

Tesis

Modelado de Señales

Mioeléctricas del Antebrazo



BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Facultad de Ciencias de la Electrónica



Modelado de señales mioeléctricas del antebrazo

TESIS

que para obtener el grado de

Ingeniero en Mecatrónica

presenta

José Fernando Sánchez Bello

Asesores

Dr. José Fernando Reyes Cortés – Facultad de Ciencias de la Electrónica

Dr. Pablo Sánchez Sánchez – Facultad de Ciencias de la Electrónica

CU, Puebla. Pue., junio 2025

Hoja de firmas

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA
Facultad de Ciencias de la Electrónica

El presente documento certifica que se ha leído el trabajo de Tesis que tiene por nombre **Modelado de señales mioeléctricas del antebrazo** realizado por el alumno **José Fernando Sánchez Bello** recomendando a la Facultad de Ciencias de la Electrónica (FCE) sea aceptada para cumplir con uno de los requisitos para obtener el grado de **Ingeniero Mecatrónico**.

11 de junio de 2025

Presidente: _____
Dr. Aldrin Barreto Flores

Secretario: _____
Dr. Roberto Carlos Ambrosio Lazaro

Vocal: _____
Dra. Ana Luz Muñoz Zurita

Lugar donde se realizó la tesis:

Laboratorio de Robótica del Edificio de Posgrado de la Facultad de Ciencias de la Electrónica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP).

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a Dios por permitirme culminar esta etapa tan importante de mi vida. Durante estos cinco años enfrenté muchas pruebas, pero con fe y perseverancia logré superarlas, y cada una de ellas contribuyó a formar la persona que soy hoy.

A mi madre, gracias por tu amor incondicional, tu apoyo constante y por nunca dejarme rendir. Siempre me impulsaste a ser mejor, a perseguir mis metas y a no olvidar quién soy. Estoy profundamente agradecido con la vida por ser tu hijo.

A mi padre, que partiste hace ya cuatro años: gracias por formarme con tus palabras, tus valores y tu ejemplo. Hoy entiendo muchas de las enseñanzas que me dejaste, y aunque no estás físicamente conmigo, sé que sigues guiando mis pasos. Espero que te sientas orgulloso de mí, porque yo siempre he sentido que fui uno de tus mayores logros. Vives en mi corazón y en mis pensamientos cada día.

A mis asesores: al Dr. Fernando Reyes Cortés, gracias por confiar en mí, por permitirme aprender a través de su conocimiento, por dejarme asistir a clases de posgrado y por ser un modelo del investigador que aspiro a ser. Su compromiso y dedicación al trabajo son verdaderamente inspiradores. Asimismo, al Dr. Pablo Sánchez Sánchez, gracias incluso por las lecciones difíciles. Reprobarme fue una oportunidad para reflexionar y mejorar, y hoy reconozco que fue clave en mi crecimiento. Le agradezco también por incluirme en sus proyectos y por compartir conmigo parte de su vasto conocimiento. Su ejemplo como investigador es admirable.

A la profesora Lina Cruz Ortega, una de las primeras personas que me formó profesionalmente: gracias por enseñarme la importancia de la firmeza en las ideas y la excelencia en el trabajo. Más allá de ser mi profesora, hemos construido un vínculo que valoro profundamente. La admiro por ser una mujer íntegra, dedicada tanto a su labor como a su familia, y por su fortaleza ante las adversidades.

Al Dr. Germán Ardul Muñoz Hernández, gracias por su escucha, su guía, sus consejos y por compartir su conocimiento con tanta generosidad. Es un ejemplo de alguien que ejerce su labor desde el corazón, y por eso lo admiro profundamente.

A la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, mi más sincero agradecimiento por su invaluable calidad en la formación académica de sus estudiantes, pero, sobre todo, por su apoyo incondicional. Gracias a la condonación total de mis estudios hasta la titulación, hoy puedo cumplir este sueño. Acciones como esta reflejan el profundo humanismo y compromiso social de esta gran institución, y la consolidan como una de las universidades por excelencia en nuestro país, tanto por su calidad académica como por su visión solidaria.

Finalmente, a toda mi familia: gracias por su guía, por sus consejos y por ser mi constante motivación para convertirme en una mejor persona y profesional. Ustedes me han inspirado a ser alguien digno de seguir.

A todos ustedes, gracias. Han sido fundamentales en mi camino. Este logro también es suyo. ¡Gracias de todo corazón!

José Fernando Sánchez Bello

Dedicatoria

A mi madre

María Teresa Bello Rosas

y a mi padre

José Fernando Sánchez González

Índice general

Hoja de firmas	III
Agradecimientos	V
Dedicatoria	VII
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento general del problema	1
1.1.1. Contexto y relevancia del estudio	1
1.1.2. Motivación	2
1.1.3. Objetivo general y específicos	3
1.1.3.1. Objetivo general	3
1.1.3.2. Objetivos particulares	3
1.1.4. Hipótesis	3
1.1.5. Alcances	3
1.2. Fundamentos teóricos	4
1.2.1. Electromiografía: principios básicos	4
1.2.1.1. Electromiografía	4
1.2.2. Características y factores que afectan la señal EMG	11
1.2.2.1. Características de la señal EMG	11
1.2.2.2. Influencias que alteran a las señales EMG	11
1.2.2.3. Electrodo	14
1.2.2.4. Colocación adecuada de un electrodo superficial	15
1.2.2.5. Estándares y normativas en señales EMG	16
1.2.3. Modelado matemático de señales EMG	16
1.2.3.1. Modelo generativo de EMG de superficie	17
1.2.4. Método por elemento finito	18
1.2.5. Modelos AR-AKF y generadores sintéticos	21
1.2.6. Generador de señales EMG con disparos aleatorios	26
1.2.6.1. Modelo dinámico de señales sintéticas	26
1.2.6.2. Modelo del generador de señales EMG	29
1.3. Formulación del problema	30
1.3.1. Limitaciones actuales en el modelado EMG	31
1.3.2. Justificación del uso del algoritmo RLS	32
1.4. Estructura de la tesis	32

2. Arquitectura de Adquisición de Señales Mioeléctricas	33
2.1. Descripción general del sistema de adquisición	33
2.2. Factores que afectan la calidad de la señal EMG	35
2.2.1. Ruido eléctrico e interferencias externas	35
2.2.2. Artefactos fisiológicos y variabilidad biológica	36
2.3. Etapas del sistema de instrumentación	36
2.3.1. Adquisición	36
2.3.2. Pre-amplificación	37
2.3.3. Etapa de filtrado	37
2.3.4. Amplificación	38
2.3.5. Digitalización	38
2.3.5.1. Características del acondicionamiento y la digitalización	39
2.4. Etapas de procesamiento de la señal mioeléctrica	39
2.5. Propuesta de circuito para la adquisición de señales EMG	44
3. Modelado de la Señal EMG	47
3.1. Identificación Paramétrica	47
3.1.1. Método de Mínimos Cuadrados	48
3.1.1.1. Algoritmo Recursivo de Mínimos Cuadrados	48
3.1.1.2. Propiedades del algoritmo recursivo de mínimos cuadrados	51
3.1.2. Señales de excitación persistente	51
3.1.2.1. Características cualitativas y diseño práctico	52
3.2. Construcción del modelo EMG mediante RLS	53
4. Modelado y Control del Sistema Experimental	55
4.1. Modelado Dinámico del Sistema Experimental	55
4.2. Modelado de la Ley de Control de Tipo Acotado	59
5. Resultados experimentales	63
5.1. Instrumentación y adquisición de la señal EMG	63
5.2. Modelado de la señal EMG	67
5.3. Implementación del control con señal EMG	77
5.3.1. Control de posición para una trayectoria deseada	81
5.4. Desarrollo experimental de un sensor de rigidez	83
Conclusiones	87
A. Propiedades de las matrices	89
A.1. Propiedades Fundamentales	89
B. Estimación de Parámetros	91
B.1. Señal EMG por movimientos rápidos	91
B.2. Señal EMG por movimientos lentos	93
B.3. Señal EMG por movimientos con fuerza	94

Índice de figuras

1.1. Relación entre el sistema nervioso central, periférico y el músculo.	6
1.2. Composición de la señal EMG	7
1.3. Ejemplo de una señal EMG intramuscular y EMG superficial	8
1.4. Superposición de MUAPs para generar una señal EMG	9
1.5. Electrodo secos.	14
1.6. Electrodo húmedos.	15
1.7. Señal de electrocardiograma ECG	27
1.8. Etapas para adquirir y procesar las señales mioeléctricas	29
2.1. Etapas para adquirir y procesar las señales mioeléctricas	34
2.2. Electrónica implementada por [52] para la adquisición de señales EMG	40
2.3. Etapa completa con INA121 y OPA2134 para adquisición y acondicionamiento	41
2.4. Circuito de adquisición	42
2.5. Etapa 1. Adquisición de señal	44
2.6. Etapa 2. Filtro pasa bandas	45
2.7. Etapa 3. Seguidor de voltaje y amplificador	46
2.8. Etapa 4. Sumador de señales	46
4.1. Configuración geométrica del péndulo.	56
4.2. Desplazamiento del centro de masa I_{c1}	58
5.1. Circuito físico para la adquisición de la señal EMG	63
5.2. Señal EMG en etapas iniciales de amplificación.	64
5.3. Etapas de filtrado: señal EMG tras pasa altas (canal 1) y filtrado completo (canal 2).	65
5.4. Señal EMG recortada durante la digitalización.	66
5.5. Señal EMG recortada.	67
5.6. Señal EMG desplazada con circuito sumador.	67
5.7. Señales EMG de diversos movimientos.	68
5.7. (Continuación) Señales EMG de diversos movimientos.	69
5.8. Señales EMG correspondientes a un movimiento rápido	70
5.8. (Continuación) Señales EMG correspondientes a un movimiento rápido	71
5.9. Señales EMG correspondientes a un movimiento lento	72
5.9. (Continuación) Señales EMG correspondientes a un movimiento lento	73
5.10. Señales EMG correspondientes a un movimiento con fuerza	74
5.10. (Continuación) Señales EMG correspondientes a un movimiento con fuerza	75

5.11. Parámetros estimados.	76
5.11. (Continuación) Parámetros estimados.	77
5.12. Esquema de control con señal EMG como entrada.	78
5.13. Posiciones	79
5.14. Velocidad del sistema	79
5.15. Energía aplicada al sistema	80
5.16. Seguimiento de trayectoria	81
5.17. Velocidad observada.	82
5.18. Energía aplicada.	82
5.19. Sensor de rigidez basado en control EMG (conexión física)	83
5.20. Sensor de rigidez (elementos del sensor)	84
5.21. Gráficas del sensor de rigidez.	85

Índice de tablas

B.1. Parámetros estimados obtenidos para movimientos rápidos.	91
B.1. (Continuación) Parámetros estimados obtenidos para movimientos rápidos.	92
B.2. Parámetros estimados obtenidos para movimientos lentos.	93
B.2. (Continuación) Parámetros estimados obtenidos para movimientos lentos.	94
B.3. Parámetros estimados obtenidos para movimientos con fuerza.	94
B.3. (Continuación) Parámetros estimados obtenidos para movimientos con fuerza.	95
B.3. (Continuación) Parámetros estimados obtenidos para movimientos con fuerza.	96

Capítulo 1

Introducción

El presente capítulo establece el marco conceptual y metodológico que da origen a este trabajo de investigación. Se introduce el contexto científico y tecnológico de las señales electromiográficas, se define el problema de estudio, se formulan los objetivos, la hipótesis y los alcances, y se presentan los fundamentos teóricos que sustentan la propuesta. Esta base inicial permite comprender la motivación y relevancia del estudio, así como su contribución potencial en el área de modelado biomédico.

1.1. Planteamiento general del problema

A continuación, se expone el planteamiento general del problema que da origen a esta tesis. Para ello, se analiza el contexto actual del estudio de señales electromiográficas, su importancia en aplicaciones biomédicas y de control, y las limitaciones que enfrenta su modelado. Esta sección proporciona el punto de partida necesario para entender la motivación, los objetivos y el enfoque metodológico adoptado.

1.1.1. Contexto y relevancia del estudio

El estudio de las **señales mioeléctricas (EMG)** se ha consolidado como una herramienta clave para el análisis de la actividad neuromuscular, con aplicaciones relevantes en áreas como la biomedicina, la ingeniería de rehabilitación y el desarrollo de interfaces hombre-máquina. Estas señales, generadas por la actividad eléctrica de los músculos durante la contracción, proporcionan información esencial sobre los procesos neuromusculares subyacentes. La comprensión y el modelado preciso de dichas señales resultan fundamentales para mejorar la interpretación de los movimientos musculares y avanzar en el diseño de dispositivos de asistencia más eficaces, [1].

En el caso particular del antebrazo, el **modelado de señales mioeléctricas** representa un desafío significativo debido a la complejidad de sus movimientos y a la interacción simultánea de múltiples músculos. La necesidad de desarrollar modelos precisos se debe a la alta variabilidad de estas señales, influenciada por factores como la fatiga muscular, las diferencias anatómicas entre individuos y la interferencia causada por ruido electromagnético. Para enfrentar estos retos, se han propuesto enfoques basados en modelos estadísticos y dinámicos que permiten representar las señales mioeléctricas de manera más precisa y robusta.

El objetivo del **modelado de señales mioeléctricas** no se limita únicamente a mejorar la detección y clasificación de patrones musculares, sino que también busca optimizar el procesamiento de señales para aplicaciones en tiempo real. En este contexto, la combinación de técnicas avanzadas de procesamiento de señales con modelos matemáticos y algoritmos de aprendizaje automático ha demostrado ser altamente eficaz para capturar las complejas características no lineales presentes en las señales mioeléctricas, [2].

En este marco, la presente tesis se enfoca en el desarrollo de un modelo matemático utilizando la técnica de mínimos cuadrados recursivos, con el propósito de identificar un modelo a partir de una señal real adquirida, y su aplicación en el control de sistemas mecatrónicos.

1.1.2. Motivación

El **modelado de señales mioeléctricas** se ha consolidado como un área clave dentro de la ingeniería biomédica, debido a su potencial para mejorar la calidad de vida de personas con discapacidad motora. Estas señales, generadas por la actividad eléctrica de los músculos, permiten interpretar los movimientos musculares de manera no invasiva, lo que ha posibilitado el desarrollo de prótesis controladas mediante señales neuromusculares e interfaces hombre-máquina.

No obstante, la elevada variabilidad de las señales mioeléctricas, influenciada por factores como la fatiga muscular, el ruido electromagnético y las diferencias anatómicas entre individuos, representa un desafío importante para alcanzar un modelado preciso y confiable.

El perfeccionamiento en el modelado de señales mioeléctricas no solo permitiría incrementar la precisión de dispositivos de asistencia y prótesis, sino también optimizar sistemas de rehabilitación y diseñar interfaces más intuitivas para el control de dispositivos electrónicos. Además, el análisis detallado de estas señales ofrece una comprensión más profunda de los procesos neuromusculares, con implicaciones potenciales en el diagnóstico y tratamiento de trastornos musculares y neurológicos, [3].

A pesar de los avances alcanzados en el procesamiento de señales y en la implementación de algoritmos de aprendizaje automático, los modelos actuales todavía presentan limitaciones en cuanto a precisión y capacidad de generalización, [4].

Esta situación pone de manifiesto la necesidad de explorar nuevas técnicas de modelado capaces de capturar las complejas características no lineales inherentes a las señales mioeléctricas. En este contexto, el uso de **métodos de identificación paramétrica**, como la técnica de **mínimos cuadrados recursivos**, se perfila como una alternativa prometedora para mejorar la representación y el análisis de estas señales.

La presente investigación busca aportar al desarrollo de modelos matemáticos robustos mediante técnicas de identificación paramétrica, con el fin de generar una representación confiable de una señal mioeléctrica adquirida en condiciones reales.

1.1.3. Objetivo general y específicos

Esta sección presenta el propósito central de la investigación, así como los objetivos específicos que estructuran y delimitan las acciones que se llevarán a cabo para alcanzarlo. El objetivo general establece la meta principal del estudio, mientras que los objetivos particulares desglosan las etapas clave que permitirán cumplirlo de manera sistemática y coherente.

1.1.3.1. Objetivo general

Desarrollar un modelo matemático que caracterice el comportamiento de la señal mioeléctrica (**EMG**) del antebrazo, con el propósito de implementarlo en aplicaciones de robótica y control.

1.1.3.2. Objetivos particulares

- Diseñar e implementar un sistema de adquisición e instrumentación para señales mioeléctricas **EMG**.
- Desarrollar un modelo matemático de la señal **EMG** utilizando técnicas de identificación paramétrica basadas en mínimos cuadrados recursivos.
- Aplicar el modelo obtenido en dos escenarios: como sensor de rigidez del antebrazo y como señal de activación para el control de un servomecanismo.

1.1.4. Hipótesis

La técnica de identificación paramétrica mediante el **algoritmo de mínimos cuadrados recursivos (RLS)** mejora significativamente la precisión y estabilidad del modelado de señales **electromiográficas (EMG)** frente a variabilidad fisiológica y condiciones de ruido, superando el desempeño de los métodos tradicionales de modelado.

1.1.5. Alcances

Esta subsección delimita los objetivos específicos que guían el desarrollo y validación del modelo propuesto. Se detallan las acciones clave que se llevarán a cabo para garantizar la aplicabilidad del enfoque de identificación paramétrica basado en mínimos cuadrados recursivos sobre señales electromiográficas (**EMG**) en condiciones reales.

- **Desarrollo del modelo:** Implementación de un modelo basado en identificación paramétrica utilizando mínimos cuadrados recursivos, orientado al análisis de señales **EMG** en condiciones reales.
- **Validación experimental:** Evaluación del modelo utilizando registros **EMG** obtenidos bajo diversas condiciones fisiológicas, considerando la presencia de ruido e inestabilidad de la señal.
- **Evaluación del desempeño:** Análisis cuantitativo del error de estimación, robustez frente al ruido y capacidad de adaptación en tiempo real, comparando el modelo propuesto con metodologías tradicionales.

1.2. Fundamentos teóricos

Esta sección reúne los conocimientos teóricos esenciales que sustentan el desarrollo del trabajo. Se abordan los principios fisiológicos, bioeléctricos y computacionales necesarios para entender la naturaleza de la señal electromiográfica (EMG), así como los modelos y herramientas matemáticas empleados para su análisis. Cada subsección aporta una base sólida para comprender la metodología implementada en los capítulos posteriores.

1.2.1. Electromiografía: principios básicos

Para comprender de forma integral el proceso de modelado de señales mioeléctricas, es fundamental revisar algunos conceptos fisiológicos y técnicos relacionados con el origen y la caracterización de estas señales. En particular, se debe estudiar el funcionamiento del sistema neuromuscular, las unidades motoras y los potenciales eléctricos que surgen durante la contracción muscular. Este apartado ofrece un panorama general sobre los fundamentos de la electromiografía y las propiedades de la señal mioeléctrica, los cuales constituyen la base para los métodos de adquisición y modelado desarrollados posteriormente.

1.2.1.1. Electromiografía

La **electromiografía (EMG, por sus siglas en inglés de electromyography)** es el estudio de las señales eléctricas generadas por los músculos durante la contracción de las fibras musculares. Para comprender su funcionamiento, es esencial conocer la fisiología que da origen a dichas señales. Las activaciones musculares están controladas por señales neuronales que se originan en el sistema nervioso central (cerebro y médula espinal) y se transmiten al sistema nervioso periférico, compuesto por fibras nerviosas que conectan el sistema nervioso central con los órganos y músculos. Estas señales viajan a través de las neuronas motoras, que reclutan diversas fibras musculares para inducir la contracción.

La **señal electromiográfica** se origina a partir de la actividad eléctrica generada por las **unidades motoras**, conformadas por una **neurona motora** y el conjunto de **fibras musculares** a las que envía impulsos eléctricos mediante su **axón** y sus ramificaciones terminales, [3,5].

La **unidad motora (MU, por sus siglas en inglés de motor unit)** representa la unidad funcional más pequeña del control muscular. Está compuesta por una neurona motora, su unión neuromuscular y todas las fibras musculares que esta inerva¹, pudiendo abarcar desde unas pocas hasta varios miles de fibras musculares, [5].

El **potencial de acción de la fibra muscular**, también denominado **potencial de acción motora (MAP, por sus siglas en inglés de motor action potential)**, es la señal eléctrica que resulta de la propagación bidireccional de la despolarización a lo largo de una fibra muscular desde la placa motora terminal. La detección individual de estos potenciales, sin técnicas de registro especializadas, no es factible en condiciones convencionales, [5].

¹Inervar: tr. Anat. Proveer de nervios a un órgano o parte del cuerpo.

El **potencial de acción de la unidad motora (MUAP, por sus siglas en inglés de motor unit action potential)** corresponde a la suma espacio-temporal de los potenciales de acción de las fibras musculares activadas por una unidad motora dentro del campo de detección de un electrodo.

La forma del **potencial de acción de la unidad motora (MUAP)** depende de múltiples factores: el tipo y posición del electrodo respecto a las fibras activas, las propiedades electroquímicas del músculo y el tejido circundante, así como las características del sistema de adquisición, [5].

El registro de un **potencial de acción de la unidad motora (MUAP)** varía según el tipo de electrodo utilizado. Un **electrodo de superficie** capta una señal distinta a la obtenida con un **electrodo intramuscular**, incluso cuando ambos miden la misma unidad motora.

La forma y amplitud del **potencial de acción de la unidad motora (MUAP)** son características de cada **unidad motora (MU)**, siempre que se mantenga constante la geometría relativa entre el electrodo y la unidad motora. Sin embargo, cuando un **MUAP** está compuesto por menos de cinco **MAP**, su forma puede verse afectada por el **jitter**², una variación en la sincronización de la transmisión sináptica en la unión neuromuscular.

El **tren de potenciales de acción de la unidad motora (MUAPT, por sus siglas en inglés de motor unit action potential train)** es una secuencia de **MUAP** generados de forma repetitiva por una misma unidad motora.

El **intervalo entre pulsos (IPI, por sus siglas en inglés de inter-pulse interval)** varía en función del nivel y duración de la contracción muscular, y puede mostrar irregularidades incluso bajo tensión constante.

La frecuencia de activación de una **unidad motora (MU)** se define como el valor promedio de su frecuencia de disparo durante un periodo de tiempo determinado, y tiende a incrementarse con el aumento de la tensión muscular, [5].

Para realizar estimaciones representativas, se requieren al menos seis **intervalos entre pulsos (IPI)** consecutivos. El fenómeno de sincronización se refiere a la tendencia de distintas unidades motoras a activarse simultáneamente, lo que refleja cierto grado de interdependencia funcional.

La señal mioeléctrica observada en un electromiograma resulta de la suma algebraica de todos los **tren de potenciales de acción de la unidad motora (MUAPT)** generados por las unidades motoras activas dentro del área de captación del electrodo, y debe ser amplificada para su registro e interpretación adecuada, [5].

El número de fibras musculares por unidad motora varía según la función y el tamaño del músculo correspondiente. Músculos grandes o responsables de movimientos potentes suelen presentar unidades motoras con un mayor número de fibras musculares.

²**Jitter:** término que designa la variabilidad temporal en la conducción del impulso nervioso a través de la unión neuromuscular. Esta variación provoca fluctuaciones en la sincronización de los potenciales de acción de las fibras musculares, reflejando una falta de constancia en el tiempo de transmisión entre estímulos consecutivos.

La Figura 1.1 ilustra de manera esquemática estos conceptos fundamentales.

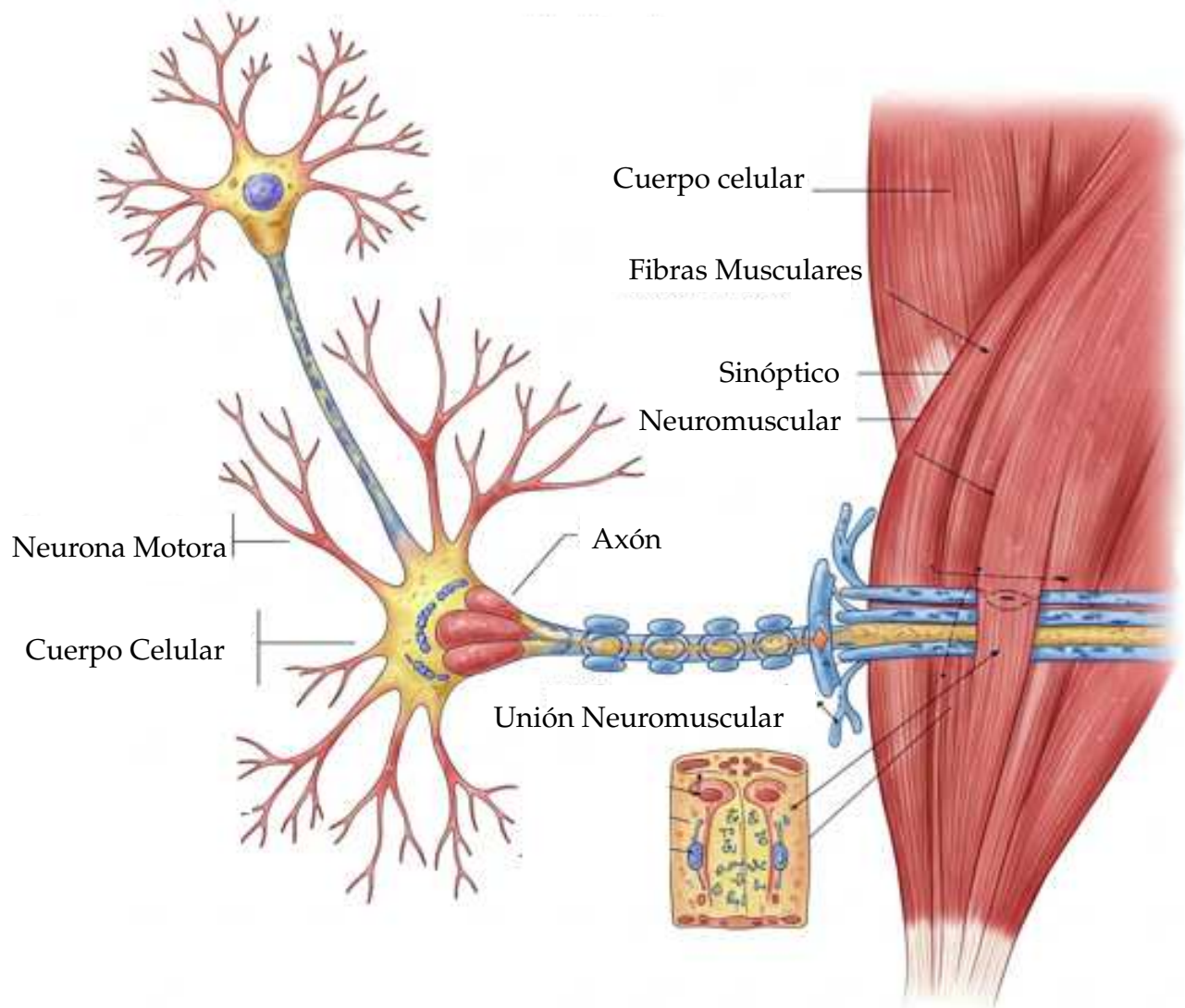


Figura 1.1: Relación entre el sistema nervioso central, periférico y el músculo.

El sistema nervioso regula los diferentes niveles de contracción muscular mediante dos mecanismos principales: el ajuste en el número de unidades motoras reclutadas y la modulación de la frecuencia de disparo de cada unidad motora, es decir, la frecuencia con la que se generan los potenciales de acción que las activan. El proceso de reclutamiento sigue un patrón ordenado basado en el tamaño de las unidades motoras, iniciando con aquellas que presentan menor resistencia a la fatiga y progresando hacia unidades de mayor resistencia conforme se incrementa la tensión muscular, [6].

Cada impulso generado por una unidad motora se conoce como **potencial de acción**, y la sucesión de estos impulsos constituye un **MUAPT**, [7]. En este contexto, una señal **EMG** representa la suma algebraica de todos los **MUAPT** generados por las unidades motoras activas, acompañada por una componente de ruido proveniente tanto de los dispositivos de adquisición como de factores fisiológicos y ambientales, los cuales se abordarán en el transcurso del capítulo. La Figura 1.2 ilustra gráficamente la composición típica de una señal EMG, [8].

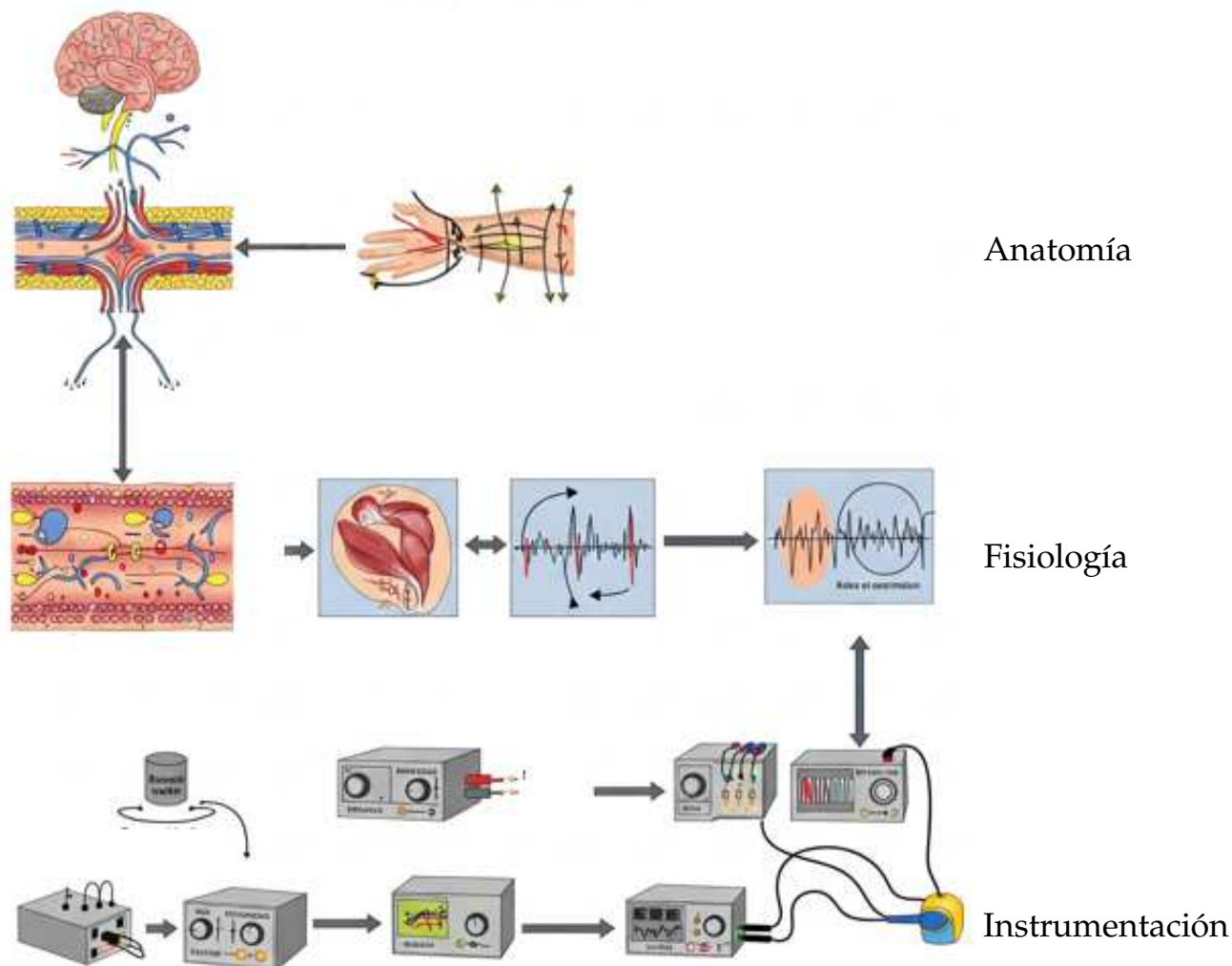


Figura 1.2: Composición de la señal EMG.

La electromiografía (**EMG**) puede registrarse mediante diferentes métodos, en función del tipo de electrodo utilizado. De manera general, las técnicas de registro se clasifican en dos categorías principales: **EMG superficial** y **EMG intramuscular**, [9].

- EMG superficial.** Es una técnica no invasiva que emplea electrodos colocados sobre la piel para detectar la actividad eléctrica generada por las unidades motoras subyacentes. No obstante, la precisión de la señal puede verse comprometida por factores fisiológicos, anatómicos y bioquímicos, tales como el número de unidades motoras activas, el tipo de fibras

musculares implicadas y las características individuales del sujeto. Asimismo, influyen en la calidad del registro el tipo de electrodos empleados, la tecnología de procesamiento de señales utilizada y la correcta colocación de los sensores. Su principal ventaja radica en que no requiere procedimientos invasivos, lo que la hace adecuada para aplicaciones clínicas y de monitoreo en tiempo real.

- EMG intramuscular.** Esta técnica se basa en el uso de electrodos de aguja o interfasciculares que se insertan directamente en el tejido muscular. Permite obtener señales más específicas, con mayor relación señal/ruido y una mejor discriminación de la actividad de unidades motoras individuales. Sin embargo, su principal limitación es su carácter invasivo, ya que requiere la inserción directa de los electrodos en el músculo, lo cual puede generar molestias al paciente y requiere condiciones más controladas para su aplicación.

La Figura 1.3 muestra una comparación entre las señales obtenidas mediante **EMG intramuscular** (izquierda) y **EMG superficial** (derecha), evidenciando sus diferencias en términos de resolución y especificidad, [9].

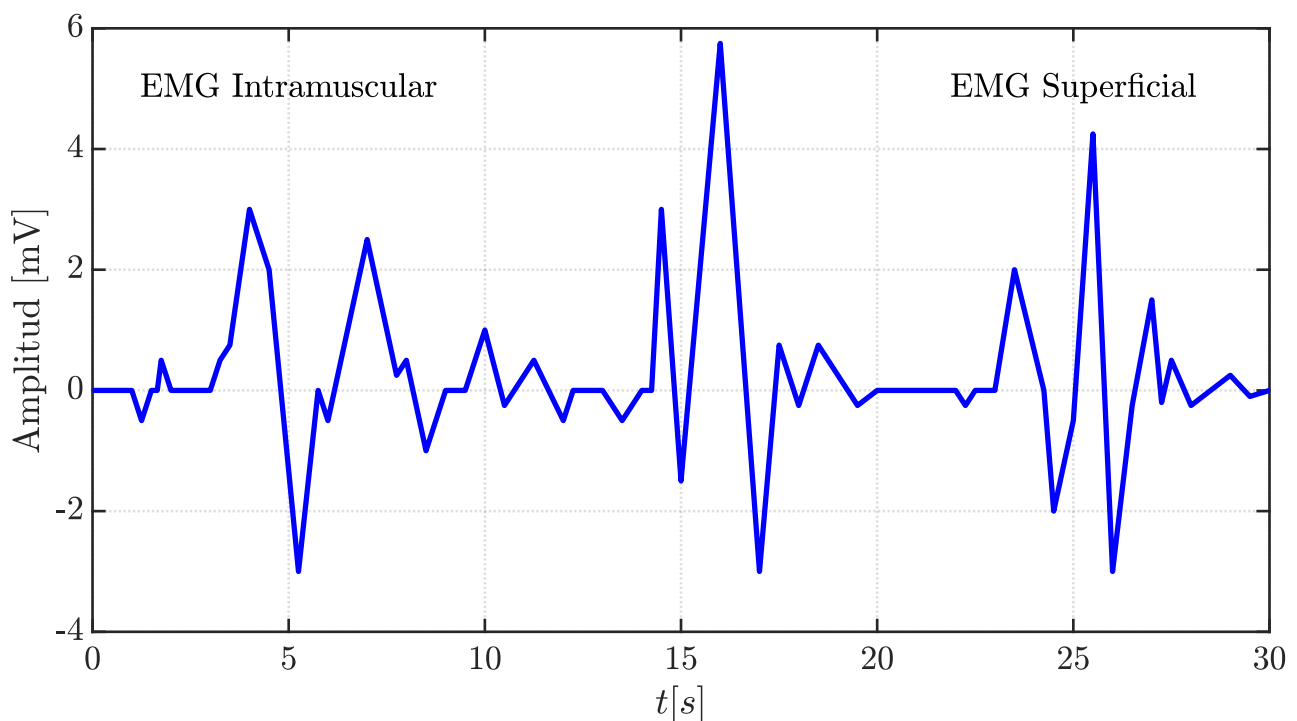


Figura 1.3: Ejemplo de una señal **EMG intramuscular** y **EMG superficial**.

Para mantener una contracción muscular sostenida, las unidades motoras deben activarse de forma repetitiva. La sucesión de potenciales de acción generados por cada unidad conforma un tren de potenciales de acción (**MUAPT**).

La forma de onda de los **MUAP** dentro de un tren permanece constante siempre que se mantenga inalterada la relación geométrica entre el electrodo y las fibras musculares activas, no haya cambios en las propiedades del electrodo, y las condiciones bioquímicas del músculo no afecten la velocidad de conducción ni las características de filtrado de las fibras musculares.

Las fibras musculares de una unidad motora se distribuyen de manera aleatoria dentro del músculo, entremezclándose con fibras de otras unidades. La evidencia anatómica indica que cualquier sección del músculo puede contener fibras pertenecientes a más de 20 unidades motoras, pudiendo alcanzar hasta 50 unidades motoras, [8].

Un único **MUAPT** puede observarse cuando solo las fibras de una unidad motora específica están activas en la proximidad del electrodo, lo que ocurre únicamente durante contracciones musculares de muy baja intensidad. A medida que aumenta la fuerza de contracción, se activan más unidades motoras cercanas, provocando la detección simultánea de múltiples trenes. Este fenómeno se presenta incluso cuando se emplean electrodos altamente selectivos capaces de registrar potenciales individuales de fibras musculares.

La superposición de estos potenciales se manifiesta como una señal bipolar con componentes positivas y negativas distribuidas simétricamente, cuyo valor medio es igual a cero. En resumen, la señal **EMG** registrada en un músculo es el resultado de la suma de los trenes generados por las unidades motoras activas dentro del área de captación del electrodo, como se muestra en la Figura 1.4.

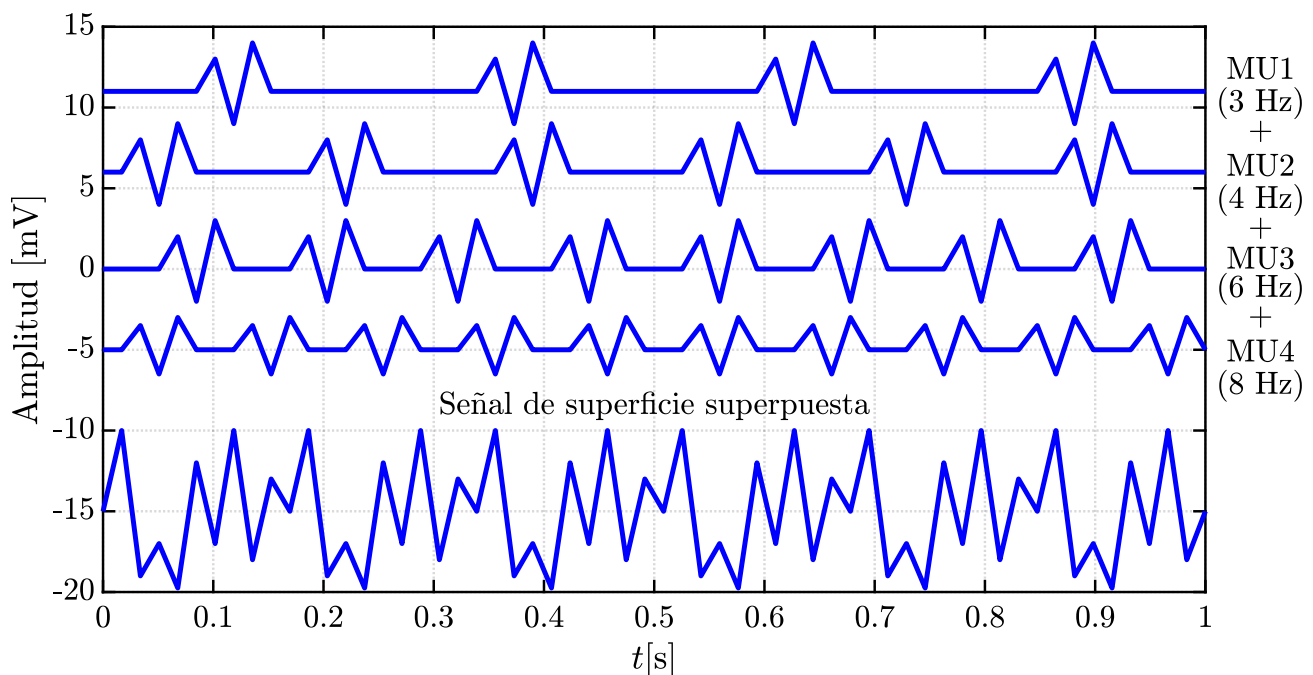


Figura 1.4: Superposición de **MUAPs** para generar una señal **EMG**.

Una vez comprendido el origen fisiológico de la señal **EMG**, resulta fundamental distinguir los tipos de información que esta contiene. En términos generales, dicha señal integra dos componentes principales:

1. **Impulsos sinápticos**, los cuales son transmitidos hacia las neuronas motoras y determinan el patrón de activación muscular.
2. **Propiedades eléctricas de las fibras musculares**, que reflejan la respuesta del músculo ante la estimulación nerviosa.

Estos elementos se encuentran representados matemáticamente en la ecuación (1.1), la cual modela una señal **EMG** superficial como suma de potenciales de acción generados por unidades motoras activas, [10]:

$$S(t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varphi_i(t) \delta(t - t_{ij}) \quad (1.1)$$

donde $S(t) \in \mathbb{R}$ representa la señal **EMG** registrada, M es el número total de unidades motoras activas, $\delta(t - t_{ij})$ es la función delta que indica el instante t_{ij} en que la unidad motora i genera un potencial de acción, y $\varphi_i(t)$ es la forma de onda del potencial de acción correspondiente a la unidad motora i . Este modelo, que por simplicidad no considera ruido, asume que los tiempos de descarga están determinados por la llegada de impulsos sinápticos provenientes del sistema nervioso central.

Desde la perspectiva del procesamiento de señales, la señal **EMG** puede caracterizarse como un proceso estocástico no estacionario con espectro coloreado. Esta señal presenta una componente aleatoria, ancho de banda limitado y su amplitud puede expresarse como su desviación estándar, la cual representa la raíz cuadrada de su potencia instantánea.

Bajo el supuesto de que los potenciales de acción generados por distintas unidades motoras no están correlacionados entre sí, la amplitud de la señal **EMG**, expresada en términos de su desviación estándar, se puede calcular mediante la ecuación (1.2), [10]:

$$\sigma_{\text{EMG}} = \sqrt{\sum_{i=1}^M DR_i E_i} \quad (1.2)$$

donde DR_i representa la tasa media de descarga de la i -ésima unidad motora y E_i corresponde a la energía asociada al potencial de acción de dicha unidad. En este modelo, DR_i refleja la influencia de la conducción nerviosa sobre la activación muscular, mientras que E_i representa la contribución morfológica de los potenciales de acción a la señal total.

A partir de esta formulación, se pueden distinguir dos interpretaciones complementarias respecto a la amplitud de la señal **EMG**, [10]:

1. La amplitud se incrementa con el aumento en la tasa de descarga o en el número de unidades motoras activas, como reflejo de un mayor nivel de activación neuronal.
2. La amplitud depende tanto de la conducción nerviosa como de las propiedades de los potenciales de acción, sin posibilidad de discriminar directamente entre ambas contribuciones.

1.2.2. Características y factores que afectan la señal EMG

Las señales electromiográficas presentan propiedades particulares que dependen tanto de condiciones fisiológicas como del entorno de adquisición. Comprender estas características permite interpretar correctamente la información contenida en la señal y anticipar los desafíos que implica su análisis. Esta subsección detalla las propiedades fundamentales de las señales **EMG** y los factores que influyen en su calidad y variabilidad.

