Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

SEMÁNTICAS ALGEBRAICAS Y DE KRIPKE PARA LÓGICAS INTERMEDIAS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA
MIGUEL PÉREZ GASPAR

DIRECTOR DE TESIS
Dr. JOSÉ RAMÓN ENRIQUE ARRAZOLA RAMÍREZ

PUEBLA, PUE. NOVIEMBRE 2014

Dedico este trabajo de tesis a:

Karina Monserrat Morales Atenco

sólo somos dos almas perdidas
nadando en una pecera.

Agradecimientos

La presente Tesis es un esfuerzo en el cual, directa o indirectamente, participaron varias personas leyendo, teniéndome paciencia, dando ánimo, acompañando en los momentos de crisis y en los momentos de felicidad. Gracias por formar parte de mi vida y por el apoyo brindado.

“Para cada circunstancia hay un don, y en cada experiencia se oculta un tesoro”.

Doy gracias a Dios, por haberme dado vida, salud, fuerza para seguir preparándome.

A mi Mamá, agradezco la confianza y el apoyo brindado, que sin duda alguna en el trayecto de mi vida me ha demostrado su amor, corrigiendo mis faltas y celebrando mis triunfos.

A mi Hermana, como tú no encontraré a nadie que pueda reemplazarte en la vida, sé que puedo contar contigo cada vez que te necesito.

A mi Tía Olí y Tíos, porque a lo largo de mi vida, han sido pilares fundamentales y me han enseñado el valor de la familia.

A mis compañeros y amigos de generación, que formaron parte de esta aventura Javier (Javi), Juan Manuel (Juan ma), Yoanna (Yovis), Jesús (Chuss), Vicente (Chente), José Juan (J.J.), ha sido un honor trabajar a su lado.

A mis amigas: Irma (Irmiss), Gloria (Glorias), Karina (Karinoa), Elsa, gracias por su amistad y complicidad.

A mis amigos: Marcos (Lord), Iván (Coto), Juan Pablo, Reinaldo (Maestro Rey), Iván (Maestro Tali), Sergio (Serch), Alejandro (Maestro siete), Luis Ángel (Viejito), Arturo (Lolito), es mejor perder tiempo con los amigos, que perder amigos con el tiempo.

A Ana Luisa, gracias por tu amistad, paciencia, alentándome incondicionalmente en los momentos difíciles.

A Verónica (Verito), por la orientación y ayuda que me brindó para la realización de esta tesis, por su apoyo y amistad que me permitieron aprender mucho más que lo estudiado en el proyecto.

A Rubén (maestro chess), pues su amistad es invaluable además este proyecto de tesis no hubiera sido igual sin un toque de rock.

De igual manera a mi director de tesis José Ramón Enrique Arrazola Ramírez, por haber creído en mí y por su disposición para dirigir en todo momento el presente trabajo de tesis.

A mis Profesores, quienes a lo largo de este proyecto moldearon mis conocimientos y me guiaron profesionalmente.

A mis Sinodales: David Villa Hernández, Iván Martínez Ruiz, Carlos Guillen Galván, por sus observaciones, sugerencias, correcciones y orientación así como en la revisión de esta tesis.

A CONACYT, por todo el apoyo económico recibido para la realización de este proyecto de maestría que concluye con esta tesis.

Y a todas aquellas personas que de una u otra forma, colaboraron o participaron en la realización de esta investigación, hago extensivo mi más sincero agradecimiento.

Introducción

Informalmente se llama Lógica Proposicional Intuicionista a una lógica que codifican el razonamiento constructivo. Una prueba es constructiva cuando ofrece un algoritmo para "construir" explícitamente su resultado.

Las Lógicas Proposicionales Intermedias son conjuntos de fórmulas cerrados con respecto a modus ponens y substitución que son extensiones de la Lógica Proposicional Intuicionista y están contenidas en la Lógica Proposicional Clásica. Estas lógicas pueden caracterizarse mediante herramientas semánticas. Las semánticas más populares para las Lógicas Intermedias son la semántica algebraica y la semántica de marcos de Kripke. La semántica algebraica tiene un rol fundamental, ya que toda Lógica Proposicional Intermedia se caracteriza mediante una semántica algebraica. La semántica de Kripke se introdujo para estudiar sistemas modales y posteriormente se presentó como una buena herramienta para describir Lógicas Proposicionales Intermedias. Una desventaja es que, a diferencia de la semántica algebraica, no toda Lógica Proposicional Intermedia puede ser caracterizada vía una semántica de Kripke. En el capítulo 4 se presenta un ejemplo de una Lógica Proposicional Intermedia que no es caracterizada por una semántica de Kripke.

El objetivo principal de esta tesis es buscar una condición suficiente para que algunas Lógicas Intermedias sean caracterizadas por una semántica de Kripke.

En el Capítulo 1 presentamos la noción de semántica, posteriormente se plantea como la matemática hace uso de la semántica en el estudio de diversas teorías, siendo de nuestro interés la Lógica Matemática finalmente presentamos ejemplos de semánticas sin profundizar más en el tema.

En el Capítulo 2 fijamos un Lenguaje proposicional que contiene conectivos y variables proposicionales para después definir una Lógica Proposicional. Nuestro interés se centra en el estudio de las Lógicas Proposicionales Intermedias para ello es necesario definir a la Lógica Proposicional Intuicionista y Clásica, para concluir este capítulo damos ejemplos de algunas Lógicas Proposicionales Intermedias.

