



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Experimento de Young de n -rendijas distribuidas uniformemente
sobre un contorno geométrico regular

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciada en Física Aplicada

por

Maricela Flores Sandoval

Director de tesis

Dr. Cruz Meneses Fabián

Puebla Pue.
Junio de 2018



Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Fisico-Matemáticas

Experimento de Young de n -rendijas distribuidas uniformemente
sobre un contorno geométrico regular

Tesis presentada al

Colegio de Física

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciada en Física Aplicada

por

Maricela Flores Sandoval

Director de tesis

Dr. Cruz Meneses Fabián

Puebla Pue.
Junio de 2018

Título: Experimento de Young de n -rendijas distribuidas uniformemente sobre un contorno geométrico regular

Estudiante: MARICELA FLORES SANDOVAL

COMITÉ

Dr. Carlos Ignacio Robledo
Sánchez
Presidente

Dr. Maximino Luis Arroyo
Carrasco
Secretario

Dr. Víctor Hugo Cabrera
Peláez
Vocal

Dr. Gustavo Rodríguez
Zurita
Suplente

Dr. Cruz Meneses Fabián
Director de tesis

Índice general

Resumen	XI
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Objetivos y Estructura de la Tesis	3
2. La luz como onda electromagnética	7
2.1. Onda Luminosa	7
2.2. Interferómetro de Young	9
2.3. Irradiancia	11
2.3.1. Irradiancia para el interferómetro de Young	15
2.4. Difracción	16
2.4.1. Difracción de Fraunhofer: caso unidimensional	16
2.4.2. Aproximación Paraxial	16
2.5. Propiedades de la transformada de Fourier	18
2.5.1. Propiedades	18
2.5.2. Transformada inversa	19
2.5.3. Transformada bidimensional	19
2.5.4. Transformada inversa bidimensional	20
2.6. La Delta de Dirac	20
2.6.1. La Delta de Dirac bidimensional	21
2.6.2. Tren de pulsos unidimensional	21
2.6.3. Tren de pulsos bidimensional	23
2.7. Convolución	24
2.7.1. Convolución en dos dimensiones	25
2.8. Teorema del muestreo	25
2.8.1. Teorema del muestreo en dos dimensiones	27
2.9. Función rectangular	27
3. Algoritmo	31
3.1. Consideraciones del campo óptico	31
3.2. Simulación numérica	34
3.2.1. Simulación numérica para un cuadrado	34
3.2.2. Resultados de la simulación numérica para el contorno del cuadrado	38
3.2.3. Simulación numérica para el contorno de un triángulo	42
3.2.4. Resultados de la simulación numérica para el contorno del triángulo	44
3.2.5. Simulación numérica de una circunferencia	49
3.2.6. Resultados de la simulación numérica de la circunferencia	51
4. Explicación teórica de la simulación utilizando transformada de Fourier	59
4.1. Desarrollo con deltas de Dirac	59
4.1.1. Desarrollo para el contorno de un cuadrado	59
4.1.2. Desarrollo para el contorno de un triángulo	65
4.1.3. Desarrollo para una circunferencia	70

4.2. Desarrollo utilizando Teorema del muestreo	75
4.2.1. Muestreo para el contorno de un cuadrado de ancho nulo	75
4.2.2. Muestreo para el contorno de un triángulo de ancho nulo	81
4.3. Aproximación al caso continuo	85
4.3.1. Contorno de un cuadrado	86
4.3.2. Contorno de un triángulo equilátero	87
4.3.3. Circunferencia	90
5. Resultados experimentales	93
5.1. Experimento basado en las condiciones de la simulación	93
5.2. Condiciones del experimento mediante el uso de una lente	94
5.3. Resultados experimentales para el contorno de un cuadrado	94
5.4. Resultados experimentales para el contorno de un triángulo equilátero	97
5.5. Resultados experimentales para una circunferencia	100
6. Conclusiones	105
A. Códigos	107
Bibliografía	125

Índice de figuras

2.1. Movimiento de una onda electromagnética	7
2.2. Experimento de Young. a) Distribución de las rendijas puntuales. b) Construcción de la interferencia e irradiancia.	9
2.3. Geometría del experimento de Young.	10
2.4. Lugar geométrico de los órdenes m de las franjas brillantes.	10
2.5. Ubicación de las rendijas del experimento de Young en el plano xy , donde la coordenada $y = 0$ es un caso particular.	12
2.6. Aplanamiento de ondas esféricas con la distancia.	16
2.7. Región de difracción	17
2.8. Representación de la delta de Dirac.	21
2.9. Transformada de Fourier a un muestreo realizado a $\zeta(x)$	26
2.10. Función rectangular en 1D con ancho y altura unitarios.	28
2.11. Gráfica de $\text{sinc}(\mu)$	29
3.1. Ubicación de la doble rendija y el punto de referencia.	31
3.2. Patrón de interferencia de dos rendijas puntuales ubicadas simétricamente respecto a y	33
3.3. Representación de los lados del cuadrado para la distribución de rendijas en $z = 0$	34
3.4. Ubicación de las cuatro rendijas iniciales como vértices del contorno de un cuadrado de $1mm$ de lado.	35
3.5. Coordenadas de las rendijas ubicadas a la mitad de cada lado en base al vértice inicial.	35
3.6. Coordenadas de dos rendijas por lado, igualmente espaciadas.	36
3.7. Distribución de rendijas (izquierda) y patrón de interferencia resultante (derecha).	41
3.8. Coordenadas de las rendijas ubicadas en los vértices del contorno de un triángulo.	42
3.9. Ecuación de la recta en la forma punto-pendiente para y en los lados P_2 y P_3	42
3.10. Distribución de rendijas (izquierda) y patrón de interferencia resultante (derecha).	48
3.11. Relación entre coordenadas polares y cartesianas.	49
3.12. Distribución de cinco rendijas en el plano $z = 0$	49
3.13. Distribución de rendijas (izquierda) y patrón de interferencia resultante (derecha).	58
4.1. Ejes coordenados $p_{\theta_1}, p_{\theta_1\perp}$ y $w_{\theta_1}, w_{\theta_1\perp}$ obtenidos al rotar los ejes x, y y μ, ν a un ángulo θ_1	81
4.2. Rectas que ayudan a formar el triángulo equilátero de $1mm$ de lado, cuyas ecuaciones se muestran en la forma normal.	82
4.3. Tren de pulsos modificado para realizar el muestreo del triángulo equilátero.	83
4.4. Tren de pulsos con periodo $\frac{\sqrt{3}x_w}{2}$ en p_{θ_1} y x_w en $p_{\theta_1\perp}$ más un desplazamiento $\frac{x_w}{2}$ que permite realizar el muestreo en los vértices del triángulo.	84
4.5. Tren de pulsos con periodo $\frac{\sqrt{3}x_w}{6}$ en p_{θ_1} y $\frac{x_w}{3}$ en $p_{\theta_1\perp}$ más un desplazamiento $\frac{x_w}{6}$	85
4.6. Abertura cuya forma es el contorno de un cuadrado de $1mm$ de lado y cuyo ancho es del orden de $10^{-4}m$	86
4.7. Patrón de difracción de una rendija cuya forma es el contorno de un cuadrado de $1mm$ de lado y cuyo ancho es de $10^{-4}m$	87
4.8. Regiones que forman dos triángulos equiláteros.	89
4.9. Abertura cuya forma es el contorno de un triángulo equilátero de $1mm$ de lado y cuyo ancho es del orden de $10^{-4}m$	89

4.10. Patrón de difracción de una rendija cuya forma es el contorno de un triángulo de $1mm$ de lado y cuyo ancho es de $10^{-4}m$	90
4.11. Regiones que forman dos círculos de diferentes radios.	91
4.12. Abertura cuya forma es una circunferencia de $0.5mm$ de radio y cuyo ancho es de $0.1mm$	91
4.13. Patrón de difracción de una rendija cuya forma es una circunferencia de $0.5mm$ de radio y cuyo ancho es de $0.1mm$	92
5.1. Configuración experimental.	94
5.2. Patrones de interferencia obtenidos experimentalmente para rendijas en los vértices de un cuadrado además de una, dos, ..., nueve rendijas por lado.	96
5.3. Patrones de interferencia obtenidos experimentalmente para rendijas ubicadas en los vértices además de una, dos, ..., once por lado.	99
5.4. Patrones de interferencia obtenidos experimentalmente para 1, 2,..., 25 y 50 rendijas ubicadas en una circunferencia.	103

Índice de cuadros

3.1. Coordenadas de las rendijas en P_1	36
---	----

Agradecimientos

- A CONACYT por el apoyo para el desarrollo de éste trabajo en el marco del proyecto “Modulación compleja mediante modulación de amplitud vectorial fuera de fase para polarimetría interferométrica de corrimiento de fase” con número de convenio 257853.
- Al Dr. Cruz Meneses Fabián por permitirme realizar este trabajo bajo su dirección.
- Al Dr. Víctor Hugo Cabrera Peláez por su importante contribución para alcanzar los resultados experimentales buscados.
- Al Dr. Agustín Serrano Ricardo por permitir el uso del laboratorio en el Centro Universitario de Vinculación y Transferencia de Tecnología (CUVyTT) para elaborar las rendijas.
- A los miembros del jurado por sus valiosas observaciones.
- A los excelentes profesores que me impartieron diversas materias, por su empeño y dedicación.
- A todas las personas que contribuyeron a que se lograra este objetivo.

Resumen

Como es bien conocido desde hace más de dos siglos, el interferómetro de Young o también llamado el experimento de la doble rendija produce un patrón de franjas brillantes y oscuras igualmente espaciadas al realizar la observación a campo lejano. La frecuencia y la orientación de estas franjas depende de la distancia de separación y la orientación de las rendijas. En este trabajo de tesis se ha demostrado que al aumentar el número de rendijas y al distribuirlas uniformemente sobre un contorno, el patrón de interferencia resulta tener alta simetría. Para describir el patrón de intensidad resultante se ha propuesto la interferencia de n rendijas y la difracción de Fraunhofer. En primera instancia se implementó un algoritmo para superponer a campo lejano n campos emanados de fuentes puntuales dispuestas sobre los contornos regulares; como una alternativa, las fuentes puntuales se describen como deltas de Dirac desplazadas y se calcula la transformada de Fourier. En segunda instancia, las rendijas fueron descritas como el muestreo de una función de abertura continua por un peine de Dirac y posteriormente se calculó la transformada de Fourier. La similitud de los patrones fue la esperada sobre todo cuando n es muy grande, en todos los casos se aproxima a la difracción de la abertura.

Palabras clave

Interferómetro, interferencia, difracción, transformada de Fourier, región de Fraunhofer.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

Clásicamente la luz es considerada como una onda electromagnética, matemáticamente se describe mediante una función que debe satisfacer la ecuación de onda, la cuál es una ecuación diferencial lineal de segundo orden en derivadas parciales, ya que la onda tiene que ser una función de varias variables independientes; es decir, las de espacio y tiempo. La solución más simple son ondas de tipo armónicas, planas o esféricas [1]. Si se describen fenómenos periódicos en el tiempo, la ecuación de onda se reduce a la ecuación de Helmholtz [2].

Al propagarse, la luz puede interactuar con distintos objetos o medios, lo que provoca ciertos fenómenos, para el interés de este trabajo consideramos un par de ellos, la interferencia y la difracción, los cuales están relacionados entre sí. Por un lado, la interferencia se produce cuando se superponen dos o más ondas en algún punto en el espacio generando una onda resultante con una nueva amplitud, mientras que la difracción se produce cuando la luz se desvía al encontrar un obstáculo o al atravesar una rendija, estas ondas desviadas interfieren entre sí en algún punto generando una distribución de intensidad llamada patrón de difracción. Con ello podemos encontrar que la difracción y la interferencia son fenómenos inseparables, al punto que no es siempre sencillo distinguirlos, esto debido a que la difracción es una forma particular de interferencia. La difracción de la luz se divide en dos clases: cuando el obstáculo que desvía la luz se encuentra a una distancia muy pequeña tanto de la fuente de luz como del detector ocurre la llamada difracción de Fresnel o de campo cercano; en el caso contrario, cuando la rendija esta a una distancia muy grande se observa difracción de Fraunhofer o de campo lejano. El término campo cercano se puede considerar como la región entre el plano de difracción de entrada y la región de Fraunhofer [3].

La interferometría estudia la superposición de dos a más ondas, en óptica, las ondas luminosas generalmente coherentes forman un patrón de franjas brillantes y oscuras. Las franjas brillantes son formadas debido a las ondas que llegan en fase, efecto conocido como interferencia constructiva, mientras que las franjas oscuras son formadas debido a las ondas

que llegan en contrafase, conocida como interferencia destructiva. La separación entre dos franjas brillantes o dos franjas oscuras es de una longitud de onda.

Es conocido que la forma de las franjas, el contraste de ellas, así como el número, refleja la diferencia de las fases, amplitudes, estados de polarización, grado de coherencia entre las ondas involucradas en la interferencia [4].

1.2. Objetivos y Estructura de la Tesis

OBJETIVO GENERAL

Estudiar los diferentes patrones de interferencia de acuerdo al número de rendijas puntuales ubicadas sobre el contorno de tres figuras geométricas regulares, dar una explicación teórica a la variación de dichos patrones y poder compararlo con la difracción de Fraunhofer de una distribución continua.

OBJETIVOS PARTICULARES

- Desarrollar el modelo teórico para las n -rendijas, utilizando superposición de ondas.
- Implementar numéricamente el modelo teórico en la computadora.
- Obtener los patrones de interferencia mediante la simulación.
- Hacer una descripción teórica de la variación de los patrones con ayuda de la transformada de Fourier.
- Obtener los patrones de difracción para el caso continuo; esto es, considerar una abertura en vez de n -rendijas.
- Hacer la comparación entre los patrones de las n -rendijas y los de las aberturas.
- Implementar experimentalmente el interferómetro de Young de las n -rendijas.
- Obtener los patrones de interferencia experimentalmente.
- Realizar las comparaciones de los patrones obtenidos mediante la simulación con los experimentales.

ESTRUCTURA DE LA TESIS

Inicialmente se hace una revisión de el Interferómetro de Young, también se aborda la teoría de difracción en la que se concluye que los patrones de difracción para la región de Fraunhofer son descritos matemáticamente por la transformada de Fourier, por simplicidad se aborda el caso unidimensional el cual se generaliza a dos dimensiones. Se menciona además toda la teoría de la cual se hará uso en los capítulos tres y cuatro. Se establece la formulación matemática del interferómetro de n rendijas, con el objetivo de hacer una comparación se implementa un algoritmo en Wolfram Mathematica 10 para llevar a cabo la simulación de los patrones de interferencia generados por la distribución de n rendijas y de los patrones de difracción generados por las aberturas a las que se aproxima dicha distribución.

Se lleva a cabo una comparación entre los resultados de la simulación para la distribución de n rendijas y la de cada abertura. Para tener métodos adicionales a la superposición de ondas, se aborda teóricamente la variación de los patrones en base al número de rendijas mediante la transformada de Fourier. Finalmente se comparan los resultados de las simulaciones con los experimentales.

En el capítulo 2 se menciona la representación matemática de una onda luminosa, así como la diferencia entre una onda plana y una esférica. Se presentan los conceptos básicos del experimento de la doble rendija. Se usa la aproximación paraxial para deducir la expresión matemática que describe la difracción para la región de Fraunhofer; con ello, se enuncian las propiedades de dicha expresión matemática. Se mencionan además todos los conceptos y teoremas que se utilizan en los capítulos posteriores, tales como la función delta de Dirac, la función rectángulo, el tren de pulsos de Dirac, la operación de convolución, el teorema del muestreo. Inicialmente se elabora para una dimensión y posteriormente, se hace la generalización a dos dimensiones.

En el capítulo 3 se establece la forma del campo electromagnético a considerar. Se presenta el algoritmo diseñado mediante la superposición de ondas y los resultados de la simulación para la distribución de n rendijas para las tres aberturas correspondientes.

En el capítulo 4 se presentan dos desarrollos teóricos alternativos. El primero, considera a las rendijas como deltas de Dirac para después hacer uso de la transformada de Fourier y obtener el patrón de interferencia. El segundo desarrollo teórico utiliza un muestreo de una abertura continua de ancho nulo. Para el primer desarrollo, se obtuvieron los patrones de las tres aberturas y se compararon con los resultados previos; para el segundo método únicamente se obtuvieron los patrones del cuadrado y se planteó el método para el contorno del triángulo.

En el capítulo 5 se presenta la configuración del experimento y los resultados experimentales para los tres contornos geométricos.

Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones del trabajo realizado.

Capítulo 2

La luz como onda electromagnética

2.1. Onda Luminosa

Según la teoría electromagnética una onda luminosa consiste en un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo magnético $\vec{H}$ mutuamente perpendiculares viajando en el tiempo y en el espacio (figura 2.1).

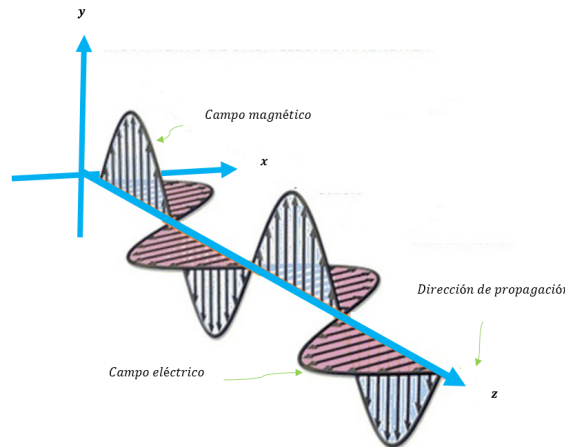


Figura 2.1: Movimiento de una onda electromagnética

Matemáticamente es suficiente con especificar el valor del campo eléctrico como función del tiempo t debido a la relación $E = cB$. Si esta onda tiene una amplitud A , una velocidad v y una longitud de onda λ , el campo eléctrico en una forma sencilla (caso unidimensional) se puede expresar como

$$E(x, t) = A(x) \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \quad (2.1)$$

donde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.2)$$

es la magnitud del vector de propagación conocido como número de onda y

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi v}{\lambda} \quad (2.3)$$

la frecuencia angular con

$$\nu = \frac{v}{\lambda}. \quad (2.4)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.1) el campo eléctrico se puede expresar como

$$E(x, t) = A(x) \cos(kx - \omega t) \quad (2.5)$$

El argumento completo de la función coseno es la fase φ de la onda donde

$$\varphi = (kx - \omega t) \quad (2.6)$$

Para $t = x = 0$

$$E(x, t) = E(0, 0) = 0$$

lo cual es un caso especial. Con más generalidad se puede escribir

$$E(x, t) = A(x) \cos(kx - \omega t + \varphi) \quad (2.7)$$

donde φ es la fase inicial.

La fórmula de Euler dice

$$e^{i(kx - \omega t + \varphi)} = \cos(kx - \omega t + \varphi) + i \sin(kx - \omega t + \varphi) \quad (2.8)$$

por lo que

$$E(x, t) = \text{Re}[A(x)e^{i(kx - \omega t + \varphi)}]. \quad (2.9)$$

Por facilidad matemática, la ecuación (2.7) puede escribirse

$$E(x, t) = A(x)e^{i(kx - \omega t + \varphi)} \quad (2.10)$$

entendiendo que se toma la parte real.

Para el caso de una onda que viaja en el espacio tridimensional propagándose en la dirección del vector $\vec{k}$, diferente de la dirección del vector $\vec{p}$ que va del origen al punto $P(x, y, z)$ que se considere, esta onda se puede representar por

$$\vec{E}(\vec{p}, t) = A(\vec{p})e^{i(\vec{k} \cdot \vec{p} - \omega t + \varphi)} \quad (2.11)$$

donde

$$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) \quad (2.12)$$

si se trata de una onda plana y por:

$$\vec{E}(\vec{p}, t) = \vec{E}(p, t) = \frac{A(\vec{p})}{p} e^{i(kp - \omega t + \varphi)} \quad (2.13)$$

si se trata de una onda esférica, donde $p = |\vec{p}|$. En la sección 2.2 se hará uso tanto de la onda plana como de la esférica.

2.2. Interferómetro de Young

En la figura 2.2 a) se observan dos rendijas puntuales ubicadas simétricamente en el eje x separadas por una distancia d , éstas son iluminadas por una onda plana coherente y monocromática, produciendo dos ondas esféricas que se expanden. Estas ondas interfieren en la región donde se superponen. b) Visto desde arriba, la luz difractada a través de las rendijas, se extiende al plano de observación donde la interferencia de las dos ondas esféricas produce una variación en la irradiancia que se traza a la derecha de uv , cuando los campos eléctricos se suman para dar un mayor valor se conoce como interferencia constructiva (líneas segmentadas marcadas con C). Hay otros como las de las líneas segmentadas marcadas con D, en las que las ondas de las dos fuentes están siempre desfasadas 180° . Esto sucede cuando una fuente tiene un campo eléctrico positivo máximo y el otro tiene el mismo valor negativo por lo que los campos siempre se cancelan y no se detecta luz, esta condición se llama interferencia destructiva.

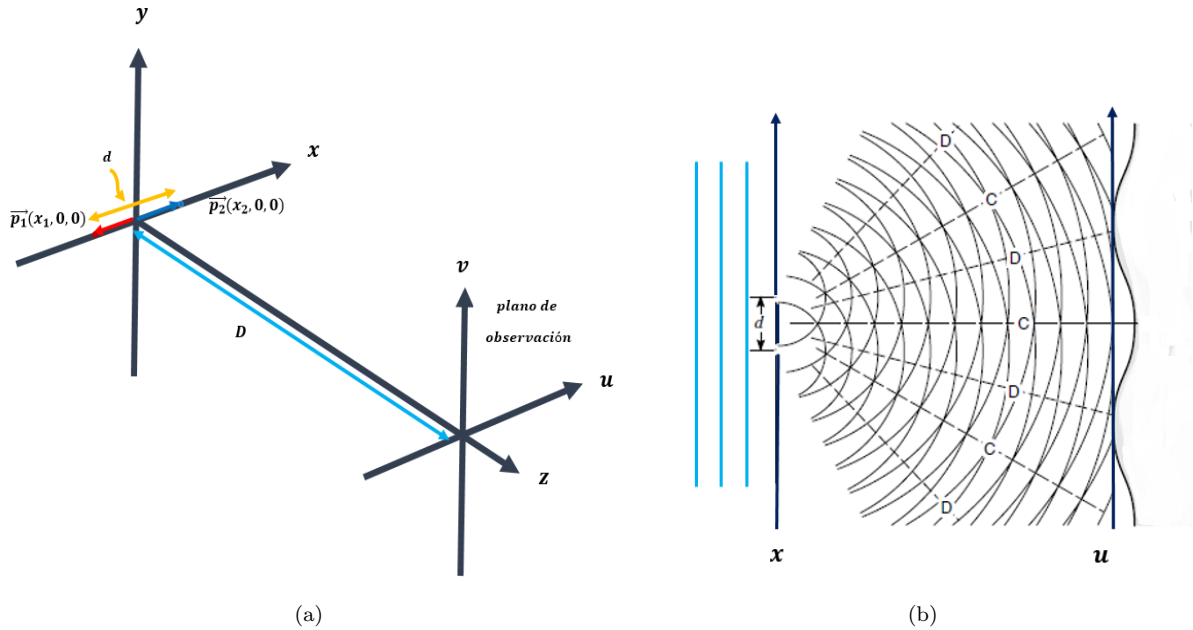


Figura 2.2: Experimento de Young. a) Distribución de las rendijas puntuales. b) Construcción de la interferencia e irradiancia.

Para encontrar la relación entre la separación de las rendijas y la separación entre órdenes se observa la geometría de la figura (2.3)

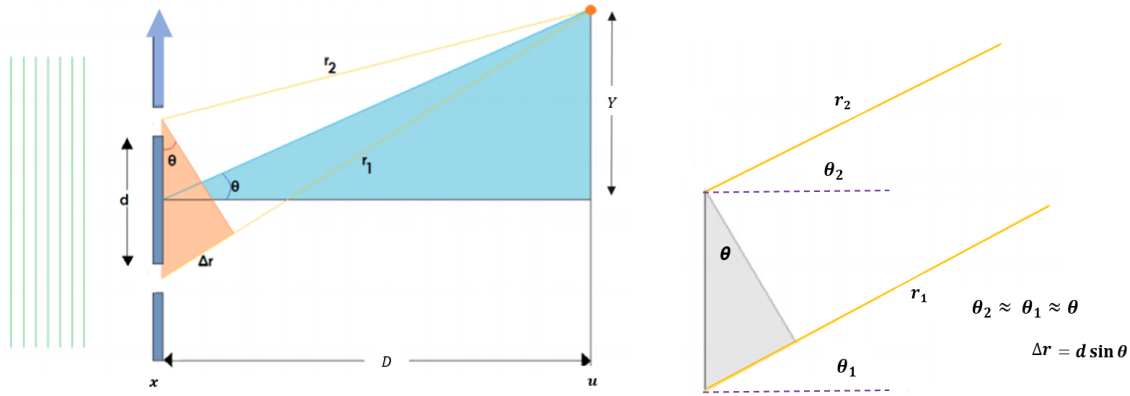
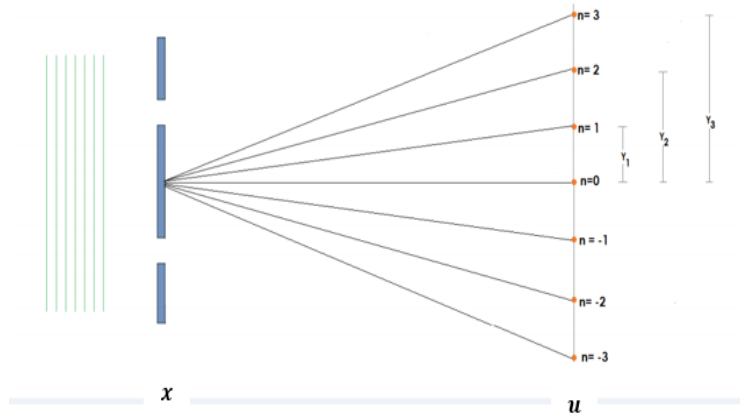


Figura 2.3: Geometría del experimento de Young.


 Figura 2.4: Lugar geométrico de los órdenes m de las franjas brillantes.

Si el plano de observación está lejos, se puede considerar $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta$, además $\Delta r = d \sin \theta$.

En el caso de interferencia constructiva, los frentes de onda llegan al plano de observación en fase. Esto significa que hay un número entero de diferencia de longitud de onda entre las dos trayectorias recorridas por la luz hasta el punto de una franja brillante. Por lo tanto, los ángulos en los que se producen las franjas brillantes están dados por

$$\Delta r = d \sin \theta = n\lambda \quad (n = 1, 2, 3...). \quad (2.14)$$

Si la ecuación anterior se resuelve para los ángulos θ en los que se encuentran las franjas brillantes y se aplica la aproximación de que para ángulos pequeños (menores a 5°) el seno puede reemplazarse por su ángulo en radianes, se obtiene

$$\theta = \frac{n\lambda}{d} \quad (2.15)$$

Además, $\theta \approx \tan(\theta) = \frac{Y_{max}}{D}$ con lo cual, determinando la posición de los máximos de intensidad (Y_{max}), se tiene la relación

$$Y_{max} = D\theta. \quad (2.16)$$

Igualando las ecuaciones (2.15) y (2.16) se obtiene

$$Y_{max} = \frac{nD\lambda}{d}. \quad (2.17)$$

Para el caso de interferencia destructiva, la diferencia de camino óptico es $\Delta r = (n + \frac{1}{2})\lambda$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), por lo que la posición de los mínimos de intensidad sería

$$Y_{min} = \frac{(n + \frac{1}{2})D\lambda}{d}. \quad (2.18)$$

2.3. Irradiancia

Al hablar de la radiación electromagnética que llega a una superficie, se hace referencia a la “irradiancia”, designada por I , la cual es la energía media por unidad de área por unidad de tiempo. Como se mencionó en la sección anterior cuando se superponen dos o más ondas, en el plano uv se observa un patrón de interferencia, el cual se manifiesta como una distribución de máximos y mínimos de irradiancia luminosa, a continuación se hace el desarrollo para encontrar dicha irradiancia.

La función $\vec{E}(\vec{p}, t)$ que representa a la onda luminosa se puede separar en la variable temporal y la espacial, al introducir esta nueva función en la ecuación de onda se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias. Si se describen fenómenos periódicos en el tiempo, con frecuencia $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ la ecuación de onda se reduce a la ecuación de Helmholtz cuyas soluciones son funciones que sólo dependen de la parte espacial. Considerando este tipo de soluciones y observando la figura 2.5 se tiene lo siguiente

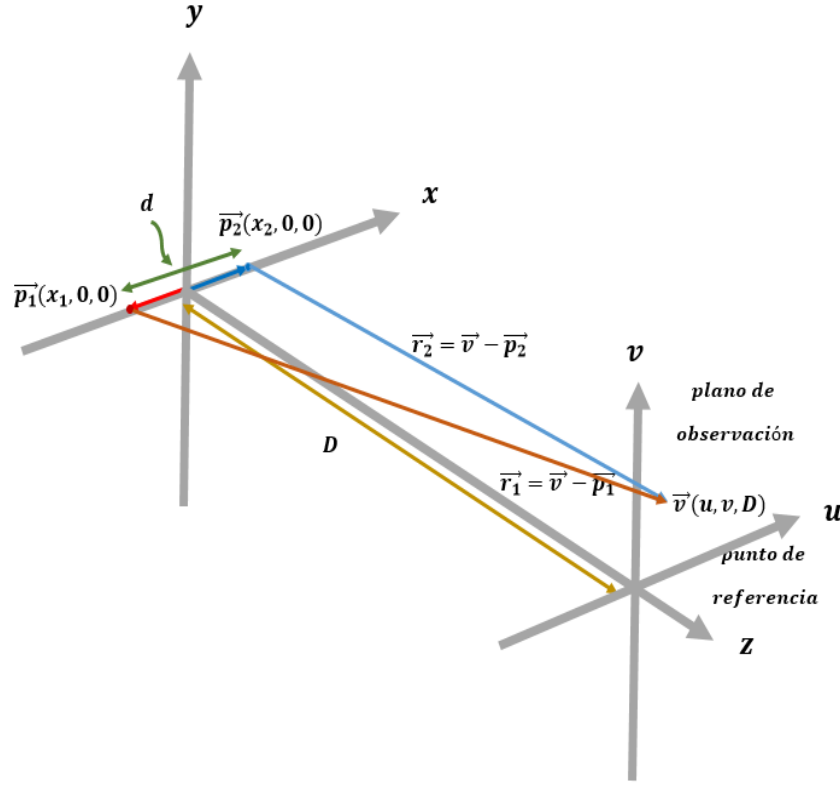


Figura 2.5: Ubicación de las rendijas del experimento de Young en el plano xy , donde la coordenada $y = 0$ es un caso particular.

Antes de que el frente de onda pase por las rendijas tiene la forma

$$\vec{E}(\vec{p}) = A(\vec{p})e^{i(\vec{k} \cdot \vec{p})} \quad (2.19)$$

con $\vec{p}(x, y, z)$.

De las rendijas emergen dos campos con frentes de onda esféricos, los cuales se propagan una distancia $D \gg d$ hasta donde su superposición es observada en el plano uv . Estos campos son representados por

$$\vec{E}_1(\vec{p}_1, \vec{v}) = A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})e^{ikr_1} \quad y \quad \vec{E}_2(\vec{p}_2, \vec{v}) = A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})e^{ikr_2} \quad (2.20)$$

con

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{v} - \vec{p}_1, & \vec{r}_2 &= \vec{v} - \vec{p}_2 \\ r_1 &= |\vec{r}_1| = |\vec{v} - \vec{p}_1|, & r_2 &= |\vec{r}_2| = |\vec{v} - \vec{p}_2| \\ \vec{p}_1 &= \vec{p}_1(x_1, 0, 0) & \vec{p}_2 &= \vec{p}_2(x_2, 0, 0) \end{aligned} \quad (2.21)$$

y

$$A'(\vec{p}_1, \vec{v}) = \frac{A(\vec{v})}{r_1} \quad A'(\vec{p}_2, \vec{v}) = \frac{A(\vec{v})}{r_2} \quad (2.22)$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{Total}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{v}) = \vec{E}_1(\vec{p}_1, \vec{v}) + \vec{E}_2(\vec{p}_2, \vec{v}) \quad (2.23)$$

$$= A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})e^{ikr_1} + A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})e^{ikr_2} \quad (2.24)$$

y la irradiancia

$$I \sim |\vec{E}_{Total}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{v})|^2 \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= [A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})e^{ikr_1} + A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})e^{ikr_2}] \cdot [A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})e^{-ikr_1} + A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})e^{-ikr_2}] \\ &= [A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})]^2 + [A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})]^2 + A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})e^{-ik(r_2-r_1)} \\ &\quad + A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})e^{ik(r_2-r_1)} \\ &= [A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})]^2 + [A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})]^2 + A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})[e^{-ik(r_2-r_1)} + e^{ik(r_2-r_1)}] \\ &= [A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})]^2 + [A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})]^2 + 2A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})\cos(k(r_2-r_1)) \\ &= a_1 + b_1 \cos(\alpha_1) \end{aligned} \quad (2.26)$$

con $a_1 = [A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})]^2 + [A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})]^2$, $b_1 = 2A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})$ y $\alpha_1 = k(r_2 - r_1)$. Donde a_1 hace referencia a la luz de fondo, b_1 es el contraste o luz de modulación y $b_1 \cos(\alpha_1)$ proporciona la descripción del término de interferencia.

Se puede observar que

$$|\vec{E}_1(\vec{p}_1, \vec{v})|^2 = [A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})]^2 \quad y \quad |\vec{E}_2(\vec{p}_2, \vec{v})|^2 = [A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})]^2. \quad (2.27)$$

Si se agrega una tercer rendija, de ésta emerge otro campo $\vec{E}_3(\vec{p}_3, \vec{v}) = A'_3(\vec{p}_3, \vec{v})e^{ikr_3}$, donde $A'_3(\vec{p}_3, \vec{v})$, $\vec{r}_3$, $\vec{p}_3$ cumplen con las ecuaciones (2.21) y (2.7) con lo cual ahora el campo total se compone de la suma de los tres campos, con ello la irradiancia está dada por

$$\begin{aligned}
 I &= [A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})e^{ikr_1} + A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})e^{ikr_2} + A'_3(\vec{p}_3, \vec{v})e^{ikr_3}] \cdot [A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})e^{-ikr_1} + A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})e^{-ikr_2} + A'_3(\vec{p}_3, \vec{v})e^{-ikr_3}] \\
 &= [A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})]^2 + [A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})]^2 + [A'_3(\vec{p}_3, \vec{v})]^2 + A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})e^{-ik(r_2-r_1)} \\
 &+ A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})A'_3(\vec{p}_3, \vec{v})e^{-ik(r_3-r_1)} + A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})A'_3(\vec{p}_3, \vec{v})e^{-ik(r_3-r_2)} + A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})e^{ik(r_2-r_1)} \\
 &+ A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})A'_3(\vec{p}_3, \vec{v})e^{ik(r_3-r_1)} + A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})A'_3(\vec{p}_3, \vec{v})e^{ik(r_3-r_2)} \\
 &= [A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})]^2 + [A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})]^2 + [A'_3(\vec{p}_3, \vec{v})]^2 + A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})[e^{-ik(r_2-r_1)} + e^{ik(r_2-r_1)}] \\
 &+ A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})A'_3(\vec{p}_3, \vec{v})[e^{-ik(r_3-r_1)} + e^{ik(r_3-r_1)}] + A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})A'_3(\vec{p}_3, \vec{v})[e^{-ik(r_3-r_2)} + e^{ik(r_3-r_2)}] \\
 &= [A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})]^2 + [A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})]^2 + [A'_3(\vec{p}_3, \vec{v})]^2 + 2A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})\cos(k(r_2-r_1)) \\
 &+ 2A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})A'_3(\vec{p}_3, \vec{v})\cos(k(r_3-r_1)) + 2A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})A'_3(\vec{p}_3, \vec{v})\cos(k(r_3-r_2)) \\
 &= a_2 + \beta_1 \cos(\gamma_1) + \beta_2 \cos(\gamma_2) + \beta_3 \cos(\gamma_3) \\
 &= a_2 + b_2 \cos(\alpha_2)
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

donde

$$\begin{aligned}
 a_2 &= [A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})]^2 + [A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})]^2 + [A'_3(\vec{p}_3, \vec{v})]^2 \\
 \beta_1 &= 2A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})A'_2(\vec{p}_2, \vec{v}) \\
 \beta_2 &= 2A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})A'_3(\vec{p}_3, \vec{v}) \\
 \beta_3 &= 2A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})A'_3(\vec{p}_3, \vec{v}) \\
 \gamma_1 &= k(r_2-r_1) \\
 \gamma_2 &= k(r_3-r_1) \\
 \gamma_3 &= k(r_3-r_2) \\
 b_2 \cos(\alpha_2) &= \beta_1 \cos(\gamma_1) + \beta_2 \cos(\gamma_2) + \beta_3 \cos(\gamma_3)
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

con

$$\begin{aligned}
 b_2^2 &= \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + 2\beta_1\beta_2 \cos(\gamma_2 - \gamma_1) \\
 &+ 2\beta_1\beta_3 \cos(\gamma_3 - \gamma_1) + 2\beta_2\beta_3 \cos(\gamma_3 - \gamma_2)
 \end{aligned}
 \tag{2.30}$$

$$\tan(\alpha_2) = \frac{\beta_1 \sin(\gamma_1) + \beta_2 \sin(\gamma_2) + \beta_3 \sin(\gamma_3)}{\beta_1 \cos(\gamma_1) + \beta_2 \cos(\gamma_2) + \beta_3 \cos(\gamma_3)}.
 \tag{2.31}$$

El resultado en (2.28) muestra que aunque se sumen más campos, al obtener la irradiancia siempre habrá un término referente a la luz de fondo, uno al contraste o luz de modulación y otro que proporcione la descripción del término de interferencia.

2.3.1. Irradiancia para el interferómetro de Young

Para el interferómetro de Young donde las ondas que llegan al plano de observación son esféricas, la irradiancia es

$$\begin{aligned}
 I &= |e^{ikr_1} + e^{ikr_2}|^2 \\
 &= 1 + 1 + 2\mathcal{R}\{e^{ikr_1}e^{-ikr_2}\} \\
 &= 2 + 2\cos[k(r_2 - r_1)] \\
 &= 4\cos^2\left[\frac{1}{2}k(r_2 - r_1)\right]
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

donde r_1 y r_2 están dados por (2.21).

Hay dos puntos importantes a recordar acerca de la irradiancia del patrón de interferencia, estos son:

- La irradiancia varía con el coseno al cuadrado del argumento que se menciona en (2.32).
- Los máximos ocurren para diferencia de camino nulos con números enteros de la longitud

de onda, mientras que los mínimos representan diferencias de camino de los números impares de la mitad de la longitud de onda.

2.4. Difracción

La difracción es un fenómeno ondulatorio que se hace más notorio cuando un frente de onda se encuentra parcialmente obstaculizado por un objeto absorbente o refractor. En éste, las ondas desviadas interfieren entre sí en algún punto generando una distribución de irradiancia llamada patrón de difracción.

2.4.1. Difracción de Fraunhofer: caso unidimensional

Se considera la difracción producida por un obstáculo (caracterizado con una transmitancia en amplitud) como una nueva distribución de amplitud y de fase. La amplitud propagada puede describirse como una contribución de ondas secundarias (principio de Huygens), en la región de Fraunhofer, se consideran como ondas planas [5].



Figura 2.6: Aplanamiento de ondas esféricas con la distancia.

2.4.2. Aproximación Paraxial

En la figura (2.7) se muestra una distribución de fuentes secundarias sobre el plano x , esta distribución puede ocupar una región denotada por Δx . El campo total de la superposición de ondas secundarias se detecta en el plano de observación paralelo a una distancia D medida sobre el eje z , se considera el eje u , que es paralelo a x , aquí cada onda esférica tiende a ser plana. Este campo total define un patrón de difracción conocido como patrón de difracción de Fraunhofer o de campo lejano.

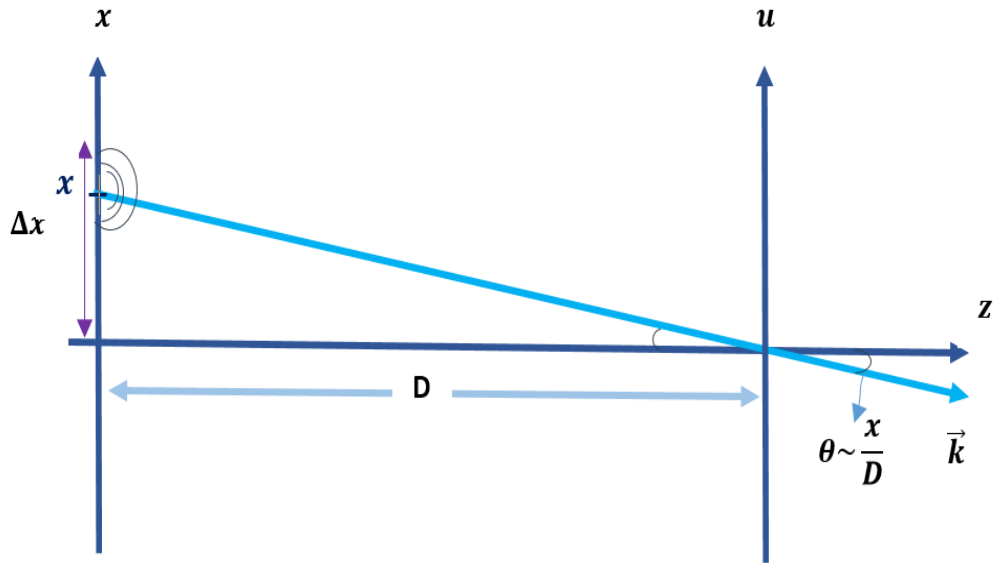


Figura 2.7: Región de difracción

Una onda secundaria puede verse de la forma

$$E_{secundaria}(u, t) = A\zeta(x)e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (2.33)$$

donde A es la amplitud de la onda plana incidente, $\zeta(x)$ la transmitancia en amplitud (función objeto) correspondiente al obstáculo en la posición x . Considerando que las trayectorias de los rayos forman ángulos pequeños con el eje óptico (aproximación paraxial) se obtiene que el vector de onda es

$$\vec{k} = (k \sin \theta, 0, k \cos \theta) \approx k(\theta, 0, 1) = k\left(-\frac{x}{D}, 0, 1\right) \quad (2.34)$$

y para $\vec{r} = (u, 0, D)$ se tiene

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \frac{-kux}{D} + kD \quad (2.35)$$

entonces la contribución de una onda secundaria situada en x es proporcional a

$$E_{secundaria}(u, t) = A\zeta(x)e^{\frac{-i2\pi ux}{\lambda D}}e^{ikD}e^{-i\omega t} \quad (2.36)$$

por lo que la contribución de todas las ondas secundarias puede estimarse como

$$E(u, t) \propto Ae^{ikD}e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dx \zeta(x) e^{-i\frac{2\pi ux}{\lambda D}} \quad (2.37)$$

y la irradiancia total es

$$I(u) = |A|^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx \zeta(x) e^{-i\frac{2\pi ux}{\lambda D}} \right|^2 \quad (2.38)$$

con

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \zeta(x) e^{-i\frac{2\pi ux}{\lambda D}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \zeta(x) e^{-i2\pi\mu x} = \mathcal{F}\{\zeta(x)\} = \tilde{\zeta}(\mu). \quad (2.39)$$

Patrón de difracción determinado por la transformada de Fourier (caso unidimensional), donde $\mu = \frac{u}{\lambda D}$, que es llamada frecuencia espacial.

Aunque se establece a $-\infty$ y a ∞ como los límites de integración para la ecuación (2.39), se puede definir a la función $\zeta(x)$ igual a cero para valores fuera del intervalo finito Δx para que se pueda resolver con la transformada de Fourier [5].

En adelante se utilizará $\zeta(x)$ si se trata de una dimensión y $\zeta(x, y)$ si se usan dos dimensiones para definir cualquier función y función objeto cuando se trate con la transformada de Fourier.

2.5. Propiedades de la transformada de Fourier

En base al resultado anterior es necesario mencionar algunas propiedades de la transformada de Fourier, la cual mapea un conjunto de funciones de un espacio a otro denominado espacio recíproco.

2.5.1. Propiedades

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones que tienen transformada de Fourier y a y b escalares se cumple lo siguiente

- **Linealidad**

$$\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = a\mathcal{F}\{f(x)\} + b\mathcal{F}\{g(x)\}.$$

■ **Similaridad (Cambio de escala)**

$$\mathcal{F}\{f(ax)\} = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\{f(x)\} \Big|_{\frac{\mu}{a}}.$$

■ **Traslación**

$$\mathcal{F}\{f(x - a)\} = e^{-i2\pi\mu a} \mathcal{F}\{f(x)\}.$$

2.5.2. Transformada inversa

Se define la transformada inversa unidimensional de Fourier como

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{\zeta}(\mu)\} = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \tilde{\zeta}(\mu) e^{i2\pi\mu x} \quad (2.40)$$

la cual cumple

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\zeta(x)\}\} = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{\zeta}(\mu)\} = \zeta(x) \quad (2.41)$$

además

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = I = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} \quad (2.42)$$

donde la I de la ecuación (2.42) se refiere a la identidad y no se debe confundir con la irradiancia.

2.5.3. Transformada bidimensional

Generalizando, se define la transformada bidimensional de Fourier como

$$\tilde{\zeta}(\mu, \nu) = \mathcal{F}\{\zeta(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \zeta(x, y) e^{-i2\pi(\mu x + \nu y)} \quad (2.43)$$

donde las frecuencias espaciales son:

$$\mu = \frac{u}{\lambda D} \quad \nu = \frac{v}{\lambda D}. \quad (2.44)$$

El caso más sencillo es cuando la dependencia respecto a cada variable puede separarse, es decir: $\zeta(x, y) = \zeta_x(x)\zeta_y(y)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{F}\{\zeta(x, y)\} &= \mathcal{F}\{\zeta_x(x)\zeta_y(y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \zeta_x(x) e^{-i2\pi\mu x} \int_{-\infty}^{\infty} dy \zeta_y(y) e^{-i2\pi\nu y} \\ &= \tilde{\zeta}_x(\mu) \tilde{\zeta}_y(\nu) \\ &= \tilde{\zeta}(\mu, \nu). \end{aligned} \quad (2.45)$$

2.5.4. Transformada inversa bidimensional

Se define la transformada inversa de Fourier en dos dimensiones como

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{\zeta}(\mu, \nu)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu d\nu \tilde{\zeta}(\mu, \nu) e^{i2\pi(\mu x + \nu y)} \quad (2.46)$$

donde al igual que en el caso unidimensional se cumple

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\zeta(x, y)\}\} = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{\zeta}(\mu, \nu)\} = \zeta(x, y). \quad (2.47)$$

2.6. La Delta de Dirac

Debido a que se utilizará en el capítulo cuatro, es necesario mencionar qué representa la delta de Dirac y sus principales propiedades, primero en una dimensión para posteriormente generalizarla a dos.