1.2.2.1. Características de la señal EMG

Las propiedades de las señales **EMG superficiales** están influenciadas por diversos factores fisiológicos y experimentales, tales como el nivel y la duración de la contracción muscular, el estado dinámico o estático del músculo, la presencia de fatiga y las condiciones de la piel, como la humedad superficial, [11]. De manera general, una señal **EMG superficial** presenta las siguientes características distintivas, [12]:

- Su valor instantáneo se comporta como una señal aleatoria, cuya distribución de probabilidad es aproximadamente gaussiana, con un rango típico de amplitud entre 10 y 500 μVrms .
- El contenido espectral de la señal se concentra principalmente entre 10 y 400 Hz, siendo la frecuencia de mayor energía dentro del espectro de potencia usualmente ubicada entre 70 y 130 Hz.
- La frecuencia media se sitúa típicamente en el intervalo de 50 a 100 Hz, aunque puede variar en función del tipo de músculo y el nivel de contracción.
- Cuando los electrodos se colocan adecuadamente, es decir, alineados con la orientación de las fibras musculares, es posible estimar la velocidad de propagación de la señal a través del cálculo del retraso entre señales registradas en diferentes puntos, lo que permite obtener una estimación de la velocidad de conducción de las fibras musculares.

1.2.2.2. Influencias que alteran a las señales EMG

Las señales **EMG superficiales** pueden ofrecer información de gran valor diagnóstico y funcional; sin embargo, están sujetas a la influencia de diversos factores ajenos al control voluntario del sujeto o al fenómeno fisiológico que se desea analizar. Comprender estos factores es esencial para maximizar la calidad de la señal adquirida y la validez de la información extraída.

Algunos de estos elementos dependen de las condiciones fisiológicas del músculo, mientras que otros se relacionan con el sistema de detección, la anatomía individual o las condiciones experimentales. Si bien ciertos efectos pueden minimizarse mediante una adecuada colocación de los electrodos y el uso de técnicas de adquisición apropiadas, otros deben ser considerados como variables inherentes al entorno de medición. A continuación se presenta una clasificación de los principales factores que influyen sobre las señales **EMG superficiales**, agrupados en categorías fisiológicas y no fisiológicas, respectivamente, [13].

■ Factores Fisiológicos

• Propiedades de las Membranas de las fibras

- Velocidad de conducción media de las fibras musculares
- Distribución de velocidades de conducción asociadas a las **MU**
- Relación entre la velocidad de conducción y la localización de las fibras dentro de las **MU**
- Forma del potencial de acción intracelular

• Propiedades de la unidad motora

- Número de **MU** reclutadas
- Distribución de tasas de descarga de las **MU**
- Estadística y coeficiente de variación de la tasa de descarga
- Sincronización entre diferentes unidades motoras

■ Factores No Fisiológicos

• Anatómicos

- Forma del volumen conductor
- Espesor del tejido subcutáneo
- Inhomogeneidad en el tejido biológico
- Distribución de las unidades motoras dentro del músculo
- Tamaño de los territorios de las **MU**
- Número y distribución de fibras en cada **MU**
- Longitud de las fibras musculares
- Variabilidad en las uniones tendinosas de las **MU**
- Dispersión de zonas de inervación sobre las **MU**
- Presencia de múltiples ángulos de inserción de las fibras

• Sistema de detección

- Contacto electrodo–piel (impedancia, ruido)
- Filtrado espacial durante la adquisición
- Distancia interelectrodos
- Forma y tamaño de los electrodos

- Orientación de los electrodos respecto a las fibras musculares
- Ubicación de los electrodos en el vientre muscular

- **Geométricos**
 - Acortamiento de las fibras musculares durante la contracción
 - Desplazamiento del músculo respecto a la zona de detección

- **Físicos**
 - Conductividad del tejido biológico
 - Nivel de diafonía (también conocida como **crosstalk** en inglés) proveniente de músculos adyacentes.

La **diafonía**, también conocida como **interferencia muscular** o **crosstalk**, es un factor no fisiológico que afecta de forma significativa la calidad de las señales electromiográficas (**EMG**). Este fenómeno ocurre cuando los electrodos registran actividad eléctrica generada por músculos adyacentes al que se desea analizar, debido a la propagación del potencial eléctrico a través del volumen conductor compartido. Aunque algunos estudios han propuesto el uso de filtros de paso alto para mitigar la diafonía, basándose en la premisa de que la señal proveniente de músculos lejanos presenta un contenido espectral reducido, investigaciones posteriores han desmentido dicha hipótesis. Se ha demostrado que estos filtros no producen una reducción efectiva de la diafonía, ya que la señal no propagante responsable del fenómeno puede contener componentes de alta frecuencia incluso superiores a los de la señal propagante, [13].

De igual forma, la técnica basada en coeficientes de correlación cruzada, originalmente propuesta en, [14] como método para estimar y reducir la diafonía, ha sido objeto de revisión crítica. Estudios posteriores han evidenciado que no existe una relación directa entre dichos coeficientes y el nivel real de diafonía, lo cual cuestiona su validez como herramienta de detección fiable, [13].

A partir de estudios experimentales y simulaciones recientes, en, [13] se ha establecido una serie de conclusiones clave respecto al fenómeno de la diafonía:

1. Las señales registradas a cierta distancia del sitio de origen provienen principalmente del decaimiento de los potenciales de acción en los extremos de las fibras musculares.
2. La diferencia entre señales propagantes y no propagantes invalida el uso del coeficiente de correlación cruzada como medida de la diafonía.
3. El análisis espectral de la señal **EMG** no permite inferir la presencia de diafonía.
4. Los filtros de paso alto aplicados sobre señales **EMG** superficiales no reducen de forma significativa la diafonía.
5. El uso de electrodos intramusculares elimina por completo la diafonía debido a su alta selectividad y precisión en la detección.

1.2.2.3. Electrodo

Un electrodo superficial utilizado en electromiografía (**EMG**) puede definirse como un sensor diseñado para detectar la actividad eléctrica generada por la contracción muscular, o bien, como un transductor que convierte la corriente iónica que fluye a través del tejido muscular en una señal eléctrica. Esta señal es posteriormente transmitida mediante conductores metálicos hacia el sistema de adquisición, [15]. Este tipo de sensor presenta características específicas que dependen de factores como sus dimensiones físicas, la tecnología de fabricación y los materiales empleados en su construcción.

La clasificación de los electrodos superficiales para **EMG**, en función de los materiales y tecnologías utilizados, da lugar a una amplia gama de configuraciones. Entre ellas, destacan los **electrodos secos**, que incluyen variantes como los de tipo pin o bola. Este tipo de electrodos se fabrica generalmente con metales nobles, como el oro, el platino o la plata, debido a su alta conductividad eléctrica y biocompatibilidad. La Figura 1.5 muestra un electrodo seco.



Figura 1.5: Electrodo seco.

Los **electrodos húmedos** se distinguen por incorporar una capa de gel conductivo, hidrogel o una esponja impregnada en solución electrolítica, cuya función principal es establecer una interfaz efectiva entre la piel del sujeto y la superficie metálica del electrodo. Generalmente son dispositivos autoadhesivos, lo que los convierte en una alternativa adecuada para la adquisición de señales electromiográficas (**EMG**) en condiciones dinámicas, es decir, durante el movimiento del sujeto. Es frecuente el uso de electrodos fabricados con plata-cloruro de plata (Ag/AgCl), debido a su alta estabilidad electroquímica y su capacidad para reducir tanto la impedancia como el ruido eléctrico.

La Figura 1.6 muestra un ejemplo representativo de un electrodo húmedo.

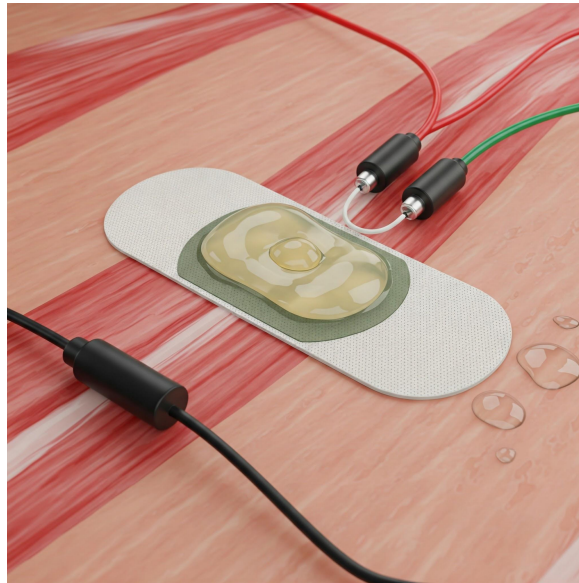


Figura 1.6: Electrodo húmedo.

1.2.2.4. Colocación adecuada de un electrodo superficial

Como se ha señalado en apartados anteriores, la señal electromiográfica (EMG) está sujeta a múltiples factores que pueden alterar su calidad. Sin embargo, muchos de estos efectos pueden ser atenuados o incluso eliminados mediante una colocación adecuada de los electrodos superficiales. A partir de 1996, se impulsó un proceso de estandarización en diversas áreas relacionadas con la electromiografía, lo que dio lugar a recomendaciones técnicas ampliamente aceptadas para la selección y posicionamiento de sensores, así como para el procesamiento de señales EMG, [6].

De acuerdo con las directrices propuestas por De Luca, [16], la ubicación óptima de los electrodos superficiales debe cumplir los siguientes criterios: el electrodo debe colocarse entre un punto motor y la inserción tendinosa, o bien, entre dos puntos motores, siguiendo la línea media del músculo. Es fundamental evitar posicionar el electrodo sobre el tendón, ya que en esa región disminuyen tanto la densidad como el tamaño de las fibras musculares, lo que complica la colocación física del sensor y eleva el riesgo de diafonía debido a la proximidad de músculos antagonistas.

Asimismo, no se recomienda ubicar el electrodo directamente sobre el punto motor, dado que esta zona presenta una elevada sensibilidad a la activación muscular, lo que puede generar señales inestables. También debe evitarse extender el electrodo más allá de los límites anatómicos del músculo, ya que ello incrementa la probabilidad de captar señales de músculos adyacentes. Respecto al electrodo de referencia (o electrodo de tierra), cuya función es proporcionar un punto de referencia para el preamplificador, se sugiere colocarlo lo más alejado posible del área de interés, preferentemente sobre tejido neutro, como una prominencia ósea o el codo, con el fin de reducir la captación de ruido.

1.2.2.5. Estándares y normativas en señales EMG

La electromiografía ha experimentado un crecimiento significativo en cuanto a sus aplicaciones y ámbitos de utilización, abarcando disciplinas como la neurología, la rehabilitación, el deporte, la ortopedia, la ergonomía, entre otras. A lo largo de su desarrollo, distintos grupos de investigación han contribuido con avances relevantes, empleando metodologías heterogéneas. Esta diversidad metodológica generó la necesidad de establecer directrices claras y uniformes que permitieran la comparación y reproducibilidad de resultados.

La amplitud y el ancho de banda de la señal **EMG** no están determinados únicamente por factores electrofisiológicos y la distancia entre los electrodos, sino también por el tipo, tamaño y espaciado de los mismos. Este último aspecto define el volumen de tejido captado, siendo las separaciones más reducidas las que posibilitan registros más selectivos. Asimismo, la orientación de los electrodos con respecto al eje de las fibras musculares resulta crítica para preservar la fidelidad de la señal registrada, [17].

Con el propósito de estandarizar estos aspectos y promover buenas prácticas en electromiografía de superficie, se desarrolló el proyecto **SENIAM (Surface Electromyography for the Non-Invasive Assessment of Muscles)**, una iniciativa europea enmarcada en el programa de investigación biomédica **BIOMED II**, impulsado por la Unión Europea, [18].

Los objetivos fundamentales del proyecto **SENIAM** son:

- Establecer elementos clave que favorezcan el intercambio eficaz de datos y experiencias clínicas entre distintos centros de investigación y aplicación.
- Integrar la investigación básica y aplicada en electromiografía de superficie a nivel europeo, fomentando la colaboración científica entre naciones.

SENIAM proporciona un conjunto de recomendaciones técnicas sobre sensores, procedimientos de localización de electrodos, métodos de procesamiento de señales **sEMG**, así como modelos de simulación con fines educativos y de validación, señales de prueba estandarizadas, literatura especializada y una red europea de expertos: el **Club SENIAM**. Aunque su alcance original fue regional, sus directrices han sido adoptadas internacionalmente en contextos clínicos e ingenieriles, si bien es importante destacar que no constituyen un estándar oficial de carácter global, [18].

1.2.3. Modelado matemático de señales EMG

A fin de comprender con mayor profundidad las características fisiológicas, bioeléctricas y computacionales de la señal electromiográfica (**EMG**), es indispensable contar con modelos matemáticos y biofísicos que representen con fidelidad el proceso de generación, propagación y captación de dicha señal. Estos modelos permiten, entre otras aplicaciones, optimizar el diseño de sistemas de adquisición, validar algoritmos de procesamiento, explorar parámetros difíciles de medir experimentalmente y generar bases de datos sintéticas para entrenamiento y evaluación de sistemas de inteligencia artificial. En esta sección se abordan los principales enfoques modelado, comenzando con el modelo generativo de la **EMG** de superficie.

1.2.3.1. Modelo generativo de EMG de superficie

Los métodos contemporáneos de simulación de señales electromiográficas (**EMG**) de superficie se encuentran estrechamente alineados con los avances en neurociencia y biofísica aplicados al estudio del sistema motor y musculoesquelético periférico. La unidad motora (**MU**), compuesta por una única neurona motora y el conjunto de fibras musculares que esta inerva, constituye la unidad funcional más elemental del sistema motor, [19].

Cuando las neuronas motoras reciben impulsos sinápticos, estos se manifiestan como trenes de picos que desencadenan potenciales de acción en las placas terminales de las fibras musculares, ubicadas en la zona de inervación (**IZ**). Estos potenciales se propagan bidireccionalmente a lo largo de cada fibra muscular, [13].

La suma temporal y espacial de los potenciales de acción generados por todas las fibras pertenecientes a una misma **MU** da lugar a una señal compuesta conocida como **MUAP**. Esta señal se transmite a través de los tejidos circundantes, considerados como un conductor de volumen, hasta alcanzar los electrodos de detección. La señal **EMG** de superficie, en consecuencia, representa la superposición de todos los **MUAP** originados por las **MU** activas, junto con el ruido ambiental inherente al sistema de adquisición.

Bajo la suposición de contracciones isométricas, la señal **EMG** puede modelarse matemáticamente mediante un modelo de mezcla convolucional. En este marco, se considera un vector de fuentes $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, correspondiente a los trenes de picos generados por las **MU**, y un vector de observación $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, que representa la señal registrada en los m electrodos en el instante t . Estas observaciones resultan de la convolución de las fuentes con un conjunto de filtros de respuesta al impulso finita $\mathbf{H}(l) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, de soporte temporal $L \in \mathbb{R}$, como se expresa en la ecuación 1.3, [20]:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{H}(l)\mathbf{s}(t-l) + \mathbf{z}(t) \quad (1.3)$$

En esta expresión, el término $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ representa el vector de ruido aditivo registrado en el tiempo t . En condiciones de contracción dinámica, es decir, cuando la configuración geométrica del conductor de volumen cambia en el tiempo, la matriz $\mathbf{H}(l)$ varía a lo largo del soporte temporal L . Sin embargo, si estos cambios geométricos ocurren a una tasa inferior a la duración L , puede asumirse que la configuración inicial del conductor de volumen se mantiene constante durante la duración completa del **MUAP**. Esta hipótesis, ampliamente aceptada, permite una simplificación del modelo de convolución.

En este contexto, el filtro $\mathbf{H}(l)$ puede reemplazarse por una plantilla tridimensional del **MUAP**, de soporte temporal $T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y soporte espacial $H \times W$. Esta plantilla se somete a una convolución temporal con la secuencia de picos \mathbf{s} , generando así la señal electromiográfica **EMG** simulada con alta fidelidad bioeléctrica y espacial.

1.2.4. Método por elemento finito

Los potenciales extracelulares generados por las fibras musculares y registrados mediante electrodos de electromiografía (EMG) se originan a partir de las corrientes transmembrana. Las propiedades de estas corrientes bioeléctricas, así como la distribución espacial del potencial eléctrico inducido, pueden determinarse resolviendo las ecuaciones de Maxwell, considerando las propiedades eléctricas inherentes a los tejidos biológicos. Dado que las frecuencias involucradas en los procesos fisiológicos musculares son relativamente bajas, resulta válido adoptar el supuesto cuasiestático [21], lo que permite simplificar el problema a una formulación basada en la ecuación de Poisson, sujeta a condiciones de contorno de tipo Neumann [13, 21, 22]:

$$\nabla (\sigma \nabla \phi) = -I(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial \Omega \quad (1.5)$$

En estas expresiones, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ representa el dominio conductor de volumen de interés, mientras que $\partial \Omega$ denota su frontera. El vector unitario \mathbf{n} apunta hacia el exterior del dominio. La función $\phi(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}$ [V] describe el potencial eléctrico en la posición \mathbf{r} , $I(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}$ [A/m³] representa la **densidad de corriente de fuente (CSD, por sus siglas en inglés)**, y $\sigma(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ [S/m] es el tensor de conductividad del tejido.

La condición de contorno expresada en la ecuación (1.5) impone que no exista flujo de corriente a través de los límites del dominio, lo cual, en el contexto de la señal EMG, equivale a asumir que no se produce intercambio de corriente entre la superficie cutánea y el entorno. La densidad de fuente de corriente $I(\mathbf{r})$ cuantifica el flujo de corriente que entra o sale del medio extracelular en la ubicación $\mathbf{r} \in \Omega$. En esta formulación, una CSD negativa indica una corriente que fluye hacia fuera del medio extracelular, resultado de la actividad transmembrana de la fibra muscular, y se denomina **sumidero**. Por el contrario, cuando la corriente ingresa al medio extracelular, se considera una **fuentes** [23].

Las ecuaciones (1.4) y (1.5) no admiten soluciones analíticas en geometrías arbitrarias de medios conductores tridimensionales, por lo que es necesario recurrir a métodos numéricos para obtener aproximaciones. En este contexto, se emplea el **método de elementos finitos** (por sus siglas en inglés, FEM) [24], el cual permite discretizar el dominio conductor Ω mediante una malla tetraédrica designada como Ω_t .

Una vez definida esta malla, se utiliza el **método de Galerkin** para proyectar el potencial eléctrico ϕ en un espacio de funciones base lineales por partes, definidas sobre los elementos tetraédricos de Ω_t . Esta discretización transforma el problema continuo, definido por las ecuaciones (1.4) y (1.5), en un sistema algebraico de ecuaciones lineales de la forma:

$$A\mathbf{v} = \mathbf{b} \quad (1.6)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$ es una matriz simétrica y dispersa, con n_v vértices en la malla; $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_v}$ representa el vector de potenciales eléctricos en los nodos; y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_v}$ contiene la información correspondiente a las fuentes de corriente.

Es importante destacar que el potencial eléctrico ϕ se define únicamente hasta una constante aditiva, lo cual implica que la matriz A posee un espacio nulo unidimensional. Para garantizar la unicidad de la solución del sistema [1.6](#), se impone la restricción de que la suma de los valores de v sea igual a cero.

En el contexto de la electromiografía (EMG), el objetivo no es determinar el potencial eléctrico en todo el dominio conductor, sino únicamente en las ubicaciones específicas de los electrodos de registro. Para ello, se define una matriz de selección $S \in \mathbb{R}^{n_e \times n_v}$, donde n_e representa el número de electrodos y n_v el número total de vértices de la malla. Esta matriz permite extraer, del vector de potenciales v , únicamente los valores correspondientes a las posiciones de los electrodos.

Cada fila de S puede configurarse para seleccionar un único nodo puntual o para integrar sobre un área determinada (por ejemplo, la interfaz electrodo–piel), dependiendo del número y ubicación de sus elementos no nulos. Sea $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ una fuente puntual localizada en la posición espacial \mathbf{r} . Entonces, el potencial registrado en los electrodos como resultado de esta fuente se expresa como:

$$\mathbf{v}_{\text{punto}}(\mathbf{r}) = S\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}(\mathbf{r}). \quad (1.7)$$

Es importante señalar que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$ es una matriz no singular, lo cual garantiza la existencia de su inversa.

Para profundizar en la estructura de los términos involucrados en la ecuación [1.6](#), sea $\{\omega^i(\mathbf{r}), i = 1, \dots, n_v\}$ un conjunto de funciones base lineales por partes, definidas sobre la malla tetraédrica Ω_t . Cada función ω^i cumple con las siguientes condiciones: toma el valor 1 en el vértice i de la malla, es cero en todos los demás vértices y es lineal en los tetraedros adyacentes al nodo i . Bajo esta formulación, la matriz del sistema A y el vector del lado derecho \mathbf{b} adquieren la siguiente estructura:

$$A_{ij} = \int_{\Omega_t} \sigma(\mathbf{r}) \nabla \omega^i(\mathbf{r}) \cdot \nabla \omega^j(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{b}_i = \int_{\Omega_t} I(\mathbf{r}) \omega^i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (1.9)$$

Es importante notar que la matriz A es simétrica y, en general, de gran tamaño. Sin embargo, su almacenamiento resulta factible debido a su naturaleza dispersa, producto del soporte compacto de las funciones base ω^i . El producto interno entre funciones base solo es diferente de cero cuando estas comparten al menos un tetraedro adyacente. Cabe mencionar que la inversa (o pseudoinversa) de una matriz dispersa no conserva dicha dispersión, lo cual la hace inviable computacionalmente en cuanto a almacenamiento y cálculo directo. Por tal motivo, en la práctica se emplean métodos iterativos para resolver el sistema lineal de la ecuación [1.6](#), evaluando una solución particular para cada vector de fuente \mathbf{b} .

Consideremos el caso en el que la densidad de fuente de corriente se modela como una distribución de Dirac, es decir, $I(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}})$, lo cual representa una fuente de corriente puntual unitaria localizada en la posición $\bar{\mathbf{r}}$. Sin pérdida de generalidad, se asume que dicha fuente se encuentra dentro de un tetraedro definido por los vértices $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ de la malla tetraédrica. En este escenario, el vector del lado derecho del sistema, correspondiente a la fuente puntual, toma la forma:

$$\mathbf{b}_i = \begin{cases} \lambda_j, & \text{si } i \in \{i_1, i_2, i_3, i_4\} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.10)$$

donde $\{\lambda_j\}_{j=1}^4$ representan las coordenadas baricéntricas del punto $\bar{\mathbf{r}}$ dentro del tetraedro considerado. Sustituyendo esta expresión en la ecuación [1.6](#), se obtiene:

$$\mathbf{v}_{\text{punto}}(\mathbf{r}) = \mathbf{S}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}(\mathbf{r}) = \mathbf{S}\mathbf{A}^{-1}\bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\lambda} \quad (1.11)$$

donde $\bar{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n_v \times 4}$ es una matriz cuyos elementos $\bar{\mathbf{B}}_{ij}$ valen 1 si i corresponde a uno de los vértices del tetraedro que contiene a $\bar{\mathbf{r}}$ y j denota el vértice asociado a la coordenada baricéntrica λ_j ; en caso contrario, $\bar{\mathbf{B}}_{ij} = 0$.

Esta formulación indica que la solución del sistema lineal [1.6](#) para una fuente puntual puede expresarse como una combinación lineal de soluciones precomputadas en los vértices del tetraedro que contiene a la fuente. En consecuencia, basta con calcular previamente las soluciones del sistema para fuentes unitarias ubicadas en los vértices de la malla, lo cual permite reconstruir de forma eficiente el potencial para cualquier ubicación interior mediante interpolación baricéntrica.

Sea n_s el número de fuentes base consideradas. En el caso más general, cuando se permite que la fuente se ubique en cualquier punto del dominio, se tiene $n_s = n_v$. Se define entonces $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_v \times n_s}$ como una matriz identidad, y se calcula una matriz de soluciones base:

$$\mathbf{V}_{\text{base}} = \mathbf{S}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (1.12)$$

donde $\mathbf{V}_{\text{base}} \in \mathbb{R}^{n_e \times n_v}$ es una matriz cuyas columnas contienen las soluciones particulares del sistema [1.6](#) para cada una de las fuentes unitarias situadas en los vértices de la malla.

A partir de esta matriz, el potencial resultante para una fuente localizada en una posición arbitraria \mathbf{r} puede obtenerse como:

$$\mathbf{v}_{\text{punto}}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_{\text{base}}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}) \quad (1.13)$$

donde $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^{n_s}$ es un vector que contiene las coordenadas baricéntricas del punto \mathbf{r} respecto al tetraedro correspondiente, con únicamente cuatro entradas distintas de cero.

Es importante señalar que las fuentes de potencial pueden restringirse a subdominios específicos dentro de la malla completa, como es el caso del modelado de señales **EMG**. En tales situaciones, el parámetro n_s representa el número de vértices contenidos en el subdominio muscular de interés, y la matriz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_v \times n_s}$ se define como una submatriz de la matriz identidad, seleccionando únicamente dichos vértices como fuentes base.

Una forma directa de calcular la matriz de soluciones base \mathbf{V}_{base} a partir de la ecuación 1.12 consiste en resolver un sistema lineal de la forma $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ para cada una de las columnas de \mathbf{B} . En consecuencia, se deben resolver n_s sistemas de ecuaciones lineales.

No obstante, cuando se emplean mallas realistas con un número elevado de vértices, incluso la solución de un único sistema puede requerir un tiempo computacional considerable. Por lo tanto, resolver n_s sistemas completos resulta ineficiente e impráctico.

Para superar esta limitación, se propone el uso del **método adjunto**, una estrategia computacional eficiente que permite reducir significativamente el número de soluciones requeridas [25].

Este enfoque solo requiere resolver n_e sistemas de ecuaciones, siendo n_e el número de electrodos, que en el contexto de la **EMG** suele ser considerablemente menor que n_s (es decir, $n_e \ll n_s$).

Para implementar este método, se define la matriz $\mathbf{K} = \mathbf{S}\mathbf{A}^{-1}$, de dimensiones $n_e \times n_v$. Dado que la matriz \mathbf{A} es simétrica y su inversa también lo es, se puede expresar su transpuesta como $\mathbf{K}^T = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}^T$. En consecuencia, se puede obtener \mathbf{K} resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{A}\mathbf{K}^T = \mathbf{S}^T. \quad (1.14)$$

Como $\mathbf{S}^T \in \mathbb{R}^{n_v \times n_e}$ contiene n_e columnas, solo es necesario resolver n_e sistemas lineales para calcular la matriz \mathbf{K} . Finalmente, las soluciones base pueden obtenerse mediante:

$$\mathbf{V}_{\text{base}} = \mathbf{K}\mathbf{B} \quad (1.15)$$

donde $\mathbf{V}_{\text{base}} \in \mathbb{R}^{n_e \times n_s}$ contiene en sus columnas los potenciales eléctricos en las ubicaciones de los electrodos para cada una de las fuentes base contenidas en el subdominio muscular considerado.

1.2.5. Modelos AR–AKF y generadores sintéticos

El modelo autorregresivo (**AR del inglés autoregressive**) se establece como un esquema predictivo que representa una señal mediante una combinación lineal de sus valores pasados. Los coeficientes estimados de este modelo han demostrado ser útiles en la clasificación de **señales electromiográficas de superficie (sEMG)**, [26, 27]. No obstante, la elección del orden del **modelo AR**, habitualmente determinada con base en estudios previos, carece de un procedimiento objetivo que permita validar su adecuación específica para señales **sEMG**.

Con el fin de superar estas limitaciones, se propone una metodología novedosa basada en la eliminación de ruido mediante la integración del **modelo AR** con un filtro de Kalman adaptativo (**AKF**, por sus siglas en inglés de **Adaptive Kalman Filter**). Esta estrategia combina la capacidad del **modelo AR** para representar la dinámica temporal de la señal con la fortaleza del **AKF** para estimar en línea el ruido que varía en el tiempo.

Mediante el uso del **AKF**, es posible realizar una supresión eficiente del ruido presente en las señales **sEMG**, mientras que el **modelo AR** permite reconstruir la señal subyacente afectada por dicho ruido. Este enfoque se distingue por su capacidad de aprendizaje adaptativo, seguimiento dinámico y actualización de parámetros del modelo sin requerir conocimiento estadístico previo ni sobre la señal ni sobre el ruido. Lo anterior favorece un proceso de atenuación de ruido más estable y eficaz.

Desde una perspectiva teórica, esta metodología presenta una aplicabilidad amplia y robusta, siendo extensible a otras señales bioeléctricas con características dinámicas similares a las de la señal electromiográfica.

Sea $x_t \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ la señal electromiográfica (**EMG**) en el instante de muestreo t , y x_{t-n} su valor en un instante previo $t - n$, correspondiente a un componente con comportamiento aleatorio. Para modelar esta señal, puede adoptarse un modelo autorregresivo de orden n (**AR** del inglés **autoregressive**), el cual representa la señal como una combinación lineal de sus n valores anteriores. En el caso de señales **sEMG**, un modelo **AR** de orden n , denotado como **AR**(n), se expresa mediante:

$$x_t = \Phi_1 x_{t-1} + \Phi_2 x_{t-2} + \cdots + \Phi_n x_{t-n} + \epsilon_t \quad (1.16)$$

donde n representa el orden del modelo, $\Phi_i \in \mathbb{R}$ son los coeficientes autorregresivos correspondientes al modelo, y $\epsilon_t \in \mathbb{R}$ es un término de ruido blanco con media cero y varianza $\sigma_\epsilon^2 \in \mathbb{R}$.

La tarea principal en la construcción del modelo autorregresivo de orden n consiste en estimar los parámetros del modelo: el orden n , los coeficientes $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$, y el término de ruido ϵ_t . Estos parámetros están relacionados por las siguientes expresiones:

$$\epsilon_t = x_t - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} - \cdots - \phi_n x_{t-n} \quad (1.17)$$

$$\sigma_\epsilon^2 = \frac{1}{N-n} \sum_{t=n+1}^N \left(x_t - \sum_{i=1}^n \phi_i x_{t-i} \right)^2 \quad (1.18)$$

donde N representa el número total de muestras disponibles. Una vez estimados los coeficientes $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$, la varianza del ruido blanco σ_ϵ^2 puede calcularse a partir de la ecuación 1.18.

La estimación de parámetros puede abordarse mediante métodos clasificados en dos grandes categorías: **métodos directos** y **métodos indirectos**.

Los **métodos directos** incluyen el **método de mínimos cuadrados**, las **ecuaciones de Yule–Walker** y el **método de Ulrych–Clayton**. Por otro lado, entre los **métodos indirectos** se encuentran el **método LUD**, el **método BSMF** y el **método de Burg**. Entre estas alternativas, el **método de mínimos cuadrados** destaca por su simplicidad y eficacia, proporcionando estimaciones no sesgadas con elevada precisión. Este método permite expresar el **modelo AR** de forma matricial como:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\epsilon} \quad (1.19)$$

donde:

$$\mathbf{Y} = [x_{n+1} \quad x_{n+2} \quad \cdots \quad x_N]^T \quad (1.20)$$

$$\boldsymbol{\phi} = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_n]^T \quad (1.21)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_{n+1} \quad \epsilon_{n+2} \quad \cdots \quad \epsilon_N]^T \quad (1.22)$$

Posteriormente, la estimación por mínimos cuadrados de $\boldsymbol{\phi}$ se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\phi} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \quad (1.23)$$

La determinación del orden n del modelo se lleva a cabo mediante la aplicación de criterios de información que evalúan la adecuación del modelo. Entre los más utilizados se encuentran el **criterio de error de predicción final (FPE)**, el **criterio de información de Akaike (AIC)** y el **criterio de información bayesiano (BIC)**, todos ellos derivados del enfoque propuesto por Akaike para la selección de modelos [26].

Expresiones de los criterios:

- **Función AIC(n):**

$$\text{AIC}(n) = N \ln \left(\sigma_\epsilon^2 + 2n \right) \quad (1.24)$$

- **Función BIC(n):**

$$\text{BIC}(n) = N \ln \left(\sigma_\epsilon^2 \right) + n \ln \left(N \right) \quad (1.25)$$

- **Función FPE(n):**

$$\text{FPE}(n) = \left(\frac{N+n}{N-n} \right) \sigma_\epsilon^2 \quad (1.26)$$

En estas expresiones, **Función AIC**(n), **Función BIC**(n) y **Función FPE**(n) representan los valores de cada criterio para un **modelo AR** de orden n . El modelo más adecuado corresponde al que minimiza alguno de estos criterios, es decir:

$$n = \arg \min_n \left(\mathbf{AIC}(n), \mathbf{BIC}(n), \mathbf{FPE}(n) \right) \quad (1.27)$$

La idea central consiste en modelar la variabilidad temporal de la señal **EMG** mediante un esquema autorregresivo **AR**(n), para luego aplicar un filtrado adaptativo que corrija los errores inducidos por el ruido aleatorio. Para que este procedimiento sea compatible con el uso de filtros adaptativos, es imprescindible contar con una formulación matemática precisa del sistema.

En primer lugar, la ecuación 1.28 se generaliza como un conjunto de n modelos **AR** de primer orden, organizados de manera jerárquica hasta el orden n :

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \Phi_{11}x_1(t) + \epsilon_1\omega(t) \\ x_2(t+1) &= \Phi_{21}x_1(t) + \Phi_{22}x_2(t) + \epsilon_2\omega(t) \\ &\vdots \\ x_n(t+1) &= \Phi_{n1}x_1(t) + \Phi_{n2}x_2(t) + \dots + \Phi_{nn}x_n(t) + \epsilon_n\omega(t) \end{aligned} \quad (1.28)$$

A partir de esta representación escalonada, se construye un modelo de espacio de estados en n dimensiones, que compacta la dinámica del sistema en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ \vdots \\ x_n(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n1} & \Phi_{n2} & \dots & \Phi_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix} \omega(t) \quad (1.29)$$

Los avances en métodos computacionales y matemáticos aplicados a la medicina han permitido modelar señales bioeléctricas mediante estructuras dinámicas precisas. En este contexto, la ecuación 1.20 representa la transición de estado del sistema, mientras que la ecuación 1.30 modela la observación de la señal:

$$z_t = [\phi_{n1} \quad \phi_{n2} \quad \dots \quad \phi_{nn}] \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-n} \end{bmatrix} + \epsilon_t \quad (1.30)$$

En esta formulación, x representa la señal **EMG** medida, z es la señal observada, y ϕ_{ni} corresponde al i -ésimo parámetro del **modelo AR** de orden n .

A partir de las ecuaciones [1.20](#) y [1.30](#), se puede expresar el sistema como un modelo de espacio de estados en la forma estándar:

$$\mathbf{X}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (1.31)$$

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{H}\mathbf{X}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (1.32)$$

donde $w(t)$ y $v(t)$ representan el ruido del sistema y el ruido de observación, respectivamente. La matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ define la dinámica del sistema y se estructura como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n1} & \Phi_{n2} & \cdots & \Phi_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

La matriz de covarianza del ruido del sistema, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se define como:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sigma_{\epsilon_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{\epsilon_2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{\epsilon_n}^2 \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

La matriz de observación $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ se expresa como:

$$\mathbf{H} = [\phi_{n1} \quad \phi_{n2} \quad \cdots \quad \phi_{nn}] \quad (1.35)$$

Finalmente, la varianza del ruido de observación está dada por la matriz escalar:

$$\mathbf{R} = \sigma_{\epsilon_n}^2 \quad (1.36)$$

Con las matrices \mathbf{A} , \mathbf{H} , \mathbf{Q} y \mathbf{R} completamente definidas, se establece un modelo de espacio de estados robusto para la señal electromiográfica de superficie (**sEMG**). Con base en esta representación, se aplica un esquema de filtrado digital para estimar la evolución temporal de la señal.

El filtro de Kalman constituye una técnica de estimación recursiva, lineal, imparcial y de mínima varianza, diseñada para predecir el estado actual de un sistema combinando de manera óptima la estimación previa con la observación más reciente. No obstante, en aplicaciones reales, la variabilidad temporal y el carácter estocástico del ruido pueden generar incertidumbre sobre sus propiedades estadísticas. Esta condición reduce la efectividad del filtro convencional, comprometiéndolo su capacidad predictiva o incluso conduciendo a su divergencia [\[28\]](#).

Para enfrentar este problema, se introduce el filtro de Kalman adaptativo (**AKF**), el cual ajusta dinámicamente sus parámetros en función de la evolución de la señal, permitiendo una estimación más estable y robusta frente a variaciones en las características del ruido.

Este enfoque posee la capacidad de estimar en línea tanto el ruido de interferencia del sistema como el ruido de medición, utilizando los valores actuales de observación y filtrado. En consecuencia, el filtro de Kalman adaptativo (**AKF**) ajusta dinámicamente sus parámetros durante el proceso de estimación, rastreando en tiempo real las variaciones del ruido y mejorando la precisión de la predicción [29].

No obstante, el desempeño del algoritmo **AKF** puede verse comprometido por su sensibilidad a los valores iniciales. Para mitigar esta limitación, se propone un esquema de **AKF** de seguimiento robusto, el cual incorpora un **factor de desvanecimiento** que regula el valor del error de predicción. Esta modificación ajusta la matriz de ganancia del filtro, incrementando el peso de la observación actual en la estimación. De este modo, se mejora la capacidad del filtro para adaptarse a variaciones instantáneas en la señal, reduciendo la probabilidad de divergencia [30].

1.2.6. Generador de señales EMG con disparos aleatorios

El desarrollo de señales electromiográficas sintéticas constituye una herramienta esencial para la validación de algoritmos de análisis, filtrado y procesamiento de datos biomédicos. A diferencia de las señales reales, cuya adquisición está sujeta a variabilidad biológica, condiciones experimentales y ruido instrumental, las señales generadas artificialmente permiten un control preciso sobre sus características estadísticas y temporales. En particular, los generadores basados en modelos estocásticos de activación neuromuscular permiten simular patrones de disparo que imitan la fisiología de unidades motoras, resultando especialmente útiles en estudios de detección y descomposición de señales **EMG** de superficie.

1.2.6.1. Modelo dinámico de señales sintéticas

La reproducción fiel de señales reales es una tarea compleja debido a su inherente variabilidad y diversidad de comportamientos fisiológicos. Como alternativa, diversos estudios han propuesto la generación de señales sintéticas controladas, fundamentadas en los teoremas de Nyquist [31] y Shannon [32].

Estas señales artificiales se generan bajo ciertas restricciones predefinidas, como el número de muestras, la resolución temporal y los valores límite admisibles. Su representación puede simplificarse mediante una muestra inicial y una secuencia de diferencias acumuladas, según lo expresado en las ecuaciones 1.37 y 1.38, [33]:

$$s'[i] = s[i + 1] - s[i] \quad \forall s \in \mathbb{R}^n, \quad \exists s' \in \mathbb{R}^{n-1} \quad (1.37)$$

$$s[i] = s[0] + \sum_{j=0}^{i-1} s'[j] \quad (1.38)$$

Entre las señales biomédicas sintéticas más estudiadas se encuentran las señales de electrocardiograma (**ECG**). Su generación puede realizarse mediante el modelo dinámico propuesto por McSharry [34], el cual se basa en un ciclo límite circular de radio unitario en el plano $\{xy\}$.

En este modelo, la trayectoria se distorsiona al aproximarse a los puntos característicos P , Q , R , S y T , imitando así las morfologías típicas de una señal de ECG fisiológica. La figura 1.7 se presenta la forma de la señal ECG:

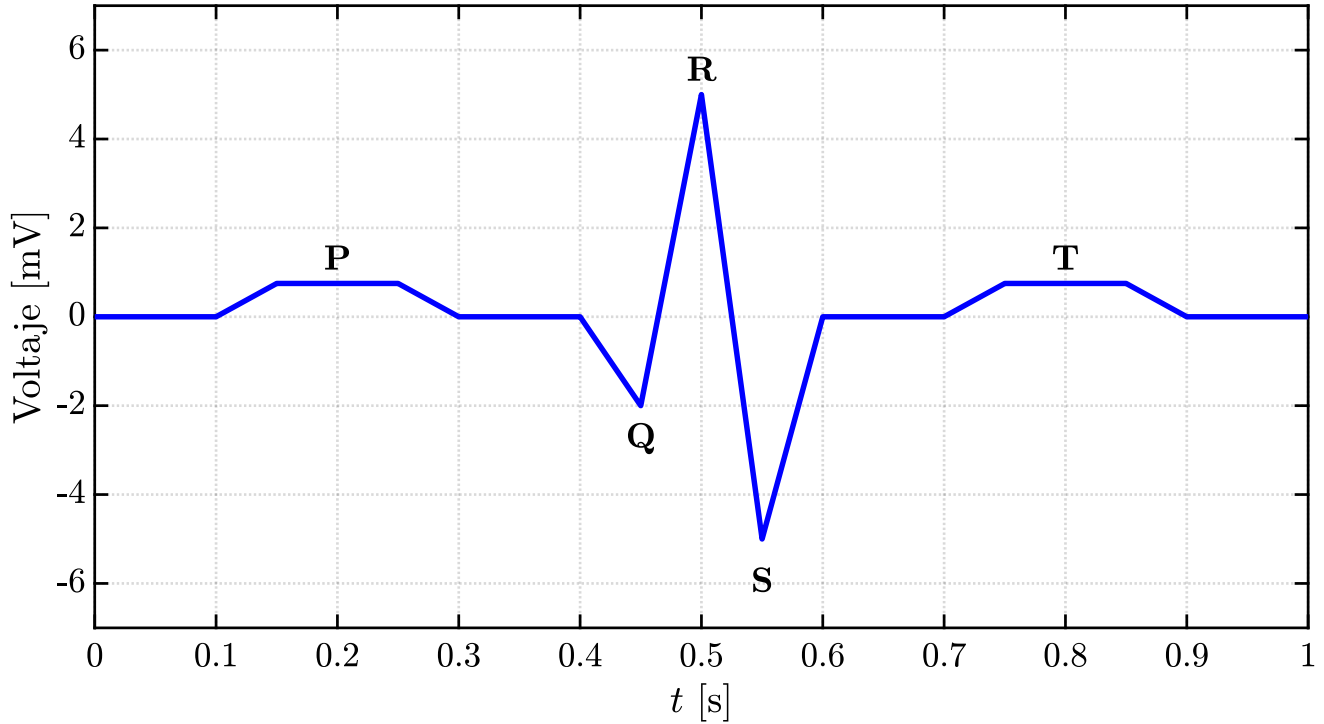


Figura 1.7: Señal de electrocardiograma ECG.

El modelo considera la naturaleza pseudoperiódica de la señal, representada mediante ecuaciones de trayectoria que describen el movimiento en torno a una circunferencia límite. Dichas trayectorias se modelan a partir de un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias, formuladas tanto en coordenadas cartesianas como en polares, tal como se muestra en las ecuaciones 1.39, 1.40 y 1.41:

$$\dot{x} = \gamma x - \omega y \quad (1.39)$$

$$\dot{y} = \gamma y + \omega x \quad (1.40)$$

$$\dot{z} = - \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} a_i \Delta \theta_i \cdot e^{\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}\right)} - (z - z_0) \quad (1.41)$$

donde

$$\gamma = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.42)$$

$$\Delta\theta_i = \theta - \theta_i \quad (1.43)$$

$$\omega = 2\pi f \quad (1.44)$$

Cada componente de la señal se modela mediante núcleos gaussianos caracterizados por tres parámetros (θ_i, a_i, b_i) , y la señal total resulta de la superposición de cinco curvas modeladas.

El término **dinámico** hace referencia a la definición del modelo mediante ecuaciones diferenciales, las cuales pueden transformarse con facilidad en ecuaciones en diferencias, lo que permite su implementación en microcontroladores para la generación de señales sintéticas de electrocardiograma (**ECG**). El modelo propuesto por McSharry [34], expresado mediante ecuaciones de diferencias para el ángulo θ y la desviación z , se presenta a continuación:

$$\theta[n] = \theta[n-1] + \frac{\omega}{f_s} \quad (1.45)$$

$$z[n] = z[n-1] - \frac{1}{f_s} \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} \frac{a_i \omega (\theta[n-1] - \theta_i)}{b_i^2} \cdot e^{\left(-\frac{(\theta[n-1] - \theta_i)^2}{2b_i^2}\right)} \quad (1.46)$$

El modelo propuesto por McSharry [34] presenta una notable versatilidad para la generación de señales sintéticas que comparten características dinámicas similares. A través de modificaciones sutiles en la formulación original, es posible extender su aplicabilidad a otras señales fisiológicas, como las de fonocardiografía (**PCG**), las cuales se distinguen por contener dos componentes sinusoidales predominantes, a diferencia de las señales electrocardiográficas (**ECG**).

En este contexto, Almasi [35] propuso un modelo dinámico para la generación de señales **PCG**, basado en una transformación de los núcleos gaussianos del modelo de McSharry en núcleos de tipo Gabor. Este enfoque incorpora dos parámetros adicionales que permiten controlar la fase y la frecuencia, dando lugar a la siguiente formulación:

$$z(\theta) = \sum_{i \in \{S1^-, S1^+, S2^-, S2^+\}} \alpha_i \cdot e^{\left(-\frac{(\theta - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)} \cos(2\pi f_i \theta - \Phi_i) \quad (1.47)$$

Por otra parte, Clifford [36] argumenta que un modelo dinámico bien formulado no solo permite la síntesis de señales fisiológicas, sino que también facilita tareas fundamentales como el filtrado, la compresión y la clasificación de señales pertenecientes a un mismo dominio.