El Capítulo 3 se enfoca al estudio de la semántica algebraica, comenzaremos examinando las álgebras como un tipo de lenguaje y analizamos el Teorema de Birkhoff que relaciona a las variedades con las clases ecuacionales. Después presentamos el concepto de retícula, exponiendo algunos resultados y ejemplos. A continuación se introduce la noción de filtro sobre retículas exponiendo algunos resultados necesarios para nuestro resultado principal. Introducimos la definición de álgebra de Heyting y se exponen algunas propiedades relevantes de las mismas.

Posteriormente se enuncia la caracterización algebraica de las lógicas que estamos estudiando a partir de estructuras algebraicas que reciben el nombre de variedades. Por último se extiende la semántica algebraica de la Lógica Proposicional Intuicionista a todas las Lógicas Proposicionales Intermedias.

El Capítulo 4 se dedica al estudio de la semántica de Kripke, ahi introducimos la noción de marco de Kripke y modelo de Kripke, además enunciamos algunas propiedades interesantes como son: completez, separabilidad y canonicidad. Se concluye el capítulo presentando algunos ejemplos de lógicas intermedias y exponeniendo los modelos mediante los cuales cada lógica queda caracterizada.

Finalmente en el Capítulo 5 mostramos que la relación entre semántica algebraica y de Kripke no es casual, ya que existe una analogía entre ellas. Concluimos el capítulo siguiendo la técnica propuesta por Fitting en [13] para caracterizar a las Lógicas Intermedias.

Al final de la tesis se incluyen algunos apéndices complementarios. En el apéndice A se presenta un ejemplo de una lógica no trivial caracterizada algebraicamente. En el apéndice B se presentan un ejemplo de un álgebra de Heyting que no es un álgebra de Boole. En el apéndice C se presentan las pruebas de las caracterizaciones semánticas de la Lógica de Scott y la Lógica Anti-Scott. Por último, en el apéndice D presentamos un listado de las Lógicas Proposicionales Intermedias presentadas en la tesis.

Miguel Pérez Gaspar
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
Puebla, Puebla, México
Noviembre 2014

Índice general

Semánticas Algebraicas y de Kripke para Lógicas Intermedias

Miguel Pérez Gaspar

Noviembre 2014

Capítulo 1

¿Qué es una Semántica?

El término semántica (del griego semantikos, “lo que tiene significado”) se refiere a los aspectos del significado, sentido o interpretación de signos lingüísticos como símbolos, palabras, expresiones o representaciones formales. En principio cualquier medio de expresión (lenguaje formal o natural) admite una correspondencia entre expresiones de símbolos o palabras y situaciones o conjuntos de cosas que se encuentran en el mundo físico o abstracto que puede ser descrito por dicho medio de expresión.

En matemáticas la semántica es tratada por la teoría de modelos que se encarga del estudio de (clases de) estructuras matemáticas tales como grupos, campos, grafos, o incluso universos de teoría de conjuntos, en relación con las teorías axiomáticas y la lógica matemática, en este último contexto hablaremos de semánticas.

Informalmente una teoría matemática está formada por un conjunto de teoremas y axiomas. Los teoremas son proposiciones lógicamente deducibles de los axiomas. En el enfoque moderno, las teorías se conciben como un conjunto de proposiciones expresables en un cierto lenguaje formal que recoge explícitamente el conjunto de símbolos de la teoría, los axiomas y las reglas de deducción.

1.1. Ejemplos de Semánticas

Una manera de estudiar una Teoría matemática es a través de una semántica para la misma. La semántica ayuda a resolver problemas que con Teoría de prueba son muy complejos o intratables. Existen diversos tipos de semánticas conocidas, ejemplos de semánticas son: tablas de verdad, tablas analíticas o tableaux, árboles semánticos, semántica algebraica y semántica de Kripke, siendo estas dos últimas las semánticas de nuestro interés y se estudiarán con mayor detalle en los capítulos 3 y 4 respectivamente.

1.1.1. Tablas de Verdad

La tabla de verdad de una fórmula[1] φ es una tabla en la que se presentan todas las posibles "interpretaciones" de las variables proposicionales que forman a la fórmula y dependiendo del comportamiento de los conectivos se obtien el valor de verdad de la fórmula completa para cada interpretación. En la lógica proposicional, los conectivos lógicos se tratan como funciones de verdad. Es decir, como funciones que toman conjuntos de valores de verdad y devuelven valores de verdad. El significado de cada conectivo lógico puede ilustrarse mediante una tabla que muestre los valores de verdad que la función devuelve frente a todas las combinaciones posibles de valores de verdad.

En las tablas que tenemos a continuación podemos observar el comportamiento de los conectivos de la lógica clásica.

Conjunción

p	q	$p \wedge q$
t	**t**	**t**
t	**f**	**f**
f	**t**	**f**
f	**f**	**f**

Disyunción

p	q	$p \vee q$
t	**t**	**t**
t	**f**	**t**
f	**t**	**t**
f	**f**	**f**

Condicional

p	q	$p \rightarrow q$
t	**t**	**t**
t	**f**	**f**
f	**t**	**t**
f	**f**	**t**

Negación

p	$\neg p$
t	**f**
f	**t**

Tabla 1.1: Tablas de verdad de la Lógica Clásica.

[1]Una fórmula es una cadena de caracteres o palabra generada según una gramática formal a partir de un alfabeto dado. Definiremos de manera formal a una fórmula en el capítulo 2.

