	250
	40	7	100	120
		8	400	120
2	59	9	75	80
		10	290	220
		11	500	100
	66	12	80	110
		13	300	125
		14	500	110
	73	15	200	250
	76	16	250	100
3	102	17	85	80
		18	300	120
		19	500	100
	103	20	75	125
		21	500	125
	112	22	200	100
	117	23	100	150
		24	400	150

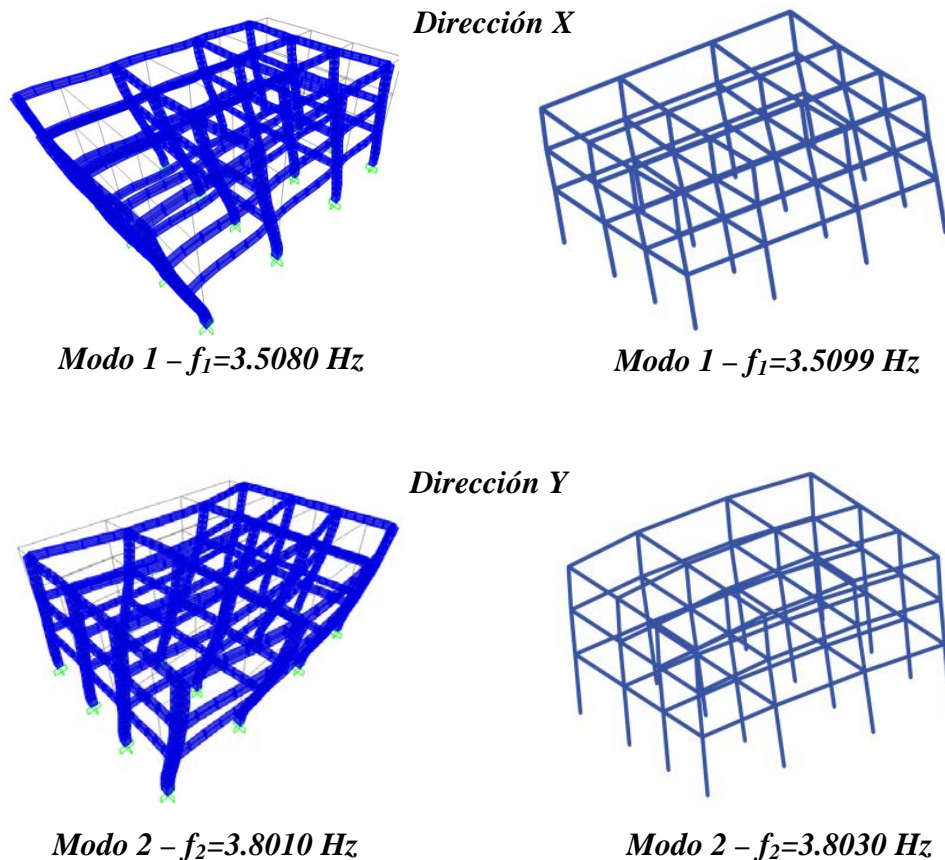
**Tabla 5.1 Localización y profundidad de las grietas.**

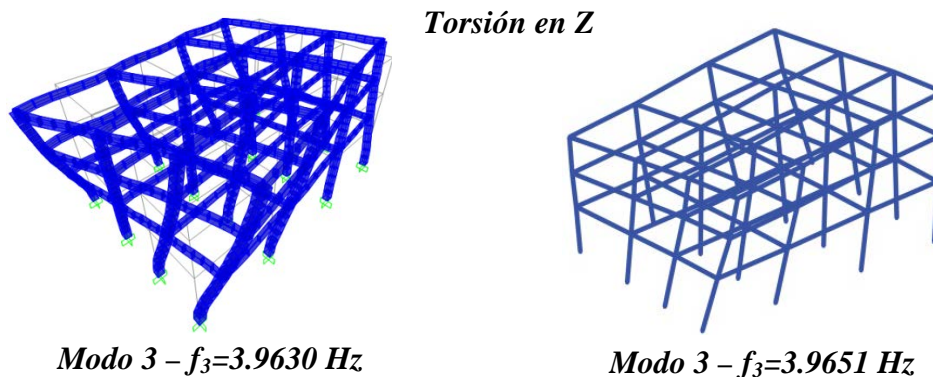
### 5.3. Simulación dinámica del edificio con el método propuesto

El edificio se simuló utilizando un modelo reticular en tres dimensiones con elementos barra que emulan las columnas y trabes. Las barras están conectadas con las propiedades adecuadas a las condiciones de frontera requeridas, se consideraron 64 nudos de los cuales 16 están totalmente restringidos, dando un total de 288 grados de libertad no restringidos. Los parámetros modales del edificio agrietado fueron

obtenidos en base al procedimiento propuesto por Zheng y Kessissoglou generalizado descrito en el Capítulo 4.

Después de la obtención de los parámetros dinámicos la respuesta dinámica del edificio agrietado se calculó utilizando el algoritmo recursivo propuesto por Wilson (2002). La fuerza excitadora presenta una variación aleatoria en posición y magnitud, la cual varía con respecto al valor medio de la fuerza calculada en el análisis de viento y otras vibraciones ambientales a lo largo de los nudos del modelo estructural. La respuesta dinámica fue adquirida con una frecuencia de muestreo de 60 Hz con un tiempo total de 300s a fin de adquirir los parámetros modales en el rango de frecuencias de interés. En las figuras 5.5 se muestran las primeras 3 formas modales y frecuencias sin daño obtenidas en SAP2000® y con el método simulación generalizado respectivamente.





**Fig. 5.5 Comparación de los primeros tres modos de vibrar del edificio sin daño calculados en SAP2000® y el método de simulación generalizado.**

Como se muestra en la Tabla 5.2 los cambios de frecuencias entre las obtenidas con el programa comercial SAP2000® y las obtenidas con el método de simulación generalizado son del 0.05%.

Escenario	Cambio de Frecuencias (%)		
	Modo 1	Modo 2	Modo 3
Sin Daño	0.05	0.05	0.05

**Tabla 5.2 Comparación de los cambios de frecuencias de vibrar del edificio sin daño.**

Utilizando el Método de Correlación Modal (MAC, por sus siglas en inglés) se compararon las formas modales en las cuales se observa que existe una correcta relación entre las mismas ya que los se obtuvieron valores de 0.9999 para todos los modos analizados (Ver Tabla 5.3).

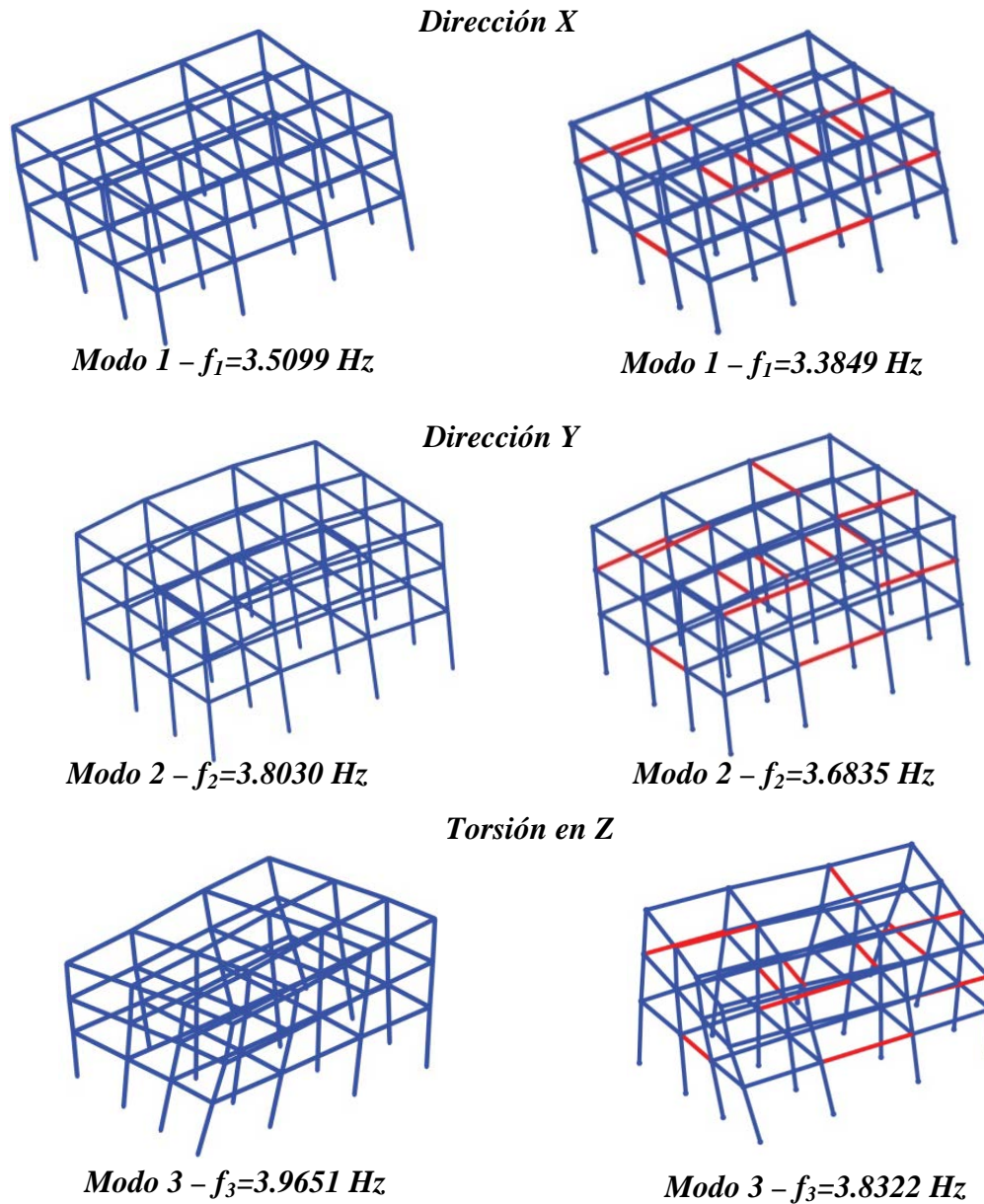
Escenario	Valores MAC		
	Modo 1	Modo 2	Modo 3
Sin daño	0.9999	0.9999	0.9999

**Tabla 5.3 Comparación de valores MAC para el escenario sin daño.**

## Implementación del método de simulación dinámica en un edificio agrietado

Al tener estas tres formas de comparación (gráfica, de frecuencias y de correlación modal) se tiene la certeza que el análisis modal al edificio sin daño es el correcto.

En las figuras 5.6 se muestran la comparativa de las primeras 3 formas modales y frecuencias sin daño y con daño obtenidas con el método simulación generalizado.



**Fig. 5.6 Comparación de los primeros tres modos de vibrar del edificio sin daño y con daño calculados con método de simulación generalizado.**

## Capítulo 5

Como se muestra en la Tabla 5.4 los cambios de frecuencias entre el edificio con y sin daño obtenidas con el método de simulación generalizado son del 3.56% para el primer modo, 3.14% para el segundo modo y de 3.35% para el tercer modo. Este cambio ocurre debido a la pérdida de rigidez global del edificio debido a la presencia del daño.

Escenario	Cambio de Frecuencias (%)		
	Modo 1	Modo 2	Modo 3
Con Daño	3.56	3.14	3.35

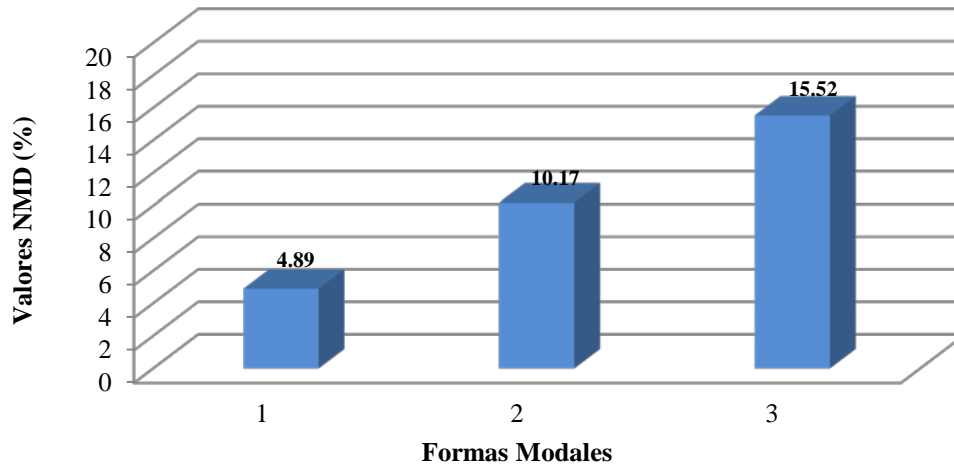
**Tabla 5.4 Comparación de los cambios de frecuencias de vibrar del edificio con daño.**

Se realizó una comparación de los parámetros dinámicos (frecuencias y formas modales) de los edificios con daño y sin daño, empleando métodos de primer nivel de acuerdo a la clasificación de daño propuesta por Rytter (1993).

Al obtener los vectores de formas modales se procedió a ser comparados con el MAC y Diferencia Modal Normalizada (NMD, por sus siglas en Inglés) (Morales, 2005) y de esta manera tener una mayor sensibilidad del cambio de los parámetros modales debido a la presencia de daño (Ver Tabla 5.5 y Figura 5.7).