No obstante, estudios recientes [37, 38] han demostrado que la categorización inadecuada de ciertos componentes como **ruído** puede inducir errores significativos en los procesos de clasificación.

Este problema se agrava especialmente en situaciones donde los datos contienen estructuras relevantes que han sido filtradas incorrectamente. Así lo confirman investigaciones recientes enfocadas en procesamiento de señales fisiológicas [39–41], en las que se enfatiza la importancia de preservar información diagnóstica durante el preprocesamiento.

1.2.6.2. Modelo del generador de señales EMG

Con el propósito de establecer un algoritmo integral para la generación de señales electromiográficas sintéticas (EMG) [42], el modelo propuesto se ha estructurado en dos componentes principales.

El primero corresponde a un modelo de reconstrucción, encargado de reproducir señales EMG a partir de datos reales. El segundo componente consiste en un generador de datos iniciales pseudoaleatorios, cuya función es definir los intervalos de tiempo entre potenciales de acción y su frecuencia de aparición.

Ambos componentes han sido subdivididos en fases específicas que describen de manera detallada cada etapa del proceso, como se ilustra en la Figura 1.8.

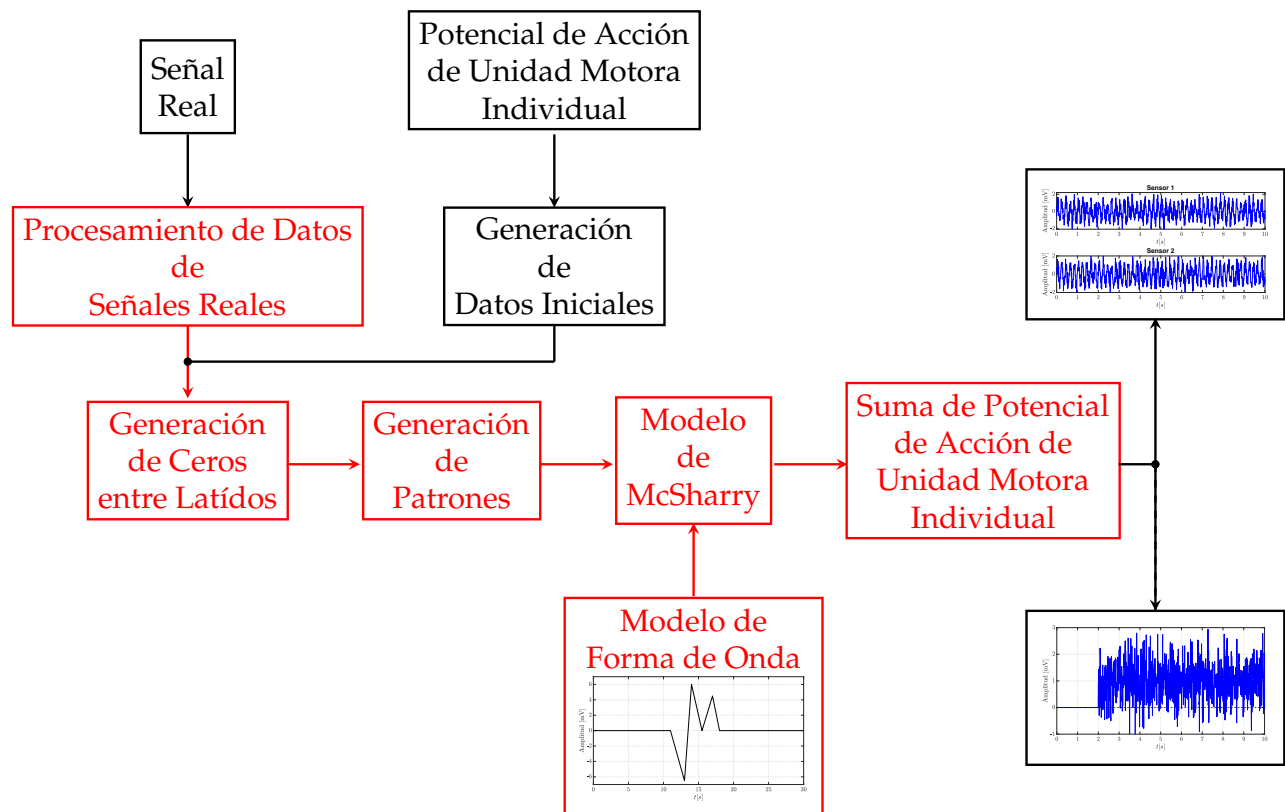


Figura 1.8: Etapas para adquirir y procesar las señales mioeléctricas

El desarrollo inicial se enfocó en la reconstrucción de señales **EMG** reales mediante la generación sintética basada en trenes de disparo neuronales. No obstante, este modelo preliminar presentó limitaciones, como la incapacidad para representar adecuadamente las variaciones de amplitud y la omisión de la relación entre la forma de onda del potencial de unidad motora (**sMUAP**) y el patrón de reclutamiento [43–45].

Para superar estas limitaciones y agilizar el proceso de diseño, se adoptó una metodología estructurada en tres fases, implementadas mediante módulos independientes con el fin de facilitar su desarrollo y validación. En la primera fase, se utilizó el modelo dinámico de McSharry para la representación inicial de las formas de onda. La segunda fase consistió en la construcción de un modelo simplificado, orientado a la simulación de una única señal **EMG** generada por un solo **sMUAP**. Finalmente, en la tercera fase, se desarrolló un modelo más completo, capaz de representar señales que integran múltiples potenciales de unidad motora.

La elección del modelo de McSharry para la generación de formas de onda se fundamentó en la similitud morfológica entre las señales **EMG** y las señales electrocardiográficas (**ECG**), así como en la amplia disponibilidad de literatura y algoritmos existentes para su simulación.

Este modelo, basado en la superposición de funciones Gaussianas, permite la generación de distintas formas de onda mediante la modulación de parámetros en un conjunto de ecuaciones diferenciales. Dichas ecuaciones controlan la amplitud y la desviación estándar de las campanas Gaussianas. En consecuencia, se adoptó el modelo de McSharry [34] como base para la generación sintética de señales **EMG**, aprovechando su capacidad demostrada para reproducir señales **ECG** realistas.

1.3. Formulación del problema

La electromiografía (**EMG**) constituye una técnica esencial para el registro de la actividad eléctrica generada por los músculos esqueléticos. El análisis y modelado de estas señales resultan fundamentales en múltiples aplicaciones, tales como la rehabilitación motora, el control de prótesis y la detección temprana de trastornos neuromusculares. No obstante, la naturaleza inherentemente no estacionaria de las señales **EMG**, sumada a la presencia de ruido e interferencias, dificulta su modelado preciso, representando así un reto significativo para la comunidad científica.

Diversos enfoques han sido propuestos para modelar señales **EMG**, incluyendo técnicas basadas en modelos estocásticos, algoritmos de aprendizaje automático y métodos de optimización. Sin embargo, muchas de estas metodologías requieren grandes volúmenes de datos, así como una alta carga computacional, lo cual limita su implementación en aplicaciones de tiempo real.

Las técnicas de identificación paramétrica han mostrado ser herramientas eficaces para caracterizar sistemas dinámicos a partir de datos experimentales. Particularmente, el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos (**RLS**, del inglés **Recursive Least Squares**) permite actualizar los parámetros del modelo en tiempo real conforme se reciben nuevos datos, lo cual lo convierte en una opción viable para el tratamiento de señales **EMG**, caracterizadas por su dinamismo y elevado nivel de ruido [46].

A pesar de los avances en el procesamiento de señales biomédicas, subsisten limitaciones en la implementación y validación de modelos paramétricos en condiciones reales. Factores como la variabilidad intra e intersujeto, la influencia del ruido en el registro electromiográfico, y la selección adecuada de la estructura del modelo, impactan directamente en la precisión y estabilidad del proceso de identificación.

En este contexto, el presente estudio se orienta al desarrollo de un modelo robusto para el análisis y modelado de señales **EMG**, basado en técnicas de identificación paramétrica mediante el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos. Se busca mejorar la precisión y estabilidad del modelado en presencia de ruido y considerando la variabilidad fisiológica de los sujetos, a fin de lograr una representación fiable y computacionalmente eficiente, adecuada para aplicaciones en tiempo real.

1.3.1. Limitaciones actuales en el modelado EMG

La electromiografía (EMG) constituye una técnica esencial para el registro de la actividad eléctrica generada por los músculos esqueléticos. El análisis y modelado de estas señales resultan fundamentales en múltiples aplicaciones, tales como la rehabilitación motora, el control de prótesis y la detección temprana de trastornos neuromusculares. No obstante, la naturaleza inherentemente no estacionaria de las señales EMG, sumada a la presencia de ruido e interferencias, dificulta su modelado preciso, representando así un reto significativo para la comunidad científica.

Diversos enfoques han sido propuestos para modelar señales EMG, incluyendo técnicas basadas en modelos estocásticos, algoritmos de aprendizaje automático y métodos de optimización. Sin embargo, muchas de estas metodologías requieren grandes volúmenes de datos, así como una alta carga computacional, lo cual limita su implementación en aplicaciones de tiempo real.

Las técnicas de identificación paramétrica han mostrado ser herramientas eficaces para caracterizar sistemas dinámicos a partir de datos experimentales. Particularmente, el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos (**RLS**, por sus siglas en inglés *Recursive Least Squares*) permite actualizar los parámetros del modelo en tiempo real conforme se reciben nuevos datos, lo cual lo convierte en una opción viable para el tratamiento de señales EMG, caracterizadas por su dinamismo y elevado nivel de ruido.

A pesar de los avances en el procesamiento de señales biomédicas, subsisten limitaciones en la implementación y validación de modelos paramétricos en condiciones reales. Factores como la variabilidad intra e intersujeto, la influencia del ruido en el registro electromiográfico, y la selección adecuada de la estructura del modelo, impactan directamente en la precisión y estabilidad del proceso de identificación.

En este contexto, el presente estudio se orienta al desarrollo de un modelo robusto para el análisis y modelado de señales EMG, basado en técnicas de identificación paramétrica mediante el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos. Se busca mejorar la precisión y estabilidad del modelado en presencia de ruido y considerando la variabilidad fisiológica de los sujetos, a fin de lograr una representación fiable y computacionalmente eficiente, adecuada para aplicaciones en tiempo real.

1.3.2. Justificación del uso del algoritmo RLS

El algoritmo de mínimos cuadrados recursivos (**RLS**, por sus siglas en inglés *Recursive Least Squares*) se caracteriza por su capacidad de adaptación en tiempo real y su eficiencia para estimar parámetros en sistemas dinámicos. En el contexto del modelado de señales mioeléctricas (**EMG**), estas cualidades resultan especialmente valiosas, dado el comportamiento no estacionario y ruidoso de dichas señales.

A diferencia de otros métodos clásicos de identificación, que requieren el procesamiento de grandes conjuntos de datos estáticos, el algoritmo RLS actualiza los parámetros del modelo con cada nueva muestra, lo cual reduce significativamente la carga computacional y permite una implementación eficiente en sistemas embebidos o en tiempo real.

Además, el RLS ofrece una buena capacidad de seguimiento ante variaciones abruptas en la señal, lo cual es esencial para capturar los cambios fisiológicos y neuromusculares que se presentan durante la contracción muscular o en distintas condiciones experimentales.

En síntesis, el uso del algoritmo RLS permite abordar de manera eficaz los desafíos asociados al modelado de señales **EMG**, al proporcionar una herramienta robusta, adaptativa y computacionalmente eficiente, que puede integrarse fácilmente en aplicaciones de control y análisis de señales biomédicas.

1.4. Estructura de la tesis

La presente tesis se estructura en cinco capítulos, cada uno de los cuales aborda un aspecto fundamental del estudio y modelado de señales electromiográficas (**EMG**) y su aplicación en sistemas de control.

- El **Capítulo 1** presenta los fundamentos teóricos de la señal **EMG**, incluyendo sus características fisiológicas, modelos matemáticos y aproximaciones desarrolladas en la literatura reciente.
- El **Capítulo 2** aborda los principios de adquisición e instrumentación de señales mioeléctricas, desde el diseño de sistemas de amplificación y filtrado, hasta el procesamiento digital mediante microcontroladores.
- El **Capítulo 3** se enfoca en la obtención de un modelo matemático de la señal **EMG** mediante técnicas de identificación paramétrica, particularmente utilizando el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos.
- El **Capítulo 4** introduce un esquema de control basado en señales **EMG** aplicado a un sistema físico tipo péndulo simple, utilizando un controlador por tramos activado por rigidez muscular.
- El **Capítulo 5** presenta los resultados experimentales obtenidos, así como un análisis comparativo del desempeño del modelo propuesto en entornos reales.

Capítulo 2

Arquitectura de Adquisición de Señales Mioeléctricas

La instrumentación eléctrica orientada a la adquisición de señales electromiográficas (**EMG**) desempeña un papel fundamental en el análisis de la actividad neuromuscular. Estas señales reflejan los impulsos eléctricos generados por la contracción de las fibras musculares esqueléticas, cuya correcta detección es indispensable para el desarrollo de aplicaciones en biomecánica, rehabilitación motora, neuroingeniería y control de prótesis.

Dada la baja amplitud de las señales **EMG**, típicamente en el rango de los microvoltios, y su elevada susceptibilidad a interferencias electromagnéticas y artefactos fisiológicos, se requiere un sistema de adquisición robusto, preciso y bien condicionado. Dicho sistema debe ser capaz de amplificar la señal sin distorsión, filtrar componentes espurios y digitalizarla con una resolución adecuada para su posterior procesamiento.

Para tal propósito, es indispensable seleccionar e integrar cuidadosamente los elementos clave del sistema, tales como electrodos, amplificadores de instrumentación, filtros analógicos y convertidores analógico-digitaes. Asimismo, se deben implementar estrategias eficaces para mitigar el ruido externo y garantizar una referencia estable.

En este capítulo se presentan los principios fundamentales de la instrumentación biomédica aplicada a señales **EMG**, describiendo detalladamente los componentes empleados, las configuraciones más utilizadas y las técnicas específicas que permiten optimizar la calidad de la señal adquirida en condiciones experimentales reales.

2.1. Descripción general del sistema de adquisición

Un sistema de adquisición de señales mioeléctricas debe ser capaz de registrar y procesar señales bioeléctricas de baja amplitud en entornos con alto nivel de interferencias electromagnéticas. Para ello, se requiere un diseño robusto y confiable que integre adecuadamente los diferentes bloques funcionales encargados del acondicionamiento, filtrado y digitalización de la señal.

En términos generales, el proceso de adquisición comienza con la colocación de electrodos sobre la superficie de la piel, a fin de captar los potenciales eléctricos generados por la contracción muscular. Estos potenciales, de muy baja amplitud (generalmente del orden de los microvoltios), deben ser amplificados, filtrados y adaptados para su posterior conversión a formato digital.

La arquitectura típica de un sistema de adquisición para señales **EMG** se compone de múltiples etapas funcionales, organizadas de manera secuencial para garantizar una adquisición precisa y robusta. Estas etapas son:

- **Adquisición inicial:** mediante electrodos de superficie colocados sobre la piel, encargados de captar la actividad eléctrica muscular.
- **Pre-amplificación:** mediante un amplificador de instrumentación que mejora la relación señal–ruido sin distorsionar la señal original.
- **Filtrado de frecuencia:** empleando filtros pasa–altas y pasa–bajas para eliminar componentes espectrales no deseadas y conservar la banda de interés fisiológico.
- **Rechazo de banda:** mediante un filtro centrado generalmente en los 60 Hz de la red eléctrica, con el fin de eliminar interferencias ambientales.
- **Amplificación final:** ajusta la amplitud de la señal para adecuarla al rango dinámico del convertidor analógico–digital (**ADC**).
- **Digitalización:** conversión de la señal analógica a digital para su posterior procesamiento computacional.

En la figura [2.1](#), se presenta un diagrama a bloques que resume las principales etapas involucradas en la adquisición y procesamiento de la señal mioeléctrica, el cual será abordado de forma detallada en las secciones siguientes.

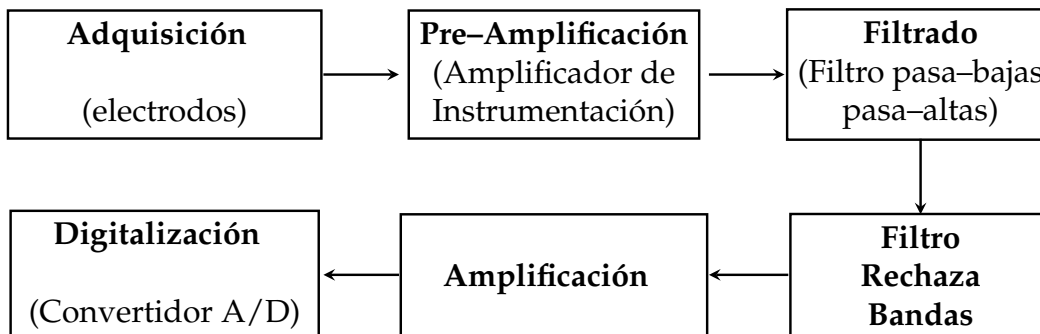


Figura 2.1: Etapas para adquirir y procesar las señales mioeléctricas

2.2. Factores que afectan la calidad de la señal EMG

Para garantizar una adquisición precisa de señales **EMG**, es fundamental comprender los factores que pueden afectar su integridad. Entre los más relevantes se encuentran las fuentes de ruido eléctrico e interferencias externas, que pueden distorsionar significativamente la señal registrada. Esta sección examina dichos fenómenos y las estrategias utilizadas para minimizarlos.

2.2.1. Ruido eléctrico e interferencias externas

En el capítulo [1](#) se describieron las principales características de las señales electromiográficas (**EMG**), destacando que su amplitud suele ser inferior a 10 mV_{pp} (aproximadamente $\pm 5 \text{ mV}$) antes de la amplificación. Durante su propagación a través de los distintos tejidos biológicos, estas señales se ven afectadas por diversas fuentes de ruido.

Comprender la naturaleza y clasificación de dichos ruidos resulta esencial para su correcta instrumentación y análisis.

A continuación, se presentan los principales tipos de interferencia:

- **Ruido inherente al equipo electrónico:** Todo sistema electrónico genera cierto nivel de ruido debido a las propiedades físicas de los componentes. Aunque este tipo de interferencia no puede eliminarse por completo, puede minimizarse mediante el uso de componentes de alta calidad y una adecuada disposición del circuito.
- **Ruido ambiental:** Este ruido es generado por la radiación electromagnética presente en el entorno. Dado que el cuerpo humano se encuentra constantemente expuesto a campos electromagnéticos, es prácticamente imposible eliminar por completo esta fuente de interferencia. La amplitud del ruido ambiental puede superar en uno a tres órdenes de magnitud a la señal **EMG**, comprometiendo así la fidelidad del registro.
- **Artefactos por movimiento:** Son alteraciones en la señal provocadas por desplazamientos mecánicos. Sus principales fuentes son la interfaz entre el electrodo y la piel, así como el movimiento del cable del electrodo. El diseño adecuado del hardware, una correcta fijación de los electrodos y el uso de cables blindados contribuyen a mitigar estos artefactos.
- **Variabilidad fisiológica de la señal:** La amplitud de la señal **EMG** es inherentemente aleatoria, ya que depende de la tasa de activación de las unidades motoras, las cuales suelen operar en rangos de frecuencia por debajo de los 20 Hz. Aunque forma parte de la naturaleza de la señal, esta variabilidad puede comportarse como una fuente de ruido no deseado, por lo que su atenuación es necesaria en aplicaciones específicas [\[47-50\]](#).

2.2.2. Artefactos fisiológicos y variabilidad biológica

Además del ruido eléctrico y las interferencias externas, la calidad de la señal electromiográfica (EMG) puede verse comprometida por artefactos fisiológicos y variabilidad biológica inherente al sistema neuromuscular.

Estos factores son de origen interno y, aunque inevitables en contextos reales, deben ser considerados cuidadosamente en el diseño del sistema de adquisición y en el análisis posterior de los datos.

Entre los artefactos fisiológicos más comunes se encuentran los movimientos involuntarios, los cambios posturales y el desplazamiento de los electrodos sobre la piel, los cuales inducen señales de baja frecuencia que interfieren con el registro electromiográfico. Además, factores como la hidratación, la temperatura cutánea y el nivel de sudoración pueden alterar la impedancia de contacto, afectando negativamente la calidad del acoplamiento entre el electrodo y la superficie de la piel.

Por otra parte, la variabilidad biológica hace referencia a las diferencias inter e intraindividuos relacionadas con la morfología muscular, distribución de las fibras, patrón de activación de las unidades motoras y nivel de fatiga. Esta variabilidad introduce fluctuaciones en la amplitud, frecuencia y forma de la señal EMG, lo cual puede dificultar la estandarización del procesamiento y la interpretación de los datos.

Considerar estos factores desde la etapa de instrumentación y diseño experimental resulta esencial para lograr una adquisición robusta y confiable de la señal mioeléctrica, especialmente en aplicaciones clínicas o de control en tiempo real.

2.3. Etapas del sistema de instrumentación

El proceso de instrumentación para la adquisición de señales mioeléctricas se compone de diversas etapas secuenciales que garantizan una captura confiable, precisa y libre de interferencias. Cada una de estas fases cumple una función específica en el acondicionamiento de la señal, desde su recolección inicial en el tejido muscular hasta su conversión en un formato digital procesable. A continuación, se describen detalladamente las etapas que conforman este sistema: adquisición, pre-amplificación, filtrado, amplificación y digitalización.

2.3.1. Adquisición

Para la adquisición de señales electromiográficas, se utilizan comúnmente electrodos de superficie fabricados con cloruro de plata (AgCl), los cuales consisten en una película de plata metálica altamente conductora (Ag) recubierta con su sal correspondiente. Estos electrodos se conectan mediante cables blindados, diseñados específicamente para reducir la captación de interferencias eléctricas, en particular aquellas asociadas a la frecuencia de 60 Hz propia de las redes de alimentación eléctrica.

Una de las principales ventajas de los electrodos de Ag/AgCl radica en su capacidad para generar potenciales de unión líquida con valores bajos y elevada estabilidad. Esta propiedad los convierte en una alternativa superior frente a otros tipos de electrodos, especialmente en aplicaciones de electromiografía superficial, donde los potenciales de contacto entre el electrodo y la piel constituyen una fuente crítica de distorsión que compromete la fidelidad de la señal registrada.

Con el propósito de establecer una referencia eléctrica estable, se colocó un electrodo de referencia en la base del codo. Esta configuración permitió obtener señales **EMG** representativas de la actividad de cada músculo analizado. Posteriormente, dichas señales fueron sometidas a un procesamiento específico, con el fin de emplearlas como comandos de activación para generar distintos movimientos en un modelo de prótesis de mano.

2.3.2. Pre-amplificación

Las señales generadas por los fenómenos mioeléctricos corresponden a potenciales eléctricos de muy baja amplitud, típicamente en el rango de los milivoltios, lo cual exige el uso de amplificadores electrónicos especializados. Estos dispositivos deben contar con una alta relación de rechazo al modo común (**CMRR**, por sus siglas en inglés, *Common-Mode Rejection Ratio*), con el fin de suprimir interferencias externas y permitir una cuantificación precisa de las señales de interés.

El objetivo principal del sistema de amplificación es aumentar el nivel de las señales captadas mediante los electrodos, minimizando simultáneamente la influencia del ruido ambiental. Para la etapa de preamplificación se seleccionó el amplificador de instrumentación **AD620**, ampliamente reconocido por su elevado **CMRR** y su capacidad para amplificar señales de muy baja amplitud. Este dispositivo fue configurado con una ganancia de 1000, lo que permite llevar las señales mioeléctricas, usualmente en el orden de los milivoltios, a un nivel apropiado para su posterior procesamiento.

La elección del AD620 se justifica por su alta precisión, excelente estabilidad térmica y bajo nivel de ruido, cualidades que lo convierten en una opción óptima para aplicaciones biomédicas de alta sensibilidad, como la adquisición de señales **EMG**.

2.3.3. Etapa de filtrado

En la etapa de filtrado de señales mioeléctricas, se implementaron filtros analógicos diseñados específicamente para garantizar registros de alta precisión. El objetivo principal de esta etapa es suprimir las frecuencias no deseadas y asegurar que la señal resultante corresponda exclusivamente a la actividad bioeléctrica de interés, evitando la interferencia de componentes espurias o ruido externo.

Para cumplir con estos requerimientos, se utilizaron filtros activos, los cuales presentan ventajas frente a los filtros pasivos, tales como una mejor respuesta en frecuencia, mayor estabilidad y capacidad para manejar señales de baja amplitud sin distorsión significativa. En particular, se adoptaron configuraciones de tipo **Butterworth**, ampliamente reconocidas por su respuesta de banda pasante plana, lo que reduce al mínimo las ondulaciones en esta región.

El sistema de filtrado incluyó dos etapas complementarias: un filtro pasa bajas de cuarto orden con una frecuencia de corte de 500 Hz, destinado a eliminar componentes de alta frecuencia no deseadas, y un filtro pasa altas con una frecuencia de corte de 20 Hz, orientado a suprimir variaciones de muy baja frecuencia asociadas a artefactos de movimiento y desplazamientos lentos de la línea base.

La combinación de estos dos filtros **Butterworth**, correctamente diseñados y calibrados, permite realizar un procesamiento preciso y eficiente de las señales **EMG**, mejorando significativamente su calidad para las etapas posteriores de digitalización y análisis.

2.3.4. Amplificación

Durante el proceso de filtrado, la señal mioeléctrica puede sufrir una atenuación significativa, producto de la pérdida de energía inducida por las características inherentes del diseño de los filtros implementados. Esta disminución en la amplitud puede comprometer la calidad de la señal y dificultar su manejo en las etapas posteriores de procesamiento.

Con el fin de compensar esta pérdida y garantizar que la señal se mantenga dentro de los niveles adecuados para su digitalización, se incorpora una segunda etapa de amplificación. Su propósito es restaurar la amplitud original de la señal y acondicionarla de manera óptima para su conversión mediante el **convertidor analógico–digital (ADC, por sus siglas en inglés)**.

Esta etapa de acondicionamiento resulta crítica, ya que permite adaptar la señal al rango dinámico de entrada del **ADC**, optimizando así la resolución efectiva y asegurando una digitalización precisa. De esta forma, se garantiza un procesamiento confiable, robusto y de alta calidad, especialmente en aplicaciones biomédicas que requieren una fidelidad elevada en la adquisición de señales mioeléctricas.

2.3.5. Digitalización

Una vez que la señal mioeléctrica ha sido adecuadamente filtrada y amplificada, se transfiere al **convertidor analógico–digital (ADC, por sus siglas en inglés)**. Esta etapa transforma la señal continua en una secuencia discreta de valores digitales, permitiendo su manipulación mediante técnicas computacionales.

El **ADC** constituye un elemento esencial en el sistema, ya que establece el puente entre el dominio analógico y digital. Su desempeño depende de parámetros como la frecuencia de muestreo y la resolución en bits, los cuales deben seleccionarse cuidadosamente para preservar la fidelidad de la señal durante la conversión.

Una vez digitalizada, la señal es procesada por un microcontrolador, el cual se encarga de ejecutar algoritmos de análisis y generación de comandos de control. Este procesamiento permite traducir la actividad muscular captada en señales digitales de salida, adecuadas para la activación de actuadores, como servomotores, en aplicaciones de asistencia o rehabilitación.

De esta manera, el flujo completo de procesamiento, desde la adquisición hasta la digitalización y control, asegura una operación robusta, precisa y en tiempo real, características fundamentales en sistemas biomédicos interactivos.

2.3.5.1. Características del acondicionamiento y la digitalización

En las secciones anteriores se han descrito diversas propiedades relevantes de la señal mioeléctrica, las cuales condicionan directamente los requerimientos para su correcto acondicionamiento y digitalización.

Una de las características más significativas es su baja amplitud, la cual se encuentra típicamente por debajo de los 10 mV_{pp} , lo que la vuelve altamente susceptible a interferencias eléctricas, tales como las originadas por las líneas de alimentación, que pueden superar su magnitud hasta en cinco órdenes de magnitud. Por esta razón, se requiere un elevado nivel de ganancia (del orden de 1000) y una alta capacidad de rechazo al modo común, lo cual impone la necesidad de utilizar tecnologías avanzadas de amplificación electrónica.

Otro aspecto crítico es la alta impedancia que caracteriza la interfaz piel–electrodo, lo que incrementa la sensibilidad del sistema a las perturbaciones externas. Este inconveniente puede atenuarse reduciendo la distancia entre los electrodos y la etapa de amplificación, utilizando cables cortos y preferentemente blindados para minimizar el acoplamiento con fuentes externas de ruido.

En cuanto al ancho de banda de la señal **EMG**, diversos autores reportan rangos característicos con límites inferiores entre 20 Hz y 250 Hz, y superiores entre 500 Hz y 2 kHz. Para garantizar la integridad del contenido espectral útil, es necesario emplear filtros pasa–altas y pasa–bajas apropiados. Además, debe implementarse un filtro pasa–bajas anti–alias, usualmente de cuarto o sexto orden, antes de la conversión analógica a digital, a fin de evitar distorsiones por aliasing.

Finalmente, dos parámetros determinantes en la etapa de digitalización son la frecuencia de muestreo y la resolución del conversor analógico–digital. En la literatura se observa una considerable dispersión en cuanto a los valores utilizados, influenciada principalmente por la aplicación final. En sistemas de adquisición de laboratorio, sin restricciones estrictas de consumo energético, se emplean frecuencias de muestreo que oscilan entre 10 kHz y 50 kHz, con resoluciones de hasta 16 bits [47]. Por el contrario, en desarrollos orientados a aplicaciones portátiles, como en el caso de prótesis mioeléctricas, se han reportado implementaciones exitosas utilizando frecuencias de muestreo de apenas 1 kHz y resoluciones de 10 bits [51], lo que refleja una adecuada compensación entre rendimiento y consumo de recursos.

2.4. Etapas de procesamiento de la señal mioeléctrica

En la literatura especializada, diversos autores presentan diferentes enfoques metodológicos para el diseño de sistemas de instrumentación orientados al procesamiento de señales mioeléctricas. No obstante, es posible identificar una arquitectura general que describe las etapas fundamentales del proceso. Esta comienza con el uso de un amplificador de instrumentación, el cual cumple la función de preamplificador y permite captar la señal **EMG** con una ganancia inicial moderada.

Posteriormente, la señal es sometida a una segunda etapa de amplificación de mayor ganancia, seguida por un proceso de filtrado mediante un filtro pasa-bandas, cuyo rango de operación típico se encuentra entre 15 Hz y 5 kHz. Esta etapa de filtrado permite atenuar componentes de baja frecuencia (como artefactos de movimiento) y frecuencias elevadas (asociadas al ruido electromagnético), conservando únicamente el contenido espectral relevante de la señal.

Finalmente, la señal se dirige a una etapa de digitalización, en la cual es convertida en una secuencia de valores digitales mediante un conversor analógico-digital. Esta conversión permite su almacenamiento y análisis posterior mediante técnicas de procesamiento digital de señales.

Cabe destacar que esta estructura puede presentar variaciones dependiendo del autor o de los requerimientos específicos del sistema.

Por ejemplo, algunos diseños incorporan una etapa de referencia en el bloque inicial, mientras que otros añaden un filtro rechaza-bandas posterior al filtro pasa-bandas, con el objetivo de eliminar interferencias en frecuencias específicas (como la generada por la red eléctrica). Adicionalmente, se han reportado implementaciones que incluyen un sumador antes de la digitalización, con la finalidad de optimizar el rango dinámico de la señal.

Un ejemplo representativo de instrumentación eléctrica para señales **EMG** es el propuesto por Aguilar *et al.* en [52], donde se detalla el diseño del sistema de adquisición implementado. Este se muestra en la figura 2.2

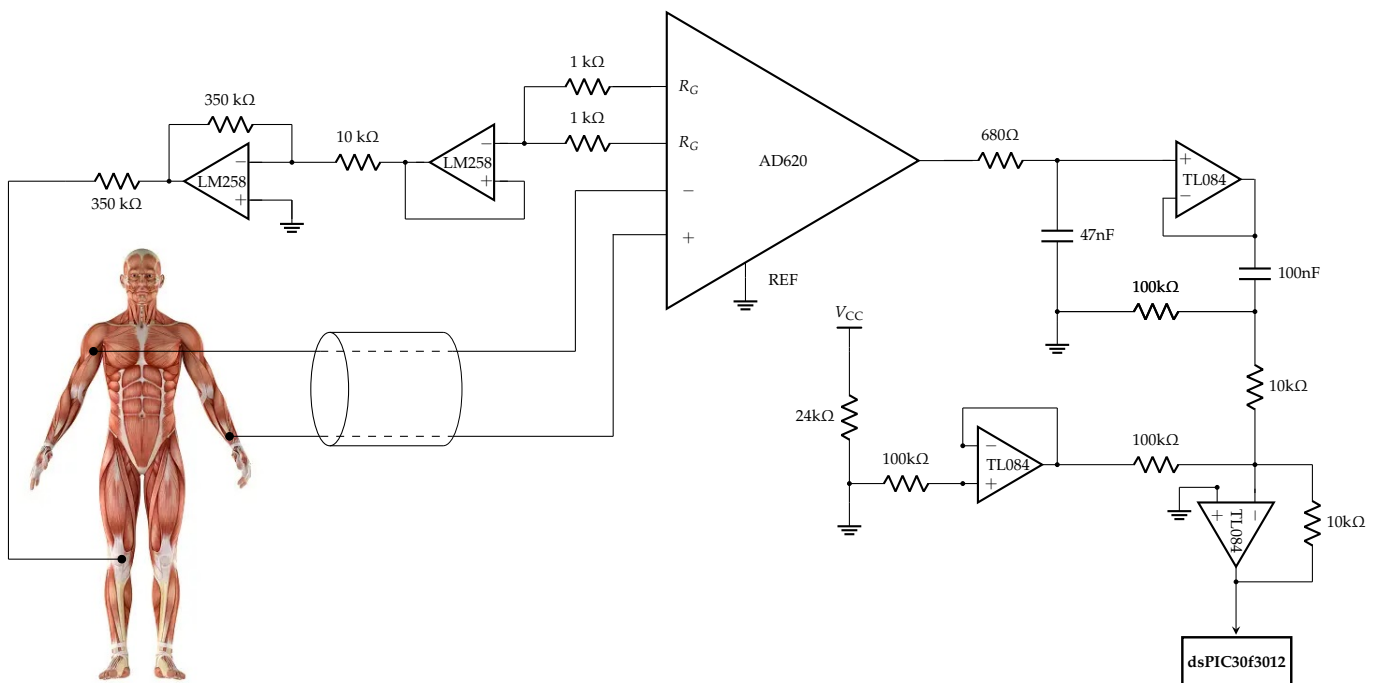


Figura 2.2: Electrónica implementada por [52] para la adquisición de señales **EMG**

De acuerdo con lo reportado por los autores en [52], las señales bioeléctricas generadas por los músculos se adquieren mediante el uso de tres electrodos superficiales. Estas señales son posteriormente amplificadas utilizando un amplificador de instrumentación AD620, el cual ha sido diseñado específicamente para aplicaciones biomédicas debido a su alta relación señal-ruido y excelente rechazo al modo común.

A continuación, la señal amplificada es procesada por un filtro pasa-bandas de primer orden, encargado de eliminar el ruido en las frecuencias bajas y altas. Una vez filtrada, se emplea un divisor de voltaje y un circuito sumador con el objetivo de montar la señal a un nivel de referencia de 1.5V. Esta etapa permite ajustar el desplazamiento de la señal para su correcta interpretación por parte del sistema de adquisición, utilizando como referencia el mismo valor de 1.5V.

La señal acondicionada es enviada a los canales analógicos del microcontrolador dsPIC30f3012, donde se realiza la conversión analógico-digital. Finalmente, los datos digitalizados son transmitidos de forma inalámbrica a una computadora mediante módulos XBee. Para el análisis y visualización de la actividad muscular, se desarrolló una interfaz gráfica en **Visual Studio 2011**, que permite representar en tiempo real las señales adquiridas.

Otro ejemplo relevante de instrumentación para el procesamiento de señales mioeléctricas es presentado por los autores en [53], cuyo diseño de circuito se muestra en la figura 2.3.

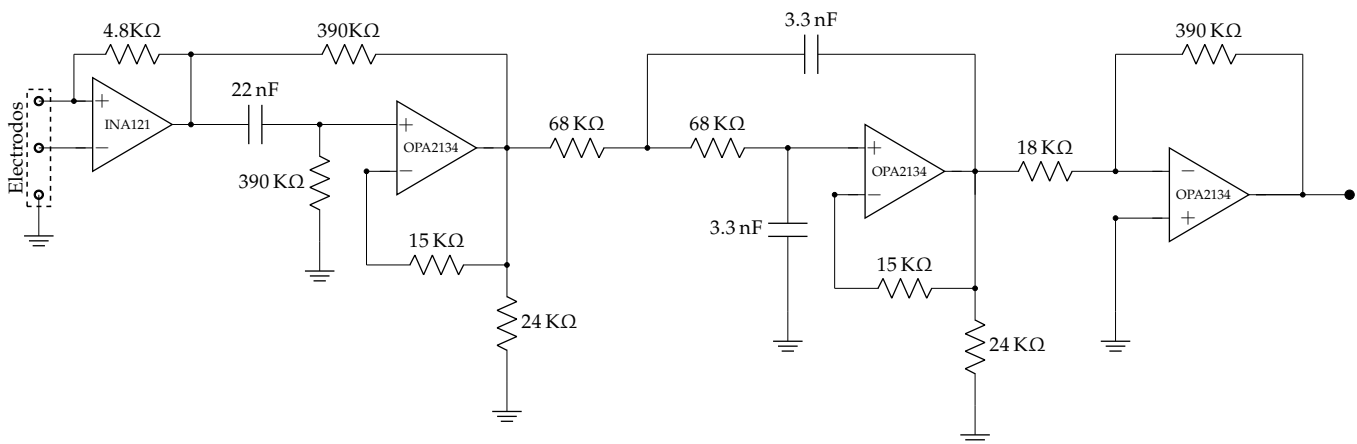


Figura 2.3: Etapa completa con INA121 y OPA2134 para adquisición y acondicionamiento

Para el experimento descrito, se diseñó un circuito de bajo costo utilizando el amplificador operacional de propósito general JRC4558. Adicionalmente, se desarrolló un segundo circuito implementando amplificadores operacionales INA121P y OPA2134 en la etapa de filtrado, los cuales presentan un desempeño superior en términos de rechazo de modo común (CMRR) y ancho de banda, en comparación con el JRC4558. La figura 2.3 muestra el circuito basado en el JRC4558, compuesto por una etapa inicial de amplificación instrumental, seguida de filtros activos y un amplificador inversor en la salida.

El circuito que emula el comportamiento del INA121P se construyó a partir de tres amplificadores operacionales y resistencias de 1 % de tolerancia y 1/4 W de potencia. Estas resistencias fueron seleccionadas para aproximarse a la configuración interna del INA121P. Debido a la disponibilidad limitada de valores estándar, las resistencias de 25 k Ω y 40 k Ω fueron sustituidas por 24 k Ω y 39 k Ω , respectivamente, para los componentes R_1 , R_2 y R_3, \dots, R_6 . Esta sustitución introduce una variación mínima en la ganancia de la etapa de búfer.

Es ampliamente aceptado que la mayor parte del contenido energético de la señal **EMG** se encuentra en el rango de 20 a 500 Hz. Para capturar esta banda de interés, se empleó una topología de filtrado de segundo orden tipo *Sallen–Key*. En el diseño de ambos filtros (pasa–altas y pasa–bajas), se utilizaron resistencias con 5 % de tolerancia y condensadores con la misma especificación. Con base en la disponibilidad de componentes comerciales, se definió una banda de paso aproximada de 20 Hz a 700 Hz, adecuada para registrar la actividad mioeléctrica relevante. Se estima que la tolerancia de los componentes no compromete de forma significativa la respuesta del filtro en dicha región.

Finalmente, se integró una etapa de amplificación inversora (IA) para ajustar la ganancia a un nivel adecuado para su visualización en el osciloscopio. Esta configuración fue preferida sobre la configuración no inversora debido a su simplicidad y menor número de componentes electrónicos.

Un último ejemplo de instrumentación para la adquisición de señales **EMG** se encuentra en el estudio de [4]. En la figura 2.4 se ilustra el diseño electrónico propuesto.

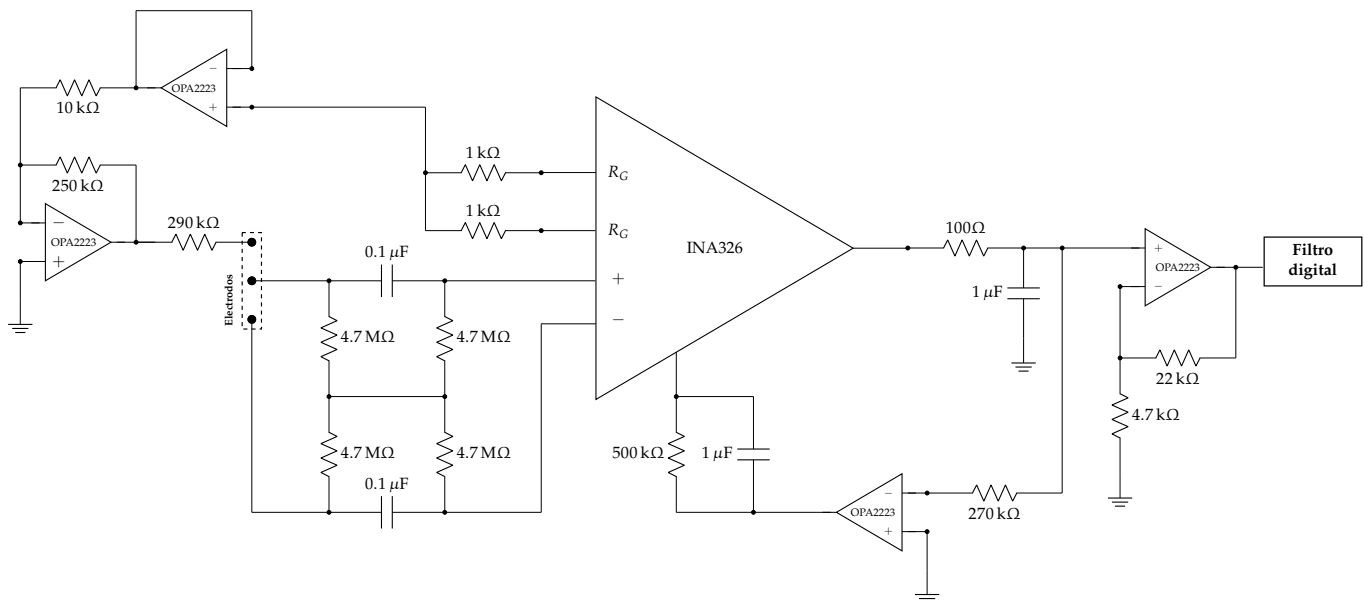


Figura 2.4: Circuito de adquisición con amplificación diferencial, referencia virtual y salida acondicionada

En este caso, el circuito fue diseñado para operar con una tensión de 5 V, suministrada a partir de una batería de 9 V. Para ello, se integró una etapa de regulación de voltaje, junto con un sistema de generación de referencia de señal, comúnmente denominado **tierra virtual**. Esta referencia se fijó a la mitad de la tensión regulada, es decir 2.5 V, y fue estabilizada mediante un amplificador operacional OPA2335 configurado como **búfer**.

El amplificador de instrumentación debe cumplir con los requisitos para operar en bajo voltaje (3.3 V–5 V) y poseer un alto **rechazo de modo común (CMRR > 90 dB)**.

Se seleccionó el modelo INA326, ajustado para proporcionar una ganancia de 500. Adicionalmente, se incluyó una etapa de amplificación posterior con una ganancia de 8, alcanzando una ganancia total del sistema de aproximadamente 4000.

Con el fin de optimizar el **rechazo de modo común (CMRR)**, se integró una red de resistencias y capacitores en la entrada del amplificador de instrumentación. Esta configuración cumple una doble función:

- funciona como un **filtro pasa–altas**, atenuando las componentes de baja frecuencia presentes entre las entradas diferenciales,
- y simultáneamente, establece una trayectoria de corriente continua que permite el adecuado polarizado del amplificador, evitando desplazamientos de nivel de voltaje.