1.1.2. Tablas Analíticas o Tableaux

Supongamos que queremos determinar si la fórmula:

$$\varphi = ((p \to q) \to p) \to p$$

conocida como la Ley de Pierce es válida o no en Lógica Clásica. Supongamos que es falsa y comenzamos la construcción de un tableaux que consiste en dos partes.

1. Del lado izquierdo ponemos aquellas subfórmulas de φ que deben ser verdaderas.

2. Del lado derecho ponemos las subfórmulas de φ que deben ser falsas.

La tabla de verdad para la implicación nos dice que φ es falsa si y sólo si $((p \to q) \to p)$ es verdadera y p falsa. Así ponemos a la primer subfórmula del lado izquierdo y la segunda del lado derecho.

$$\begin{array}{r|l}
\hline
 & ((p \to q) \to p) \to p \\
((p \to q) \to p) & p
\end{array}$$

Ahora $((p \to q) \to p)$ es verdadera, tenemos dos posibilidades o bien, hacemos p verdadera o hacemos $(p \to q)$ falsa. Así el tableaux se extiende en dos formas:

$$\begin{array}{r|l}
\hline
 & ((p \to q) \to p) \to p \\
((p \to q) \to p) & p \\
p &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
\hline
 & ((p \to q) \to p) \to p \\
((p \to q) \to p) & p \\
 & (p \to q) \\
p & q
\end{array}$$

En ambos tableaux tenemos que p es verdadera y falsa simultáneamente, lo cual es una contradicción. Por lo tanto no existe un contramodelo para φ y así

$$\varphi = ((p \to q) \to p) \to p$$

es válida en Lógica Clásica.

Más formalmente una semántica de tableaux en un lenguaje $\mathcal{L}$ es un par $t = (\Gamma, \Delta)$ donde Γ y Δ son conjuntos de fórmulas de $\mathcal{L}$, además Γ contiene todas las fórmulas verdaderas (la parte izquierda de un tableaux) y Δ todas las fórmulas falsas (la parte derecha de un tableaux). Para un estudio más profundo de semántica de tableaux véase [8].

1.1.3. Árboles Semánticos

Un árbol semántico es una sucesión de fórmulas llamadas ramas o trayectorias generadas, a partir de un conjunto de fórmulas no vacío, por aplicación de reglas básicas. El método de demostración por contradicción permite utilizar los árboles semánticos para comprobar si una proposición es válida o no.

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \mathbf{t}(\varphi \wedge \psi) \\ \vdots \\ \mathbf{t}\varphi \\ \mathbf{t}\psi \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \vdots \\ \mathbf{f}(\varphi \wedge \psi) \\ \vdots \\ \begin{array}{cc} \mathbf{f}\varphi & \mathbf{f}\psi \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \mathbf{t}(\varphi \vee \psi) \\ \vdots \\ \begin{array}{cc} \mathbf{t}\varphi & \mathbf{t}\psi \end{array} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \vdots \\ \mathbf{f}(\varphi \vee \psi) \\ \vdots \\ \mathbf{f}\varphi \\ \mathbf{f}\psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \mathbf{t}(\varphi \rightarrow \psi) \\ \vdots \\ \begin{array}{cc} \mathbf{f}\varphi & \mathbf{t}\psi \end{array} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \vdots \\ \mathbf{f}(\varphi \rightarrow \psi) \\ \vdots \\ \mathbf{t}\varphi \\ \mathbf{f}\psi \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \mathbf{t}(\varphi \leftrightarrow \psi) \\ \vdots \\ \begin{array}{cc} \mathbf{t}\varphi & \mathbf{f}\varphi \\ \mathbf{t}\psi & \mathbf{f}\psi \end{array} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \vdots \\ \mathbf{f}(\varphi \leftrightarrow \psi) \\ \vdots \\ \begin{array}{cc} \mathbf{t}\varphi & \mathbf{f}\varphi \\ \mathbf{f}\psi & \mathbf{t}\psi \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \mathbf{t}(\neg\varphi) \\ \vdots \\ \mathbf{f}\varphi \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \vdots \\ \mathbf{f}(\neg\varphi) \\ \vdots \\ \mathbf{t}\varphi \end{array}$$

Figura 1.1: Reglas Básicas de Tabla para la Lógica Proposicional Clásica.

Definición 1.1. *Una fórmula con asignación es una expresión de la forma* $\mathbf{t}\varphi$ *o* $\mathbf{f}\varphi$*, donde* φ *es una fórmula.*

Definición 1.2. *Una tabla con asignación es un árbol binario τ, donde cada nodo consiste de una fórmula con asignación.*

En caso de que las fórmulas que se presentan en cada nodo sean sin asignación, diremos que el árbol τ es una tabla sin asignación. Análogo a la definición de valores de verdad de fórmulas que involucran conectivos, definiremos las reglas básicas de tablas de asignación para fórmulas, las cuales quedan en realidad determinadas por las tablas de valuación. Las reglas para la lógica proposicional se presentan en la Figura 1.1.

Definición 1.3. *Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ un conjunto finito de fórmulas con asignación. Una tabla que inicia con $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es una tabla que se obtiene a partir de aplicar repetidamente las reglas de tabla.*

Es posible establecer una relación de orden parcial de la siguiente manera $\varphi \leq \psi$ en caso de que ψ se obtiene a partir de φ mediante la aplicación de una o más reglas de tabla.