La delta de Dirac es una distribución que satisface las condiciones:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

además puede describirse con las siguientes propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1 \quad (2.48)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - a) f(x) = f(a) \quad (2.49)$$

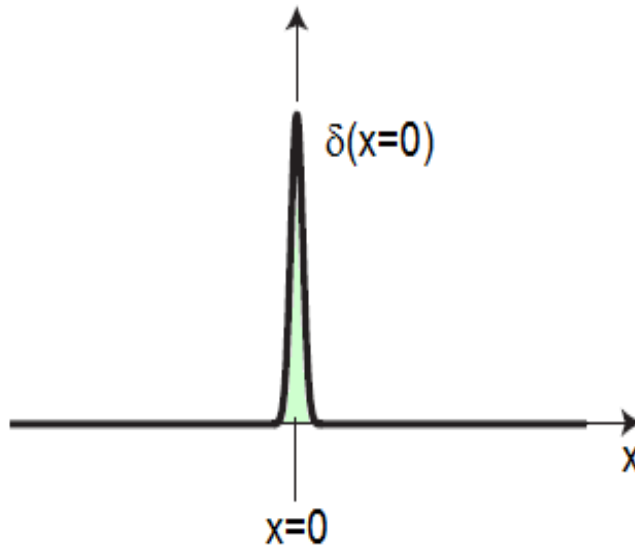


Figura 2.8: Representación de la delta de Dirac.

2.6.1. La Delta de Dirac bidimensional

Generalizando δ a dos dimensiones se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \delta(x, y) = 1 \quad (2.50)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy f(x, y) \delta(x - a, y - b) = f(a, b) \quad (2.51)$$

2.6.2. Tren de pulsos unidimensional

Una serie de fuentes puntuales con la misma separación x_p y simétricamente distribuidas respecto al origen en el eje x llamado tren de pulsos de Dirac, puede representarse con una

serie de Deltas mediante:

$$\zeta(x) = \delta_{x_p}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - jx_p). \quad (2.52)$$

Como es una función periódica en toda la recta real, es válida la aproximación por serie de Fourier, donde ésta en su forma compleja está dada por

$$\zeta(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j e^{ik_j x} \quad (2.53)$$

con $k_j = \frac{2\pi j}{x_p}$ y donde el coeficiente C_j está dado por

$$C_j = \frac{1}{x_p} \int_{-\frac{x_p}{2}}^{\frac{x_p}{2}} dx \zeta(x) e^{-ik_j x}. \quad (2.54)$$

Por lo que calculando C_j para la ecuación (2.52) se tiene

$$\begin{aligned} C_j &= \frac{1}{x_p} \int_{-\frac{x_p}{2}}^{\frac{x_p}{2}} dx \zeta(x) e^{-ik_j x} \\ &= \frac{1}{x_p} \int_{-\frac{x_p}{2}}^{\frac{x_p}{2}} dx \delta_{x_p}(x) e^{-ik_j x} \\ &= \frac{1}{x_p} \end{aligned} \quad (2.55)$$

por tanto la serie de Fourier es

$$\zeta(x) = \frac{1}{x_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi \frac{j}{x_p} x} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{F} \{ \zeta(x) \} &= \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{x_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi \frac{j}{x_p} x} \right\} \\ &= \frac{1}{x_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i2\pi \frac{j}{x_p} x} e^{-i2\pi \mu x} \\ &= \frac{1}{x_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \frac{j}{x_p}\right) \end{aligned} \quad (2.57)$$

es decir,

$$\mathcal{F} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - jx_p) \right\} = \frac{1}{x_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \frac{j}{x_p}\right) \quad (2.58)$$

lo cual significa que la transformada de Fourier para un tren de pulsos de periodo x_p es otro tren de pulsos de periodo $\frac{1}{x_p}$.

2.6.3. Tren de pulsos bidimensional

La generalización del tren de pulsos de Dirac a dos dimensiones donde las fuentes puntuales están simétricamente distribuidas respecto al origen con la misma separación x_p respecto al eje x y y_p respecto al eje y se puede representar de la siguiente manera

$$\zeta(x, y) = \delta_{x_p y_p}(x, y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x - jx_p, y - ly_p) \quad (2.59)$$

donde la función es de variables separables, por lo que se puede ver de la forma

$$\zeta(x, y) = \zeta_x(x) \zeta_y(y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - jx_p) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(y - ly_p) \quad (2.60)$$

donde cada una tiene serie de fourier de la forma (2.56), con lo cual

$$\zeta(x, y) = \left(\frac{1}{x_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi \frac{j}{x_p} x} \right) \left(\frac{1}{y_p} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi \frac{l}{y_p} y} \right) \quad (2.61)$$

con lo cual la transformada es

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{ \zeta(x, y) \} &= \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{x_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi \frac{j}{x_p} x} \right\} \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{y_p} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi \frac{l}{y_p} y} \right\} \\ &= \frac{1}{x_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \frac{j}{x_p}\right) \frac{1}{y_p} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{l}{y_p}\right) \\ &= \frac{1}{x_p} \frac{1}{y_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \frac{j}{x_p}, \nu - \frac{l}{y_p}\right) \end{aligned} \quad (2.62)$$

por tanto la transformada de Fourier para un tren de pulsos de periodo x_p en x y y_p en y es otro tren de pulsos de periodo $\frac{1}{x_p}$ en x y $\frac{1}{y_p}$ en y .

2.7. Convolución

La convolución de dos funciones f y g se define como la integral del producto de ambas funciones después de desplazar una de ellas una distancia η se denota por $f * g$, para el caso unidimensional se tiene

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta f(\eta) g(x - \eta) \quad (2.63)$$

y en el espacio de frecuencias

$$\tilde{f}(\mu) * \tilde{g}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \tilde{f}(\eta) \tilde{g}(\mu - \eta). \quad (2.64)$$

Para relacionarlo con el sistema óptico se obtiene la transformada de Fourier inversa como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(\mu) * \tilde{g}(\mu)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu [\tilde{f}(\mu) * \tilde{g}(\mu)] e^{i2\pi\mu x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\eta \tilde{f}(\eta) \tilde{g}(\mu - \eta) \right] e^{i2\pi\mu x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \tilde{f}(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \tilde{g}(\mu - \eta) e^{i2\pi\mu x} \quad , \varsigma = \mu - \eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \tilde{f}(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} d\varsigma \tilde{g}(\varsigma) e^{i2\pi(\varsigma+\eta)x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \tilde{f}(\eta) e^{i2\pi\eta x} \int_{-\infty}^{\infty} d\varsigma \tilde{g}(\varsigma) e^{i2\pi\varsigma x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \tilde{f}(\eta) e^{i2\pi\eta x} \cdot g(x) \\ &= f(x) \cdot g(x) \end{aligned} \quad (2.65)$$

aplicando transformada de Fourier en ambos lados se obtiene

$$\mathcal{F}\{f(x) \cdot g(x)\} = \tilde{f}(\mu) * \tilde{g}(\mu) \quad (2.66)$$

la ecuación (2.66) indica que la transformada de Fourier de un producto de funciones resulta ser la convolución de sus transformadas. También se cumple

$$\mathcal{F}\{f(x) * g(x)\} = \tilde{f}(\mu) \cdot \tilde{g}(\mu). \quad (2.67)$$

2.7.1. Convolución en dos dimensiones

Para dos funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$, la convolución de éstas es

$$f(x, y) * g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta f(\xi, \eta) g(x - \xi, y - \eta) \quad (2.68)$$

y en el espacio de frecuencias

$$\tilde{f}(\mu, \nu) * \tilde{g}(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta \tilde{f}(\xi, \eta) \tilde{g}(\mu - \xi, \nu - \eta) \quad (2.69)$$

siguiendo el mismo procedimiento que para el caso unidimensional, se llega a las relaciones

$$\mathcal{F}\{f(x, y) \cdot g(x, y)\} = \tilde{f}(\mu, \nu) * \tilde{g}(\mu, \nu) \quad (2.70)$$

$$\mathcal{F}\{f(x, y) * g(x, y)\} = \tilde{f}(\mu, \nu) \cdot \tilde{g}(\mu, \nu) \quad (2.71)$$

al igual que en el caso unidimensional, para dos dimensiones la transformada de Fourier de un producto de funciones resulta ser la convolución de sus transformadas.

2.8. Teorema del muestreo

En el caso unidimensional, cuando se adquiere información discretizada (muestras) de un objeto $\zeta(x)$, se obtiene un conjunto de valores $\zeta_m(x)$, si este muestreo se hace en intervalos iguales entonces

$$\zeta_m(x) = \zeta(x) \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - jx_p) \quad (2.72)$$

tomando en cuenta la transformada de Fourier de un tren de pulsos 2.58 y la ecuación 2.66 se tiene que la transformada de Fourier del muestreo está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\zeta_m(x)\} &= \mathcal{F}\left\{\zeta(x) \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - jx_p)\right\} \\ &= \mathcal{F}\{\zeta(x)\} * \mathcal{F}\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - jx_p)\right\} \\ &= \tilde{\zeta}(\mu) * \frac{1}{x_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \frac{j}{x_p}\right) \\ &= \frac{1}{x_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \tilde{\zeta}(\eta) \delta\left(\mu - \frac{j}{x_p} - \eta\right) \\ &= \frac{1}{x_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{\zeta}\left(\mu - \frac{j}{x_p}\right) \end{aligned} \quad (2.73)$$

con lo cual se deduce que el espectro $\tilde{\zeta}(\mu)$ del objeto sin muestrear se repite periódicamente en $\mu = \frac{j}{x_p}$

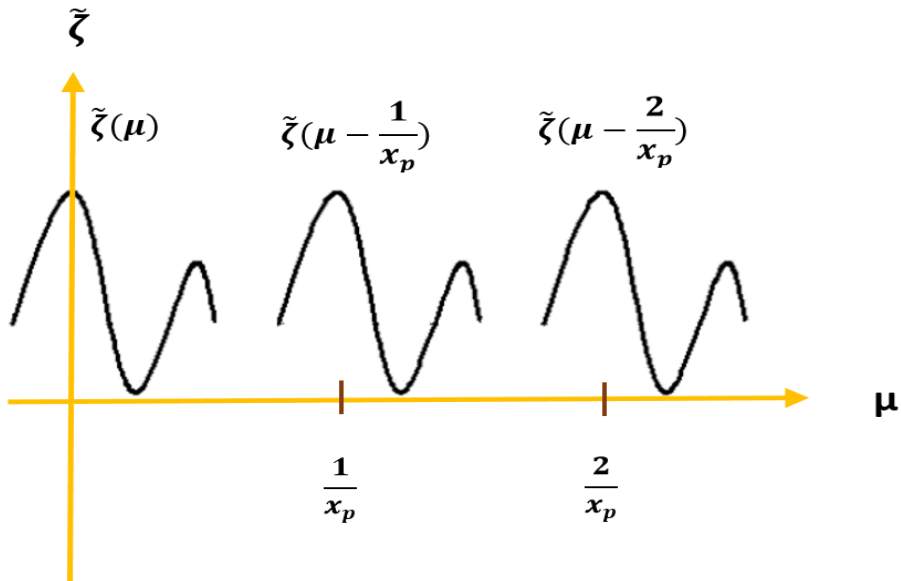


Figura 2.9: Transformada de Fourier a un muestreo realizado a $\zeta(x)$.

2.8.1. Teorema del muestreo en dos dimensiones

Al adquirir información discretizada de un objeto $\zeta(x, y)$, se obtiene un conjunto de valores $\zeta_m(x, y)$, si este muestreo se hace en intervalos iguales para x y y entonces:

$$\zeta_m(x, y) = \zeta(x, y) \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x - jx_p, y - ly_p) \quad (2.74)$$

además siguiendo un procedimiento similar al caso unidimensional se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\zeta_m(x, y)\} &= \tilde{\zeta}(\mu, \nu) * \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \frac{j}{x_p}, \nu - \frac{l}{y_p}\right) \cdot x_p^{-1} y_p^{-1} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_p^{-1} y_p^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta \tilde{\zeta}(\xi, \eta) \delta\left(\mu - \frac{j}{x_p} - \xi, \nu - \frac{l}{y_p} - \eta\right) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_p^{-1} y_p^{-1} \tilde{\zeta}\left(\mu - \frac{j}{x_p}, \nu - \frac{l}{y_p}\right) \\ &= \frac{1}{x_p} \frac{1}{y_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{\zeta}\left(\mu - \frac{j}{x_p}, \nu - \frac{l}{y_p}\right) \end{aligned} \quad (2.75)$$

lo que indica que el espectro $\tilde{\zeta}(\mu, \nu)$, del objeto sin muestrear, se repite periódicamente en $\mu = \frac{j}{x_p}$ y $\nu = \frac{l}{y_p}$

2.9. Función rectangular

La función rectangular en una dimensión $\text{rect}(x)$ se define como

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| = \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

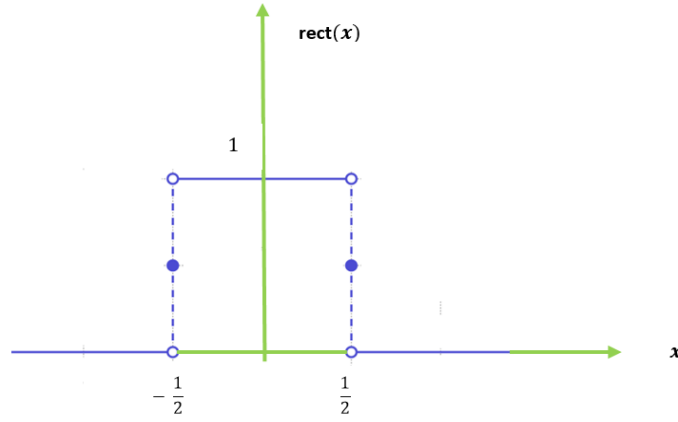


Figura 2.10: Función rectangular en 1D con ancho y altura unitarios.

La transformada de Fourier de la función rectángulo es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{\text{rect}(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \text{rect}(x) e^{-i2\pi\mu x} \\
 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx e^{-i2\pi\mu x} \\
 &= \frac{1}{-i2\pi\mu} [e^{-i\pi\mu} - e^{i\pi\mu}] \\
 &= \frac{1}{i2\pi\mu} [e^{i\pi\mu} - e^{-i\pi\mu}] \\
 &= \frac{1}{i2\pi\mu} [2i \sin(\pi\mu)] \\
 &= \frac{1}{\pi\mu} \sin(\pi\mu) \\
 &= \text{sinc}(\mu)
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

donde la función seno cociente ($\text{sinc}(\mu)$) se define como

$$\begin{aligned}
 \text{sinc}(\mu) &= \frac{1}{\pi\mu} \sin(\pi\mu) \quad \text{si } \mu \neq 0 \\
 &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\mu} \sin(\pi\mu) = 1 \quad \text{si } \mu = 0
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

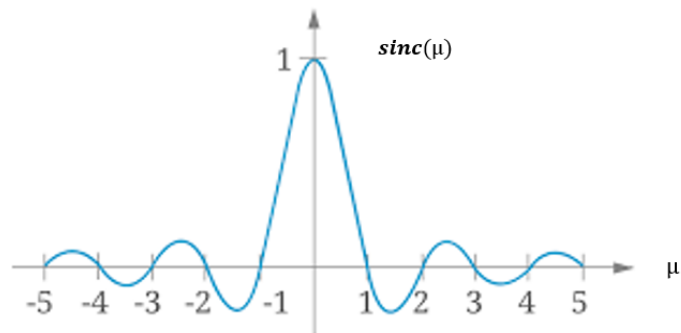


Figura 2.11: Gráfica de $\text{sinc}(\mu)$.

Capítulo 3

Algoritmo

3.1. Consideraciones del campo óptico

Se considera nuevamente en el experimento de la doble rendija, donde éstas tienen coordenadas $\vec{p}_1(x_1, y_1, 0)$, $\vec{p}_2(x_2, y_2, 0)$ y son simétricas con respecto al eje y ; a diferencia de la sección 2.3 sólo se consideran los campos emergentes de ambas rendijas puntuales de la forma (2.20) que sólo dependen de la parte espacial. Retomando la figura (2.5) con algunas modificaciones se tiene lo siguiente

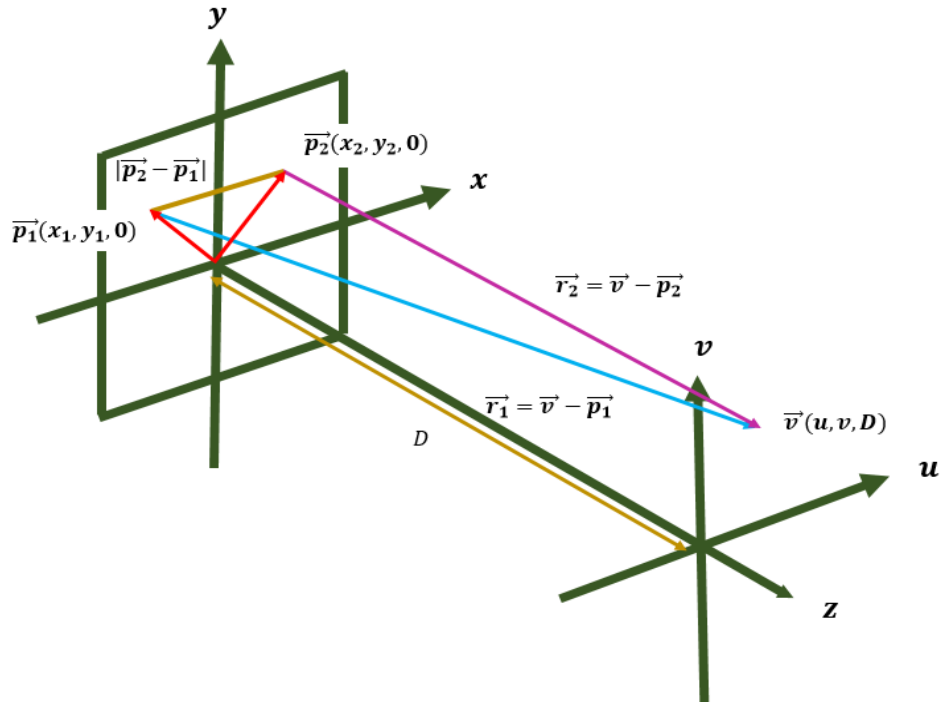


Figura 3.1: Ubicación de la doble rendija y el punto de referencia.

Los campos emergentes tendrán la forma de una onda esférica expresada por

$$E_j(\vec{p}_j, \vec{v}) = A'_j(\vec{p}_j, \vec{v})e^{ikr_j} \quad (3.1)$$

con r_j la magnitud del vector que va de la rendija ubicada en $\vec{P}_j(x_j, y_j, 0)$ al punto de referencia $\vec{v}(u, v, D)$

Entonces los campos emergentes de cada rendija son

$$E_1(\vec{p}_1, \vec{v}) = A'_1(\vec{p}_1, \vec{v})e^{ikr_1}, E_2(\vec{p}_2, \vec{v}) = A'_2(\vec{p}_2, \vec{v})e^{ikr_2} \quad (3.2)$$

además

$$E_{total}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{v}) = E_1(\vec{p}_1, \vec{v}) + E_2(\vec{p}_2, \vec{v}) \quad (3.3)$$

por tanto

$$I = |E_{total}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{v})|^2. \quad (3.4)$$

Generalizando para n rendijas, la irradiancia será de la siguiente forma

$$I = \left| E_{total}(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n, \vec{v}) \right|^2 = \left| \sum_{j=1}^n E_j(\vec{p}_j, \vec{v}) \right|^2. \quad (3.5)$$

Para comprobar si este método es correcto se verificó para el interferómetro de Young, donde las rendijas puntuales están colocadas simétricamente con respecto al eje y con coordenadas $\vec{P}_1(-0.5mm, 1mm, 0)$ y $\vec{P}_2(0.5mm, 1mm, 0)$, con el punto de referencia $\vec{v}(u, v, 2m)$ y una longitud de onda de $633nm$. Se realizó la simulación en Mathematica 10, graficando en x y y de $-5mm$ a $5mm$, el resultado se muestra en la figura (3.2)



Figura 3.2: Patrón de interferencia de dos rendijas puntuales ubicadas simétricamente respecto a y .

como se puede observar, las franjas son perpendiculares a la recta que une a las rendijas.

3.2. Simulación numérica

Se consideran distintos contornos geométricos, sobre los cuales se distribuirán las n rendijas puntuales en el plano $z = 0$. Esto se debe a que la simetría permite que sea más fácil su distribución además de que, posteriormente se puede considerar esta distribución como el muestreo de un objeto. La simulación se realizó en Wolfram Mathematica 10.

3.2.1. Simulación numérica para un cuadrado

El primer contorno es un cuadrado de $1mm$ de lado cuyo centro coincide con el origen del plano, inicialmente se consideran 4 rendijas en los vértices de dicho contorno para luego colocar otra en la parte central de cada lado e ir aumentando de uno en uno el número de rendijas por lado. Esta idea ayuda a construir el algoritmo a partir del siguiente análisis

Se define a P_1 como el lado inferior del cuadrado, P_2 , el lado superior, P_3 el lado izquierdo y P_4 el lado derecho (figura 3.3) con lo cual podemos mencionar lo siguiente:

- Cualquier rendija ubicada a lo largo de P_1 tendrá la misma ordenada negativa y_a .
- Cualquier rendija ubicada a lo largo de P_2 tendrá la misma ordenada y_b .
- Cualquier rendija ubicada a lo largo de P_3 tendrá la misma abscisa con valor negativo x_a .
- Cualquier rendija ubicada a lo largo de P_4 tendrá la misma abscisa x_b .

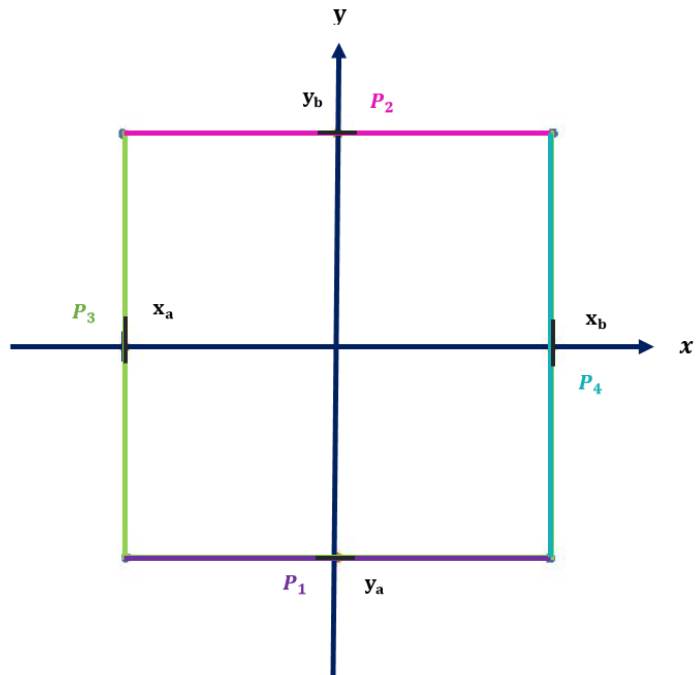


Figura 3.3: Representación de los lados del cuadrado para la distribución de rendijas en $z = 0$.

Con lo mencionado, las cuatro rendijas en los vértices del contorno del cuadrado tienen coordenadas: (x_a, y_a) , (x_b, y_a) , (x_b, y_b) y (x_a, y_b) . La diferencia en los subíndices se usa en general para una figura ubicada en cualquier parte del plano.

En este caso particular $x_a = -x_b$, $y_a = -y_b$, con $x_a = -0.5mm$ y $y_a = -0.5mm$.

Cabe mencionar que se ha omitido la coordenada en z , cuyo valor es 0.

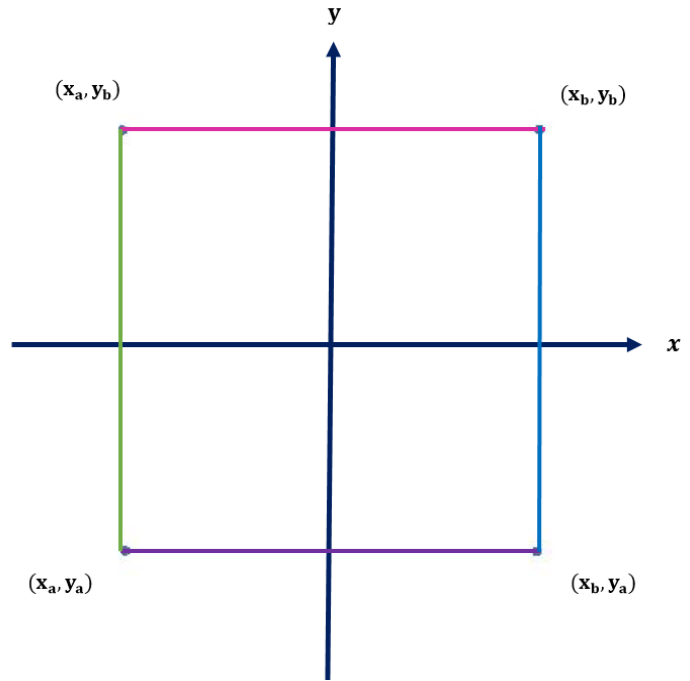


Figura 3.4: Ubicación de las cuatro rendijas iniciales como vértices del contorno de un cuadrado de $1mm$ de lado.

Si se desea colocar una rendija en el centro de cada lado simultáneamente, ésta se encuentra a la mitad de la distancia que hay entre los vértices. Dado que una coordenada no varía a lo largo de la línea, sólo se suma o resta (dependiendo del punto inicial) la mitad de la distancia a la otra coordenada del vértice inicial.

Para que no se repita la ubicación de alguna rendija, se hace la siguiente convención (figura 3.5)

- Para P_1 el vértice inicial tiene coordenadas (x_a, y_a) .
- Para P_2 el vértice inicial tiene coordenadas (x_b, y_b) .
- Para P_3 el vértice inicial tiene coordenadas (x_a, y_b) .
- Para P_4 el vértice inicial tiene coordenadas (x_b, y_a) .

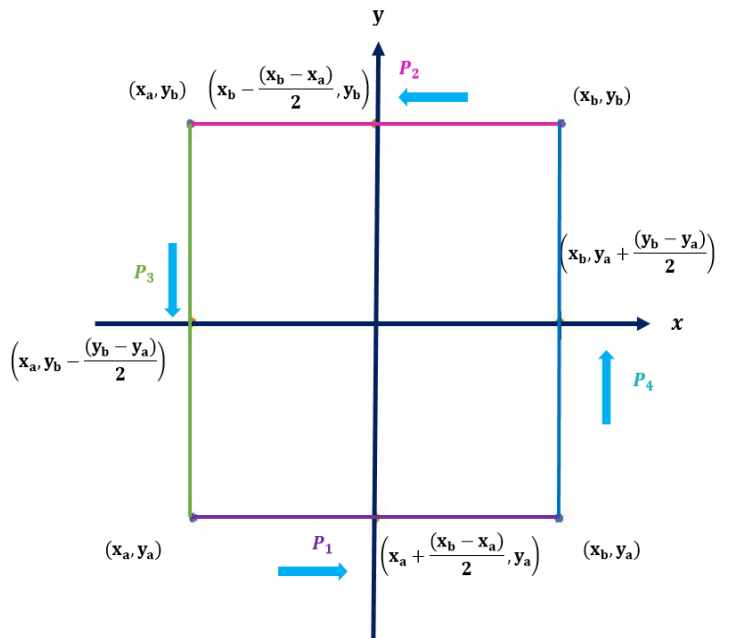


Figura 3.5: Coordenadas de las rendijas ubicadas a la mitad de cada lado en base al vértice inicial.

Si ahora se desean colocar dos rendijas en cada lado igualmente espaciadas, para una de ellas se le suma o resta un tercio de la distancia que hay entre los vértices a la coordenada que varía, mientras que para la otra, se le suma o resta dos tercios.

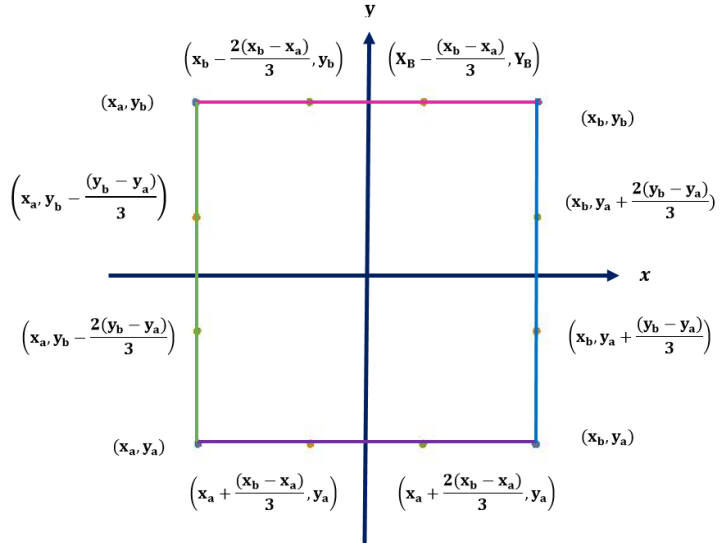


Figura 3.6: Coordenadas de dos rendijas por lado, igualmente espaciadas.

Analizando las variaciones para el lado P_1 , se tiene lo siguiente:

Cuadro 3.1: Coordenadas de las rendijas en P_1

0 rendijas por lado	(sólo el vértice)
(x_a, y_a)	
1 rendija por lado	(coordenadas de la rendija más el vértice)
$(x_a, y_a),$	$(x_a + \frac{(x_b - x_a)}{2}, y_a)$
2 rendijas por lado	
$(x_a, y_a),$	$(x_a + \frac{(x_b - x_a)}{3}, y_a), (x_a + 2\frac{(x_b - x_a)}{3}, y_a)$

donde el primer par ordenado corresponde al vértice de dicho lado, en la segunda fila se muestran las coordenadas del vértice y las de una rendija, finalmente en la tercera fila se muestran las coordenadas del vértice y de dos rendijas en ese lado. De manera análoga se pueden analizar los otros tres lados. Observando este análisis, se puede generalizar la forma de obtener las coordenadas de cada rendija según el número de éstas que necesitemos en cada lado, tomando en cuenta que cuando se requieren 0 rendijas por lado, sólo nos quedarían los vértices.

Si $n - 1$ es el número de rendijas por lado independientes de los vértices, para el lado P_1 las coordenadas de las rendijas están dadas por

$$P_{1m} = \left(x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n}, y_a, 0 \right) \quad (3.6)$$

donde se ha incluido la coordenada $z = 0$ con $0 \leq m \leq n - 1$, $m \in N$ un contador.

Analizando la tabla, para 0 rendijas por lado $n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1$ y $m = 0$, lo que devuelve el par ordenado de la primera fila del Cuadro 3.1 que corresponde al vértice.

Para 1 rendija por lado $n - 1 = 1 \Rightarrow n = 2$ y m va de 0 a 1, lo que devuelve los dos pares ordenados de la segunda fila, los cuales corresponden al vértice y a la rendija central, lo mismo se cumple para un número mayor de rendijas por lado.

Las coordenadas para los lados restantes están dadas por

$$P_{2m} = \left(x_b - \frac{m(x_b - x_a)}{n}, y_b, 0 \right) \quad (3.7)$$

$$P_{3m} = \left(x_a, y_b - \frac{m(y_b - y_a)}{n}, 0 \right) \quad (3.8)$$

$$P_{4m} = \left(x_b, y_a + \frac{m(y_b - y_a)}{n}, 0 \right) \quad (3.9)$$

Para seguir con el procedimiento de la sección 3.1, se necesita de la longitud de onda, la cual es de $633nm$, se considera a las amplitudes $A'_j = 1m$ además se elige el punto de referencia $(u, v, 2m)$ y se resta a éste el vector de cada rendija de los 4 lados, con lo cual se obtienen $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$ que estarán en términos de u, v, m , para luego sacar sus normas; las cuales se pueden ver como funciones de 3 variables y así construir los campos. Dichos campos pueden definirse como otras funciones

$$E_1(u, v, m) = A_j e^{ikr_1(u, v, m)} \quad (3.10)$$

y así con los otros 3 campos. Bajo estas condiciones, se está trabajando con la región de Fraunhofer.

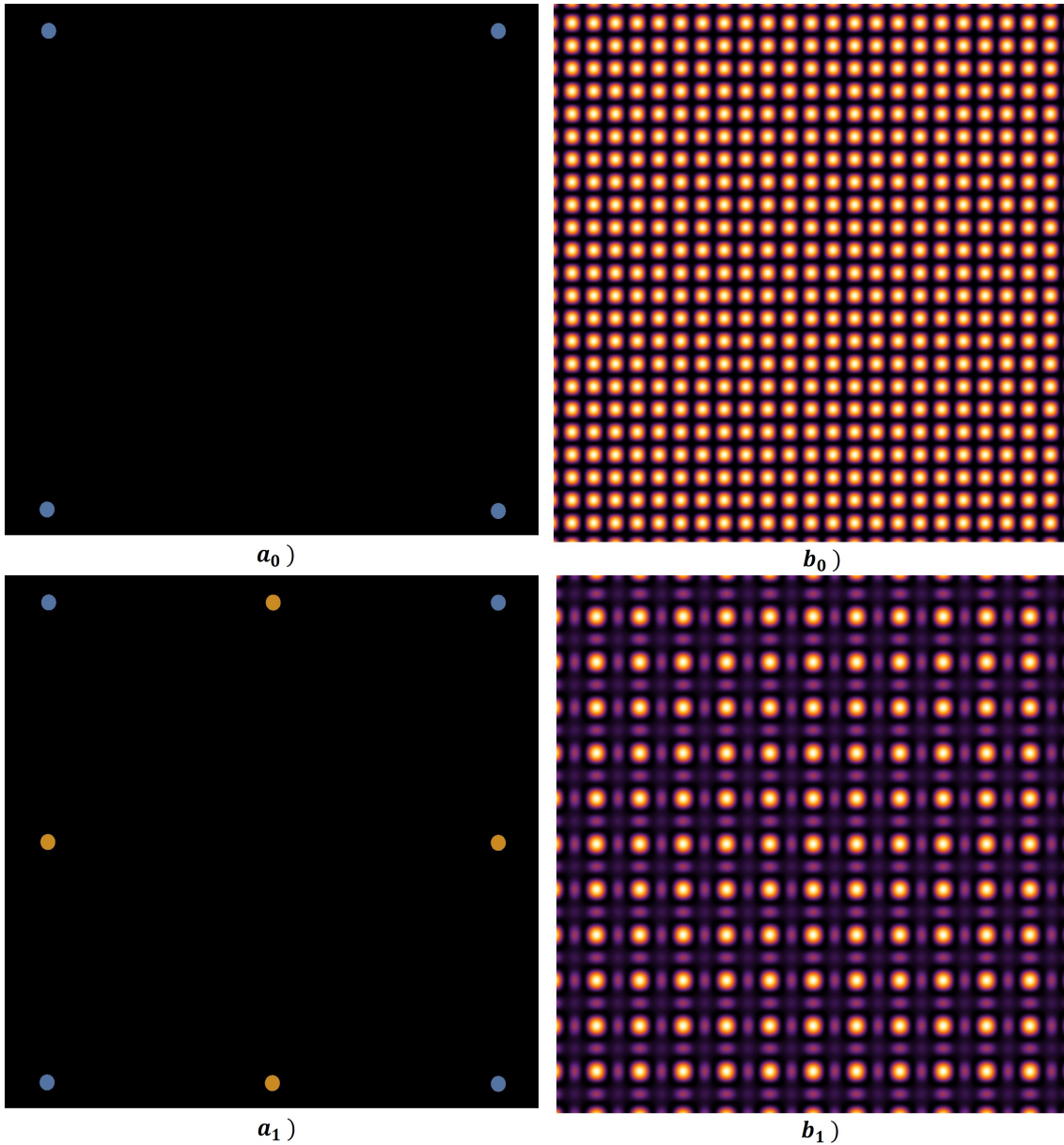
Como ya se mencionó antes, si se desea que sólo haya rendijas en los vértices $n = 1$ y m toma únicamente el valor 0 por lo que se tendrían los 4 campos, si $n = 2$, m toma los valores 0 y 1 por lo que se tendrían 8 campos y así sucesivamente. Finalmente se suman

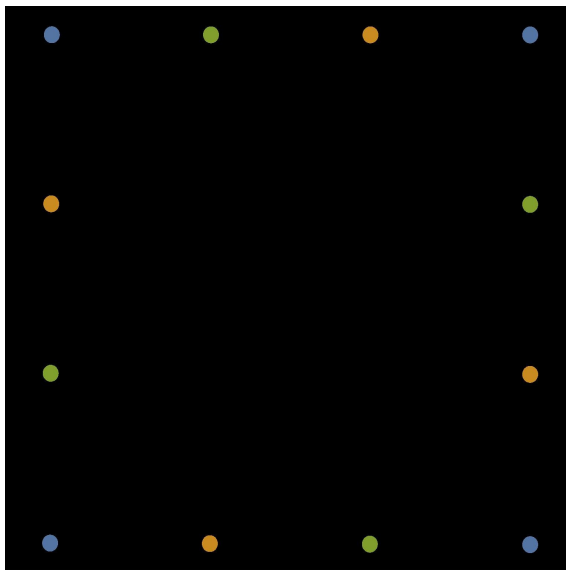
$$E_1(u, v, m) + E_2(u, v, m) + E_3(u, v, m) + E_4(u, v, m) \quad (3.11)$$

para los distintos valores de m según el número de rendijas por lado y se calcula el modulo al cuadrado de dicha suma para obtener la irradiancia.

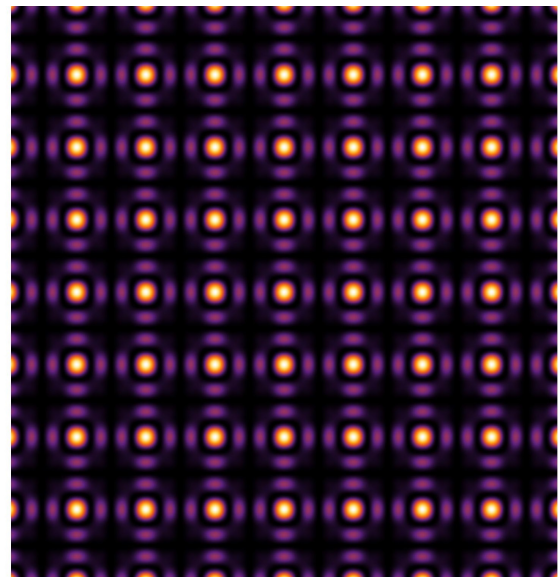
3.2.2. Resultados de la simulación numérica para el contorno del cuadrado

En base al procedimiento anterior se obtuvieron distintos patrones de interferencia, las imágenes a la izquierda a_i señalan el número así como la distribución de rendijas puntuales con i rendijas por lado y $4(i + 1)$ rendijas en total, mientras que las imágenes de la derecha (b_i) graficadas en un rango de $-1.5cm \leq u \leq 1.5cm$ y $-1.5cm \leq v \leq 1.5cm$, señalan el patrón de interferencia resultante al hacer incidir un haz de luz en dicha distribución de rendijas.

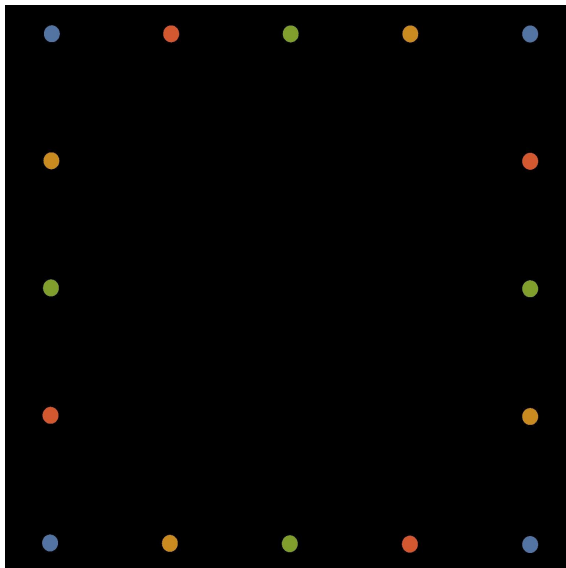




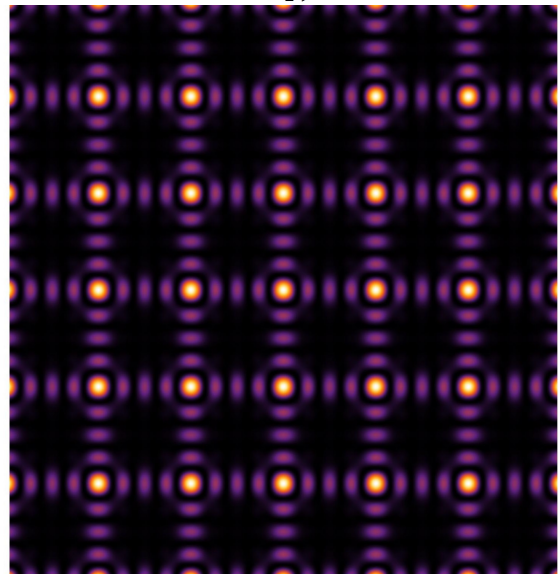
$a_2)$



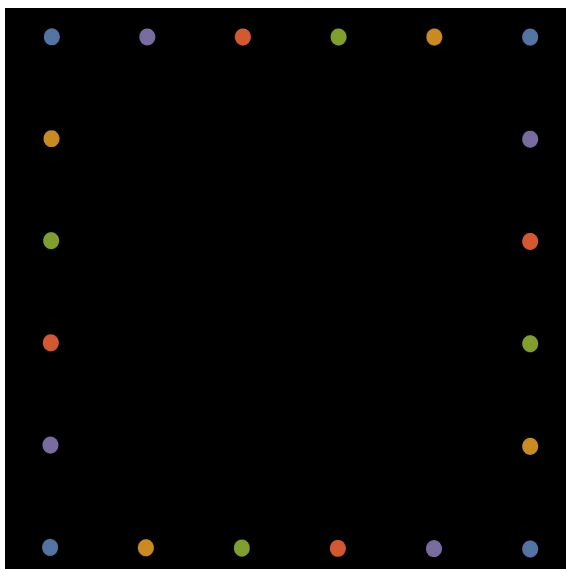
$b_2)$



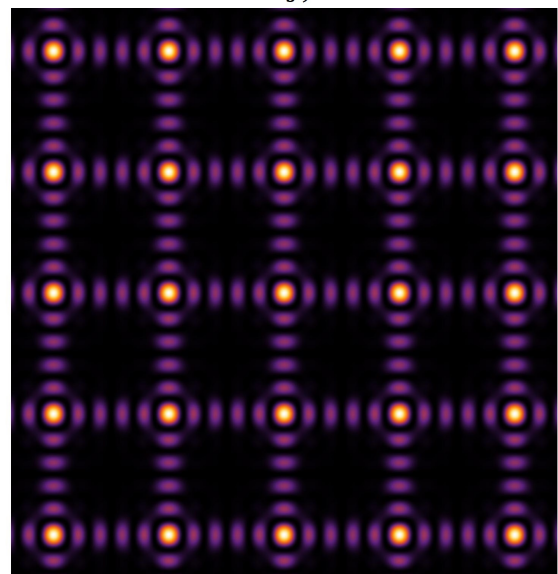
$a_3)$



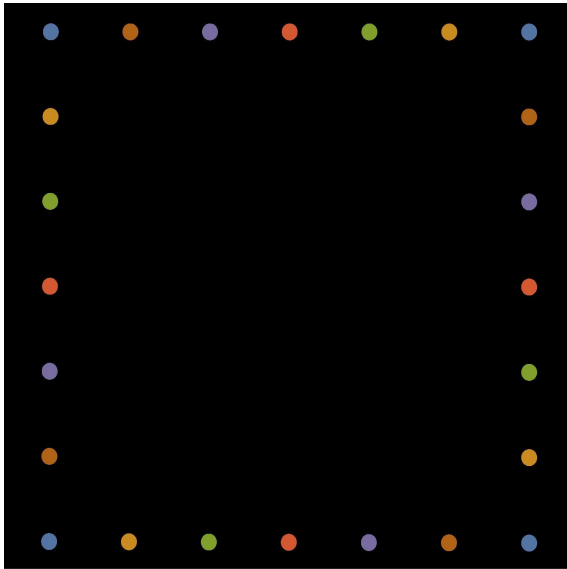
$b_3)$



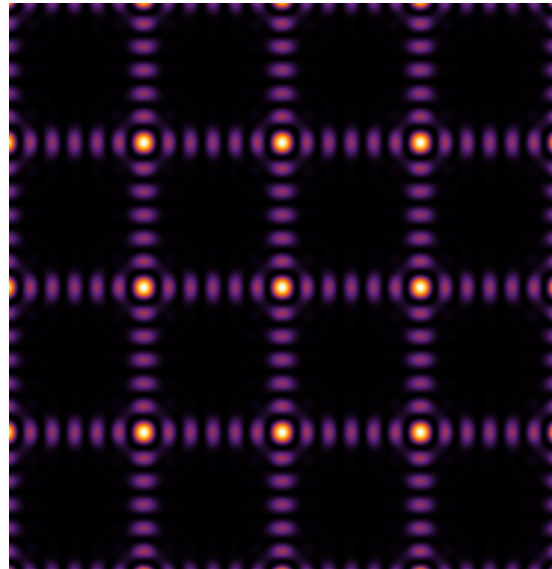
$a_4)$



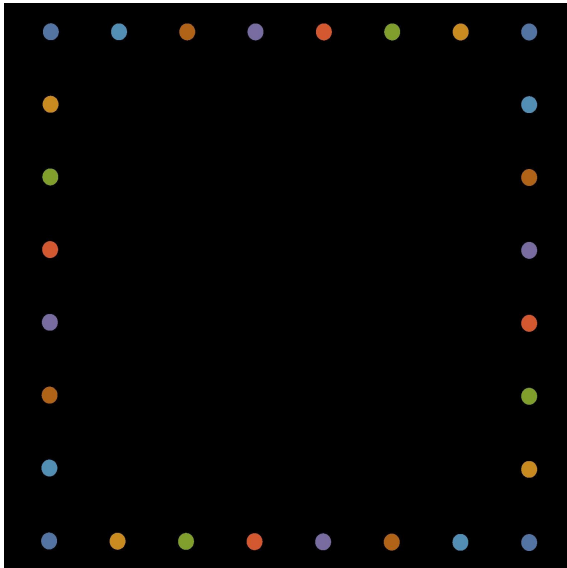
$b_4)$



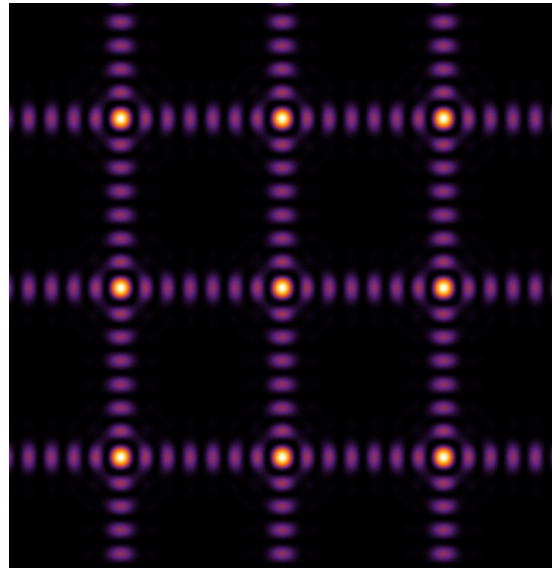
$a_5)$



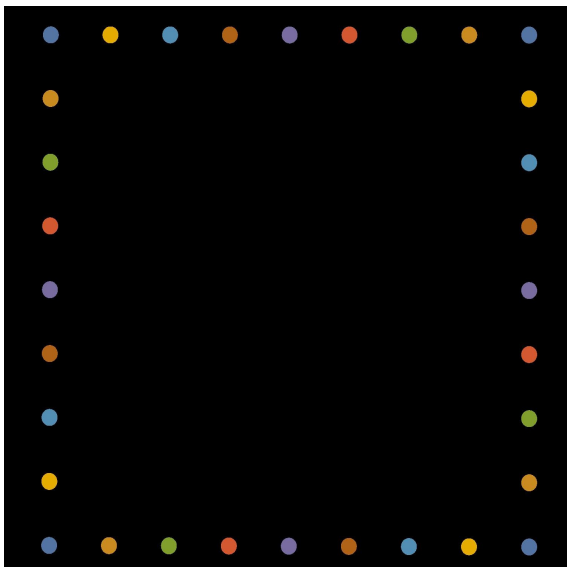
$b_5)$



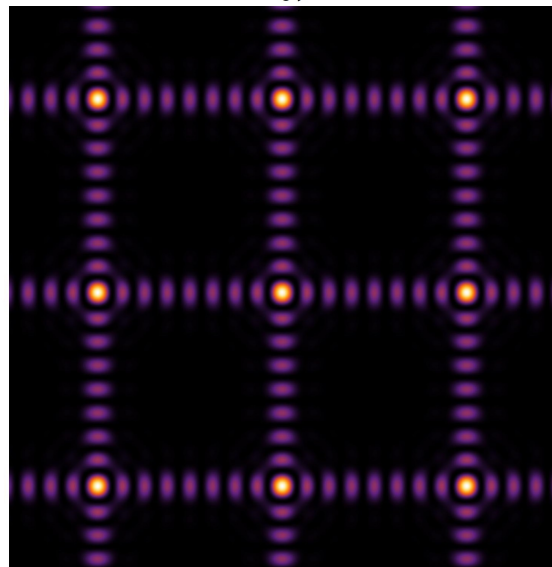
$a_6)$



$b_6)$



$a_7)$



$b_7)$

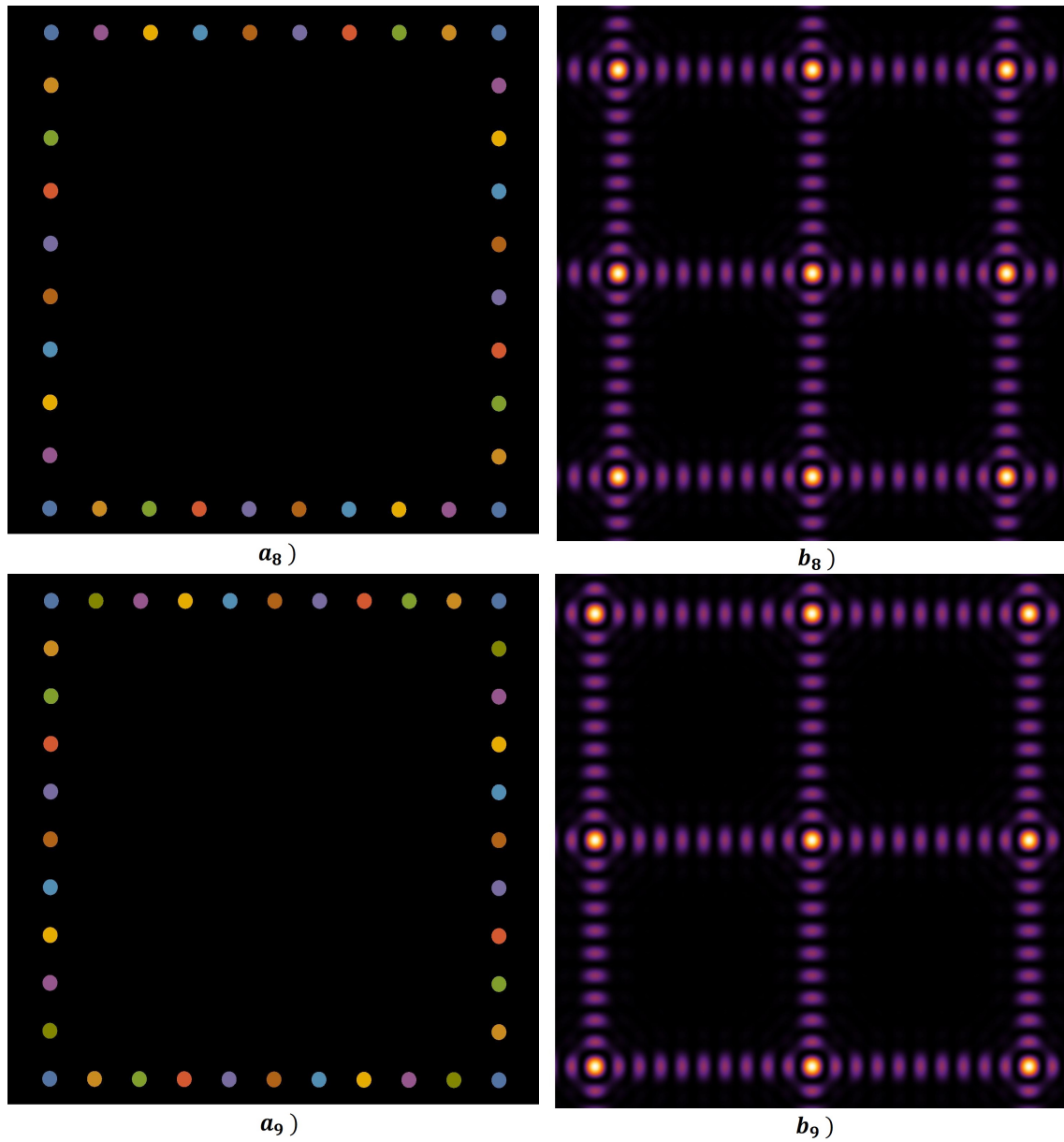


Figura 3.7: Distribución de rendijas (izquierda) y patrón de interferencia resultante (derecha).