Escenario	Valores MAC/NMD		
	Modo 1	Modo 2	Modo 3
Con daño	0.9976 / 4.89%	0.9897 / 10.17%	0.9764 / 15.52 %

**Tabla 5.5 Comparación de valores MAC y NMD para del escenario con daño.**



**Fig. 5.7 Valores NMD para las formas modales del escenario de daño.**

Al observar los resultados al comparar las formas modales con el método MAC y NMD con la Tabla 5.3 vemos que con el método MAC no es tan sensible al daño debido a los cambios tan pequeños que sufren los valores obtenidos, es decir al ver los valores 0.9976, 0.9897 y 0.9764, para los modos 1, 2 y 3, respectivamente son muy cercanos y no se aprecia con claridad la presencia de daño. Para los valores obtenidos con el NMD se puede apreciar con mayor facilidad la presencia de daño ya que los valores 4.89, 10.17 y 15.52, para las formas modales 1, 2 y 3, se encuentra un poco más distantes por lo que se puede notar con mayor claridad la presencia del daño.

En las figuras 5.8 a la 5.25 se muestra la respuesta dinámica de la estructura con y sin daño. Con dichas figuras se puede hacer una comparación de la respuesta dinámica (desplazamiento, velocidad y aceleración) de la estructura con daño y sin daño para que como cae su frecuencia por la pérdida de rigidez por la presencia de un daño severo.

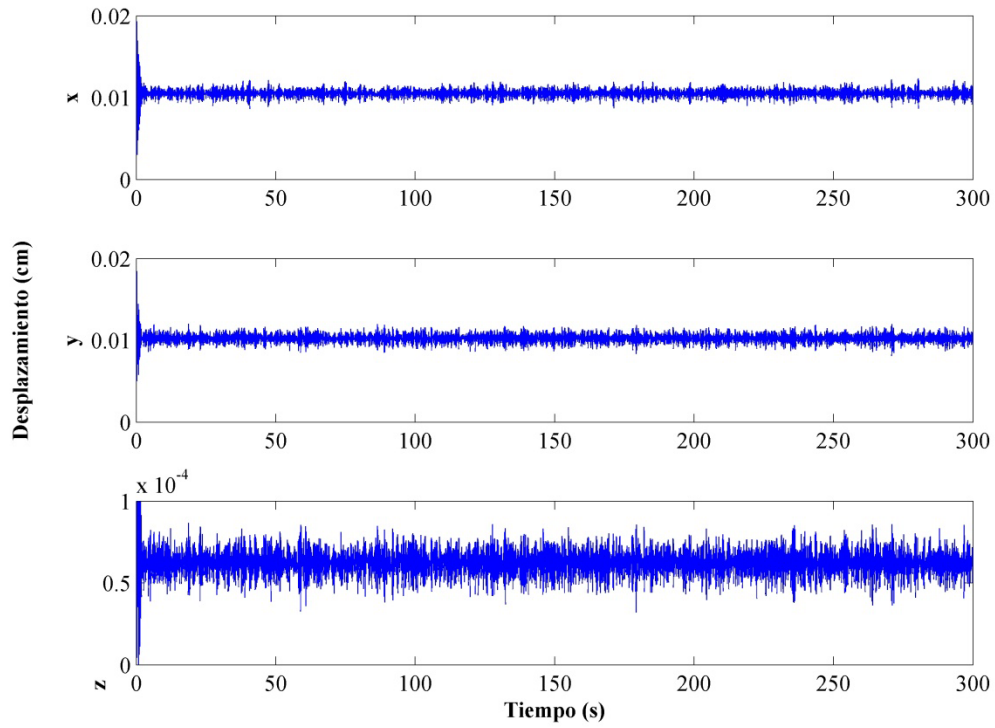


Fig. 5.8 Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Desplazamiento) en el 1N.

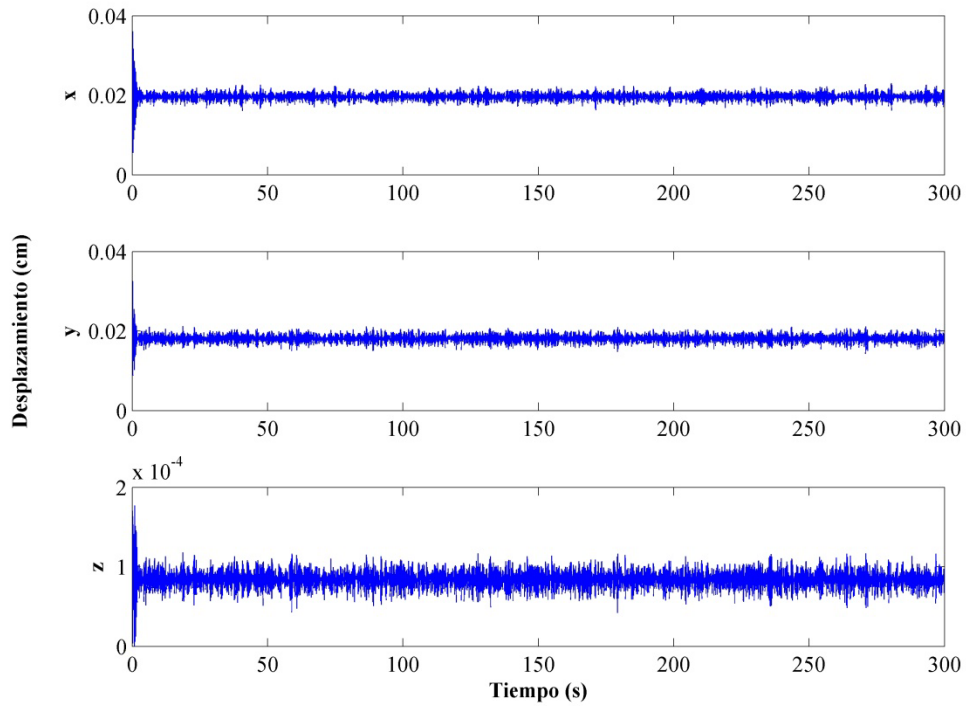


Fig. 5.9 Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Desplazamiento) en el 2N.

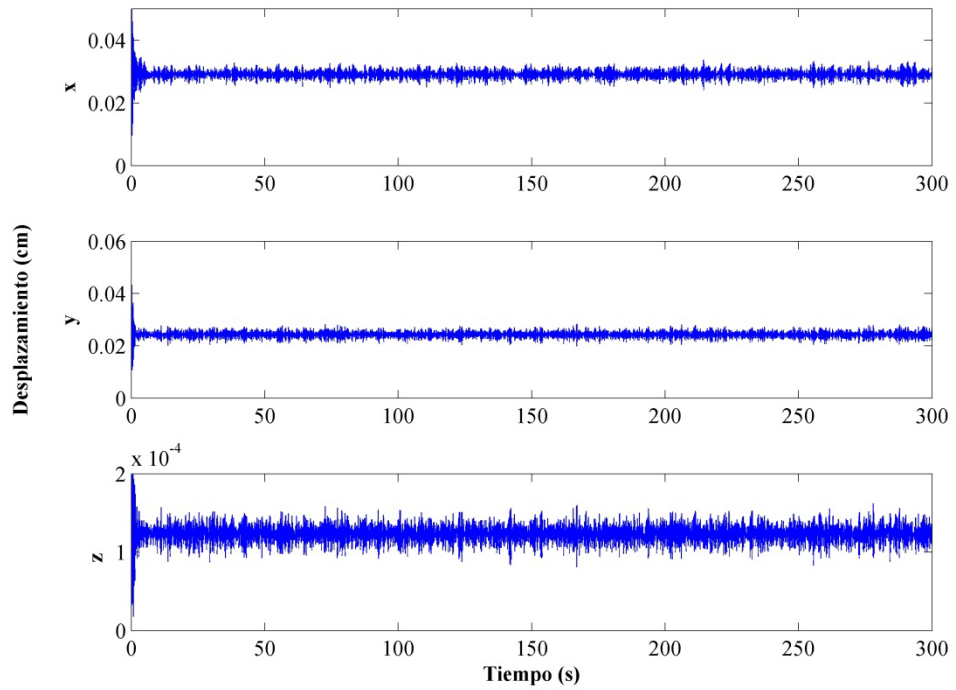


Fig. 5.10 Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Desplazamiento) en el 3N.

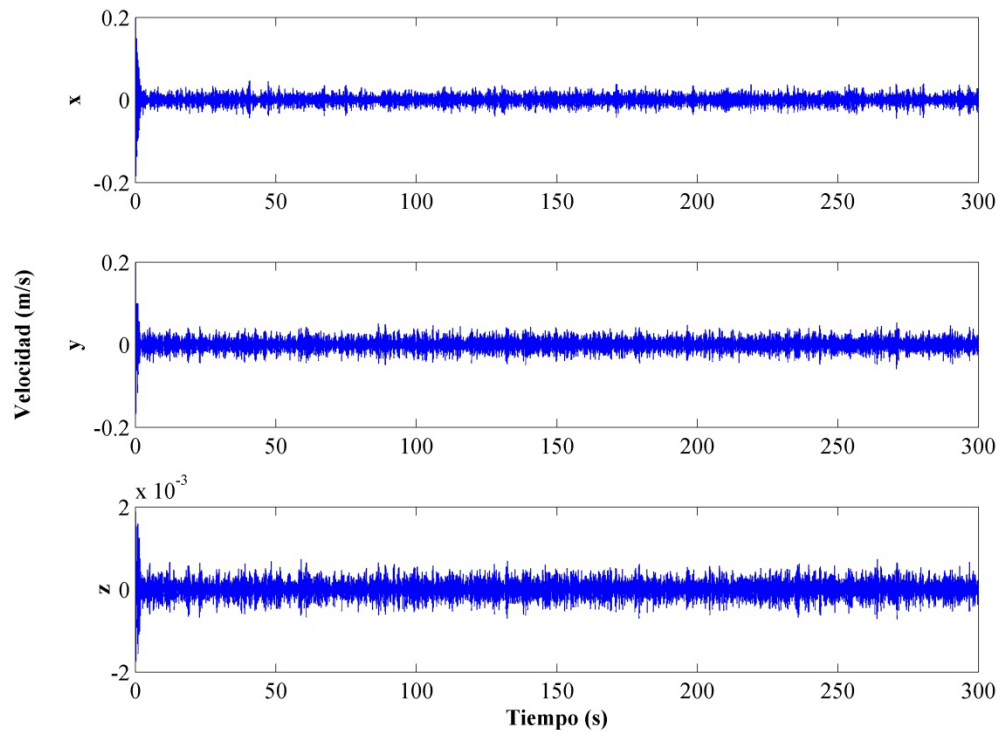
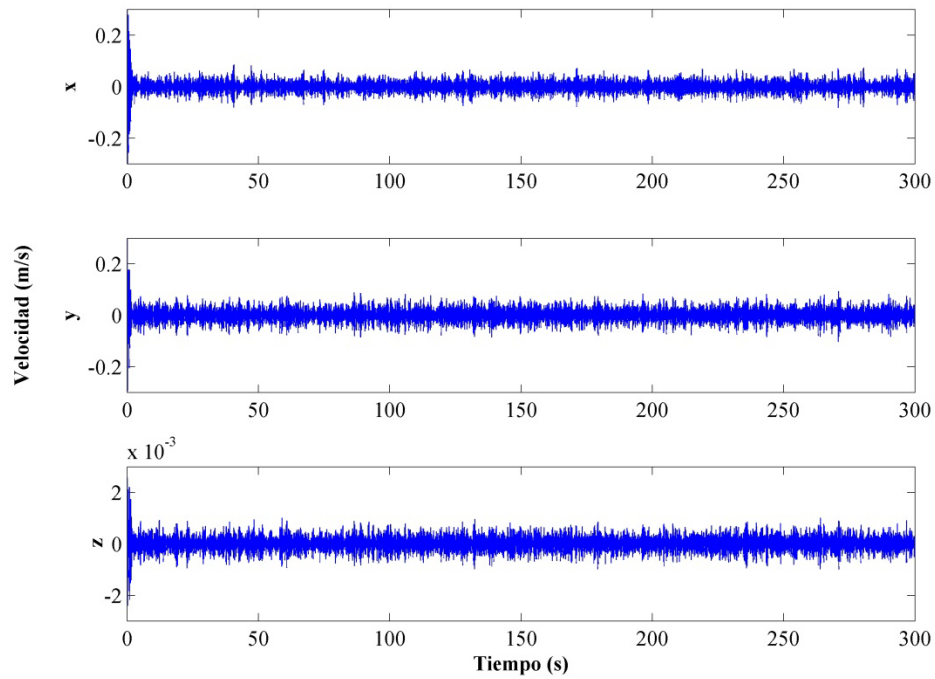
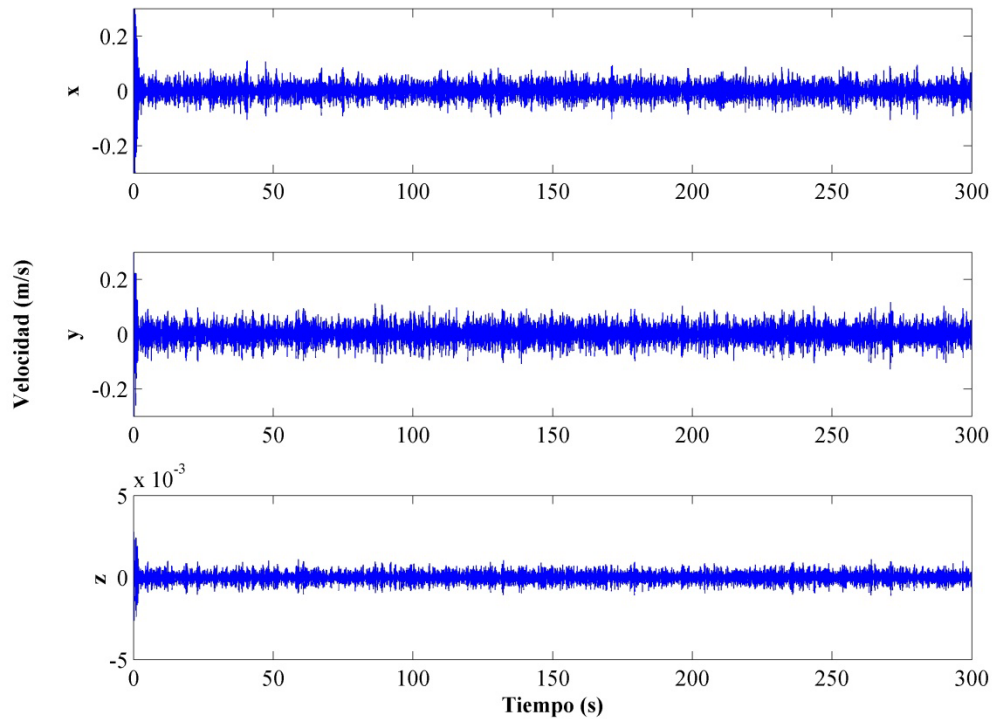


Fig. 5.11 Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Velocidad) en el 1N.