1. Diremos que una trayectoria de un árbol es cerrada si contiene simultáneamente un par de fórmulas de la forma $\mathbf{t}\varphi$ y $\mathbf{f}\varphi$.
2. Diremos que un árbol es cerrado si cada una de sus trayectorias lo es. En otro caso, diremos que la trayectoria es abierta.
3. Para verificar que una fórmula φ es válida, se elabora una tabla que inicia con $F\varphi$. Si todas las trayectorias del árbol son cerradas, entonces φ es lgícamente válida.

Para una mayor referencia acerca de árboles semánticos consultar, [27].

Ejemplo 1.4. *Ejemplo de una tabla abierta.*

- $\boldsymbol{t}((\varphi_2 \to (\varphi_{1\wedge}\varphi_2)) \to \varphi_1)$, $\boldsymbol{t}(\varphi_2 \to (\neg\varphi_1))$
  - $\boldsymbol{f}\varphi_2$
    - $\boldsymbol{f}(\varphi_2 \to (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$
      - $\boldsymbol{t}\varphi_2$, $\boldsymbol{f}(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$
        - $\boldsymbol{f}\varphi_1$
        - $\boldsymbol{f}\varphi_2$
    - $\boldsymbol{t}\varphi_1$
  - $\boldsymbol{t}(\neg\varphi_1)$
    - $\boldsymbol{f}\varphi_1$
      - $\boldsymbol{t}\varphi_1$
      - $\boldsymbol{f}(\varphi_2 \to (\varphi_1 \wedge \varphi_2))$
        - $\boldsymbol{t}\varphi_2$, $\boldsymbol{f}(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$
          - $\boldsymbol{f}\varphi_2$
          - $\boldsymbol{f}\varphi_1$

Capítulo 2

Lógicas Intermedias

2.1. El Origen de las Lógicas Intermedias

Los principios fundamentales de la deducción lógica fueron establecidos por Aristóteles hace más de 2300 años. Estos principios son tres: identidad, el tercero excluido y la no-contradicción.

El principio de identidad afirma que todo objeto es igual a sí mismo: A es A. De P siempre se infiere P.

El principio del tercero excluido la lógica tradicional lo formuló así: o bien P es verdadera, o bien su negación $(\neg P)$ lo es.

Según el principio de no-contradicción ninguna cosa puede ser y no ser: Dos proposiciones contradictorias P y $\neg P$ no pueden ser ambas verdaderas.

Estos principios fundamentales de la lógica se identificaron con las leyes del pensamiento y, por lo tanto, no se cuestionaban. Así como la geometría euclidiana era la única geometría evidentemente posible y asombraba por su exacta aplicabilidad a la realidad, estas leyes aristotélicas describían con exactitud la que parecía ser la única manera correcta de pensar. Sin embargo, en la primera mitad del siglo XIX, después de una complicada serie de pruebas e intentos al rededor del famoso postulado de las paralelas (postulado 5 del Libro I de Euclides), el matemático ruso Nicolás Ivanovich Lobachevski construyó una geometría en la que resultaba falso el quinto postulado de Euclides. El descenso de la geometría euclidiana como categoría de "única" minó el estatus de invulnerabilidad del que gozaba la lógica clásica, pues algunos lógicos comenzaron a pensar que, aún cuando estas tres sencillas leyes correspondiesen con exactitud a nuestra manera de razonar, eso no las revestía de algún carácter especial.

En la Lógica proposicional clásica todo enunciado tiene uno y sólo un valor de verdad que se elige entre dos posibles valores de verdad: verdadero o falso. El principio del tercero excluido hace a la lógica una lógica bivalente. A principios de los años veinte, algunos lógicos como Emil Post, Jan Łukasiewicz junto con Alfred Tarski hicieron a un lado el principio del tercero excluido y mostraron que era posible construir sistemas lógicos trivalentes perfectamente consistentes. Junto a estas lógicas trivalentes que se presentaron como extensiones semánticas de la lógica clásica apareció una en especial a la que denominaron Lógica Intuicionista, la cual fue construida por el matemático y filósofo holandés Luitzen Egbertus Jan Brouwer.

La lógica intuicionista no niega el principio del tercero excluido ni evita la introducción de la doble negación, por ejemplo:

$$\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \quad y \quad \varphi \to \neg(\neg\varphi)$$

son demostrables en intuicionismo. Sin embargo,

$$(\varphi \vee \neg\varphi) \quad \text{y} \quad \neg(\neg\varphi) \to \varphi$$

no lo son. Más aún, la triple negación de una proposición sí es equivalente a su negación, $\neg(\neg(\neg\varphi)) \leftrightarrow \neg\varphi$.

A continuación fijaremos un lenguaje proposicional para posteriormente definir una Lógica Proposicional y subsecuentemente definir a las Lógicas Intermedias que son extensiones de la Lógica Intuicionista. Dichas Lógicas Intermedias serán el principal interés a lo largo de la tesis.

Sea $\mathcal{V}$ un conjunto numerable de variables proposicionales, entonces fijamos un lenguaje proposicional $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ que contiene conectivos proposicionales ($\wedge$, $\vee$, $\to$,$\neg$). Las fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ son definidas de manera recursiva como es usual.[1] El conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ se denota mediante $FORM$.

Dada una fórmula φ, $Var(\varphi)$ denota el conjunto (finito) de variables proposicionales que ocurren en φ. Si $Var(\varphi) \subseteq V$, donde $V \subseteq \mathcal{V}$, es decir V es un conjunto de variables proposicionales, decimos que φ es una V-fórmula.