La configuración utilizada para la adquisición de la señal mioeléctrica es de tipo diferencial, utilizando dos electrodos activos para medir la diferencia de potencial, y un tercer electrodo de referencia ubicado en una región anatómica distinta.

Este electrodo de referencia no se conecta directamente a tierra; en su lugar, se implementa un **circuito de pierna derecha activa (RLD, por sus siglas en inglés, *Right Leg Driven*)** para estabilizar las condiciones eléctricas del sistema.¹

El **RLD** opera reduciendo el voltaje de modo común que alcanza las entradas del amplificador de instrumentación. Esto se logra mediante la detección del voltaje de modo común promedio, su inversión de fase y posterior realimentación hacia el cuerpo, contrarrestando así perturbaciones externas.

¹El término *circuito de pierna derecha activa* es ampliamente utilizado en instrumentación biomédica para referirse a una técnica de realimentación activa empleada en la supresión del ruido de modo común en sistemas de adquisición de biopotenciales, como señales de **electrocardiograma ECG** o señal de **electromiograma EMG**.

2.5. Propuesta de circuito para la adquisición de señales EMG

La propuesta de circuito diseñada para la adquisición de señales electromiográficas (EMG) se estructura en diversas etapas funcionales, cada una con un propósito específico: adquisición de la señal, preamplificación, filtrado pasabanda, amplificación y ajuste de nivel mediante un circuito sumador. Estas etapas en conjunto permiten un acondicionamiento óptimo de la señal para su posterior procesamiento digital.

La etapa inicial se encarga de la captura de la señal mioeléctrica mediante electrodos de superficie, asegurando una detección confiable de la actividad muscular. En la figura 2.5 se presenta el esquema eléctrico detallado del sistema propuesto, en el que se ilustran las conexiones y componentes utilizados en cada fase del acondicionamiento de la señal.

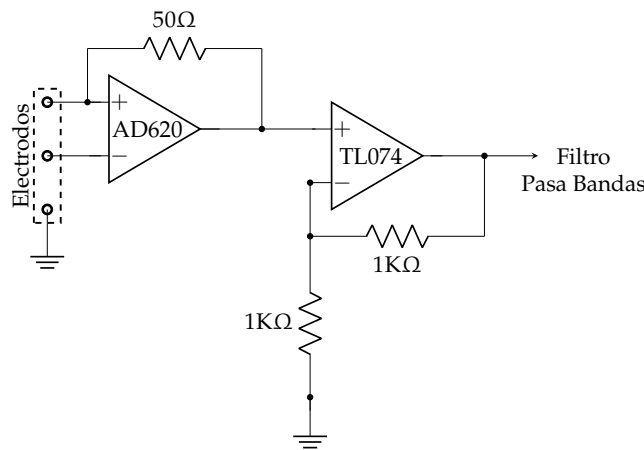


Figura 2.5: Etapa 1. Adquisición de señal

En la primera etapa del circuito se emplea un **amplificador de instrumentación** AD620, ampliamente reconocido por su capacidad para amplificar señales de muy baja amplitud, típicamente en el rango de los microvoltios. Este dispositivo fue configurado con una ganancia de 5000, lo que permite obtener una representación clara y detallada de la señal electromiográfica (EMG). Esta amplificación inicial resulta esencial, ya que la señal EMG está influenciada por múltiples factores, como el nivel de contracción muscular, la fuerza aplicada y posibles alteraciones en el sistema neuromuscular.

Tras esta etapa, la señal amplificada es enviada a un **circuito buffer con ganancia unitaria**. Este circuito cumple una función clave al preservar la integridad de la señal, evitando pérdidas o distorsiones provocadas por interferencias o impedancias de carga no ideales.

De este modo, se concluye adecuadamente la primera fase del acondicionamiento, garantizando que la señal esté preparada para un procesamiento más preciso. La segunda etapa del circuito está compuesta por un **filtro pasa bajas** y un **filtro pasa altas**, configurados para operar dentro del rango de frecuencias de 20 Hz a 500 Hz. Esta banda ha sido seleccionada cuidadosamente, ya que, como se expuso en el capítulo 1, las componentes de interés de las señales EMG se concentran en dicho intervalo.

Estos filtros tienen como función principal suprimir frecuencias no deseadas fuera de la banda de interés, mejorando así la relación señal a ruido. Para su implementación se utilizaron componentes electrónicos de alta precisión, incluyendo resistencias con baja tolerancia y capacitores de tantalio, junto con un amplificador operacional caracterizado por su rápida respuesta en frecuencia y baja impedancia de salida. Estas características permiten mantener una fidelidad elevada en la señal procesada.

El esquema eléctrico correspondiente al **filtro pasa bandas** empleado en esta etapa se muestra en la Figura 2.6.

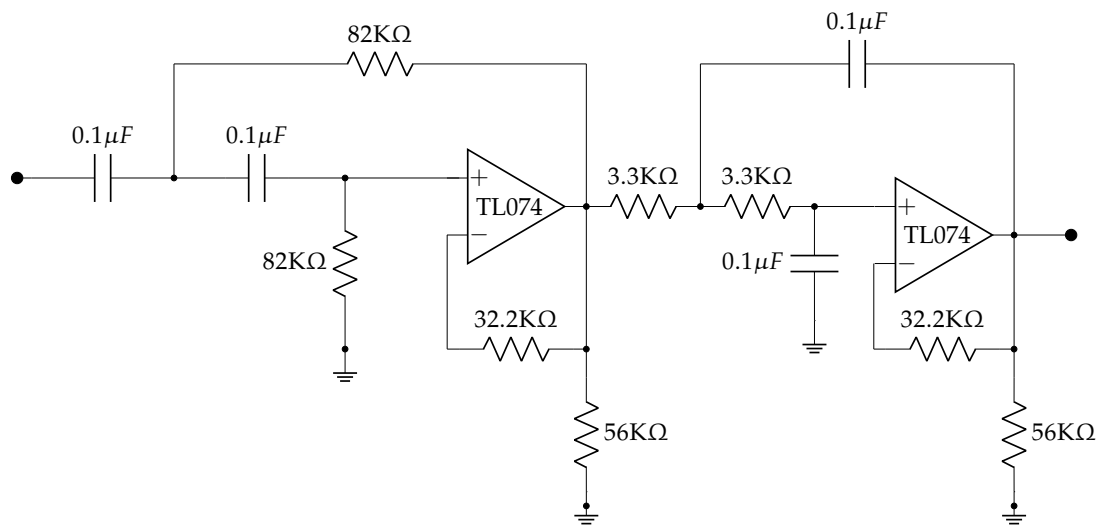


Figura 2.6: Etapa 2. Filtro pasa bandas

La tercera etapa del circuito incorpora un **seguidor de voltaje con ganancia unitaria**, cuya función principal es estabilizar la señal antes de su procesamiento final. Esta configuración proporciona una alta impedancia de entrada y baja impedancia de salida, lo que evita distorsiones debidas a cargas sucesivas en la etapa posterior.

A continuación, se introduce una etapa de amplificación adicional con una ganancia de 1.65, cuyo objetivo es ajustar el nivel de voltaje de salida de la señal **EMG** dentro de un rango de -2.5 V a 2.5 V . Este acondicionamiento es esencial para que la señal se encuentre dentro del margen aceptable para el **convertidor analógico-digital** del microcontrolador.

Con esta etapa se concluye el procesamiento de la señal en el dominio analógico. Posteriormente, la señal acondicionada es enviada a un microcontrolador, en este caso, una tarjeta **Arduino**[®], encargada de realizar la conversión analógica-digital.

Durante esta etapa de digitalización, se realizaron diversos ajustes en el circuito, motivados por dificultades iniciales en el manejo de la señal. Estas modificaciones se detallarán en el capítulo correspondiente a los resultados experimentales.

La Figura 2.7 muestra el esquema eléctrico correspondiente al seguidor de voltaje y a la etapa de amplificación final.

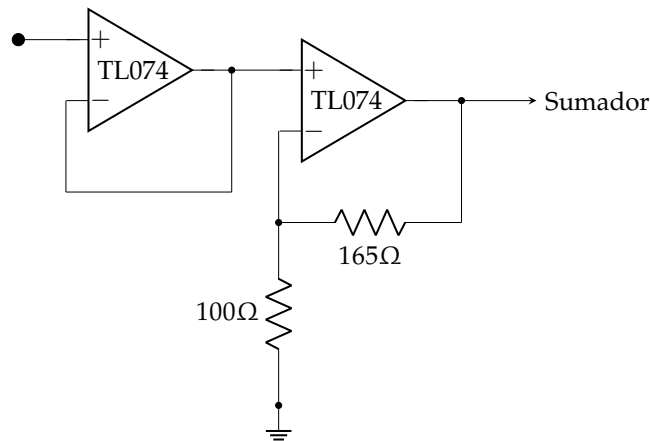


Figura 2.7: Etapa 3. Seguidor de voltaje y amplificador

La cuarta etapa del sistema incorpora un **circuito sumador**, cuyo esquema eléctrico se muestra en la figura 2.8. Esta etapa fue diseñada para resolver una limitación observada durante la conversión analógica-digital: el microcontrolador únicamente procesaba la porción positiva de la señal, lo que resultaba en una pérdida significativa de información.

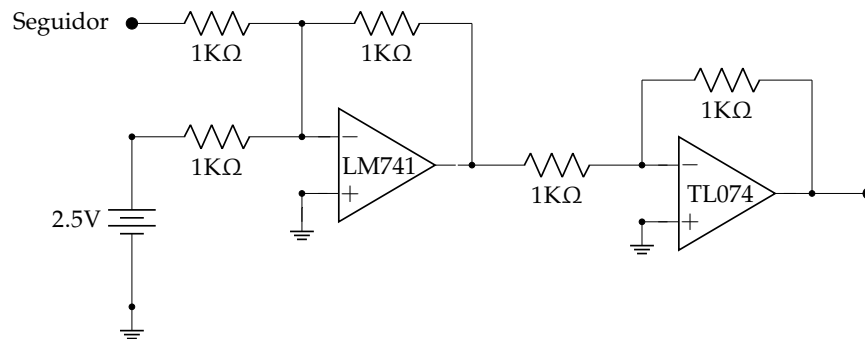


Figura 2.8: Etapa 4. Sumador de señales

Para superar esta restricción, se introdujo un voltaje de referencia constante de 2.5 V al sumador, con el fin de desplazar el nivel de voltaje de la señal **EMG**. Esta técnica de polarización permite trasladar el rango original de -2.5 V a 2.5 V hacia un nuevo intervalo comprendido entre 0 V y 5 V , estableciendo así los 2.5 V como el nuevo punto de referencia o *cero lógico*.

Gracias a este desplazamiento, toda la señal se encuentra ahora contenida en el dominio positivo, lo que permite un aprovechamiento completo del rango de entrada del convertidor analógico-digital. Esta estrategia optimiza el proceso de digitalización, garantizando una representación fiel y eficiente de la señal mioeléctrica.

Capítulo 3

Modelado de la Señal EMG

El modelado matemático de señales electromiográficas (**EMG**) es un paso esencial para comprender su comportamiento dinámico y desarrollar aplicaciones prácticas en control, rehabilitación y análisis biomédico. A partir de datos experimentales, es posible identificar modelos precisos que representen la relación entre la actividad neuromuscular y las señales captadas superficialmente.

En este capítulo se expone la metodología de identificación paramétrica como herramienta para construir modelos dinámicos a partir de la señal **EMG** real. Se desarrollan las bases teóricas del método de mínimos cuadrados recursivos, se presentan las deducciones formales y se abordan las condiciones necesarias para garantizar la estimación precisa de los parámetros del sistema.

3.1. Identificación Paramétrica

La identificación paramétrica constituye una herramienta central en el modelado de sistemas dinámicos, cuyo propósito es estimar los parámetros de un modelo matemático a partir de datos experimentales. Este enfoque permite obtener representaciones precisas de sistemas físicos mediante una estructura de modelo previamente definida, siendo ampliamente utilizado en disciplinas como el control automático, el procesamiento de señales, la economía y diversas áreas de la ingeniería aplicada, donde la construcción de modelos basados en observaciones empíricas es esencial para el análisis y la toma de decisiones fundamentadas.

Una de las metodologías más empleadas en ingeniería es el esquema de identificación paramétrica mediante **mínimos cuadrados recursivos (RLS, por sus siglas en inglés, *Recursive Least Squares*)**. Esta técnica adopta un enfoque híbrido: el modelo se plantea en tiempo continuo, mientras que el proceso de identificación se realiza de manera discreta a través de un estimador recursivo.

La recursividad de este método no solo lo hace computacionalmente eficiente, sino que también facilita su implementación en sistemas con procesamiento en tiempo real, lo que lo convierte en una alternativa atractiva para aplicaciones prácticas. En este contexto, el método de mínimos cuadrados, formulado inicialmente por *Carl Friedrich Gauss* en 1794, adquiere un rol protagónico. Su principio fundamental consiste en **minimizar la suma de los errores al cuadrado entre las observaciones y la salida estimada del modelo**, lo cual garantiza una solución óptima en el sentido del *teorema de Gauss–Markov*.

Este teorema establece que, bajo ciertas condiciones, el estimador de mínimos cuadrados no tiene sesgos y posee la menor varianza posible entre todos los estimadores lineales.

Un componente crítico para garantizar la calidad del proceso de identificación es el uso de **señales de excitación persistentemente**. Estas señales están diseñadas para activar adecuadamente todos los modos dinámicos del sistema, asegurando así la observabilidad y permitiendo una estimación precisa de los parámetros. Las propiedades espectrales y la persistencia de estas señales influyen directamente en la calidad de la identificación, por lo que su correcta selección y diseño son fundamentales.

En este capítulo se analiza en profundidad el enfoque de **identificación paramétrica mediante el algoritmo de mínimos cuadrados RLS**, aplicado al modelado de señales EMG. Se discuten sus fundamentos teóricos, los criterios de diseño de señales excitadoras, y se presentan ejemplos representativos para ilustrar su eficacia en sistemas dinámicos de interés biomédico.

3.1.1. Método de Mínimos Cuadrados

El método de mínimos cuadrados fue formulado por *Carl Friedrich Gauss* en 1794, y constituye uno de los pilares de la teoría de estimación. Su objetivo es encontrar los valores óptimos de los parámetros que minimizan la suma de los errores cuadrados entre las observaciones experimentales y la salida estimada del modelo.

En este contexto, el término **error** se refiere a la diferencia entre el valor observado de la variable dependiente y el valor estimado por el modelo. El criterio de minimizar la suma de estos errores cuadrados permite obtener una solución óptima conforme al **teorema de Gauss–Markov**, el cual establece que, bajo ciertas condiciones básicas del modelo lineal, el estimador de mínimos cuadrados no tiene sesgos y presenta la menor variabilidad posible entre todos los estimadores lineales [46].

3.1.1.1. Algoritmo Recursivo de Mínimos Cuadrados

El algoritmo recursivo de mínimos cuadrados es una técnica ampliamente empleada para la estimación en línea de parámetros en sistemas dinámicos, debido a su capacidad de actualización eficiente conforme se reciben nuevas mediciones [46]. Su formulación parte de un modelo de regresión lineal expresado en forma compacta como:

$$\mathbf{y}(k) = \boldsymbol{\varphi}^T(k)\boldsymbol{\theta} \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de observaciones (correspondiente a las salidas del sistema en tiempo discreto), $\boldsymbol{\varphi}(k) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ es la matriz de regresores construida a partir de funciones conocidas del sistema, y $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$ es el vector de parámetros desconocidos a estimar.

El índice $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ denota el instante de tiempo discreto en el cual se actualiza la estimación. Se asume que tanto $\mathbf{y}(k)$ como $\boldsymbol{\varphi}(k)$ pertenecen a un conjunto de datos secuenciales discretos, disponibles en tiempo real o generados por simulación.

Esta formulación constituye la base para el desarrollo del esquema recursivo que permite actualizar la estimación de θ en cada paso de tiempo sin necesidad de reprocesar la totalidad del conjunto de datos.

La estimación del vector de parámetros desconocidos θ se obtiene minimizando una función de costo cuadrática, definida como:

$$V(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\mathbf{y}(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k)\theta]^2 + \frac{1}{2} [\theta - \hat{\theta}(0)]^T \mathbf{P}^{-1}(0) [\theta - \hat{\theta}(0)] \quad (3.2)$$

En esta expresión, $\mathbf{P}(0) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ representa la condición inicial de la matriz de covarianza $\mathbf{P}(k)$, la cual debe ser definida positiva. Por su parte, $\hat{\theta}(0)$ es el valor inicial del vector de parámetros estimado.

El primer término de la función de costo cuantifica el error cuadrático acumulado entre las observaciones y la salida modelada, mientras que el segundo término penaliza la desviación respecto a la estimación inicial, favoreciendo estabilidad numérica en las etapas iniciales del algoritmo.

Si se deriva la función de costo dada en la ecuación (3.2) con respecto al vector de parámetros θ e igualando el resultado a cero, se obtiene:

$$\frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta} = - \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\varphi}(k)\mathbf{y}(k) + \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k)\theta + \mathbf{P}^{-1}(0)\theta - \mathbf{P}^{-1}(0)\hat{\theta}(0) = 0 \quad (3.3)$$

Resolviendo la ecuación anterior en términos de θ , se obtiene la forma explícita del estimador:

$$\theta = \left[\mathbf{P}^{-1}(0) + \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k) \right]^{-1} \left[\mathbf{P}^{-1}(0)\hat{\theta}(0) + \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\varphi}(k)\mathbf{y}(k) \right] \quad (3.4)$$

Esta expresión corresponde al **algoritmo estándar de mínimos cuadrados**.

Para obtener su formulación recursiva, se propone una actualización progresiva de la matriz de covarianza, definida como:

$$\mathbf{P}^{-1}(k) = \mathbf{P}^{-1}(0) + \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}(k)^T = \mathbf{P}^{-1}(0) + \underbrace{\sum_{k=1}^n \boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}(k)^T}_{\mathbf{P}^{-1}(k-1)} + \boldsymbol{\varphi}(n)\boldsymbol{\varphi}(n)^T \quad (3.5)$$

$$= \mathbf{P}^{-1}(k-1) + \boldsymbol{\varphi}(n)\boldsymbol{\varphi}(n)^T \quad (3.6)$$

donde $\mathbf{P}^{-1}(k)$ representa la matriz de información acumulada hasta el instante k .

En consecuencia, la estimación recursiva del vector de parámetros se expresa como:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \mathbf{P}(k) \left[\mathbf{P}^{-1}(0)\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) + \sum_{i=1}^k \boldsymbol{\varphi}(i)\mathbf{y}(i) \right] \quad (3.7)$$

donde $\mathbf{P}(k)$ es la matriz de covarianza actualizada hasta el instante k y $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$ es la estimación recursiva del vector de parámetros.

A partir del desarrollo de la ecuación (3.7), el vector estimado de parámetros puede expresarse en forma recursiva como:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \mathbf{P}(k)\boldsymbol{\varphi}(k) \left[\mathbf{y}(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) \right] \quad (3.8)$$

Para actualizar la matriz de covarianza $\mathbf{P}(k)$, se recurre al **lema de inversión de matrices**:

$$[\mathbf{A} + \mathbf{BC}]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \left[\mathbf{I} + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \right]^{-1} \mathbf{CA}^{-1} \quad (3.9)$$

donde se consideran las siguientes asignaciones: $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}(k-1)$, $\mathbf{B} = \boldsymbol{\varphi}(k)$ y $\mathbf{C} = \boldsymbol{\varphi}^T(k)$.

Aplicando esta identidad a la actualización de $\mathbf{P}(k)$ descrita en la ecuación (3.6), se obtiene:

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}(k-1) - \mathbf{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k) \left[\mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi}^T(k)\mathbf{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k) \right]^{-1} \boldsymbol{\varphi}^T(k)\mathbf{P}(k-1) \quad (3.10)$$

A partir de esta relación, se deduce además que:

$$\mathbf{P}(k)\boldsymbol{\varphi}(k) = \mathbf{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k) \left[\mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi}^T(k)\mathbf{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k) \right]^{-1} \quad (3.11)$$

Finalmente, las ecuaciones recursivas del **algoritmo de mínimos cuadrados recursivo** para el caso escalar se resumen como:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \frac{\mathbf{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)e(k)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(k)\mathbf{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}(k-1) - \frac{\mathbf{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^T(k)\mathbf{P}(k-1)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(k)\mathbf{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)} \quad (3.13)$$

$$e(k) = \mathbf{y}(k) - \boldsymbol{\varphi}^T(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) \quad (3.14)$$

3.1.1.2. Propiedades del algoritmo recursivo de mínimos cuadrados

Sea $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}_k$ el error de estimación del vector de parámetros, también conocido como **error paramétrico**. Bajo condiciones regulares, el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados (**RLS**) presenta las siguientes propiedades fundamentales:

- **Acotamiento del error paramétrico:**

$$\|\theta - \hat{\theta}_k\|^2 \leq \frac{\lambda_{P^{-1}(0)}^{\max}}{\lambda_{P^{-1}(0)}^{\min}} \|\theta - \hat{\theta}_0\|^2, \quad \forall k \geq 0 \quad (3.15)$$

- **Convergencia asintótica:**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\theta - \hat{\theta}_k\| = 0 \quad (3.16)$$

- **Acotación global:**

$$\|\hat{\theta}_k - \theta\| < \infty, \quad \forall k \geq 0 \quad (3.17)$$

En estas expresiones, $\hat{\theta}_k \in \mathbb{R}^p$ representa la estimación recursiva del vector de parámetros en el instante k , mientras que $\hat{\theta}_0 \in \mathbb{R}^p$ es la condición inicial del estimador. El vector $\theta \in \mathbb{R}^p$ contiene los parámetros reales del sistema. Los valores $\lambda_{P^{-1}(0)}^{\min}$ y $\lambda_{P^{-1}(0)}^{\max}$ corresponden al valor propio mínimo y máximo, respectivamente, de la matriz inversa de covarianza inicial $P^{-1}(0)$.

3.1.2. Señales de excitación persistente

En el contexto de la identificación paramétrica, el uso de señales de **excitación persistente (PE, por sus siglas en inglés, Persistent Excitation)** resulta indispensable para garantizar la estimabilidad de los parámetros del modelo. Este tipo de señales permite activar todos los modos dinámicos relevantes del sistema, asegurando una cobertura espectral suficiente dentro del ancho de banda de la planta y promoviendo la convergencia del algoritmo de mínimos cuadrados recursivos.

Una señal de excitación persistente está especialmente diseñada para inducir una dinámica rica en la respuesta del sistema. En términos formales, una señal escalar $u(t_k)$ se considera **de excitación persistente de orden n** si su matriz de covarianza asociada cumple una condición de rango completo. Esta matriz se define como:

$$\mathcal{C}_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(t_k) \varphi^T(t_k) \quad (3.18)$$

donde $\varphi(t_k)$ representa el vector de regresores del sistema. Si $\mathcal{C}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es de rango completo, entonces la señal $u(t_k)$ satisface la condición de excitación persistente.

Existen dos variantes de esta condición, ampliamente reportadas en la literatura [46]:

- **Excitación persistente fuerte:** una señal escalar $u(t_k)$ es de excitación persistente fuerte de orden n si para todo t_k existe un entero positivo δ y constantes positivas ρ_1, ρ_2 tales que:

$$\rho_1 \mathbf{I} > \sum_{i=t_k}^{t_k+\delta} \begin{bmatrix} u(i+n) \\ u(i+n-1) \\ \vdots \\ u(i+1) \end{bmatrix} [u(i+n) \quad u(i+n-1) \quad \cdots \quad u(i+1)] > \rho_2 \mathbf{I} \quad (3.19)$$

- **Excitación persistente débil:** una señal escalar $u(t_k)$ es de excitación persistente débil si:

$$\rho_1 \mathbf{I} \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} u(k+n) \\ u(k+n-1) \\ \vdots \\ u(k+1) \end{bmatrix} [u(k+n) \quad u(k+n-1) \quad \cdots \quad u(k+1)] \geq \rho_2 \mathbf{I} \quad (3.20)$$

3.1.2.1. Características cualitativas y diseño práctico

Las señales de excitación persistente débil deben poseer suficiente contenido energético en el espectro de frecuencias del sistema para garantizar la activación de todos sus modos dinámicos. Esta propiedad asegura que el error de predicción $e(t_k)$ tiende a cero en el tiempo, promoviendo la convergencia del estimador recursivo.

- Una señal escalón presenta un contenido espectral bajo en frecuencias, útil para caracterizar el comportamiento estático o dinámico de baja frecuencia del sistema.
- El ruido blanco constituye una señal de excitación persistente teóricamente ideal, aunque en la práctica su uso puede inducir deriva paramétrica, especialmente en coeficientes asociados a fricción u otros efectos lentos.
- Una alternativa ampliamente recomendada son las señales **multisinusoidales periódicas**, compuestas por frecuencias irracionales y fases aleatorias:

$$u(t_k) = \sum_{j=1}^m a_j \text{sen}(\omega_j t_k + \varphi_j) \quad (3.21)$$

donde a_j son las amplitudes, ω_j son frecuencias irracionales en el intervalo $(0, \pi)$, y φ_j son fases aleatorias. Cada componente senoidal contribuye a la estimación de dos parámetros del modelo, por lo tanto, si se desea estimar p parámetros, se requiere al menos $m = p/2$ componentes.

- El espectro de potencia asociado a esta señal es discreto y se expresa como:

$$\phi_u(\omega) = 2\pi \sum_{j=1}^m \frac{a_j^2}{4} [\delta(\omega - \omega_j) + \delta(\omega + \omega_j)] \quad (3.22)$$

- Se recomienda añadir una componente constante y un término exponencial decreciente para contrarrestar efectos de fricción estática.
- En sistemas con derivación numérica (estimación de velocidad o aceleración), la frecuencia de corte de los filtros utilizados debe ser adecuadamente seleccionada, de forma que la dinámica del filtro no domine la dinámica del sistema.

Finalmente, la convergencia de los estimadores en el algoritmo de mínimos cuadrados se garantiza si se satisface que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{\min}\{\mathbf{P}^{-1}(k-1)\} = \infty \quad (3.23)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \boldsymbol{\varphi}(i)\boldsymbol{\varphi}(i)^T = \infty \quad (3.24)$$

Estas condiciones aseguran que la información contenida en los datos es suficiente para estimar todos los parámetros del sistema con precisión.

3.2. Construcción del modelo EMG mediante RLS

Para modelar la señal electromiográfica (EMG), se adquieren datos experimentales con un periodo de muestreo h y un número total de muestras N . Estos datos se procesan mediante el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados descrito en la ecuación (3.1), donde $y(k)$ representa la señal EMG adquirida, $\boldsymbol{\theta}$ es el vector de parámetros desconocidos, y $\boldsymbol{\varphi}(k)$ es el vector de regresión definido como:

$$\boldsymbol{\varphi}(k) = \sum_{j=1}^{100} [\text{sen}(2\pi j t_k) f_j(t_k) + \text{cos}(2\pi j t_k) f_j(t_k)] \quad (3.25)$$

donde cada función $f_j(t_k)$ está definida por:

$$f_j(t_k) = \begin{cases} 1, & \text{si } j \in \{1, 2, 3, 4\} \\ t_k^{m_j}, & \text{si } j > 4 \text{ y } j \text{ par, con } m_j = \frac{j-4}{2} \\ \sqrt{t_k^{m_j}}, & \text{si } j > 4 \text{ y } j \text{ impar, con } m_j = \frac{j-4}{2} \\ e^{-t_k^{n_j}}, & \text{para ciertos } j \text{ impares con } n_j = \frac{j-4}{4} \end{cases} \quad (3.26)$$

Esta formulación permite generar una base funcional rica, compuesta por senos y cosenos ponderados por funciones polinómicas, exponenciales o de tipo raíz. La continuidad y variedad espectral garantizan que la señal de entrada sea suficientemente persistente, facilitando una estimación robusta de los parámetros del modelo.

Una vez aplicado el algoritmo RLS y obtenidos los parámetros θ_i , es posible construir el modelo estimado de la señal **EMG** como:

$$\text{EMG}(t_k) = \sum_{i=1}^{200} \varphi_i(t_k) \theta_i \quad (3.27)$$

donde $\varphi_i(t_k)$ representa el valor del i -ésimo regresor en el instante t_k , θ_i es el coeficiente estimado correspondiente, y $\text{EMG}(t_k)$ es la señal modelada.

De esta manera, el conjunto de funciones base $\varphi(t)$ junto con el vector de parámetros θ conforman el modelo matemático completo que permite reproducir la señal **EMG** a partir de datos adquiridos.

Capítulo 4

Modelado y Control del Sistema Experimental

En la actualidad, los robots manipuladores desempeñan un papel fundamental en la automatización de procesos industriales, así como en aplicaciones médicas, aeroespaciales, de servicio y en la investigación científica en robótica. Su capacidad para ejecutar tareas de manipulación con elevada precisión y rapidez ha motivado el desarrollo de modelos matemáticos que describan su dinámica y permitan el diseño de estrategias de control eficientes.

El modelado dinámico de un robot manipulador resulta esencial para comprender su comportamiento frente a fuerzas externas y movimientos articulares, ya que proporciona una representación formal del sistema mediante ecuaciones diferenciales no lineales derivadas de los principios de la mecánica clásica, particularmente a través del formalismo de Euler–Lagrange. Esta formulación permite establecer la relación entre los torques de entrada y la evolución temporal de las variables de estado, constituyendo la base para el diseño y análisis de esquemas de control.

Entre las estrategias de control más ampliamente utilizadas en sistemas robóticos destaca el **control de posición**, cuya finalidad es asegurar que el efector final del manipulador alcance y mantenga una configuración deseada. Para este propósito, se emplean técnicas de control clásicas como el **controlador proporcional–derivativo (PD)**, el cual combina realimentación de posición y velocidad para generar señales de control robustas ante perturbaciones e incertidumbres moderadas.

En este capítulo se desarrolla el modelo dinámico de un robot manipulador y se presenta su aplicación en el diseño de un sistema de control de posición. Se deducen las ecuaciones que gobiernan la dinámica del sistema, y se describen los fundamentos del esquema de control implementado, destacando los criterios de estabilidad, precisión y capacidad de rechazo ante perturbaciones externas.

4.1. Modelado Dinámico del Sistema Experimental

El modelo dinámico de un robot manipulador permite describir con precisión los fenómenos físicos que influyen en su comportamiento mecánico, tales como los efectos de inercia, las fuerzas centrípetas y de Coriolis, el par gravitacional y la fricción.

La mecánica analítica, particularmente mediante el formalismo de Euler–Lagrange, proporciona un marco robusto para formular estos modelos a partir de principios fundamentales. En este contexto, la dinámica establece la relación entre las fuerzas que actúan sobre el sistema y el movimiento resultante [46]. El modelo dinámico de un robot manipulador con n grados de libertad se expresa mediante la siguiente ecuación matricial:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) = \boldsymbol{\tau} \quad (4.1)$$

donde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de coordenadas generalizadas, $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz masas e inercias la cual es simétrica y definida positiva, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de Coriolis y fuerza centrípeta, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ representa el par gravitacional, $\mathbf{f}_f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \in \mathbb{R}^n$ corresponde a las fuerzas de fricción viscosa, y $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de pares aplicados.

Esta formulación se deriva a partir de la ecuación de movimiento de Euler–Lagrange, la cual se expresa como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \boldsymbol{\tau} \quad (4.2)$$

donde $\frac{\partial \mathcal{D}(\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ representa la energía disipativa del sistema, $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es el lagrangiano del sistema, definido como la diferencia entre la energía cinética $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ y la energía potencial $\mathcal{U}(\mathbf{q})$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}). \quad (4.3)$$

En la Figura 4.1 se muestra el prototipo del péndulo empleado para derivar su modelo dinámico.

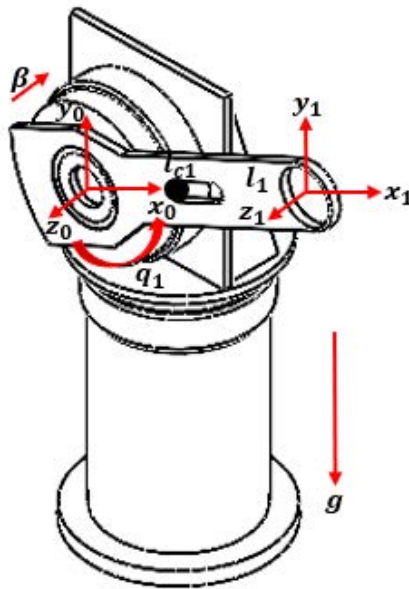


Figura 4.1: Configuración geométrica del péndulo.

El sistema considerado está compuesto por un servomotor y una barra metálica rígida de longitud l_1 , formando un péndulo simple. El sistema de coordenadas se define de modo que el eje z coincida con el eje de rotación del servomotor (perpendicular al plano de la figura) y el plano $\{xy\}$ se establezca según la regla de la mano derecha. La aceleración de la gravedad g se orienta en la dirección negativa del eje y .

Considerando la Figura 4.1, se definen las siguientes características:

- El origen del sistema de coordenadas $\Sigma(x, y, z)$ se localiza en el eje del rotor del servomotor.
- El ángulo de giro del servomotor respecto al eje z se denota como q_1 .
- El plano $\{xy\}$ se define según la regla de la mano derecha; la gravedad g actúa en dirección contraria al eje y .
- Los parámetros dinámicos relevantes son la distancia al centro de masa l_{c1} y el momento de inercia \mathcal{I}_{zz1} .

Para formular el modelo dinámico, se define un sistema de coordenadas fijo en el origen y un sistema móvil en el extremo del eslabón. Esta configuración permite incorporar los efectos del servomotor, la masa del eslabón y la orientación del eje z .

A continuación, se obtiene la cinemática directa utilizando un enfoque geométrico. La posición del centro de masa en el sistema de referencia fijo se expresa como:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_{z0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \\ l_{c1} \sin(q_1) \\ \beta_1 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

La velocidad lineal del centro de masa se obtiene derivando la posición anterior:

$$\dot{\mathbf{p}}_0 = \mathcal{S}(\dot{q}_1, \mathbf{k}_0) \mathbf{R}_{z0}(q_1) \begin{bmatrix} l_{c1} \\ 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

La magnitud de esta velocidad se determina mediante su norma euclidiana:

$$\|\dot{\mathbf{p}}_0\|^2 = l_{c1}^2 \dot{q}_1^2. \quad (4.6)$$

La velocidad angular se expresa como:

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \dot{q}_1 \mathbf{k}_0. \quad (4.7)$$

La energía cinética total del sistema se determina mediante:

$$\mathcal{K}(q_1, \dot{q}_1) = \frac{1}{2}m_1\|\dot{\mathbf{p}}_0\|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_0^T\mathcal{I}_1\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{1}{2}[m_1l_{c1}^2 + \mathcal{I}_{zz1}]\dot{q}_1^2. \quad (4.8)$$

A continuación se define la Figura 4.2, la cual sirve para definir el desplazamiento del centro de masa l_{c1} del péndulo.

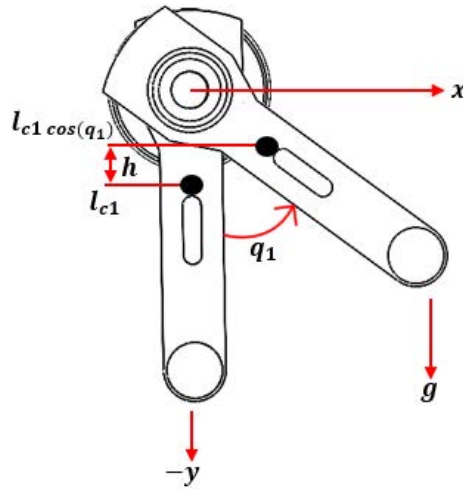


Figura 4.2: Desplazamiento del centro de masa l_{c1} .

En base al desplazamiento vertical del centro de masa l_{c1} se obtiene la energía potencial, tal que:

$$\mathcal{U}(q_1) = m_1gh(q_1) = m_1gl_{c1}[1 - \cos(q_1)]. \quad (4.9)$$

Así, el lagrangiano del sistema se expresa como:

$$\mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1) = \mathcal{K}(q_1, \dot{q}_1) - \mathcal{U}(q_1) = \frac{1}{2}[m_1l_{c1}^2 + \mathcal{I}_{zz1}]\dot{q}_1^2 - m_1gl_{c1}[1 - \cos(q_1)]. \quad (4.10)$$

Evalutando la ecuación de Euler-Lagrange descrita en (4.2) se obtiene:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_1} = [m_1l_{c1}^2 + \mathcal{I}_{zz1}]\dot{q}_1 \quad (4.11)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_1} \right] = [m_1l_{c1}^2 + \mathcal{I}_{zz1}]\ddot{q}_1 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q_1, \dot{q}_1)}{\partial q_1} = -m_1gl_{c1}\text{sen}(q_1). \quad (4.13)$$

Finalmente, el modelo dinámico completo del péndulo queda expresado como:

$$\tau = [m_1 l_{c1}^2 + \mathcal{I}_{zz1}] \ddot{q}_1 + b_1 \dot{q}_1 + m_1 g l_{c1} \sin(q_1). \quad (4.14)$$

4.2. Modelado de la Ley de Control de Tipo Acotado

El control de posición en robots manipuladores, también denominado control de regulación o posición pura, tiene como objetivo posicionar el extremo del robot en una referencia deseada constante, partiendo desde cualquier condición inicial. Si la referencia varía con el tiempo, el problema se convierte en un control de trayectoria o movimiento, donde también se regula la velocidad. Matemáticamente, el problema consiste en diseñar una ley de control τ tal que el error de posición $\tilde{q}(t)$ y la velocidad $\dot{q}(t)$ converjan asintóticamente a cero, independientemente de las condiciones iniciales:

$$\tau = \nabla \mathcal{U}_a(\mathbf{K}_p, \tilde{q}) - f_v(\mathbf{K}_v, \dot{q}) + g(q) \quad (4.15)$$

donde $\mathcal{U}_a(\mathbf{K}_p, \tilde{q})$ representa una función de energía potencial artificial, y su gradiente $\nabla \mathcal{U}_a(\mathbf{K}_p, \tilde{q})$ actúa como fuerza de restauración que modela el esquema de control. Esta debe ser continua, satisfacer que $\nabla \mathcal{U}_a(\mathbf{K}_p, \tilde{q}) = 0$ si y solo si $\tilde{q} = 0$, y que $\tilde{q}^T \nabla \mathcal{U}_a(\mathbf{K}_p, \tilde{q}) > 0$.

Los parámetros $\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices diagonales definidas positivas que representan las ganancias proporcional y derivativa, respectivamente. Además, \tilde{q} es el vector de error de posición y $g(q)$ representa la compensación gravitacional. El término $f_v(\mathbf{K}_v, \dot{q})$ modela el amortiguamiento del sistema y cumple con $\dot{q}^T f_v(\mathbf{K}_v, \dot{q}) > 0$.

Los esquemas de control acotado limitan las señales de control dentro de valores físicos razonables, evitando la saturación de actuadores como motores o servos. En este contexto, se propone el siguiente controlador PD modificado:

$$\tau = \mathbf{K}_p \frac{\nabla \mathcal{U}_a(\tilde{q})}{1 + \mathcal{U}_a(\tilde{q})} - \mathbf{K}_v \frac{f_v(\dot{q})}{1 + f^*(\dot{q})} + m_1 g l_{c1} \sin(q_1) \quad (4.16)$$

donde $f^*(\dot{q}) = f_v(\dot{q})$ y la función $\psi(\cdot) = \frac{\nabla \mathcal{U}_a(\cdot)}{1 + \mathcal{U}_a(\cdot)}$ impone la saturación suave al control proporcional y derivativo. Este tipo de control permite garantizar estabilidad global sin exigir grandes esfuerzos de control.

Sustituyendo la ley de control definida en (4.16) en el modelo dinámico del péndulo, ecuación (4.14), se obtiene:

$$[m_1 l_{c1}^2 + \mathcal{I}_{zz1}] \ddot{q}_1 + b_1 \dot{q}_1 = \mathbf{K}_p \frac{\nabla \mathcal{U}_a(\tilde{q})}{1 + \mathcal{U}_a(\tilde{q})} - \mathbf{K}_v \frac{f_v(\dot{q})}{1 + f^*(\dot{q})}. \quad (4.17)$$

De esta manera, la ecuación del sistema en lazo cerrado se expresa como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 \\ \frac{1}{[m_1 l_{c_1}^2 + \mathcal{I}_{zz1}]} \left[K_p \frac{\nabla \mathcal{U}_a(\tilde{q})}{1 + \mathcal{U}_a(\tilde{q})} - K_v \frac{f_v(\dot{q})}{1 + f^*(\dot{q})} - b_1 \dot{q}_1 \right] \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Una vez obtenida la ecuación de lazo cerrado, se procede a demostrar la existencia del punto de equilibrio. Para ello, se analizan las siguientes condiciones:

$$-\dot{q}_1 = 0 \implies \dot{q}_1 = 0 \implies q_1(t) = \text{cte} \quad (4.19)$$

Al sustituir esta condición en la ecuación de lazo cerrado, se obtiene:

$$\frac{1}{m_1 l_{c_1}^2 + \mathcal{I}_{zz1}} \left[K_p \frac{\nabla \mathcal{U}_a(\tilde{q}_1)}{1 + \mathcal{U}_a(\tilde{q})} - K_v \frac{f_v(\dot{q})}{1 + f^*(\dot{q})} - b_1 \dot{q} \right] = 0 \quad (4.20)$$

Como el término $\frac{1}{m_1 l_{c_1}^2 + \mathcal{I}_{zz1}}$ es estrictamente positivo debido a que representa la inercia total del sistema, el equilibrio sólo puede alcanzarse si el numerador se anula:

$$K_p \frac{\nabla \mathcal{U}_a(\tilde{q})}{1 + \mathcal{U}_a(\tilde{q})} - K_v \frac{f_v(\dot{q})}{1 + f^*(\dot{q})} - b_1 \dot{q} = 0. \quad (4.21)$$

Considerando $\dot{q} = 0$ en la ecuación anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} K_p \frac{\nabla \mathcal{U}_a(\tilde{q})}{1 + \mathcal{U}_a(\tilde{q})} - K_v \frac{f_v(0)}{1 + f^*(0)} - b_1(0) &= 0 \\ K_p \frac{\nabla \mathcal{U}_a(\tilde{q})}{1 + \mathcal{U}_a(\tilde{q})} &= 0 \implies \tilde{q} = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Alternativamente, esta condición puede verificarse directamente al igualar las componentes del sistema en lazo cerrado a cero:

$$-\dot{q}_1 = 0 \implies \dot{q}_1 = 0 \quad (4.23)$$

$$K_p \frac{\nabla \mathcal{U}_a(\tilde{q})}{1 + \mathcal{U}_a(\tilde{q})} = 0 \implies \tilde{q} = 0 \quad (4.24)$$

Por lo tanto, se concluye que el sistema posee un único punto de equilibrio localizado en el origen del espacio de estados, es decir:

$$(\tilde{q}_1, \dot{q}_1) = (0, 0). \quad (4.25)$$

Una vez establecida la existencia del punto de equilibrio, el siguiente paso consiste en analizar la estabilidad del sistema mediante la teoría de Lyapunov.

Para ello, se propone la siguiente función candidata:

$$V(\dot{q}_1, \tilde{q}_1) = \frac{1}{2}[m_1 l_{c1}^2 + \mathcal{I}_{zz1}]\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}K_p \ln(1 + \mathcal{U}_a(\tilde{q}_1)) \quad (4.26)$$

Al evaluar esta función en el punto de equilibrio $(\tilde{q}_1, \dot{q}_1) = (0, 0)$, se tiene $V(0, 0) = 0$, cumpliendo así la primera condición para ser una función de Lyapunov.