Se puede observar que cuando las rendijas están más cerca unas de otras, el patrón de interferencia resultante se parece al patrón de difracción proporcionado por una abertura cuya forma es el contorno de un cuadrado.

3.2.3. Simulación numérica para el contorno de un triángulo

Considerando ahora el contorno de un triángulo equilátero de $1mm$ de lado sobre el cual se distribuirán las n rendijas puntuales en el plano $z = 0$, el análisis es muy parecido al anterior, con la diferencia de que se tendría 3 lados definidos por P_1, P_2, P_3 , por simplicidad nuevamente se omite la coordenada $z = 0$ para posteriormente retomarla al calcular $\vec{r}_i = \vec{v} - \vec{p}_i$.

Los tres lados cumplen con lo siguiente

- Para P_1 el vértice inicial tiene coordenadas (x_a, y_a) .
- Para P_2 el vértice inicial tiene coordenadas (x_b, y_a) .
- Para P_3 el vértice inicial tiene coordenadas (x_c, y_c) .

donde por teorema de Pitágoras, la altura del triángulo es de $\frac{\sqrt{3}}{2000}$ con lo cual, la coordenada $y_c = y_a + \frac{\sqrt{3}}{2000}$ y $x_c = 0$ ya que es el punto medio entre x_a y x_b .

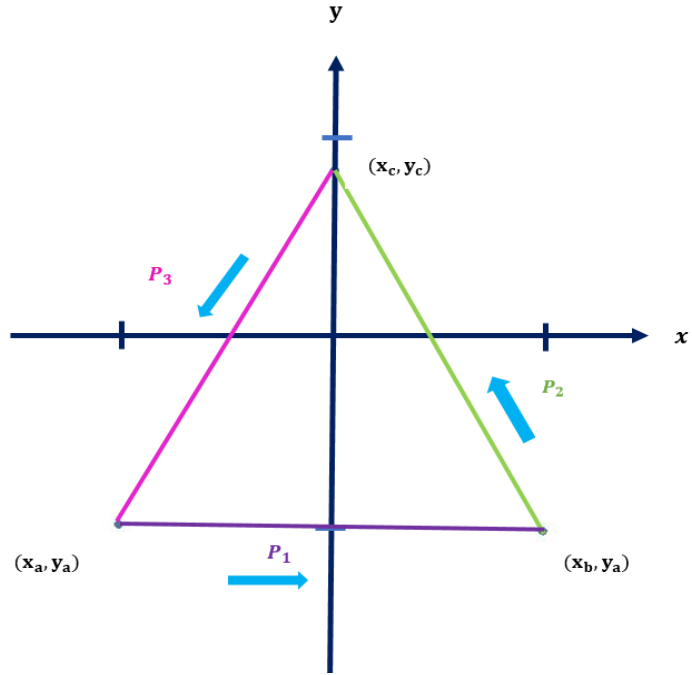


Figura 3.8: Coordenadas de las rendijas ubicadas en los vértices del contorno de un triángulo.

Para obtener las coordenadas de las rendijas, se menciona lo siguiente

- Cualquier rendija ubicada a lo largo de P_1 tendrá la misma ordenada y_a , mientras que la abscisa será de la forma $x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n}$ con $0 \leq m \leq n - 1$, $m \in \mathbb{N}$ un contador de la misma forma que en el cuadrado.
- Cualquier rendija ubicada a lo largo de P_2 cumplirá la ecuación de la recta con pendiente $\frac{(y_c - y_a)}{(x_c - x_b)}$.
- Cualquier rendija ubicada a lo largo de P_3 cumplirá la ecuación de la recta con pendiente $\frac{y_c - y_a}{x_c - x_a}$.

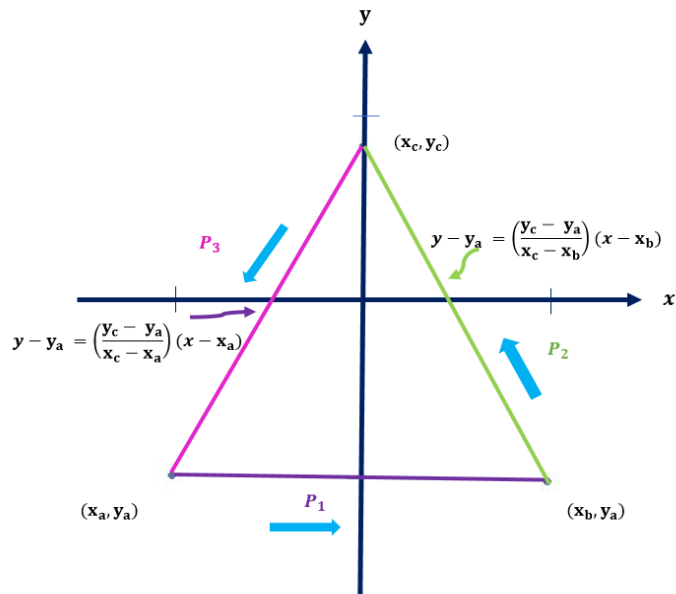


Figura 3.9: Ecuación de la recta en la forma punto-pendiente para y en los lados P_2 y P_3 .

En base a ello, las funciones para cada lado son las siguientes

$$P_{1m} = \left(x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n}, y_a, 0 \right) \quad (3.12)$$

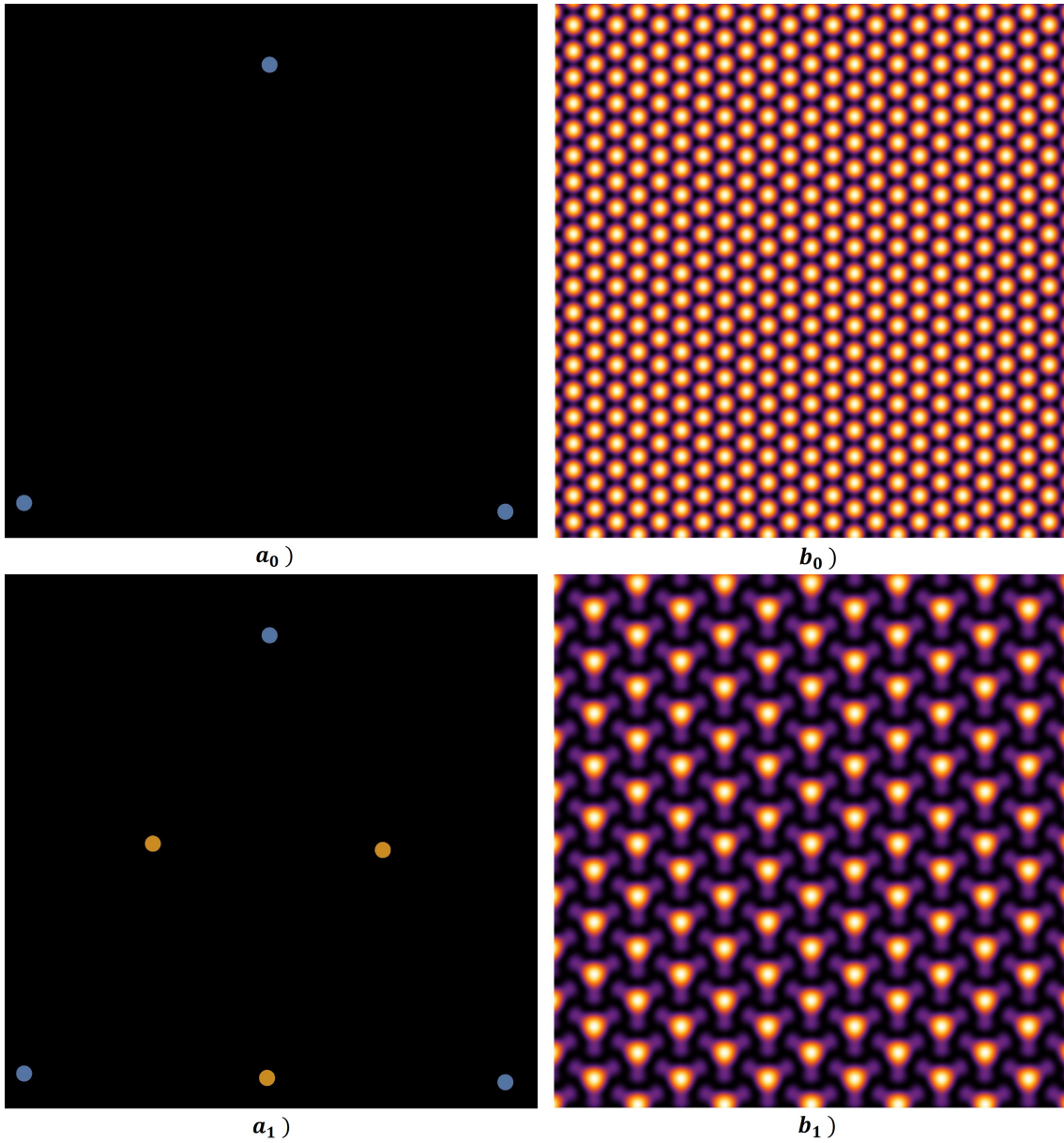
$$P_{2m} = \left(x_b - \frac{m(x_b - x_c)}{n}, \left[\frac{y_c - y_a}{x_c - x_b} \right] \left[-\frac{m(x_b - x_c)}{n} \right] + y_a, 0 \right) \quad (3.13)$$

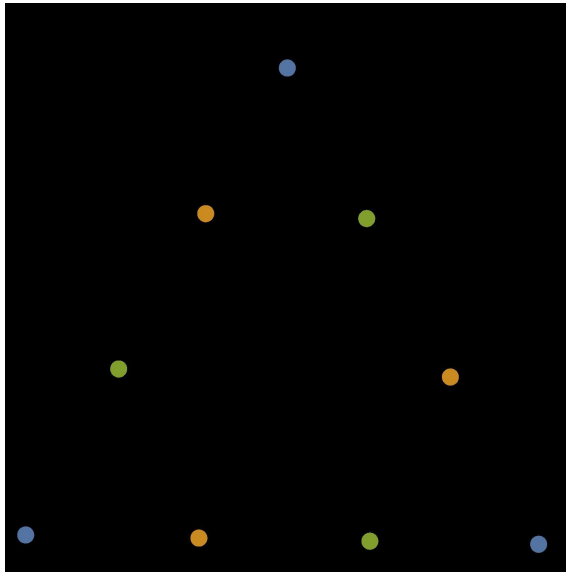
$$P_{3m} = \left(x_c - \frac{m(x_c - x_a)}{n}, \left[\frac{y_c - y_a}{x_c - x_a} \right] \left[x_c - \frac{m(x_c - x_a)}{n} - x_a \right] + y_a, 0 \right) \quad (3.14)$$

donde la coordenada y de las ecuaciones (3.13) y (3.14) es la ecuación de la recta en la forma punto -pendiente $y - y_0 = m'(x - x_0)$ siendo m' la pendiente y donde el valor de x para esta ecuación está definido en base a la primera coordenada. Para construir los campos se procede de la misma forma que con el cuadrado ya que el valor de $z = D = 2m$ en el plano de observación y de la longitud de onda no cambian.

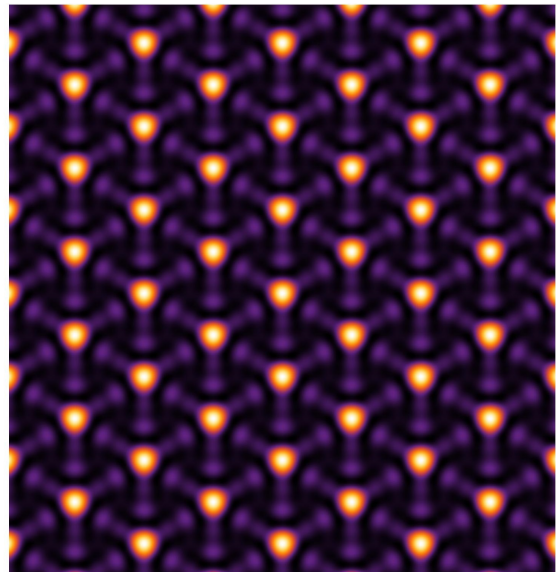
3.2.4. Resultados de la simulación numérica para el contorno del triángulo

Las imágenes del lado izquierdo a_i) señalan el número así como la distribución de rendijas con i rendijas por lado y $3(i + 1)$ rendijas en total, mientras que las imágenes de la derecha b_i graficadas en un rango de $-1.5cm \leq u \leq 1.5cm$ y $-1.5cm \leq v \leq 1.5cm$, señalan el patrón de interferencia resultante al hacer incidir un haz de luz en dicha distribución de rendijas.

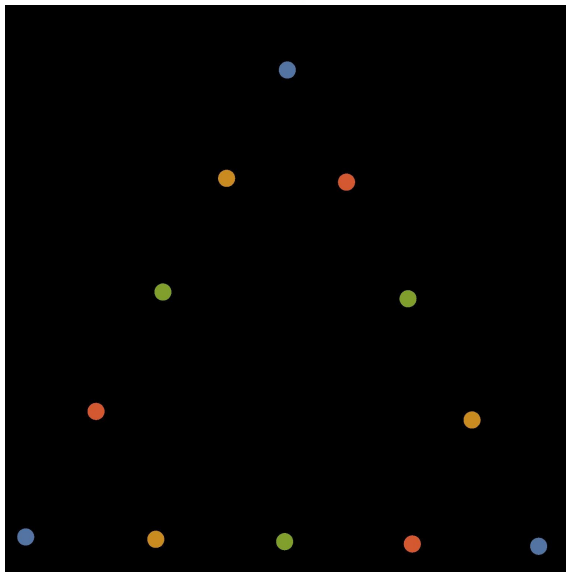




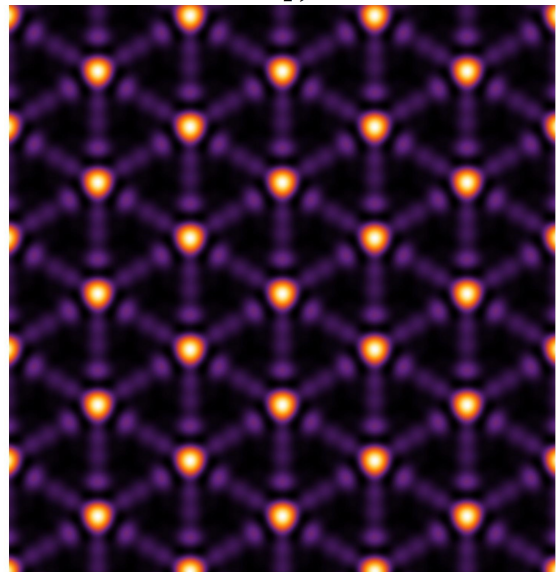
$a_2)$



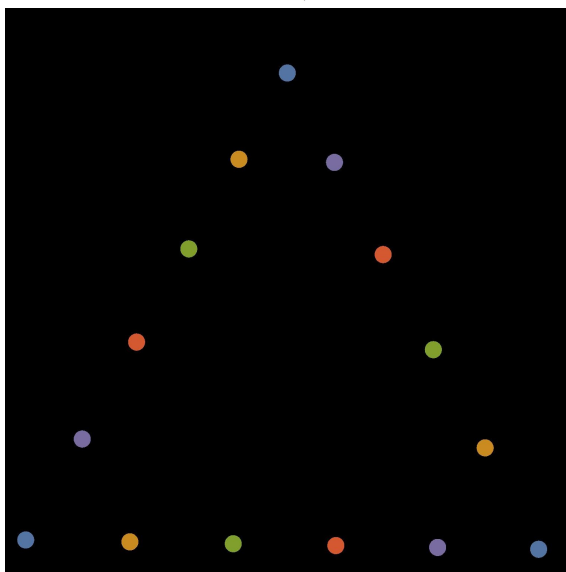
$b_2)$



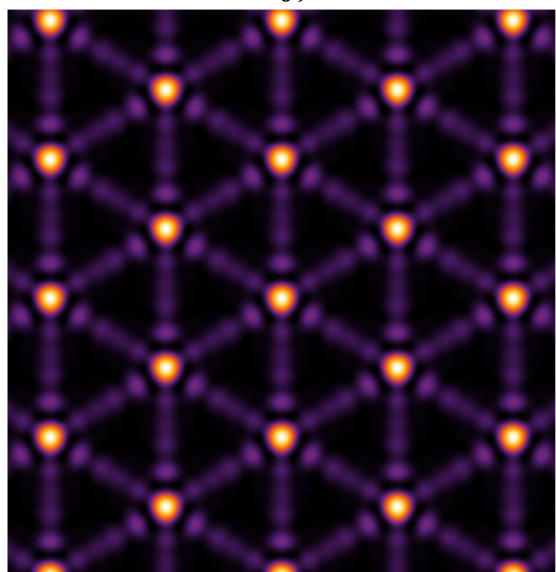
$a_3)$



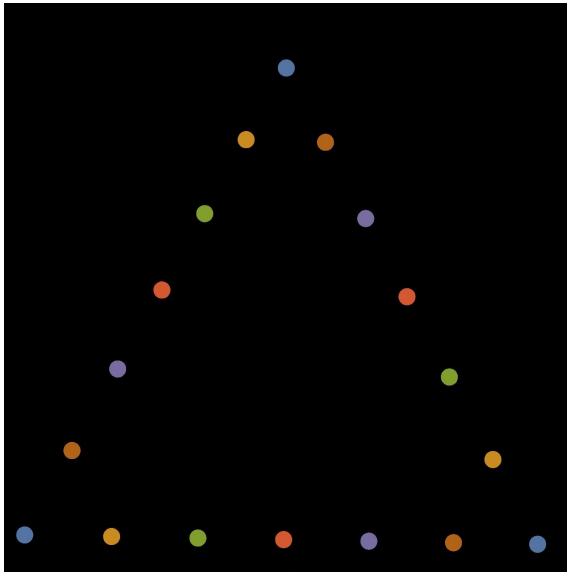
$b_3)$



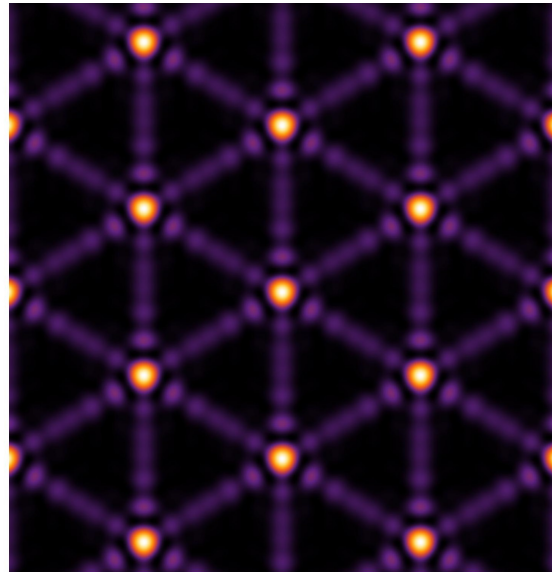
$a_4)$



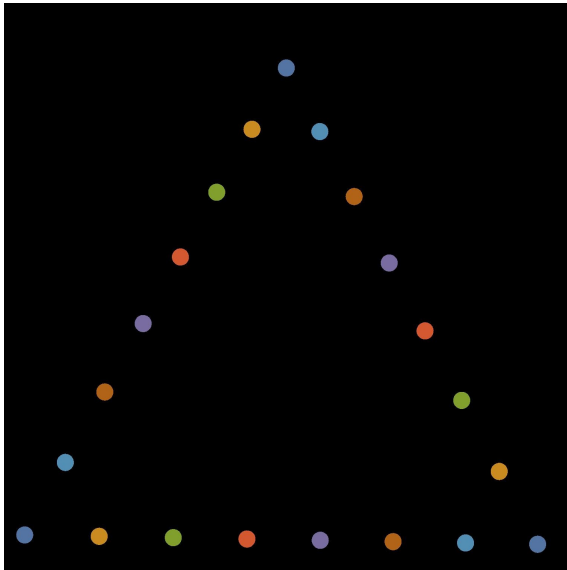
$b_4)$



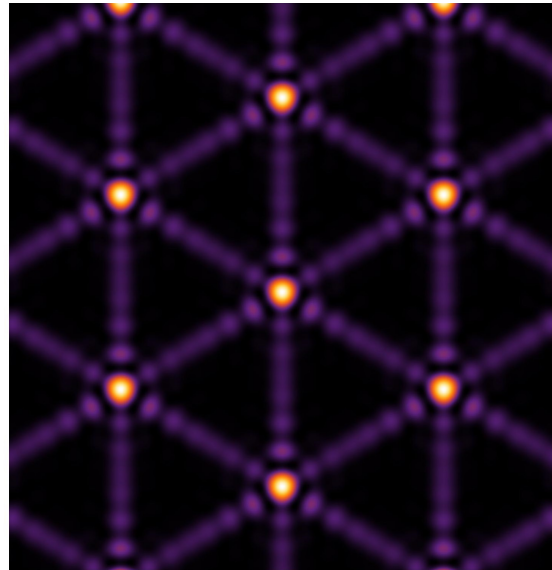
$a_5)$



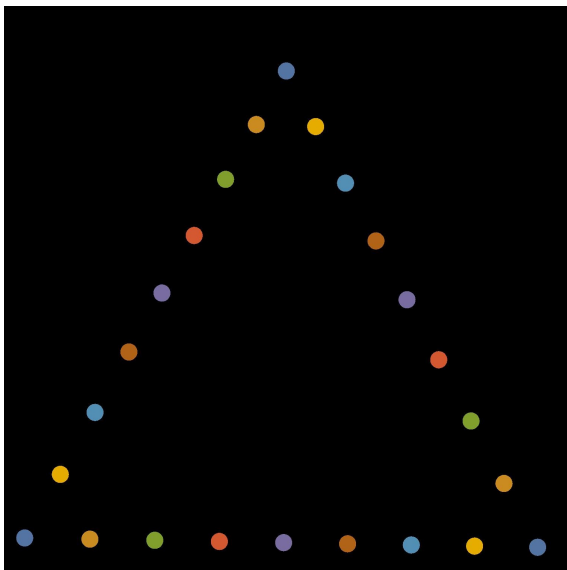
$b_5)$



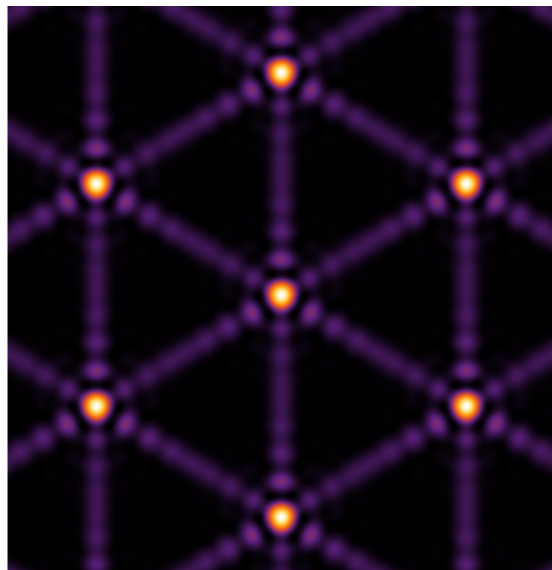
$a_6)$



$b_6)$



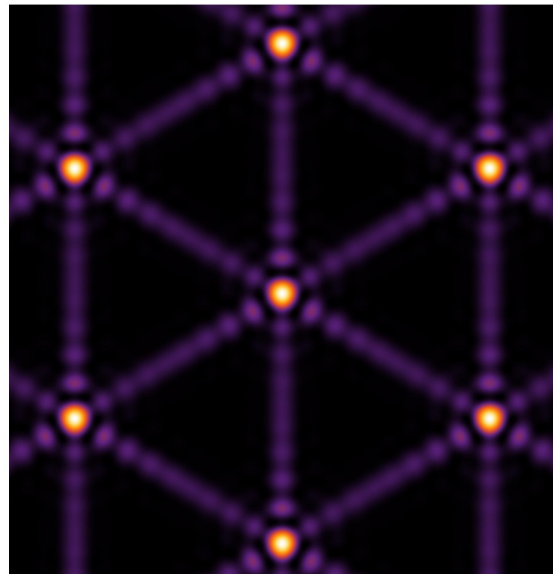
$a_7)$



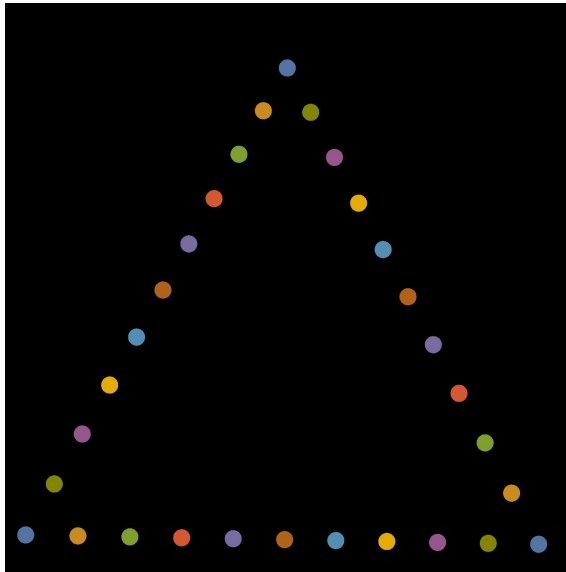
$b_7)$



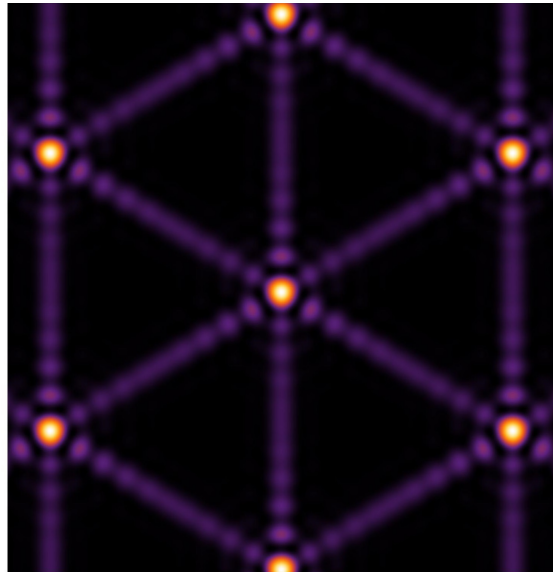
$a_8)$



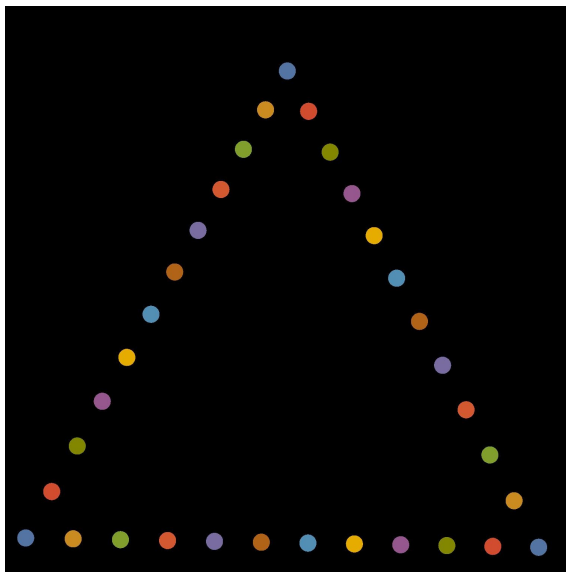
$b_8)$



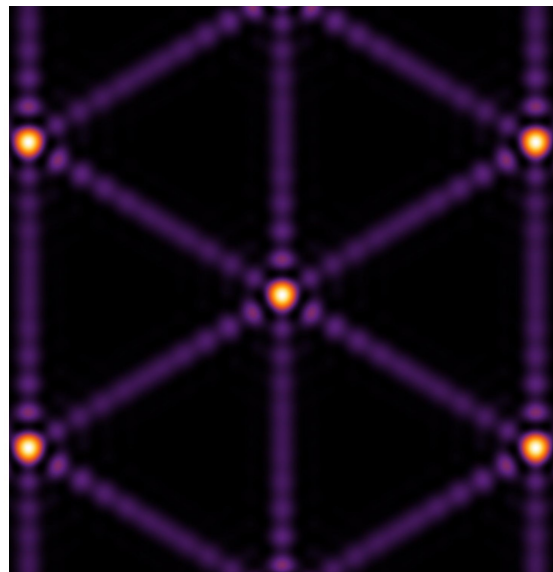
$a_9)$



$b_9)$



$a_{10})$



$b_{10})$

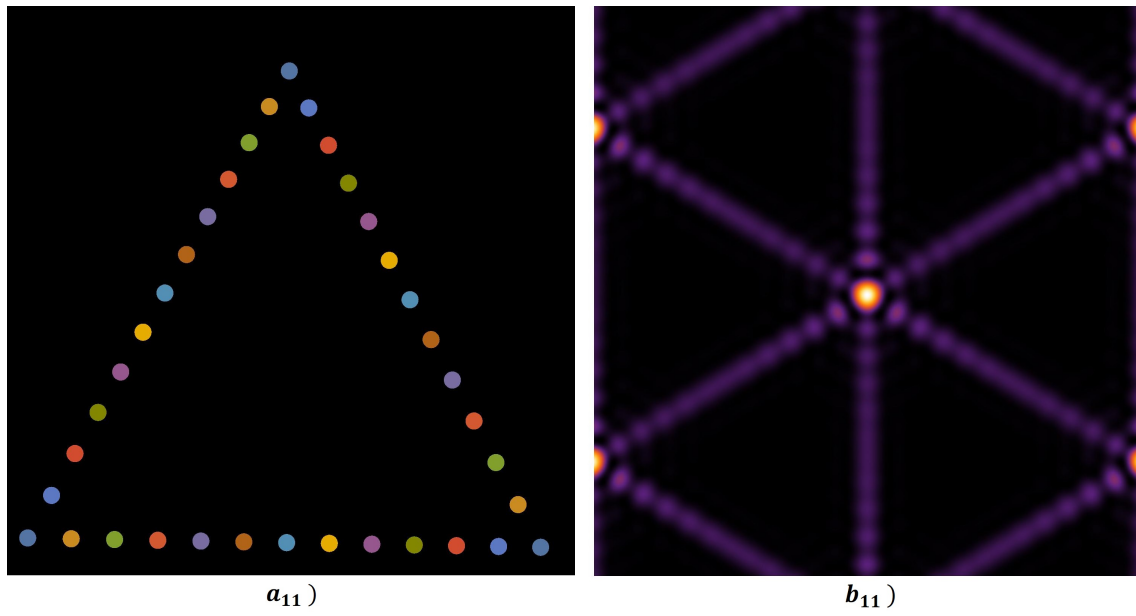


Figura 3.10: Distribución de rendijas (izquierda) y patrón de interferencia resultante (derecha).

Para un número mayor de rendijas por lado, el patrón de interferencia resultante es similar al patrón de difracción proporcionado por una abertura cuya forma es el contorno de un triángulo.

3.2.5. Simulación numérica de una circunferencia

Se considera una circunferencia de $1mm$ de diámetro sobre la cual se colocaran n rendijas puntuales (note que hay un cambio con respecto a los análisis anteriores) en base a las siguientes consideraciones

Utilizando coordenadas polares, para definir un punto con un ángulo de rotación θ y con la magnitud del vector que va del origen a dicho punto p (radio) se tiene

$$\begin{aligned} x &= p \cos(\theta) \\ y &= p \sin(\theta) \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde el ángulo θ dependera del número de rendijas que se deseen mediante:

$$\theta(n) = \frac{2\pi}{n}. \quad (3.16)$$

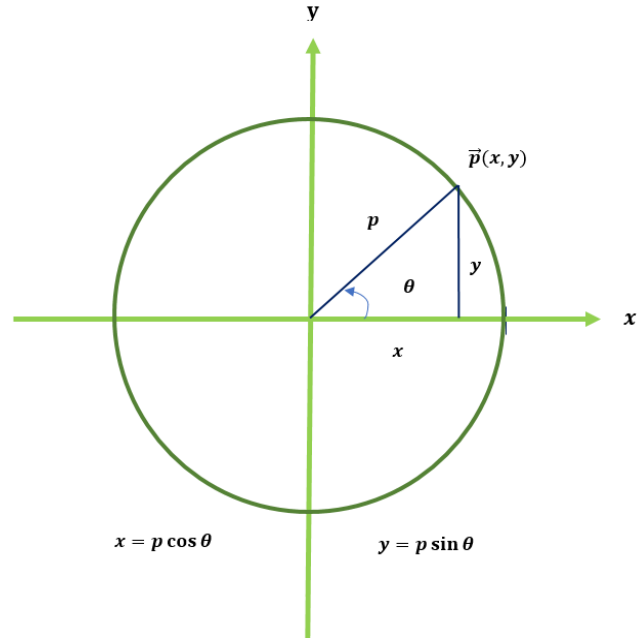


Figura 3.11: Relación entre coordenadas polares y cartesianas.

El radio p toma el valor de $0.5mm$ por tal motivo, cuando $\theta = 0$ la rendija estará en $(x_b, 0)$ donde x_b tiene el mismo valor que para los casos anteriores, las rendijas se colocarán en sentido contrario a las manecillas del reloj. Si se colocan dos rendijas se tendría el caso del experimento de Young, al colocar tres o cuatro se tendrían los casos anteriores, el contorno del triángulo y del cuadrado respectivamente sólo que con escala diferente, además de que estarían rotados, por lo cual es conveniente elegir de cinco rendijas en adelante.

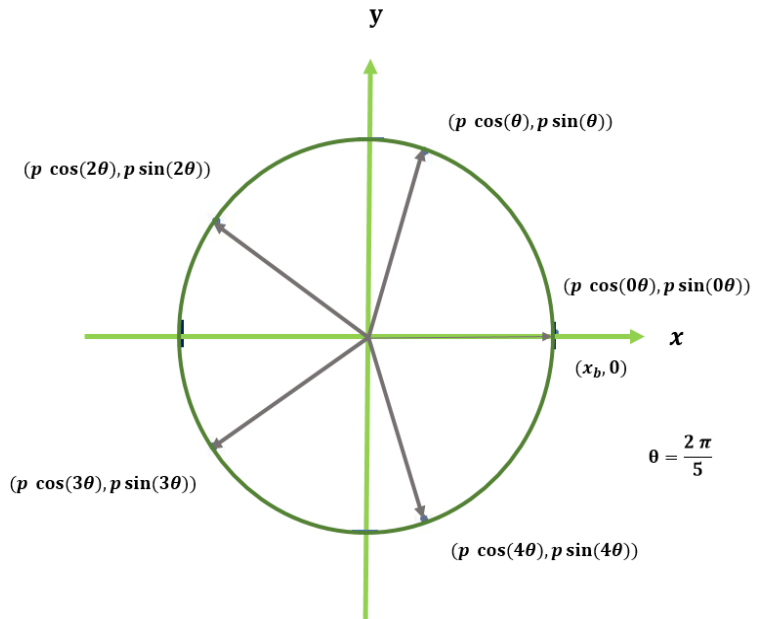


Figura 3.12: Distribución de cinco rendijas en el plano $z = 0$.

La distribución de cinco rendijas se muestra en la figura (3.12) con

$$\theta(5) = \frac{2\pi}{5}$$

con lo cual se puede definir la función

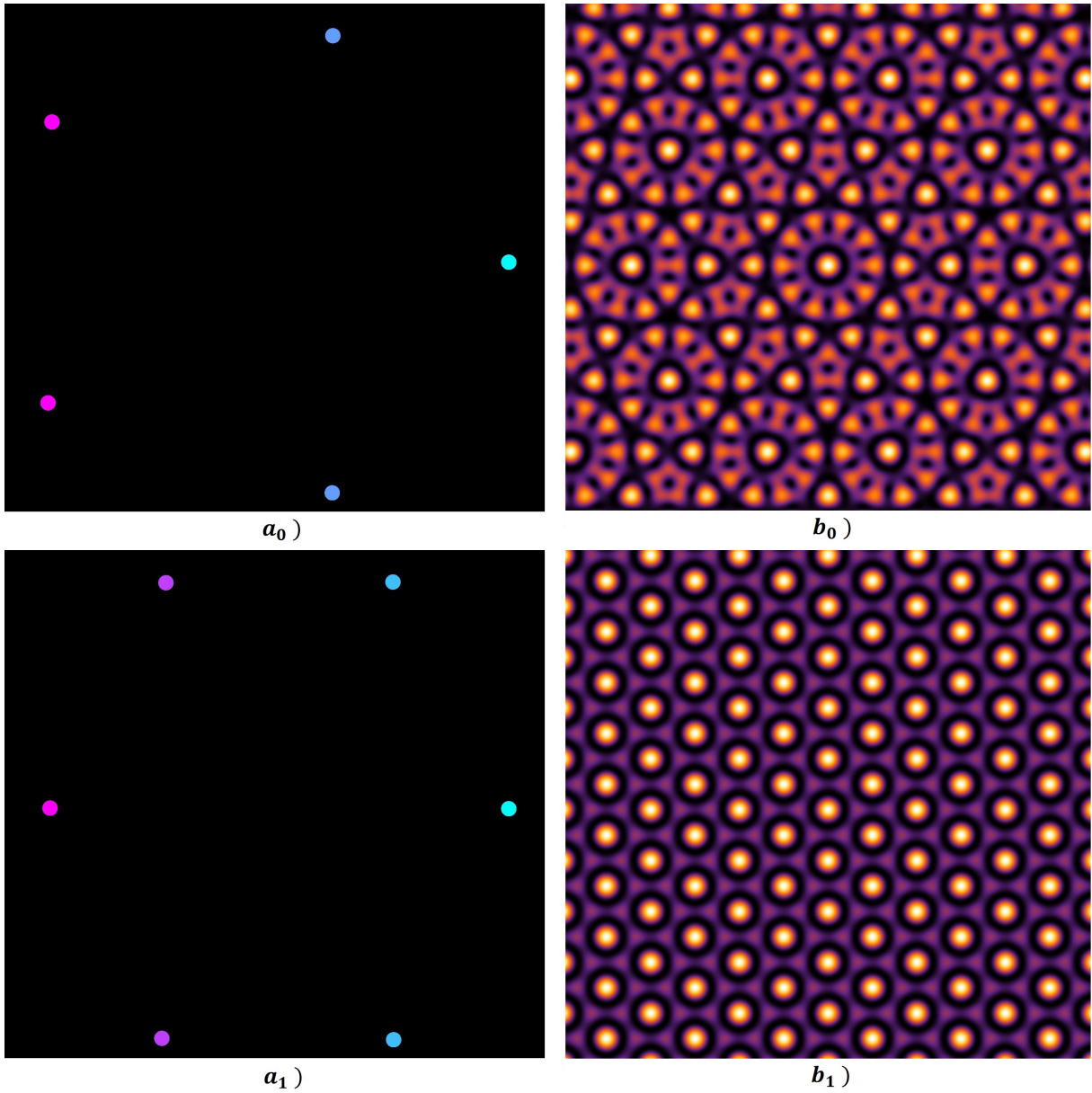
$$P_m = \left(p \cos \left(m \frac{2\pi}{n} \right), p \sin \left(m \frac{2\pi}{n} \right), 0 \right) \quad (3.17)$$

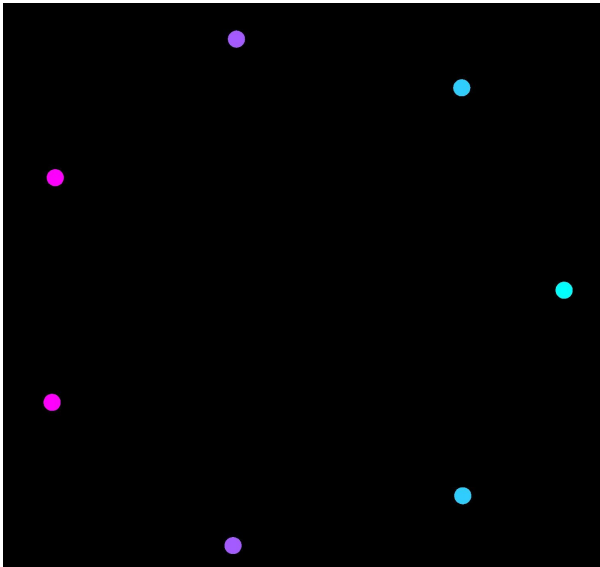
con $0 \leq m \leq n - 1$ un contador.

Para construir los campos se procede de la misma forma que en los casos anteriores, el valor de z en el punto de referencia y de la longitud de onda son los mismos.