Una substitución σ es una función de $\mathcal{V}$ a $FORM$; $\sigma\varphi$ denota la fórmula obtenida por reemplazar cada variable proposicional p que ocurre en φ con la fórmula σp.

Definición 2.1. *Una **Lógica Proposicional** $\mathbf{L}$ en el lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ es cualquier conjunto de fórmulas $\mathbf{L}$ del lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ que satisface las siguientes condiciones:*

1. $\mathbf{L}$ *es cerrado bajo la regla Modus Ponens (MP): ψ es consecuencia directa de $\varphi \to \psi$ y φ.;*

2. $\mathbf{L}$ *es cerrado bajo la regla de substitución.*

Observación 2.2. *También puede decirse que una lógica proposicional L consiste de:*

1. *Un conjunto numerable de símbolos $\mathcal{V}$. Una sucesión finita de símbolos es llamada una expresión.*

2. *Un subconjunto del conjunto de expresiones llamado el conjunto de fórmulas bien formadas.*

[1] Para más referencias sobre la construcción de fórmulas véase ([19],[29])

3. *Un conjunto de fórmulas bien formadas llamadas axiomas de L.*

4. *Un subconjunto finito de relaciones entre fórmulas bien formadas, llamadas reglas de inferencia.*

Definición 2.3.

1. *Una prueba en L es una sucesión de fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ tal que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ o bien φ_i es un axioma o φ_i es una consecuencia directa de algunas fórmulas precedentes en la sucesión por virtud de aplicar una regla de inferencia.*

2. *Un teorema de L es una fórmula φ tal que φ es la última fórmula de alguna prueba en L. Tal prueba es llamada una prueba de φ en L y lo denotamos mediante $\vdash_L \varphi$.*

Comenzamos con una lógica básica llamada lógica positiva, para más referencias de esta lógica véase [23]. A partir de ahora todas las lógicas que definiremos tienen como regla de inferencia MP.

Definición 2.4. *La **Lógica Positiva** (**LP**) es la lógica proposicional en el lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{V}} \backslash \{\neg\} = \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ es definida mediante el siguiente conjunto de axiomas:*

Pos1: $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

Pos2: $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Pos3: $p \wedge q \rightarrow p$

Pos4: $p \wedge q \rightarrow q$

Pos5: $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$

Pos6: $p \rightarrow (p \vee q)$

Pos7: $q \rightarrow (p \vee q)$

Pos8: $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$

Ahora definimos algunas lógicas que serán de importancia en el estudio de las Lógicas Intermedias.

Si consideramos a la lógica proposicional positiva se puede extender en formas distintas, por ejemplo:

Definición 2.5. *La **Lógica Proposicional Intuicionista** (**Int**) es la lógica proposicional que se obtiene al agregar a la lógica positiva los siguientes dos axiomas:*

Int1: $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$

Int2: $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

Definición 2.6. *La **Lógica Proposicional Clásica** (**Cl**) es la lógica proposicional que se obtiene al agregar a la lógica positiva los siguientes axiomas:*

Cl1: $\neg p \to (p \to q)$

Cl2: $(p \to \neg p) \to \neg p$

Cl3: $(\neg p \to p) \to p$

Existen distintas axiomatizaciones de **Cl** y de **Int** como podemos ver en [19], [29] pero hemos elegido estas que cuentan con la misma base de axiomas positivos.

Sabemos que la Lógica Proposicional Intuicionista está contenida propiamente en la Lógica Proposicional Clásica y añadiendo el principio del tercero excluido $\varphi \vee \neg\varphi$ a la primera obtenemos la segunda. Una pregunta natural es qué ocurre con las lógicas que se encuentran contenidas entre ambas.

Definición 2.7. *Una **Lógica Proposicional Intermedia** L en el lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ es cualquier conjunto de fórmulas L del lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ que es una lógica y satisface que:*

$$\mathbf{Int} \subseteq L \subseteq \mathbf{Cl}.$$

Dado que en este trabajo sólo se consideran lógicas proposicionales omitiremos el adjetivo proposicional de ahora en adelante.

2.2. Ejemplos de Lógicas Intermedias

Ejemplos de Lógicas intermedias aparecen en la Tabla 2.1. **LC** se conoce como la lógica de Dummett, **KP** denota a la lógica de Kreisel-Putnam, $\mathbf{Bd_1}$ se conoce como la lógica de profundidad 1, finalmente $\mathbf{T_1}$ denota una lógica de Gabbay-de John. Para una lista más amplia de Lógicas intermedias consultar el Capítulo 4.

Notación 2.8. *Sea Δ cualquier conjunto de fórmulas tal que $\Delta \subseteq$ **Cl**, entonces **Int** $+ \Delta$ denota la lógica intermedia L que se obtiene al agregar las fórmulas de Δ a **Int**. Las fórmulas en Δ son llamados axiomas adicionales o axiomas extras de L.*

LC	:=	$\mathbf{Int} + (p \to q) \vee (q \to p)$
KP	:=	$\mathbf{Int} + (\neg p \to q \vee r) \to (\neg p \to q) \vee (\neg p \to r)$
$\mathbf{Bd_1}$	:=	$\mathbf{Int} + p_1 \vee \neg p_1$
$\mathbf{T_1}$	:=	$\mathbf{Int} + ((p_0 \to p_1) \to p_1) \wedge ((p_1 \to p_0) \to p_0) \to (p_0 \vee p_1)$

Tabla 2.1: Algunas Lógicas Intermedias.

Dado un conjunto V de variables proposicionales, L^V denota el conjunto de V-fórmulas de $FORM$.