A continuación, se analiza su derivada temporal:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\dot{q}_1, \tilde{q}_1) &= [m_1 l_{c1}^2 + \mathcal{I}_{zz1}]\dot{q}_1 \ddot{q}_1 - K_p \frac{\nabla \mathcal{U}_a(\tilde{q})}{1 + \mathcal{U}_a(\tilde{q})} \dot{q}_1 \\ &= \dot{q}_1 \left(K_p \frac{\nabla \mathcal{U}_a(\tilde{q})}{1 + \mathcal{U}_a(\tilde{q})} - K_v \frac{f_v(\dot{q})}{1 + f^*(\dot{q})} - b_1 \dot{q}_1 \right) - K_p \frac{\nabla \mathcal{U}_a(\tilde{q})}{1 + \mathcal{U}_a(\tilde{q})} \dot{q}_1 \\ &= \cancel{\dot{q}_1 K_p \frac{\nabla \mathcal{U}_a(\tilde{q})}{1 + \mathcal{U}_a(\tilde{q})}} \overset{0}{\rightarrow} - \dot{q}_1 K_v \frac{f_v(\dot{q})}{1 + f^*(\dot{q})} - b_1 \dot{q}_1^2 - \cancel{\dot{q}_1 K_p \frac{\nabla \mathcal{U}_a(\tilde{q})}{1 + \mathcal{U}_a(\tilde{q})}} \overset{0}{\rightarrow} \\ &= -\dot{q}_1 K_v \frac{f_v(\dot{q})}{1 + f^*(\dot{q})} - b_1 \dot{q}_1^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Si se considera una función artificial de energía potencial del tipo $\mathcal{U}_a(\tilde{q}) = \tilde{q}^2$, también se puede reescribir V como:

$$V(\dot{q}, \tilde{q}) = \frac{1}{2}[m l_c^2 + \mathcal{I}_{zz1}]\dot{q}^2 + \frac{1}{2}K_p \ln(1 + \tilde{q}^2) \quad (4.28)$$

cuya derivada temporal, usando el modelo dinámico cerrado, se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) &= [m_1 l_{c_1}^2 + \mathcal{I}_{zz1}] \dot{q}_1 \ddot{q}_1 - K_p \frac{\tilde{q}_1}{1 + \tilde{q}_1^2} \dot{q}_1 \\
&= \dot{q}_1 \left(K_p \frac{\tilde{q}_1}{1 + \tilde{q}_1^2} - K_v \frac{\dot{q}_1}{1 + \dot{q}_1^2} - b_1 \dot{q}_1 \right) - K_p \frac{\tilde{q}_1}{1 + \tilde{q}_1^2} \dot{q}_1 \\
&= \cancel{\dot{q}_1 K_p \frac{\tilde{q}_1}{1 + \tilde{q}_1^2}} - \dot{q}_1 K_v \frac{\dot{q}_1}{1 + \dot{q}_1^2} - b_1 \dot{q}_1^2 - \cancel{\dot{q}_1 K_p \frac{\tilde{q}_1}{1 + \tilde{q}_1^2}} \\
&= -\dot{q}_1 K_v \frac{\dot{q}_1}{1 + \dot{q}_1^2} - b_1 \dot{q}_1^2 \leq 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Lo cual confirma que \dot{V} es semidefinida negativa. Por tanto, la función V es válida como función de Lyapunov. Finalmente, al resumir el análisis de estabilidad:

$$\dot{V} = -\dot{q}_1 K_v \frac{f_v(\dot{q}_1)}{1 + f^*(\dot{q}_1)} - b_1 \dot{q}_1^2 \leq 0 \tag{4.30}$$

Dado que V es definida positiva y \dot{V} es semidefinida negativa, se concluye estabilidad. Para demostrar convergencia asintótica se aplica el Lema de Lyapunov:

- $V(\mathbf{x}, t)$ está acotada inferiormente.
- $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ es semidefinida negativa.
- $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ es uniformemente continua.

Por lo tanto, $\dot{V} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, lo cual implica que $\tilde{q} \rightarrow 0$ y $\dot{q} \rightarrow 0$.

Capítulo 5

Resultados experimentales

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos a partir de la implementación física del sistema experimental propuesto, el procesamiento de señales electromiográficas (EMG) y la validación del esquema de control. El enfoque experimental permite evaluar la funcionalidad y robustez de cada uno de los bloques desarrollados, desde la instrumentación para la adquisición de señales hasta el control en lazo cerrado de un sistema mecatrónico. A continuación, se describen las etapas experimentales y se analiza el desempeño del sistema en condiciones reales de operación.

5.1. Instrumentación y adquisición de la señal EMG

En la Figura 5.1 se muestra el circuito físico completo utilizado para la adquisición de la señal. A partir de este diseño, se analizan las salidas obtenidas en cada etapa del procesamiento.

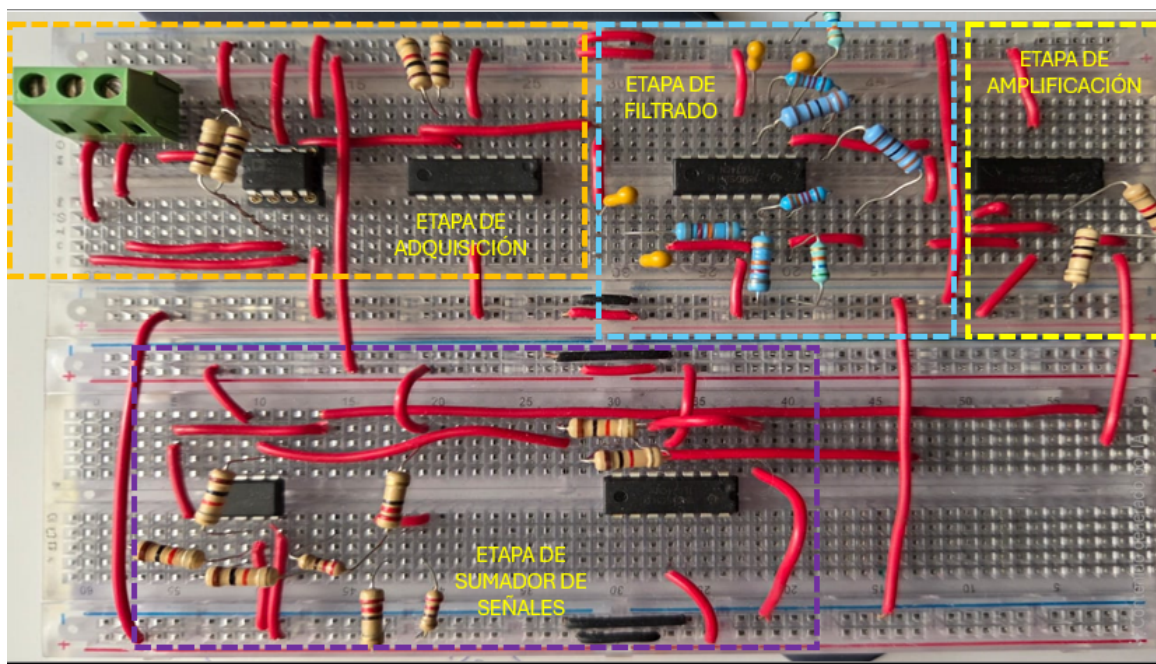


Figura 5.1: Circuito físico para la adquisición de la señal EMG.

Con el propósito de capturar señales **EMG** de manera eficiente, se desarrolló un sistema de instrumentación compuesto por múltiples etapas de amplificación, filtrado y desplazamiento de nivel.

El objetivo principal fue obtener una señal lo suficientemente limpia, libre de interferencias espurias, y con niveles de tensión adecuados para su posterior digitalización a través de un microcontrolador.

Para la adquisición de la señal, se emplearon tres electrodos de superficie: dos de ellos colocados en la zona de máxima contracción muscular, mientras que el tercero se ubicó sobre una región ósea para establecer la referencia de tierra. Esta configuración diferencial mejora la inmunidad al ruido, permitiendo una captura más precisa y confiable.

La primera etapa del circuito se basa en un amplificador de instrumentación (modelo AD620), cuya ganancia fue ajustada experimentalmente para optimizar la amplitud de la señal. En la Figura 5.2, se observa en el canal 2 la salida directa del amplificador, registrada con una escala de 200 mV, en la cual se aprecian claramente niveles significativos de ruido. En contraste, el canal 1 muestra una etapa posterior de amplificación configurada a 500 mV, donde la señal se presenta con mayor amplitud y claridad, aunque aún con la presencia de ruido residual.

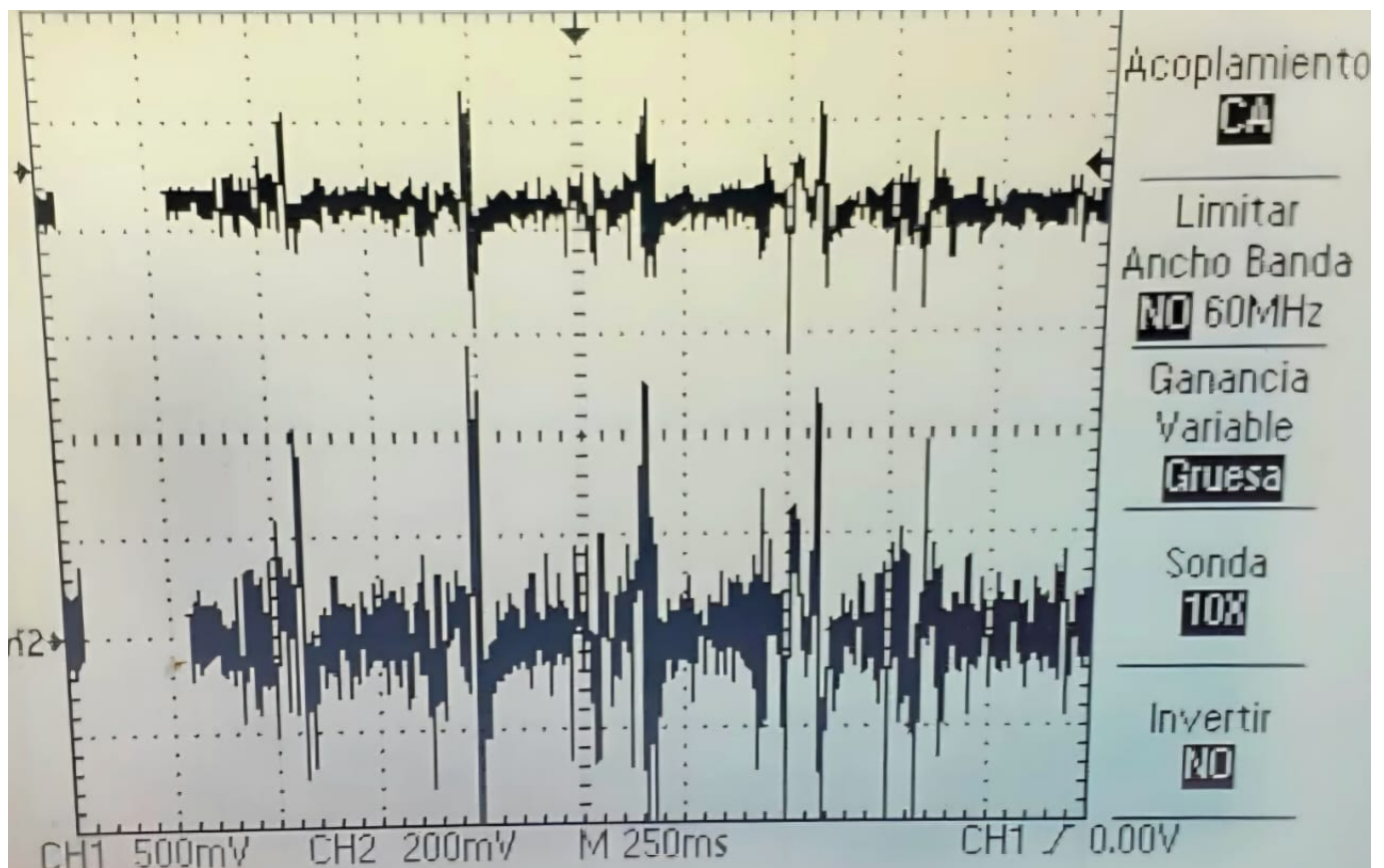


Figura 5.2: Señal **EMG** en etapas iniciales de amplificación.

Posteriormente, la señal se somete a un filtrado pasa bandas con un rango de 20 Hz a 500 Hz. Este filtro está compuesto por una combinación de filtros pasa altas y pasa bajas, cuyo propósito es eliminar componentes de baja frecuencia, como el movimiento del cableado, y de alta frecuencia, como el ruido de la red eléctrica.

En la Figura 5.3 se muestran las respuestas de ambos filtros. En el canal 1 se aprecia la señal tras el filtro pasa altas, donde se reduce el ruido de baja frecuencia. En el canal 2, se presenta la salida final del filtrado, con la señal EMG claramente definida.

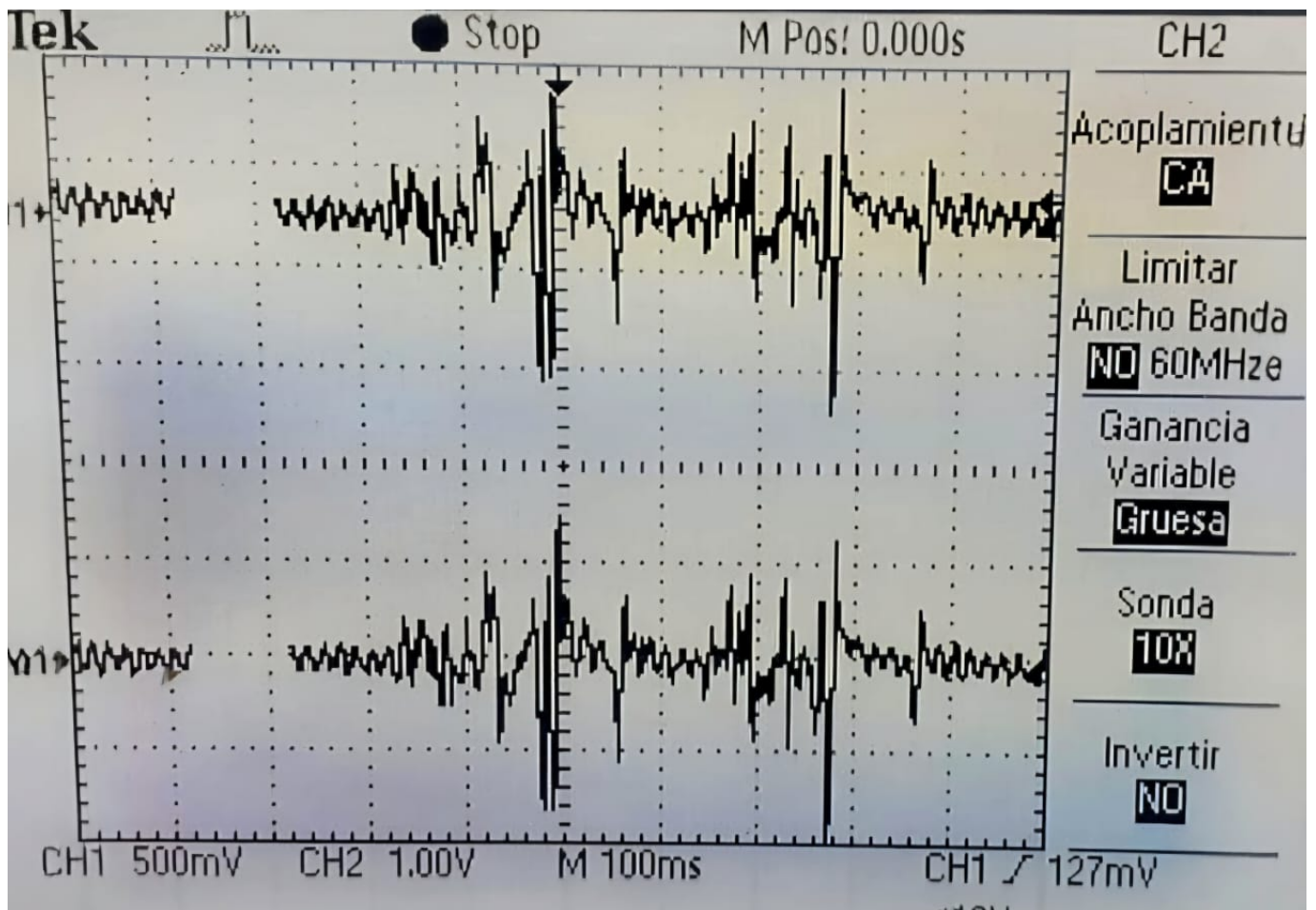


Figura 5.3: Etapas de filtrado: señal EMG tras pasa altas (canal 1) y filtrado completo (canal 2).

Una vez filtrada, la señal es amplificada nuevamente para ajustarla a un rango máximo de 5 V_{pp}, compatible con la entrada del microcontrolador. No obstante, durante la digitalización se detectó un problema: el sistema solo conservaba la parte positiva de la señal, descartando la porción negativa.

En la Figura 5.4 se ilustra este inconveniente. La señal aparece recortada y presenta distorsiones que impiden su correcta interpretación.

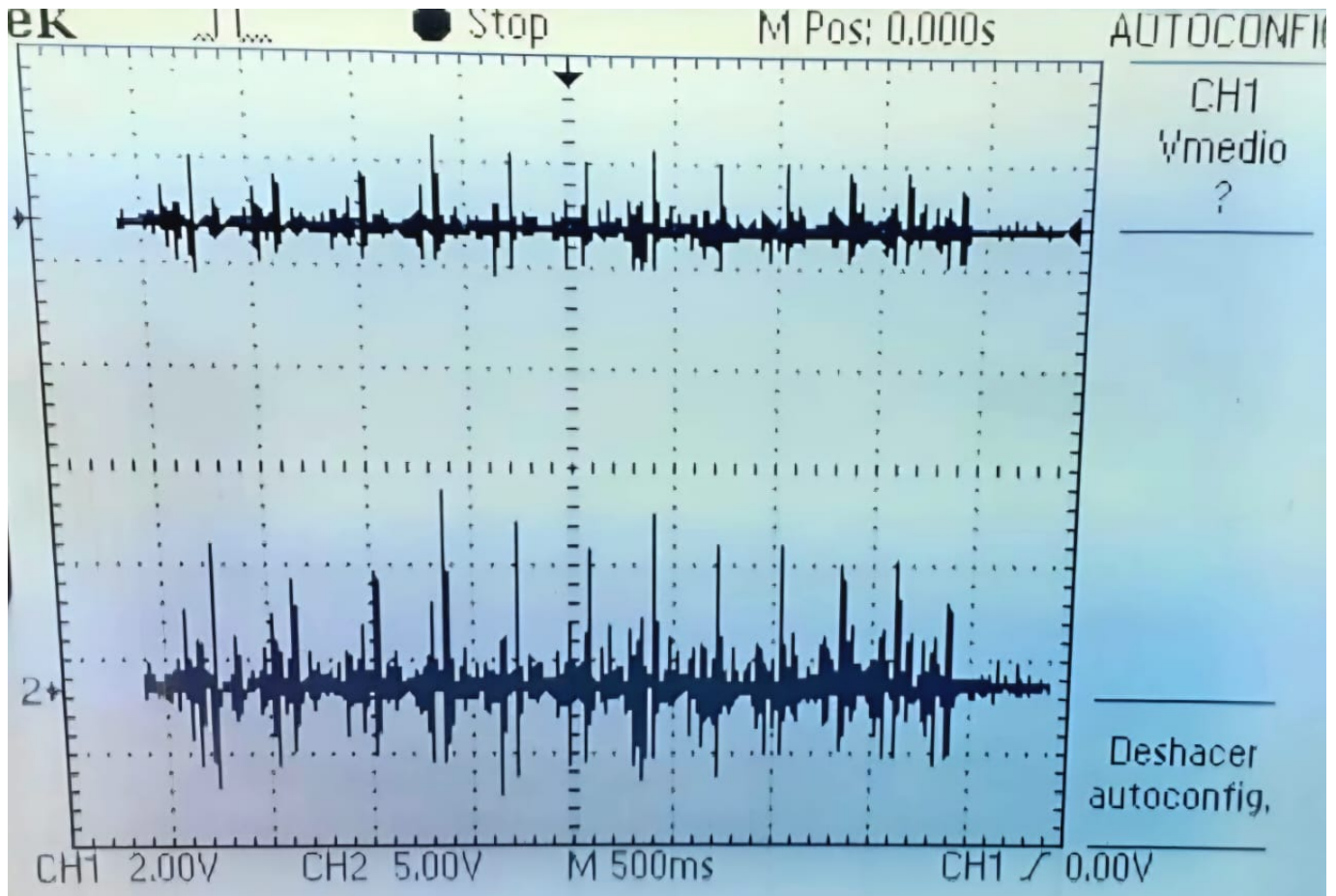


Figura 5.4: Señal **EMG** recortada durante la digitalización.

Para resolver este problema, se diseñó un circuito sumador que desplaza el nivel de la señal. Se inyecta una señal de $2.5 V_{DC}$ con el propósito de centrar la señal **EMG** en dicho valor, lo cual permite que la señal originalmente oscilante entre $-2.5 V$ y $+2.5 V$ se convierta en una señal comprendida entre $0 V$ y $5 V$.

Este procedimiento es crucial ya que la digitalización realizada por el microcontrolador solo admite señales positivas, por lo que, de no aplicar este ajuste, se perdería la mitad inferior de la señal.

Dado que uno de los objetivos fundamentales de esta tesis es desarrollar un modelo matemático preciso de la señal **EMG** mediante técnicas de identificación paramétrica, es indispensable preservar la señal completa sin recortes ni distorsiones. La aplicación de este **desplazamiento de nivel (offset)** garantiza la integridad de la información contenida en la señal **EMG**, permitiendo su correcta digitalización y posterior procesamiento.

La Figura 5.5 muestra una señal EMG incompleta, en la que se conserva únicamente la parte positiva y se ha eliminado la componente negativa.

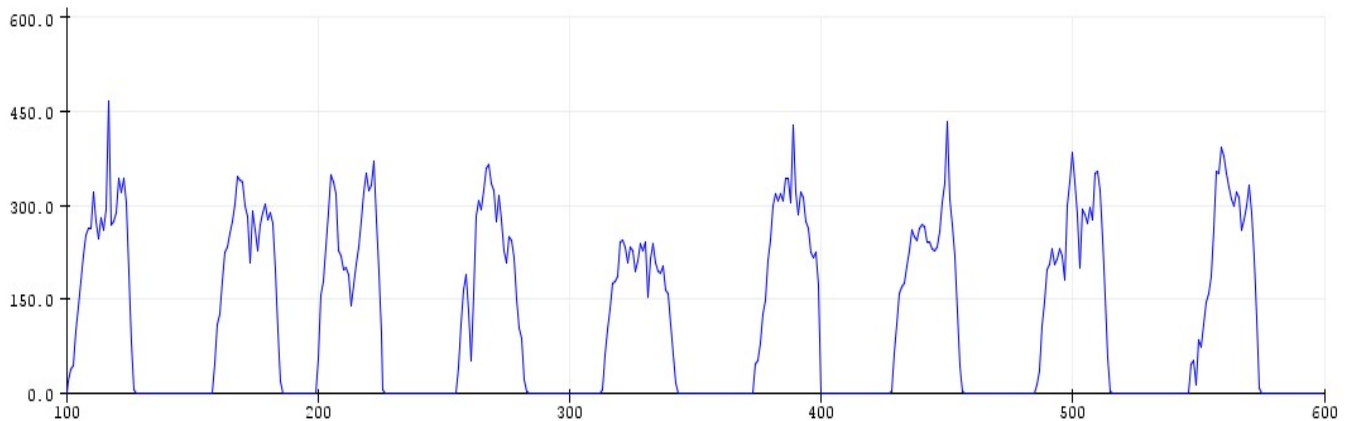


Figura 5.5: Señal EMG recortada.

Mientras que en la Figura 5.6, se muestra la señal EMG completa, desplazada y sin perturbaciones, lista para su procesamiento digital.

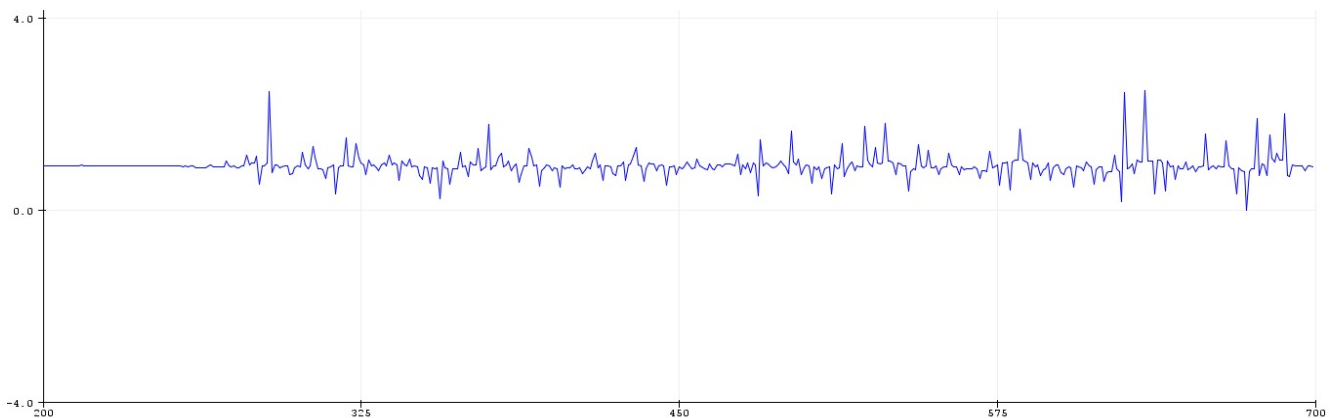


Figura 5.6: Señal EMG desplazada con circuito sumador.

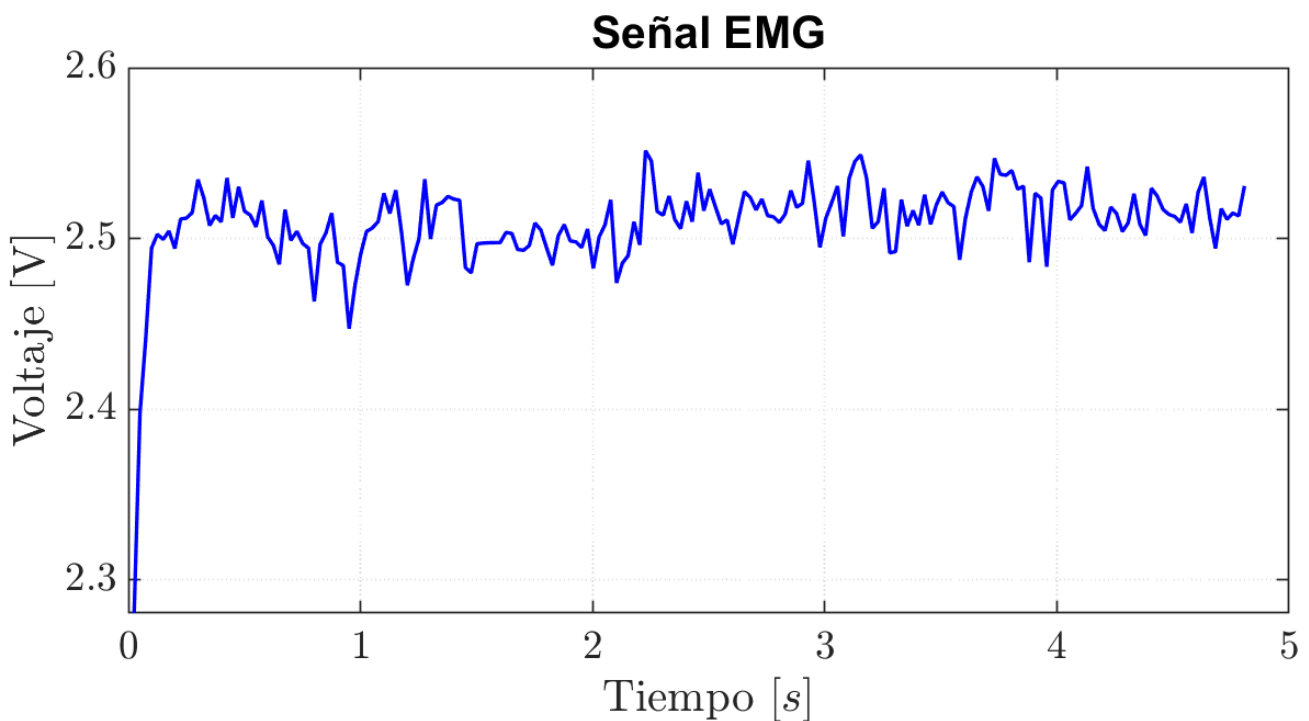
5.2. Modelado de la señal EMG

Una vez adquiridas y digitalizadas las señales electromiográficas, se procedió al modelado matemático mediante técnicas de identificación paramétrica. En particular, se empleó el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos, dada su eficiencia en la estimación en línea de parámetros y su bajo costo computacional. El objetivo fue representar la dinámica subyacente de la señal EMG por medio de modelos lineales en tiempo discreto que capturen sus principales características.

Para la etapa de validación se seleccionaron diez señales distintas asociadas a diferentes movimientos musculares. Estas incluyen acciones simples como cerrar la mano, así como contracciones rápidas o con mayor aplicación de fuerza. A modo ilustrativo, en esta sección se presentan tres de estas señales: su forma original, la salida del modelo estimado y el error de modelado.

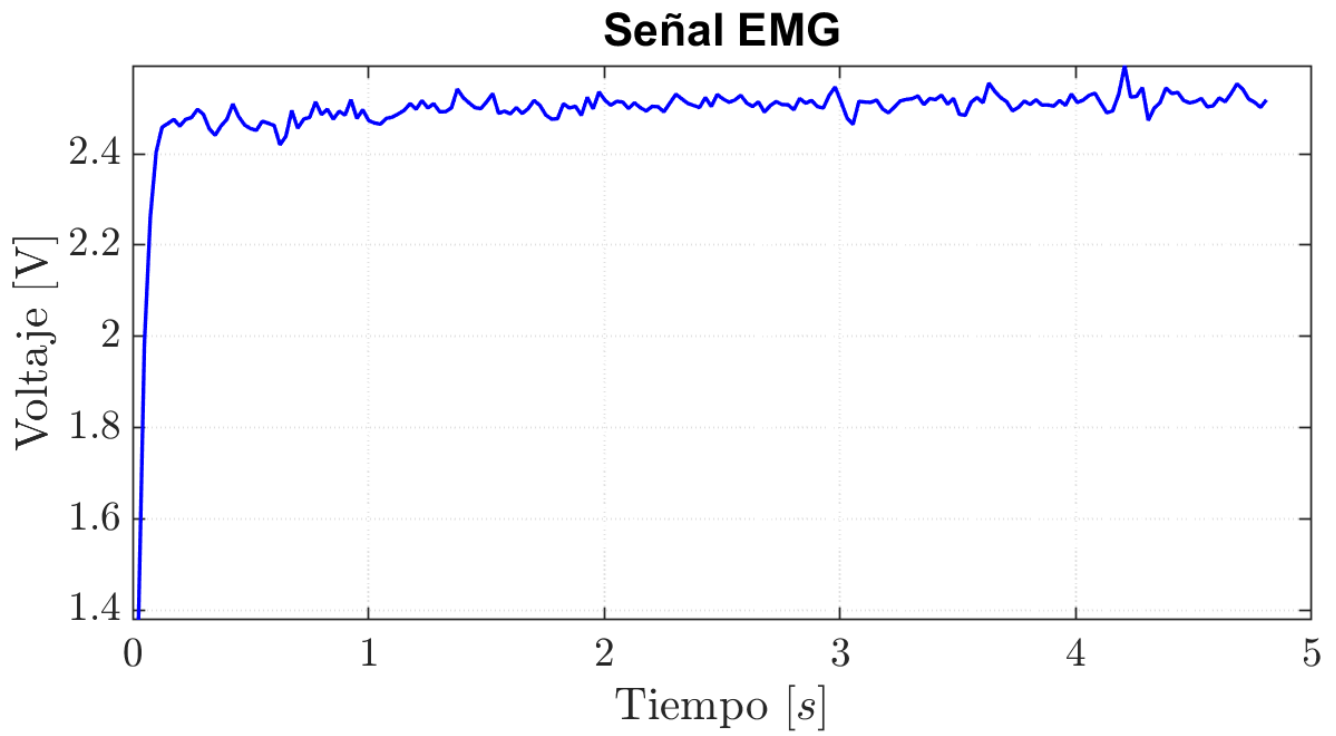
Todas las señales se adquirieron con un periodo de muestreo de 25 ms y constan de 200 muestras. Este intervalo fue determinado como adecuado para capturar la variabilidad de la señal, considerando las limitaciones de procesamiento del microcontrolador empleado. Una vez almacenadas, las señales fueron procesadas mediante el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos para obtener los parámetros del modelo.

Tras la adquisición de la señal **EMG**, se seleccionaron 10 registros correspondientes a distintos tipos de movimiento para su análisis. Estos incluyeron tanto acciones simples, como la apertura y cierre de la mano, como movimientos que requirieron una mayor fuerza o una ejecución rápida con contracción intensa. Este conjunto permitió evaluar la capacidad del modelo para reproducir la señal con precisión en diversos escenarios. En esta sección se presenta el análisis detallado de 3 de estas señales, las cuales se ilustran en la Figura 5.7.

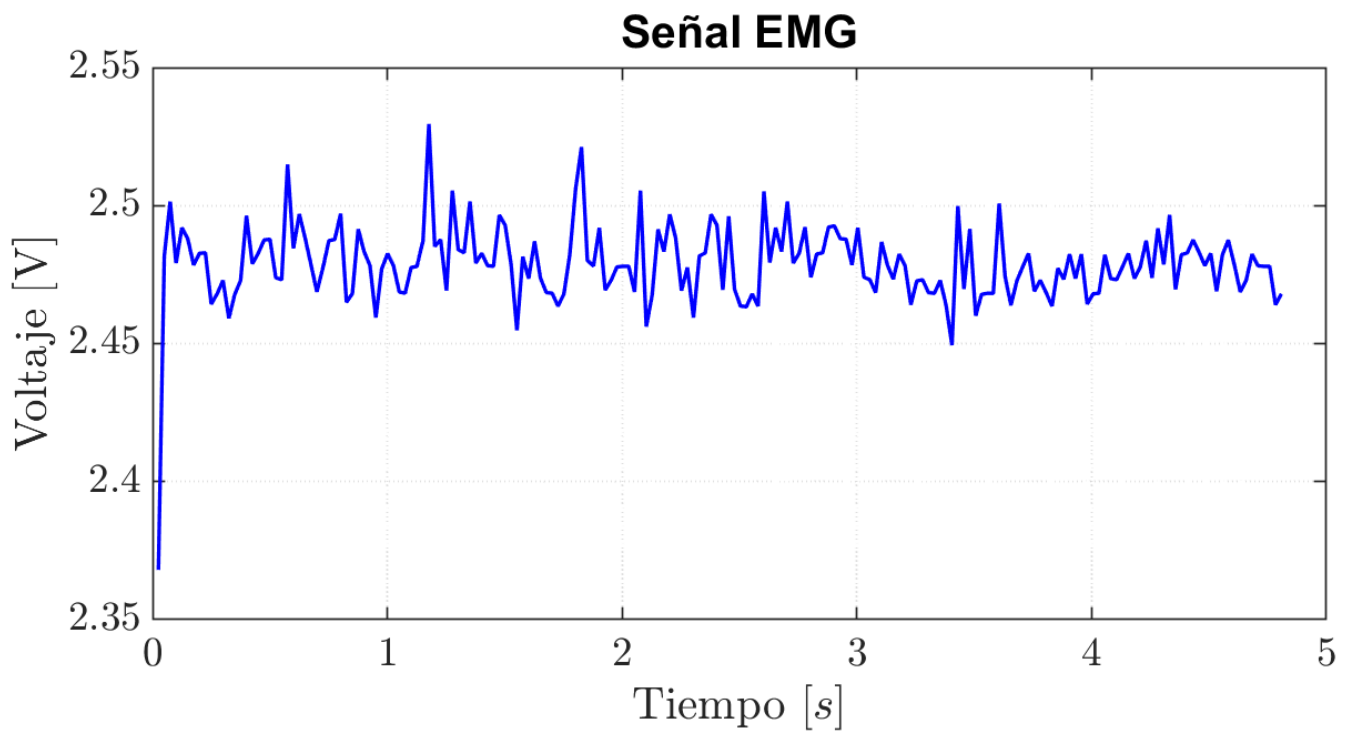


(a) Señal **EMG** por movimientos rápidos

Figura 5.7: Señales EMG de diversos movimientos.



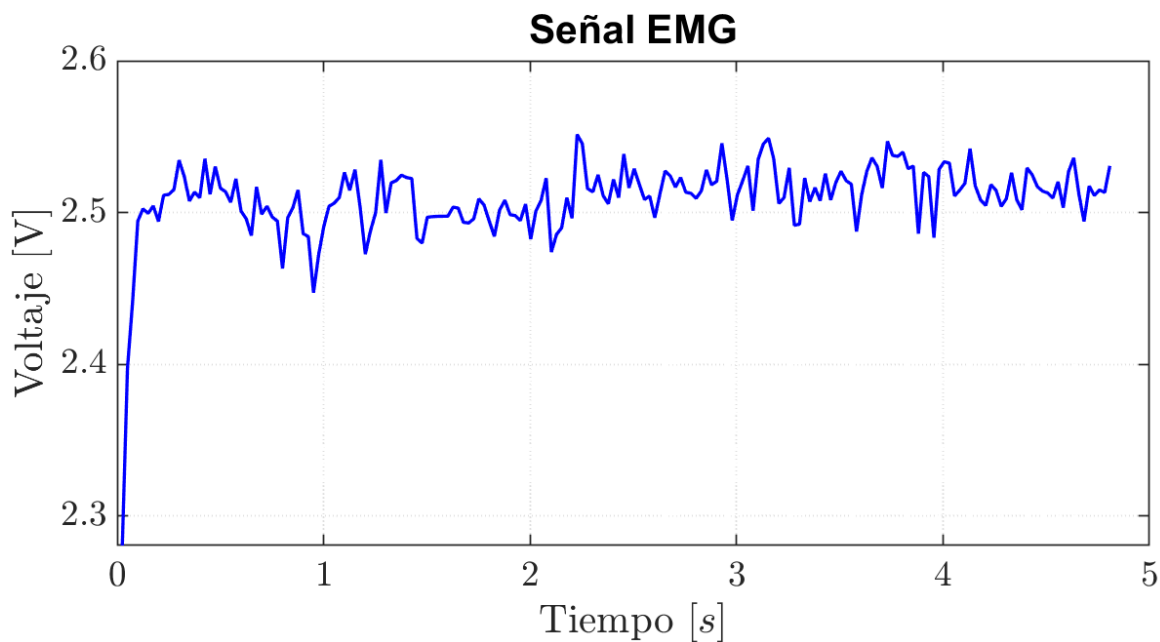
(b) Señal EMG por movimientos lentos



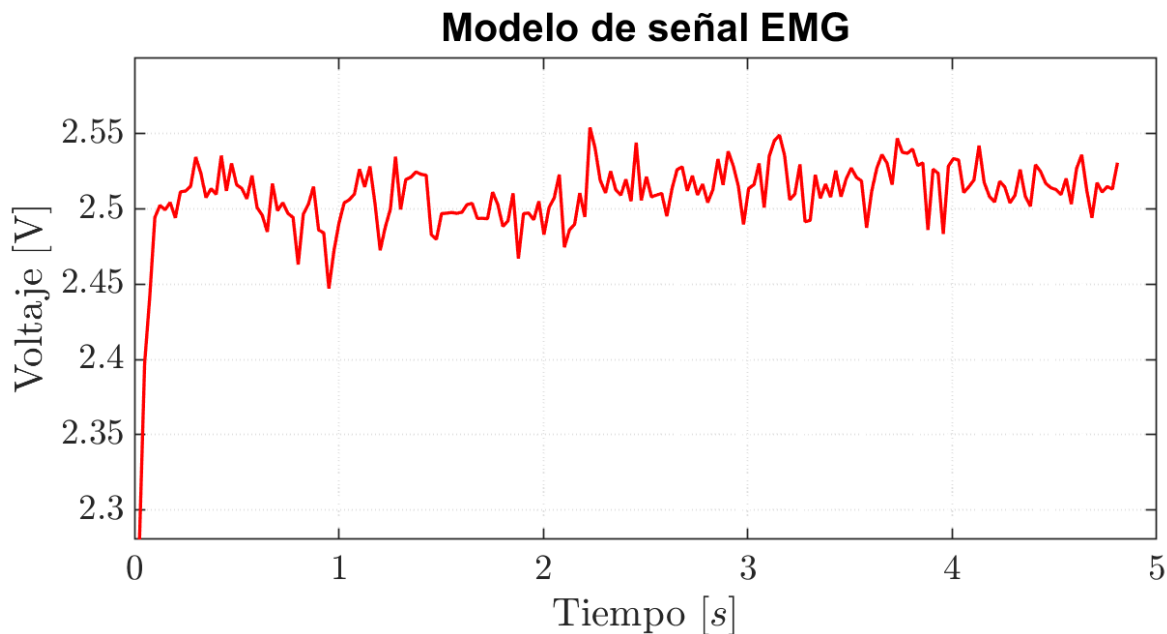
(c) Señal EMG por movimientos con fuerza

Figura 5.7: (Continuación) Señales EMG de diversos movimientos.

Las Figuras 5.8, 5.9 y 5.10 presentan el análisis detallado de las tres señales EMG representativas mostradas previamente en la Figura 5.7.

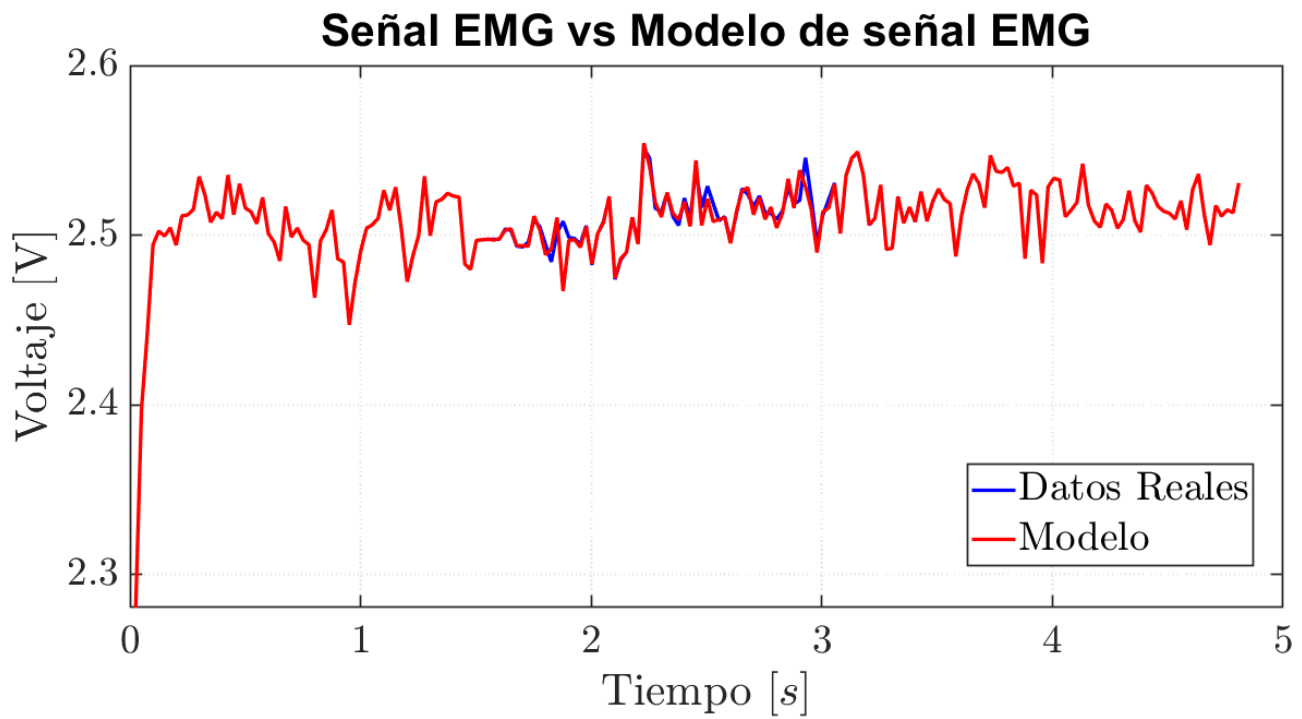
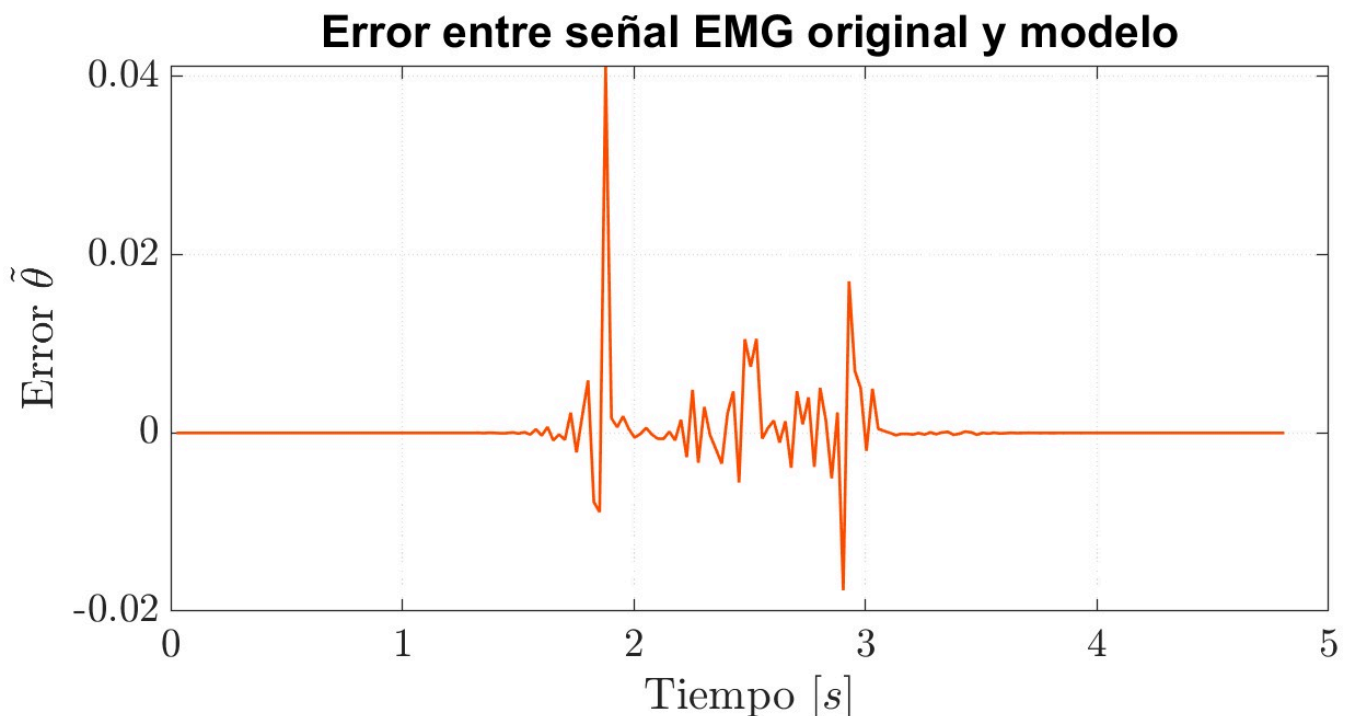


(a) Señal EMG adquirida.