**Fig. 5.12** Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Velocidad) en el 2N.



**Fig. 5.13** Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Velocidad) en el 3N.

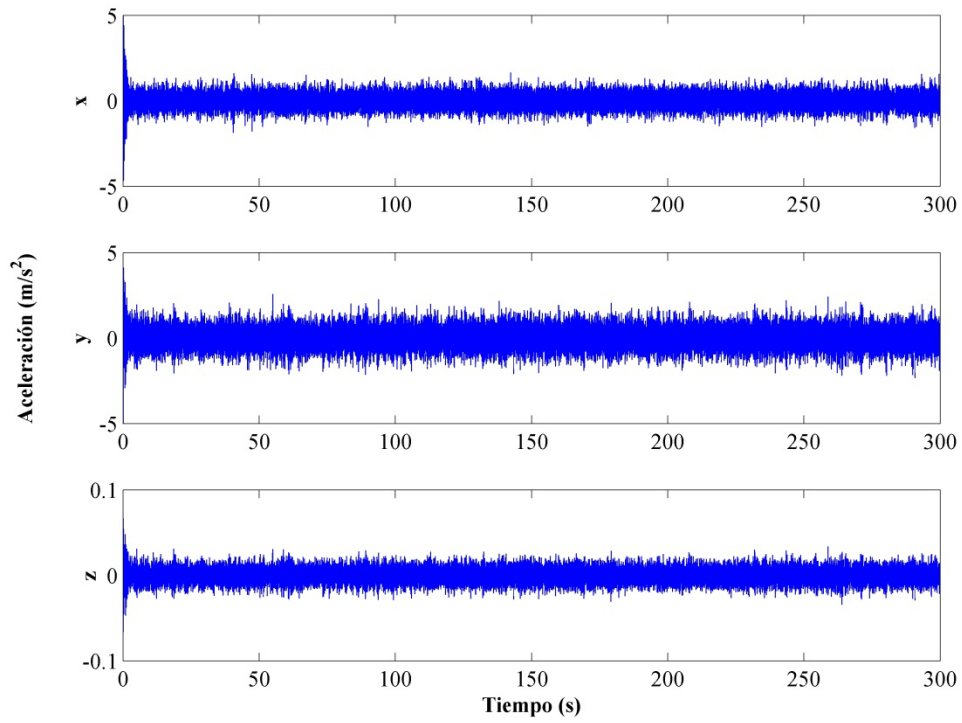


Fig. 5.14 Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Aceleración) en el 1N.

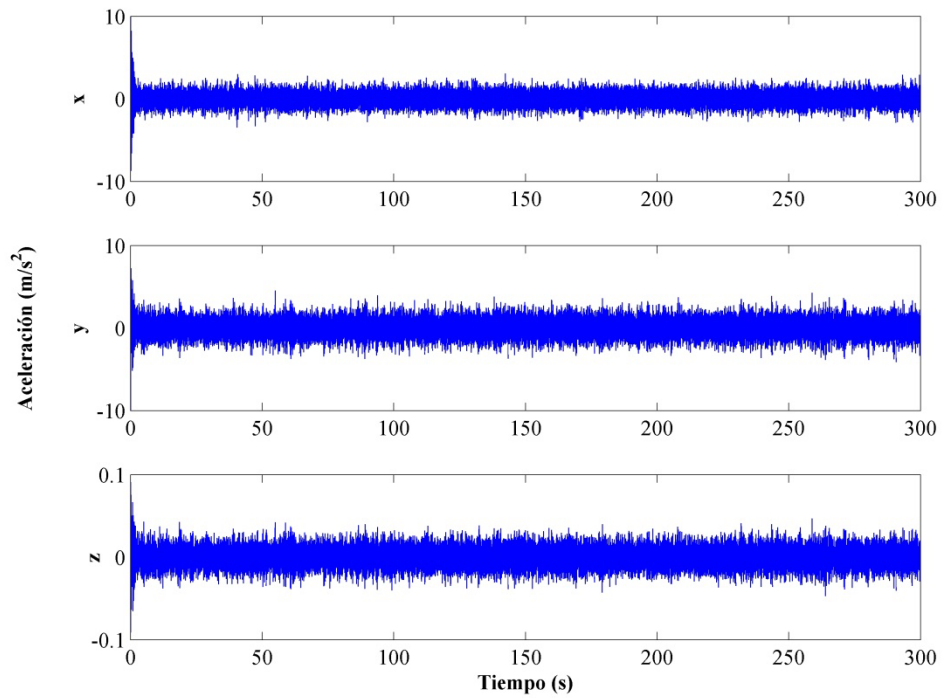


Fig. 5.15 Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Aceleración) en el 2N.

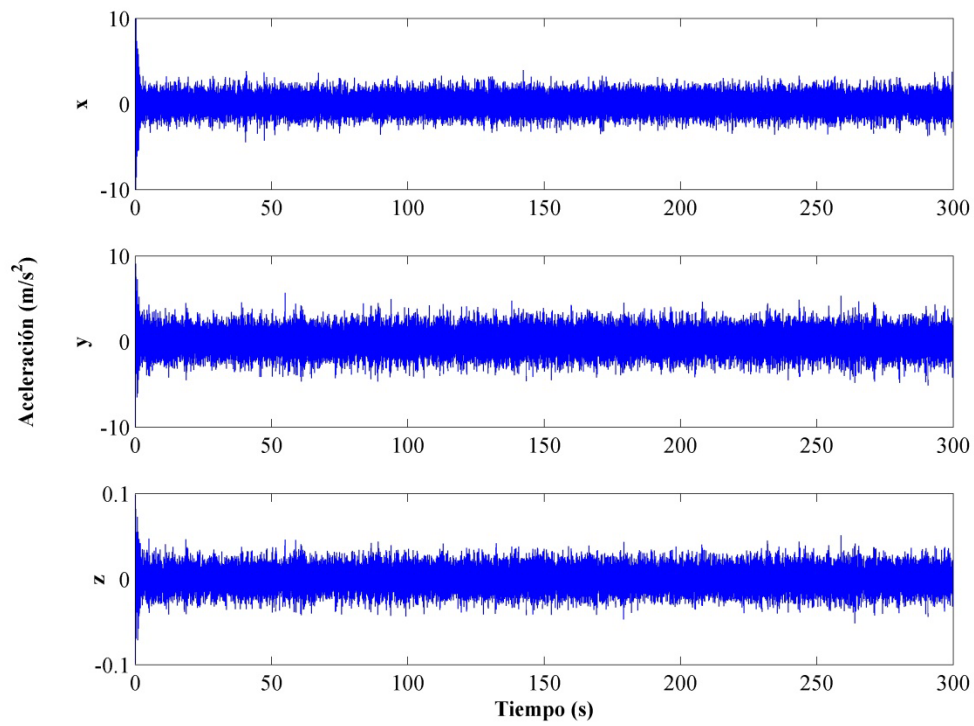


Fig. 5.16 Respuesta dinámica de la estructura sin daño (Aceleración) en el 3N.

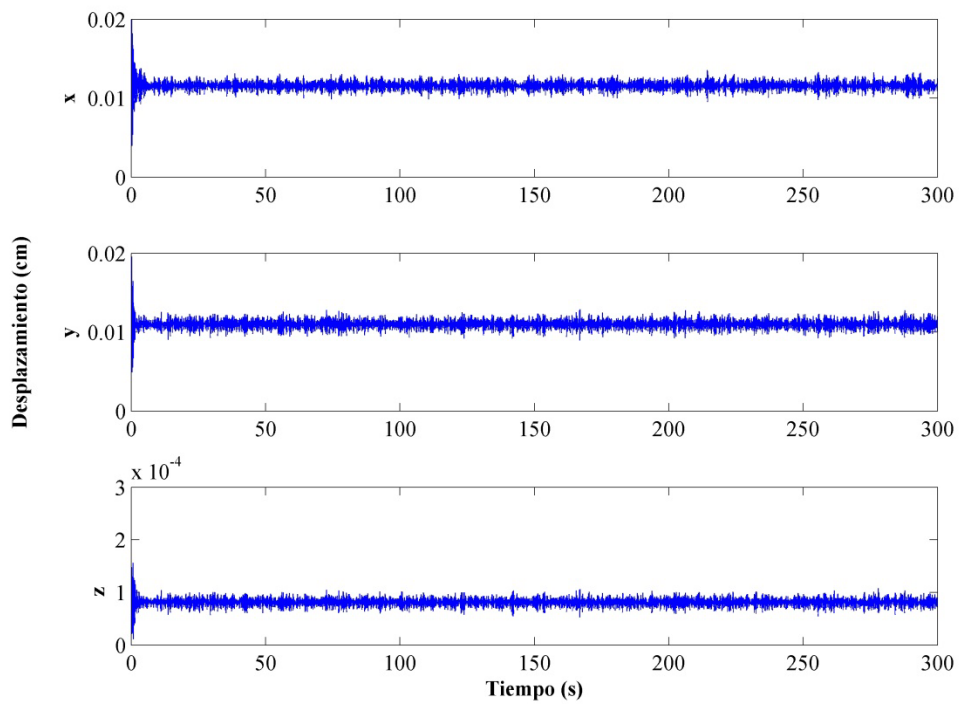


Fig. 5.17 Respuesta dinámica de la estructura con daño (Desplazamiento) en el 1N.

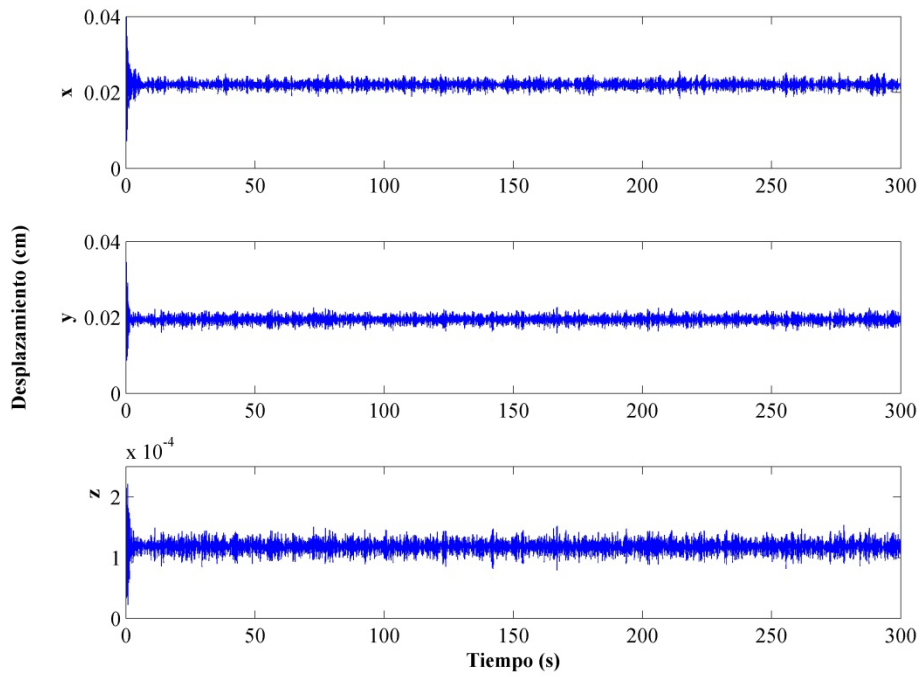


Fig. 5.18 Respuesta dinámica de la estructura con daño (Desplazamiento) en el 2N.