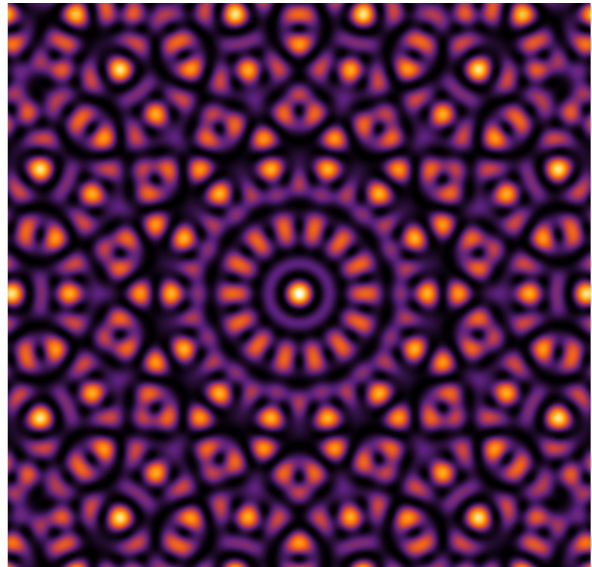
3.2.6. Resultados de la simulación numérica de la circunferencia

Las imágenes del lado izquierdo a_i señalan el número de rendijas puntuales y su distribución a lo largo de la circunferencia con $i + 5$ rendijas en total excepto en a_{21} donde hay 50 rendijas. Las imágenes de la derecha b_i graficadas en un rango de $-1.5cm \leq u \leq 1.5cm$ y $-1.5cm \leq v \leq 1.5cm$, señalan el patrón de interferencia resultante al hacer incidir un haz de luz en dicha distribución de rendijas.

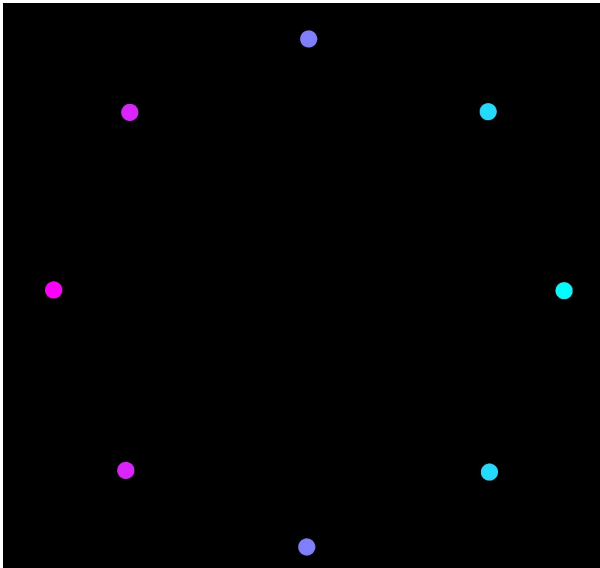




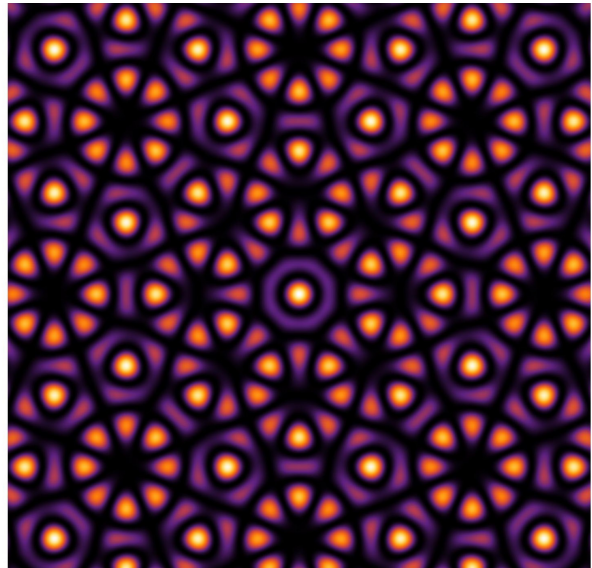
a_2)



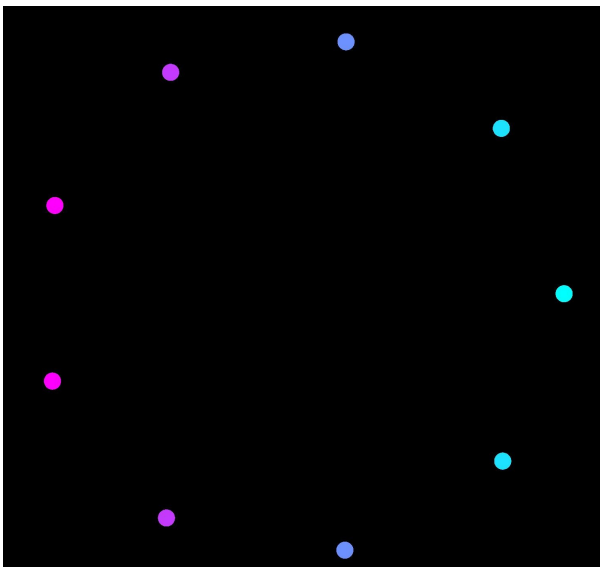
b_2)



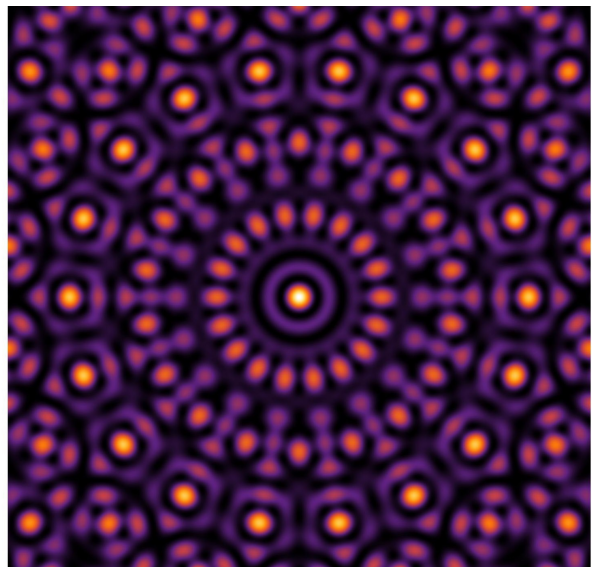
a_3)



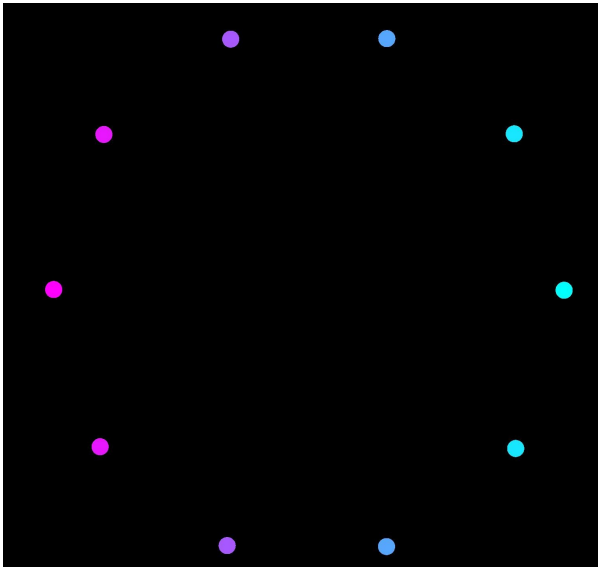
b_3)



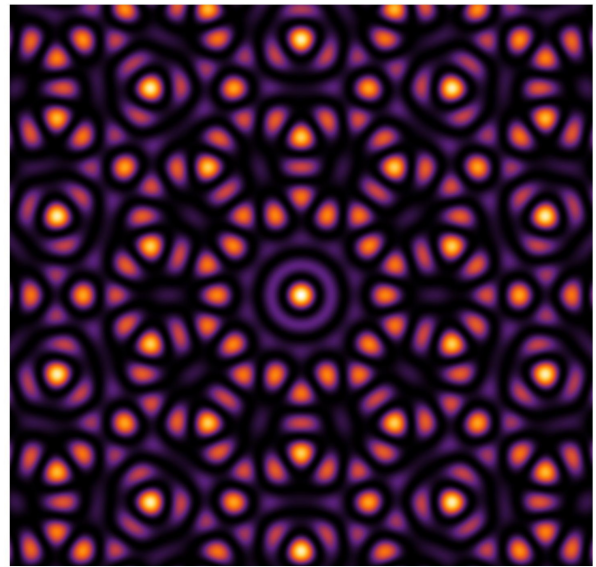
a_4)



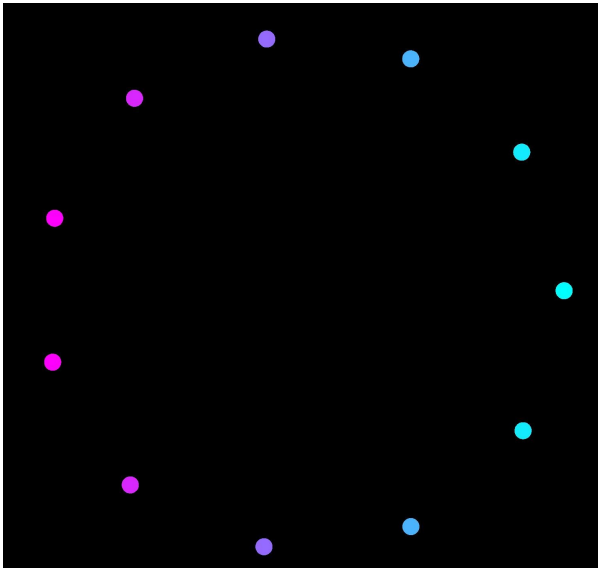
b_4)



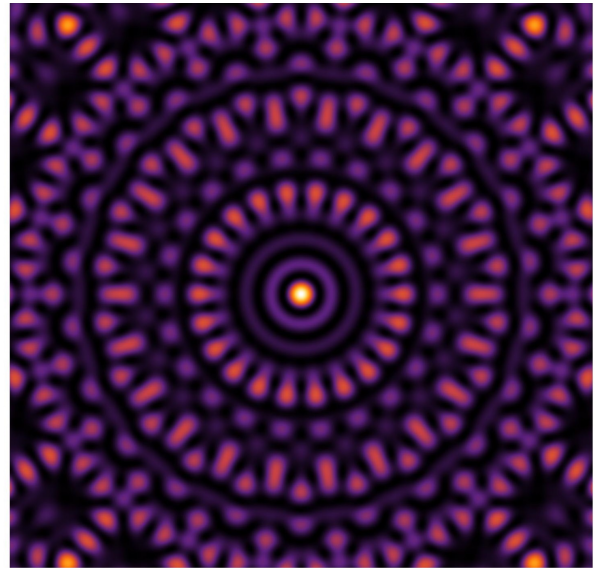
$a_5)$



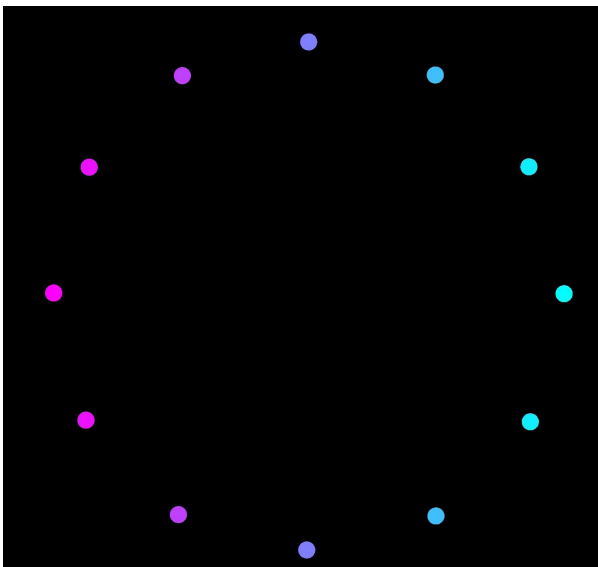
$b_5)$



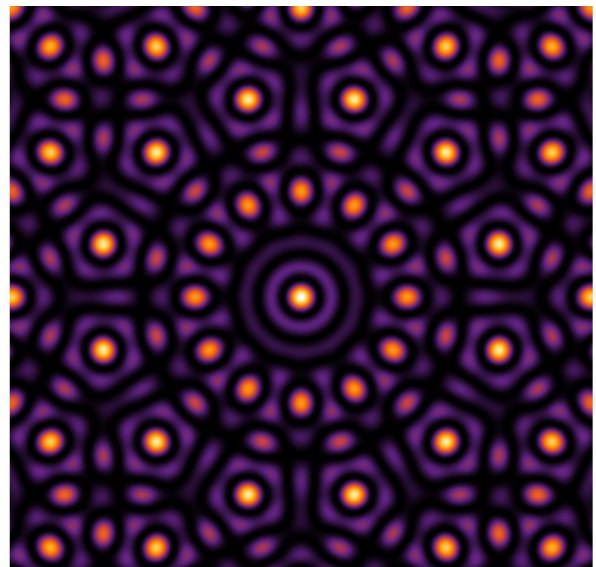
$a_6)$



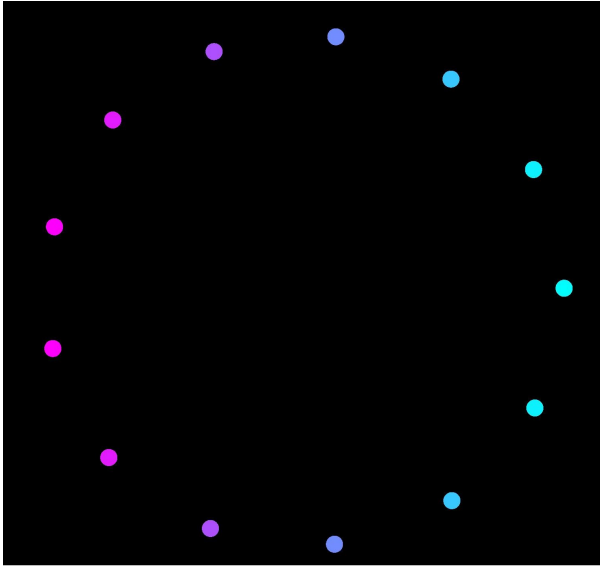
$b_6)$



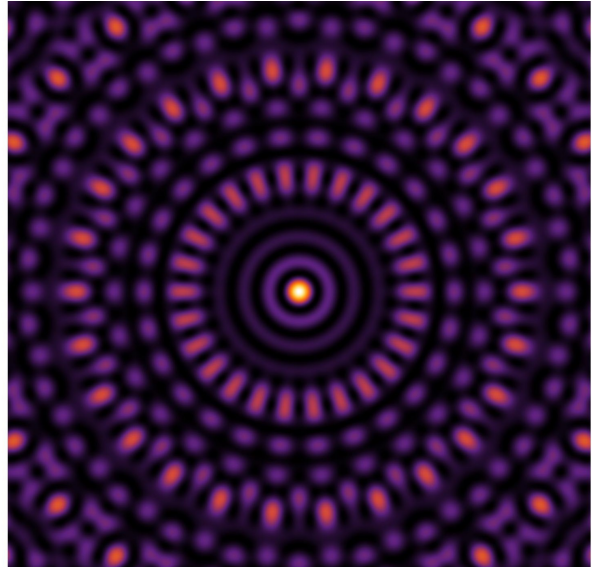
$a_7)$



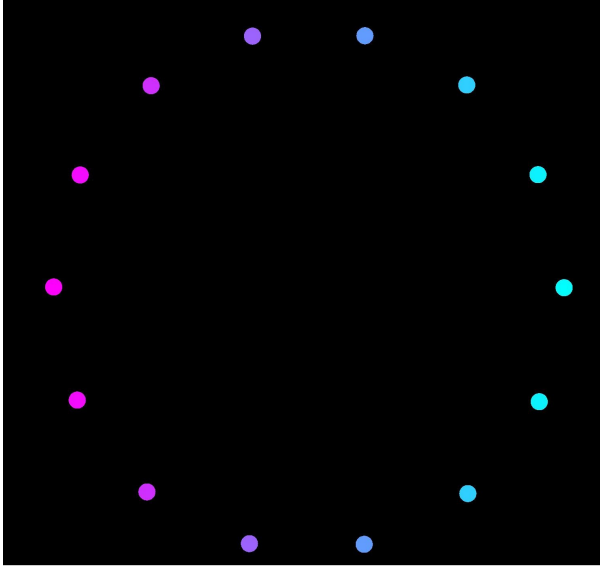
$b_7)$



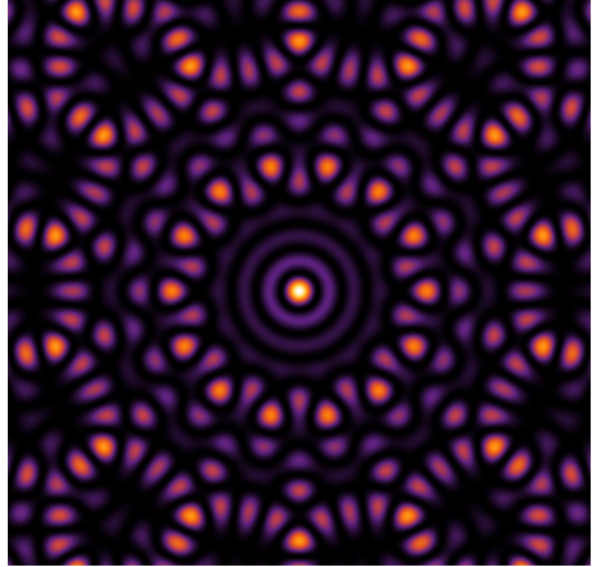
$a_8)$



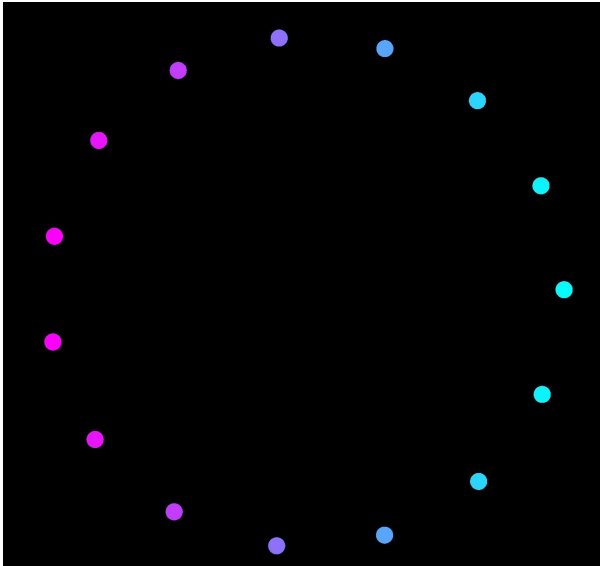
$b_8)$



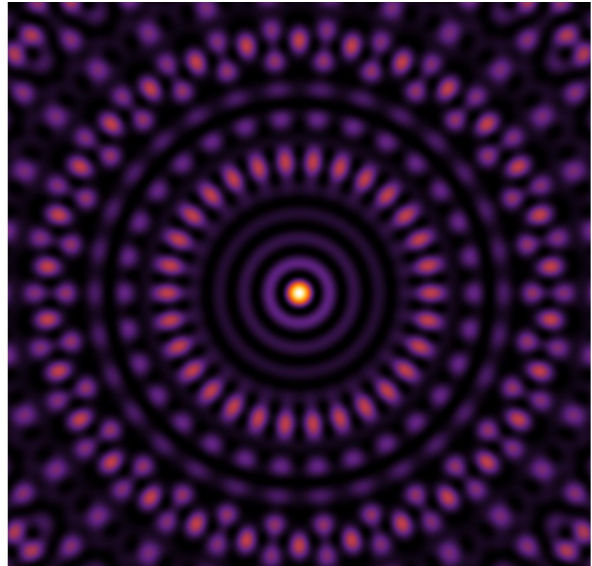
$a_9)$



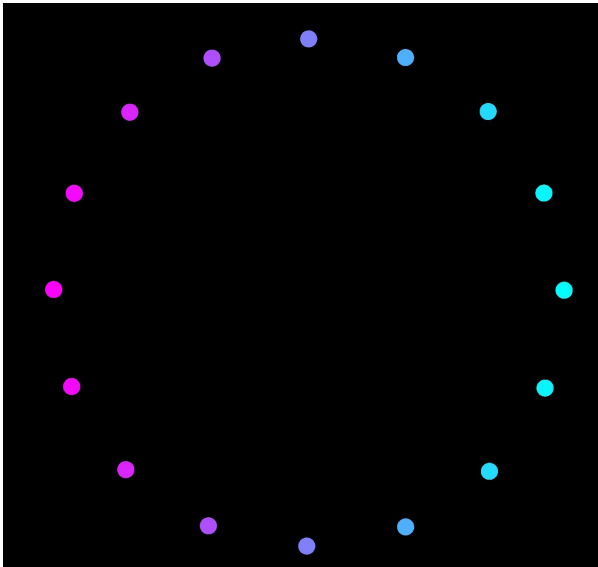
$b_9)$



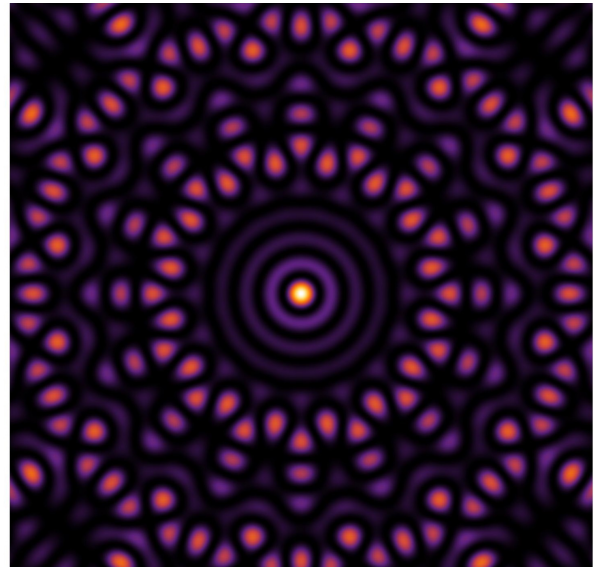
$a_{10})$



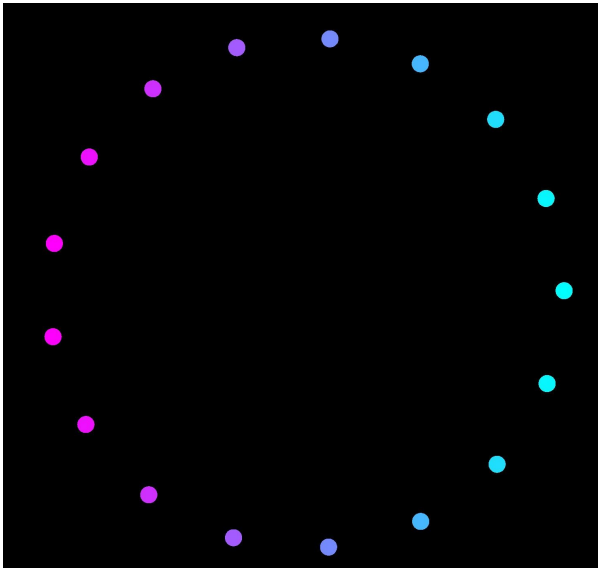
$b_{10})$



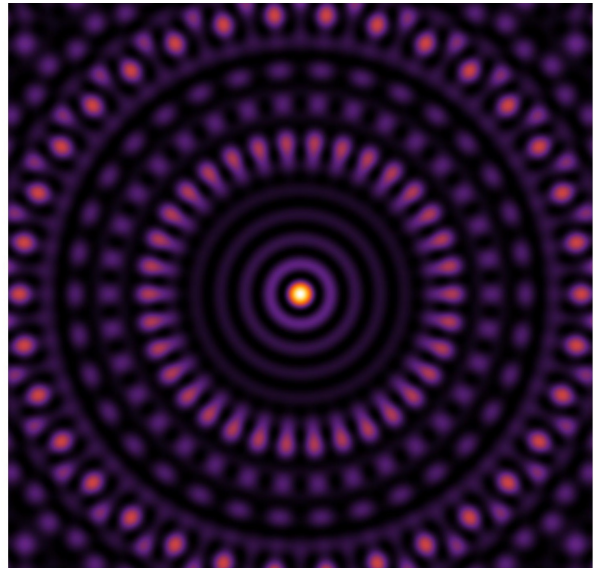
a_{11})



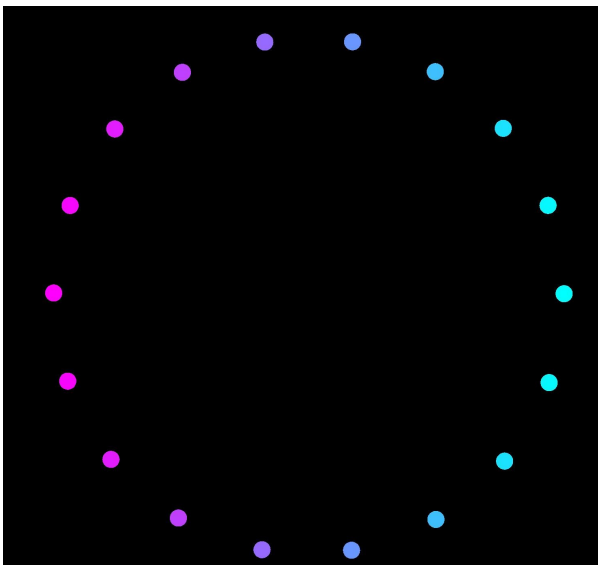
b_{11})



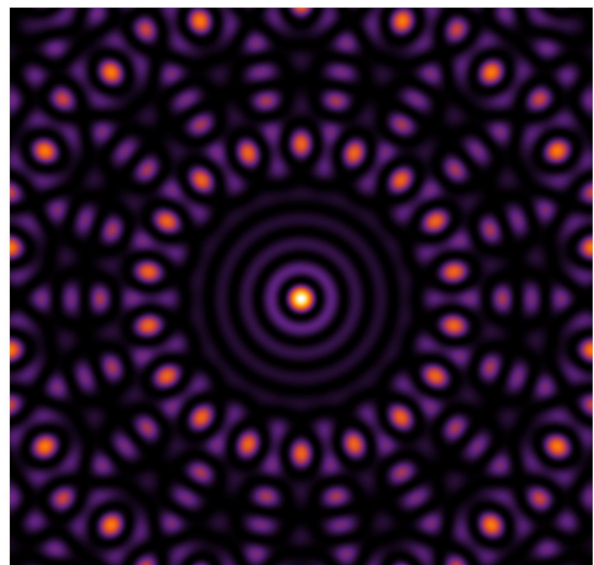
a_{12})



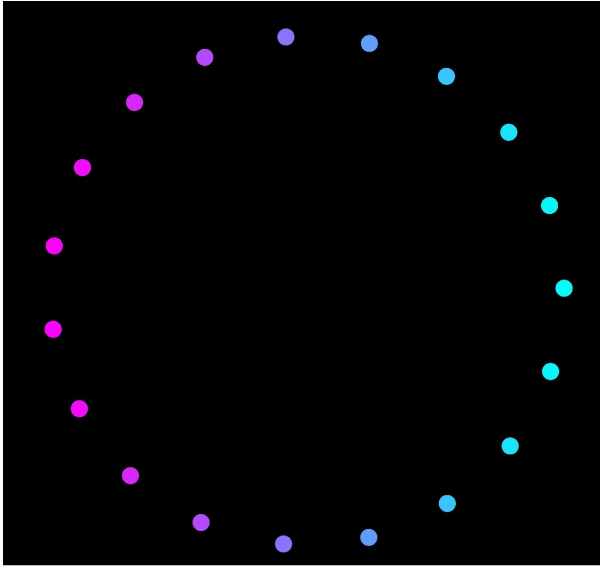
b_{12})



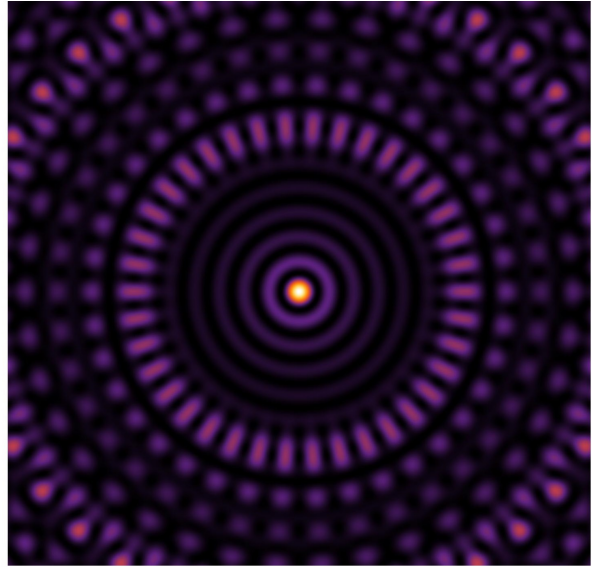
a_{13})



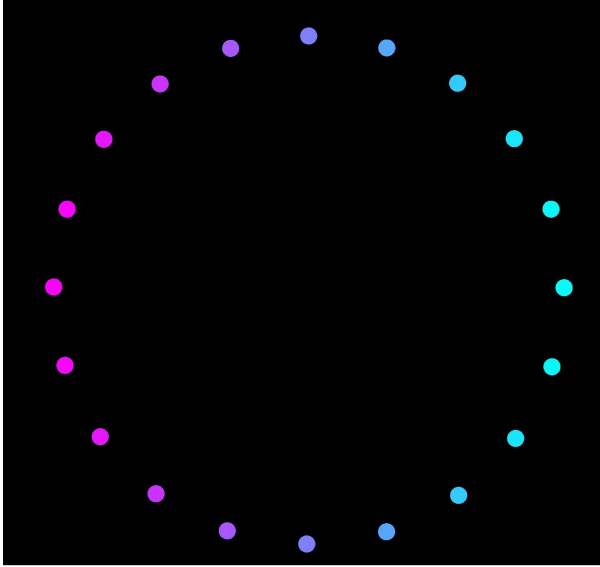
b_{13})



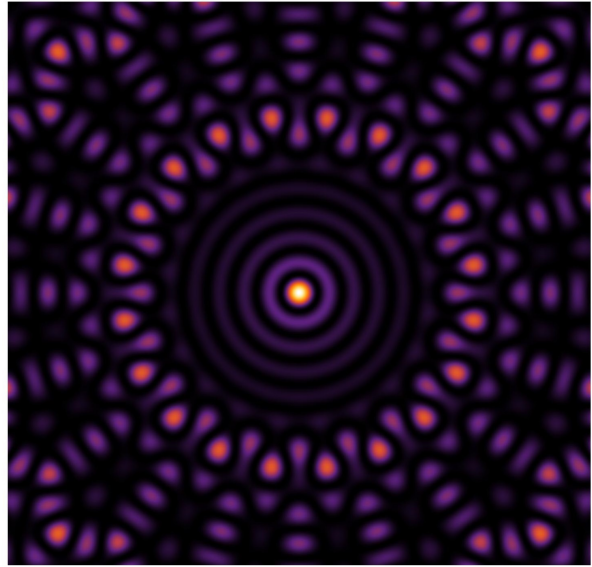
$a_{14})$



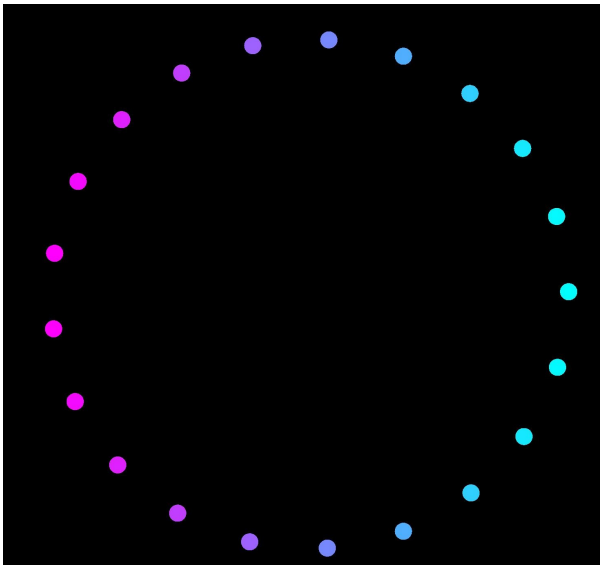
$b_{14})$



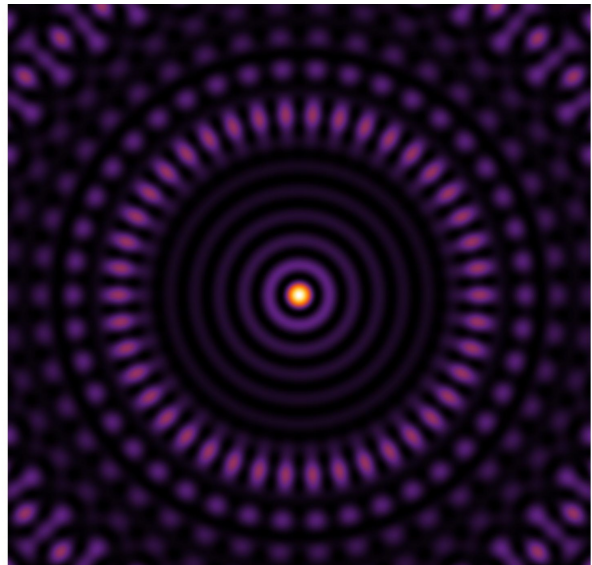
$a_{15})$



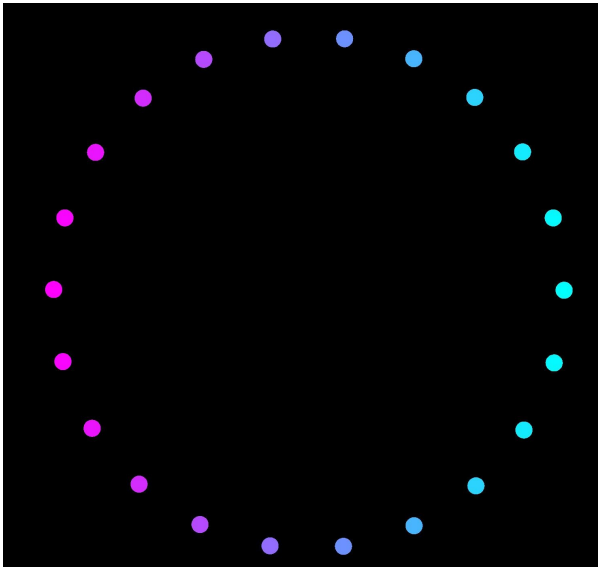
$b_{15})$



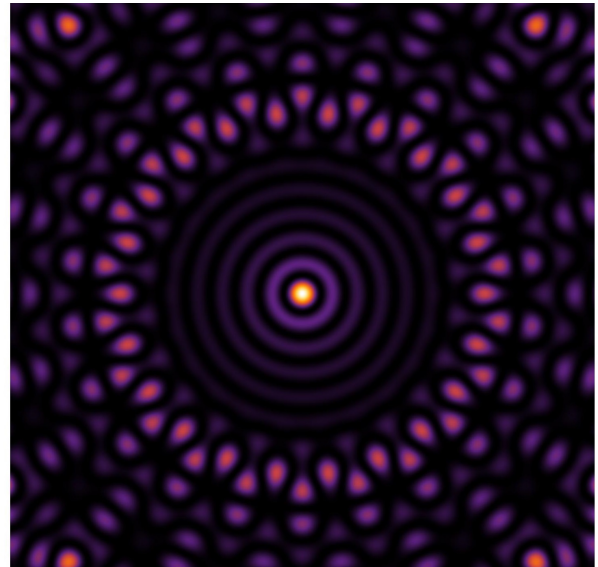
$a_{16})$



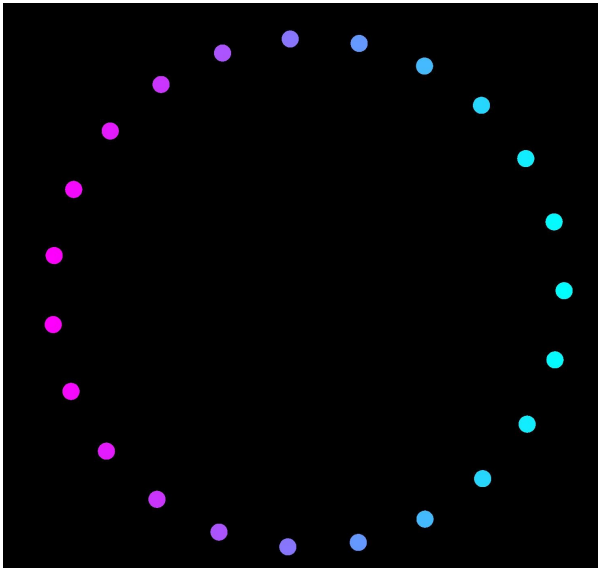
$b_{16})$



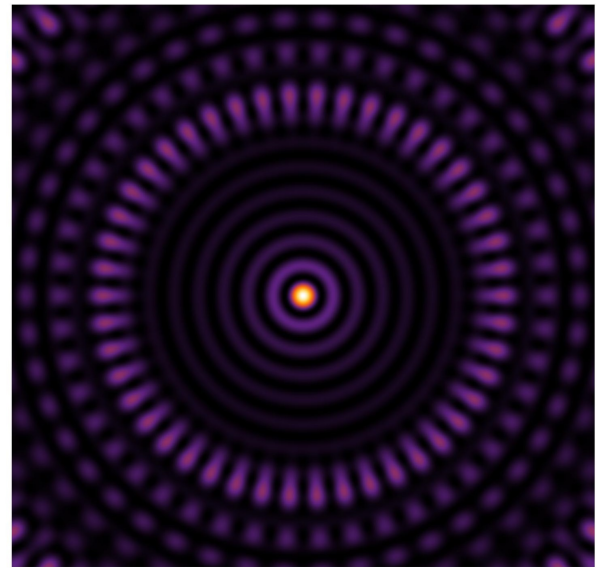
$a_{17})$



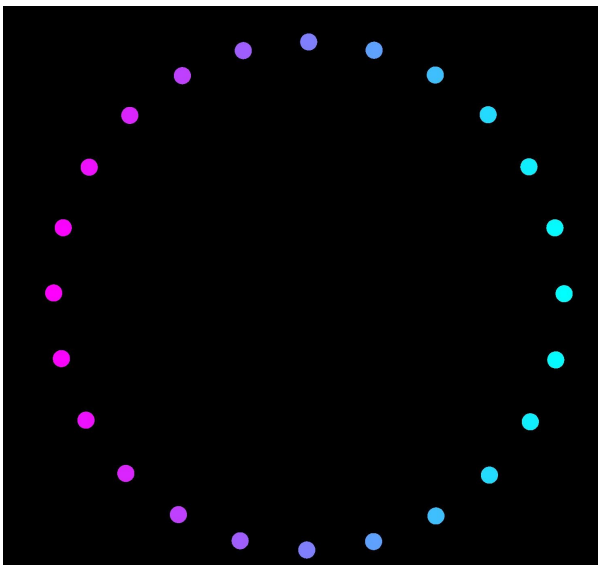
$b_{17})$



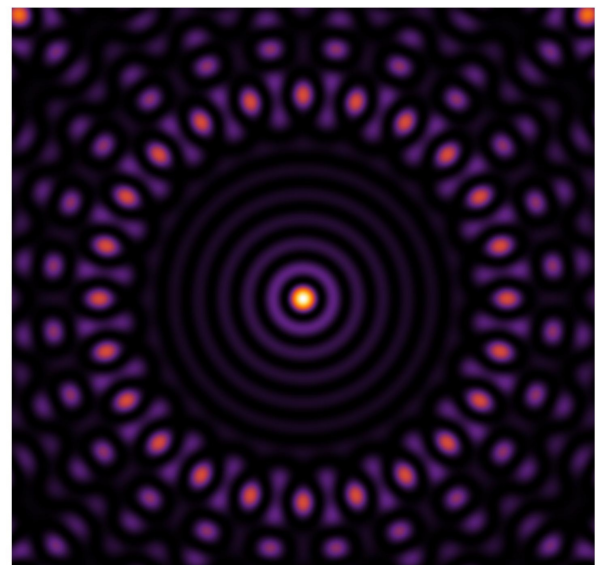
$a_{18})$



$b_{18})$



$a_{19})$



$b_{19})$

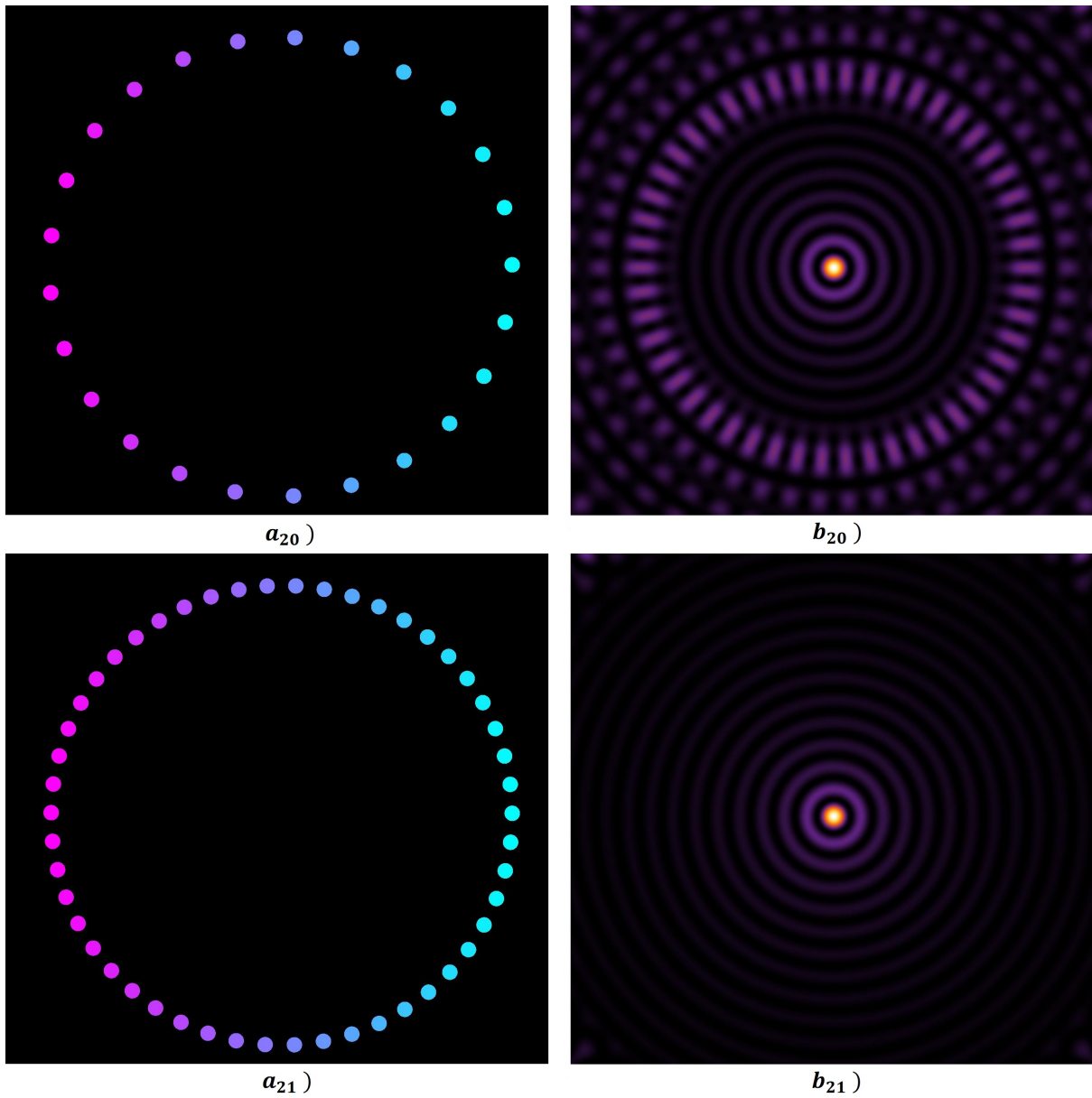


Figura 3.13: Distribución de rendijas (izquierda) y patrón de interferencia resultante (derecha).

Para un número mayor de rendijas el patrón de interferencia resultante se parece al patrón de difracción proporcionado por una abertura anular.

Capítulo 4

Explicación teórica de la simulación utilizando transformada de Fourier

4.1. Desarrollo con deltas de Dirac

La simulación se realizó considerando campos emergentes de las rendijas, realizando la suma de éstos y encontrando la irradiancia; sin embargo, como se analizó en la sección 2.4, mediante la transformada de Fourier se puede encontrar un patrón de difracción, aunque esto se restringe al campo lejano, éste método es otra forma de comparar el resultado de la simulación del capítulo anterior considerando que las rendijas se pueden representar por deltas de Dirac desplazadas. Se consideran los tres contornos geométricos anteriores.