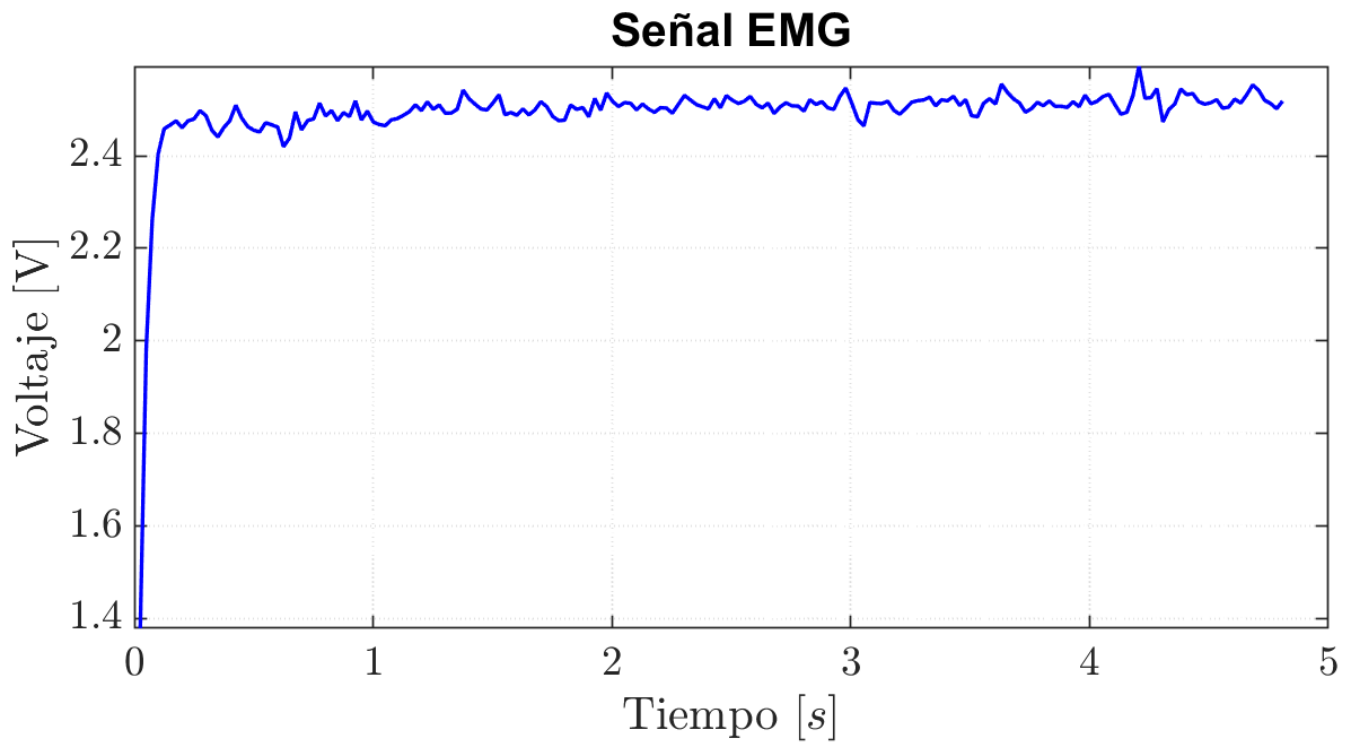
(b) Señal EMG modelada.

Figura 5.8: Señales EMG correspondientes a un movimiento rápido.

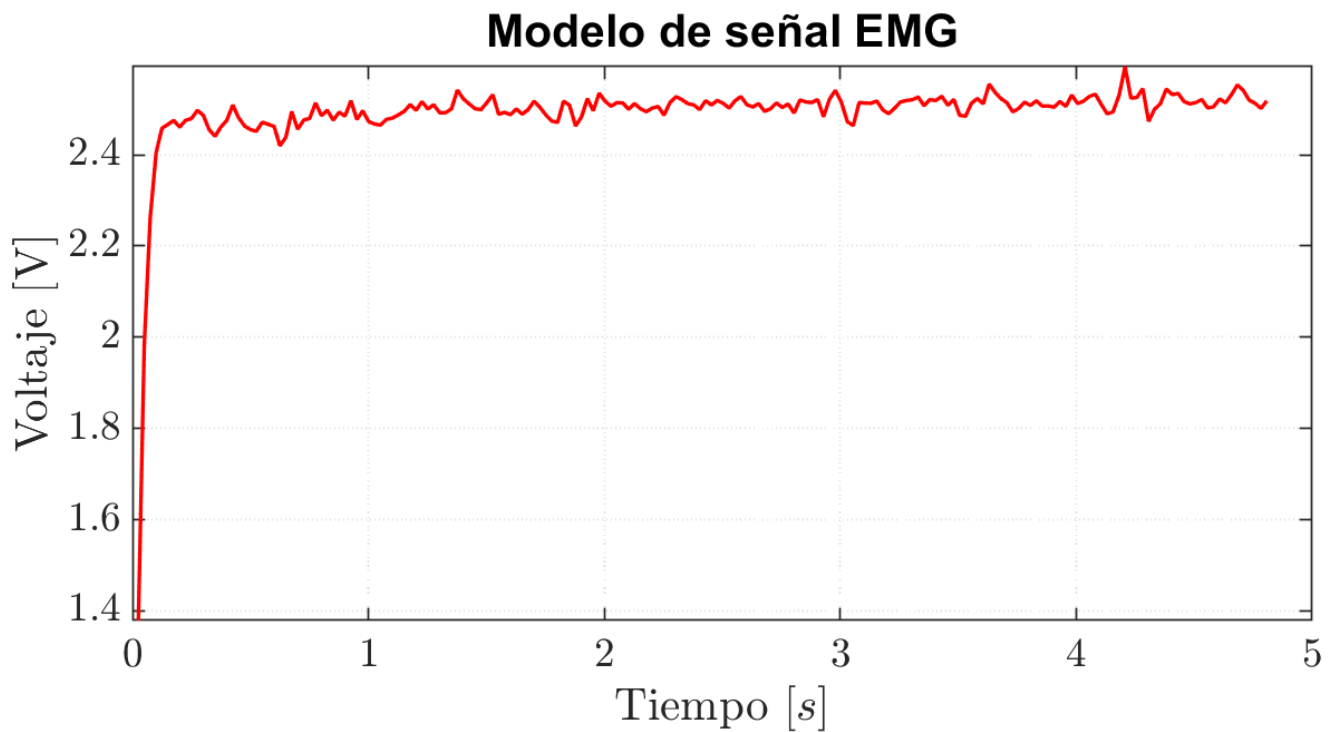
(c) Comparación entre señales. Datos reales ■ y Modelo ■

(d) Error de modelado.

Figura 5.8: (Continuación) Señales EMG correspondientes a un **movimiento rápido**.

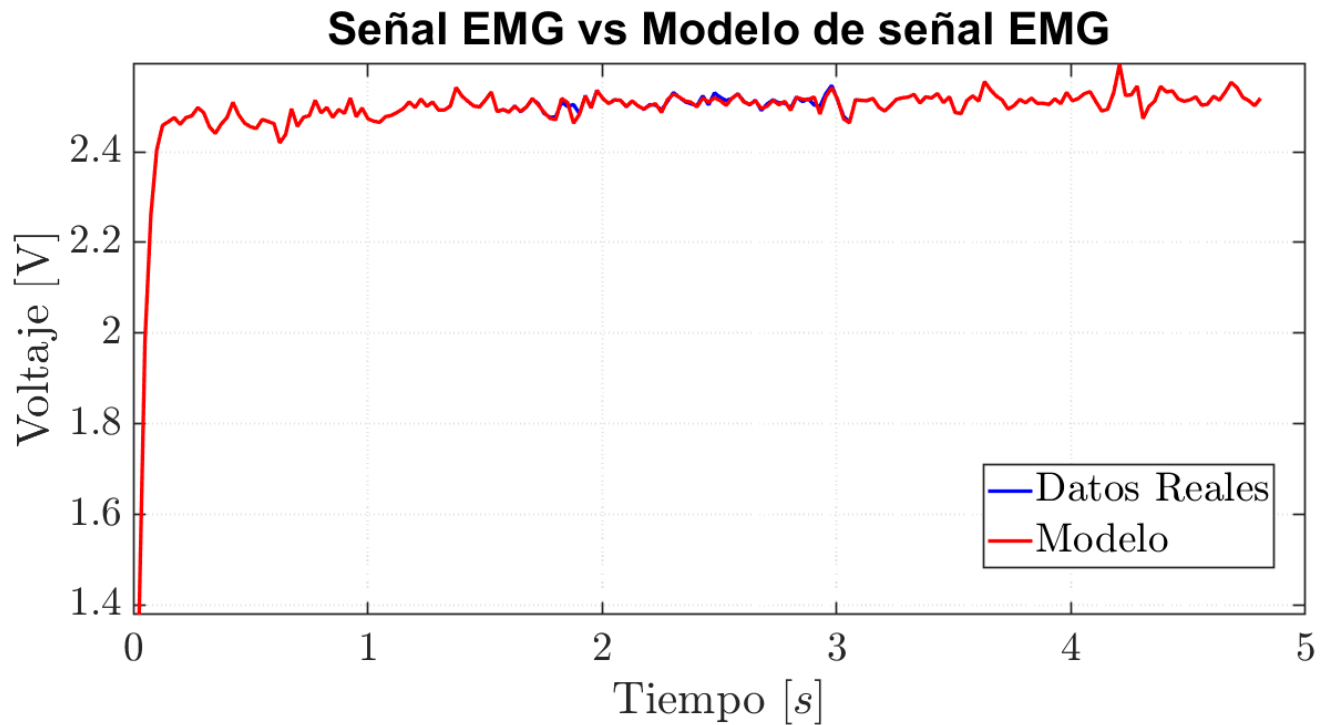


(a) Señal EMG adquirida.

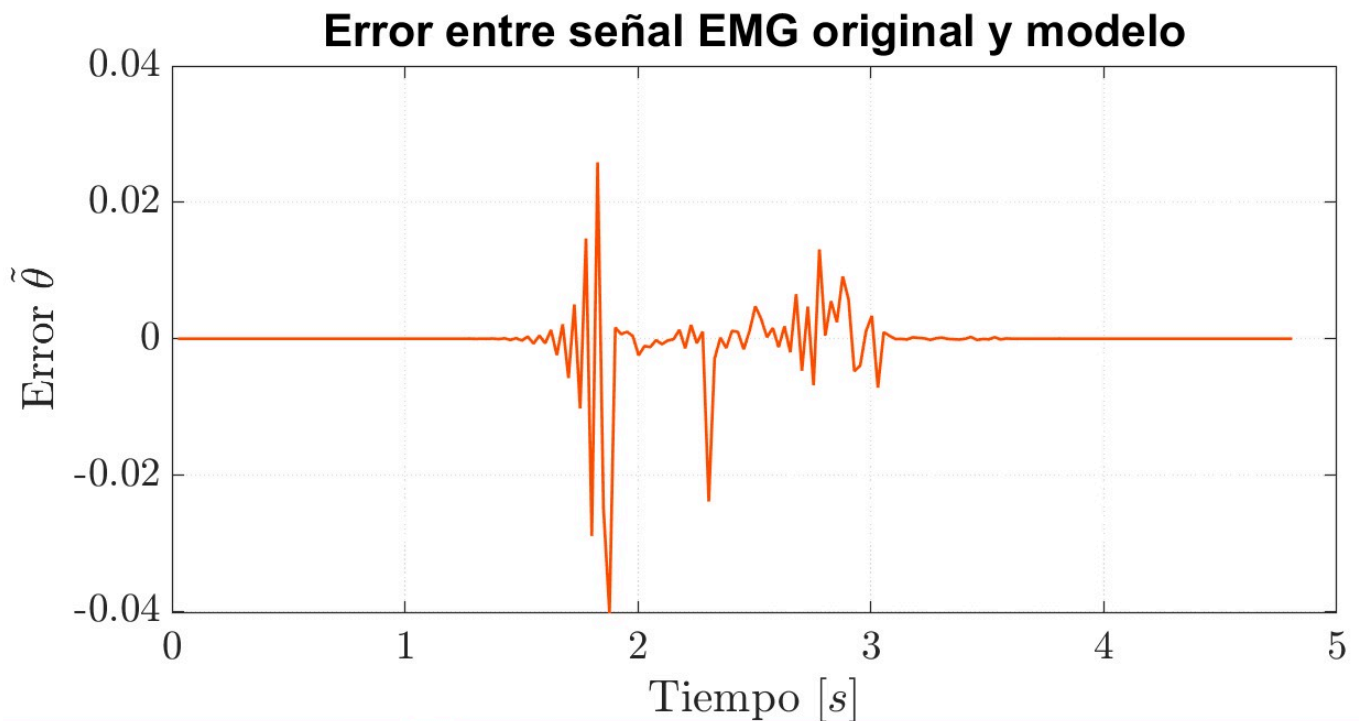


(b) Señal EMG modelada.

Figura 5.9: Señales EMG correspondientes a un **movimiento lento**.

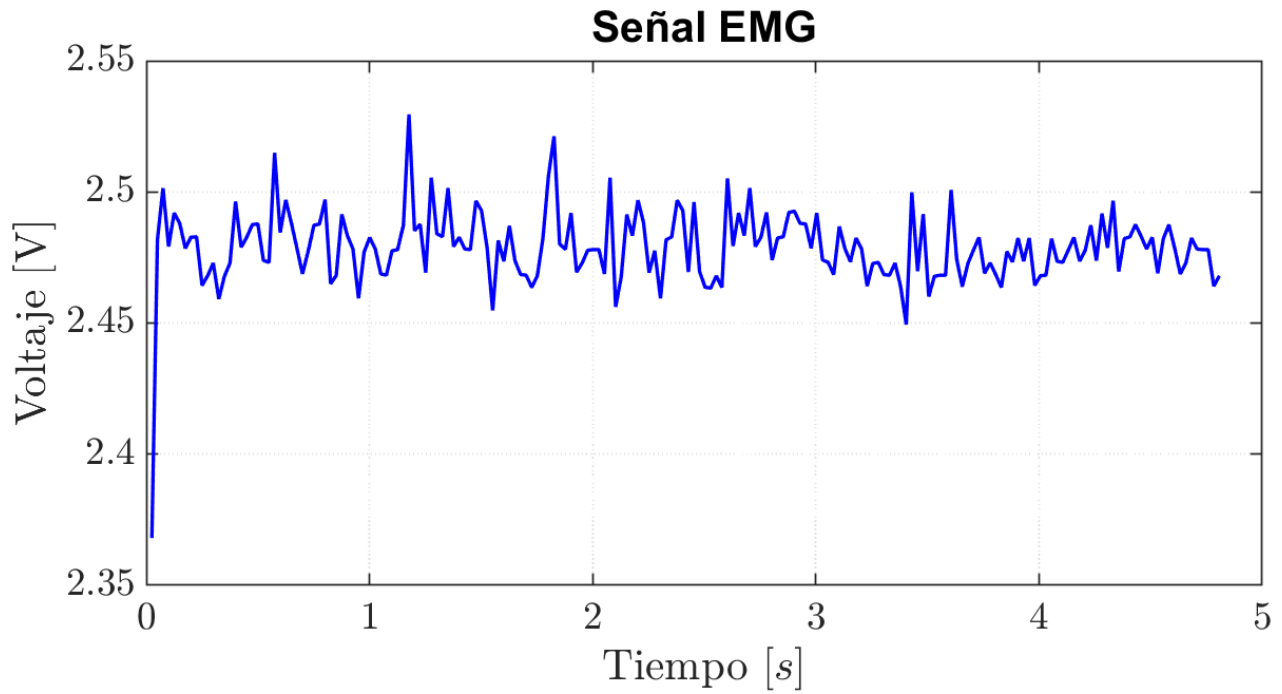


(c) Comparación entre señales. Datos reales ■ y Modelo ■

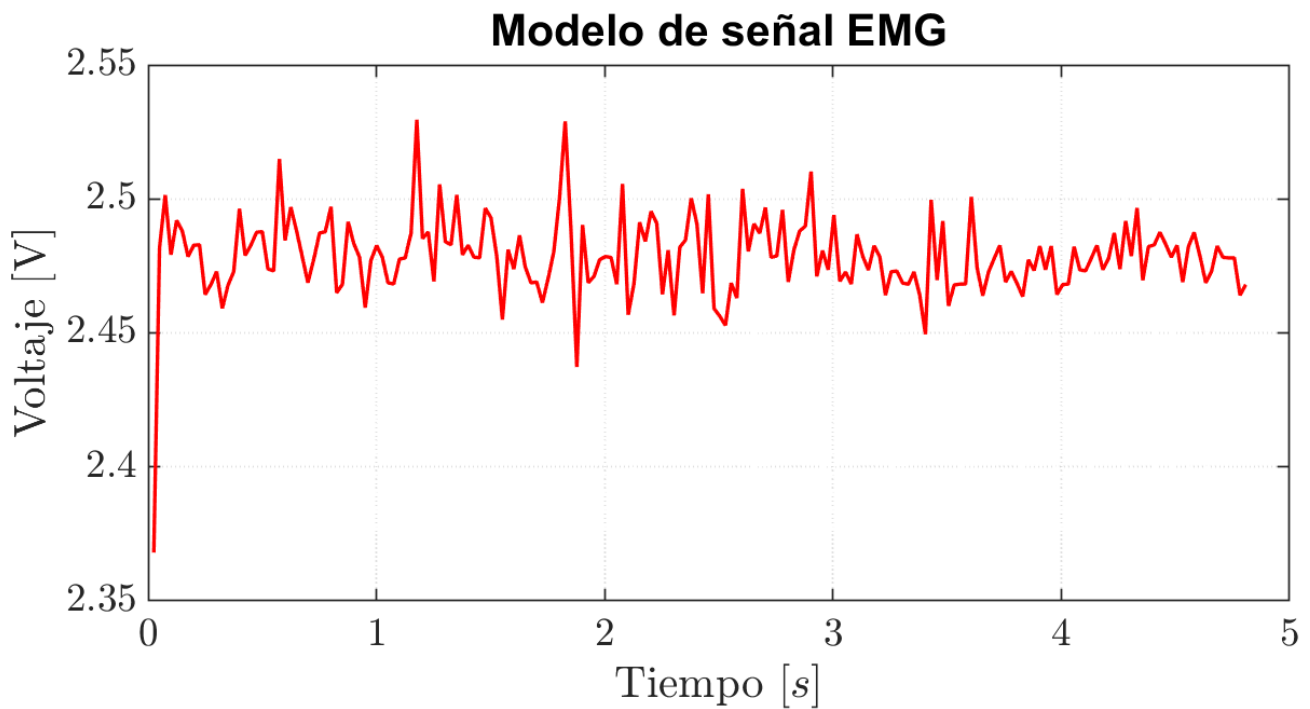


(d) Error de modelado.

Figura 5.9: (Continuación) Señales EMG correspondientes a un **movimiento lento**.

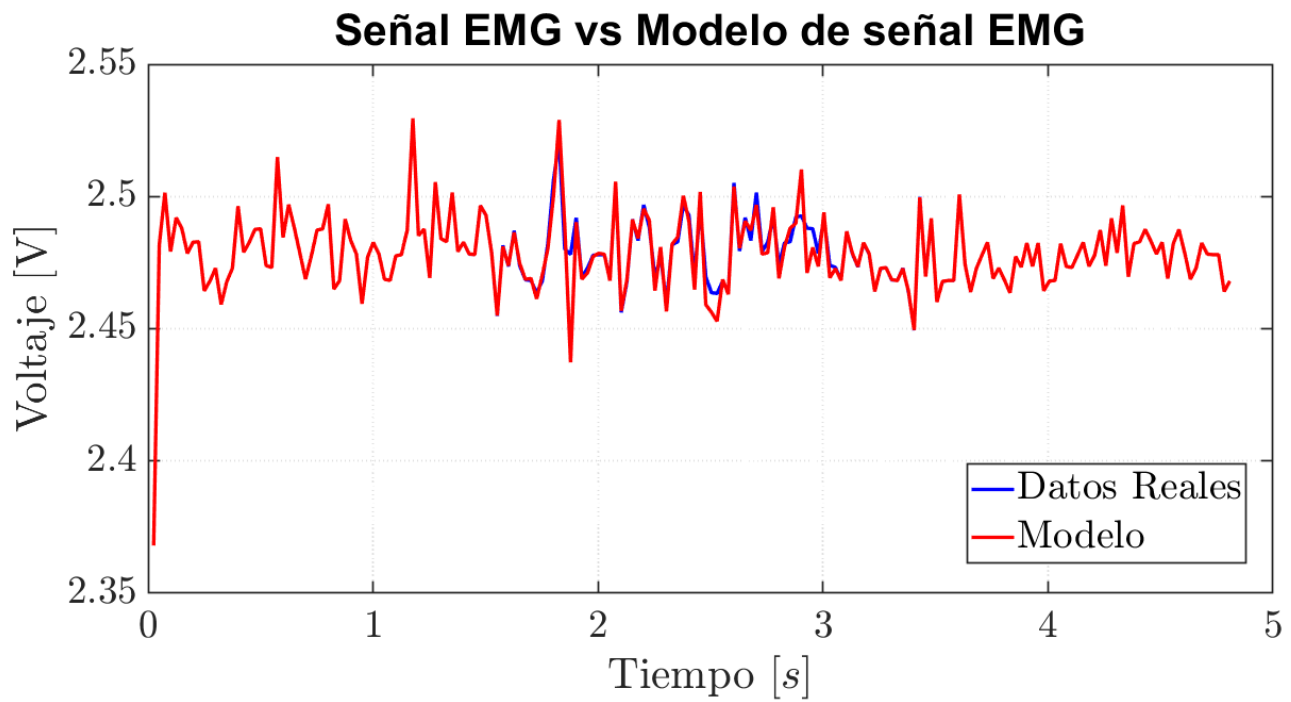


(a) Señal EMG adquirida.

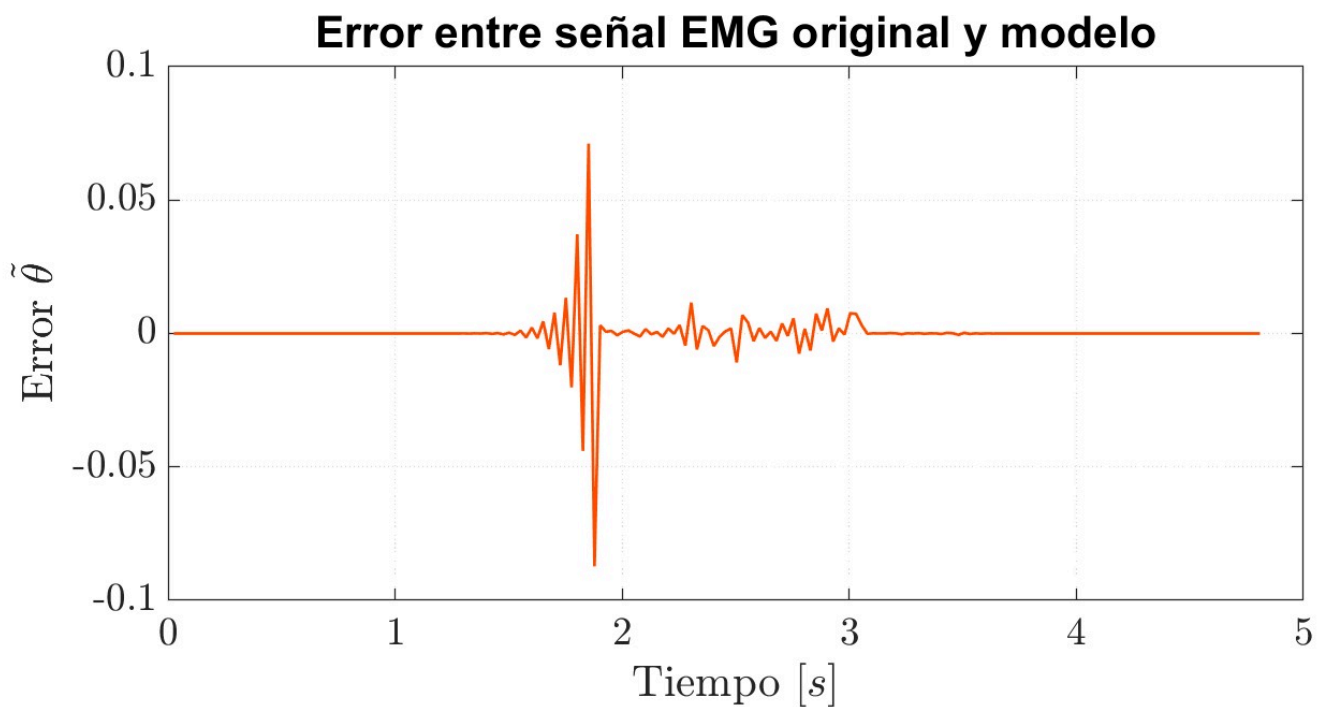


(b) Señal EMG modelada.

Figura 5.10: Señales EMG correspondientes a un **movimiento con fuerza**.



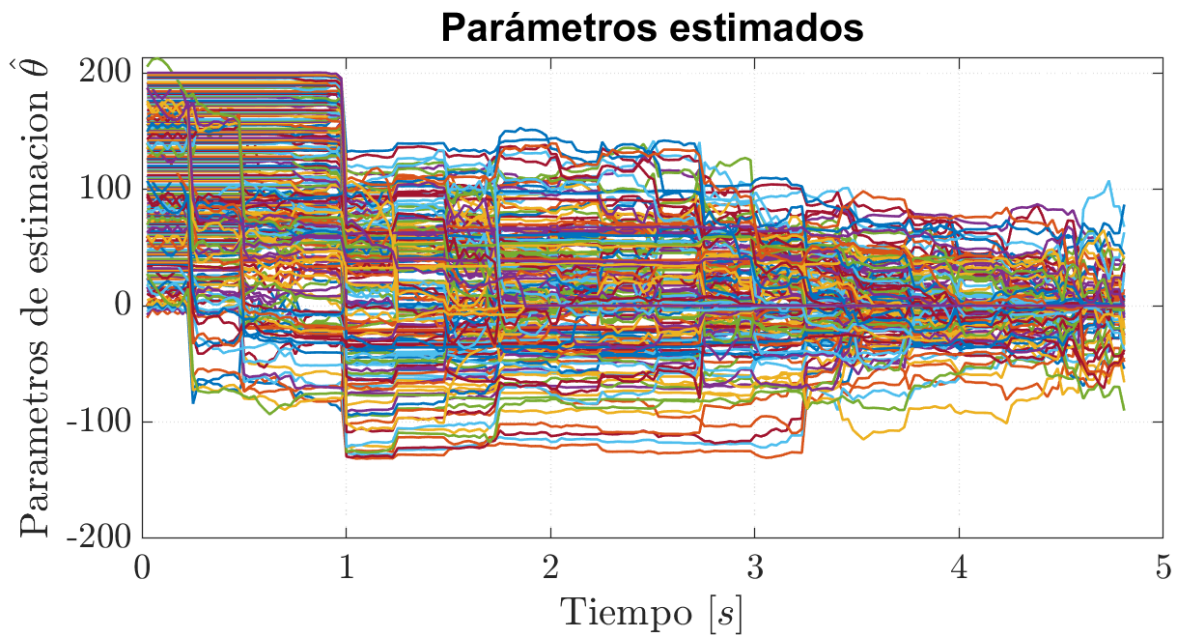
(c) Comparación entre señales. Datos reales ■ y Modelo ■



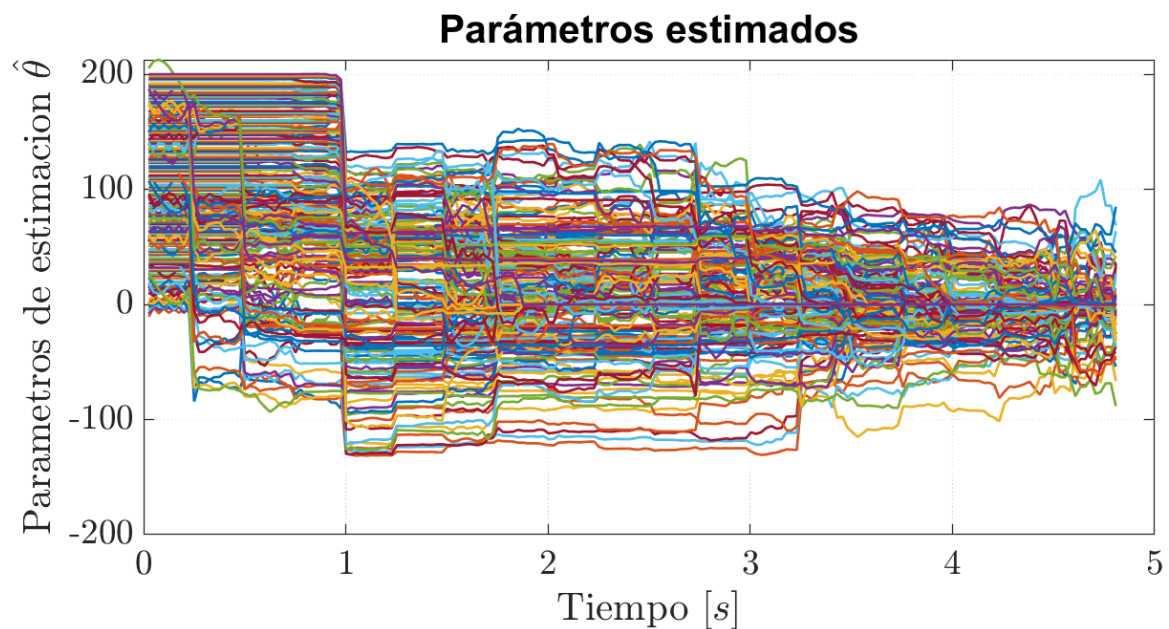
(d) Error de modelado.

Figura 5.10: (Continuación) Señales EMG correspondientes a un **movimiento con fuerza**.

La figura 5.11 muestra los valores de los parámetros obtenidos mediante el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados para las tres señales analizadas.

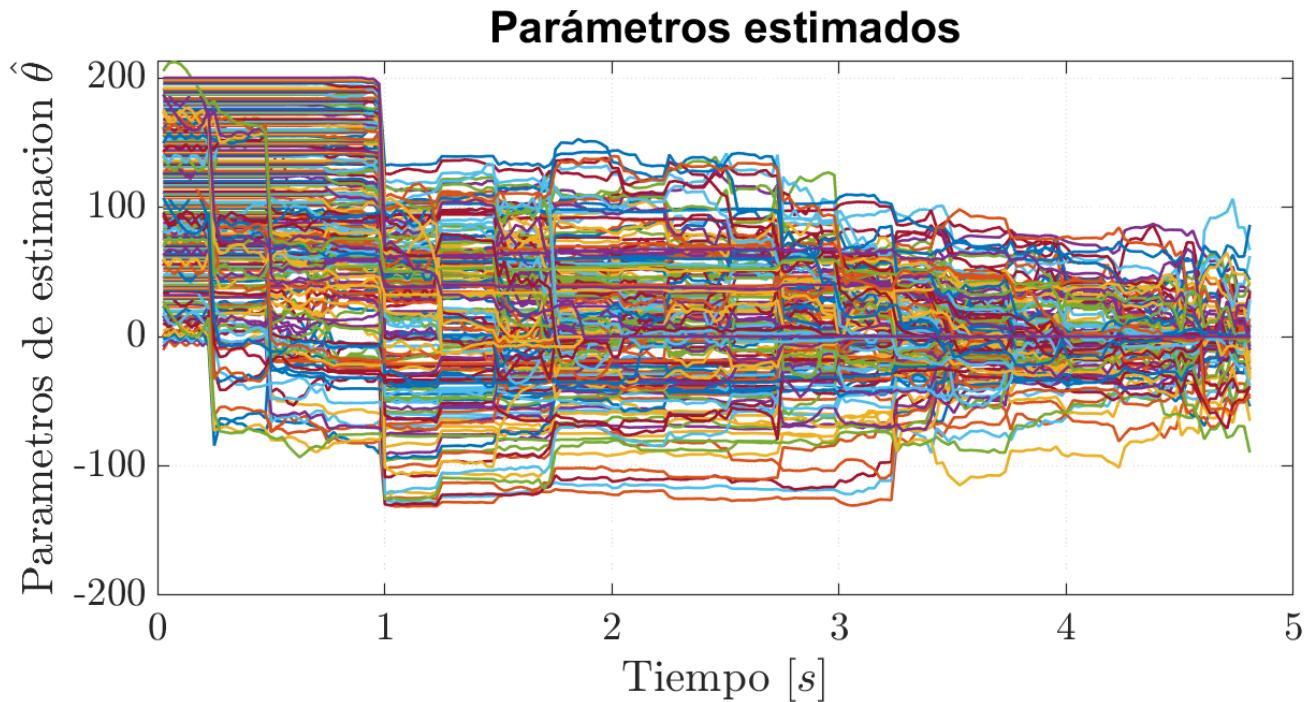


(a) Parámetros estimados para señal EMG por movimientos rápidos.



(b) Parámetros estimados para señal EMG por movimientos lentos.

Figura 5.11: Parámetros estimados.



(c) Parámetros estimados para señal EMG por movimientos con fuerza.

Figura 5.11: (Continuación) Parámetros estimados.

Para cada caso se observa que el modelo reproduce adecuadamente la forma general de la señal, con un error reducido que valida la capacidad de la técnica empleada. Los parámetros estimados del modelo correspondiente a las señales mostradas en la Figura 5.7 se presentan en las Tablas B.1-B.3, y constituyen un ejemplo típico de los resultados obtenidos en esta etapa.

5.3. Implementación del control con señal EMG

Una vez validado el modelo de la señal EMG, se procede a implementar el sistema de control que utiliza dicha señal como entrada. El objetivo es evaluar la factibilidad de emplear señales electromiográficas reales para controlar el movimiento del sistema mecatrónico, en este caso, un péndulo simple.

El esquema de control utilizado se basa en una ley de control tipo acotado, que permite mantener las acciones de control dentro de márgenes físicamente realizables, reduciendo el riesgo de saturación del actuador.

La estructura de control definida en (4.16) fue validada mediante análisis teórico y simulaciones, y en esta etapa se pone a prueba su desempeño en condiciones experimentales.

La señal **EMG** fue preprocesada, normalizada y adaptada para ser utilizada como entrada de referencia del controlador. En la Figura 5.12 se muestra la conexión entre la señal **EMG** procesada, el algoritmo de control implementado en tiempo real y el sistema físico del péndulo.

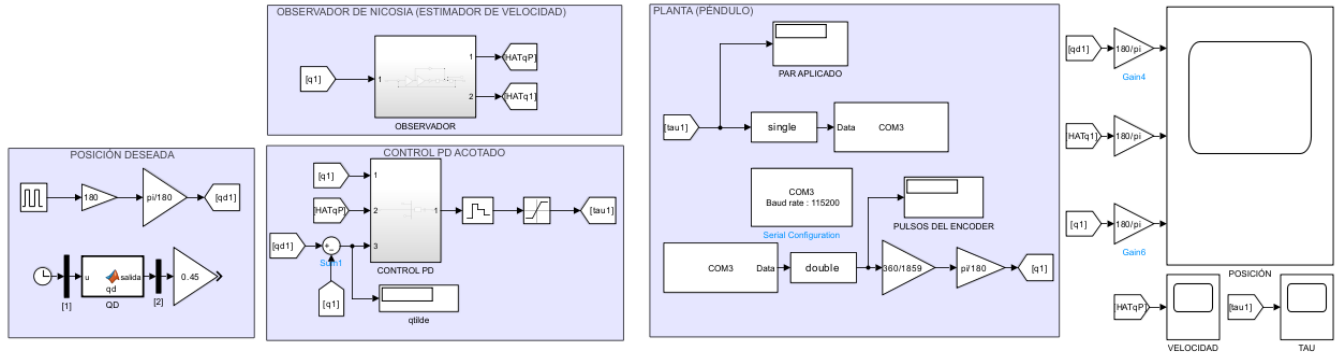


Figura 5.12: Esquema de control con señal **EMG** como entrada.

En el primer bloque de la Figura 5.12 se define la posición deseada $q_d \in \mathbb{R}$, la cual, para esta prueba, se produce mediante un generador de pulsos configurado para alcanzar los 180° , provocando que el péndulo se desplace desde 0° hasta 180° .

En el siguiente bloque, se encuentra la etapa de control, donde se calcula el error de posición $\tilde{q} \in \mathbb{R}$ como la diferencia entre la posición deseada q_d y la posición real $q \in \mathbb{R}$ obtenida del motor mediante un sensor de posición incremental (encoder). Este error se envía al controlador acotado, cuya salida constituye la señal de control aplicada a la planta. Dado que se emplea una comunicación serial, la planta está representada en el modelo por los bloques de envío y recepción de datos hacia y desde el microcontrolador.

Desde **Simulink**[®], se transmite la señal de control, que representa la energía de entrada al sistema. Esta señal es convertida por el microcontrolador en una **señal PWM (del inglés Pulse Width Modulation)**, es decir, **Modulación por Ancho de Pulso**, una técnica que permite representar una magnitud analógica mediante una secuencia de pulsos digitales cuyo ancho varía proporcionalmente con la amplitud de la señal original. Esta señal **PWM** es utilizada para accionar el motor.

Simultáneamente, el motor genera una secuencia de pulsos a través del encoder incremental, los cuales son enviados nuevamente a **Simulink**[®]. Dentro del entorno de simulación, dichos pulsos se convierten primero a grados y posteriormente a radianes, garantizando así su compatibilidad con la señal de referencia y el controlador. De esta forma, se cierra el lazo de control en tiempo real.

Adicionalmente, se incorpora un **estimador de velocidad (observador)**, cuya función es calcular la velocidad angular del motor a partir de la posición medida. Este estimador actúa como un sensor virtual y proporciona tanto la velocidad como una posición estimada, siendo ambas variables utilizadas por el controlador, ya que la componente derivativa requiere información de velocidad, [54].

En la Figura 5.13 se muestra la evolución temporal de la posición real q y de la posición estimada $\hat{q} \in \mathbb{R}$. Como se observa, ambas señales coinciden a lo largo del tiempo, lo cual evidencia que el observador implementado estima adecuadamente la variable de estado. En consecuencia, se cumple que $\hat{q} \rightarrow q$, validando así el correcto funcionamiento del estimador de posición.

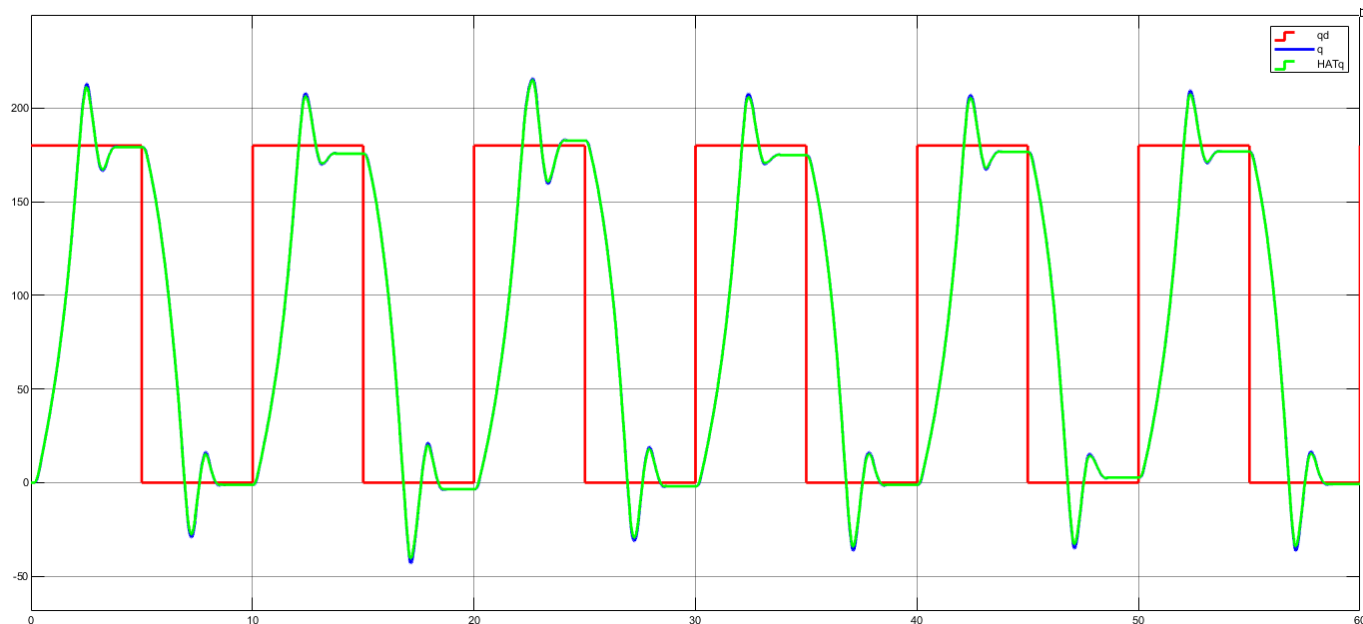


Figura 5.13: Posiciones: posición deseada q_d ■, posición real q ■, y posición estimada \hat{q} ■.

Por otro lado, en la figura 5.14 se presenta la respuesta de velocidad del sistema.