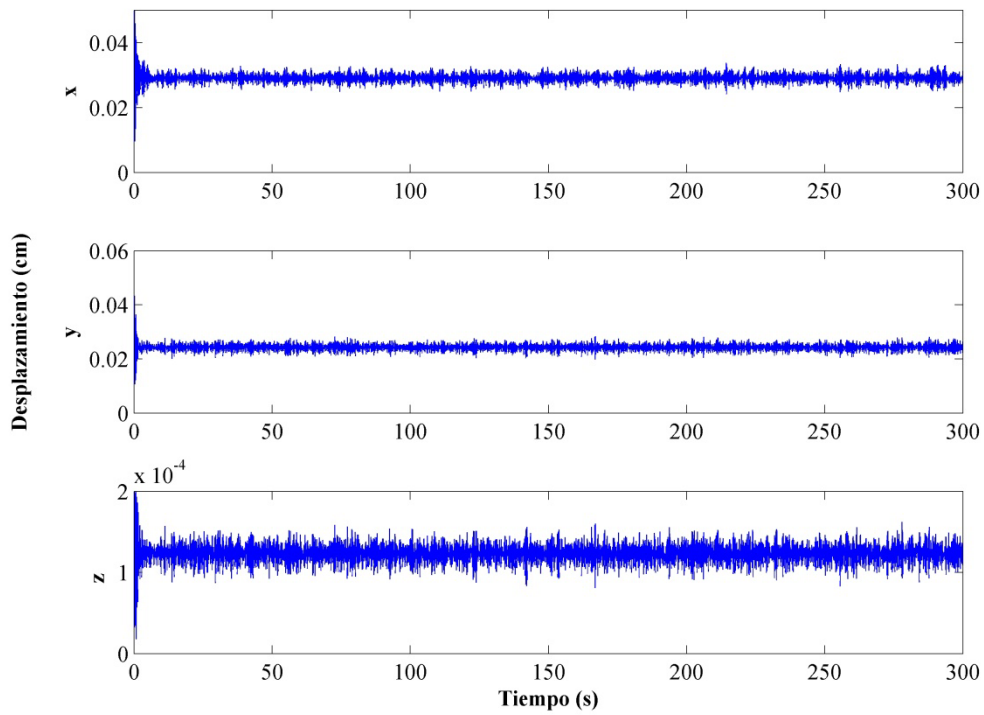


Fig. 5.19 Respuesta dinámica de la estructura con daño (Desplazamiento) en el 3N.

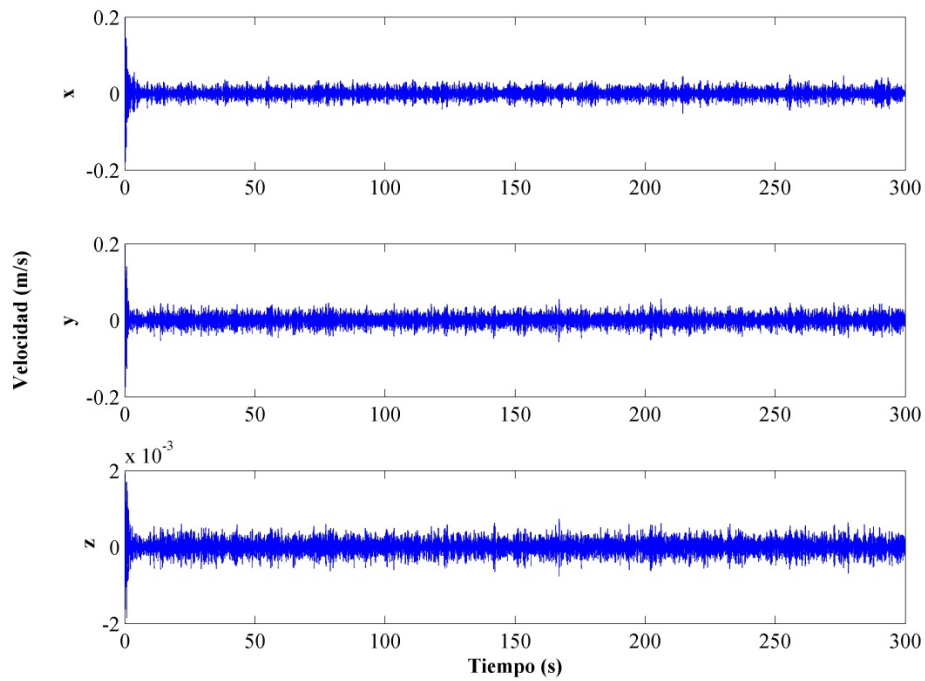


Fig. 5.20 Respuesta dinámica de la estructura con daño (Velocidad) en el 1N.

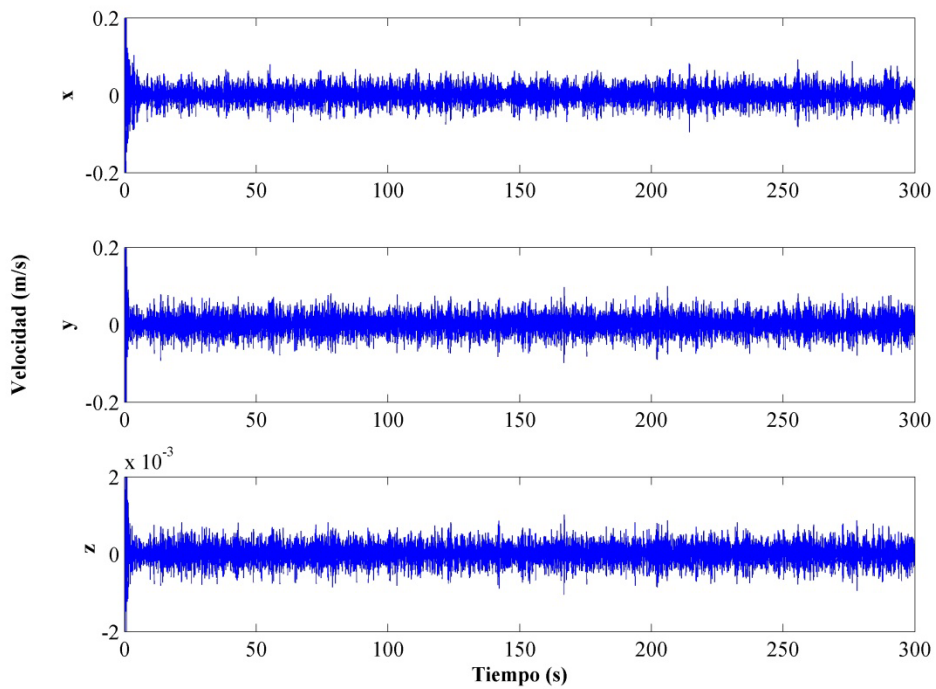


Fig. 5.21 Respuesta dinámica de la estructura con daño (Velocidad) en el 2N.

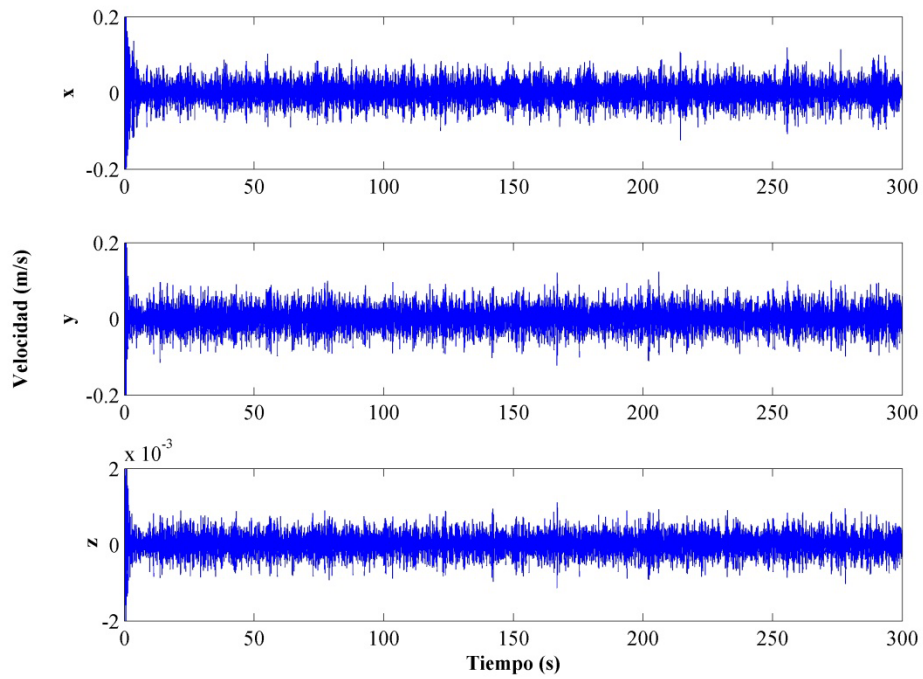


Fig. 5.22 Respuesta dinámica de la estructura con daño (Velocidad) en el 3N.

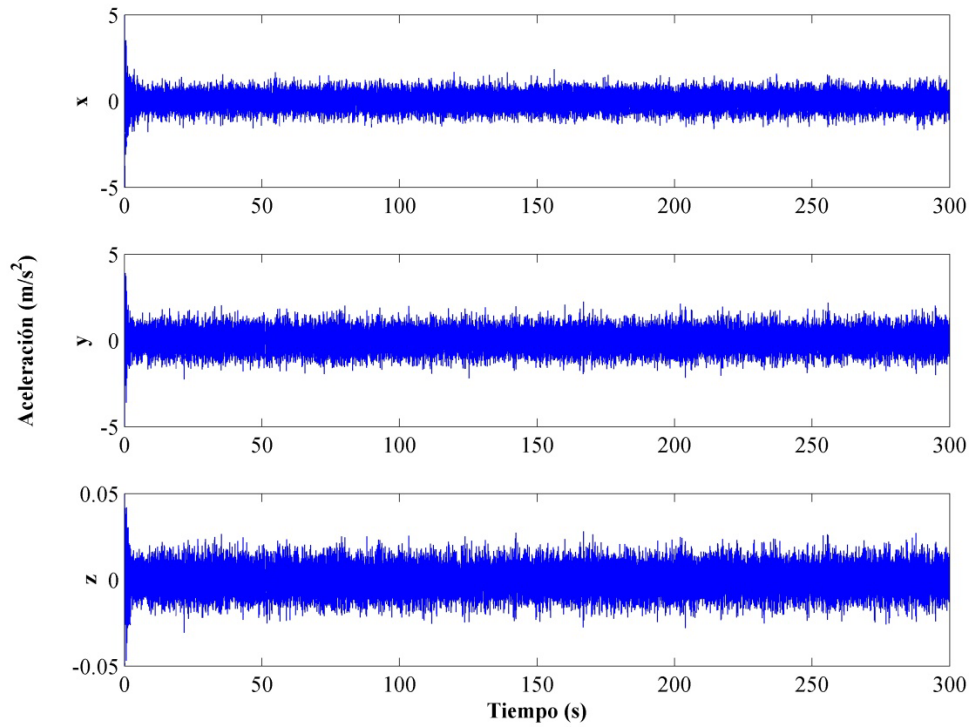
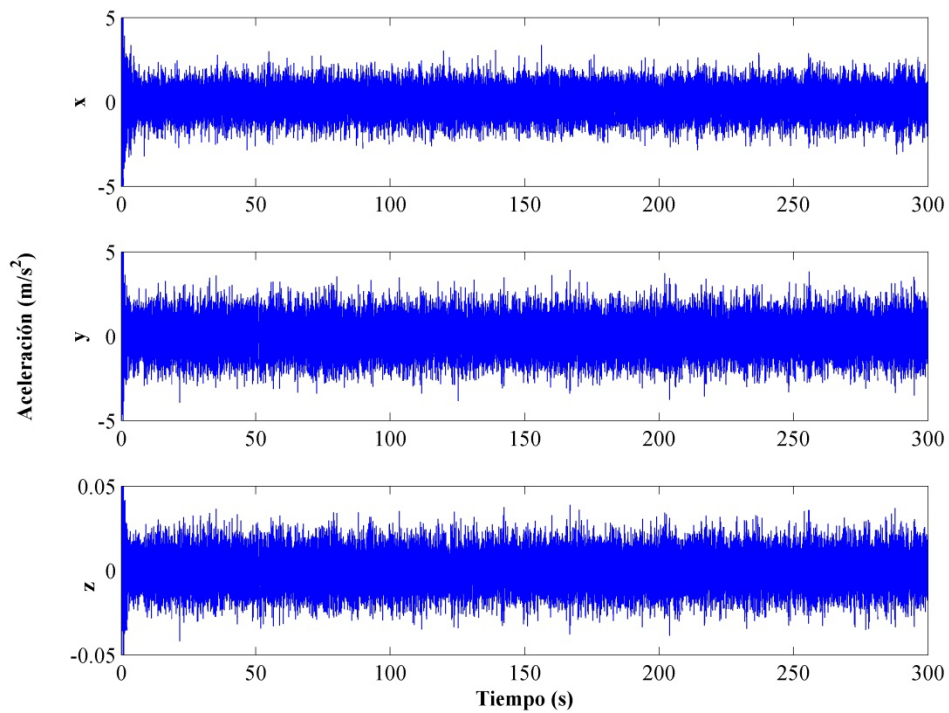
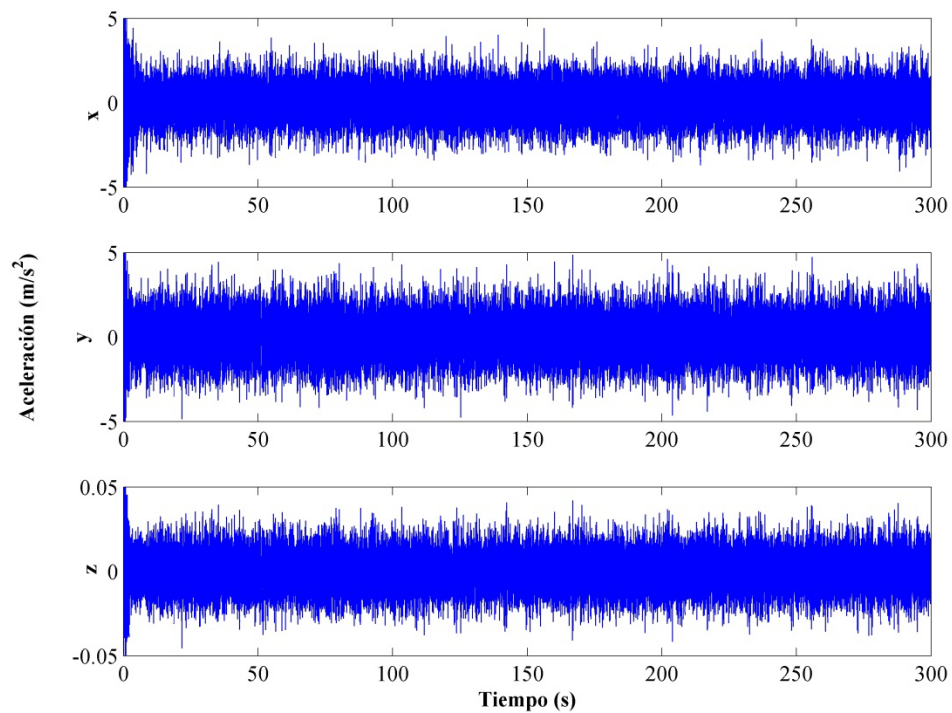