4.1.1. Desarrollo para el contorno de un cuadrado

Al igual que en la sección 3.2, se considera el contorno del cuadrado de $1mm$ de lado, recordando que las coordenadas de las rendijas están dadas por las ecuaciones

$$P_{1m} = \left(x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n}, y_a, 0 \right) \quad (4.1)$$

$$P_{2m} = \left(x_b - \frac{m(x_b - x_a)}{n}, y_b, 0 \right) \quad (4.2)$$

$$P_{3m} = \left(x_a, y_b - \frac{m(y_b - y_a)}{n}, 0 \right) \quad (4.3)$$

$$P_{4m} = \left(x_b, y_a + \frac{m(y_b - y_a)}{n}, 0 \right) \quad (4.4)$$

se tiene que la función objeto está dada por

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) = & \sum_{m=0}^{n-1} \delta \left(x - \left[x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right], y - y_a \right) + \sum_{m=0}^{n-1} \delta \left(x - \left[x_b - \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right], y - y_b \right) \\ & + \sum_{m=0}^{n-1} \delta \left(x - x_a, y - \left[y_b - \frac{m(y_b - y_a)}{n} \right] \right) + \sum_{m=0}^{n-1} \delta \left(x - x_b, y - \left[y_a + \frac{m(y_b - y_a)}{n} \right] \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde n es fija una vez determinado el número de rendijas por lado, utilizando la transformada de Fourier, tomando en cuenta que la transformada de una suma es la suma de las transformadas (propiedad de linealidad, sección 2.5) se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\zeta(x, y)\} = & \sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{F} \left\{ \delta \left(x - \left[x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right], y - y_a \right) \right\} \\ & + \sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{F} \left\{ \delta \left(x - \left[x_b - \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right], y - y_b \right) \right\} \\ & + \sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{F} \left\{ \delta \left(x - x_a, y - \left[y_b - \frac{m(y_b - y_a)}{n} \right] \right) \right\} \\ & + \sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{F} \left\{ \delta \left(x - x_b, y - \left[y_a + \frac{m(y_b - y_a)}{n} \right] \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde

$$\begin{aligned} & \mathcal{F} \left\{ \delta \left(x - \left[x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right], y - y_a \right) \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \delta \left(x - \left[x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right], y - y_a \right) e^{-i2\pi(\mu x + \nu y)} \\ &= e^{-i2\pi(\mu \left[x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right] + \nu y_a)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{F} \left\{ \delta \left(x - \left[x_b - \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right], y - y_b \right) \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \delta \left(x - \left[x_b - \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right], y - y_b \right) e^{-i2\pi(\mu x + \nu y)} \\ &= e^{-i2\pi(\mu \left[x_b - \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right] + \nu y_b)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{F} \left\{ \delta \left(x - x_a, y - \left[y_b - \frac{m(y_b - y_a)}{n} \right] \right) \right\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \delta \left(x - x_a, y - \left[y_b - \frac{m(y_b - y_a)}{n} \right] \right) e^{-i2\pi(\mu x + \nu y)} \\
 &= e^{-i2\pi \left(\mu x_a + \nu \left[y_b - \frac{m(y_b - y_a)}{n} \right] \right)}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{F} \left\{ \delta \left(x - x_b, y - \left[y_a + \frac{m(y_b - y_a)}{n} \right] \right) \right\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \delta \left(x - x_b, y - \left[y_a + \frac{m(y_b - y_a)}{n} \right] \right) e^{-i2\pi(\mu x + \nu y)} \\
 &= e^{-i2\pi \left(\mu x_b + \nu \left[y_a + \frac{m(y_b - y_a)}{n} \right] \right)}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} \{ \zeta(x, y) \} &= \sum_{m=0}^{n-1} \left[e^{-i2\pi \left(\mu \left[x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right] + \nu y_a \right)} + \sum_{m=0}^{n-1} e^{-i2\pi \left(\mu \left[x_b - \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right] + \nu y_b \right)} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=0}^{n-1} e^{-i2\pi \left(\mu x_a + \nu \left[y_b - \frac{m(y_b - y_a)}{n} \right] \right)} + \sum_{m=0}^{n-1} e^{-i2\pi \left(\mu x_b + \nu \left[y_a + \frac{m(y_b - y_a)}{n} \right] \right)} \right].
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Según el algoritmo establecido y dadas las funciones que gobiernan cada lado del cuadrado se puede ver que cuando se decide el número de rendijas por lado, por ejemplo 2, para P_1 la coordenada x de la primera rendija está a la izquierda del origen, mientras que la coordenada x de la primera rendija para P_2 aparece a la misma distancia que la anterior pero a la derecha del origen, es decir una coordenada es la inversa de la otra; lo mismo sucede para la segunda rendija de estos lados. También se puede notar que las coordenadas y de las rendijas en P_3 serán las inversas a P_4

por tanto

$$\begin{aligned}
 x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n} &= - \left(x_b - \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right) \\
 \Rightarrow x_a &= -x_b
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

además

$$\begin{aligned}
 y_a + \frac{m(y_b - y_a)}{n} &= - \left(y_b - \frac{m(y_b - y_a)}{n} \right) \\
 \Rightarrow y_a &= -y_b
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

lo cual coincide con el modelo inicial de que el centro del cuadrado coincide con el origen del sistema de coordenadas. Ahora sustituyendo la inversa en la ecuación (4.11) se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\zeta(x, y)\} = & \sum_{m=0}^{n-1} e^{-i2\pi\left(\mu\left[x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n}\right] + \nu y_a\right)} + \sum_{m=0}^{n-1} e^{i2\pi\left(\mu\left[x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n}\right] + \nu y_a\right)} \\ & + \sum_{m=0}^{n-1} e^{-i2\pi\left(\mu x_a + \nu\left[y_b - \frac{m(y_b - y_a)}{n}\right]\right)} + \sum_{m=0}^{n-1} e^{i2\pi\left(\mu x_a + \nu\left[y_b - \frac{m(y_b - y_a)}{n}\right]\right)}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Sustituyendo el valor de las frecuencias espaciales

$$\mu = \frac{u}{\lambda D} \quad \nu = \frac{v}{\lambda D} \quad (4.15)$$

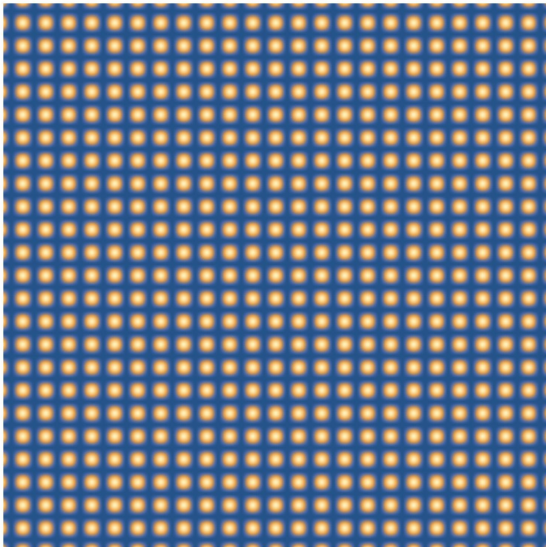
en la ecuación (4.14) para obtener la transformada en términos de las variable u , v que corresponden al plano de observación y donde $\lambda = 633nm$ al igual que en la simulación se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}(u, v) = & \sum_{m=0}^{n-1} \left[e^{-i2\pi\left(\frac{u}{\lambda D}\left[x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n}\right] + \frac{v}{\lambda D}y_a\right)} + \sum_{m=0}^{n-1} e^{i2\pi\left(\frac{u}{\lambda D}\left[x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n}\right] + \frac{v}{\lambda D}y_a\right)} \right. \\ & \left. + \sum_{m=0}^{n-1} e^{-i2\pi\left(\frac{u}{\lambda D}x_a + \frac{v}{\lambda D}\left[y_b - \frac{m(y_b - y_a)}{n}\right]\right)} + \sum_{m=0}^{n-1} e^{i2\pi\left(\frac{u}{\lambda D}x_a + \frac{v}{\lambda D}\left[y_b - \frac{m(y_b - y_a)}{n}\right]\right)} \right] \\ & = \sum_{m=0}^{n-1} 2 \cos \frac{k}{D} \left(u \left[x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right] + v y_a \right) \\ & + \sum_{m=0}^{n-1} 2 \cos \frac{k}{D} \left(u x_a + v \left[y_b - \frac{m(y_b - y_a)}{n} \right] \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

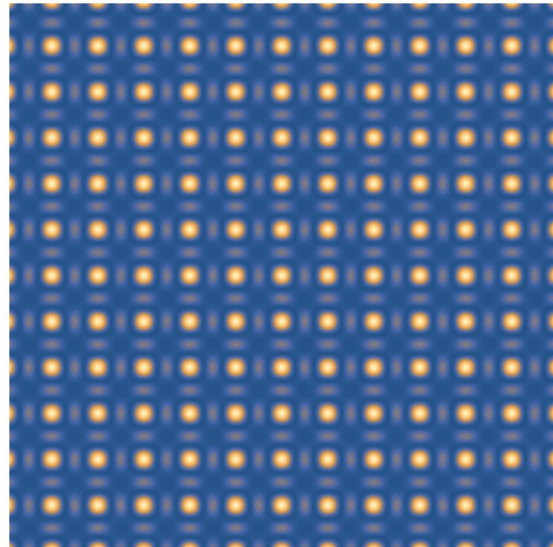
donde para obtener el patrón de interferencia se necesita la irradiancia determinada por

$$I = \left| \sum_{m=0}^{n-1} \left\{ 2 \cos \frac{k}{D} \left(u \left[x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right] + v y_a \right) + 2 \cos \frac{k}{D} \left(u x_a + v \left[y_b - \frac{m(y_b - y_a)}{n} \right] \right) \right\} \right|^2. \quad (4.17)$$

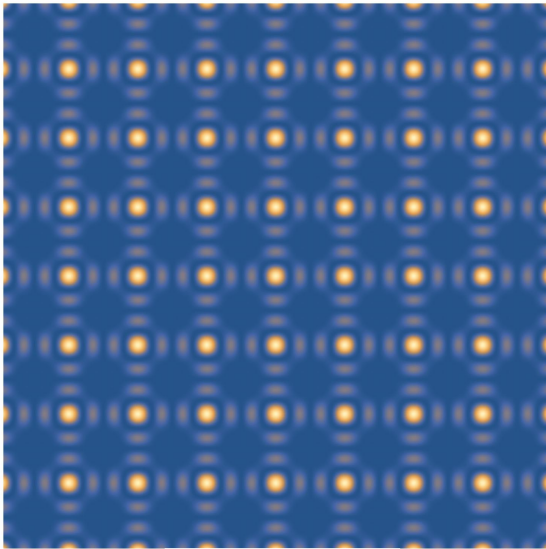
Al introducir el resultado anterior en Mathematica 10, se obtienen los siguientes patrones de interferencia señalados con a_i , graficados en un rango de $-1.5cm \leq u \leq 1.5cm$ y $-1.5cm \leq v \leq 1.5cm$, donde para cada patrón hay i rendijas por lado y $4(i + 1)$ rendijas en total.



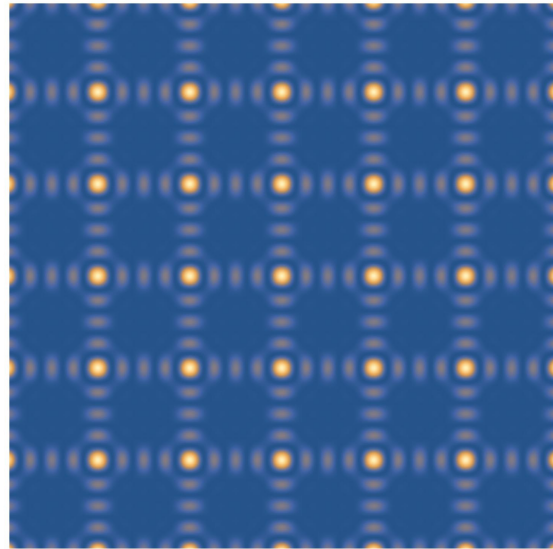
a_0)



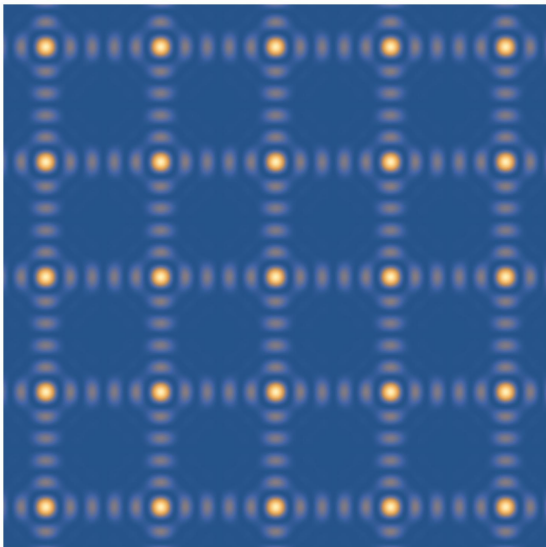
a_1)



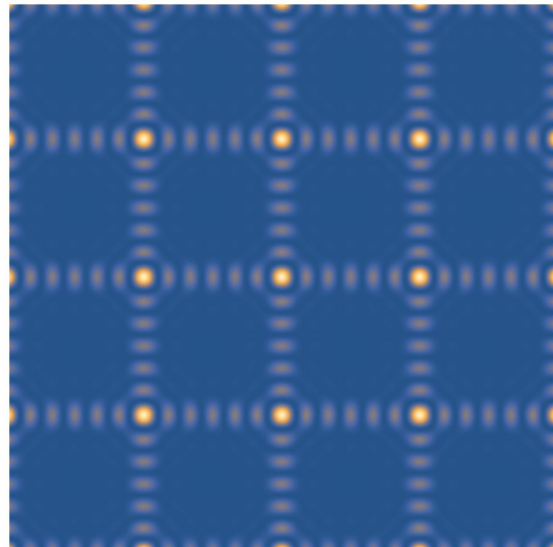
a_2)



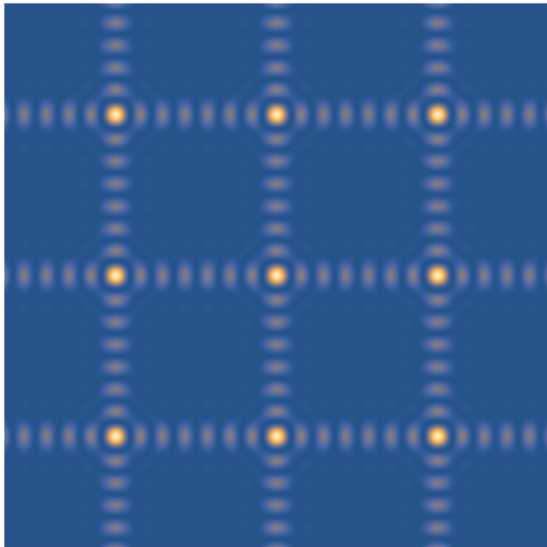
a_3)



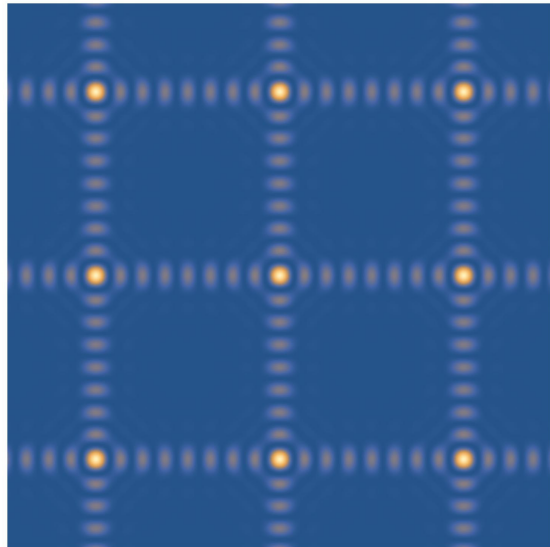
a_4)



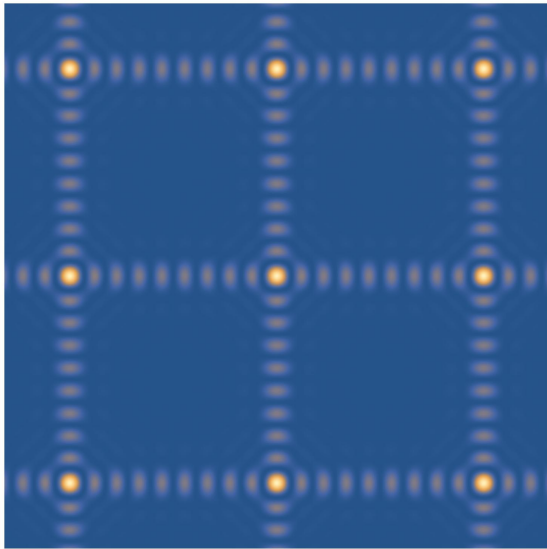
a_5)



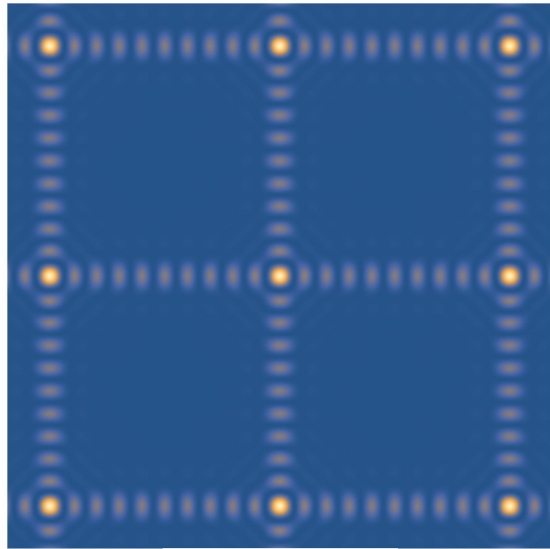
$a_6)$



$a_7)$



$a_8)$



$a_9)$

Comparando este resultado con el obtenido por la simulación inicial por superposición de campos, se observa que es similar. La diferencia en el gradiente de color se utilizó únicamente para diferenciar los métodos usados.

4.1.2. Desarrollo para el contorno de un triángulo

Considerando esta vez el contorno de un triángulo equilátero de $1mm$ de lado, en el cual las coordenadas de las rendijas están dadas por las ecuaciones

$$P_{1m} = \left(x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n}, y_a, 0 \right) \quad (4.18)$$

$$P_{2m} = \left(x_b - \frac{m(x_b - x_c)}{n}, \left[\frac{y_c - y_a}{x_c - x_b} \right] \left[-\frac{m(x_b - x_c)}{n} \right] + y_a, 0 \right) \quad (4.19)$$

$$P_{3m} = \left(x_c - \frac{m(x_c - x_a)}{n}, \left[\frac{y_c - y_a}{x_c - x_a} \right] \left[x_c - \frac{m(x_c - x_a)}{n} - x_a \right] + y_a, 0 \right) \quad (4.20)$$

se tiene que la función objeto está dada por

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) = & \sum_{m=0}^{n-1} \delta \left(x - \left[x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right], y - y_a \right) \\ & + \sum_{m=0}^{n-1} \delta \left(x - \left[x_b - \frac{m(x_b - x_c)}{n} \right], y - \left[\left[\frac{y_c - y_a}{x_c - x_b} \right] \left[-\frac{m(x_b - x_c)}{n} \right] + y_a \right] \right) \\ & + \sum_{m=0}^{n-1} \delta \left(x - \left[x_c - \frac{m(x_c - x_a)}{n} \right], y - \left[\left[\frac{y_c - y_a}{x_c - x_a} \right] \left[x_c - \frac{m(x_c - x_a)}{n} - x_a \right] + y_a \right] \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Utilizando la transformada de Fourier se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\zeta(x, y)\} = & \sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{F} \left\{ \delta \left(x - \left[x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right], y - y_a \right) \right\} \\ & + \sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{F} \left\{ \delta \left(x - \left[x_b - \frac{m(x_b - x_c)}{n} \right], y - \left[\left[\frac{y_c - y_a}{x_c - x_b} \right] \left[-\frac{m(x_b - x_c)}{n} \right] + y_a \right] \right) \right\} \\ & + \sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{F} \left\{ \delta \left(x - \left[x_c - \frac{m(x_c - x_a)}{n} \right], y - \left[\left[\frac{y_c - y_a}{x_c - x_a} \right] \left[x_c - \frac{m(x_c - x_a)}{n} - x_a \right] + y_a \right] \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{F} \left\{ \delta \left(x - \left[x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right], y - y_a \right) \right\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \delta \left(x - \left[x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right], y - y_a \right) e^{-i2\pi(\mu x + \nu y)} \\
 &= e^{-i2\pi \left(\mu \left[x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right] + \nu y_a \right)}
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{F} \left\{ \delta \left(x - \left[x_b - \frac{m(x_b - x_c)}{n} \right], y - \left[\left[\frac{y_c - y_a}{x_c - x_b} \right] \left[-\frac{m(x_b - x_c)}{n} \right] + y_a \right] \right) \right\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \delta \left(x - \left[x_b - \frac{m(x_b - x_c)}{n} \right], y - \left[\left[\frac{y_c - y_a}{x_c - x_b} \right] \left[-\frac{m(x_b - x_c)}{n} \right] + y_a \right] \right) e^{-i2\pi(\mu x + \nu y)} \\
 &= e^{-i2\pi \left(\mu \left[x_b - \frac{m(x_b - x_c)}{n} \right] + \nu \left[\left[\frac{y_c - y_a}{x_c - x_b} \right] \left[-\frac{m(x_b - x_c)}{n} \right] + y_a \right] \right)}
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{F} \left\{ \delta \left(x - \left[x_c - \frac{m(x_c - x_a)}{n} \right], y - \left[\left[\frac{y_c - y_a}{x_c - x_a} \right] \left[x_c - \frac{m(x_c - x_a)}{n} - x_a \right] + y_a \right] \right) \right\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \delta \left(x - \left[x_c - \frac{m(x_c - x_a)}{n} \right], y - \left[\left[\frac{y_c - y_a}{x_c - x_a} \right] \left[x_c - \frac{m(x_c - x_a)}{n} - x_a \right] + y_a \right] \right) e^{-i2\pi(\mu x + \nu y)} \\
 &= e^{-i2\pi \left(\mu \left[x_c - \frac{m(x_c - x_a)}{n} \right] + \nu \left[\left[\frac{y_c - y_a}{x_c - x_a} \right] \left[x_c - \frac{m(x_c - x_a)}{n} - x_a \right] + y_a \right] \right)}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} \{ \zeta(x, y) \} &= \sum_{m=0}^{n-1} e^{-i2\pi \left(\mu \left[x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n} \right] + \nu y_a \right)} \\
 &+ \sum_{m=0}^{n-1} e^{-i2\pi \left(\mu \left[x_b - \frac{m(x_b - x_c)}{n} \right] + \nu \left[\left[\frac{y_c - y_a}{x_c - x_b} \right] \left[-\frac{m(x_b - x_c)}{n} \right] + y_a \right] \right)} \\
 &+ \sum_{m=0}^{n-1} e^{-i2\pi \left(\mu \left[x_c - \frac{m(x_c - x_a)}{n} \right] + \nu \left[\left[\frac{y_c - y_a}{x_c - x_a} \right] \left[x_c - \frac{m(x_c - x_a)}{n} - x_a \right] + y_a \right] \right)}.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

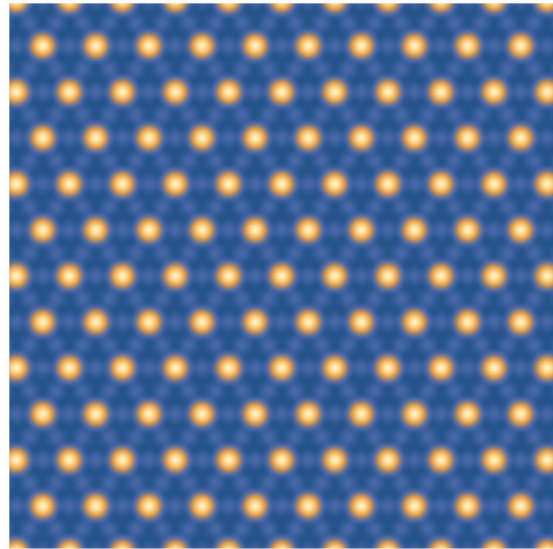
Sustituyendo el valor de las frecuencias espaciales en la ecuación anterior se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{\zeta(x, y)\} &= \sum_{m=0}^{n-1} e^{-i2\pi\left(\frac{u}{\lambda D}\left[x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n}\right] + \frac{v}{\lambda D}y_a\right)} + \sum_{m=0}^{n-1} e^{-i2\pi\left(\frac{u}{\lambda D}\left[x_b - \frac{m(x_b - x_c)}{n}\right] + \frac{v}{\lambda D}\left[\left[\frac{y_c - y_a}{x_c - x_b}\right]\left[-\frac{m(x_b - x_c)}{n}\right] + y_a\right]\right)} \\
 &+ \sum_{m=0}^{n-1} e^{-i2\pi\left(\frac{u}{\lambda D}\left[x_c - \frac{m(x_c - x_a)}{n}\right] + \frac{v}{\lambda D}\left[\left[\frac{y_c - y_a}{x_c - x_a}\right]\left[x_c - \frac{m(x_c - x_a)}{n} - x_a\right] + y_a\right]\right)} \\
 &= \sum_{m=0}^{n-1} e^{-i\frac{k}{D}\left(u\left[x_a + \frac{m(x_b - x_a)}{n}\right] + vy_a\right)} + \sum_{m=0}^{n-1} e^{-i\frac{k}{D}\left(u\left[x_b - \frac{m(x_b - x_c)}{n}\right] + v\left[\left[\frac{y_c - y_a}{x_c - x_b}\right]\left[-\frac{m(x_b - x_c)}{n}\right] + y_a\right]\right)} \\
 &+ \sum_{m=0}^{n-1} e^{-i\frac{k}{D}\left(u\left[x_c - \frac{m(x_c - x_a)}{n}\right] + v\left[\left[\frac{y_c - y_a}{x_c - x_a}\right]\left[x_c - \frac{m(x_c - x_a)}{n} - x_a\right] + y_a\right]\right)}.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Para obtener el patrón de interferencia se calcula la irradiancia mediante el módulo al cuadrado del resultado anterior, al simular dicho módulo al cuadrado se obtienen los siguientes patrones de interferencia señalados con a_i , graficados en un rango de $-1.5cm \leq u \leq 1.5cm$ y $-1.5cm \leq v \leq 1.5cm$, donde para cada patrón hay i rendijas por lado y $3(i + 1)$ rendijas en total.



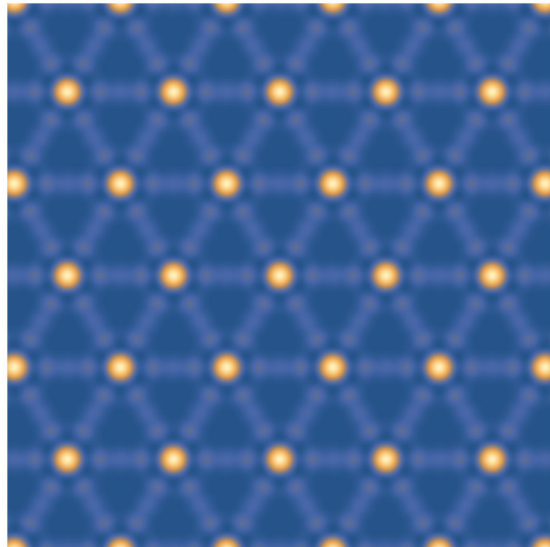
a_0)



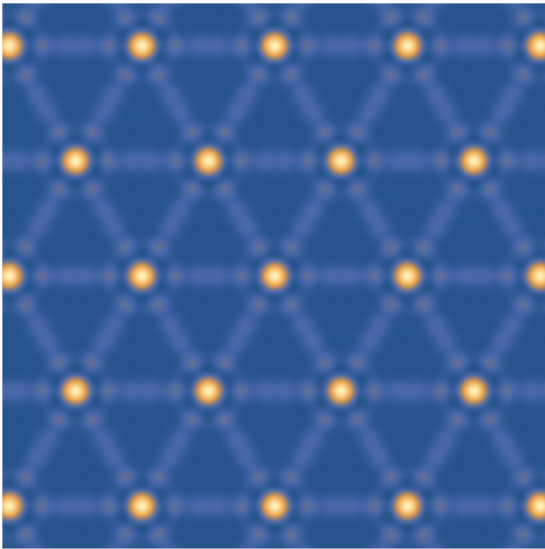
a_1)



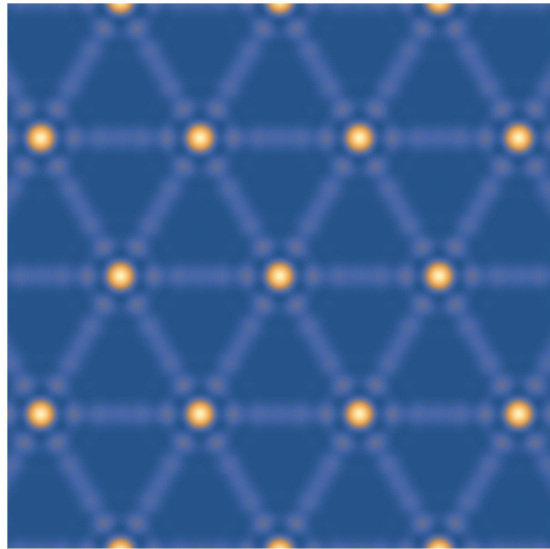
a_2)



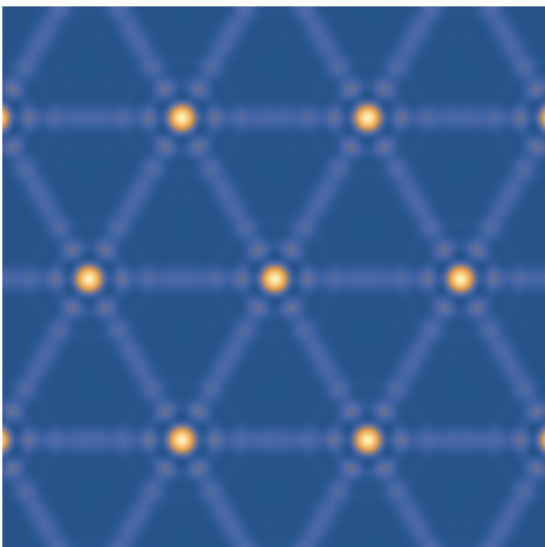
a_3)



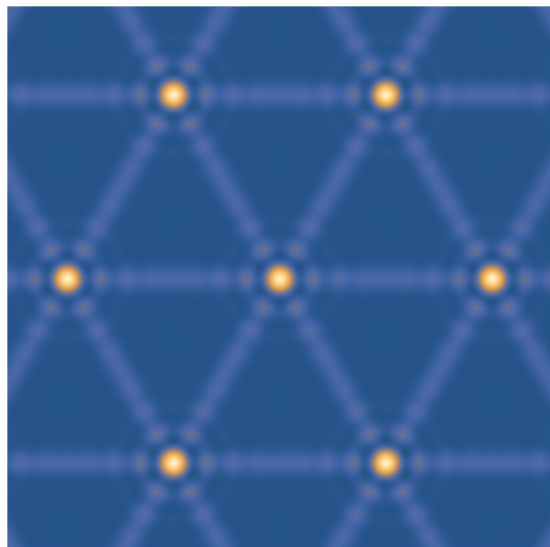
a_4)



a_5)



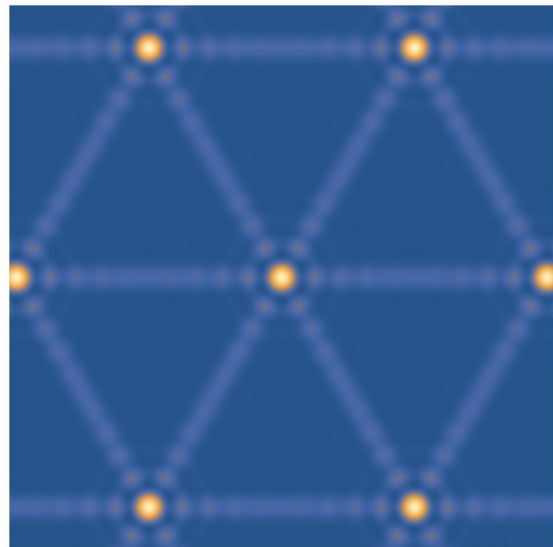
a_6)



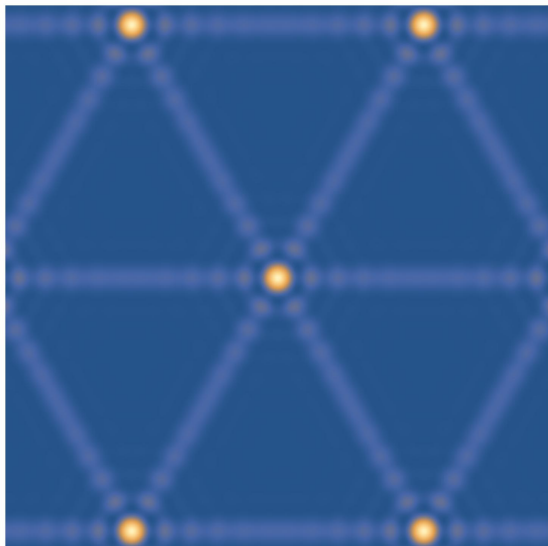
a_7)



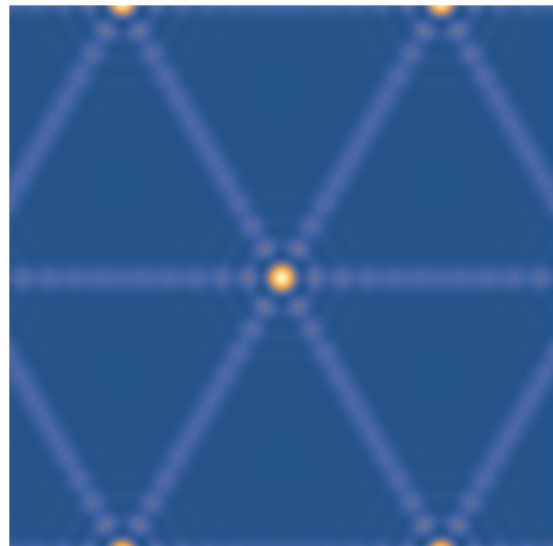
a_8)



a_9)



a_{10})



a_{11})

Al comparar este resultado con el obtenido por la simulación por superposición de campos para el contorno del triángulo, se encuentra que son similares.

4.1.3. Desarrollo para una circunferencia

Considerando ahora la circunferencia de $1mm$ de diámetro junto con la ecuación (3.17) se define la función objeto como

$$\zeta(x, y) = \sum_{m=0}^{n-1} \delta \left(x - p \cos \left(m \frac{2\pi}{n} \right), y - p \sin \left(m \frac{2\pi}{n} \right) \right) \quad (4.28)$$

cuya transformada es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\zeta(x, y)\} &= \sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{F} \left\{ \delta \left(x - p \cos \left(m \frac{2\pi}{n} \right), y - p \sin \left(m \frac{2\pi}{n} \right) \right) \right\} \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} e^{-i2\pi(\mu p \cos(m \frac{2\pi}{n}) + \nu p \sin(m \frac{2\pi}{n}))} \end{aligned} \quad (4.29)$$

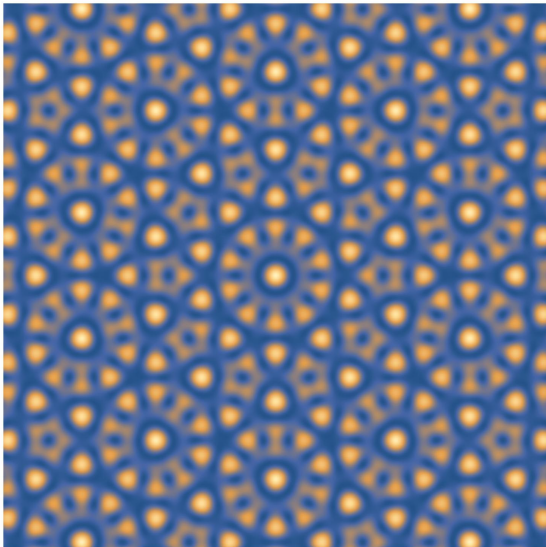
Al sustituir los valores de las frecuencias espaciales en la ecuación anterior se obtiene

$$\tilde{\zeta}(u, v) = \sum_{m=0}^{n-1} e^{-i \frac{kp}{D} (u \cos(m \frac{2\pi}{n}) + v \sin(m \frac{2\pi}{n}))} \quad (4.30)$$

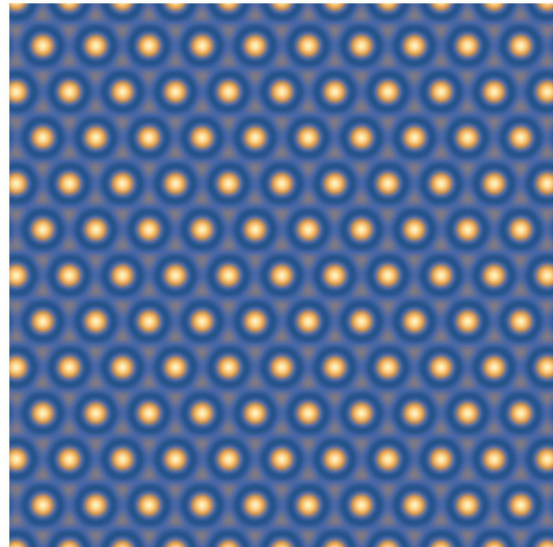
y la irradiancia está dada por

$$I = \left| \sum_{m=0}^{n-1} e^{-i \frac{kp}{D} (u \cos(m \frac{2\pi}{n}) + v \sin(m \frac{2\pi}{n}))} \right|^2 \quad (4.31)$$

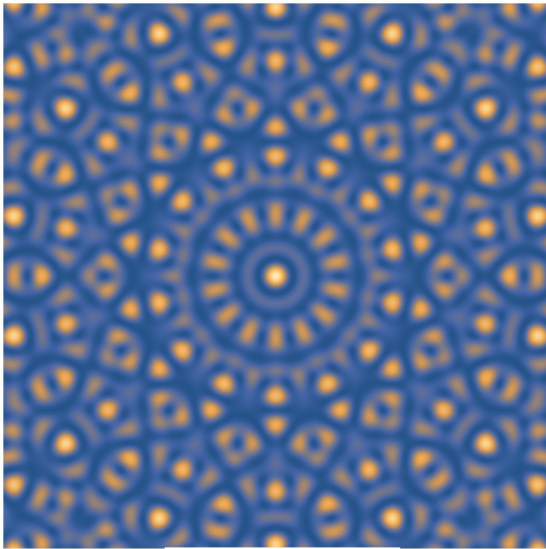
donde se considera que n empieza en cinco, ya que como se mencionó anteriormente, si se usa un valor menor para n se retomarían las figuras geométricas anteriores a diferente escala. Los patrones de interferencia resultantes están señalados con a_i , graficados en un rango de $-1.5cm \leq u \leq 1.5cm$ y $-1.5cm \leq v \leq 1.5cm$, donde hay $i + 5$ rendijas a excepción de a_{21} donde hay 50.



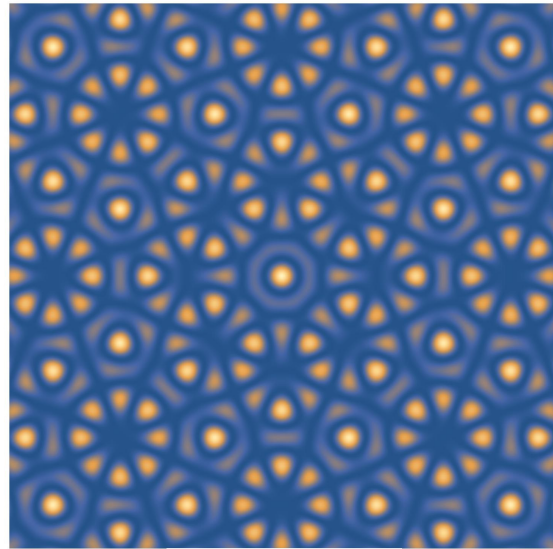
a_0)



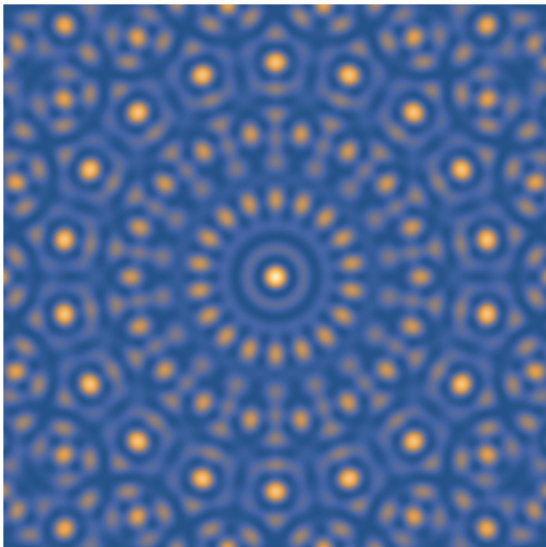
a_1)



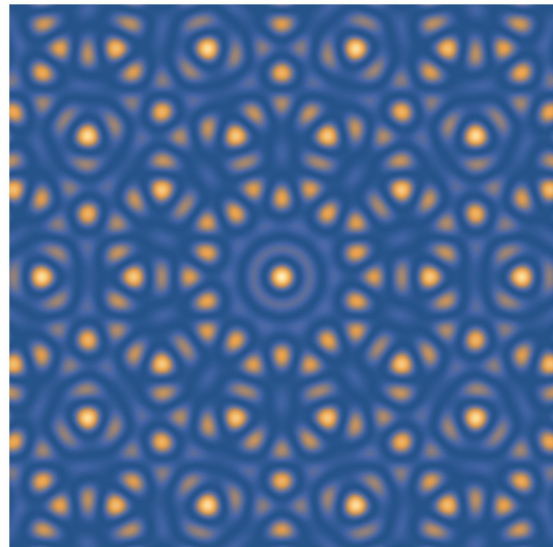
a_2)



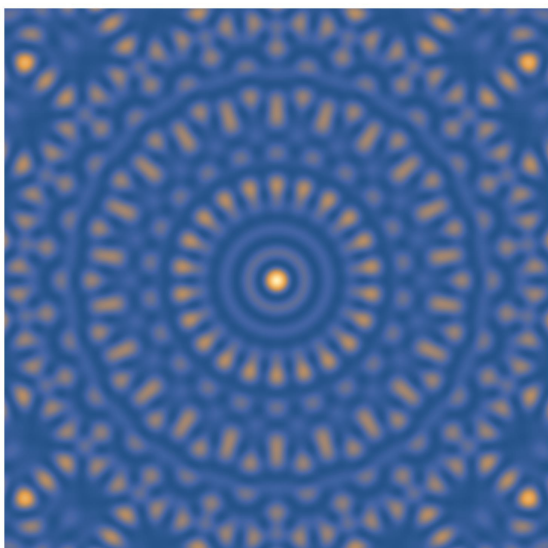
a_3)



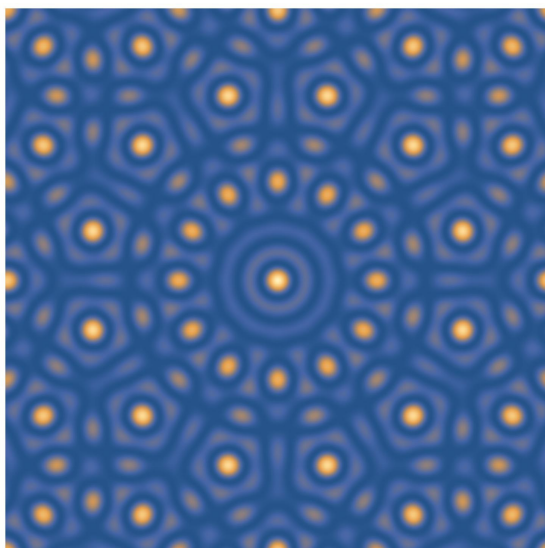
a_4)



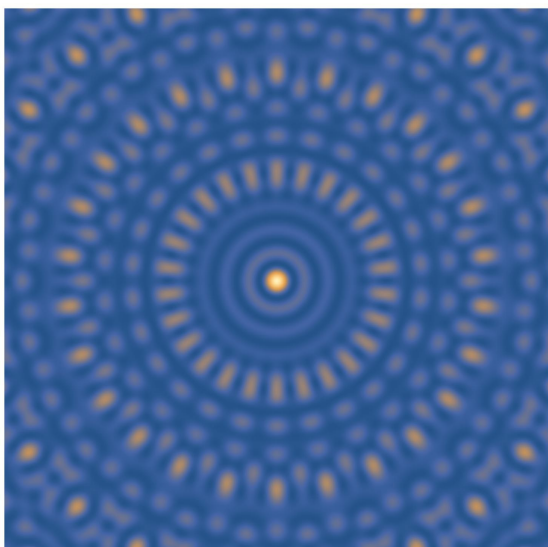
a_5)



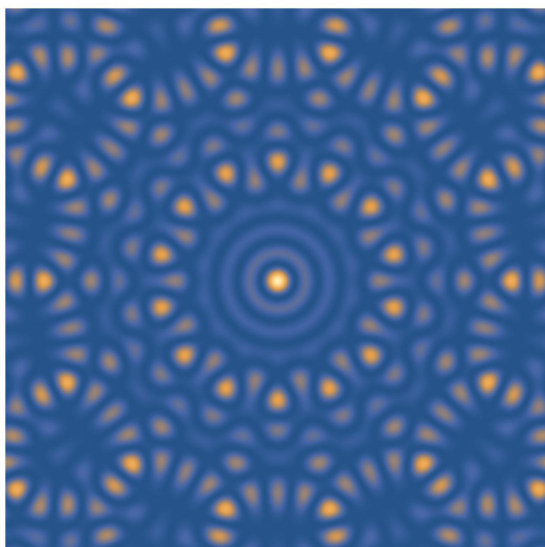
a_6)



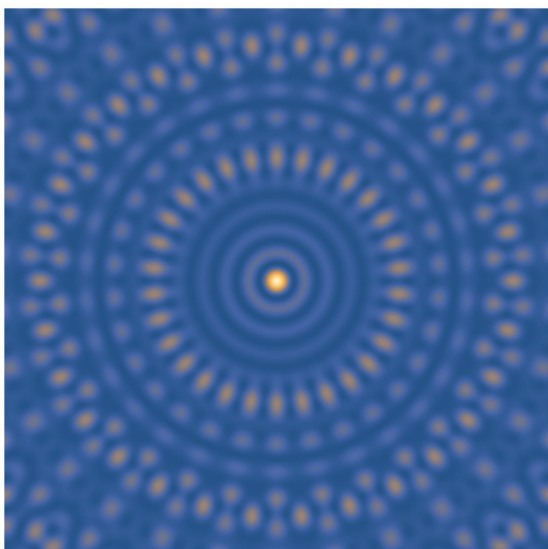
a_7)



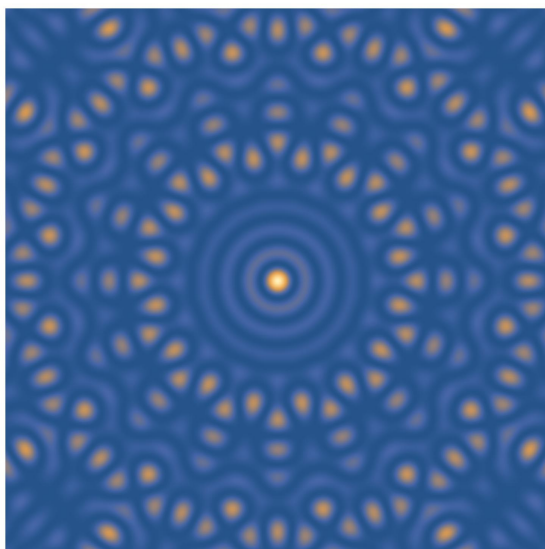
a_8)



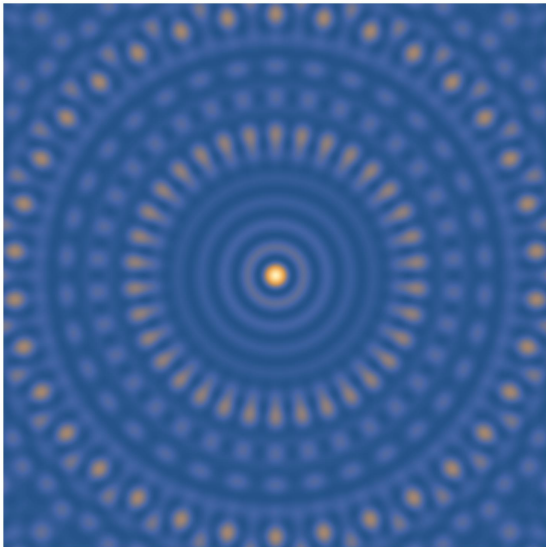
a_9)