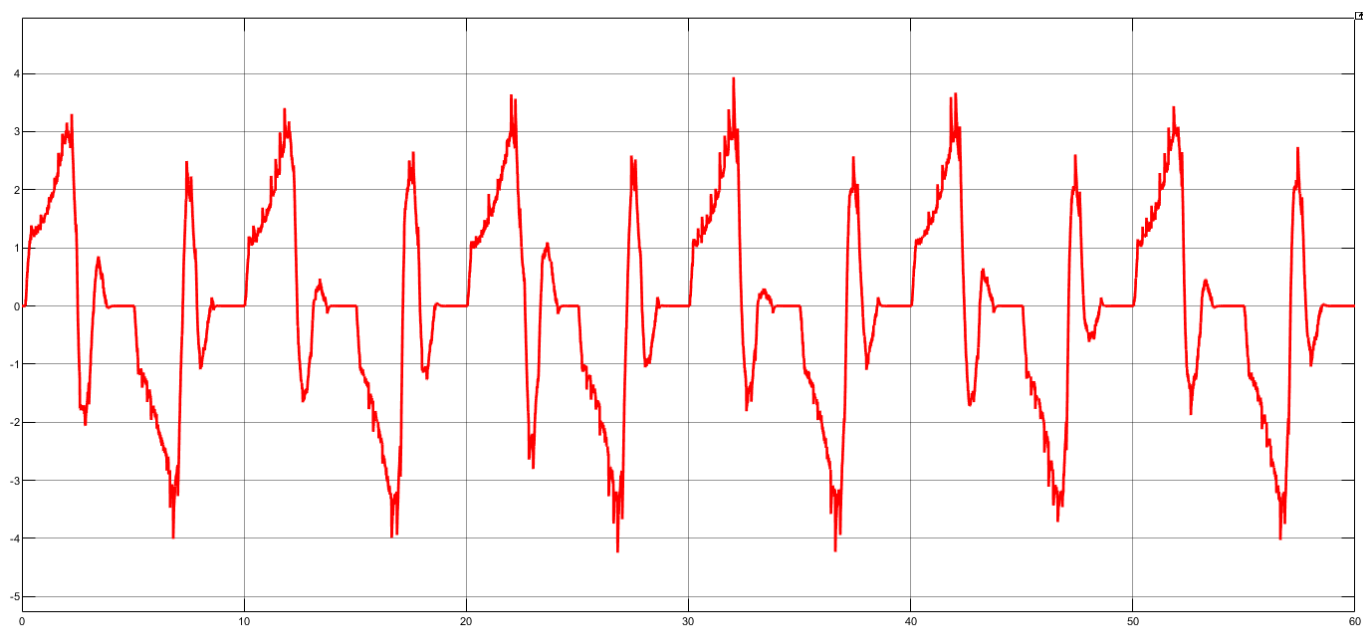


Figura 5.14: Velocidad del sistema

En la figura 5.15 se muestra la respuesta de la energía aplicada al sistema, la cual es necesaria para alcanzar la posición deseada.

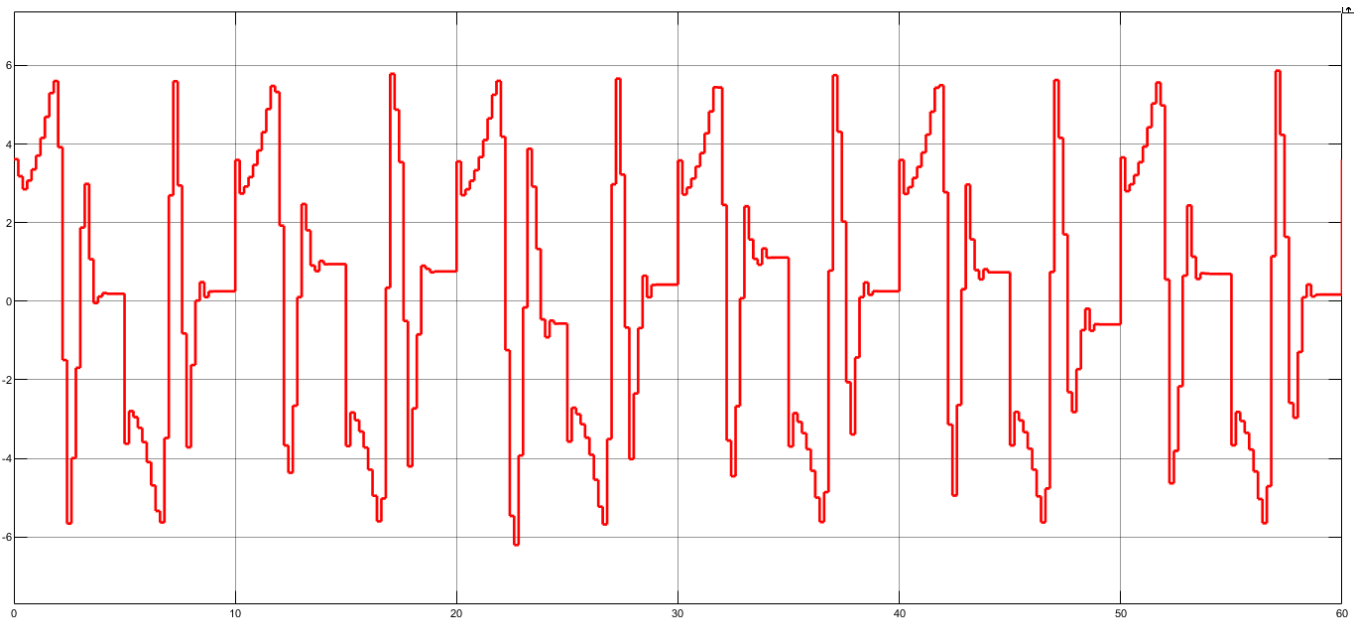


Figura 5.15: Energía aplicada al sistema

En la Figura 5.14 se muestra la velocidad angular estimada por el observador, una magnitud esencial para implementar la componente derivativa del controlador PD. El uso de observadores resulta particularmente valioso, ya que permite estimar variables de estado no medidas directamente, como la velocidad, mediante un diseño adecuado de ganancias a partir de la posición. En este caso, la estimación se realiza únicamente a partir del encoder incremental integrado en el motor, sin necesidad de incorporar sensores adicionales. Esta estrategia no solo simplifica el diseño del sistema, sino que también reduce costos, lo cual es especialmente ventajoso en el desarrollo de prototipos o en aplicaciones prácticas donde se busca eficiencia sin comprometer el desempeño.

En la Figura 5.15 se observa la señal de energía aplicada al motor para alcanzar la posición deseada. En este sistema, se emplea una señal PWM cuyos valores oscilan entre 0 y 255. Para evitar saturación, se implementó un mecanismo de saturación que acota automáticamente el valor de la señal de control (τ) al valor máximo permitido si este lo supera. Posteriormente, se realizó una conversión proporcional de estos valores a unidades de voltaje, considerando que el motor opera a 12 V. Esta transformación garantiza que la energía aplicada al actuador permanezca dentro de los límites definidos por el diseño del sistema.

A continuación, se presenta un video que muestra el funcionamiento del sistema de control implementado:

<https://www.youtube.com/watch?v=lyeK8W42s78>

5.3.1. Control de posición para una trayectoria deseada

Para que el sistema de control de posición pueda realizar el seguimiento de una trayectoria, es necesario modificar la posición deseada q_d . En lugar de emplear un generador de pulsos, se opta por una trayectoria basada en una curva hipocicloidal. Este tipo de trayectorias está originalmente definido en el plano cartesiano mediante coordenadas x e y ; sin embargo, dado que el sistema experimental posee un solo grado de libertad, únicamente se utiliza la componente x , definida por la siguiente expresión:

$$x(t) = r(k - 1) \cos(t) + r \cos((k - 1)t) \quad (5.1)$$

donde t representa el tiempo, y r y k son parámetros que, en combinación con las funciones trigonométricas, determinan la forma de la trayectoria.

Aunque esta ecuación permite generar figuras complejas en el espacio bidimensional, en este caso se utiliza únicamente como una función de referencia unidimensional para evaluar la capacidad del controlador de seguir trayectorias dinámicas. La trayectoria generada se emplea como señal de entrada para el sistema, y permite comprobar la eficacia del algoritmo de control en el seguimiento preciso de referencias no constantes.

Para la realización de esta prueba se empleó la misma configuración experimental descrita previamente en la Figura 5.12. Los resultados correspondientes al seguimiento de la trayectoria se presentan en la Figura 5.16.

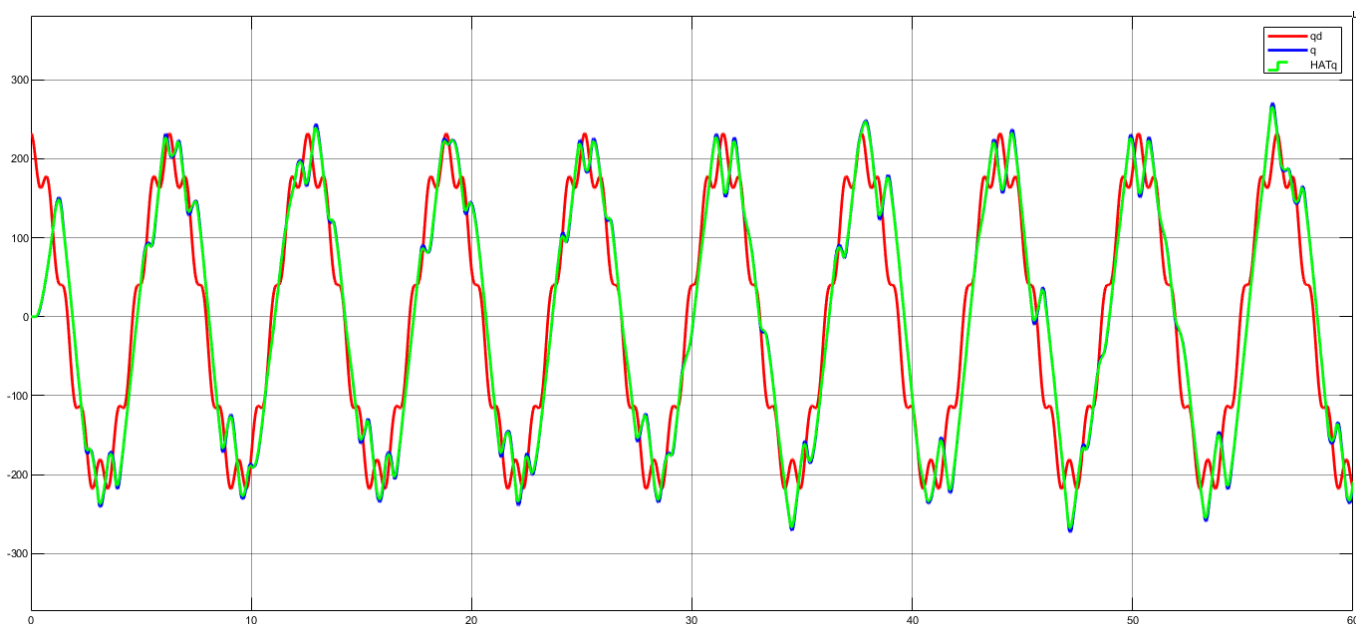


Figura 5.16: Seguimiento de trayectoria: posición deseada q_d ■, posición real q ■, y posición estimada \hat{q} ■

La velocidad observada se muestra en la Figura 5.17.

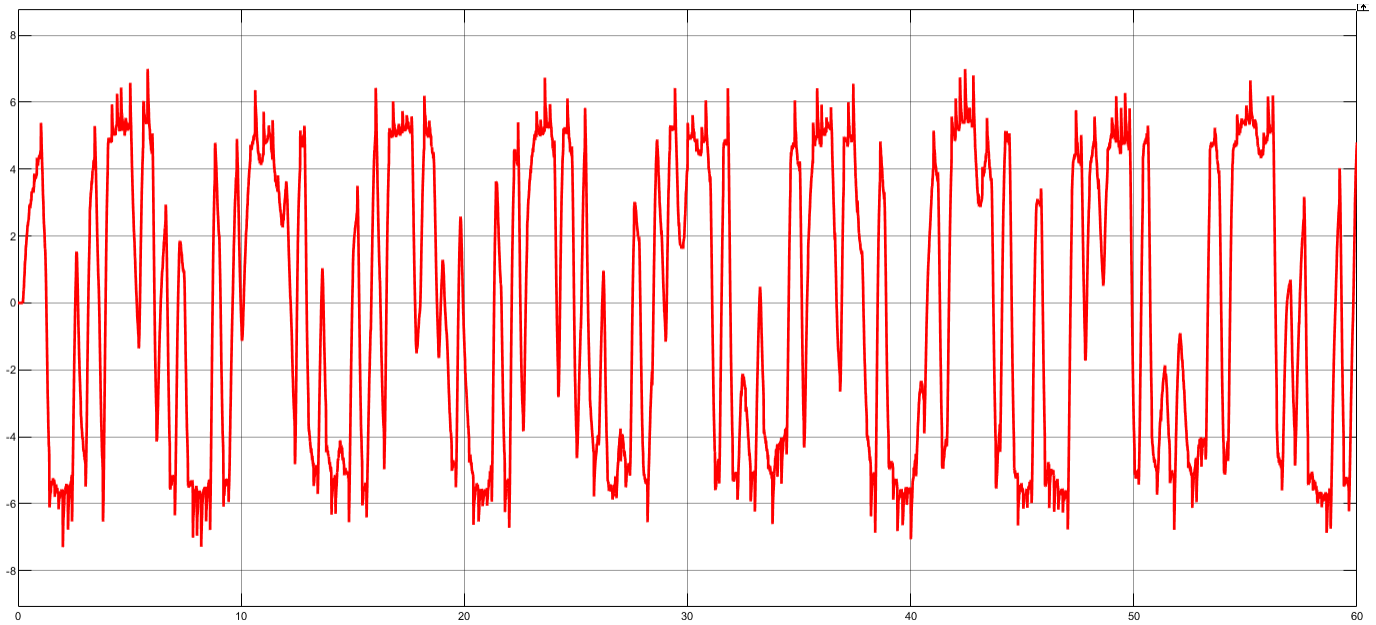


Figura 5.17: Velocidad observada.

El comportamiento del par aplicado se ilustra en la Figura 5.18.

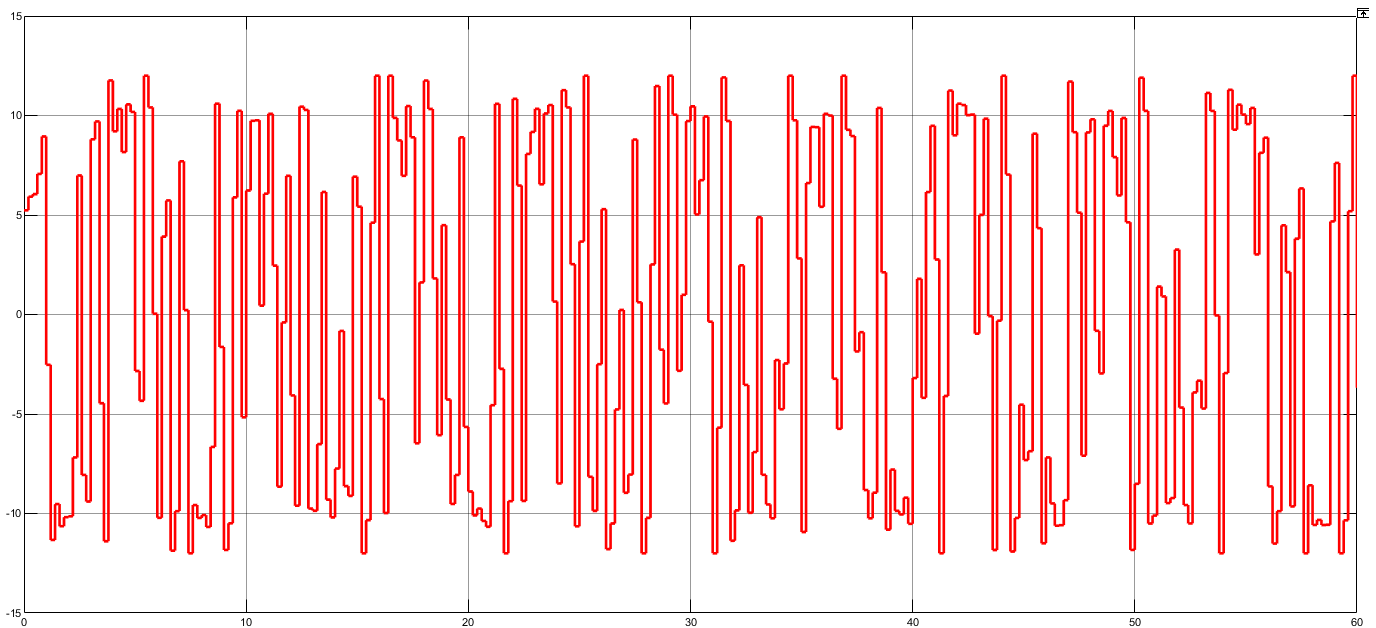


Figura 5.18: Energía aplicada.

El video que muestra el seguimiento de la trayectoria se muestra en el siguiente enlace:

<https://www.youtube.com/watch?v=d0AbFJKbDZ4>

5.4. Desarrollo experimental de un sensor de rigidez

A continuación, se presenta la construcción experimental de un sensor de rigidez, cuya estructura se basa en el péndulo simple controlado mediante señales **EMG**.

La rigidez, en este contexto, se define como: *la capacidad del sistema de oponerse al desplazamiento angular ante una perturbación, y se relaciona directamente con la resistencia muscular reflejada en la señal electromiográfica.*

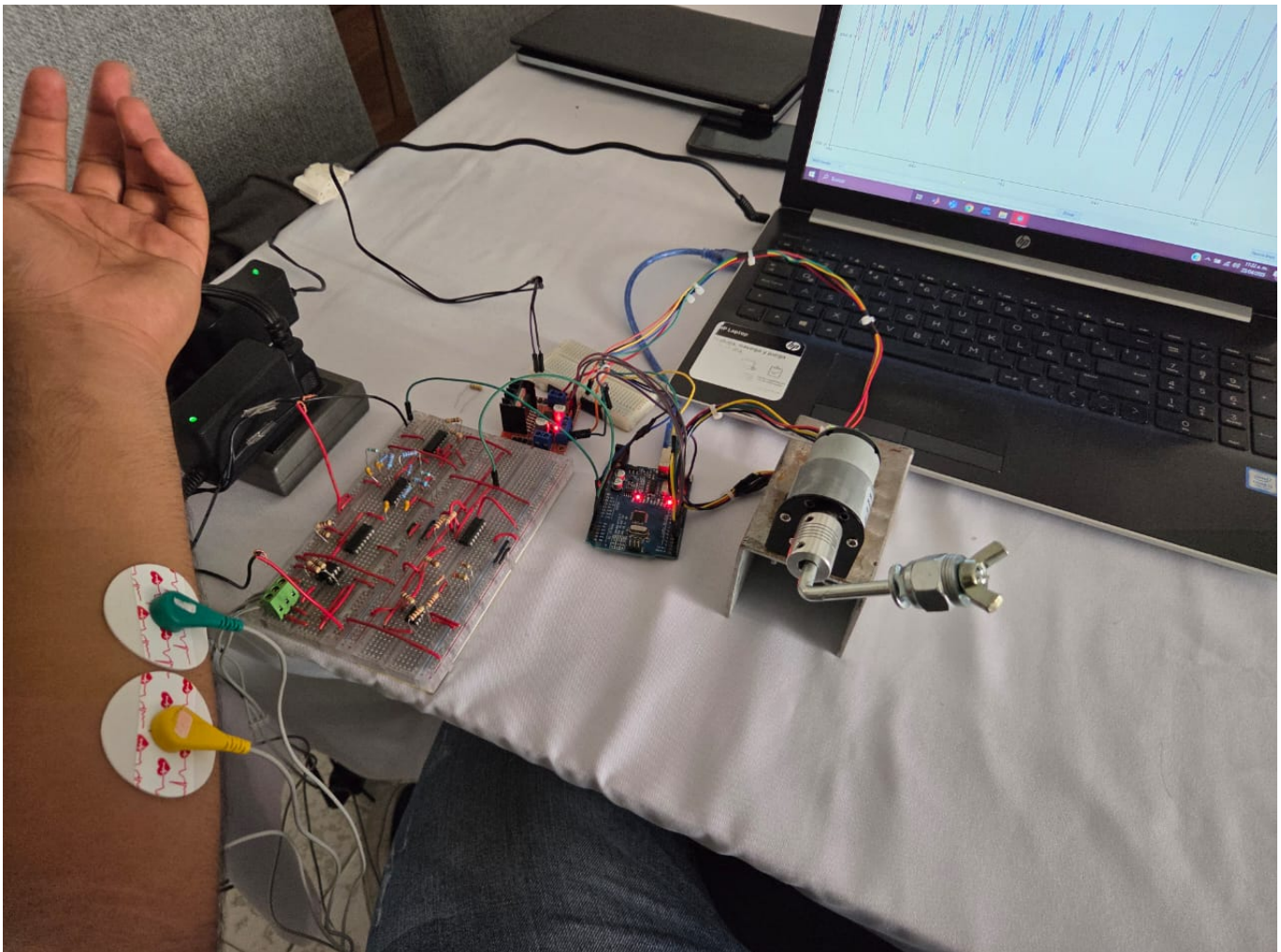


Figura 5.19: Sensor de rigidez basado en control **EMG** (conexión física)

En la Figura [5.19](#) se muestra el diagrama del sistema experimental propuesto, incluyendo el acoplamiento entre el usuario, la señal **EMG**, el controlador y el sistema mecánico.

El sensor de rigidez se implementó mediante la medición simultánea de la señal **EMG** y la respuesta angular del sistema, generando así un índice de rigidez a partir de dicha relación.

El principio de funcionamiento del sensor se basa en monitorear la relación entre la señal **EMG** aplicada y el desplazamiento angular generado por el actuador bajo control. A mayor rigidez muscular, se espera que la señal **EMG** tenga mayor intensidad, pero que produzca menor desplazamiento en el sistema. Por el contrario, una menor rigidez se traduce en un mayor desplazamiento angular para la misma señal de entrada.

En la Figura 5.20 se identifican los elementos del sistema.

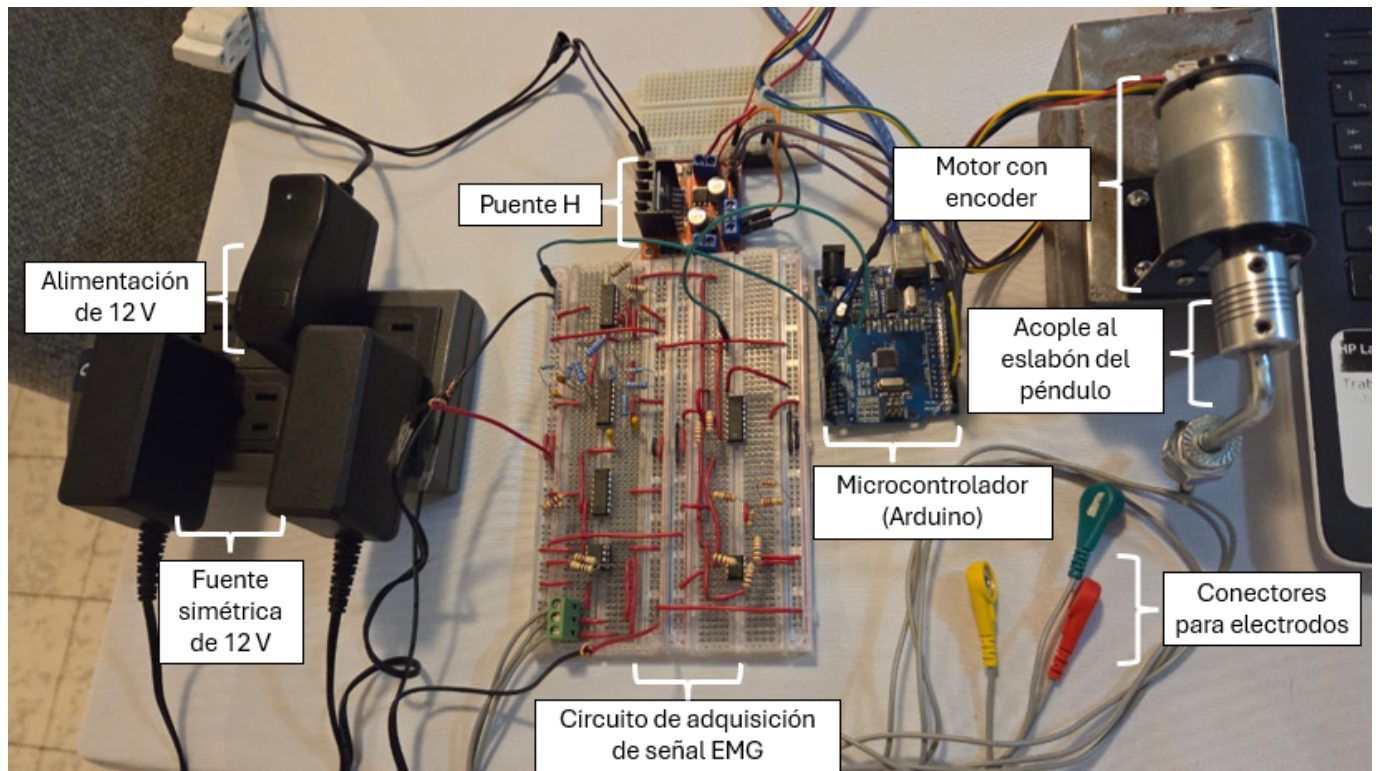
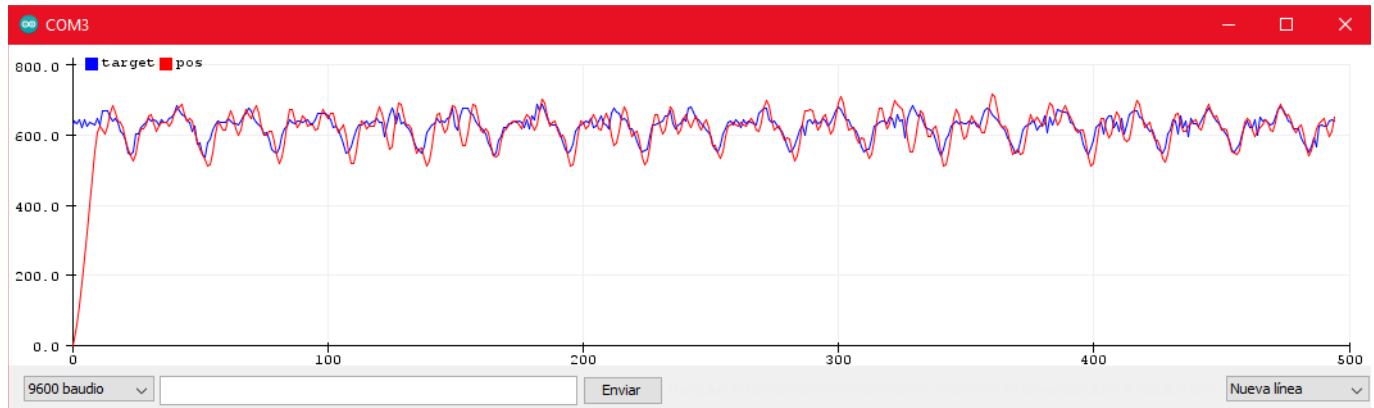


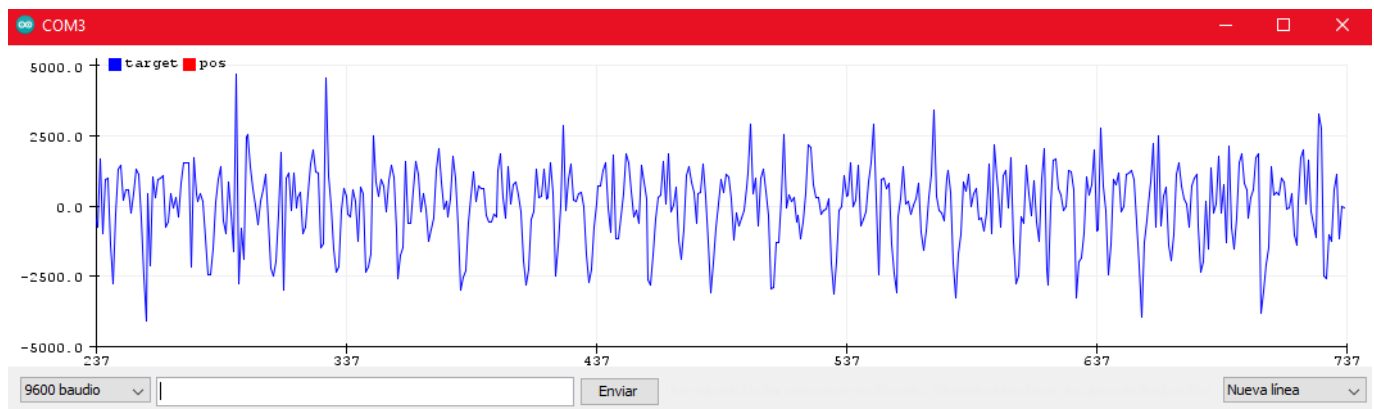
Figura 5.20: Sensor de rigidez (elementos del sensor)

El sistema de conexión del sensor integra tanto la etapa de instrumentación de la señal **EMG** como la etapa de control del actuador. El sensor está formado por los siguientes componentes principales: en primer lugar, se dispone de una fuente de alimentación simétrica de 12V, destinada a alimentar el circuito de adquisición de la señal **EMG**. Adicionalmente, se emplea una fuente independiente para suministrar energía al módulo del **puente H**, encargado de controlar el motor.

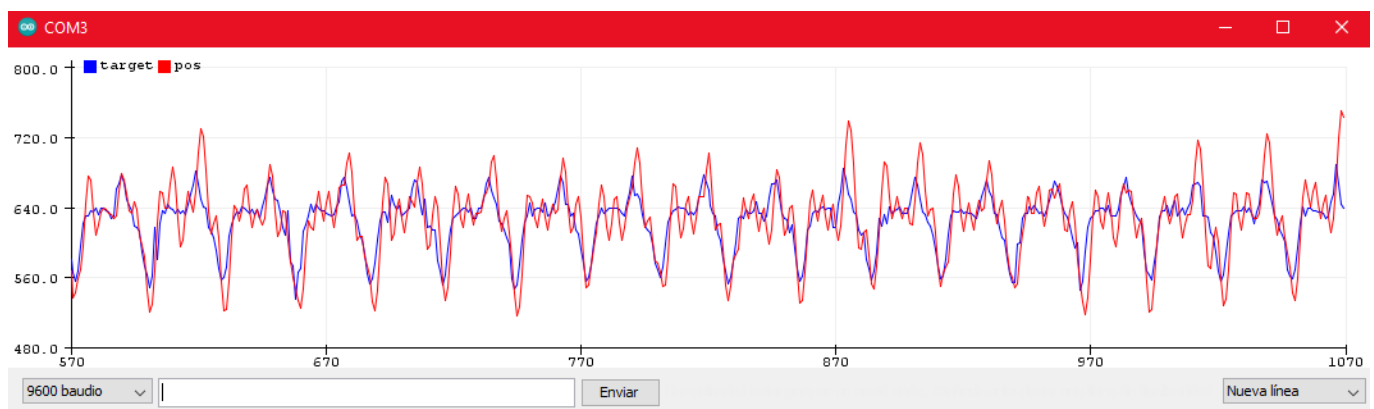
La Figura 5.21 muestra el comportamiento del sensor de rigidez, se muestra la posición, Figura 5.21a, la velocidad observada, Figura 5.21b, y la comparación entre la señal **EMG** modelada y la señal **EMG** real, Figura 5.21c.



(a) Posiciones: posición deseada q_d ■ y posición real q ■.



(b) Velocidad: velocidad por diferenciación ■ y velocidad estimada ■.



(c) Señal EMG modelada ■ y señal EMG real ■

Figura 5.21: Gráficas del sensor de rigidez.

Los resultados obtenidos confirman que el sistema puede ser utilizado como un sensor de rigidez muscular, ya que permite detectar y cuantificar el grado de contracción a partir del comportamiento dinámico del sistema.

Este tipo de sensores puede ser útil en aplicaciones clínicas, rehabilitación y desarrollo de interfaces biomecánicas inteligentes.

El video del funcionamiento del sensor de rigidez con señal **EMG** real se muestra en el siguiente enlace:

<https://www.youtube.com/watch?v=R02Y2JGgFqU>

Mientras que la respuesta de posición entre la señal **EMG** y la respuesta de posición del motor se muestra en el siguiente enlace:

<https://www.youtube.com/watch?v=hUaK0wGjv94>

Conclusiones

A lo largo del desarrollo de esta tesis se implementó exitosamente un sistema completo de adquisición, modelado y control de señales electromiográficas (**EMG**), cumpliendo rigurosamente con los objetivos generales y particulares planteados. Desde la etapa de instrumentación hasta la validación experimental en un sistema mecatrónico real, los resultados obtenidos demostraron la viabilidad técnica del enfoque propuesto, consolidando su utilidad para aplicaciones de control de sistemas mediante señales fisiológicas.

En primer lugar, se diseñó y construyó un circuito eléctrico para la adquisición de señales **EMG**, basada en amplificación diferencial, filtrado activo y desplazamiento de nivel. Esta instrumentación permitió capturar señales limpias, con adecuada relación señal–ruido, y con niveles compatibles para su digitalización mediante un microcontrolador. Las pruebas realizadas confirmaron que el sistema es capaz de obtener señales útiles para su posterior procesamiento, incluso bajo condiciones experimentales limitadas.

Posteriormente, se propuso un modelo matemático de la señal **EMG** utilizando técnicas de identificación paramétrica mediante **mínimos cuadrados recursivos**. Este modelo se estructuró con una matriz de regresores compuesta por funciones no lineales conocidas, como exponenciales, logarítmicas, raíces cuadradas y funciones trigonométricas. Los resultados mostraron que el modelo es capaz de representar la señal **EMG** real con un error reducido, demostrando su precisión y adaptabilidad ante diferentes tipos de contracción muscular.

Una vez validado el modelo, se implementó un esquema de **control de tipo acotado** para regular la posición de un sistema mecatrónico tipo péndulo rotacional. El controlador, diseñado con base en teoría de Lyapunov, fue validado tanto en simulaciones como en pruebas físicas, empleando como señal de referencia tanto trayectorias predefinidas como señales **EMG** reales y modeladas. Los resultados indicaron que el sistema de control fue capaz de seguir adecuadamente las referencias impuestas, manteniendo estabilidad y desempeño robusto.

Como extensión práctica del sistema propuesto, se diseñó un **sensor de rigidez** basado en la correlación entre la señal **EMG** y la respuesta angular del sistema. Esta relación permitió construir un índice funcional que puede ser empleado para estimar la rigidez muscular, con posibles aplicaciones en rehabilitación, diagnóstico y desarrollo de interfaces bioelectrónicas.

En cuanto a la **hipótesis de trabajo**, la cual plantea que: *mediante la técnica de mínimos cuadrados recursivos es posible obtener un modelo matemático preciso de la señal **EMG**, incluso en presencia de ruido y variabilidad*, los resultados experimentales y de simulación respaldan su validez.

El modelo generado mostró un comportamiento robusto y confiable frente a distintos tipos de señal **EMG**, y fue capaz de ser utilizado exitosamente como entrada para un sistema de control real, sin perder precisión ni estabilidad.

En relación con los objetivos propuestos:

- El **objetivo general** se cumplió de forma satisfactoria, al generar un modelo matemático de la señal **EMG** mediante técnicas de identificación paramétrica, y validar su funcionalidad en un sistema de control real.
- Se implementó un circuito eléctrico funcional para la adquisición y digitalización de señales **EMG**, garantizando una señal limpia y procesable.
- Se desarrolló el modelo matemático mediante mínimos cuadrados recursivos, el cual fue validado con distintas señales experimentales, mostrando alta precisión.
- Se aplicó el modelo obtenido para controlar un sistema mecatrónico y desarrollar un sensor de rigidez experimental, confirmando su aplicabilidad y consistencia.

El principal aporte de esta investigación consiste en haber demostrado que es posible modelar con precisión señales **EMG** a través de métodos de identificación paramétrica, y aplicar dichos modelos en sistemas reales de control en tiempo real. Esta integración constituye una base sólida para el desarrollo de tecnologías en rehabilitación, interfaces hombre-máquina y sistemas de asistencia basados en señales fisiológicas.

Entre las principales limitaciones del estudio se encuentran las restricciones de equipamiento, como el uso de microcontroladores de bajo costo y la instrumentación de tipo básico. No obstante, dichas limitaciones fueron solventadas mediante soluciones de diseño robustas que permitieron cumplir con todos los objetivos planteados.

Como líneas futuras de trabajo se recomienda:

- Evaluar el modelo utilizando señales **EMG** provenientes de diferentes usuarios para considerar la variabilidad interindividual.
- Integrar sensores comerciales de mayor precisión para mejorar la fidelidad de la adquisición.
- Utilizar microcontroladores con mayor capacidad de procesamiento para habilitar un control más rápido y preciso.
- Explorar nuevas aplicaciones en prótesis activas, exoesqueletos y dispositivos de asistencia médica.

En conclusión, la presente tesis representa una contribución técnica y metodológica al modelado y control de sistemas mediante señales **EMG**, ofreciendo una alternativa viable, económica y funcional para su implementación en contextos reales de control neuromuscular y biomecánico.

Apéndice A

Propiedades de las matrices

A.1. Propiedades Fundamentales

Las propiedades fundamentales son las siguientes:

P1. $S(\boldsymbol{\theta}\mathbf{n}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es una matriz antisimétrica, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ es un vector base unitario.

$$S(\mathbf{p}_1)\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_1 = -S(\mathbf{p}_2)\mathbf{p}_1 \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{p}_1^T S(\mathbf{p}_1)\mathbf{p}_1 = 0 \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{p}_1 \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{R}^T(\boldsymbol{\theta})S^T\left(\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{p}_1\right)\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = -S(\mathbf{p}_1), \quad \forall \mathbf{p}_1 \in \mathbb{R}^3, \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})S(\mathbf{p}_1)\mathbf{R}^T(\boldsymbol{\theta}) = S\left(\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{p}_1\right), \quad \forall \mathbf{p}_1 \in \mathbb{R}^3, \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R} \quad (\text{A.4})$$

P2. $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})\right) = S(\mathbf{n})\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})$, donde $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ es un vector base unitario.

P3. $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{R}_x(\boldsymbol{\theta})\right) = S(\boldsymbol{\theta}\mathbf{i})\mathbf{R}_x(\boldsymbol{\theta})$, donde $\mathbf{i} \in \mathbb{R}^3$ es un vector base unitario.

P4. $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{R}_y(\boldsymbol{\theta})\right) = S(\boldsymbol{\theta}\mathbf{j})\mathbf{R}_y(\boldsymbol{\theta})$, donde $\mathbf{j} \in \mathbb{R}^3$ es un vector base unitario.

P5. $\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mathbf{R}_z(\theta) \right) = \mathbf{S}(\theta \mathbf{k}) \mathbf{R}_z(\theta)$, donde $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ es un vector base unitario.

P6. $\dot{\mathbf{R}}(\theta) = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{R}(\theta) \right) = \mathbf{S}(\dot{\theta} \mathbf{n}) \mathbf{R}(\theta) = \mathbf{S}(\omega_0) \mathbf{R}(\theta)$, donde $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ es un vector base unitario, $\omega_0 = \dot{\theta} \mathbf{n}$, $\theta = \theta(t)$.

P7. $\dot{\mathbf{R}}_x(\theta) = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{R}_x(\theta) \right) = \mathbf{S}(\dot{\theta} \mathbf{i}) \mathbf{R}_x(\theta) = \mathbf{S}(\omega_{0x}) \mathbf{R}_x(\theta)$, donde $\mathbf{i} \in \mathbb{R}^3$ es un vector base unitario, $\omega_{0x} = \dot{\theta} \mathbf{i}$, $\theta = \theta(t)$.

P8. $\dot{\mathbf{R}}_y(\theta) = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{R}_y(\theta) \right) = \mathbf{S}(\dot{\theta} \mathbf{j}) \mathbf{R}_y(\theta) = \mathbf{S}(\omega_{0y}) \mathbf{R}_y(\theta)$, donde $\mathbf{j} \in \mathbb{R}^3$ es un vector base unitario, $\omega_{0y} = \dot{\theta} \mathbf{j}$, $\theta = \theta(t)$.

P9. $\dot{\mathbf{R}}_z(\theta) = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{R}_z(\theta) \right) = \mathbf{S}(\dot{\theta} \mathbf{k}) \mathbf{R}_z(\theta) = \mathbf{S}(\omega_{0z}) \mathbf{R}_z(\theta)$, donde $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ es un vector base unitario, $\omega_{0z} = \dot{\theta} \mathbf{k}$, $\theta = \theta(t)$.

P10. $\mathbf{S}^2(\mathbf{p}_1) = -\|\mathbf{p}_1\|^2 \mathbf{I} + \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_1^T$

Apéndice B

Estimación de Parámetros

En este apéndice se presentan los parámetros estimados de la señal **EMG** bajo tres condiciones distintas: movimientos rápidos, movimientos lentos y movimientos realizados con fuerza. Los valores mostrados fueron obtenidos mediante el algoritmo recursivo de mínimos cuadrados.

B.1. Señal EMG por movimientos rápidos

$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor
$\hat{\theta}_1$	11.831 140 654 5	$\hat{\theta}_2$	1.355 823 686 1	$\hat{\theta}_3$	2.058 006 217 8	$\hat{\theta}_4$	6.390 348 316 9
$\hat{\theta}_5$	4.697 106 117 3	$\hat{\theta}_6$	6.862 985 310 5	$\hat{\theta}_7$	-1.404 950 685 1	$\hat{\theta}_8$	1.669 886 394 7
$\hat{\theta}_9$	-25.665 554 569 2	$\hat{\theta}_{10}$	-32.183 976 056 7	$\hat{\theta}_{11}$	-2.447 857 605 9	$\hat{\theta}_{12}$	-4.619 189 158 1
$\hat{\theta}_{13}$	-6.772 604 060 1	$\hat{\theta}_{14}$	-3.527 877 740 9	$\hat{\theta}_{15}$	2.870 227 403 0	$\hat{\theta}_{16}$	-1.463 072 386 5
$\hat{\theta}_{17}$	31.210 264 121 8	$\hat{\theta}_{18}$	0.421 148 480 4	$\hat{\theta}_{19}$	-2.436 786 468 0	$\hat{\theta}_{20}$	-0.678 955 123 7
$\hat{\theta}_{21}$	-25.469 284 509 3	$\hat{\theta}_{22}$	-7.133 584 518 9	$\hat{\theta}_{23}$	-0.105 139 222 3	$\hat{\theta}_{24}$	-0.426 741 057 5
$\hat{\theta}_{25}$	-5.470 047 788 4	$\hat{\theta}_{26}$	0.971 770 463 4	$\hat{\theta}_{27}$	2.104 077 579 2	$\hat{\theta}_{28}$	4.690 145 619 4
$\hat{\theta}_{29}$	0.114 103 260 3	$\hat{\theta}_{30}$	1.361 682 953 4	$\hat{\theta}_{31}$	0.033 898 064 8	$\hat{\theta}_{32}$	-1.782 116 141 8
$\hat{\theta}_{33}$	7.848 739 546 1	$\hat{\theta}_{34}$	-12.633 768 637 2	$\hat{\theta}_{35}$	2.224 093 293 9	$\hat{\theta}_{36}$	-4.741 329 145 6
$\hat{\theta}_{37}$	9.716 331 715 2	$\hat{\theta}_{38}$	-3.951 324 294 9	$\hat{\theta}_{39}$	-1.248 339 622 9	$\hat{\theta}_{40}$	0.623 494 397 8
$\hat{\theta}_{41}$	-19.882 216 265 8	$\hat{\theta}_{42}$	11.131 205 278 3	$\hat{\theta}_{43}$	3.414 823 030 5	$\hat{\theta}_{44}$	1.648 084 679 1
$\hat{\theta}_{45}$	-1.189 208 677 8	$\hat{\theta}_{46}$	-0.963 593 283 5	$\hat{\theta}_{47}$	0.046 064 374 8	$\hat{\theta}_{48}$	0.033 007 892 6
$\hat{\theta}_{49}$	35.894 134 461 2	$\hat{\theta}_{50}$	-21.702 838 893 5	$\hat{\theta}_{51}$	0.108 582 309 3	$\hat{\theta}_{52}$	0.171 621 716 6
$\hat{\theta}_{53}$	-7.518 991 190 8	$\hat{\theta}_{54}$	4.541 875 084 5	$\hat{\theta}_{55}$	0.004 445 211 4	$\hat{\theta}_{56}$	0.004 440 034 9
$\hat{\theta}_{57}$	-54.241 768 991 6	$\hat{\theta}_{58}$	25.879 256 041 1	$\hat{\theta}_{59}$	-0.714 479 122 3	$\hat{\theta}_{60}$	0.633 608 719 6
$\hat{\theta}_{61}$	-1.594 691 146 3	$\hat{\theta}_{62}$	-1.483 032 634 3	$\hat{\theta}_{63}$	0.011 734 089 8	$\hat{\theta}_{64}$	-0.002 807 131 7
$\hat{\theta}_{65}$	-48.345 836 986 6	$\hat{\theta}_{66}$	-65.893 567 699 7	$\hat{\theta}_{67}$	-0.170 224 874 3	$\hat{\theta}_{68}$	1.180 095 609 5
$\hat{\theta}_{69}$	2.877 549 388 1	$\hat{\theta}_{70}$	0.894 153 280 5	$\hat{\theta}_{71}$	-0.003 608 556 3	$\hat{\theta}_{72}$	-0.001 024 226 5

Tabla B.1: Parámetros estimados obtenidos para movimientos rápidos.