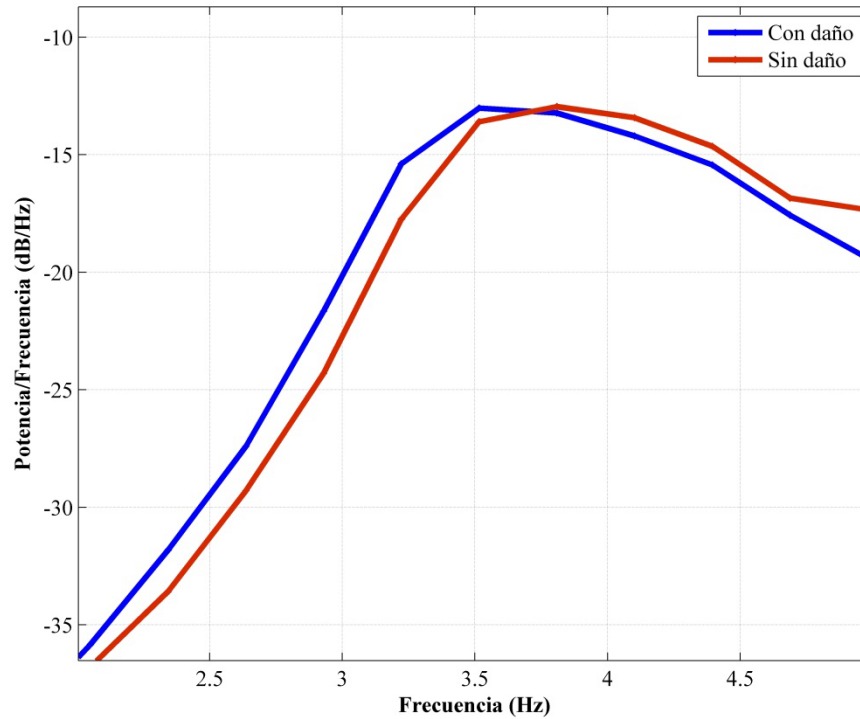
Fig. 5.23 Respuesta dinámica de la estructura con daño (Aceleración) en el 1N.



**Fig. 5.24** Respuesta dinámica de la estructura con daño (Aceleración) en el 2N.



**Fig. 5.25** Respuesta dinámica de la estructura con daño (Aceleración) en el 3N.



**Fig. 5.26 Estimación de la densidad espectral de potencia.**

La respuesta dinámica de aceleración que es representativa por lo cual se comparó obteniendo un espectro de frecuencias a partir de la transformada de Fourier para como se muestra en la figura 5.26, la cual nos muestra los picos de frecuencias obtenido en las formas modales que se encuentran entre el rango de 3.5099 al 3.9651 Hz para la estructura sin daño y de 3.3849 al 3.8322 Hz para la estructura con daño.

Por lo que se puede concluir que la diferencia entre el edificio sin daño y con daño no cambia su frecuencia arriba de 3.56%, a pesar de tener un daño severo moderado, esto concuerda con lo que se presenta en literatura de estructuras agrietadas, que habla de un cambio de frecuencias de no más del 5%.

## Conclusiones

---

El objetivo principal de este trabajo fue implementar un método de simulación dinámica de estructuras agrietadas con el fin de ser empleado para evaluar su comportamiento e integridad estructural. Lo anterior mencionado se llevó a cabo generalizando el método de Zheng y Kessissoglou para estructuras más complejas (tridimensionales), el cual fue calibrado con otros métodos y pruebas experimentales ya existentes comparando los parámetros modales; de los cuales se concluyó lo siguiente:

La afectación de los parámetros modales de una estructura debido a la presencia de daño depende mucho de su ubicación y la intensidad del daño. Ya que en los resultados que se obtuvieron en el Capítulo 4, en la comparación de métodos se observó que en una viga simplemente apoyada afecta de mayor manera sus parámetros modales si el daño se encuentra en el centro que cercano a los apoyos. Al comparar el método generalizado con el propuesto por Shifrin (1999) se concluye que el método si es sensible a la presencia de múltiples grietas con el modelo de la viga empotrada. Por último en el modelo a escala real y el modelado por el M.E.F. no dieron resultados muy satisfactorios ya que en ese experimento se consideró para el marco a escala la aportación del marco de acero que lo confina y en el modelado por el M.E.F. se considera la fluencia del acero al no dejar que la grieta se siga propagando, lo que aun en ese caso no dieron resultados tan disparados. Por lo que al generalizar el método de simulación dinámica de Zheng se determinó que se volvió un método más sensible al daño ya que tiene 6 grados de libertad por nudo disponibles para el movimiento.

En el Capítulo 5 se puede concluir que la diferencia entre el edificio sin daño y con daño no cambia su frecuencia arriba de 3.56%, a pesar de tener un daño severo moderado, esto concuerda con lo que se presenta en literatura de estructuras agrietadas, que habla de un cambio de frecuencias de no más del 5%.

Con la calibración que se realizó al método puede decirse que es un método fiable para obtención de parámetros modales para ser empleado en métodos de detección de daño basados en vibraciones. Con esto se puede esperar que se tenga un parámetro fiable de la integridad estructural de cualquier estructura dañada sin la necesidad de ser instrumentada por sensores.

Para futuras investigaciones se deberá comparar este método con resultados de pruebas dinámicas en una estructura de un edificio real con daño severo. De igual manera implementar el método utilizando un modelo lineal – no lineal para calcular la respuesta dinámica de estructuras agrietadas, tomando en cuenta la no linealidad geométrica por los efectos P-Delta. Para estructuras de concreto reforzado se recomienda hacer simulaciones con grietas que abren y cierran debido a la inversión de esfuerzos.

# Bibliografías y Referencias

---

Bilello C. (2001). Theoretical and experimental investigation on damaged beams under moving systems, Tesis de doctorado, Università degli studi di Palermo, Italy.

Bui, Q.B., Mommessin, M., Perrotin, P., Plassiard, J.P., Plé, O. (2014). Assessing local scale damage in reinforced concrete frame structures using dynamic measurements. *Engineering Structures* **79**, 22-31.

Caddemi S. y Calì I. (2013). The exact explicit dynamic stiffness matrix of multi-cracked Euler-Bernoulli beam and applications to damaged frame structures. *Journal of Sound and Vibration* **332**, 3049-3063.

Caddemi S. y Calì I. (2009). Exact closed-form solution for the vibration modes of the Euler-Bernoulli beam with multiple open cracks. *Journal of Sound and Vibration* **327**, 473-489.

Chondros T. G., Dimarogonas A. D. y Yao J. (1997). A consistent cracked bar vibration theory. *Journal of Sound and Vibration* **200:3**, 303-313.

Chondros T. G., Dimarogonas A. D. y Yao J. (2001). Vibration of a beam with a breathing crack. *Journal of Sound and Vibration* **239:1**, 57-67.

Christides S. y Barr A. D. S. (1984). One-dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams. *Int. J. Mech. Sci.* **26:11/12**, 639-648.

Gounaris G. y Dimarogonas A. D. (1988). A finite element of cracked prismatic beam for structural analysis. *Computers and Structures* **28**, 309-313.

Law, S.S. y Lu, Z.R. (2005). Crack identification in beam from dynamic responses. *Journal of Sound and Vibration* **285**, 967-987.

Liebowitz H., Claus Jr. W. D. S. (1968). Failure of notched columns. *Engineering Fracture Mechanics* **1**, 379-383.

Liebowitz H., Vanderveldt, Harris D. W. (1967). Carry capacity of notched column. *International Journal of Solids and Structure* **3**, 489-500.

Morales C. A. (2005). Comments on the MAC and the NCO, and a linear modal correlation coefficient. *Journal of Sound and Vibration* **282**, 529-537.

Ostachowicz W. M., Krawczuk C. (1991). Analysis of the effect of crack on the natural frequencies of cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration* **150:2**, 191-201.

Okamura H., Liu H. W., Chu C. S., Liebowitz H. (1969). A cracked column under compression. *Engineering Fracture Mechanics* **1**, 547-564.

Rizos P. F., Aspragathos, Dimarogonas A. D. (1990). Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes. *Journal of Sound and Vibration* **138:3**, 381-388.

Rytter, T. (1993) Vibration based inspection of civil engineering structure. Tesis de doctorado, Department of building technology and structure engineering, Aalborg University, Denmark.

Salgado, R. E. (2008). Damage detection methods in bridges through vibration monitoring: Evaluation and Application. *Tesis doctoral*, Universidade do Minho.

Shi, Z. (2009). Crack Analysis in Structural Concrete; Theory and applications. *Elsevier*.

Shifrin, E. I. y Ruotolo, R. (1999). Natural frequencies of beam with an arbitrary number of cracks, *Journal of Sound and Vibration* **222:3**, 409-423.

Williams F. W. y Wittrick W. H. (1970). An automatic computational procedure for calculating natural frequencies of skeletal structures. *International Journal of Mechanical Science* **12:9**, 781-791.

Wilson E. L. (2002). Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures. *Computers and Structures*. Berkley, California. (Wilson, 2002)

Xiaoping Z., Qiang H. y Feng L. (2010). Analytical approach for detection of multiple cracks in a beam. *Journal of Engineering Mechanics* **136:3**, 345-357.

Zheng D. Y. y Kessissoglou N. J. (2004). Free vibration analysis of a cracked beam by finite element method. *Journal of Sound and Vibration* **273**, 457-475.

# ANEXO A

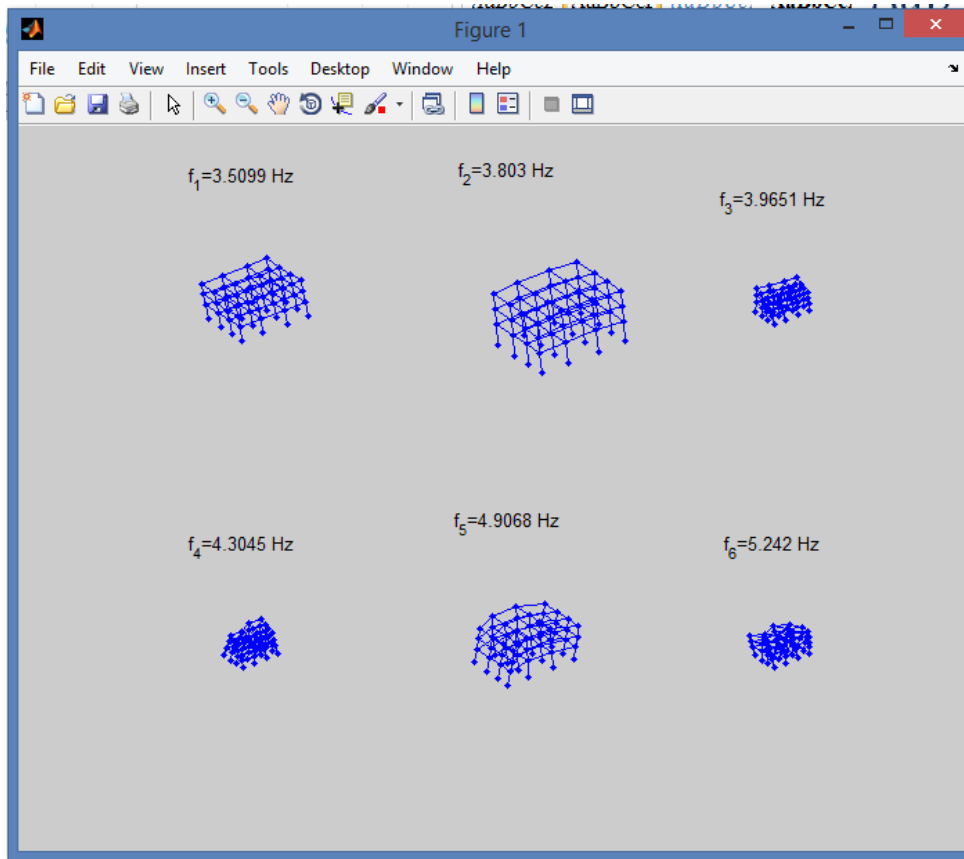
---

```

Simulation.m x
1  %*****§
2  % Simulation: Generation of the dynamic response for 3D buildings §
3  %*****§
4  % BY ALAN ALONSO RIVERS
5  % MEng STUDENT FROM BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA (BUAP)
6  % COUNSELOR: DR. ROLANDO SALGADO ESTRADA
7  % DATE: OCTOBER 13, 2014
8
9
10
11  function Simulation
12  -   if nargin < 1, Section1=[];           end;
13  -   if nargin < 2, Section2=[];           end;
14  -   if nargin < 3, outfilename=[];        end;
15  -   if nargin < 4, dt=[];                 end;
16  -   if nargin < 5, force=[];              end;
17  -   if nargin < 6, e=[];                  end;
18  -   if nargin < 7, filter_cutoff=[];      end;
19  -   if nargin < 8, FNud=[];               end;
20  -   if nargin < 9, TDuration=[];          end;
21  -   if nargin < 10, nl=[];                end;
22  -   if nargin < 11, damage=[];            end;
23  -   if nargin < 12, xdc=[];               end;
24  -   if nargin < 13, depthc=[];           end;
25  -   if nargin < 14, Nv=[];                end;
26
27  -   ProgramName1='Geometrical Properties';
28  -   ProgramName2='Time Properties';
29  -   ProgramName3='Damaged Properties';
30
31  -   savelist='K M T Coord prop elem f x u v ac pf';
32
33
34  % ***** Input data *****
35  -   menuindx=0;
36  -   if isempty(Section1)==1,              Section1='secCol.mat';    menuindx=1; end;
37  -   if isempty(Section2)==1,              Section2='secBeam.mat';  menuindx=1; end;
38
39  -   if menuindx==1
40  -       ParameterID={
41  -           'Section for the Columns:'
42  -           'Section for the Beams:'
43  -       };
44  -       ParameterDef={
45  -           Section1
46  -           Section2
47  -       };
48
49  -       options.Resize='on';
50  -       options.WindowStyle='normal';
51
52  -       answer=inputdlg(ParameterID,ProgramName1,1,ParameterDef,options);
53  -       if isempty(answer)~=1
54  -           Section1=      char(answer(1));
55  -           Section2=      char(answer(2));
56  -       else
57  -           error('user cancel operation ....');
58  -       end;
59  -   end;