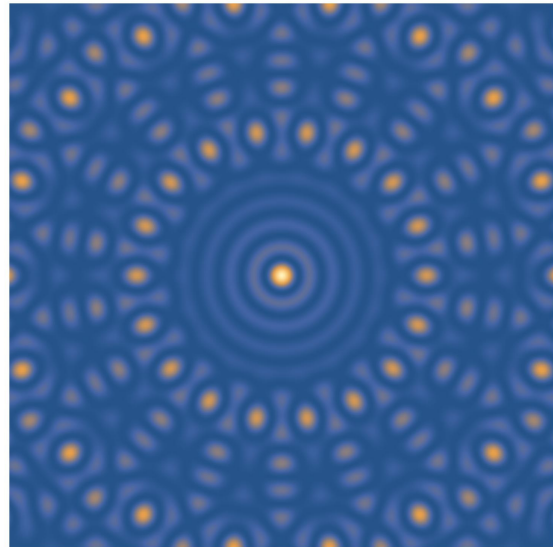
a_{10})



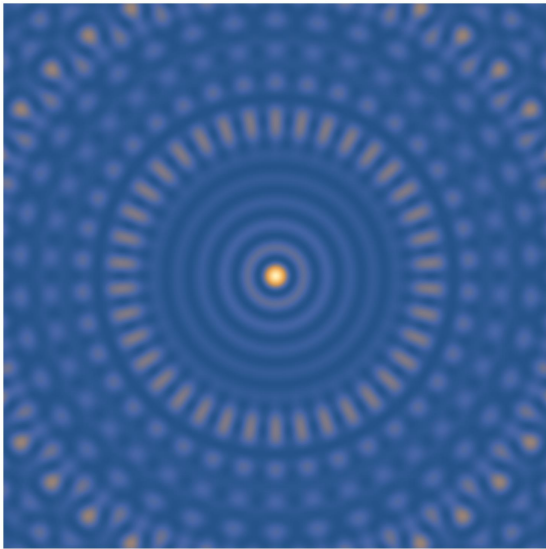
a_{11})



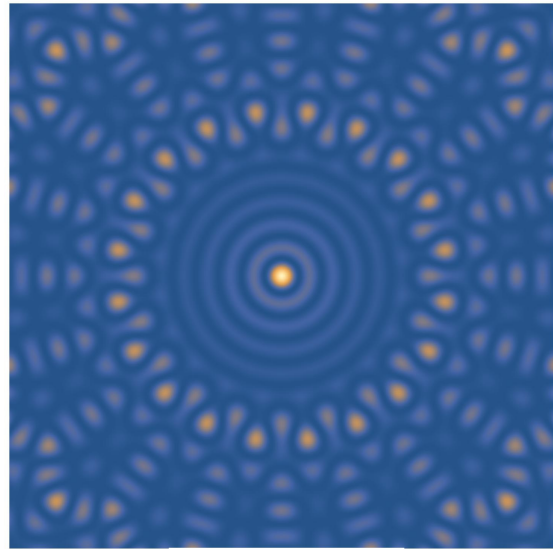
a_{12})



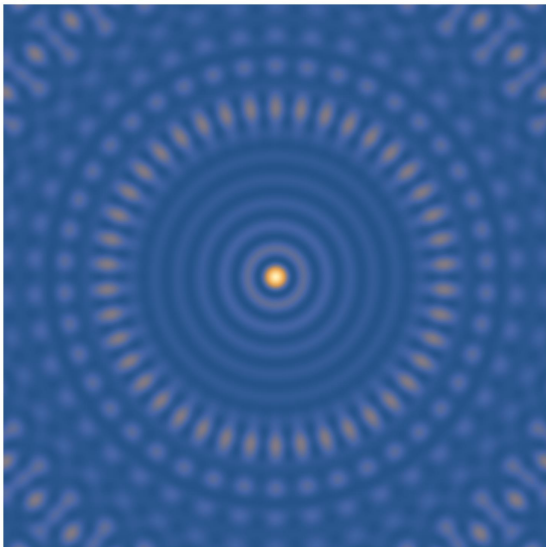
a_{13})



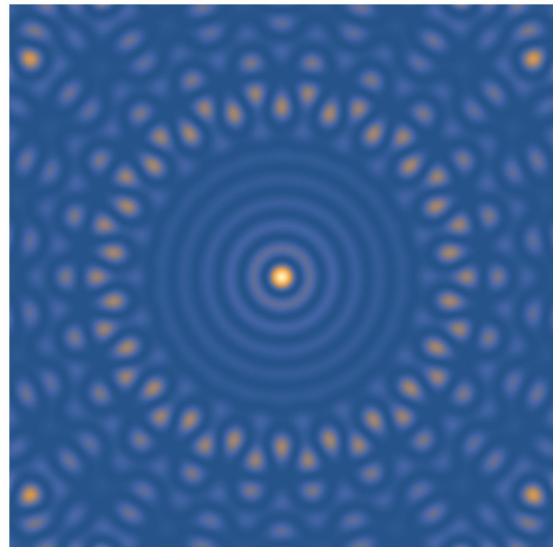
a_{14})



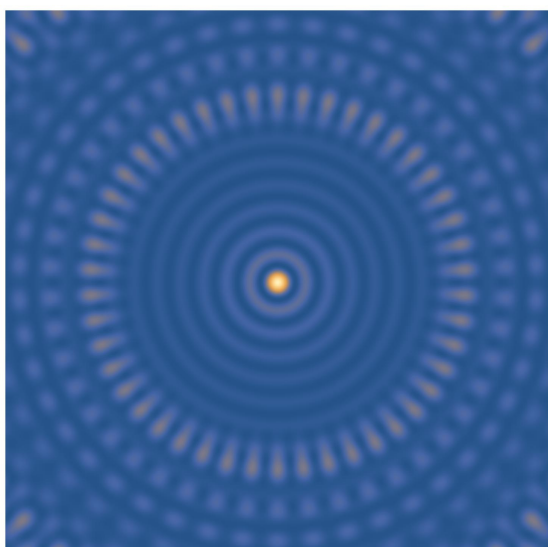
a_{15})



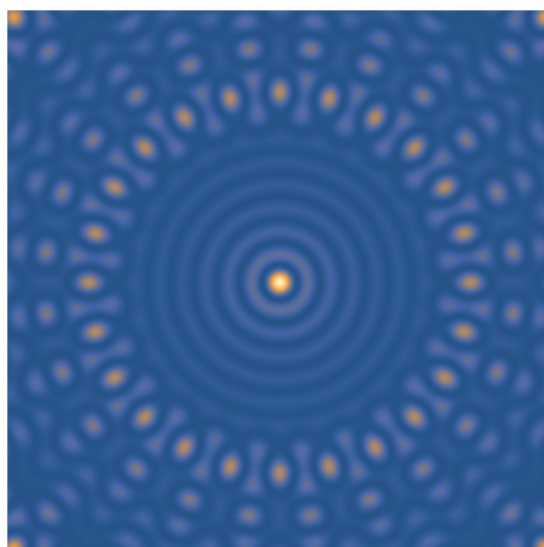
a_{16})



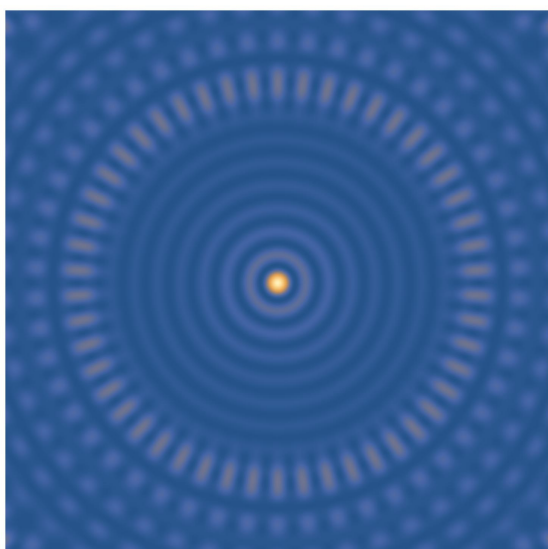
a_{17})



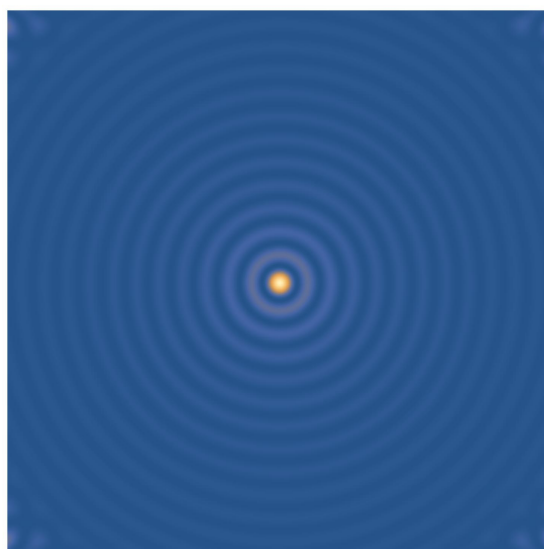
a_{18})



a_{19})



a_{20})



a_{21})

4.2. Desarrollo utilizando Teorema del muestreo

Otra opción presentada para utilizar la transformada de Fourier es mediante el teorema del muestreo (sección 2.8.1), ya que se han considerado contornos geométricos, éstos son los objetos a muestrear, con lo cual se representa algo análogo al mecanismo inicial; sin embargo, se necesita que el ancho del contorno sea tan pequeño que al muestrearlo se obtengan rendijas puntuales, en base a ello se definen dos de los contornos usados inicialmente de manera que se cumpla lo mencionado.

4.2.1. Muestreo para el contorno de un cuadrado de ancho nulo

Para el contorno del cuadrado de $1mm$ de lado se define la función objeto como

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) = & \text{rect}\left(\frac{x}{x_w}\right) \delta\left(y - \frac{1}{2}y_w\right) + \text{rect}\left(\frac{x}{x_w}\right) \delta\left(y + \frac{1}{2}y_w\right) \\ & + \text{rect}\left(\frac{y}{y_w}\right) \delta\left(x - \frac{1}{2}x_w\right) + \text{rect}\left(\frac{y}{y_w}\right) \delta\left(x + \frac{1}{2}x_w\right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

con el ancho $x_w = y_w = 1mm$, luego según la ecuación (2.74), el muestreo de $\zeta(x, y)$ se realiza con el tren de pulsos bidimensional de la forma (2.59)

$$\delta_{x_p y_p}(x, y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x - jx_p, y - ly_p) \quad (4.33)$$

donde siempre habrá deltas en el eje x y y , separadas por una distancia x_p, y_p respectivamente, lo cual no es conveniente para muestrear el cuadrado, ya que éste está centrado con respecto al origen y sólo cuando se necesitan 1, 3, 5.. rendijas por lado es cuando se requiere de las deltas en esos ejes. Por ello en base al algoritmo del capítulo 3 para el cuadrado se necesita que el tren de pulsos tenga simetría respecto a (x_a, y_a) que es el vértice izquierdo inferior del cuadrado y variando x_p, y_p se logra que haya o no deltas en los ejes, por tanto el tren de pulsos se modifica en la forma

$$\delta_{x_p y_p}(x - x_a, y - y_a) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_a - jx_p, y - y_a - ly_p). \quad (4.34)$$

Para hallar su transformada, se sigue el procedimiento de la sección (2.6.3) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\delta_{x_p y_p}(x - x_a, y - y_a) &= \delta_{x_p}(x - x_a) \delta_{y_p}(y - y_a) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_a - j x_p) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(y - y_a - l y_p)\end{aligned}\quad (4.35)$$

donde $\delta_{x_p}(x - x_a)$ y $\delta_{y_p}(y - y_a)$ tienen serie de Fourier de la forma (2.53), por tanto se calcula C_j y C_l para cada una, donde

$$\begin{aligned}C_j &= \frac{1}{x_p} \int_{-\frac{x_p}{2}}^{\frac{x_p}{2}} dx \delta_{x_p}(x - x_a) e^{-ik_j x} \\ &= \frac{1}{x_p} e^{-ik_j x_a}\end{aligned}\quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}C_l &= \frac{1}{y_p} \int_{-\frac{y_p}{2}}^{\frac{y_p}{2}} dy \delta_{y_p}(y - y_a) e^{-ik_l y} \\ &= \frac{1}{y_p} e^{-ik_l y_a}\end{aligned}\quad (4.37)$$

con $k_j = \frac{2\pi j}{x_p}$ y $k_l = \frac{2\pi l}{y_p}$, así

$$\begin{aligned}\delta_{x_p y_p}(x - x_a, y - y_a) &= \left(\frac{1}{x_p} e^{-ik_j x_a} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi \frac{j}{x_p} x} \right) \left(\frac{1}{y_p} e^{-ik_l y_a} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi \frac{l}{y_p} y} \right) \\ &= \left(\frac{1}{x_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi \frac{j}{x_p} x_a} e^{i2\pi \frac{j}{x_p} x} \right) \left(\frac{1}{y_p} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi \frac{l}{y_p} y_a} e^{i2\pi \frac{l}{y_p} y} \right) \\ &= \left(\frac{1}{x_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi \frac{j}{x_p} (x - x_a)} \right) \left(\frac{1}{y_p} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi \frac{l}{y_p} (y - y_a)} \right)\end{aligned}\quad (4.38)$$

donde $\delta_{x_p}(x - x_a)$ y $\delta_{y_p}(y - y_a)$ fueron sustituidas por sus respectivas series de Fourier, con lo cual la transformada es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} \{ \delta_{x_p y_p} (x - x_a, y - y_a) \} &= \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{x_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi \frac{j}{x_p} (x - x_a)} \right\} \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{y_p} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi \frac{l}{y_p} (y - y_a)} \right\} \\
 &= \frac{1}{x_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi \frac{j}{x_p} x_a} \delta\left(\mu - \frac{j}{x_p}\right) \frac{1}{y_p} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi \frac{l}{y_p} y_a} \delta\left(\nu - \frac{l}{y_p}\right) \quad (4.39) \\
 &= \frac{1}{x_p} \frac{1}{y_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi \left[\frac{j}{x_p} x_a + \frac{l}{y_p} y_a \right]} \delta\left(\mu - \frac{j}{x_p}, \nu - \frac{l}{y_p}\right).
 \end{aligned}$$

Para que el muestreo al contorno del cuadrado se realice de acuerdo a lo que se desea se tiene que

$$\begin{aligned}
 \zeta_m(x, y) &= \zeta(x, y) \cdot \delta_{x_p y_p} (x - x_a, y - y_a) \\
 &= \zeta(x, y) \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x - x_a - jx_p, y - y_a - ly_p) \quad (4.40)
 \end{aligned}$$

donde la separación de las Deltas x_p y y_p están en función de n (recordando que el número de rendijas por lado es $n - 1$) de la forma

$$x_p = \frac{x_b - x_a}{n} \quad y_p = \frac{y_b - y_a}{n}. \quad (4.41)$$

En base a la ecuación (2.75) y tomando en cuenta la transformada de el tren de pulsos modificado, se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} \{ \zeta_m(x, y) \} &= \frac{1}{x_p} \frac{1}{y_p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi \left[\frac{j}{x_p} x_a + \frac{l}{y_p} y_a \right]} \tilde{\zeta}\left(\mu - \frac{j}{x_p}, \nu - \frac{l}{y_p}\right) \\
 &= \frac{1}{\left(\frac{x_b - x_a}{n}\right)} \frac{1}{\left(\frac{y_b - y_a}{n}\right)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi \left[\frac{j}{\frac{x_b - x_a}{n}} x_a + \frac{l}{\frac{y_b - y_a}{n}} y_a \right]} \tilde{\zeta}\left(\mu - \frac{j}{\frac{x_b - x_a}{n}}, \nu - \frac{l}{\frac{y_b - y_a}{n}}\right) \\
 &= \left(\frac{n}{x_b - x_a}\right) \left(\frac{n}{y_b - y_a}\right) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi \left[\frac{j(n)}{x_b - x_a} x_a + \frac{l(n)}{y_b - y_a} y_a \right]} \tilde{\zeta}\left(\mu - \frac{j(n)}{x_b - x_a}, \nu - \frac{l(n)}{y_b - y_a}\right) \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

lo que indica que el espectro de $\tilde{\zeta}(\mu, \nu)$ se repite periódicamente en $\mu = \frac{j(n)}{x_b - x_a}$ y $\nu = \frac{l(n)}{y_b - y_a}$

donde el espectro del objeto sin muestrear definido al inicio es

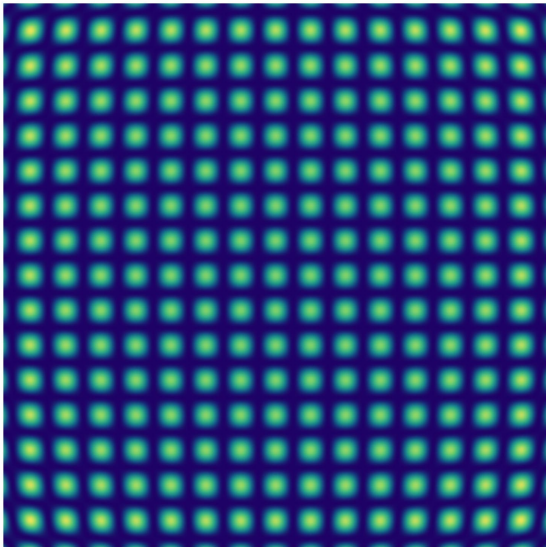
$$\begin{aligned}
 \tilde{\zeta}(\mu, \nu) &= \mathcal{F} \left\{ \text{rect} \left(\frac{x}{x_w} \right) \delta \left(y - \frac{1}{2} y_w \right) \right\} + \mathcal{F} \left\{ \text{rect} \left(\frac{x}{x_w} \right) \delta \left(y + \frac{1}{2} y_w \right) \right\} \\
 &+ \mathcal{F} \left\{ \text{rect} \left(\frac{y}{y_w} \right) \delta \left(x - \frac{1}{2} x_w \right) \right\} + \mathcal{F} \left\{ \text{rect} \left(\frac{y}{y_w} \right) \delta \left(x + \frac{1}{2} x_w \right) \right\} \\
 &= x_w \text{sinc}(x_w \mu) e^{-i\pi \nu y_w} + x_w \text{sinc}(x_w \mu) e^{i\pi \nu y_w} \\
 &+ y_w \text{sinc}(y_w \nu) e^{-i\pi \mu x_w} + y_w \text{sinc}(y_w \nu) e^{i\pi \mu x_w} \\
 &= 2x_w \text{sinc}(x_w \mu) \cos(\pi \nu y_w) + 2y_w \text{sinc}(y_w \nu) \cos(\pi \mu x_w)
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \tilde{\zeta} \left(\mu - \frac{j(n)}{x_b - x_a}, \nu - \frac{l(n)}{y_b - y_a} \right) &= 2x_w \text{sinc} \left(x_w \left(\mu - \frac{j(n)}{x_b - x_a} \right) \right) \cos \left(\pi \left(\nu - \frac{l(n)}{y_b - y_a} \right) y_w \right) \\
 &+ 2y_w \text{sinc} \left(y_w \left(\nu - \frac{l(n)}{y_b - y_a} \right) \right) \cos \left(\pi \left(\mu - \frac{j(n)}{x_b - x_a} \right) x_w \right)
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

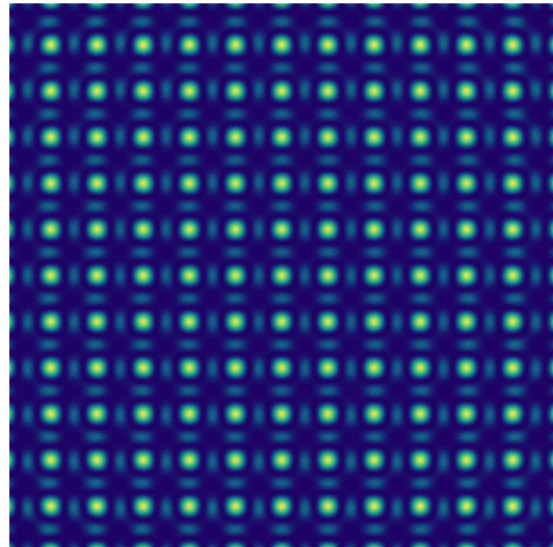
además sustituyendo el valor de las frecuencias espaciales μ y ν en la ecuación (4.42) y con el resultado de (4.44) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \tilde{\zeta}_m(u, v) &= \left(\frac{n}{x_b - x_a} \right) \left(\frac{n}{y_b - y_a} \right) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi \left[\frac{j(n)}{x_b - x_a} x_a + \frac{l(n)}{y_b - y_a} y_a \right]} \tilde{\zeta} \left(\frac{u}{\lambda D} - \frac{j(n)}{x_b - x_a}, \frac{v}{\lambda D} - \frac{l(n)}{y_b - y_a} \right) \\
 &= 2 \left(\frac{n}{x_b - x_a} \right) \left(\frac{n}{y_b - y_a} \right) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi \left[\frac{j(n)}{x_b - x_a} x_a + \frac{l(n)}{y_b - y_a} y_a \right]} x_w \text{sinc} \left(x_w \left(\frac{u}{\lambda D} - \frac{j(n)}{x_b - x_a} \right) \right) \cos \left(\pi \left(\frac{v}{\lambda D} - \frac{l(n)}{y_b - y_a} \right) y_w \right) \\
 &+ 2 \left(\frac{n}{x_b - x_a} \right) \left(\frac{n}{y_b - y_a} \right) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi \left[\frac{j(n)}{x_b - x_a} x_a + \frac{l(n)}{y_b - y_a} y_a \right]} y_w \text{sinc} \left(y_w \left(\frac{v}{\lambda D} - \frac{l(n)}{y_b - y_a} \right) \right) \cos \left(\pi \left(\frac{u}{\lambda D} - \frac{j(n)}{x_b - x_a} \right) x_w \right).
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

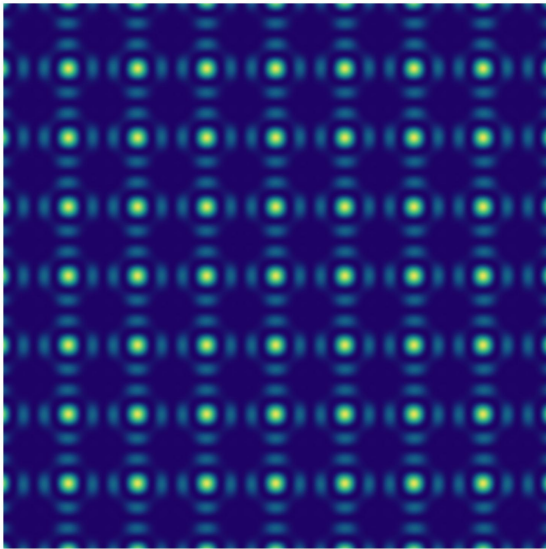
Con el módulo al cuadrado de $\tilde{\zeta}_m(u, v)$ se obtienen los siguientes patrones de difracción señalados con a_i , graficadas en un rango de $-1.5\text{cm} \leq u \leq 1.5\text{cm}$ y $-1.5\text{cm} \leq v \leq 1.5\text{cm}$, cada patrón corresponde a una distribución de i rendijas por lado y $4(i + 1)$ en total.



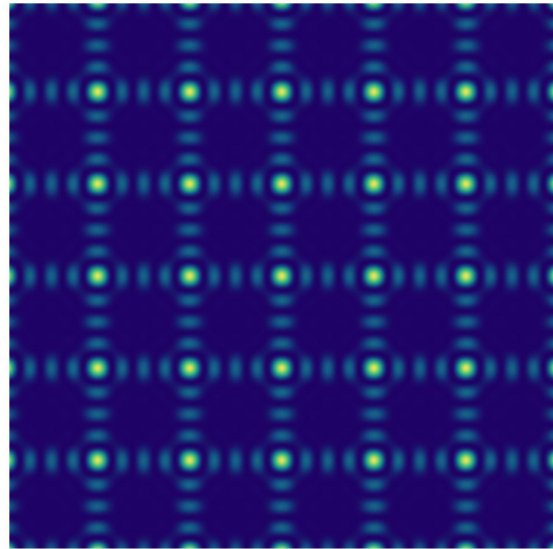
a_0)



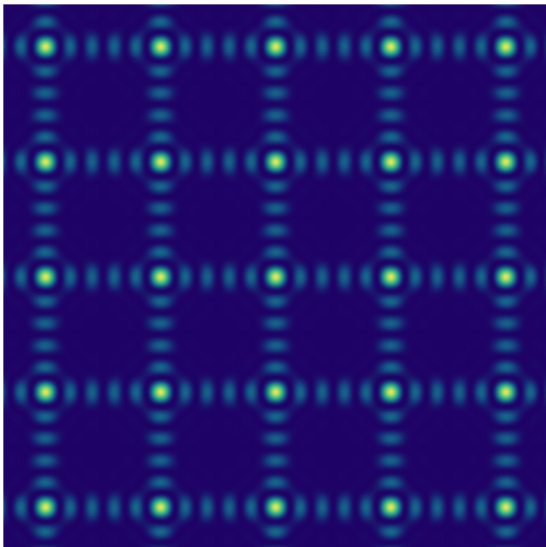
a_1)



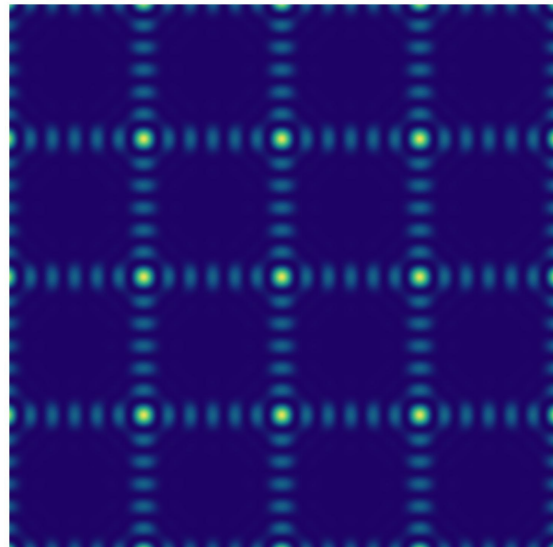
a_2)



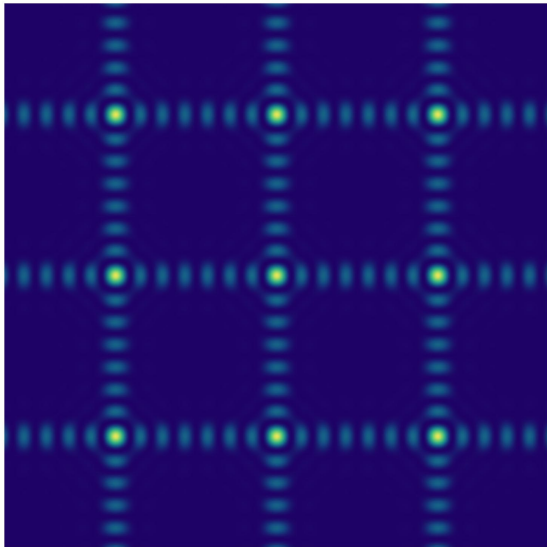
a_3)



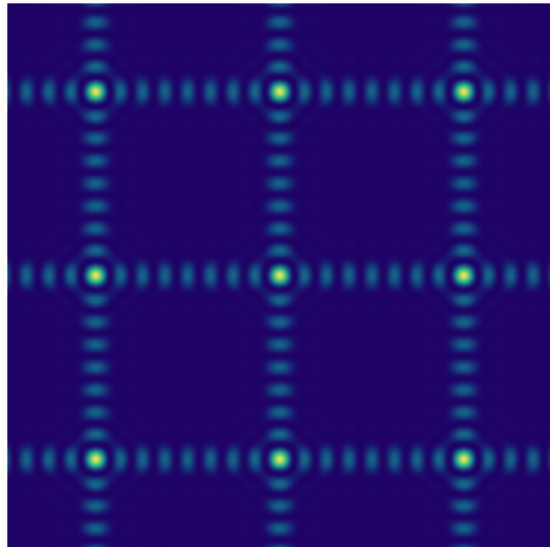
a_4)



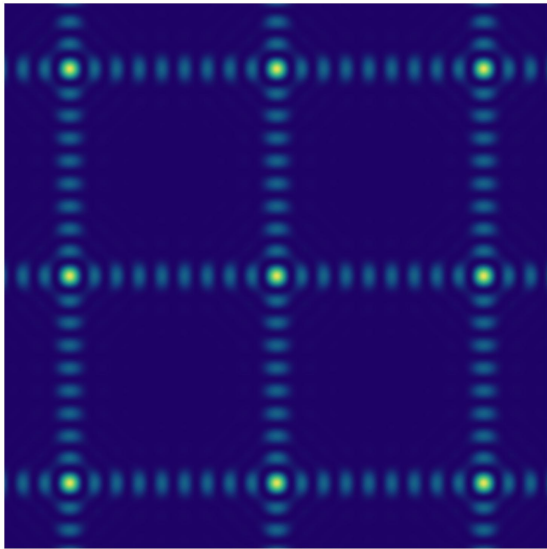
a_5)



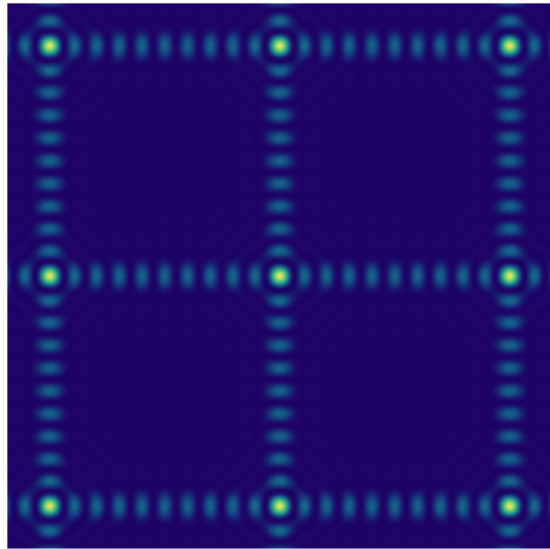
$a_6)$



$a_7)$



$a_8)$



$a_9)$

Comparando cualitativamente los patrones de difracción obtenidos mediante este método con los patrones de interferencia obtenidos por medio de deltas de Dirac desplazadas y con los obtenidos por superposición de ondas, se encuentra cierta similitud.

4.2.2. Muestreo para el contorno de un triángulo de ancho nulo

Se consideran ejes coordenados $p_{\theta_i}, p_{\theta_i\perp}$ y $w_{\theta_i}, w_{\theta_i\perp}$ que se han obtenido al rotar los ejes x, y y μ, ν a un ángulo θ_i (figura 4.1) donde

$$\begin{pmatrix} p_{\theta_i} \\ p_{\theta_i\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w_{\theta_i} \\ w_{\theta_i\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}$$

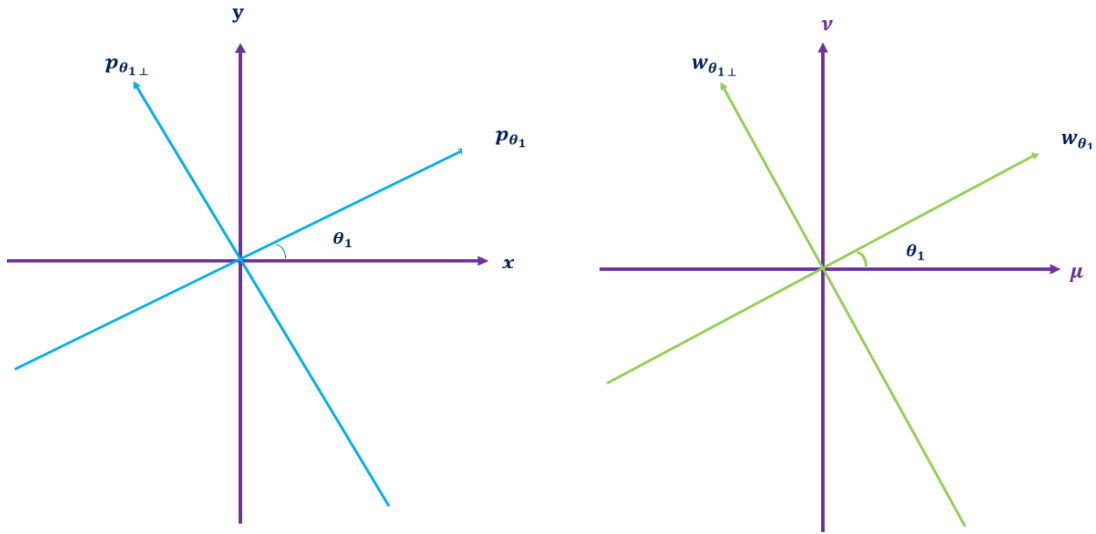


Figura 4.1: Ejes coordenados $p_{\theta_1}, p_{\theta_1\perp}$ y $w_{\theta_1}, w_{\theta_1\perp}$ obtenidos al rotar los ejes x, y y μ, ν a un ángulo θ_1

Luego $p_{\theta_1} - p_0 = 0$ con $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ define una recta infinita con pendiente negativa ubicada a una distancia p_0 del origen de coordenadas, $p_{\theta_2} - p_0 = 0$ con $\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$ define una recta infinita con pendiente positiva ubicada a la misma distancia p_0 (figura 4.2). Con ayuda de estas rectas pero con una longitud finita, se puede formar el contorno de un triángulo equilátero de $1mm$ de lado, por conveniencia se necesita que el centro de éste esté ubicado en el origen del sistema de coordenadas, para ello, la recta que ayuda a definir el lado inferior del triángulo está dada por $y = -ap$ con ap el apotema del triángulo; es decir, la menor distancia del centro a cada lado y con lo cual $p_0 = ap$ donde

$$ap = \frac{\sqrt{3}}{6} x_w = \frac{\sqrt{3}}{6000} m \quad (4.46)$$

siendo x_w la longitud del lado del triángulo y cuya altura $y_w = \frac{\sqrt{3}}{2000}$ con lo que

$$ap = \frac{y_w}{3} \quad (4.47)$$

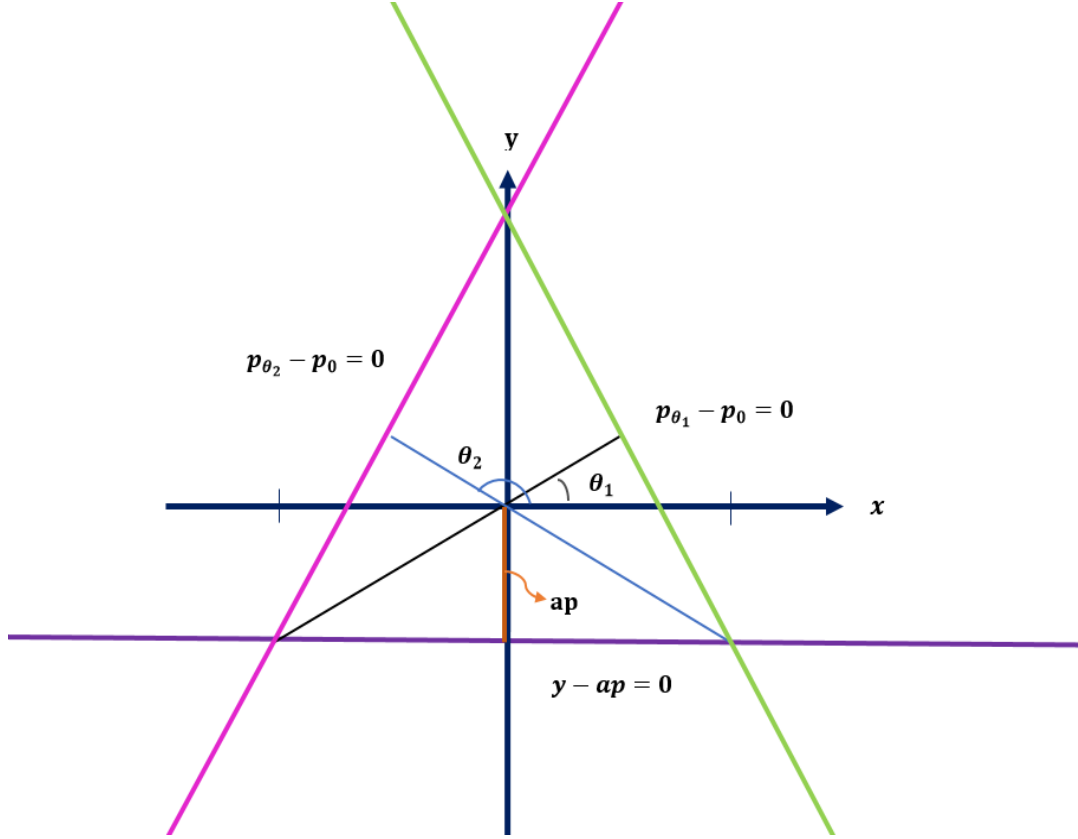


Figura 4.2: Rectas que ayudan a formar el triángulo equilátero de $1mm$ de lado, cuyas ecuaciones se muestran en la forma normal.

Para construir el contorno de un triángulo equilátero de $1mm$ de lado con ancho nulo, se define la función objeto como

$$\begin{aligned} \zeta(p_{\theta_1}, p_{\theta_1\perp}, p_{\theta_2}, p_{\theta_2\perp}, x, y) = & \delta(p_{\theta_1} - p_0) \text{rect}\left(\frac{p_{\theta_1\perp}}{x_w}\right) \\ & + \delta(p_{\theta_2} - p_0) \text{rect}\left(\frac{p_{\theta_2\perp}}{x_w}\right) \\ & + \delta\left(y + \frac{y_w}{3}\right) \text{rect}\left(\frac{x}{x_w}\right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

donde $x_w = 1mm$, con lo cual el término $\delta(p_{\theta_1} - p_0) \text{rect}\left(\frac{p_{\theta_1\perp}}{x_w}\right)$ define una recta finita con pendiente negativa (lado derecho del triángulo) que va del origen a $\frac{x_w}{2}$ con respecto a x y

de $-\frac{y_w}{3}$ a $\frac{2y_w}{3}$. $\delta(p_{\theta_2} - p_0) \text{rect}\left(\frac{p_{\theta_2\perp}}{x_w}\right)$ define una recta finita con pendiente positiva (lado izquierdo del triángulo). Finalmente $\delta\left(y + \frac{y_w}{3}\right) \text{rect}\left(\frac{x}{x_w}\right)$ define una recta finita horizontal (lado inferior del triángulo).

Se necesita una función que sólo dependa de dos variables p_{θ_1} y $p_{\theta_1\perp}$.

Nuevamente se necesita un tren de pulsos modificado, para que sea conveniente debe cumplir la forma de la figura (4.3)

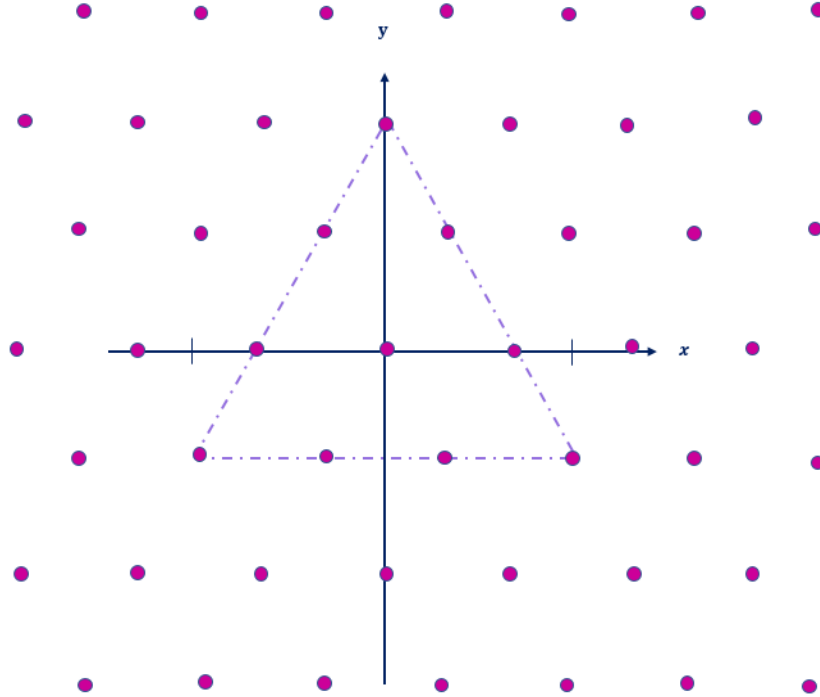


Figura 4.3: Tren de pulsos modificado para realizar el muestreo del triángulo equilátero.

matemáticamente se expresa

$$\begin{aligned} \delta_{q_1 q_2}\left(p_{\theta_1} - p_0, p_{\theta_1\perp} - \frac{x_w}{2}\right) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(p_{\theta_1} - p_0 - j\frac{x_w \cos(\theta_1)}{n}, p_{\theta_1\perp} - \frac{x_w}{2} - l\frac{x_w}{n} + j\frac{x_w \sin(\theta_1)}{n}\right) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(p_{\theta_1} - p_0 - j\frac{\sqrt{3}x_w}{2n}, p_{\theta_1\perp} - \frac{x_w}{2} - l\frac{x_w}{n} + j\frac{x_w}{2n}\right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

es decir, este tren de pulsos tiene simetría con respecto a $(p_0, \frac{x_w}{2})$ coordenadas que corresponden al vértice superior del triángulo y variando el periodo $\frac{\sqrt{3}x_w}{2n}$ en p_{θ_1} y $\frac{x_w}{n}$ en $p_{\theta_1\perp}$ más un desplazamiento $\frac{x_w}{2n}$, se logra que haya deltas en donde se necesitan, lo cual puede ser mas claro con ayuda de las figuras 4.4 y 4.5, donde nuevamente $n - 1$ es el número de rendijas por lado.

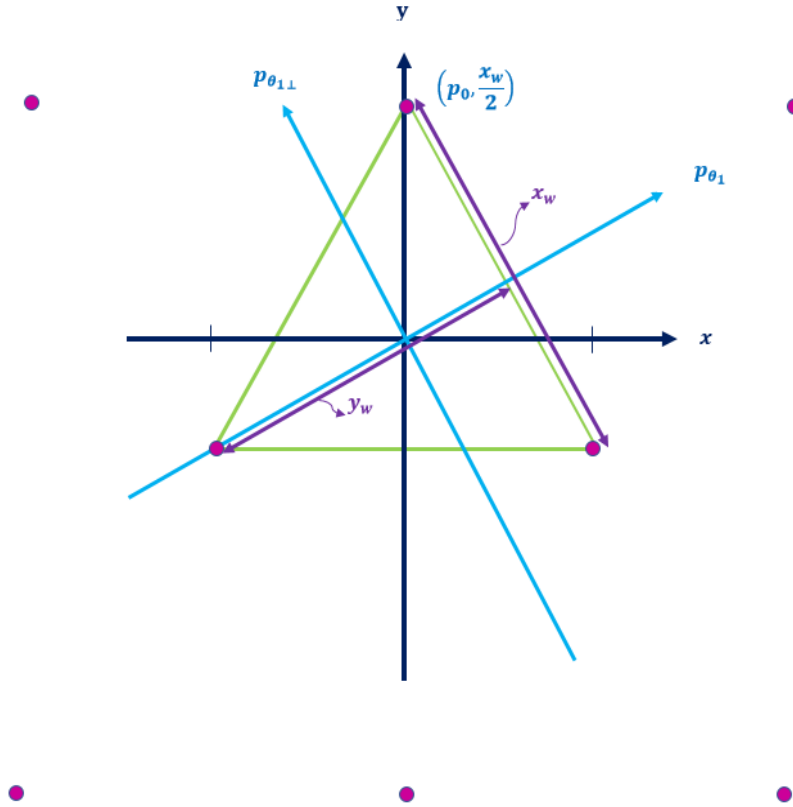


Figura 4.4: Tren de pulsos con periodo $\frac{\sqrt{3}x_w}{2}$ en p_{θ_1} y x_w en $p_{\theta_1\perp}$ más un desplazamiento $\frac{x_w}{2}$ que permite realizar el muestreo en los vértices del triángulo.

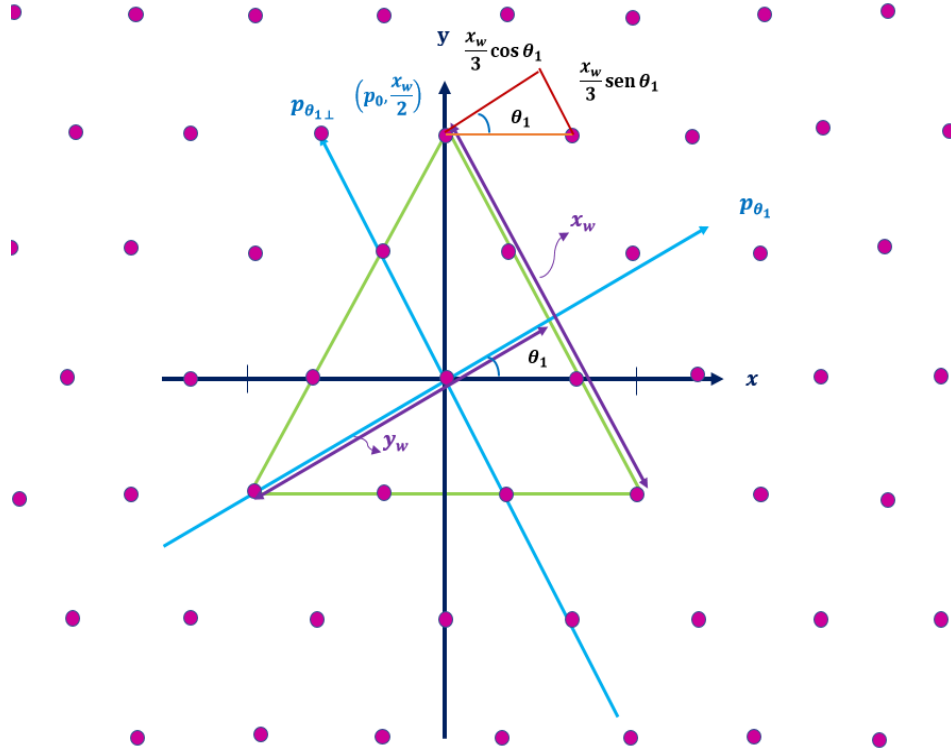


Figura 4.5: Tren de pulsos con periodo $\frac{\sqrt{3}x_w}{6}$ en p_{θ_1} y $\frac{x_w}{3}$ en $p_{\theta_1\perp}$ más un desplazamiento $\frac{x_w}{6}$.

Para lograr hacer el muestreo se necesita la multiplicación de la función con el tren de pulsos modificado, donde ambos deben compartir las variables p_{θ_1} y $p_{\theta_1\perp}$ y para obtener el patrón de difracción se obtiene el módulo al cuadrado de la transformada de Fourier de dicha multiplicación que no es mas que la convolución de las transformadas.

4.3. Aproximación al caso continuo

Cuanto más grande es el número de rendijas por lado, más cerca están éstas unas de otras, si se toma en cuenta la descripción de las rendijas por deltas de Dirac o por el teorema del muestreo de la sección 4.1 se requerirían más rendijas por lado para que el espacio entre ellas fuese más pequeño, entre más grande sea el numero de rendijas por lado, estarán tan cerca que podría considerarse que forman un contorno continuo, por tanto el patrón de difracción proporcionado por los métodos presentados debe aproximarse de forma cualitativa al patrón que proporcione una abertura cuya forma sea el contorno de alguna de las figuras geométricas con las que se trabajaron.