Sean dos conjuntos de fórmulas Γ y Δ, la expresión $\Gamma \vdash_L \Delta$ significa que existen fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ en Γ y $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ en Δ tales que

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \to \psi_1 \vee \psi_2 \vee \cdots \vee \psi_m \in L.$$

Observación 2.9. *Si una lógica L es tal que $L := \mathbf{Int} + \Delta$ con Δ finito, decimos que L es finitamente axiomatizable.*

La siguiente definición caracteriza la finitud de las lógicas intermedias, para más referencias véase [18].

Definición 2.10. *Una lógica intermedia L es* ***finita*** *si y sólo si la fórmula φ_n es válida en ella para algún $n > 2$, en donde $\varphi_n = (\psi_1 \leftrightarrow \psi_2) \vee (\psi_1 \leftrightarrow \psi_3) \vee \ldots \vee (\psi_1 \leftrightarrow \psi_n) \vee (\psi_2 \leftrightarrow \psi_3) \vee \ldots \vee (\psi_2 \leftrightarrow \psi_n) \vee (\psi_3 \leftrightarrow \psi_4) \vee \ldots \vee (\psi_{n-1} \leftrightarrow \psi_n)$.*

Hasta este momento únicamente hemos definido el lenguaje en el que trabajaremos y las teorías o lógicas que nos interesan.

Las definiciones que hemos dado han sido en términos axiomáticos por lo cual definir si una fórmula particular es un teorema de una lógica implicaría encontrar una prueba de la misma lo cual en ocasiones no es una tarea sencilla.

Para simplificar esta decisión emplearemos la semántica, específicamente las semánticas algebraicas que veremos a continuación y las de tipo Kripke que veremos en el capítulo 4.

Capítulo 3

Semántica Algebraica

Para comprender la semántica algebraica es necesario estudiar el concepto de álgebra, algunos ejemplos de álgebras son estructuras como los Grupos o los Anillos. Existen muchas propiedades y resultados formales entorno a las álgebras. Por ello en la primera sección estudiaremos algunos elementos que conforman el álgebra universal. Siguiendo este estudio presentamos la definición general de lo que es una identidad, ya que dado un conjunto de identidades podemos definir o axiomatizar una clase de álgebras. Como un ejemplo particular de una clase de álgebras que se pueden axiomatizar tenemos a las álgebras de Heyting, dichas álgebras describen algebraicamente a la lógica intuicionista.

3.1. Elementos del Álgebra Universal

En esta sección se estudian las nociones más generales y fundamentales del álgebra universal. Algunos ejemplos de estas nociones son las de homomorfismo e isomorfismo entre álgebras, dichos resultados que se aplican a todos los tipos de álgebras.

Usaremos la notación y terminología usada en [7] para esta sección.

Definición 3.1. *Para un conjunto no vacío A y n un entero no negativo, definimos:*

A1: $A^0 = \{\emptyset\}$,

A2: *Para $n > 0$, A^n es el **conjunto de n tuplas** de elementos de A.*

Definición 3.2. *Sea A un conjunto no vacío, una **operación finita** en A es una operación de aridad n para algún entero no negativo n. Una operación en A es unaria, binaria o ternaria si su aridad es 1, 2 o 3, respectivamente.*

Definición 3.3. *Un **lenguaje de álgebras** (o tipo de álgebras) es un conjunto $\mathfrak{F}$ de símbolos funcionales tal que a cada $f \in \mathfrak{F}$ se le asigna un entero no negativo n. Este entero es llamado la **aridad** (o rango) de f.*

El conjunto de símbolos funcionales de aridad n en $\mathfrak{F}$ lo denotaremos por $\mathfrak{F}_n$.

Definición 3.4. *Decimos que un álgebra* $\mathbf{A}$ *es* ***de tipo*** $\mathfrak{F}$ *si* $\mathbf{A} = (A, f_1, f_2, \ldots, f_k)$, *donde* A *es un conjunto no vacío llamado universo (o conjunto fundamental) y* $f_1^{\mathbf{A}}, f_2^{\mathbf{A}}, \ldots, f_k^{\mathbf{A}}$ *son llamadas operaciones fundamentales en* $\mathbf{A}$.

Observación 3.5. *Un álgebra* $\mathbf{A}$ *es finita si* $|A|$ *es finita y es llamada trivial si* $|A| = 1$.

Ejemplo 3.6.

1. *Un Grupo es un álgebra* $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ *con una operación binaria, unaria y nula en donde las siguientes identidades*[1] *son verdaderas:*

   G1: $x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$
   G2: $x \cdot 1 \approx 1 \cdot x \approx x$
   G3: $x \cdot x^{-1} \approx x^{-1} \cdot x \approx x$

2. *Un Quasigrupo es un álgebra* $\mathbf{Q} = (Q, /, \cdot, \backslash, 1)$ *con tres operaciones binarias que satisfacen las siguientes identidades:*

   Q1: $x\backslash(x \cdot y) \approx y, \quad (x \cdot y)/y \approx x$
   Q2: $x \cdot (x\backslash y) \approx y, \quad (x/y) \cdot y \approx x$

Definición 3.7. *Sea* X *un conjunto de objetos llamados* variables. *Sea* $\mathfrak{F}$ *un tipo de álgebras. El* ***conjunto*** $T(X)$ ***de términos*** *de tipo* $\mathfrak{F}$ *sobre* X *es el conjunto más pequeño tal que:*

TR1: $X \cup \mathfrak{F}_0 \subseteq T(X)$.