$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor
$\hat{\theta}_{73}$	-20.103 308 511 8	$\hat{\theta}_{74}$	-8.640 820 056 7	$\hat{\theta}_{75}$	0.084 116 598 8	$\hat{\theta}_{76}$	-0.494 456 004 5
$\hat{\theta}_{77}$	0.380 289 292 0	$\hat{\theta}_{78}$	-5.236 452 217 8	$\hat{\theta}_{79}$	-0.000 242 041 7	$\hat{\theta}_{80}$	0.001 069 577 7
$\hat{\theta}_{81}$	34.777 335 739 2	$\hat{\theta}_{82}$	-90.174 149 746 0	$\hat{\theta}_{83}$	0.193 878 178 9	$\hat{\theta}_{84}$	-0.158 022 804 0
$\hat{\theta}_{85}$	-2.751 628 144 8	$\hat{\theta}_{86}$	0.638 998 809 2	$\hat{\theta}_{87}$	0.000 202 587 5	$\hat{\theta}_{88}$	0.000 263 067 2
$\hat{\theta}_{89}$	-26.464 998 217 9	$\hat{\theta}_{90}$	67.709 840 377 3	$\hat{\theta}_{91}$	-0.216 975 675 4	$\hat{\theta}_{92}$	0.106 050 235 8
$\hat{\theta}_{93}$	3.677 312 582 9	$\hat{\theta}_{94}$	-2.760 258 356 3	$\hat{\theta}_{95}$	-3.890 425 030 9	$\hat{\theta}_{96}$	-0.000 106 098 2
$\hat{\theta}_{97}$	-37.986 103 887 7	$\hat{\theta}_{98}$	33.308 110 640 9	$\hat{\theta}_{99}$	0.022 494 007 7	$\hat{\theta}_{100}$	0.034 898 469 3
$\hat{\theta}_{101}$	0.838 229 638 1	$\hat{\theta}_{102}$	-1.847 274 672 1	$\hat{\theta}_{103}$	-1.179 478 018 2	$\hat{\theta}_{104}$	-2.419 504 200 8
$\hat{\theta}_{105}$	-37.898 261 624 7	$\hat{\theta}_{106}$	8.882 374 379 1	$\hat{\theta}_{107}$	-0.009 328 257 2	$\hat{\theta}_{108}$	-0.015 707 383 2
$\hat{\theta}_{109}$	-1.071 965 536 1	$\hat{\theta}_{110}$	-4.503 330 550 0	$\hat{\theta}_{111}$	-5.109 166 382 1	$\hat{\theta}_{112}$	-3.954 767 396 5
$\hat{\theta}_{113}$	-5.927 175 033 6	$\hat{\theta}_{114}$	14.061 734 834 8	$\hat{\theta}_{115}$	0.001 829 927 2	$\hat{\theta}_{116}$	-0.004 769 983 7
$\hat{\theta}_{117}$	-1.249 921 009 0	$\hat{\theta}_{118}$	7.298 206 278 5	$\hat{\theta}_{119}$	1.919 833 922 7	$\hat{\theta}_{120}$	6.252 910 415 8
$\hat{\theta}_{121}$	18.454 795 593 8	$\hat{\theta}_{122}$	-10.356 751 205 1	$\hat{\theta}_{123}$	-0.005 544 264 5	$\hat{\theta}_{124}$	-0.004 116 029 5
$\hat{\theta}_{125}$	0.824 207 109 2	$\hat{\theta}_{126}$	-0.101 853 910 1	$\hat{\theta}_{127}$	3.376 071 654 8	$\hat{\theta}_{128}$	-1.833 810 907 5
$\hat{\theta}_{129}$	-32.872 018 709 3	$\hat{\theta}_{130}$	20.829 079 149 0	$\hat{\theta}_{131}$	-0.000 292 439 2	$\hat{\theta}_{132}$	-0.002 111 792 2
$\hat{\theta}_{133}$	0.628 215 497 5	$\hat{\theta}_{134}$	-1.693 499 863 9	$\hat{\theta}_{135}$	1.142 726 373 3	$\hat{\theta}_{136}$	-4.023 475 239 8
$\hat{\theta}_{137}$	36.242 633 383 0	$\hat{\theta}_{138}$	-20.817 351 789 6	$\hat{\theta}_{139}$	-2.200 413 872 1	$\hat{\theta}_{140}$	-0.000 772 227 6
$\hat{\theta}_{141}$	0.993 898 224 8	$\hat{\theta}_{142}$	-0.215 235 120 0	$\hat{\theta}_{143}$	-1.986 806 453 8	$\hat{\theta}_{144}$	-6.544 012 695 8
$\hat{\theta}_{145}$	42.218 126 321 3	$\hat{\theta}_{146}$	63.038 802 774 1	$\hat{\theta}_{147}$	0.000 572 986 5	$\hat{\theta}_{148}$	-0.001 221 924 8
$\hat{\theta}_{149}$	-1.110 601 697 4	$\hat{\theta}_{150}$	1.085 198 295 6	$\hat{\theta}_{151}$	2.887 101 669 6	$\hat{\theta}_{152}$	2.593 873 931 6
$\hat{\theta}_{153}$	28.619 815 370 3	$\hat{\theta}_{154}$	4.379 553 471 8	$\hat{\theta}_{155}$	3.517 287 532 5	$\hat{\theta}_{156}$	0.000 491 911 0
$\hat{\theta}_{157}$	1.688 172 972 7	$\hat{\theta}_{158}$	1.020 937 731 6	$\hat{\theta}_{159}$	3.795 869 141 0	$\hat{\theta}_{160}$	-2.823 713 387 4
$\hat{\theta}_{161}$	-40.544 563 201 6	$\hat{\theta}_{162}$	86.821 128 464 2	$\hat{\theta}_{163}$	-2.397 728 349 2	$\hat{\theta}_{164}$	4.410 626 095 8
$\hat{\theta}_{165}$	0.284 681 846 2	$\hat{\theta}_{166}$	-0.836 801 471 2	$\hat{\theta}_{167}$	-1.230 430 660 9	$\hat{\theta}_{168}$	-1.672 585 631 1
$\hat{\theta}_{169}$	44.107 706 190 9	$\hat{\theta}_{170}$	-44.759 638 117 7	$\hat{\theta}_{171}$	0.000 110 437 3	$\hat{\theta}_{172}$	-0.000 124 338 3
$\hat{\theta}_{173}$	0.105 272 610 5	$\hat{\theta}_{174}$	1.785 407 009 5	$\hat{\theta}_{175}$	1.487 578 825 8	$\hat{\theta}_{176}$	3.603 740 561 4
$\hat{\theta}_{177}$	11.114 316 037 1	$\hat{\theta}_{178}$	-33.162 216 718 6	$\hat{\theta}_{179}$	-3.795 674 179 6	$\hat{\theta}_{180}$	1.392 827 390 6
$\hat{\theta}_{181}$	0.439 068 807 4	$\hat{\theta}_{182}$	0.696 740 031 6	$\hat{\theta}_{183}$	4.801 217 768 3	$\hat{\theta}_{184}$	-2.439 321 085 9
$\hat{\theta}_{185}$	40.668 347 970 6	$\hat{\theta}_{186}$	-10.462 022 094 6	$\hat{\theta}_{187}$	1.592 040 841 8	$\hat{\theta}_{188}$	9.413 874 112 7
$\hat{\theta}_{189}$	1.498 296 485 1	$\hat{\theta}_{190}$	1.490 633 589 8	$\hat{\theta}_{191}$	7.258 330 346 2	$\hat{\theta}_{192}$	-1.393 047 838 3
$\hat{\theta}_{193}$	-1.010 348 693 8	$\hat{\theta}_{194}$	-4.123 489 575 5	$\hat{\theta}_{195}$	5.982 294 130 1	$\hat{\theta}_{196}$	1.483 477 583 8
$\hat{\theta}_{197}$	-1.989 151 632 3	$\hat{\theta}_{198}$	-1.839 446 611 0	$\hat{\theta}_{199}$	-6.521 027 066 8	$\hat{\theta}_{200}$	5.805 599 604 5

Tabla B.1: (Continuación) Parámetros estimados obtenidos para movimientos rápidos.

B.2. Señal EMG por movimientos lentos

$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor
$\hat{\theta}_1$	11.831 140 654 5	$\hat{\theta}_2$	1.355 823 686 1	$\hat{\theta}_3$	2.058 006 217 8	$\hat{\theta}_4$	6.390 348 316 9
$\hat{\theta}_5$	4.697 106 117 3	$\hat{\theta}_6$	6.862 985 310 5	$\hat{\theta}_7$	-1.404 950 685 1	$\hat{\theta}_8$	1.669 886 394 7
$\hat{\theta}_9$	-25.665 554 569 2	$\hat{\theta}_{10}$	-32.183 976 056 7	$\hat{\theta}_{11}$	-2.447 857 605 9	$\hat{\theta}_{12}$	-4.619 189 158 1
$\hat{\theta}_{13}$	-6.772 604 060 1	$\hat{\theta}_{14}$	-3.527 877 740 9	$\hat{\theta}_{15}$	2.870 227 403 0	$\hat{\theta}_{16}$	-1.463 072 386 5
$\hat{\theta}_{17}$	31.210 264 121 8	$\hat{\theta}_{18}$	0.421 148 480 4	$\hat{\theta}_{19}$	-2.436 786 468 0	$\hat{\theta}_{20}$	-0.678 955 123 7
$\hat{\theta}_{21}$	-25.469 284 509 3	$\hat{\theta}_{22}$	-7.133 584 518 9	$\hat{\theta}_{23}$	-0.105 139 222 3	$\hat{\theta}_{24}$	-0.426 741 057 5
$\hat{\theta}_{25}$	-5.470 047 788 4	$\hat{\theta}_{26}$	0.971 770 463 4	$\hat{\theta}_{27}$	2.104 077 579 2	$\hat{\theta}_{28}$	4.690 145 619 4
$\hat{\theta}_{29}$	0.114 103 260 3	$\hat{\theta}_{30}$	1.361 682 953 4	$\hat{\theta}_{31}$	0.033 898 064 8	$\hat{\theta}_{32}$	-1.782 116 141 8
$\hat{\theta}_{33}$	7.848 739 546 1	$\hat{\theta}_{34}$	-12.633 768 637 2	$\hat{\theta}_{35}$	2.224 093 293 9	$\hat{\theta}_{36}$	-4.741 329 145 6
$\hat{\theta}_{37}$	9.716 331 715 2	$\hat{\theta}_{38}$	-3.951 324 294 9	$\hat{\theta}_{39}$	-1.248 339 622 9	$\hat{\theta}_{40}$	0.623 494 397 8
$\hat{\theta}_{41}$	-19.882 216 265 8	$\hat{\theta}_{42}$	11.131 205 278 3	$\hat{\theta}_{43}$	3.414 823 030 5	$\hat{\theta}_{44}$	1.648 084 679 1
$\hat{\theta}_{45}$	-1.189 208 677 8	$\hat{\theta}_{46}$	-0.963 593 283 5	$\hat{\theta}_{47}$	0.046 064 374 8	$\hat{\theta}_{48}$	0.033 007 892 6
$\hat{\theta}_{49}$	35.894 134 461 2	$\hat{\theta}_{50}$	-21.702 838 893 5	$\hat{\theta}_{51}$	0.108 582 309 3	$\hat{\theta}_{52}$	0.171 621 716 6
$\hat{\theta}_{53}$	-7.518 991 190 8	$\hat{\theta}_{54}$	4.541 875 084 5	$\hat{\theta}_{55}$	0.004 445 211 4	$\hat{\theta}_{56}$	0.004 440 034 9
$\hat{\theta}_{57}$	-54.241 768 991 6	$\hat{\theta}_{58}$	25.879 256 041 1	$\hat{\theta}_{59}$	-0.714 479 122 3	$\hat{\theta}_{60}$	0.633 608 719 6
$\hat{\theta}_{61}$	-1.594 691 146 3	$\hat{\theta}_{62}$	-1.483 032 634 3	$\hat{\theta}_{63}$	0.011 734 089 8	$\hat{\theta}_{64}$	-0.002 807 131 7
$\hat{\theta}_{65}$	-48.345 836 986 6	$\hat{\theta}_{66}$	-65.893 567 699 7	$\hat{\theta}_{67}$	-0.170 224 874 3	$\hat{\theta}_{68}$	1.180 095 609 5
$\hat{\theta}_{69}$	2.877 549 388 1	$\hat{\theta}_{70}$	0.894 153 280 5	$\hat{\theta}_{71}$	-0.003 608 556 3	$\hat{\theta}_{72}$	-0.001 024 226 5
$\hat{\theta}_{73}$	-20.103 308 511 8	$\hat{\theta}_{74}$	-8.640 820 056 7	$\hat{\theta}_{75}$	0.084 116 598 8	$\hat{\theta}_{76}$	-0.494 456 004 5
$\hat{\theta}_{77}$	0.380 289 292 0	$\hat{\theta}_{78}$	-5.236 452 217 8	$\hat{\theta}_{79}$	-0.000 242 041 7	$\hat{\theta}_{80}$	0.001 069 577 7
$\hat{\theta}_{81}$	34.777 335 739 2	$\hat{\theta}_{82}$	-90.174 149 746 0	$\hat{\theta}_{83}$	0.193 878 178 9	$\hat{\theta}_{84}$	-0.158 022 804 0
$\hat{\theta}_{81}$	-2.751 628 144 8	$\hat{\theta}_{82}$	0.638 998 809 2	$\hat{\theta}_{83}$	0.000 202 587 5	$\hat{\theta}_{84}$	0.000 263 067 2
$\hat{\theta}_{85}$	-26.464 998 217 9	$\hat{\theta}_{86}$	67.709 840 377 3	$\hat{\theta}_{87}$	-0.216 975 675 4	$\hat{\theta}_{88}$	0.106 050 235 8
$\hat{\theta}_{89}$	3.677 312 582 9	$\hat{\theta}_{90}$	-2.760 258 356 3	$\hat{\theta}_{91}$	-3.890 425 030 9	$\hat{\theta}_{92}$	-0.000 106 098 2
$\hat{\theta}_{93}$	-37.986 103 887 7	$\hat{\theta}_{94}$	33.308 110 640 9	$\hat{\theta}_{95}$	0.022 494 007 7	$\hat{\theta}_{96}$	0.034 898 469 3
$\hat{\theta}_{97}$	0.838 229 638 1	$\hat{\theta}_{98}$	-1.847 274 672 1	$\hat{\theta}_{99}$	-1.179 478 018 2	$\hat{\theta}_{100}$	-2.419 504 200 8
$\hat{\theta}_{101}$	-37.898 261 624 7	$\hat{\theta}_{102}$	8.882 374 379 1	$\hat{\theta}_{103}$	-0.009 328 257 2	$\hat{\theta}_{104}$	-0.015 707 383 2
$\hat{\theta}_{105}$	-1.071 965 536 1	$\hat{\theta}_{106}$	-4.503 330 550 0	$\hat{\theta}_{107}$	-5.109 166 382 1	$\hat{\theta}_{108}$	-3.954 767 396 5
$\hat{\theta}_{109}$	-5.927 175 033 6	$\hat{\theta}_{110}$	14.061 734 834 8	$\hat{\theta}_{111}$	0.001 829 927 2	$\hat{\theta}_{112}$	-0.004 769 983 7
$\hat{\theta}_{113}$	-1.249 921 009 0	$\hat{\theta}_{114}$	7.298 206 278 5	$\hat{\theta}_{115}$	1.919 833 922 7	$\hat{\theta}_{116}$	6.252 910 415 8
$\hat{\theta}_{117}$	18.454 795 593 8	$\hat{\theta}_{118}$	-10.356 751 205 1	$\hat{\theta}_{119}$	-0.005 544 264 5	$\hat{\theta}_{120}$	-0.004 116 029 5
$\hat{\theta}_{121}$	0.824 207 109 2	$\hat{\theta}_{122}$	-0.101 853 910 1	$\hat{\theta}_{123}$	3.376 071 654 8	$\hat{\theta}_{124}$	-1.833 810 907 5
$\hat{\theta}_{125}$	-32.872 018 709 3	$\hat{\theta}_{126}$	20.829 079 149 0	$\hat{\theta}_{127}$	-0.000 292 439 2	$\hat{\theta}_{128}$	-0.002 111 792 2

Tabla B.2: Parámetros estimados obtenidos para movimientos lentos.

$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor
$\hat{\theta}_{129}$	0.628 215 497 5	$\hat{\theta}_{130}$	-1.693 499 863 9	$\hat{\theta}_{131}$	1.142 726 373 3	$\hat{\theta}_{132}$	-4.023 475 239 8
$\hat{\theta}_{133}$	36.242 633 383 0	$\hat{\theta}_{134}$	-20.817 351 789 6	$\hat{\theta}_{135}$	-2.200 413 872 1	$\hat{\theta}_{136}$	-0.000 772 227 6
$\hat{\theta}_{137}$	0.993 898 224 8	$\hat{\theta}_{138}$	-0.215 235 120 0	$\hat{\theta}_{139}$	-1.986 806 453 8	$\hat{\theta}_{140}$	-6.544 012 695 8
$\hat{\theta}_{141}$	42.218 126 321 3	$\hat{\theta}_{142}$	63.038 802 774 1	$\hat{\theta}_{143}$	0.000 572 986 5	$\hat{\theta}_{144}$	-0.001 221 924 8
$\hat{\theta}_{145}$	-1.110 601 697 4	$\hat{\theta}_{146}$	1.085 198 295 6	$\hat{\theta}_{147}$	2.887 101 669 6	$\hat{\theta}_{148}$	2.593 873 931 6
$\hat{\theta}_{149}$	28.619 815 370 3	$\hat{\theta}_{150}$	4.379 553 471 8	$\hat{\theta}_{151}$	3.517 287 532 5	$\hat{\theta}_{152}$	0.000 491 911 0
$\hat{\theta}_{153}$	1.688 172 972 7	$\hat{\theta}_{154}$	1.020 937 731 6	$\hat{\theta}_{155}$	3.795 869 141 0	$\hat{\theta}_{156}$	-2.823 713 387 4
$\hat{\theta}_{157}$	-40.544 563 201 6	$\hat{\theta}_{158}$	86.821 128 464 2	$\hat{\theta}_{159}$	-2.397 728 349 2	$\hat{\theta}_{160}$	4.410 626 095 8
$\hat{\theta}_{161}$	0.284 681 846 2	$\hat{\theta}_{162}$	-0.836 801 471 2	$\hat{\theta}_{163}$	-1.230 430 660 9	$\hat{\theta}_{164}$	-1.672 585 631 1
$\hat{\theta}_{165}$	44.107 706 190 9	$\hat{\theta}_{166}$	-44.759 638 117 7	$\hat{\theta}_{167}$	0.000 110 437 3	$\hat{\theta}_{168}$	-0.000 124 338 3
$\hat{\theta}_{169}$	0.105 272 610 5	$\hat{\theta}_{170}$	1.785 407 009 5	$\hat{\theta}_{171}$	1.487 578 825 8	$\hat{\theta}_{172}$	3.603 740 561 4
$\hat{\theta}_{173}$	11.114 316 037 1	$\hat{\theta}_{174}$	-33.162 216 718 6	$\hat{\theta}_{175}$	-3.795 674 179 6	$\hat{\theta}_{176}$	1.392 827 390 6
$\hat{\theta}_{177}$	0.439 068 807 4	$\hat{\theta}_{178}$	0.696 740 031 6	$\hat{\theta}_{179}$	4.801 217 768 3	$\hat{\theta}_{180}$	-2.439 321 085 9
$\hat{\theta}_{181}$	40.668 347 970 6	$\hat{\theta}_{182}$	-10.462 022 094 6	$\hat{\theta}_{183}$	1.592 040 841 8	$\hat{\theta}_{184}$	9.413 874 112 7
$\hat{\theta}_{185}$	1.498 296 485 1	$\hat{\theta}_{186}$	1.490 633 589 8	$\hat{\theta}_{187}$	7.258 330 346 2	$\hat{\theta}_{188}$	-1.393 047 838 3
$\hat{\theta}_{189}$	-1.010 348 693 8	$\hat{\theta}_{190}$	-4.123 489 575 5	$\hat{\theta}_{191}$	5.982 294 130 1	$\hat{\theta}_{192}$	1.483 477 583 8
$\hat{\theta}_{193}$	-1.010 348 693 8	$\hat{\theta}_{194}$	-4.123 489 575 5	$\hat{\theta}_{195}$	5.982 294 130 1	$\hat{\theta}_{196}$	1.483 477 583 8
$\hat{\theta}_{197}$	-1.989 151 632 3	$\hat{\theta}_{198}$	-1.839 446 611 0	$\hat{\theta}_{199}$	-6.521 027 066 8	$\hat{\theta}_{200}$	5.805 599 604 5

Tabla B.2: (Continuación) Parámetros estimados obtenidos para movimientos lentos.

B.3. Señal EMG por movimientos con fuerza

$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor
$\hat{\theta}_1$	11.831 140 654 5	$\hat{\theta}_2$	1.355 823 686 1	$\hat{\theta}_3$	2.058 006 217 8	$\hat{\theta}_4$	6.390 348 316 9
$\hat{\theta}_5$	4.697 106 117 3	$\hat{\theta}_6$	6.862 985 310 5	$\hat{\theta}_7$	-1.404 950 685 1	$\hat{\theta}_8$	1.669 886 394 7
$\hat{\theta}_9$	-25.665 554 569 2	$\hat{\theta}_{10}$	-32.183 976 056 7	$\hat{\theta}_{11}$	-2.447 857 605 9	$\hat{\theta}_{12}$	-4.619 189 158 1
$\hat{\theta}_{13}$	-6.772 604 060 1	$\hat{\theta}_{14}$	-3.527 877 740 9	$\hat{\theta}_{15}$	2.870 227 403 0	$\hat{\theta}_{16}$	-1.463 072 386 5
$\hat{\theta}_{17}$	31.210 264 121 8	$\hat{\theta}_{18}$	0.421 148 480 4	$\hat{\theta}_{19}$	-2.436 786 468 0	$\hat{\theta}_{20}$	-0.678 955 123 7
$\hat{\theta}_{21}$	-25.469 284 509 3	$\hat{\theta}_{22}$	-7.133 584 518 9	$\hat{\theta}_{23}$	-0.105 139 222 3	$\hat{\theta}_{24}$	-0.426 741 057 5
$\hat{\theta}_{25}$	-5.470 047 788 4	$\hat{\theta}_{26}$	0.971 770 463 4	$\hat{\theta}_{27}$	2.104 077 579 2	$\hat{\theta}_{28}$	4.690 145 619 4
$\hat{\theta}_{29}$	0.114 103 260 3	$\hat{\theta}_{30}$	1.361 682 953 4	$\hat{\theta}_{31}$	0.033 898 064 8	$\hat{\theta}_{32}$	-1.782 116 141 8
$\hat{\theta}_{33}$	7.848 739 546 1	$\hat{\theta}_{34}$	-12.633 768 637 2	$\hat{\theta}_{35}$	2.224 093 293 9	$\hat{\theta}_{36}$	-4.741 329 145 6
$\hat{\theta}_{37}$	9.716 331 715 2	$\hat{\theta}_{38}$	-3.951 324 294 9	$\hat{\theta}_{39}$	-1.248 339 622 9	$\hat{\theta}_{40}$	0.623 494 397 8

Tabla B.3: Parámetros estimados obtenidos para movimientos con fuerza.

$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor
$\hat{\theta}_{41}$	-19.882 216 265 8	$\hat{\theta}_{42}$	11.131 205 278 3	$\hat{\theta}_{43}$	3.414 823 030 5	$\hat{\theta}_{44}$	1.648 084 679 1
$\hat{\theta}_{45}$	-1.189 208 677 8	$\hat{\theta}_{46}$	-0.963 593 283 5	$\hat{\theta}_{47}$	0.046 064 374 8	$\hat{\theta}_{48}$	0.033 007 892 6
$\hat{\theta}_{49}$	35.894 134 461 2	$\hat{\theta}_{50}$	-21.702 838 893 5	$\hat{\theta}_{51}$	0.108 582 309 3	$\hat{\theta}_{52}$	0.171 621 716 6
$\hat{\theta}_{53}$	-7.518 991 190 8	$\hat{\theta}_{54}$	4.541 875 084 5	$\hat{\theta}_{55}$	0.004 445 211 4	$\hat{\theta}_{56}$	0.004 440 034 9
$\hat{\theta}_{57}$	-54.241 768 991 6	$\hat{\theta}_{58}$	25.879 256 041 1	$\hat{\theta}_{59}$	-0.714 479 122 3	$\hat{\theta}_{60}$	0.633 608 719 6
$\hat{\theta}_{61}$	-1.594 691 146 3	$\hat{\theta}_{62}$	-1.483 032 634 3	$\hat{\theta}_{63}$	0.011 734 089 8	$\hat{\theta}_{64}$	-0.002 807 131 7
$\hat{\theta}_{65}$	-48.345 836 986 6	$\hat{\theta}_{66}$	-65.893 567 699 7	$\hat{\theta}_{67}$	-0.170 224 874 3	$\hat{\theta}_{68}$	1.180 095 609 5
$\hat{\theta}_{69}$	2.877 549 388 1	$\hat{\theta}_{70}$	0.894 153 280 5	$\hat{\theta}_{71}$	-0.003 608 556 3	$\hat{\theta}_{72}$	-0.001 024 226 5
$\hat{\theta}_{73}$	-20.103 308 511 8	$\hat{\theta}_{74}$	-8.640 820 056 7	$\hat{\theta}_{75}$	0.084 116 598 8	$\hat{\theta}_{76}$	-0.494 456 004 5
$\hat{\theta}_{77}$	0.380 289 292 0	$\hat{\theta}_{78}$	-5.236 452 217 8	$\hat{\theta}_{79}$	-0.000 242 041 7	$\hat{\theta}_{80}$	0.001 069 577 7
$\hat{\theta}_{81}$	34.777 335 739 2	$\hat{\theta}_{82}$	-90.174 149 746 0	$\hat{\theta}_{83}$	0.193 878 178 9	$\hat{\theta}_{84}$	-0.158 022 804 0
$\hat{\theta}_{81}$	-2.751 628 144 8	$\hat{\theta}_{82}$	0.638 998 809 2	$\hat{\theta}_{83}$	0.000 202 587 5	$\hat{\theta}_{84}$	0.000 263 067 2
$\hat{\theta}_{85}$	-26.464 998 217 9	$\hat{\theta}_{86}$	67.709 840 377 3	$\hat{\theta}_{87}$	-0.216 975 675 4	$\hat{\theta}_{88}$	0.106 050 235 8
$\hat{\theta}_{89}$	3.677 312 582 9	$\hat{\theta}_{90}$	-2.760 258 356 3	$\hat{\theta}_{91}$	-3.890 425 030 9	$\hat{\theta}_{92}$	-0.000 106 098 2
$\hat{\theta}_{93}$	-37.986 103 887 7	$\hat{\theta}_{94}$	33.308 110 640 9	$\hat{\theta}_{95}$	0.022 494 007 7	$\hat{\theta}_{96}$	0.034 898 469 3
$\hat{\theta}_{97}$	0.838 229 638 1	$\hat{\theta}_{98}$	-1.847 274 672 1	$\hat{\theta}_{99}$	-1.179 478 018 2	$\hat{\theta}_{100}$	-2.419 504 200 8
$\hat{\theta}_{101}$	-37.898 261 624 7	$\hat{\theta}_{102}$	8.882 374 379 1	$\hat{\theta}_{103}$	-0.009 328 257 2	$\hat{\theta}_{104}$	-0.015 707 383 2
$\hat{\theta}_{105}$	-1.071 965 536 1	$\hat{\theta}_{106}$	-4.503 330 550 0	$\hat{\theta}_{107}$	-5.109 166 382 1	$\hat{\theta}_{108}$	-3.954 767 396 5
$\hat{\theta}_{109}$	-5.927 175 033 6	$\hat{\theta}_{110}$	14.061 734 834 8	$\hat{\theta}_{111}$	0.001 829 927 2	$\hat{\theta}_{112}$	-0.004 769 983 7
$\hat{\theta}_{113}$	-1.249 921 009 0	$\hat{\theta}_{114}$	7.298 206 278 5	$\hat{\theta}_{115}$	1.919 833 922 7	$\hat{\theta}_{116}$	6.252 910 415 8
$\hat{\theta}_{117}$	18.454 795 593 8	$\hat{\theta}_{118}$	-10.356 751 205 1	$\hat{\theta}_{119}$	-0.005 544 264 5	$\hat{\theta}_{120}$	-0.004 116 029 5
$\hat{\theta}_{121}$	0.824 207 109 2	$\hat{\theta}_{122}$	-0.101 853 910 1	$\hat{\theta}_{123}$	3.376 071 654 8	$\hat{\theta}_{124}$	-1.833 810 907 5
$\hat{\theta}_{125}$	-32.872 018 709 3	$\hat{\theta}_{126}$	20.829 079 149 0	$\hat{\theta}_{127}$	-0.000 292 439 2	$\hat{\theta}_{128}$	-0.002 111 792 2
$\hat{\theta}_{129}$	0.628 215 497 5	$\hat{\theta}_{130}$	-1.693 499 863 9	$\hat{\theta}_{131}$	1.142 726 373 3	$\hat{\theta}_{132}$	-4.023 475 239 8
$\hat{\theta}_{133}$	36.242 633 383 0	$\hat{\theta}_{134}$	-20.817 351 789 6	$\hat{\theta}_{135}$	-2.200 413 872 1	$\hat{\theta}_{136}$	-0.000 772 227 6
$\hat{\theta}_{137}$	0.993 898 224 8	$\hat{\theta}_{138}$	-0.215 235 120 0	$\hat{\theta}_{139}$	-1.986 806 453 8	$\hat{\theta}_{140}$	-6.544 012 695 8
$\hat{\theta}_{141}$	42.218 126 321 3	$\hat{\theta}_{142}$	63.038 802 774 1	$\hat{\theta}_{143}$	0.000 572 986 5	$\hat{\theta}_{144}$	-0.001 221 924 8
$\hat{\theta}_{145}$	-1.110 601 697 4	$\hat{\theta}_{146}$	1.085 198 295 6	$\hat{\theta}_{147}$	2.887 101 669 6	$\hat{\theta}_{148}$	2.593 873 931 6
$\hat{\theta}_{149}$	28.619 815 370 3	$\hat{\theta}_{150}$	4.379 553 471 8	$\hat{\theta}_{151}$	3.517 287 532 5	$\hat{\theta}_{152}$	0.000 491 911 0
$\hat{\theta}_{153}$	1.688 172 972 7	$\hat{\theta}_{154}$	1.020 937 731 6	$\hat{\theta}_{155}$	3.795 869 141 0	$\hat{\theta}_{156}$	-2.823 713 387 4
$\hat{\theta}_{157}$	-40.544 563 201 6	$\hat{\theta}_{158}$	86.821 128 464 2	$\hat{\theta}_{159}$	-2.397 728 349 2	$\hat{\theta}_{160}$	4.410 626 095 8
$\hat{\theta}_{161}$	0.284 681 846 2	$\hat{\theta}_{162}$	-0.836 801 471 2	$\hat{\theta}_{163}$	-1.230 430 660 9	$\hat{\theta}_{164}$	-1.672 585 631 1
$\hat{\theta}_{165}$	44.107 706 190 9	$\hat{\theta}_{166}$	-44.759 638 117 7	$\hat{\theta}_{167}$	0.000 110 437 3	$\hat{\theta}_{168}$	-0.000 124 338 3
$\hat{\theta}_{169}$	0.105 272 610 5	$\hat{\theta}_{170}$	1.785 407 009 5	$\hat{\theta}_{171}$	1.487 578 825 8	$\hat{\theta}_{172}$	3.603 740 561 4
$\hat{\theta}_{173}$	11.114 316 037 1	$\hat{\theta}_{174}$	-33.162 216 718 6	$\hat{\theta}_{175}$	-3.795 674 179 6	$\hat{\theta}_{176}$	1.392 827 390 6
$\hat{\theta}_{177}$	0.439 068 807 4	$\hat{\theta}_{178}$	0.696 740 031 6	$\hat{\theta}_{179}$	4.801 217 768 3	$\hat{\theta}_{180}$	-2.439 321 085 9
$\hat{\theta}_{181}$	40.668 347 970 6	$\hat{\theta}_{182}$	-10.462 022 094 6	$\hat{\theta}_{183}$	1.592 040 841 8	$\hat{\theta}_{184}$	9.413 874 112 7

Tabla B.3: (Continuación) Parámetros estimados obtenidos para movimientos con fuerza.

$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor	$\hat{\theta}$	Valor
$\hat{\theta}_{185}$	1.498 296 485 1	$\hat{\theta}_{186}$	1.490 633 589 8	$\hat{\theta}_{187}$	7.258 330 346 2	$\hat{\theta}_{188}$	-1.393 047 838 3
$\hat{\theta}_{189}$	-1.010 348 693 8	$\hat{\theta}_{190}$	-4.123 489 575 5	$\hat{\theta}_{191}$	5.982 294 130 1	$\hat{\theta}_{192}$	1.483 477 583 8
$\hat{\theta}_{193}$	-1.010 348 693 8	$\hat{\theta}_{194}$	-4.123 489 575 5	$\hat{\theta}_{195}$	5.982 294 130 1	$\hat{\theta}_{196}$	1.483 477 583 8
$\hat{\theta}_{197}$	-1.989 151 632 3	$\hat{\theta}_{198}$	-1.839 446 611 0	$\hat{\theta}_{199}$	-6.521 027 066 8	$\hat{\theta}_{200}$	5.805 599 604 5

Tabla B.3: (Continuación) Parámetros estimados obtenidos para movimientos con fuerza.

Bibliografía

- [1] C. J. D. Luca, "Electromyography," in *Encyclopedia of Medical Devices and Instrumentation*, vol. 2, pp. 98–109, John Wiley & Sons, 2006.
- [2] A. Phinyomark, P. Phukpattaranont, and C. Limsakul, "Feature reduction and selection for emg signal classification," *Expert Systems with Applications*, vol. 39, pp. 7420–7431, 2012.
- [3] D. C. J., "Physiology and mathematics of myoelectric signals," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. BME-26, pp. 313–325, 1979.
- [4] I. A. C. Gonzalez, "Feature extraction and classification of electromyographic signals using the hilbert–huang transform and neural networks," Master's thesis, INAOE, Puebla, Mexico, 2012.
- [5] B. F. and H. Schmalbruch, *Motor unit of mammalian muscle*, vol. 60. U.S.A: Sadis Matalon, 1980.
- [6] S. Micera, J. Carpaneto, and S. Raspopovic, "Control of hand prosthesis using peripheral information," *IEEE Reviews in Biomedical Engineering*, vol. 3, pp. 48–68, 2010.
- [7] C. Luca and W. J. Forrest, "Some properties of motor unit action potential trains recorded during constant force isometric contractions in man," *Kybernetik*, vol. 12, pp. 160–168, 1973.
- [8] J. V. Basmajian and C. J. D. Luca, *Muscles Alive: Their Functions Revealed by Electromyography*. Williams & Wilkins, 1985.
- [9] A. Merlo and I. Campanini, "Technical aspects of surface electromyography for clinicians," *The Open Rehabilitation Journal*, vol. 3, pp. 98–109, 2010.
- [10] D. Farina, R. Merletti, and R. M. Enoka, "The extraction of neural strategies from the surface emg: An update," *Journal of Applied Physiology*, vol. 117, pp. 1215–1230, 2014.
- [11] M. A. Oskoei and H. Hu, "Myoelectric control systems-a survey," *Biomedical Signal Processing and Control*, vol. 2, pp. 275–294, 2007.
- [12] R. Merletti, A. Rainoldi, and D. Farina, "Surface electromyography for noninvasive characterization of muscle," *Exercise and Sport Sciences Reviews*, vol. 29, pp. 20–25, 2001.
- [13] D. Farina, R. Merletti, and R. M. Enoka, "The extraction of neural strategies from the surface emg," *Journal of Applied Physiology*, vol. 96, pp. 1486–1495, 2004.

- [14] D. A. Winter, A. J. Fuglevand, and S. E. Archer, "Crosstalk in surface electromyography: Theoretical and practical estimates," *Journal of Electromyography and Kinesiology*, vol. 4, pp. 15–26, 1994.
- [15] D. A. Winter, A. J. Fuglevand, and S. E. Archer, "Technology and instrumentation for detection and conditioning of the surface electromyographic signal: State of the art," *Clinical Biomechanics*, vol. 24, pp. 122–134, 2009.
- [16] C. Luca, "Surface electromyography: Detection and recording," tech. rep., DelSys Incorporated, 2002.
- [17] C. J. D. Luca, "The use of surface electromyography in biomechanics," *Journal of Applied Biomechanics*, vol. 2, pp. 135–163, 1997.
- [18] G. V. David, "Design of the control system for a mechatronic hand rehabilitation device." B.S. thesis, Universidad de Valladolid, 2017.
- [19] R. Merletti and D. Farina, *Surface Electromyography: Physiology, Engineering, and Applications*. John Wiley & Sons, 2016.
- [20] F. Negro, S. Muceli, A. M. Castronovo, A. Holobar, and D. Farina, "Multi-channel intramuscular and surface emg decomposition by convolutive blind source separation," *Journal of Neural Engineering*, vol. 13, pp. 026–027, 2016.
- [21] R. Plonsey, "Action potential sources and their volume conductor fields," *Proceedings of the IEEE*, vol. 65, no. 5, pp. 601–611, 1977.
- [22] A. Heringa, D. F. Stegeman, G. J. H. Uijen, and J. D. Weerd, "Solution methods of electrical field problems in physiology," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. BME-29, no. 1, pp. 34–42, 1982.
- [23] C. Nicholson and A. Freeman, "Theory of current source density analysis and determination of conductivity tensor for anuran cerebellum," *Journal of Neurophysiology*, vol. 38, pp. 356–368, 1975.
- [24] P. Knabner, *The Finite Element Method for the Poisson Equation*. New York: Springer, 2003.
- [25] S. Vallaghé, T. Papadopoulo, and M. Clerc, "The adjoint method for general eeg and meg sensor-based leadfield equations," *Physics in Medicine and Biology*, vol. 54, no. 1, pp. 135–147, 2008.
- [26] Y. Liu, Y. Ren, and D. Xu, "Emg-based real-time linear-nonlinear cascade regression decoding of shoulder, elbow, and wrist movements in able-bodied persons and stroke survivors," in *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 67, pp. 1272–1281, 2020.
- [27] R. R. Sharma, M. Kumar, and R. B. Pachori, "Classification of emg signals using eigenvalue decomposition-based time-frequency representation," in *Biomedical and Clinical Engineering for Healthcare Advancement*, vol. 6, pp. 96–118, 2020.

- [28] L. Zhang, D. Zhao, and S. Peng, "The divergence analysis of kalman filter phase lock loop and unbiased correction of frequency," in *China Satellite Navigation Conference*, (Singapore), Springer, 2018.
- [29] S. Akhlaghi, N. Zhou, and Z. Huang, "Adaptive adjustment of noise covariance in kalman filter for dynamic state estimation," in *IEEE Power & Energy Society General Meeting*, 2017.
- [30] Y. Xu, Q. He, and S. Wang, "An improved adaptive kalman filtering algorithm," *Journal of Taiyuan University of Science and Technology*, vol. 37, pp. 163–168, 2016.
- [31] H. Nyquist, "Certain topics in telegraph transmission theory," *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 47, pp. 617–644, 1928.
- [32] C. Shannon, "Communication in the presence of noise," *Proceedings of the IRE*, vol. 37, 1949.
- [33] F. León, F. R. Lozano, A. Cubero-Fernández, J. Palomares, and J. Olivares, "Sysgpr: System for generating pseudo-realistic synthetic signals," *Revista Iberoamericana De Automática*, vol. 16, pp. 369–379, 2019.
- [34] jP. McSharry, G. Clifford, L. Tarassenko, and L. Smith, "A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 50, pp. 289–294, 2003.
- [35] A. Almasi, M. Shamsollahi, and L. Senhadji, "A dynamical model for generating synthetic phonocardiogram signals," in *Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, vol. 1, pp. 5686–5689, 2011.
- [36] G. Clifford, A. Shoeb, P. McSharry, and B. Janz, "Model-based filtering, compression and classification of the ecg," *International Journal of Bioelectromagnetism*, vol. 7, pp. 158–161, 2004.
- [37] O. Ali, M. S. ur Rehman, T. Glasmachers, I. Iossifidis, and C. Klaes, "Contranet: A hybrid network for improving the classification of eeg and emg signals with limited training data," *Computer Biology and Medicine*, vol. 168, 2023.
- [38] T. J. Herda, M. E. Parra, J. D. Miller, A. J. Sterczala, and M. R. Kelly, "Measuring the accuracies of motor unit firing times and action potential waveforms derived from surface electromyographic decomposition," *Journal of Electromyography and Kinesiology*, vol. 52, 2020.
- [39] D. Hubers, "Artificial intelligence based classification of motor unit action potentials in real world needle emg recordings," *Clinical Neurophysiology*, vol. 156, pp. 220–227, 2023.
- [40] V. Somani, A. N. Rahman, D. Verma, R. R. Chandan, R. G. Vidhya, and V. P. Vijayan, "Classification of motor unit action potential using transfer learning for the diagnosis of neuromuscular diseases," in *8th International Conference on Smart Structures and Systems (CSSS)*, 2022.
- [41] P. Maheshwary, W. Vinu, P. Velvadivu, S. K. Shukla, P. K. Srivastava, and P. Pareek, "Artificial intelligence for the classification of neuromuscular diseases using dominant muap," in *8th International Conference on Smart Structures and Systems (CSSS)*, 2022.

- [42] R. M. Rangayyan, *Biomedical Signal Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 2015.
- [43] J. Fan, X. Jiang, X. Liu, L. Meng, F. Jia, and C. Dai, "Surface emg feature disentanglement for robust pattern recognition," *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, vol. 237, 2023.
- [44] H. Ashraf, "Variational mode decomposition for surface and intramuscular emg signal denoising," *Biomedical Signal Processing and Control*, vol. 82, 2023.
- [45] V. Ibrahimov, G. X.-G. Yue, and D. A. Juraev, "On some advantages of the predictor-corrector methods," *IETI Transactions on Data Analysis*, vol. 1, pp. 79–89, 2023.
- [46] J. F. R. Cortés, *Robótica - Control de robots manipuladores*. Puebla, México: Alfaomega, 2024.
- [47] M. Knaflitz and G. Palestra, "Computer analysis of the myoelectric signal," *IEEE Micro*, vol. 11, no. 5, pp. 12–15, 48–58, 1991.
- [48] M. Zecca, S. Micera, M. C. Carrozza, and P. Dario, "Control of multifunctional prosthetic hands by processing the electromyographic signal," *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, vol. 30, no. 4–6, pp. 459–485, 2002.
- [49] K. Englehart, B. Hudgins, P. A. Parker, and M. Stevenson, "Classification of the myoelectric signal using time-frequency based representations," *Medical Engineering & Physics*, vol. 21, pp. 431–438, 1999.
- [50] M. B. I. Reaz, M. S. Hussain, and F. Mohd-Yasin, "Techniques of emg signal analysis: Detection, processing, classification and applications," *Biological Procedures Online*, vol. 8, no. 1, pp. 11–15, 2006.
- [51] K. Englehart, B. Hudgins, and A. D. C. Chan, "Continuous multifunction myoelectric control using pattern recognition," *Technology and Disability*, vol. 15, no. 2, pp. 95–103, 2003.
- [52] R. N. Aguilar-Serena, D. F. H. de la Rosa, O. O. Sandoval-Gonzalez, I. Herrera-Aguilar, and B. E. Gonzalez-Sanchez, "Design of a wireless electromyography signal acquisition system," in *10th International Congress on Innovation and Technological Development*, 2013.
- [53] Z. Fu, A. Y. B. Hashim, Z. Jamaludin, and I. S. Mohamad, "Design of a low cost emg amplifier with discreet opamps for machine control," *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*, vol. 11, no. 5, pp. 3345–3349, 2016.
- [54] P. S. Sánchez, A. G. Giles, J. P. Jiménez, and M. A. Pérez, "Seguimiento de trayectorias con incertidumbre del modelo usando un diferenciador robusto," *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 16, pp. 423–434, 2019.