Para hacer una comparación adecuada con los patrones obtenidos hasta ahora, se deberían usar contornos de ancho nulo; sin embargo, se hará con contornos cuyo ancho sea del orden de

$10^{-4}m$, este cambio se hace para trabajar con patrones de difracción de aberturas conocidas.

4.3.1. Contorno de un cuadrado

Para el contorno de un cuadrado se define la función objeto como

$$\zeta(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{x_{2w}}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{y_{2w}}\right) - \text{rect}\left(\frac{x}{x_{1w}}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{y_{1w}}\right) \quad (4.50)$$

donde al graficar $\text{rect}\left(\frac{x}{x_{2w}}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{y_{2w}}\right)$, se obtiene un cuadrado de lado x_{2w} con $x_{2w} = y_{2w}$, de igual forma $\text{rect}\left(\frac{x}{x_{1w}}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{y_{1w}}\right)$ genera otro cuadrado de lado x_{1w} , con $x_{1w} = y_{1w}$. Si $x_{2w} > x_{1w}$ y $x_{2w} - x_{1w}$ es del orden de 10^{-4} , entonces $\zeta(x, y)$ da el contorno de un cuadrado cuyo ancho es de ese orden, el cual se muestra en la figura (4.6)

con

$$x_{1w} = y_{1w} = 0.0009 \text{ m} \quad y \quad x_{2w} = y_{2w} = 0.0011 \text{ m} \quad . \quad (4.51)$$

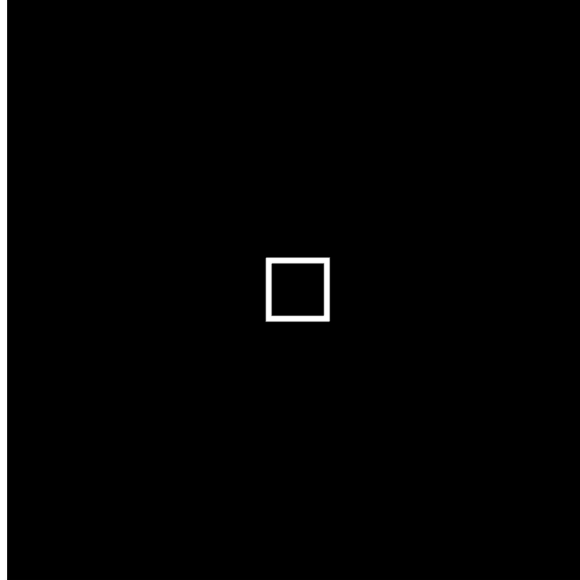


Figura 4.6: Abertura cuya forma es el contorno de un cuadrado de $1mm$ de lado y cuyo ancho es del orden de $10^{-4}m$.

Aplicando la transformada de Fourier a la función objeto se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}(\mu, \nu) &= \mathcal{F} \left\{ \text{rect}\left(\frac{x}{x_{2w}}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{y_{2w}}\right) - \text{rect}\left(\frac{x}{x_{1w}}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{y_{1w}}\right) \right\} \\ &= x_{2w} \text{sinc}_N(x_{2w}\mu) y_{2w} \text{sinc}_N(y_{2w}\nu) - x_{1w} \text{sinc}_N(x_{1w}\mu) y_{1w} \text{sinc}_N(y_{1w}\nu) \end{aligned} \quad (4.52)$$

reemplazando el valor de u y v con $\lambda = 633nm$

$$\tilde{\zeta}(u, v) = x_{2w} \text{sinc}_N \left(\frac{x_{2w}u}{\lambda D} \right) y_{2w} \text{sinc}_N \left(\frac{y_{2w}v}{\lambda D} \right) - x_{1w} \text{sinc}_N \left(\frac{x_{1w}u}{\lambda D} \right) y_{1w} \text{sinc}_N \left(\frac{y_{1w}v}{\lambda D} \right) \quad (4.53)$$

además

$$I = \left| x_{2w} \text{sinc}_N \left(\frac{x_{2w}u}{\lambda D} \right) y_{2w} \text{sinc}_N \left(\frac{y_{2w}v}{\lambda D} \right) - x_{1w} \text{sinc}_N \left(\frac{x_{1w}u}{\lambda D} \right) y_{1w} \text{sinc}_N \left(\frac{y_{1w}v}{\lambda D} \right) \right|^2. \quad (4.54)$$

El patrón de difracción resultante es

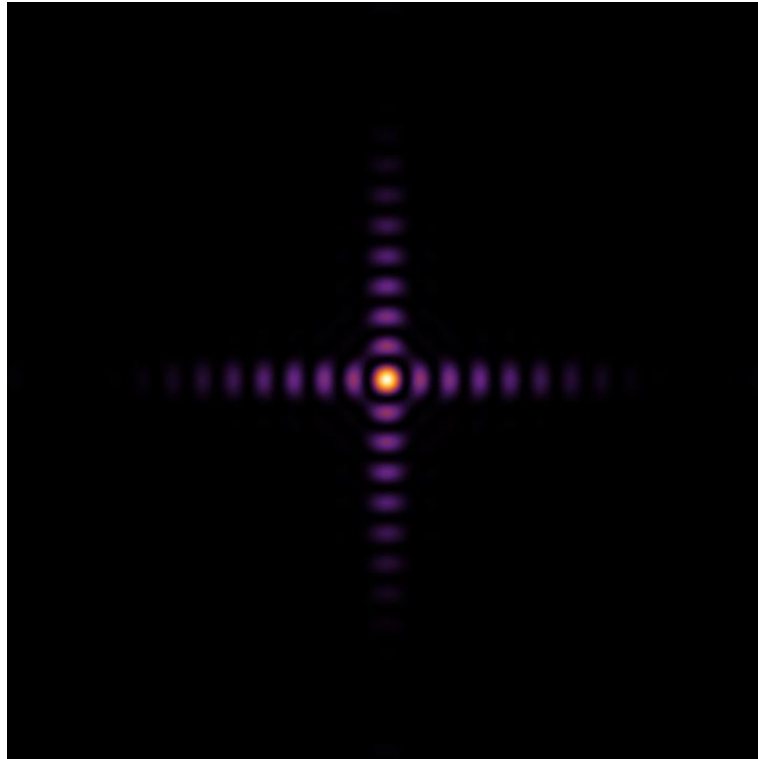


Figura 4.7: Patrón de difracción de una rendija cuya forma es el contorno de un cuadrado de $1mm$ de lado y cuyo ancho es de $10^{-4}m$.

4.3.2. Contorno de un triángulo equilátero

Para formar un triángulo equilátero de $1mm$ de lado se considera la región encerrada por

$$\begin{cases} y_{1a} \leq y \leq \varphi_1(x) \\ x_{1a} < x < x_{1b} \end{cases} \quad (4.55)$$

donde $x_{1a} = -0.5mm$, $x_{1b} = 0.5mm$, $y_{1a} = -0.5mm$ y

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \left(\frac{y_{1c}-y_{1a}}{x_{1c}-x_{1a}} \right)x + y_{1c} & \text{si } x_{1a} \leq x < 0 \\ \left(\frac{y_{1c}-y_{1a}}{x_{1c}-x_{1b}} \right)x + y_{1c} & \text{si } 0 \leq x \leq x_{1b} \end{cases} \quad (4.56)$$

con $y_{1c} = \frac{\sqrt{3}}{2000}m + x_{1a}$, $x_{1c} = 0$

Se requiere restar a éste otro triángulo más pequeño para obtener un contorno de grosor $0.1mm$ (figura 4.8), es sencillo ver que $y_{2a} = -0.4mm$ para el segundo triángulo pero para que la distancia de (x_{2a}, y_{2a}) a la recta izquierda del primer triángulo sea de $0.1mm$ se requiere que $x_{2a} = \frac{0.2mm - y_{1c} + y_{2a}}{\sqrt{3}}$, valor que se cálculo con la fórmula de distancia entre un punto y una recta; además, ya que los lados de este triángulo deben tener las mismas pendientes se debe cumplir que $\frac{y_{2c} - y_{2a}}{x_{2c} - x_{2a}} = \sqrt{3}$, dado que $x_{2c} = 0$ se tiene que $y_{2c} = -x_{2a}\sqrt{3} + y_{2a}$, por lo que la segunda región se define como

$$\begin{cases} y_{2a} \leq y \leq \varphi_2(x) \\ x_{2a} < x < x_{2b} \end{cases} \quad (4.57)$$

con $x_{2b} = -x_{2a}$ y

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \left(\frac{y_{1c}-y_{1a}}{-x_{1a}} \right)x + y_{2c} & \text{si } x_{2a} \leq x < 0 \\ \left(\frac{y_{1c}-y_{1a}}{-x_{1b}} \right)x + y_{2c} & \text{si } 0 \leq x \leq x_{2b} \end{cases} \quad (4.58)$$

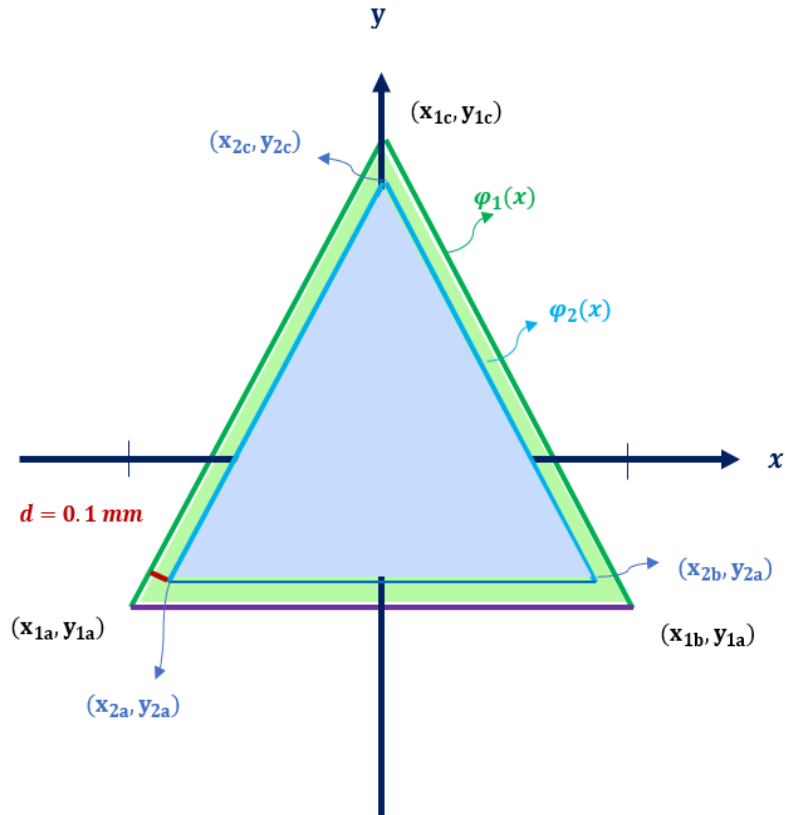


Figura 4.8: Regiones que forman dos triángulos equiláteros.

Restando la segunda región de la primera se obtiene el contorno de un cuadrado cuyo ancho es del orden deseado, el cual se muestra en la figura (4.9)

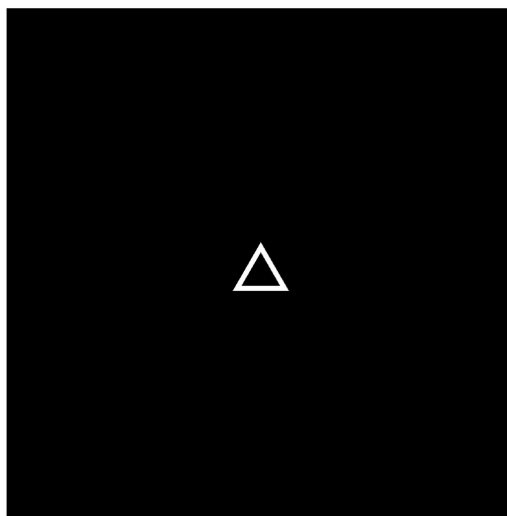


Figura 4.9: Abertura cuya forma es el contorno de un triángulo equilátero de $1mm$ de lado y cuyo ancho es del orden de $10^{-4}m$.

Aplicando la transformada de Fourier al contorno anterior y calculando el módulo al cuadrado, el patrón de difracción resultante es

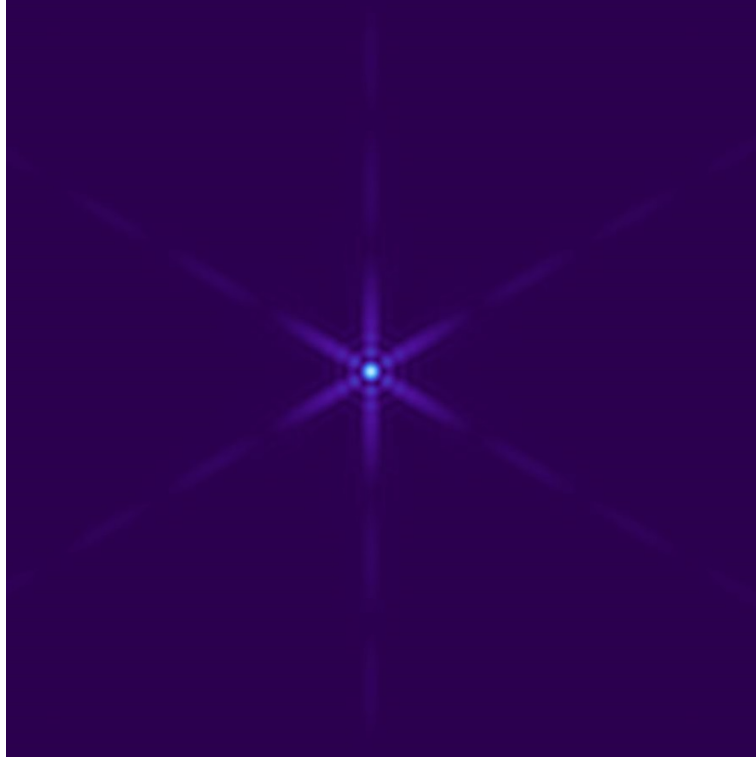


Figura 4.10: Patrón de difracción de una rendija cuya forma es el contorno de un triángulo de $1mm$ de lado y cuyo ancho es de $10^{-4}m$.

4.3.3. Circunferencia

Para formar un círculo de radio $\rho_1 = 0.5mm$ se considera la región encerrada por

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{\rho_1^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{\rho_1^2 - x^2} \\ -\rho_1 < x < \rho_1 \end{array} \right. \quad (4.59)$$

de la misma forma, para formar un círculo de radio $\rho_2 = 0.4mm$ se considera la región encerrada por

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{\rho_2^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{\rho_2^2 - x^2} \\ -\rho_2 < x < \rho_2 \end{array} \right. \quad (4.60)$$

las cuales se muestran en la figura (4.11).

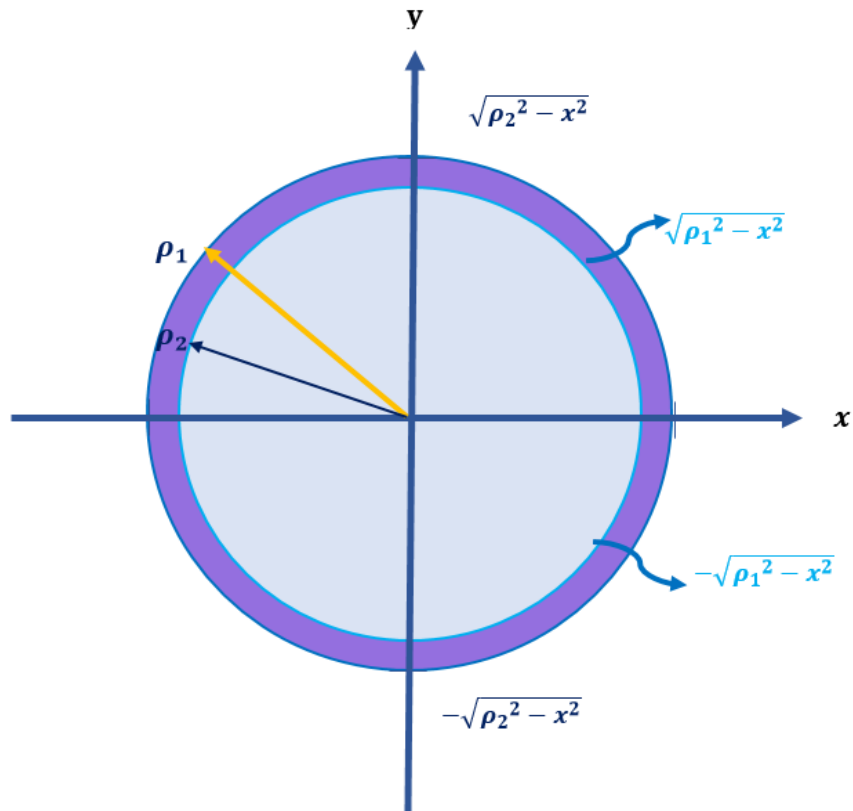


Figura 4.11: Regiones que forman dos círculos de diferentes radios.

Si restamos la segunda región de la primera se obtiene una circunferencia con un ancho de $0.1mm$ (figura 4.12)

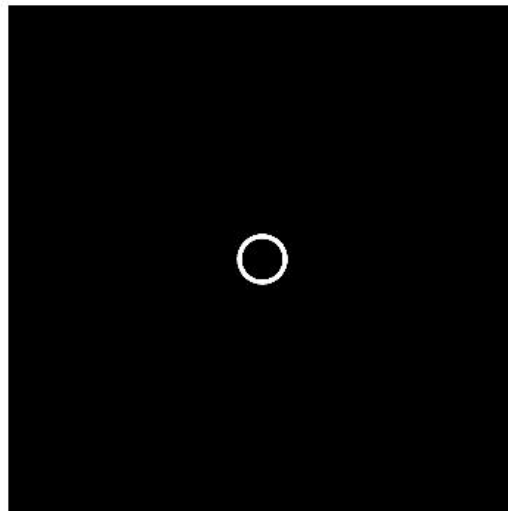


Figura 4.12: Abertura cuya forma es una circunferencia de $0.5mm$ de radio y cuyo ancho es de $0.1mm$.

Aplicando la transformada de Fourier al contorno anterior y calculando el módulo al

cuadrado, el patrón de difracción resultante es

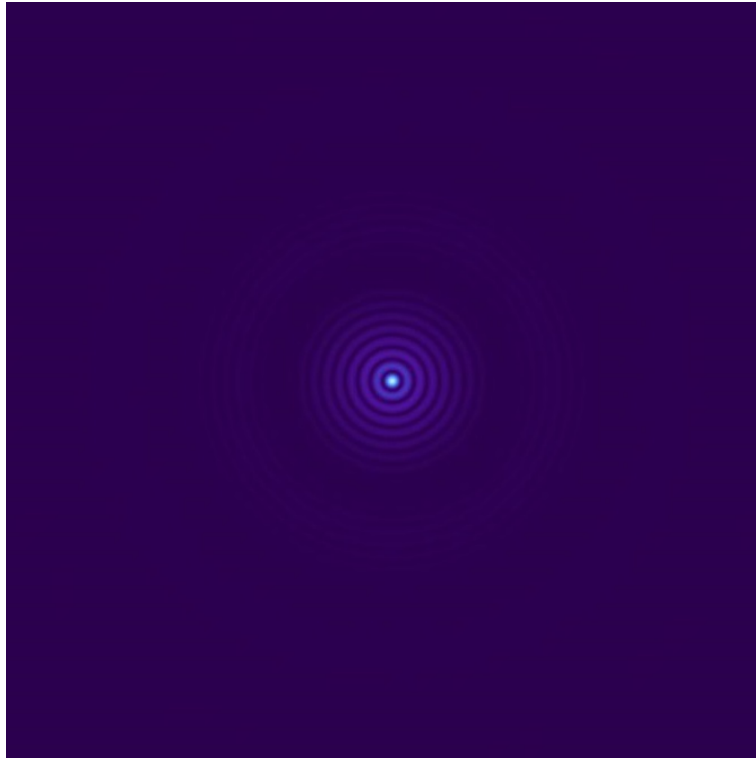


Figura 4.13: Patrón de difracción de una rendija cuya forma es una circunferencia de $0.5mm$ de radio y cuyo ancho es de $0.1mm$.

Se puede notar que el patrón de difracción de cada abertura es similar a los proporcionados por los métodos anteriores cuando el número de rendijas es grande, sólo que hay un cambio de escala.

Capítulo 5

Resultados experimentales

5.1. Experimento basado en las condiciones de la simulación

En los métodos mediante la superposición de ondas, el uso de deltas de Dirac y el teorema de muestreo se consideraban rendijas puntuales, el contorno de un cuadrado y de un triángulo equilátero de $1mm$ de lado, una circunferencia de $1mm$ de diámetro, una longitud de onda de $633nm$ y una distancia del plano donde estaban distribuidas las rendijas al plano de observación de 2 metros; con ello se estaba trabajando en la región de Fraunhofer. Experimentalmente, las rendijas no son puntuales. Para reproducir el experimento se trabajó con rendijas circulares de aproximadamente $0.1mm$ de diámetro la misma longitud de onda y distancia entre planos; sin embargo, recordando las ecuaciones que permiten calcular las posiciones de los máximos o mínimos de intensidad para dos rendijas

$$Y_{max} = \frac{nD\lambda}{d}. \quad (5.1)$$

$$Y_{min} = \frac{(n + \frac{1}{2})D\lambda}{d}. \quad (5.2)$$

se puede notar que para cualquiera de los contornos utilizados, al aumentar el número de rendijas por lado y analizar un par de ellas, la distancia d va disminuyendo; por lo cual Y_{max} y Y_{min} van aumentando, para que esto no suceda se debe modificar D ; sin embargo ésto lleva a una pérdida de energía, que provoca que no se puedan visualizar los patrones a medida que la separación entre rendijas disminuye. Por tanto este mecanismo no es viable.

Otro mecanismo análogo para hacer la observación en la región de Fraunhofer, es utilizar una lente, éste método se presenta a continuación.

5.2. Condiciones del experimento mediante el uso de una lente

Se realizó el arreglo experimental mostrado en la figura (5.1), utilizando un láser con longitud de onda de $532nm$, un espejo convexo para lograr una fuente puntual virtual de mayor distancia, se colocaron las distintas máscaras (8.3 cm diámetro) con diferentes distribuciones de rendijas circulares de $2mm$ de diámetro, para luego pasar por la lente objetivo de $120mm$ de diámetro y en la distancia focal (f) de $1m$ se observó el patrón de interferencia, para registrarlo se utilizó una cámara. El cambio en la longitud de onda usada se debe a que la cámara tiene mayor sensibilidad a $\lambda = 532nm$, este cambio provoca una variación de escala en un factor de $\frac{1}{\lambda f}$.

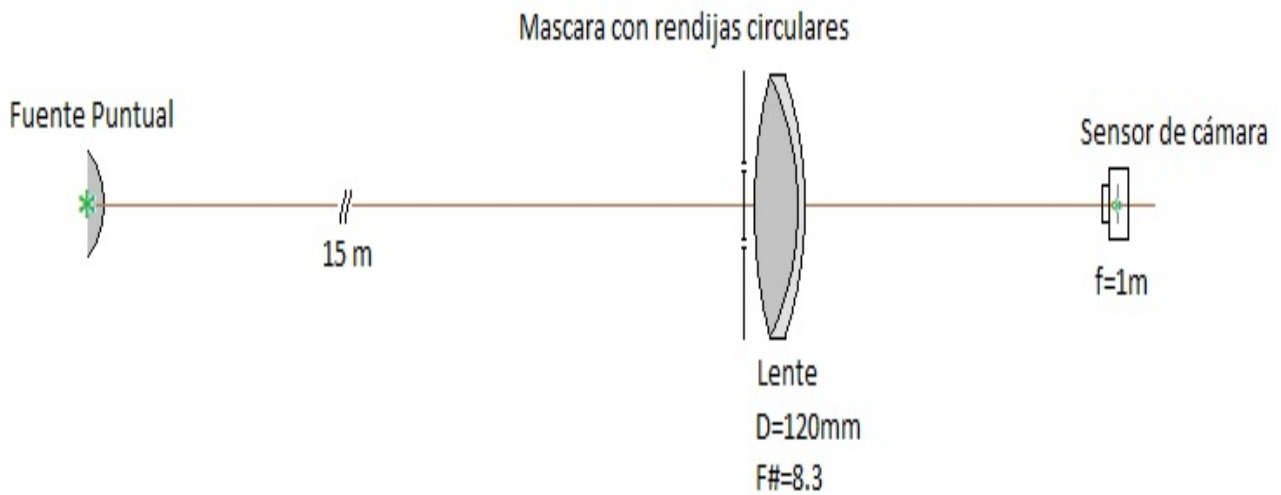
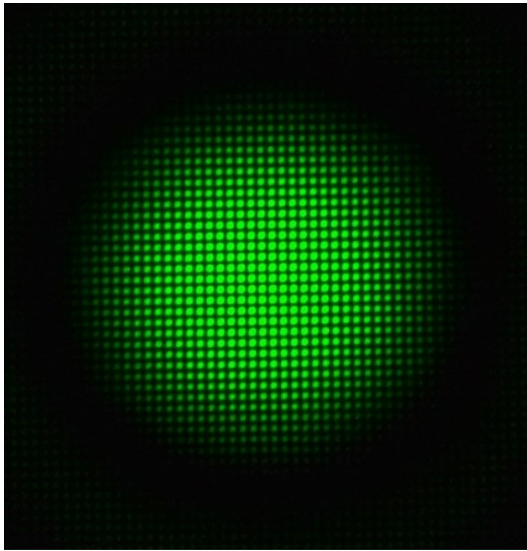


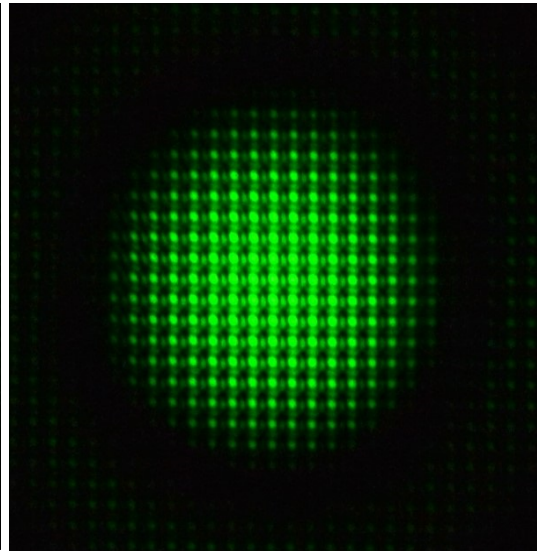
Figura 5.1: Configuración experimental.

5.3. Resultados experimentales para el contorno de un cuadrado

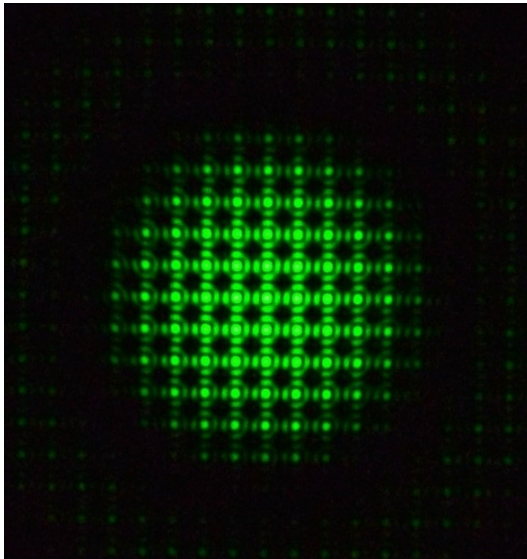
En tarjetas de plástico circulares de $8.3cm$ de diámetro se perforaron cuatro rendijas distribuidas en los vértices de un cuadrado de $4cm$ de lado; además de una, dos, tres ... hasta nueve rendijas por lado aparte de los vértices. Al colocar las tarjetas se obtuvieron los siguientes patrones de interferencia denotados por a_i donde i es el número de rendijas por lado



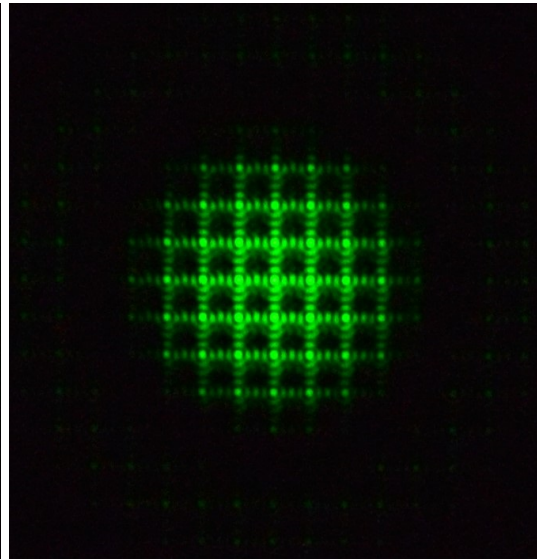
$a_0)$



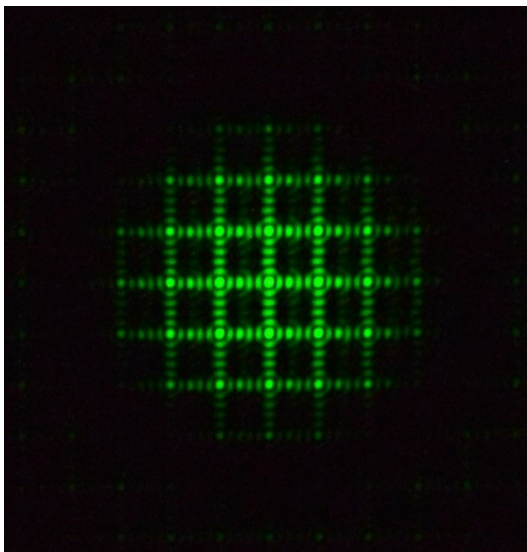
$a_1)$



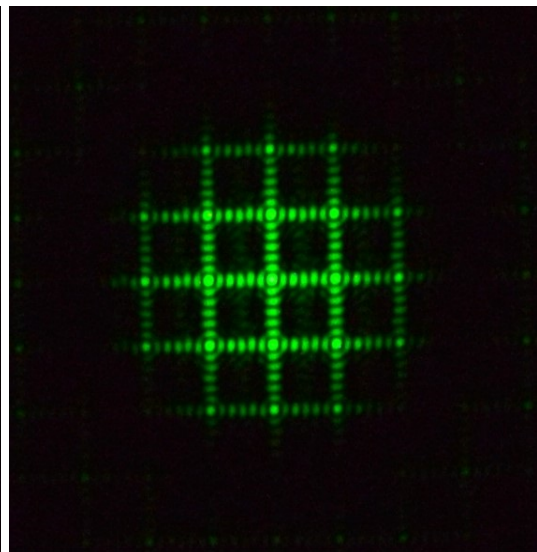
$a_2)$



$a_3)$



$a_4)$



$a_5)$

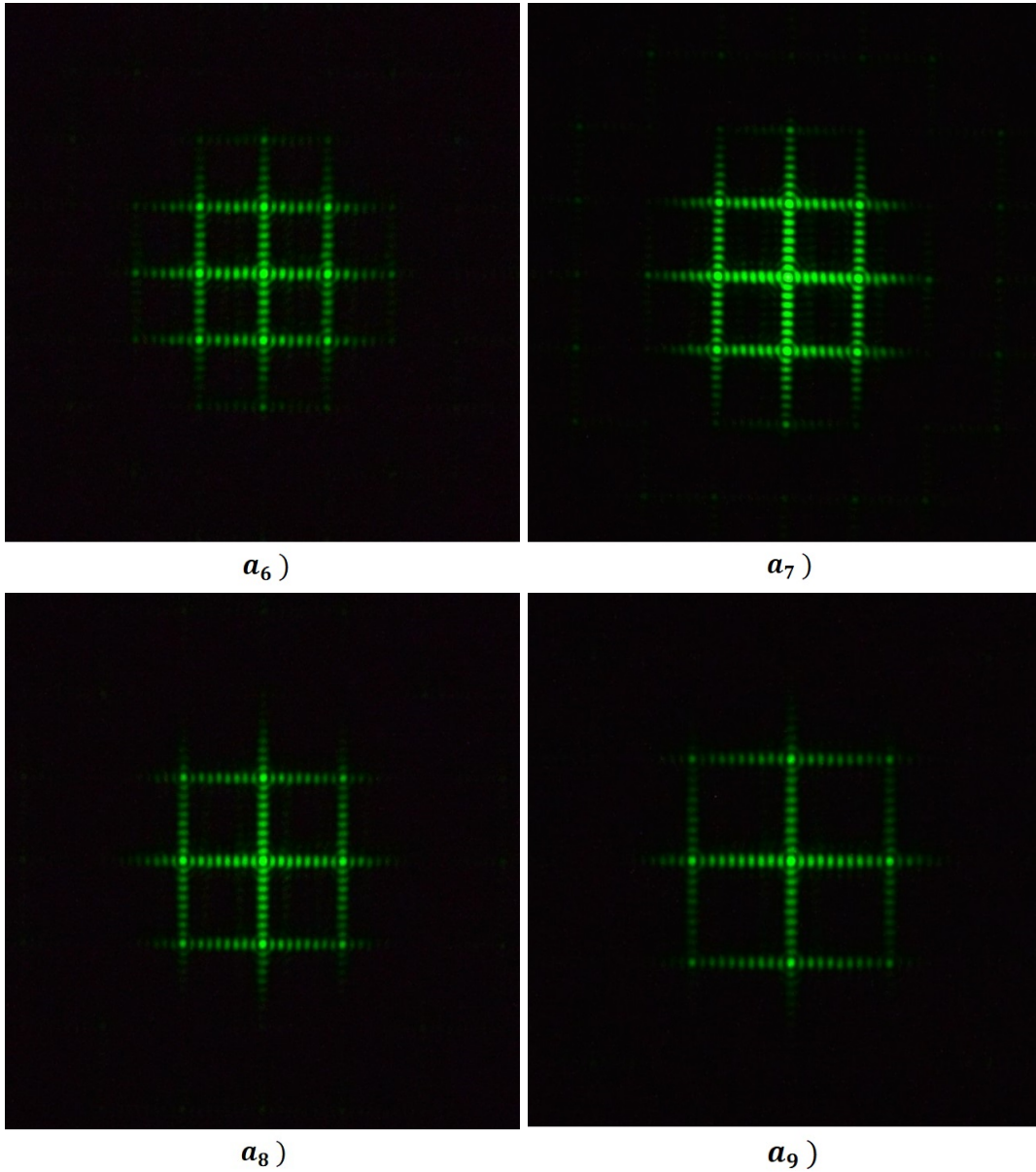
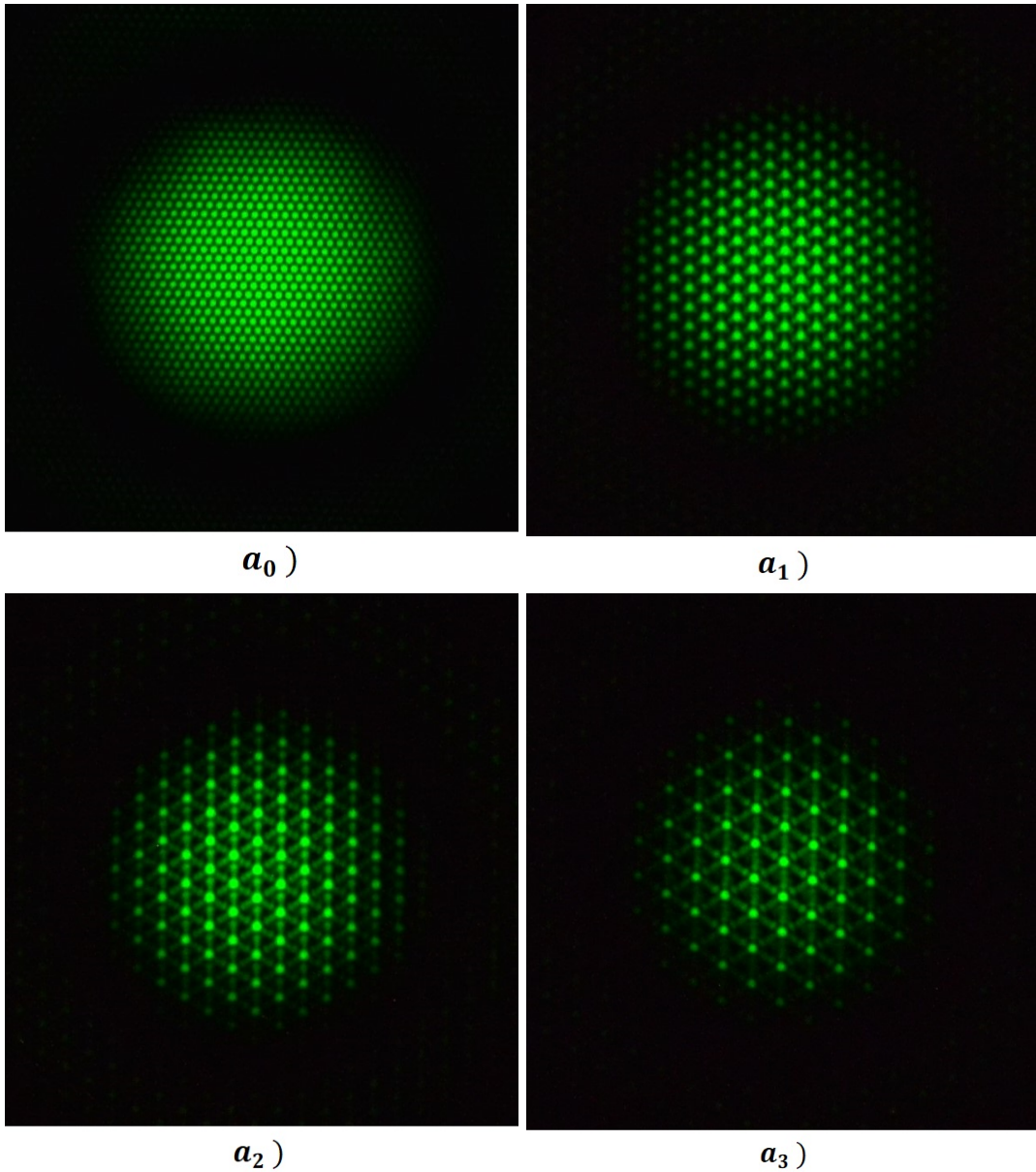


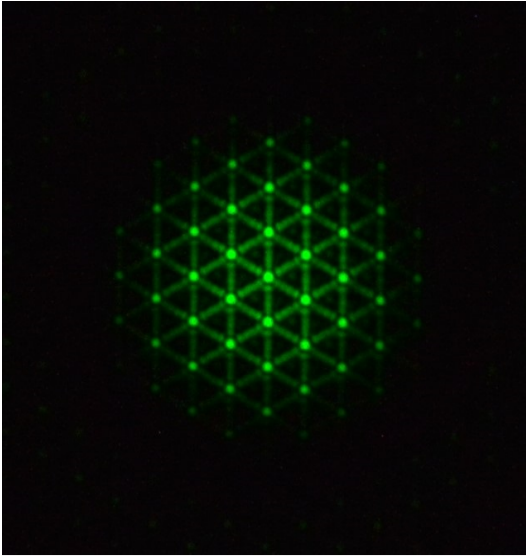
Figura 5.2: Patrones de interferencia obtenidos experimentalmente para rendijas en los vértices de un cuadrado además de una, dos, ..., nueve rendijas por lado.

Al comparar cada patrón de interferencia con los proporcionados por los tres métodos, se encuentra que son similares de forma cualitativa. Al comparar el resultado para nueve rendijas con la abertura continua, también se encuentra que son similares.

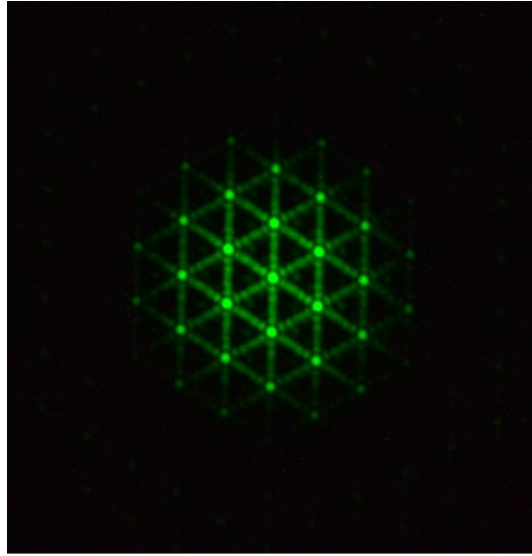
5.4. Resultados experimentales para el contorno de un triángulo equilátero

Para el contorno de un triángulo de 5cm de lado, perforando rendijas en los vértices, luego con una, dos... hasta once rendijas por lado se obtuvieron los siguientes patrones de interferencia denotados por a_i donde i es el número de rendijas por lado

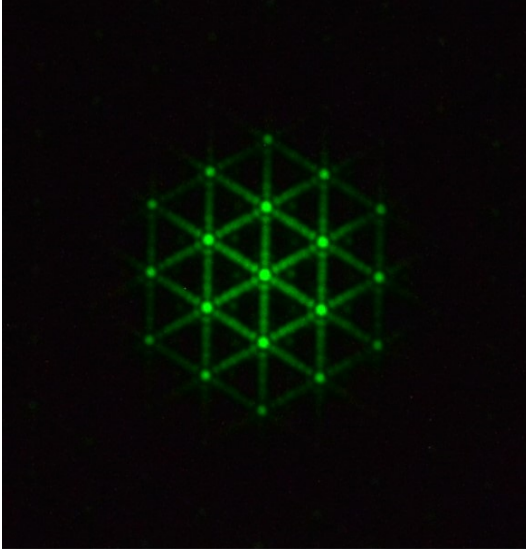




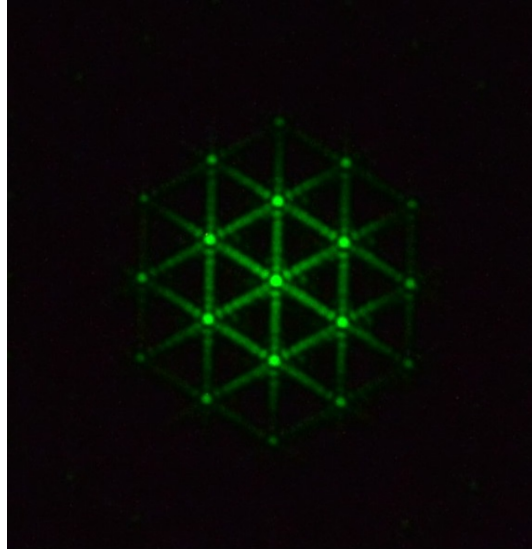
$a_4)$



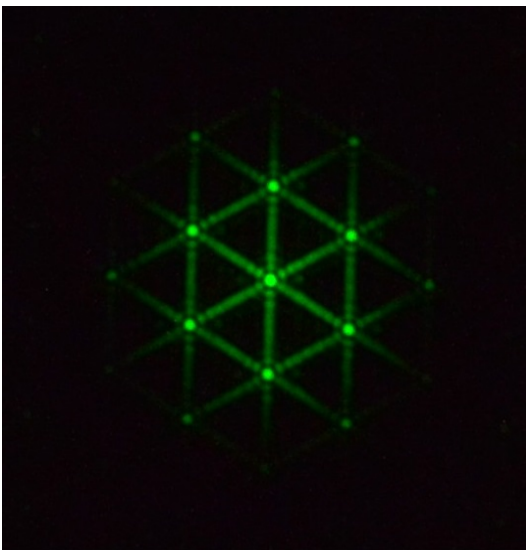
$a_5)$



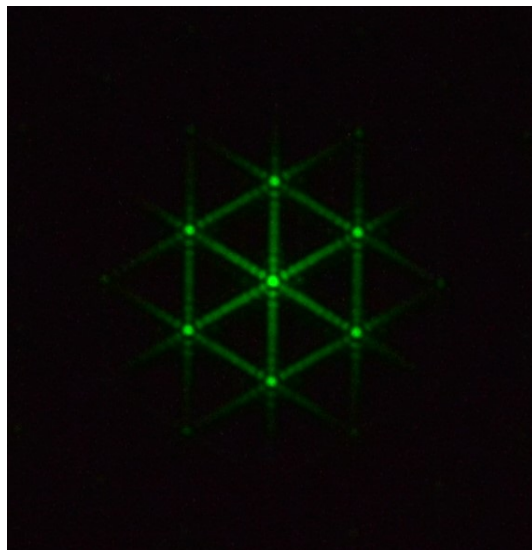
$a_6)$



$a_7)$



$a_8)$



$a_9)$

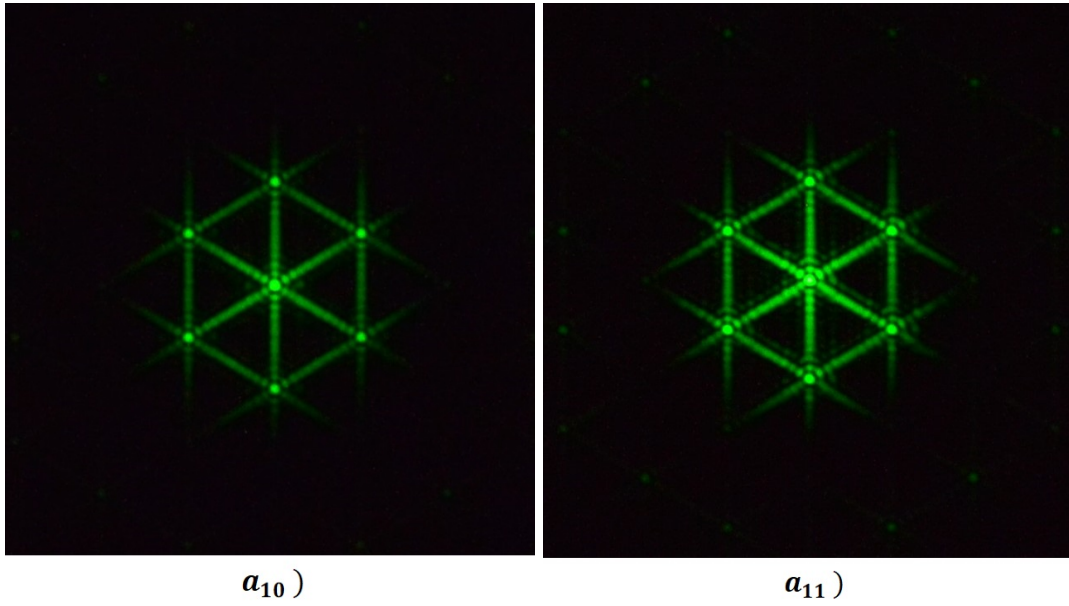
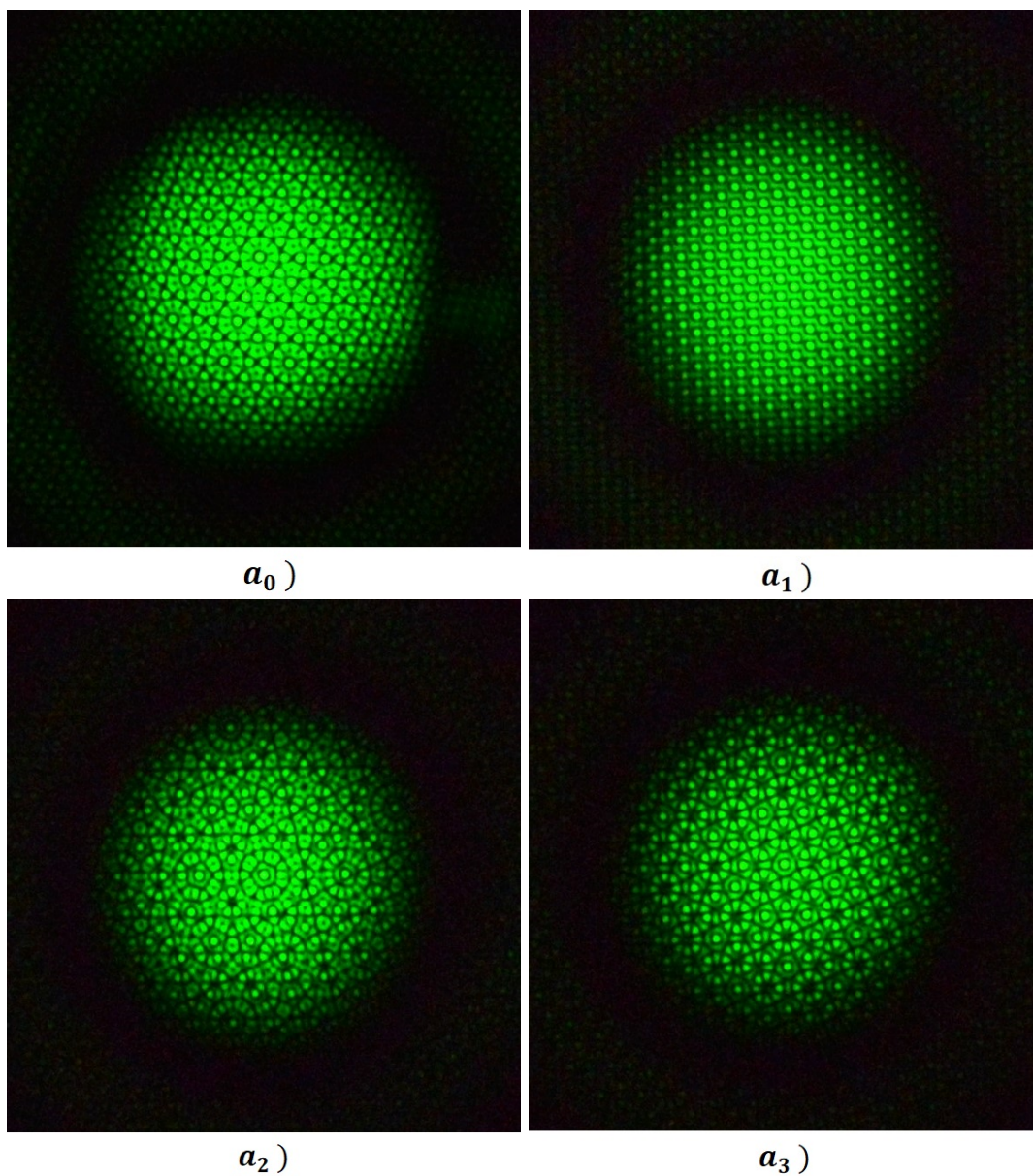


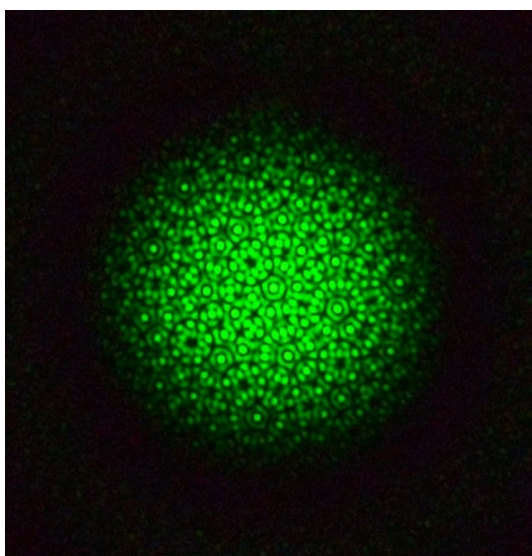
Figura 5.3: Patrones de interferencia obtenidos experimentalmente para rendijas ubicadas en los vértices además de una, dos, ..., once por lado.