TR2: *Si* $p_1, p_2, \ldots, p_n \in T(X)$ *y* $f \in \mathfrak{F}_n$, *entonces la cadena* $f(p_1 \ldots p_n) \in T(X)$.

Para un símbolo funcional $\cdot$ usamos preferentemente la notación de infijo, es decir escribiremos $p_1 \cdot p_2$ en vez de $\cdot(p_1, p_2)$.

Para $p \in T(X)$ usualmente escribimos p como $p(x_1, \ldots, x_n)$ para indicar que las variables que ocurren en p están entre $x_1, \ldots, x_n$. Un término p es de aridad n si el número de variables que aparecen explícitamente en p es $\leq n$.

Ejemplo 3.8.

1. *Si* $\mathfrak{F}$ *consiste de un símbolo funcional binario simple* $\cdot$, *y* $X = \{x, y, z\}$, *entonces* x, y, z, $x \cdot y$, $x \cdot (y \cdot z)$, $(x \cdot y) \cdot z$ *son algunos términos de tipo* $\mathfrak{F}$ *sobre* X.

2. *Sea* $\mathfrak{F}$ *dotado de dos operaciones binarias* $+$ *y* $\cdot$, *y sea* $X = \{x, y, z\}$, *entonces* x, y, z, $x \cdot (y + z)$, $(x \cdot y) + (x \cdot z)$ *son algunos términos de tipo* $\mathfrak{F}$ *sobre* X.

[1] La noción de identidad se presenta en una forma más detallada en la sección 3.2 de este capítulo.

Definición 3.9. *Dado un término* $p(x_1,\ldots,x_n)$ *de tipo* $\mathfrak{F}$ *sobre algún conjunto* X *y dada un álgebra* $\mathbf{A}$ *de tipo* $\mathfrak{F}$ *definimos una función* $p^{\mathbf{A}} : \mathrm{A}^n \to A$ *como sigue:*

P1: *Si* p *es una variable* x_i*, entonces*

$$p^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_n) = a_i$$

para $a_1,\ldots,a_n \in A$*. A* $p^{\mathbf{A}}$ *se le denomina la i-ésima proyección.*

P2: *Si* p *es de la forma* $f(p_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,p_k(x_1,\ldots,x_n))$*, donde* $f \in \mathfrak{F}_k$*, entonces*

$$p^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_n) = f^{\mathbf{A}}(p_1^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_n),\ldots,p_k^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots a_n)).$$

En particular si $p = f \in \mathfrak{F}$*, entonces* $p^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{A}} \cdot p^{\mathbf{A}}$ *es el término función en* $\mathbf{A}$ *correspondiente a el término* p*.*

Definición 3.10. *Dado* $\mathfrak{F}$ *y* X*, si* $T(X) \neq \emptyset$*, entonces el* ***álgebra de términos*** *de tipo* $\mathfrak{F}$ *sobre* X*, escrito* $\mathbf{T}(X)$*, tiene como su universo el conjunto* $T(X)$*, y las operaciones fundamentales satisfacen*

$$f^{\mathbf{T}(X)} : \langle p_1,\ldots,p_n\rangle \mapsto f(p_1,\ldots,p_n),$$

para $f \in \mathfrak{F}_n$ *y* $p_i \in T(X)$*,* $1 \leq i \leq n$*.*

Definición 3.11. *Supongamos que* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *son dos álgebras de mismo tipo* $\mathfrak{F}$*. Una función* $h : A \to B$ *es llamada* ***homomorfismo*** *de* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *si para cada* f *de aridad* n *en* $\mathfrak{F}$ *y cada sucesión* $a_1,a_2,\ldots,a_n$ *de* A*, se tiene que:*

$$h(f^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_n)) = f^{\mathbf{B}}(h(a_1),\ldots,h(a_n)).$$

Si h *es una función sobreyectiva, entonces* $\mathbf{B}$ *se dice que es una imagen homomorfa de* $\mathbf{A}$*.*

Si h *es inyectiva y sobreyectiva, entonces* h *es un isomorfismo de* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$*. Decimos que* $\mathbf{A}$ *es isomorfo a* $\mathbf{B}$*, denotado mediante* $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$*, si existe un isomorfismo de* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$

Definición 3.12. *Sea* $h : A \to B$ *un homomorfismo, entonces el* ***Kernel*** *de* h*, escrito* $Ker(h)$ *es definido como:*

$$Ker(h) = \{\langle a,b\rangle \in A^2 : h(a) = h(b)\}.$$

Definición 3.13. *Sea* $\mathfrak{C}$ *una clase de álgebras de tipo* $\mathfrak{F}$ *y sea* $\mathbf{U}(X)$ *un álgebra de tipo* $\mathfrak{F}$ *que es generada por* X*. Si para cada* $\mathbf{A} \in \mathfrak{C}$ *y para toda función*

$$\alpha : X \to A$$

existe un homomorfismo

$$\beta : \mathbf{U}(X) \to A$$

que extiende a α *(es decir,* $\beta(x) = \alpha(x)$ *para* $x \in X$*), entonces decimos que* $\mathbf{U}(X)$ *tiene la* ***propiedad universal de funciones*** *para* $\mathfrak{C}$ *sobre* X*. El conjunto* X *es llamado un conjunto de generadores libres de* $\mathbf{U}(X)$ *y* $\mathbf{U}(X)$ *se dice que es un generador libre para* X*.*

Para la demostración de los siguientes resultados, ver [7].