```





MATLAB R2012b interface showing the Command Window, Workspace, and Current Folder.

**Command Window:**

```
>> Simulation
Stiffness and mass matrix generation in progress ...
force generation in progress ...
Accelerations and displacements of beam in progress ...
save data to RDCD
f2 >>
```

**Workspace:**

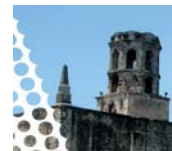
Name	Value
Coord	<64x6 double>
K	<288x288 double>
M	<288x288 double>
T	<12x12 double>
ac	<288x90001 double>
elem	<120x6 double>
f	[22.0535; 23.8952; 24. ...]
pf	<288x90005 double>
prop	<120x8 double>
u	<288x90001 double>
v	<288x90001 double>
x	<384x6 double>

**Command History:**

```
PowerSp_P2(ac(1,:), 1024, ^
Hold on
hold on
load('RDS.mat')
PowerSp_P2(ac(1,:), 1024,
print -djpeg100 -r400 INT
print -djpeg100 -r600 INT
print -djpeg100 -r600 INT
Simulation
clc
Simulation
```

# ANEXO B

---



## **SIMULACIÓN DINÁMICA NO-LINEAL DE EDIFICIOS AGRIETADOS.**

*Alan Alonso Rivers <sup>(1)</sup>, Rolando Salgado Estrada <sup>(2)</sup>, Elsa Lagunes Lagunes <sup>(2)</sup>*

<sup>(1)</sup> Alumno de Maestría, Facultad de Ingeniería, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Blvd. Valsequillo esq. Av. San Claudio s/n Col. San Manuel, Ciudad Universitaria, C.P. 72570 Puebla, Pue., [alantier13@hotmail.com](mailto:alantier13@hotmail.com)

<sup>(2)</sup> Profesor, Facultad de Ingeniería, Universidad Veracruzana, Blvd. A. Ruíz Cortines no. 455, Fracc. Costa Verde, C.P. 94294 Boca del Río, Ver., [rosalgado@uv.mx](mailto:rosalgado@uv.mx), [elagunes@uv.mx](mailto:elagunes@uv.mx)

### **RESUMEN**

En este trabajo, se realiza la evaluación de un método para determinar la respuesta dinámica no-lineal de edificios agrietados que puedan ser utilizados para conocer con mayor precisión su integridad estructural aplicando técnicas avanzadas de detección de daño. En este trabajo se toma en cuenta la deformación local provocada por la grieta, factor que se ha despreciado en otros métodos. Para tal fin, se considera, en la primera fase de este estudio, determinar los parámetros modales de un edificio agrietado en el cual se introduce daño reduciendo la rigidez del sistema a fin de obtener de su respuesta dinámica no-lineal, la cual será comparada con los obtenidos mediante métodos dinámicos lineales.

### **ABSTRACT**

In this paper, the performance evaluation of a method to determine the non-linear dynamic response of cracked buildings that can be used to obtain a more accurate structural integrity, applying advanced techniques of damage detection, is shown. The local deformation caused by the crack is taken into account in this work, a factor that has been neglected in other methods. To this purpose, it is considered, in the first part of this study, determine the modal parameters of a building cracked in which damage is introduced reducing the stiffness of the system in order to obtain its nonlinear dynamic response, which will be compared with those obtained by linear dynamic methods.

### **INTRODUCCIÓN**

Es un hecho conocido que una grieta dentro de un elemento estructural causa cambios en sus parámetros modales. Con base en esto, desde finales del siglo XX, se han desarrollado una gran cantidad de métodos basados en vibraciones, para detectar, localizar y cuantificar la extensión de daños en las estructuras. Sin embargo, estos métodos han mostrado no ser del todo precisos. Es por eso que surge la necesidad de obtener parámetros dinámicos no-lineales de edificios agrietados para la evaluación de métodos de detección de daños.

Con las respuestas dinámicas lineales y no-lineales de la estructura, se considera verificar la importancia de tomar en cuenta la no-linealidad para el cálculo de los parámetros modales de estructuras con daño moderado y severo, ya que éste hace que la estructura entre en un comportamiento no-lineal, todo esto para comprender con mayor precisión el comportamiento dinámico de edificios con daño severo y determinar la respuesta dinámica que pueda ser utilizada para fines de detección de daño. La identificación de daños basado en las mediciones dinámicas se lleva a cabo por lo general mediante la comparación de los resultados experimentales con los obtenidos por medio de modelos

numéricos que generalmente se basan en métodos de elemento finito, en vista de la dificultad en la obtención de soluciones exactas, tanto de manera directa como inversa del análisis.

El método utilizado en este trabajo es el presentado por Caddemi y Caliò (2013), donde se deriva la expresión en forma cerrada de la matriz de rigidez dinámica exacta a partir de la viga de Euler-Bernoulli en la presencia de un número arbitrario de grietas. El procedimiento se adaptó para evaluar la matriz de rigidez dinámica explícita, la cual hace que la evaluación directa de la matriz de rigidez global dinámica exacta para marcos dañados sea posible.

## **SIMULACIÓN DINÁMICA NO LINEAL DE ESTRUCTURAS AGRIETADAS**

En los últimos años, se ha dedicado mayor atención a la solución de problemas directos de vibración en vigas con la presencia de múltiples grietas concentradas. De hecho, una visión más profunda y la comprensión de este último problema son fundamentales para hacer frente a una formulación inversa bien planteada.

En 2010, un método para la detección, ubicación y profundidad de múltiples grietas basado en las mediciones de las frecuencias naturales fue desarrollado por Xiaoping et al. (2010). En este método se obtuvo la relación entre la posición y el tamaño de la grieta y las frecuencias de vibración de la viga con daño. El problema inverso de identificación de daños se resuelve por medio de un procedimiento numérico.

Una solución para determinar el comportamiento de vigas con grietas abiertas fue propuesta por Christides y Barr (1984), quienes desarrollaron su teoría basados en una viga de Euler-Bernoulli a partir del principio variacional de Hu-Washizu. Los autores derivaron la ecuación diferencial de equilibrio y la asociaron con las condiciones de frontera de una viga de Euler-Bernoulli de sección uniforme con uno o más pares de grietas simétricas. Esta teoría fue considerada un importante paso en el desarrollo de teorías de vibración de vigas agrietadas más rigurosas. Por ejemplo, Chondros et al. (1997) propusieron un método más consistente en base a la teoría desarrollada por Christides y Barr (1984). En la cual se obtuvo una función que representa la modificación del campo de esfuerzos causado por grietas, basada en la teoría de la mecánica de la fractura.

Zheng y Kessissoglou (2004) propusieron un método de elementos finitos para calcular el comportamiento dinámico de estructuras agrietadas. En este procedimiento que incorpora el efecto de la distancia entre el nudo del extremo derecho y la ubicación de la grieta. Este efecto se había descuidado en los métodos anteriores basados en el elemento finito que conducen a resultados menos precisos. Este método supera este problema mediante la adición de una matriz global de flexibilidades,  $\mathbf{C}_{ovl}$  a la matriz de flexibilidades sin daño  $\mathbf{C}$ . Esta es otra solución para el comportamiento dinámico de vigas con grietas abiertas verticales basada en el método del elemento finito.

Aun cuando es un hecho reconocido que las grietas no permanecen siempre abiertas, el comportamiento de vigas con grietas que abren y cierran, referidas como grietas de respiración, no han sido estudiadas a fondo. Sí la deflexión estática debido a una componente de carga es tan grande como la amplitud de vibración, entonces la grieta permanecerá abierta todo el tiempo, o si abre y cierra regularmente el problema es lineal. Sin embargo, sí la deflexión estática es pequeña comparada con la amplitud de vibración, la grieta abrirá y se cerrará con el tiempo y el problema será no lineal.

Chondros y Dimarogonas (2001) propusieron un método para calcular el comportamiento con grietas que abren y cierran usando un modelo tipo bilineal donde solo existen dos estados, completamente abierta o completamente cerrada. En este método, la frecuencia de la grieta no depende de la amplitud y se supuso que la transición entre abierto y cerrado de la grieta llega cuando la viga pasa por su forma no deformada.

El problema de identificación de daños se vuelve extremadamente más complicado en el caso de estructuras de marcos. Por lo que Caddemi y Caliò (2013) presentan un nuevo enfoque de gran alcance, destinado a evaluar las frecuencias y los modos de vibrar de estructuras agrietadas tipo marco. Este método se basa en la solución de forma cerrada de la viga de Euler-Bernoulli, derivada por los mismos autores (Caddemi y Caliò, 2009) para los modos de vibración de la viga con múltiples grietas, que está en función de cuatro constantes de integración únicamente, sin



importar el número de secciones transversales agrietadas. El conocimiento de la matriz de rigideces dinámica exacta explícita de la viga multi-agrietada representa resultados fundamentales, ya que permite la evaluación de la matriz de rigideces dinámica global de las estructuras tipo marco con cualquier análisis matricial convencional sin importar el número de daños concentrados a lo largo de sus miembros, ya que los grados de libertad globales de la estructura tipo marco son equivalentes sin importar el número de grietas concentradas existentes. Una vez que se evalúa la matriz de rigideces dinámica global de estructuras dañadas, la solución del problema de valores propios no lineales requiere un procedimiento seguro y confiable. Los autores utilizan en método analítico basado en las propiedades de la matriz de rigideces dinámica, es decir, el algoritmo de Wittrick-Williams (Williams y Wittrick, 1970), lo que nos da todos los valores propios con la precisión deseada. La solución exacta de la matriz de rigideces dinámica de la viga de Euler-Bernoulli multi-agrietada representa un primer e importante paso hacia la solución más complicada del problema inverso de identificación de detección de daños en las estructuras tipo marcos.

### RIGIDEZ FLEXIONANTE EQUIVALENTE

Al presentar la solución de la forma cerrada exacta de los modos de vibrar de la viga de Euler-Bernoulli con múltiples grietas abiertas (Caddemi y Caliò, 2009), se encontró una relación entre el parámetro de daño y la profundidad de la grieta. Con el parámetro de daño y la relación de éste con la profundidad de la grieta se puede calcular la rigidez  $K_{eq}$ , la cual es una rigidez a la flexión reducida por la presencia de daño en el elemento.

#### Relación Entre el Parámetro de Daño y la Profundidad de la Grieta

El parámetro de daño  $\lambda_i$ , el cual representa daño concentrado y relación con los parámetros de singularidad, se muestra para ser relacionado con la profundidad de grietas concentradas mediante la incorporación de algunos modelos clásicos de grietas.

La ec. 1 da la relación entre el parámetro de daño  $\lambda_i$  y los valores de rigidez de resorte rotacional  $K_{eq,i}$  los cuales son equivalentes a el daño concentrado, como sigue:

$$\lambda_i = \frac{E_0 I_0}{L} \frac{1}{K_{eq,i}} \quad i=1, \dots, n \quad (1)$$

Donde  $E_0$  es el módulo de elasticidad,  $I_0$  es el momento de inercia de la sección sin daño,  $L$  es la longitud de elemento y  $n$  es el número de grietas en el elemento. Debe de tenerse en cuenta que para  $\lambda_i = 0$ , es un indicador de la ausencia de grietas y por lo tanto en la ec. 1 será  $K_{eq,i} = \infty$ ; por otra parte, para  $\lambda_i = \infty$ , corresponde a una sección transversal completamente dañada, por lo que la ec. 1 será  $K_{eq,i} = 0$ .