Al comparar cada patrón de interferencia con los proporcionados mediante superposición de ondas y deltas de Dirac, se encuentra que son similares de forma cualitativa. Al comparar el resultado para once rendijas con la abertura continua, también se encuentra que son similares.

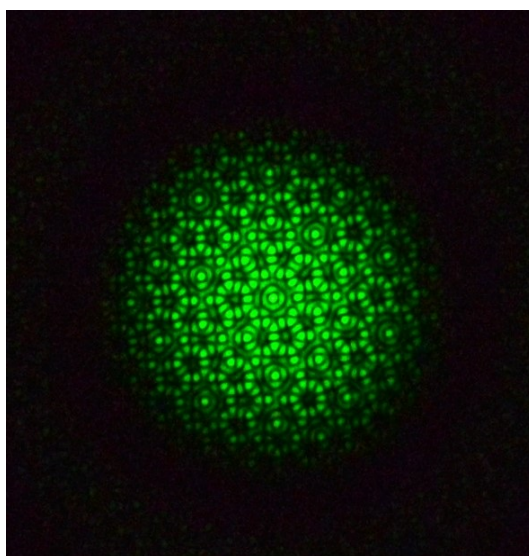
5.5. Resultados experimentales para una circunferencia

Para una circunferencia de diámetro igual a la diagonal del cuadrado se perforaron cinco rendijas hasta 25 y luego 50, se obtuvieron los siguientes patrones de interferencia denotados por a_i donde $i + 5$ es el número de rendijas

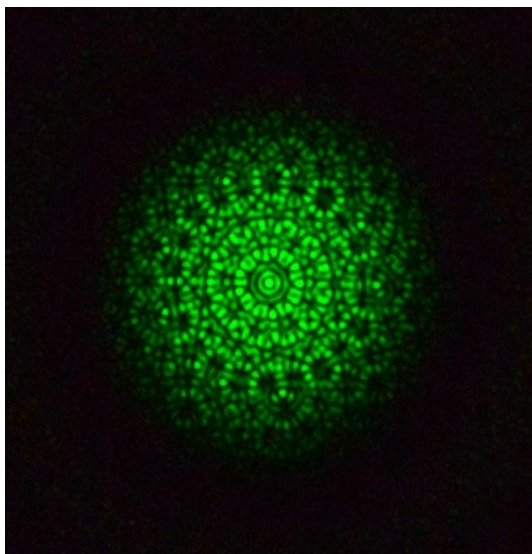




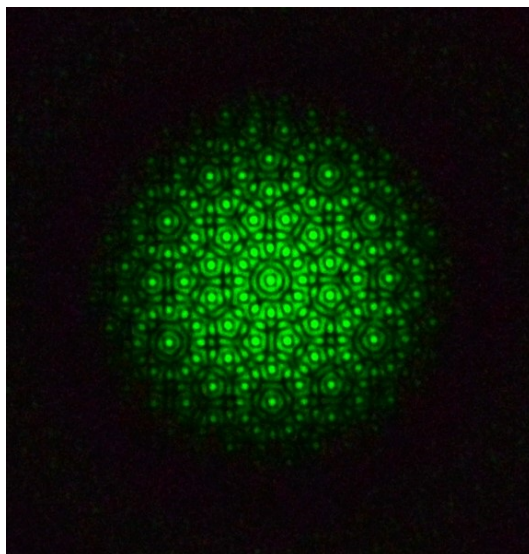
$a_4)$



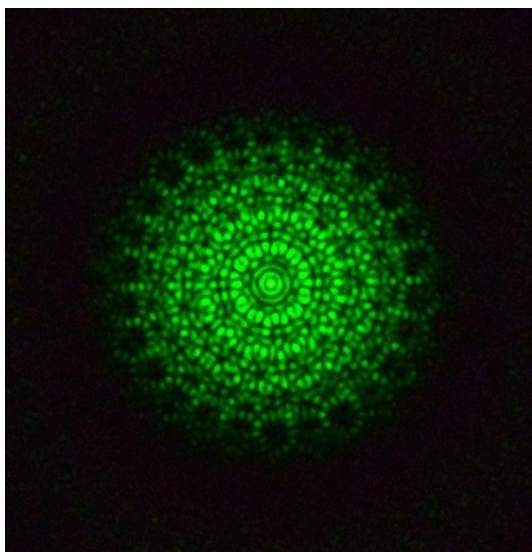
$a_5)$



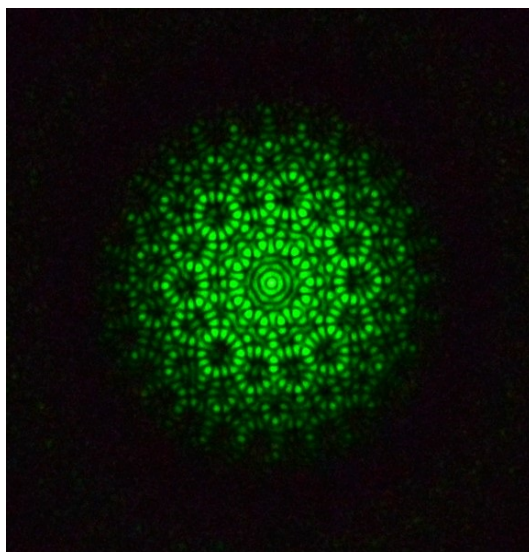
$a_6)$



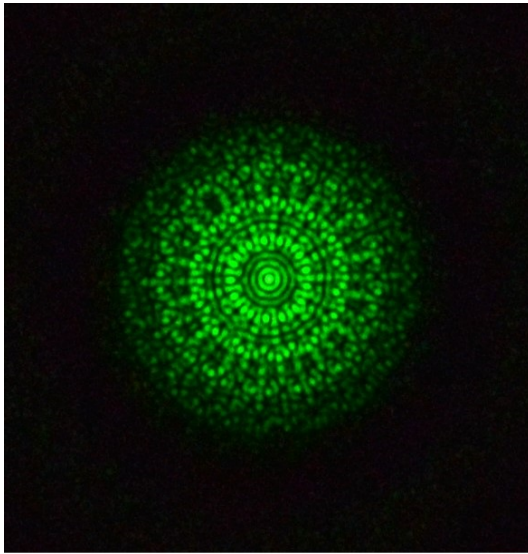
$a_7)$



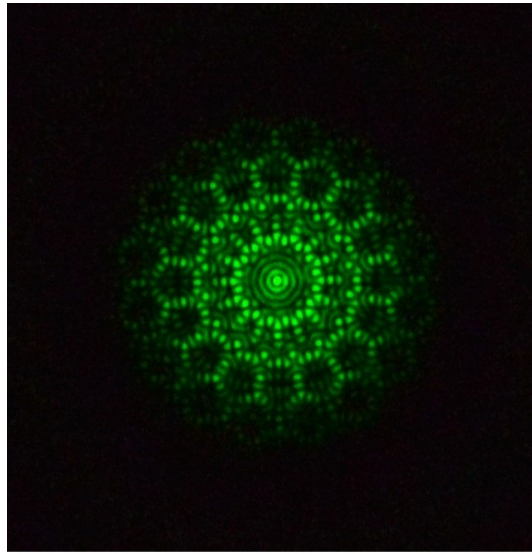
$a_8)$



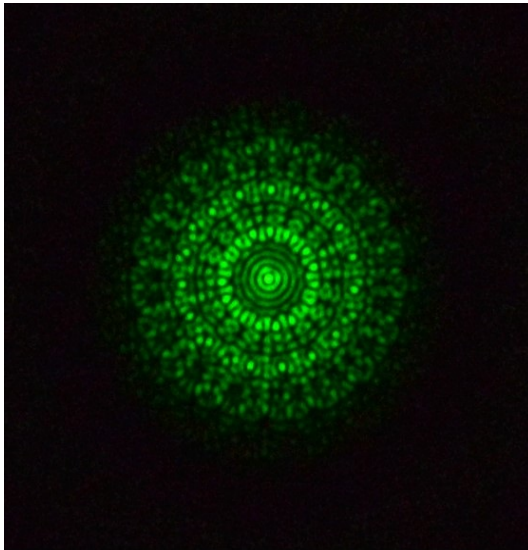
$a_9)$



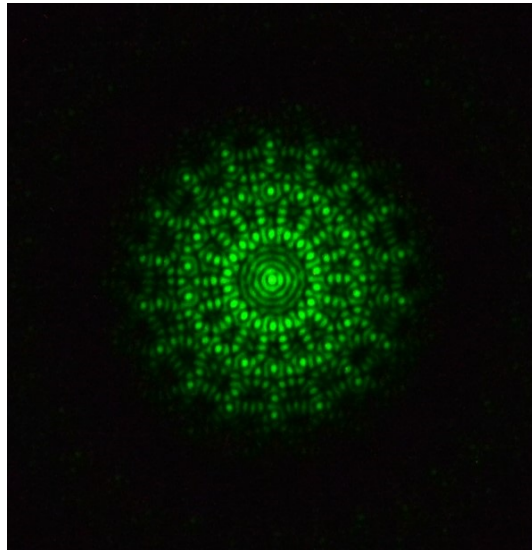
a_{10})



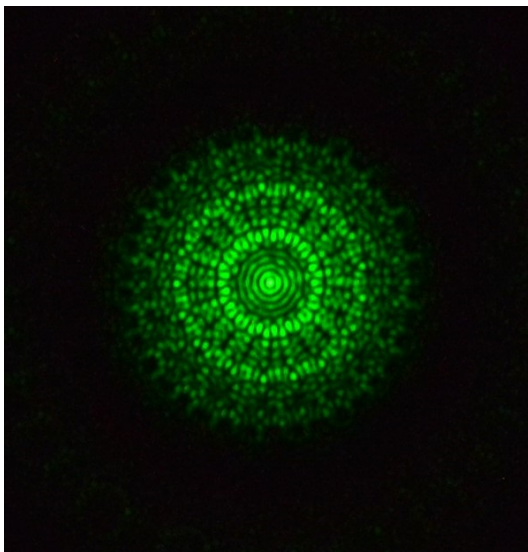
a_{11})



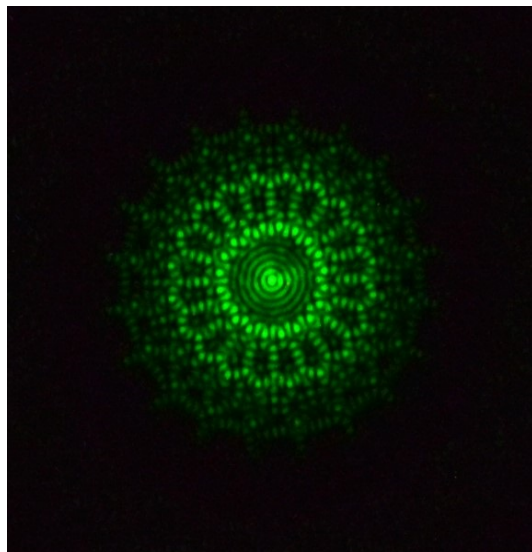
a_{12})



a_{13})



a_{14})



a_{15})

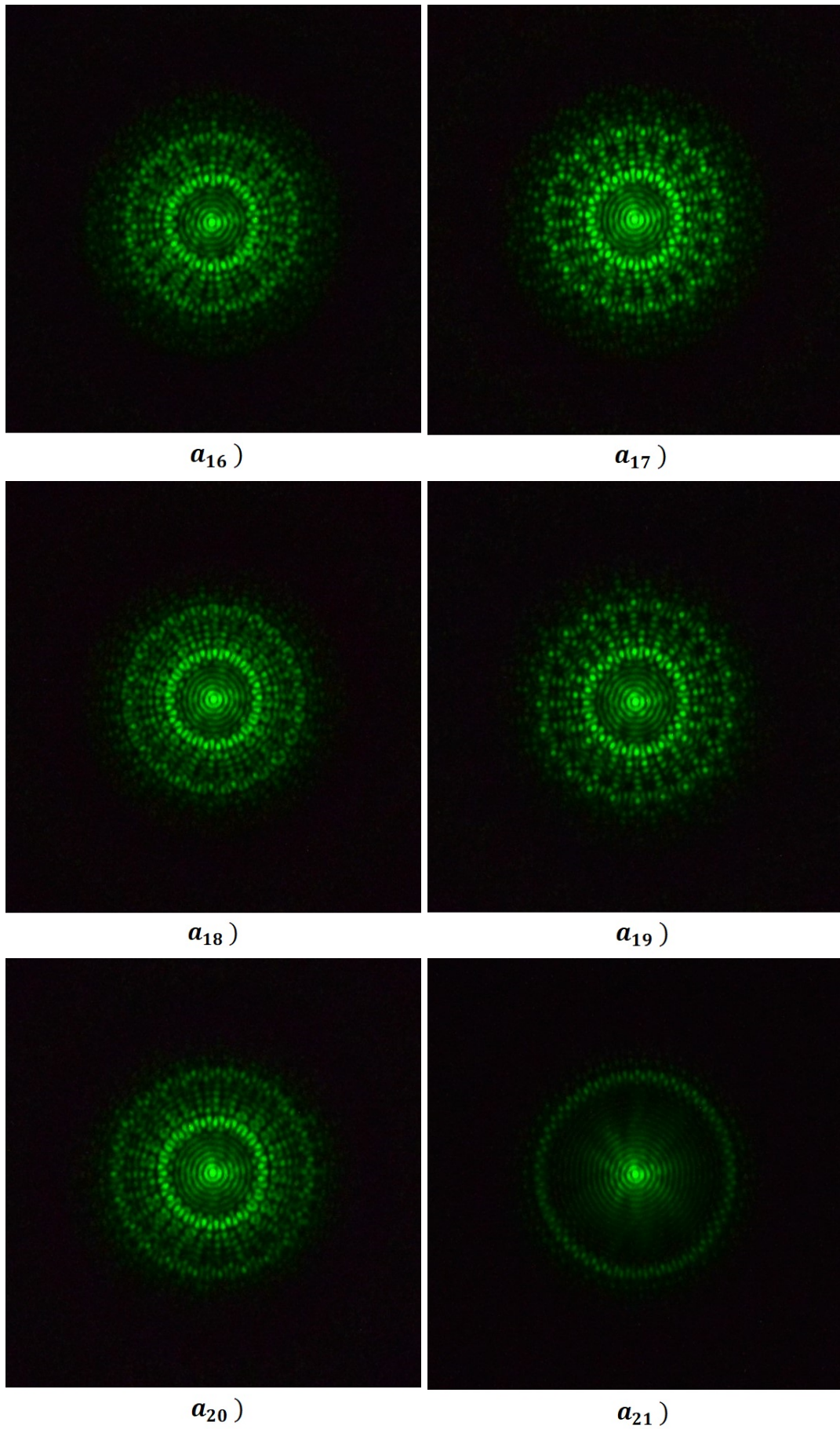


Figura 5.4: Patrones de interferencia obtenidos experimentalmente para 1, 2,..., 25 y 50 rendijas ubicadas en una circunferencia.

Al comparar cada patrón de interferencia con los proporcionados mediante superposición de ondas y deltas de Dirac, se encuentra que son similares de forma cualitativa. Al comparar el resultado para cincuenta rendijas con la abertura anular, también se encuentra similaridad.

La variación en la longitud del lado del cuadrado, del triángulo y el diámetro de la circunferencia se debe a que tanto el triángulo como el cuadrado están inscritos en la circunferencia; sin embargo, la escala se mantiene, ya que los ángulos que se forman son menores a 5° y se permanece en la región de Fraunhofer.

Como en el experimento se tienen rendijas circulares, en todos los patrones aparece una envolvente correspondiente al patrón de difracción de una abertura circular, mientras que para las simulaciones, la región graficada es sólo una parte de un plano infinito.

Capítulo 6

Conclusiones

- Se creó un sistema para ubicar las coordenadas de las rendijas de manera sencilla según el contorno, cabe mencionar que aunque se trabajó con simetría respecto a uno o ambos ejes, la notación usada en las coordenadas permite que el contorno se ubique en cualquier parte del plano.
- Dadas las condiciones del algoritmo, se trabaja en la región de Fraunhofer por ello se presentan las alternativas que hacen uso de la transformada de Fourier; esto es, por medio de deltas de Dirac o bien el método utilizando teorema del muestreo, donde las sumatorias incluidas en la irradiancia tienen forma conocida. Además se ha verificado que los resultados obtenidos por ambas alternativas son similares a los obtenidos con el método establecido inicialmente.
- El método establecido en este trabajo mediante la superposición de ondas para encontrar patrones de interferencia se puede comparar con el uso de la transformada de Fourier cuando las rendijas se representan por medio de deltas de Dirac o bien con el muestreo de una abertura continua.
- El método establecido y el uso de deltas de Dirac para describir las rendijas proporcionan un patrón de interferencia, mientras que el uso del teorema del muestreo proporciona un patrón de difracción ya que se parte de una abertura continua.
- Cuando se consideran n - rendijas consecutivas, donde n es grande, el patrón de interferencia resultante es similar al patrón de difracción proporcionado por una abertura continua.
- El modelo inicial considerando una onda esférica, se puede adaptar no sólo al campo lejano.
- Si se desea conocer cualitativamente el patrón de difracción de una abertura continua (un contorno) sólo basta con perforar rendijas consecutivas que obedezcan la forma del contorno deseado y con ello se obtendrá el patrón buscado. Ésto es más accesible ya

que si se desea realizar un contorno continuo se requiere que el contorno transparente se encuentre en un material oscuro o viceversa.

- En el algoritmo presentado se manejaron medidas en milímetros en cuanto al contorno y a las rendijas, las cuales son complicadas de lograr con precisión en el experimento; sin embargo, gracias al uso de una lente de longitud focal de $1m$ en la configuración experimental mostrada, los contornos y rendijas pueden tomar medidas más grandes (cm).
- Aunque se realiza este cambio de escala en las medidas del experimento, los resultados experimentales concuerdan con las simulaciones.

Apéndice A

Códigos

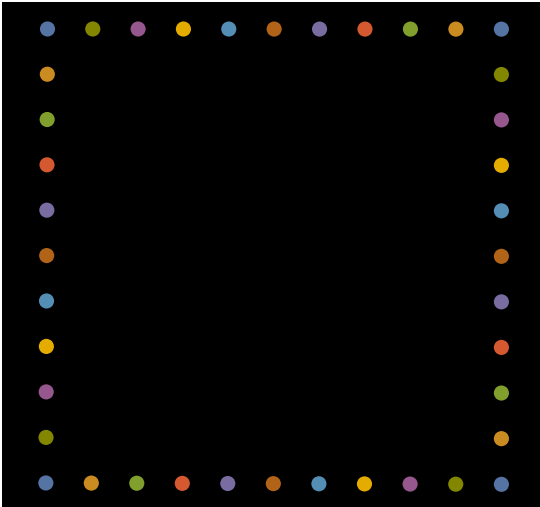
```

(* Código por superposición de
ondas para el contorno de un cuadrado*)
Clear["Global'"]
(*n-1 indica el numero de rendijas por lado,
cuando se buscan 0 rendijas por
lado sólo se tienen los vértices y n=1*)
(*nd es el número de decimales que se desean*)
nd = 10;
λ = N[633/109, nd];
k =  $\frac{2\pi}{\lambda}$ 
n = 10;
A = 1;
xA = N[-1/2000, nd]
xB = N[1/2000, nd];
yA = N[-1/2000, nd];
yB = N[1/2000, nd];
z = 2;
v[u_, v_] := {u, v, z}
P1[m_] := {xA +  $\frac{m(x_B - x_A)}{n}$ , yA, 0}
P2[m_] := {xB -  $\frac{m(x_B - x_A)}{n}$ , yB, 0}
P3[m_] := {xA, yB -  $\frac{m(y_B - y_A)}{n}$ , 0}
P4[m_] := {xB, yA +  $\frac{m(y_B - y_A)}{n}$ , 0}

9.926043139×106
-0.0005000000000000
Table[{P1[m], P2[m], P3[m], P4[m]}, {m, 0, n-1}];

```

```
ListPointPlot3D[
  Table[{P1[m], P2[m], P3[m], P4[m]}, {m, 0, n - 1}],
  Axes → False, Boxed → False, Background → Black,
  PlotStyle → PointSize[.03]]
```



```
r1[u_, v_, m_] := v[u, v] - P1[m]
r2[u_, v_, m_] := v[u, v] - P2[m]
r3[u_, v_, m_] := v[u, v] - P3[m]
r4[u_, v_, m_] := v[u, v] - P4[m]
```

(*Normas*)

```
r1N[u_, v_, m_] := Norm[r1[u, v, m]]
r2N[u_, v_, m_] := Norm[r2[u, v, m]]
r3N[u_, v_, m_] := Norm[r3[u, v, m]]
r4N[u_, v_, m_] := Norm[r4[u, v, m]]
```

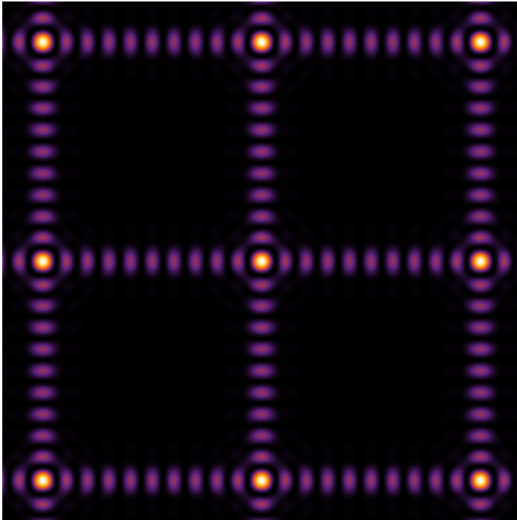
(*Campos*)

```

EF1[u_, v_, m_] := A ei (k r1N[u,v,m])
EF2[u_, v_, m_] := A ei (k r2N[u,v,m])
EF3[u_, v_, m_] := A ei (k r3N[u,v,m])
EF4[u_, v_, m_] := A ei (k r4N[u,v,m])

(*Campo total*)
EFT[u_, v_] := Sum[EF1[u, v, m], {m, 0, n - 1}] +
    Sum[EF2[u, v, m], {m, 0, n - 1}] + Sum[EF3[u, v, m],
    {m, 0, n - 1}] + Sum[EF4[u, v, m], {m, 0, n - 1}]

(*Irradiancia*)
EFTN = Abs[EFT[u, v]]2;
ET = Table[EFTN, {v, -1.5 10-2, 1.5 × 10-2, 8 × 10-5},
    {u, -1.5 10-2, 1.5 × 10-2, 8 × 10-5}] ;
ListDensityPlot[ET, PlotRange → All,
    Frame → False, ColorFunction → "SunsetColors"]
    
```



```

(* Código por superposición de ondas para
   el contorno de un triángulo equilátero*)
Clear["Global'"]
(*n-1 indica el numero de rendijas por lado,
cuando se buscan 0 rendijas por
   lado sólo se tienen los vértices y n=1*)
(*nd es el número de decimales que se desean*)
nd = 10;
λ = N[633/109, nd];
k =  $\frac{2\pi}{\lambda}$ ;
n = 12;
A = 1;
xA = N[-1/2000, nd];
xB = N[1/2000, nd];
yA = N[-1/2000, nd];
yB = N[-1/2000, nd];
xC = N[0, nd];

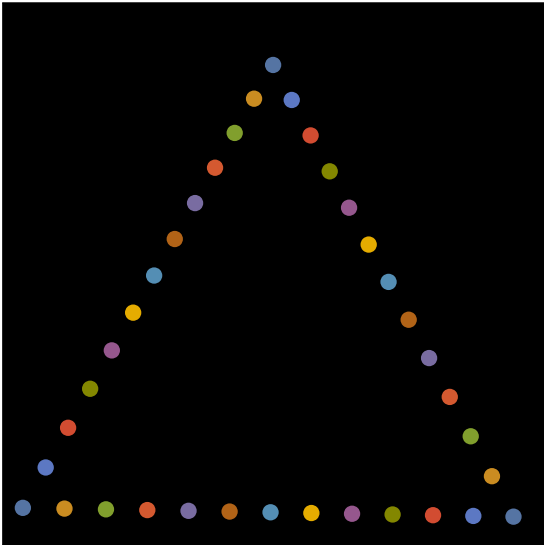
yC = yA +  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2000}\right)$ ;

z = 2;
v[u_, v_] := {u, v, z}
P1[m_] :=  $\left\{x_A + \frac{m(x_B - x_A)}{n}, y_A, 0\right\}$ 
P2[m_] :=
 $\left\{x_B - \frac{m(x_B - x_C)}{n}, \left(\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}\right) \left(x_B - \frac{m(x_B - x_C)}{n} - x_B\right) + y_B, 0\right\}$ 
P3[m_] :=  $\left\{x_C - \frac{m(x_C - x_A)}{n}, \left(\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}\right) \left(x_C - \frac{m(x_C - x_A)}{n} - x_A\right) + y_A, 0\right\}$ 

Table[{P1[m], P2[m], P3[m]}, {m, 0, n - 1}];

```

```
ListPointPlot3D[Table[{P1[m], P2[m], P3[m]}, {m, 0, n - 1}],
  Axes → False, Boxed → False, Background → Black,
  PlotStyle → PointSize[.03]]
```



```
r1[u_, v_, m_] := v[u, v] - P1[m]
r2[u_, v_, m_] := v[u, v] - P2[m]
r3[u_, v_, m_] := v[u, v] - P3[m]

(*Normas*)
r1N[u_, v_, m_] := Norm[r1[u, v, m]]
r2N[u_, v_, m_] := Norm[r2[u, v, m]]
r3N[u_, v_, m_] := Norm[r3[u, v, m]]

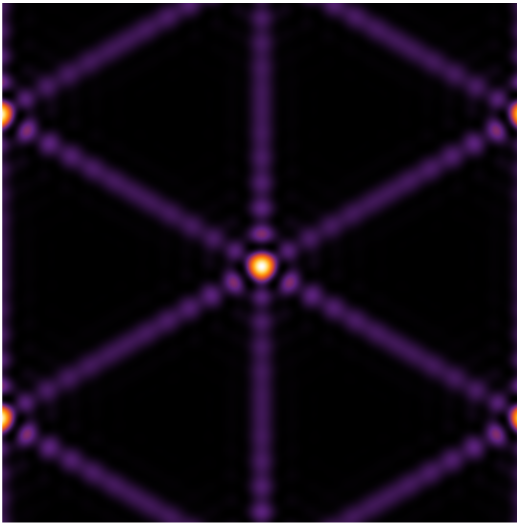
(*Campos*)
EF1[u_, v_, m_] := A ei (k r1N[u,v,m])
EF2[u_, v_, m_] := A ei (k r2N[u,v,m])
EF3[u_, v_, m_] := A ei (k r3N[u,v,m])

(*Campo total*)
```

```

EFT[u_, v_] := Sum[EF1[u, v, m], {m, 0, n - 1}] +
    Sum[EF2[u, v, m], {m, 0, n - 1}] +
    Sum[EF3[u, v, m], {m, 0, n - 1}]

(*Irradiancia*)
EFTN = Abs[EFT[u, v]]^2;
ET = Table[EFTN, {v, -1.5 10^-2, 1.5 10^-2, 8 10^-5},
    {u, -1.5 10^-2, 1.5 10^-2, 8 10^-5}];
ListDensityPlot[ET, PlotRange -> All,
    Frame -> {{False, False}, {False, False}},
    ColorFunction -> "SunsetColors"]
    
```

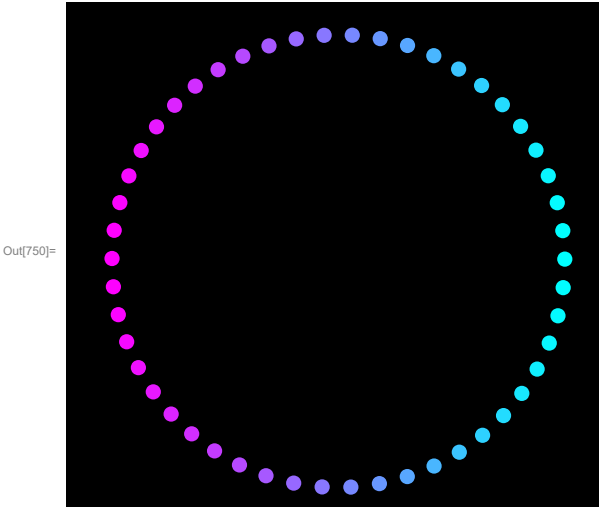


```
(* Código por superposición
de ondas para la circunferencia*)
Clear["Global'"]
(*n indica el numero de rendijas *)
(*nd es el número de decimales que se desean*)
nd = 10;
 $\lambda = N[633/10^9, nd];$ 
 $k = \frac{2\pi}{\lambda};$ 
n = 50;
A = 1;
p = N[1/2000, nd];
 $q = \frac{2\pi}{n};$ 
z = 2;
v[u_, v_] := {u, v, z}
P1[m_] := {p Cos[m q], p Sin[m q], 0}

In[749]:= Table[P1[m], {m, 0, n - 1}];
```



```
In[750]:= ListPointPlot3D[Table[P1[m], {m, 0, n - 1}],
    Axes → False, Boxed → False,
    Background → Black, PlotStyle → PointSize[.03],
    ColorFunction → (RGBColor[1 - #, #, 1] &)]
```



```
In[751]:=
r1[u_, v_, m_] := v[u, v] - P1[m]

(*Norma*)
r1N[u_, v_, m_] := Norm[r1[u, v, m]]

(*Campo*)
EF[u_, v_, m_] := A ei (k r1N[u,v,m])

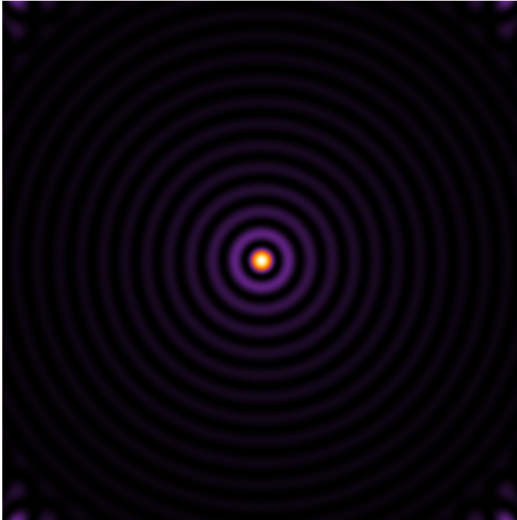
(*Campo total*)
EFT[u_, v_] := Sum[EF[u, v, m], {m, 0, n - 1}]

(*Irradiancia*)
In[757]:= EFNT = Abs[EFT[u, v]]2;
```

```
In[758]:= ET = Table[EFNT, {v, -1.5 10-2, 1.5 × 10-2, 8 × 10-5},
    {u, -1.5 10-2, 1.5 × 10-2, 8 × 10-5}] ;
```

```
In[759]:= ListDensityPlot[ET, PlotRange → All,
    Frame → {{False, False}, {False, False}},
    ColorFunction → "SunsetColors"]
```

Out[759]=

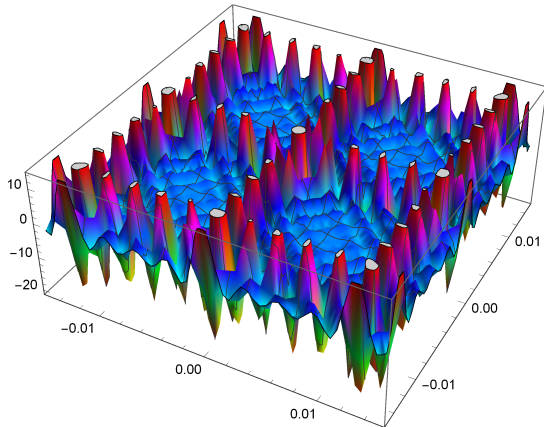


```
(*Algoritmo con deltas de Dirac
para el contorno de un cuadrado*)

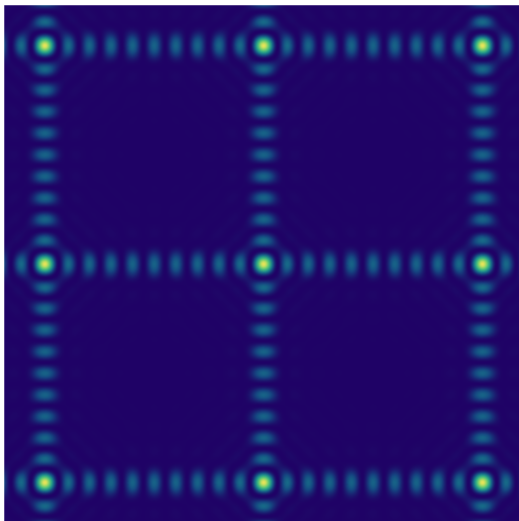
Clear["Global'"]

(*n-1 indica el numero de rendijas por lado,
cuando se buscan cero rendijas por lado,
sólo quedan los vértices y n=1*)
nd = 10;
λ = N[633/109, nd];
k =  $\frac{2 \pi}{\lambda}$ ;
n = 10;
xA = N[-1/2000, nd];
xB = N[1/2000, nd];
yA = N[-1/2000, nd];
yB = N[1/2000, nd];
z = 2;
c[m_, u_, v_] := 2 Cos[k/z (u (xA +  $\frac{m (x_B - x_A)}{n}$ ) + v yA)] +
2 Cos[k/z (u xA + v (yB -  $\frac{m (y_B - y_A)}{n}$ ))]
icd[u_, v_] := Sum[c[m, u, v], {m, 0, n-1}]
icd[u, v];
```

```
Plot3D[icd[u, v], {v, -1.5 10-2, 1.5 × 10-2},
  {u, -1.5 10-2, 1.5 × 10-2}, ColorFunction → Hue]
```



```
ict = Abs[icd[u, v]]2;
DensityPlot[ict, {v, -1.5 10-2, 1.5 × 10-2},
  {u, -1.5 10-2, 1.5 × 10-2}, PlotRange → All,
  ColorFunction → "BlueGreenYellow", PlotPoints → 150,
  Frame → {{False, False}, {False, False}}]
```



(*Algoritmo con deltas de Dirac para
el contorno de un triángulo equilátero*)

```

Clear["Global'"]

(*n-1 indica el numero de rendijas por lado,
cuando se buscan cero rendijas por lado,
sólo quedan los vértices y n=1*)
nd = 10;
λ = N[633/109, nd];
k =  $\frac{2\pi}{\lambda}$ ;
n = 12;
xA = N[-1/2000, nd];
xB = N[1/2000, nd];
yA = N[-1/2000, nd];
xC = N[0, nd];
yC = yA +  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2000}\right)$ ;
z = 2;
t[u_, v_, m_] :=

$$e^{-i\frac{k}{z}\left(u\left(x_A + \frac{m(x_B - x_A)}{n}\right) + v y_A\right)} + e^{-i\frac{k}{z}\left(u\left(x_B - \frac{m(x_B - x_C)}{n}\right) + v\left(\frac{y_C - y_A}{x_C - x_B}\right)\left(x_B - \frac{m(x_B - x_C)}{n} - x_B\right) + y_A\right)} +$$


$$e^{-i\frac{k}{z}\left(u\left(x_C - \frac{m(x_C - x_A)}{n}\right) + v\left(\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}\right)\left(x_C - \frac{m(x_C - x_A)}{n} - x_A\right) + y_A\right)}$$

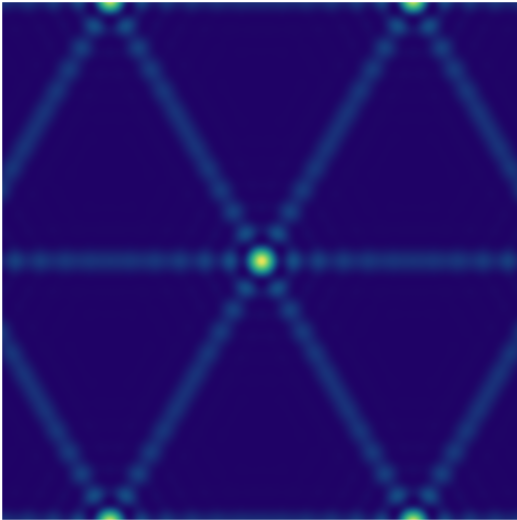

pt[u_, v_] := Sum[t[u, v, m], {m, 0, n - 1}]
In[236]:= pt[0, 0];

In[237]:=

In[238]:= ipt = Abs[pt[u, v]]2;
    
```

```
In[239]:= DensityPlot[ipt, {v, -1.5 10-2, 1.5 × 10-2},  
  {u, -1.5 10-2, 1.5 × 10-2}, PlotRange → All,  
  ColorFunction → "BlueGreenYellow", PlotPoints → 180,  
  Frame → {{False, False}, {False, False}}]
```

Out[239]=



In[240]:=

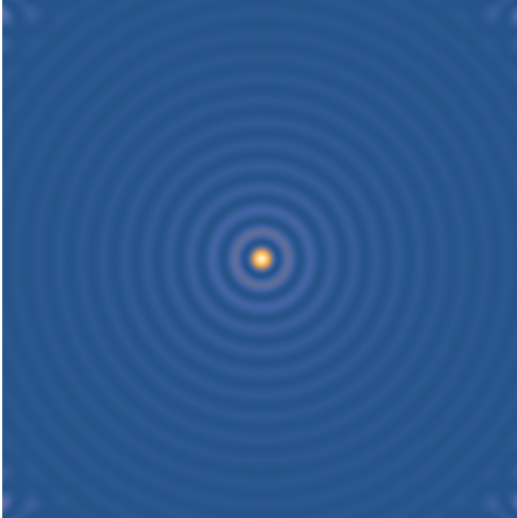
(*Algoritmo con deltas de Dirac para una circunferencia*)

```

Clear["Global'"]
(*n indica el numero de rendijas, empieza en 5*)
nd = 10;
 $\lambda = N[633/10^9, nd];$ 
 $k = \frac{2\pi}{\lambda};$ 
n = 50;
z = 2;
rt = N[1/2000, nd];
 $q = \frac{2\pi}{n};$ 
dc[m_, u_, v_] :=  $e^{\frac{-ik}{z} (u \, rt \, \text{Cos}[m \, q] + v \, rt \, \text{Sin}[m \, q])}$ 
dc1[u_, v_] := Sum[dc[m, u, v], {m, 0, n - 1}]
In[377]:= dc1[u, v];
In[378]:= idc1 = Abs[dc1[u, v]]^2;
```

```
In[379]:= DensityPlot[idc1, {v, -1.5 10-2, 1.5 × 10-2},  
  {u, -1.5 10-2, 1.5 × 10-2}, PlotRange → All,  
  PlotPoints → 200, Frame → {{False, False}, {False, False}}]
```

Out[379]=



```

(*muestreo para el contorno de un cuadrado*)
Clear["Global'"]
(*n-1 indica el numero de rendijas por lado,
empieza en 1 *)
nd = 10;
λ = N[633/109, nd];
n = 10;
xA = N[-1/2000, nd];
xB = N[1/2000, nd];
yA = N[-1/2000, nd];
yB = N[1/2000, nd];
xw = N[1/1000, nd];
yw = N[1/1000, nd];
z = 2;

In[107]:= c1[j_, l_, u_, v_] := 2 xw  $\left(\frac{n}{x_B - x_A}\right) \left(\frac{n}{y_B - y_A}\right) e^{-i 2 \pi \left(\frac{j n}{x_B - x_A} x_A + \frac{l n}{y_B - y_A} y_A\right)}$ 
Sinc $\left[\pi x_w \left(\frac{u}{\lambda z} - \frac{j n}{x_B - x_A}\right)\right]$  Cos $\left[\pi y_w \left(\frac{v}{\lambda z} - \frac{l n}{y_B - y_A}\right)\right]$  +
2 yw  $\left(\frac{n}{x_B - x_A}\right) \left(\frac{n}{y_B - y_A}\right) e^{-i 2 \pi \left(\frac{j n}{x_B - x_A} x_A + \frac{l n}{y_B - y_A} y_A\right)}$ 
Sinc $\left[\pi y_w \left(\frac{v}{\lambda z} - \frac{l n}{y_B - y_A}\right)\right]$  Cos $\left[\pi x_w \left(\frac{u}{\lambda z} - \frac{j n}{x_B - x_A}\right)\right]$ 

In[108]:= sc1[u_, v_] := Sum[c1[j, l, u, v], {j, -8, 8}, {l, -8, 8}]
sc1[u, v];

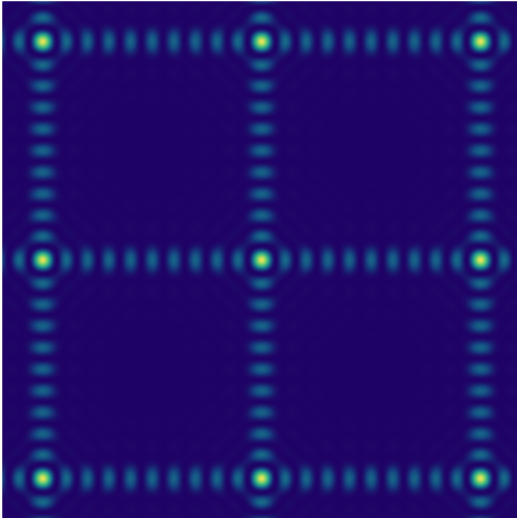
In[110]:=

```

```
In[111]:= isc1 = Abs[sc1[u, v]]2;
```

```
DensityPlot[isc1, {v, -1.5 10-2, 1.5 × 10-2},  
  {u, -1.5 10-2, 1.5 × 10-2}, PlotRange → All,  
  PlotPoints → 150, ColorFunction → "BlueGreenYellow",  
  Frame → {{False, False}, {False, False}}]
```

Out[112]=



Bibliografía

- [1] Eugene Hecht, A. R. Ganesan, *Optics*, Pearson, (2008).
- [2] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill Companies, Inc., (2000).
- [3] B. D. Guenther, *Modern Optics*, Oxford University Press , Second edition (2015).
- [4] D. Malacara, *Optical Shop Testing*, (Ed.), Wiley, New York (1992).
- [5] Gustavo Rodríguez-Zurita, *Métodos de Fourier en la teoría de formación de imágenes ópticas*, material del curso de Óptica Física (pp 29-30).
- [6] Okan K. Ersoy, *Diffraction, Fourier Optics and Imaging*, Wiley-Interscience A John Wiley and Sons, Inc. Publication (2007).
- [7] E. G. Steward, *Fourier Optics, An introduction*, Halsted Press, (1987).
- [8] R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw-Hill, (2003).
- [9] Arfken and Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Elseiver Academic Press, (2005).