Un enfoque común para modelar del efecto de grietas concentradas en la rigidez flexionante se basa en la introducción de una articulación elástica, la cual macroscópicamente cuantifica la relación entre la carga aplicada y la deformación concentrados alrededor de la grieta (Gounaris y Dimarogonas, 1988). Este método da expresiones para la rigidez de resorte rotacional equivalente para la grieta que depende de la profundidad de la misma. Cuando una grieta de profundidad uniforme  $d$  se presenta en una sección transversal rectangular de ancho  $b$  y altura  $h$ , se puede usar la ec. 2 para unificar el tratamiento de los modelos y así calcular la rigidez equivalente  $K_{eq}$ . Para la localización en el elemento de la rigidez equivalente se introducirá una coordenada adimensional  $\xi_{oi} = x/L$ .

$$K_{eq} = \frac{E_0 I_0}{h} \frac{1}{c(\beta)} \quad (2)$$

Donde  $\beta = d/h$  está definida como la relación entre la profundidad de la grieta  $d$  y la altura de la sección transversal  $h$ ,  $C(\beta)$  es la deformación local adimensional,  $x$  es la distancia del primer nodo de la barra a la grieta,  $L$  la longitud de la barra y donde  $i = 1, \dots, n$ . ( $n$  = número de grietas en la barra).

La deformación local  $C(\beta)$  fue calculada de la función de densidad de energía de deformación, tal como se muestra en la ec. 3 (Liebowitz y Claus, 1968), (Liebowitz et al., 1967), (Rizos et al., 1990) y (Okamura et al., 1969).

$$C(\beta) = 5.346 (1.86\beta^2 - 3.95\beta^3 + 16.375\beta^4 - 37.226\beta^5 + 76.81\beta^6 - 126.9\beta^7 + 172\beta^8 - 143.97\beta^9 + 66.56\beta^{10}) \quad (3)$$

Ostachowicz y Krawczuk (1991) propusieron otra expresión para determinar la deformación local  $C(\beta)$  dada por la ec. 4.

$$C(\beta) = 6\pi\beta^2(0.6384 - 1.035\beta + 3.7201\beta^2 - 5.1773\beta^3 + 7.553\beta^4 - 7.332\beta^5 + 2.4909\beta^6) \quad (4)$$

Debe tenerse en cuenta, que los modelos de grietas basados en vigas continuas, la reducción de la rigidez en la cercanía de la grieta puede ser aproximada, por el enfoque que agrupa flexibilidad mediante la imposición de la discontinuidad de rotación debido a que la flexibilidad concentrada produce la rotación relativa de las secciones afectadas por la grieta. Por ejemplo, el modelo propuesto por Bilello (2001) da la siguiente expresión (ec. 5) para la determinación de la deformación local adimensional  $C(\beta)$ .

$$C(\beta) = \frac{\beta(2-\beta)}{0.9(\beta-1)^2} \quad (5)$$

Chondros *et al.* (1998) propuso un modelo de concentración de flexibilidad agrietada equivalente a un modelo continuo usando la ec. 6 para la obtención de la deformación local adimensional.

$$C(\beta) = 6\pi(1 - \nu^2) (0.6272\beta^2 - 2.04533\beta^3 + 4.5948\beta^4 - 9.9736\beta^5 + 20.2948\beta^6 - 33.0351\beta^7 + 47.1063\beta^8 - 40.7556\beta^9 + 19.6\beta^{10}) \quad (6)$$

La relación entre los parámetros de daño  $\lambda_i$  adoptados en este trabajo y la modelación clásica de las grietas pueden determinarse sustituyendo en la ec. 1 la rigidez equivalente  $K_{eq}$  dada en la ec. 2, y escribiéndolo para la  $i$ -ésima grieta tenemos:

$$\lambda_i = \frac{h}{L} C(\beta_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

La ec. 7 proporciona la relación entre los parámetros de daño  $\lambda_i$  y la deformación local adimensional  $C(\beta_i)$ , dado por las ecs. 3 al 6. Además, la ec. 7 proporciona el significado físico de los parámetros de daño  $\lambda_i$  como “deformación adimensional local”, debido a las grietas y normalizado con respecto a la relación  $L/h$  de la viga.

## DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS MODALES DE EDIFICIOS AGRIETADOS

En esta sección se llevó a cabo la simulación dinámica de un marco de un nivel y dos crujías de concreto en el plano. Se optó por un marco de dichas características para reducir grados de libertad y los resultados fueran interpretados con mayor facilidad. El daño se simuló al introducir la rigidez equivalente  $K_{eq}$  en distintas posiciones en los elementos estructurales simulados como elementos unidimensionales (barras). Estas grietas pueden representar el daño por fatiga causado sismos de gran magnitud. La respuesta dinámica del marco se determinó usando un modelo numérico realizado en SAP2000®.



## Características del Marco Simulado

La estructura adoptada como ejemplo es un marco de concreto de dos crujías sujeto a diferentes escenarios de daño, con diferentes números, posiciones y tamaños de grietas concentradas (ver figura 1). Las letras **A** y **B** identifican a los marcos con los distintos tipos de daño y la letra **U** es para identificar al marco que no posee daño alguno. El marco está compuesto por tres columnas con una longitud  $L_c = 3500$  mm y una sección transversal de  $500 \times 500$  mm, las cuales están unidas a través de dos vigas de longitud  $L_b = 4000$  mm y una sección transversal de  $300 \times 500$  mm. El módulo de elasticidad del concreto se tomó como  $22000$  MPa para un concreto de  $f'c = 25$  MPa y un peso volumétrico de  $2.4$  kN/m<sup>3</sup>.

En el escenario de daño **A** (ver figura 1b), se asume que sólo se tiene una grieta a la mitad de las vigas y en las dos columnas externas, por lo que se tiene un posición relativa del daño en la barra de  $\xi_{o1} = 0.5$ . Los elementos del marco con grietas concentradas, tienen una relación profundidad contra el peralte total de  $\beta = 0.35$  para columnas y  $\beta = 0.5$  para las vigas. Para el cálculo de la deformación local adimensional  $C(\beta)$  se empleó la ec. 5 (Bilello, 2001). Este escenario de daño fue considerado ya que es donde se presentan los momentos positivos bajo cargas gravitacionales y pudieran causar deflexiones excesivas por la presencia de dicha grieta.

En el escenario de daño **B** (ver figura 1c), se asume que los elementos vigas y columnas están sometidos a múltiples grietas. En particular, en las tres columnas se ubican dos grietas en diferentes posiciones, cercanas a los nudos, con una distancia relativa de  $\xi_{o1} = 0.1$  y  $\xi_{o2} = 0.9$ . Las vigas tienen tres grietas posicionadas a una distancia relativa de  $\xi_{o1} = 0.2$ ,  $\xi_{o2} = 0.5$  y  $\xi_{o3} = 0.8$ . Se consideró que  $\beta = 0.35$  para las columnas y  $\beta = 0.5$  para las vigas. Al igual que en el primer escenario de daño se calcularon la deformación local adimensional  $C(\beta)$  empleando la ec. 5 (Bilello, 2001). El escenario **B** trata ubicar del daño donde se formarían las articulaciones plásticas ya que estas podrían llegar a formarse antes de lo previsto por la presencia de las grietas concentradas.

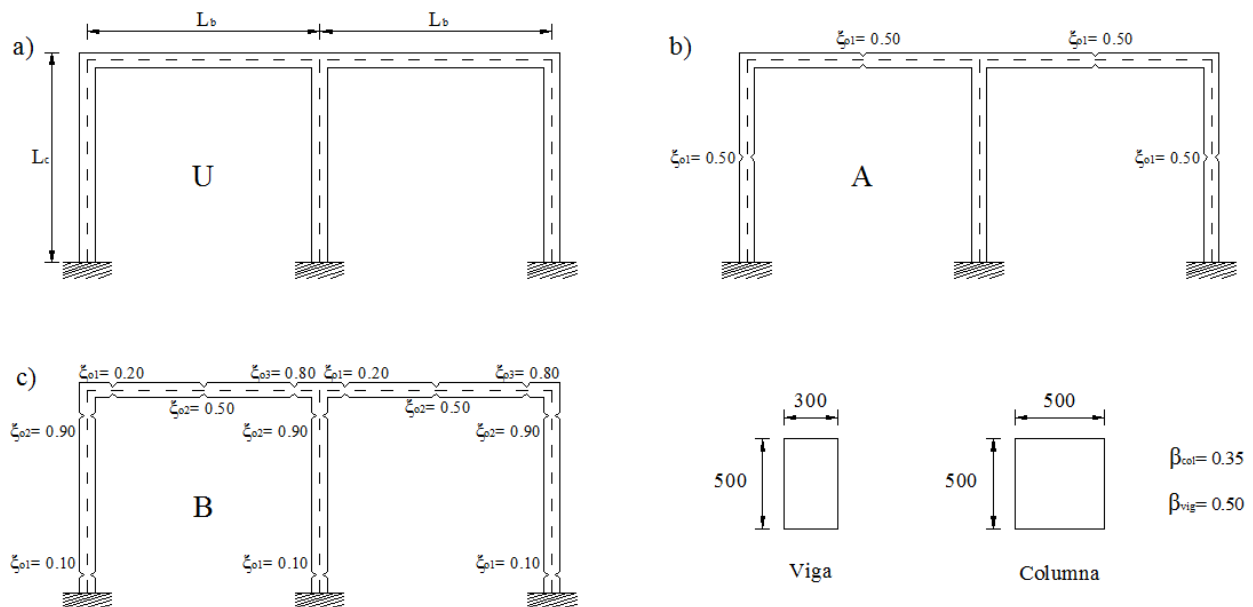


Figura 1 Marco de crujías a) Marco U sin daño; b) Marco A daño moderado; y c) Marco B con daño severo (unidades: mm).

Realizando el cálculo de las rigideces equivalentes para  $\beta= 0.35$  en columnas y  $\beta= 0.50$  para vigas se obtuvieron los valores de  $K_{eq}= 1.48 \times 10^{11}$  N/mm y  $K_{eq}= 4.12 \times 10^{11}$  N/mm respectivamente. Los valores obtenidos fueron introducidos en el SAP2000<sup>®</sup> proporcionando un valor de  $K_{eq}/2$  al inicio o final de cada barra que incidían en los nudos correspondientes a las grietas marcadas en los dos escenarios de daño propuestos (ver figura 1).

### Parámetros modales de los Diferentes Escenarios de Daños Propuestos

Se realizó una comparación de los parámetros modales de los marcos (**A** y **B**) con los distintos escenarios de daño (frecuencias y formas modales), obtenidos a partir de su respuesta dinámica, con el marco **U** que no presentó daño (ver tabla 1).

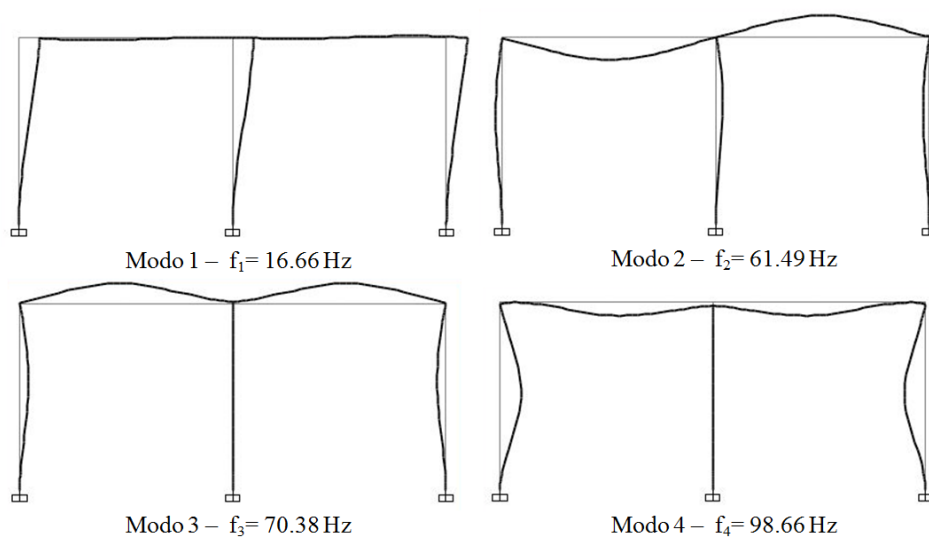
Tabla 1 Comparación de frecuencias de vibración de los marcos U, A y B

Tipo de Marco	Frecuencias (Hz)			
	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
<b>U</b>	16.66	61.49	70.38	98.66
<b>A</b>	16.46	52.09	56.98	73.15
<b>B</b>	9.04	42.31	55.70	85.44

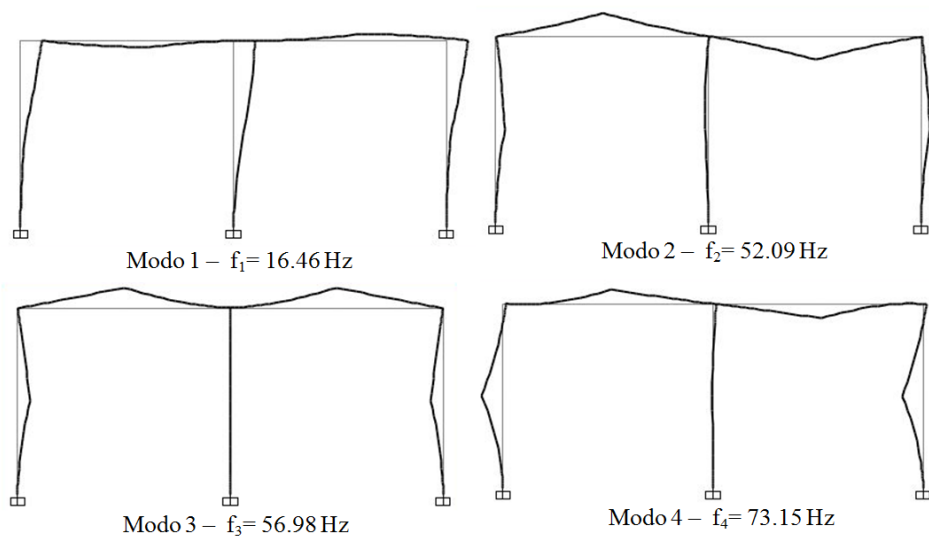
De la Tabla 1 se puede observar que para el modo 1, caso **U** se obtuvo una frecuencia de 16.66 Hz, en cambio las estructuras con daño (con menor rigidez) se obtuvieron frecuencias para el marco **A** y **B** de 16.46 y 9.04 Hz, respectivamente.

Al comparar los resultados del marco sin daño **U** con en marco con daño **A** vemos que la presencia del daño no se refleja de manera severa en el primer modo de vibrar. Esto es debido a que la forma modal es lateral y las grietas en el marco **A** se encuentran localizadas en el centro del claro de los elementos, los cuales contribuyen poco en la pérdida de rigidez para este modo. En cambio en los modos 2, 3 y 4 son los modos más sensibles al daño introducido en la estructura pues presentan desplazamientos en el cual contribuyen las grietas localizadas en el centro del claro de los elementos. De manera similar se comparó los resultados de marco sin daño **U** con el marco **B** el cual es un escenario de daño más crítico que el **A**. En este caso el modo más sensible es el primero ya que su frecuencia para este modo es de 9.04 Hz contra 16.66 Hz. En los modos 2, 3 y 4 también se nota una diferencia de frecuencias entre el marco **U** y el marco **B** menor medida que en el primero modo.

Lo anterior se puede observar gráficamente en las formas modales ya que presentan una mayor amplitud de los elementos con daño del marco **A** una manera más pronunciada y aun todavía más pronunciada la amplitud se observa en el marco con daño **B** (ver figura 2, 3 y 4).



*Figura 2 Primeras cuatro formas modales del marco sin escenario de daño "U"*



*Figura 3 Primeras cuatro formas modales del marco con el escenario de daño "A"*

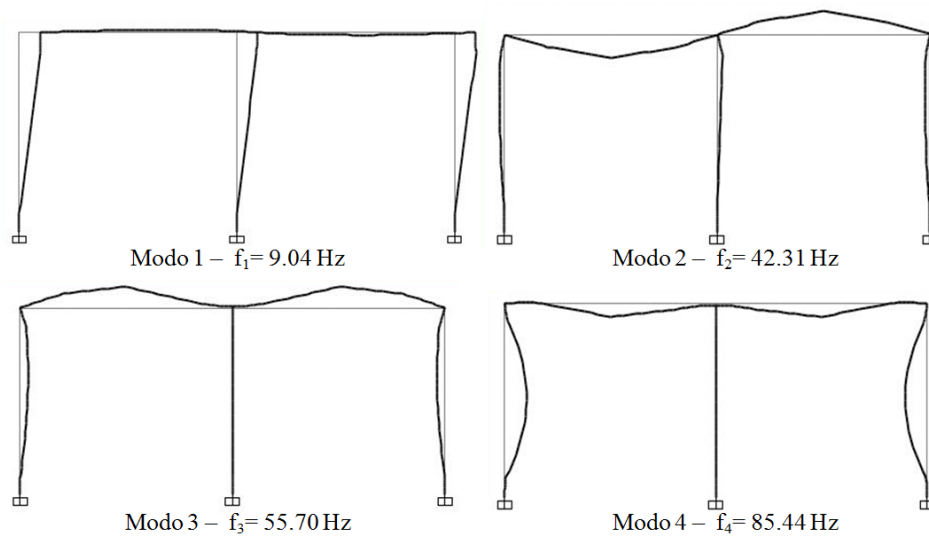


Figura 4 Primeras cuatro formas modales del marco con el escenario de daño "B"

### DETECCIÓN DE DAÑO

Se realizó una comparación de los parámetros dinámicos (frecuencias y formas modales) de los marcos **A** y **B** respecto al marco sin daño, **U** empleando métodos de primer nivel de acuerdo a la clasificación de daño propuesta por Rytter (1993).

Tabla 2 Cambio de frecuencias de los marcos A y B respecto al marco U

Tipo de Marco	Cambio de Frecuencias (%)			
	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
<b>A</b>	1.20	15.29	19.04	25.86
<b>B</b>	45.74	31.19	20.86	13.40

El marco **B** presenta los cambios de frecuencias mayores para los 3 primeros modos, siendo la primera frecuencia en la cual se presentan el mayor cambio pues presenta grietas en los extremos de las columnas que lo hace más flexible para esta forma modal que es lateral. El marco **A** presenta cambios de frecuencia mayores sólo para el modo 4, pues este modo presenta flexión de columnas y vigas, como las grietas se presentan en la parte central de estos elementos para el marco **A** es más flexible que el marco **B** (ver tabla 2).

Al obtener los vectores de formas modales se procedió a ser comparados con el Criterio de Correlación Modal (MAC) y Diferencia Modal Normalizada (NMD, por sus siglas en Inglés) (Morales, 2005) y de esta manera tener una mayor sensibilidad del cambio de los parámetros modales debido a la presencia de daño (ver figura 5).

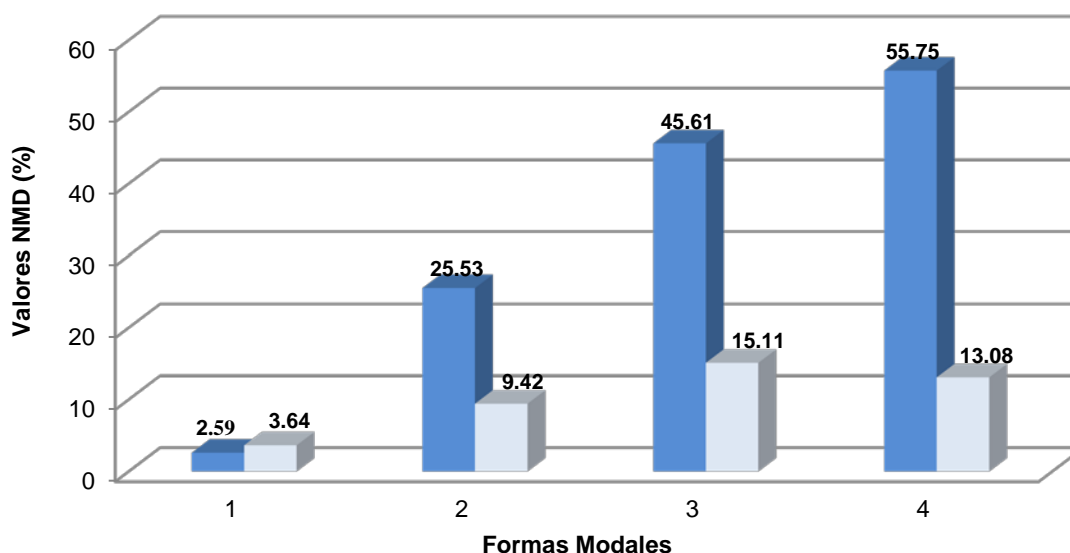
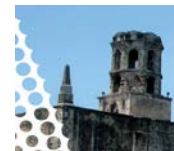


Figura 5 Valores NMD para las formas modales en los escenarios de daño A (■) y B (□)

Al observar los resultados al comparar las formas modales con el método MAC y NMD (ver tabla 3) es evidente que el porcentaje es mayor en el escenario de daño A. Por el contrario en el escenario de daño B el porcentaje de valor NMD es menor y esto indica que indica una adecuada correlación entre los vectores de formas modales.

Tabla 3 Comparación de valores MAC y NMD para los escenarios de daño A y B

Escenario de daño	Valores MAC/NMD			
	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
A	0.9993 / 2.60%	0.9388 / 25.53%	0.8278 / 45.61%	0.7628 / 55.75%
B	0.9986 / 3.64%	0.9912 / 9.42%	0.9776 / 15.11 %	0.9831 / 13.08%

## CONCLUSIONES

En este trabajo se demostró que es posible determinar la simulación dinámica de estructuras tipo marco con daño estructural. Al introducir la rigidez equivalente  $K_{eq}$  y determinar los parámetros modales, es evidente que la estructura es más flexible por lo que las frecuencias van disminuyendo. Para el escenario A, en el cual solo se introdujo una grieta por elemento en el centro del claro, se puede notar que la disminución de frecuencias en los modos 3 y 4 fue más pronunciada. En el escenario B, en el cual fueron introducidas más de una grieta por elemento, en los extremos y en el centro del claro, las frecuencias disminuyeron en mayor medida que en el escenario A, pero en este caso los modos más sensibles al daño fueron los modos 1 y 2. Al comparar las formas modales mediante el criterio MAC/NMD se puede observar que los porcentajes de diferencia entre los vectores modales en el escenario A

van aumentando en un promedio de 18% por modo y en el escenario **B** van aumentando en un promedio de 6% por modo excepto en el modo 4 que disminuye 2%. Lo cual nos indica que el daño presente en el modo **A** es más sensible para modos superiores que el daño presente en el marco **B**.

Al comparar las formas modales con MAC/NMD las grietas en los extremos de los elementos son menos sensibles a provocar cambios en las formas modales que cuando tienen grietas cerca del centro del claro.

El método implementado tiene mayor precisión en elementos con múltiples grietas, lo cual tiene una importancia trascendental cuando se quiere evaluar un método de detección de daño en este tipo de estructuras.

A partir de los parámetros modales de los marcos con agrietamientos, se determinará la respuesta dinámica no-lineal con la cual se emplearán métodos basados en vibraciones de segundo y tercer nivel, para ubicar el daño y medir su severidad, respectivamente (Rytter, 1993). Los resultados encontrados en estos análisis se mostrarán en futuras publicaciones.

## REFERENCIAS

- Bilello C. (2001). Theoretical and experimental investigation on damaged beams under moving systems, Tesis de doctorado, Università degli studi di Palermo, Italy.
- Caddemi S. y Calì I. (2013). The exact explicit dynamic stiffness matrix of multi-cracked Euler-Bernoulli beam and applications to damaged frame structures. *Journal of Sound and Vibration* **332**, 3049-3063.
- Caddemi S. y Calì I. (2009). Exact closed-form solution for the vibration modes of the Euler-Bernoulli beam with multiple open cracks. *Journal of Sound and Vibration* **327**, 473-489.
- Chondros T. G., Dimarogonas A. D. y Yao J. (1997). A consistent cracked bar vibration theory. *Journal of Sound and Vibration* **200:3**, 303-313.
- Chondros T. G., Dimarogonas A. D. y Yao J. (2001). Vibration of a beam with a breathing crack. *Journal of Sound and Vibration* **239:1**, 57-67.
- Christides S. y Barr A. D. S. (1984). One-dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams. *Int. J. Mech. Sci.* **26:11/12**, 639-648.
- Gounaris G. y Dimarogonas A. D. (1988). A finite element of cracked prismatic beam for structural analysis. *Computers and Structures* **28**, 309-313.
- Liebowitz H., Claus Jr. W. D. S. (1968). Failure of notched columns. *Engineering Fracture Mechanics* **1**, 379-383.
- Liebowitz H., Vanderveldt, Harris D. W. (1967). Carry capacity of notched column. *International Journal of Solids and Structure* **3**, 489-500.
- Morales C. A. (2005). Comments on the MAC and the NCO, and a linear modal correlation coefficient. *Journal of Sound and Vibration* **282**, 529-537.
- Ostachowicz W. M., Krawczuk C. (1991). Analysis of the effect of crack on the natural frequencies of cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration* **150:2**, 191-201.



Okamura H., Liu H. W., Chu C. S., Liebowitz H. (1969). A cracked column under compression. *Engineering Fracture Mechanics* **1**, 547-564.

Rizos P. F., Aspragathos, Dimarogonas A. D. (1990). Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes. *Journal of Sound and Vibration* **138:3**, 381-388.

Rytter, T. (1993) Vibration based inspection of civil engineering structure. Tesis de doctorado, Department of building technology and structure engineering, Aalborg University, Denmark.

Williams F. W. y Wittrick W. H. (1970). An automatic computational procedure for calculating natural frequencies of skeletal structures. *International Journal of Mechanical Science* **12:9**, 781-791.

Xiaoping Z., Qiang H. y Feng L. (2010). Analytical approach for detection of multiple cracks in a beam. *Journal of Engineering Mechanics* **136:3**, 345-357.

Zheng D. Y. y Kessissoglou N. J. (2004). Free vibration analysis of a cracked beam by finite element method. *Journal of Sound and Vibration* **273**, 457-475.