Lema 3.14. *Supongamos que* $\mathbf{U}(X)$ *tiene la propiedad universal de funciones para* $\mathfrak{C}$ *sobre* X*, entonces, dados* $\mathbf{A} \in \mathfrak{C}$ *y* $\alpha : X \to A$*, existe un única extensión* β *de* α *tal que* β *es un homomorfismo de* $\mathbf{U}(X)$ *a* $\mathbf{A}$*.*

Teorema 3.15. *Para cualquier tipo* $\mathfrak{F}$ *y* X *conjunto de variables, donde* $X \neq \emptyset$*, si* $\mathfrak{F}_0 = \emptyset$*, el álgebra de términos* $\mathbf{T}(X)$ *tiene la propiedad universal de funciones para la clase de todas las álgebras de tipo* $\mathfrak{F}$ *sobre* X*.*

Definición 3.16. *Sean* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ *dos álgebras del mismo tipo. Entonces* $\mathbf{B}$ *es **subálgebra** de* $\mathbf{A}$ *si* $B \subseteq A$ *y cada operación fundamental en* $\mathbf{B}$ *es la restricción de la correspondiente operación fundamental en* $\mathbf{A}$*.*

Definición 3.17. *Sean* $\mathbf{A}_1$ *y* $\mathbf{A}_2$ *dos álgebras del mismo tipo* $\mathfrak{F}$*. Definimos al **producto directo*** $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ *como el álgebra cuyo universo es el conjunto* $A_1 \times A_2$ *y tal que para cada* $f \in \mathfrak{F}$ *y* $a_i \in A_1$*,* $a_i' \in A_2$*, donde* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*,*

$$f^{\mathbf{A}\times\mathbf{A}}(\langle a_1, a_1' \rangle, \ldots, \langle a_n, a_n' \rangle) = \langle f^{\mathbf{A}_1}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathbf{A}_2}(a_1', \ldots, a_n') \rangle.$$

Definición 3.18. *Sea* $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ *una familia indexada de álgebras del mismo tipo* $\mathfrak{F}$*. El **producto directo*** $\mathbf{A} = \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ *es un álgebra con universo* $\prod_{i\in I} A_i$ *y tal que para* $f \in \mathfrak{F}$ *y* $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{i\in I} A_i$*,*

$$f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)(i) = f^{\mathbf{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)), \text{ para cada } i \in I.$$

Introducimos las siguientes clases de operadores entre álgebras.

Definición 3.19. *Sea* $\mathfrak{C}$ *una clase de álgebras.*

1. $\mathbf{A} \in I(\mathfrak{C})$ *si y sólo si* $\mathbf{A}$ *es isomorfo a algún miembro de* $\mathfrak{C}$*.*
2. $\mathbf{A} \in S(\mathfrak{C})$ *si y sólo si* $\mathbf{A}$ *es subálgebra de algún miembro de* $\mathfrak{C}$*.*
3. $\mathbf{A} \in H(\mathfrak{C})$ *si y sólo si* $\mathbf{A}$ *es la imagen homomorfa de algún miembro de* $\mathfrak{C}$*.*
4. $\mathbf{A} \in P(\mathfrak{C})$ *si y sólo si* $\mathbf{A}$ *es un producto directo de una familia no vacía de álgebras de* $\mathfrak{C}$*.*

Notación 3.20. *Si* O_1 *y* O_2 *son dos operadores entre álgebras del mismo tipo escribimos* O_1O_2 *para indicar la composición de operadores.*

Observación 3.21. *El símbolo* $\leq$ *denota el orden parcial usual entre operadores, es decir,* $O_1 \leq O_2$ *si* $O_1(\mathfrak{C}) \subseteq O_2(\mathfrak{C})$ *para toda clase de álgebras* $\mathfrak{C}$*. Un ejemplo de esto es que* $I \leq H$ *y* $I \leq V$*.*

Definición 3.22.

1. *Un operador es **idempotente** si* $O^2 = OO = O$*.*

2. *Una clase $\mathfrak{C}$ de álgebras es* ***cerrada*** *bajo un operador O, si $O(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{C}$.*

Lema 3.23. *Sea $\mathfrak{C}$ una clase de álgebras, entonces las siguientes desigualdades se tienen: $SH(\mathfrak{C}) \leq HS(\mathfrak{C})$, $PS(\mathfrak{C}) \leq SP(\mathfrak{C})$ y $PH(\mathfrak{C}) \leq HP(\mathfrak{C})$. También H, S, IP son idempotentes.*

Demostración. Veamos que $SH(\mathfrak{C}) \leq HS(\mathfrak{C})$.

Sean $\mathfrak{C}$ una clase de álgebras y $\mathbf{A} \in SH(\mathfrak{C})$.

Como $\mathbf{A} \in SH(\mathfrak{C})$ tenemos que $\mathbf{A}$ es subálgebra de algún miembro de $H(\mathfrak{C})$, a saber $\mathbf{C} \in H(\mathfrak{C})$, de esto $\mathbf{C}$ es una imagen homomorfa de algún miembro de $\mathfrak{C}$, es decir, existe $h : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ homomorfismo sobreyectivo, para algún $\mathbf{B} \in \mathfrak{C}$, entonces $\mathbf{A} \leq h(\mathbf{B}) = \mathbf{C}$. Por lo tanto $h^{-1}(\mathbf{A}) \leq \mathbf{B}$, y como $h(h^{-1}(\mathbf{A})) = \mathbf{A}$, tenemos que $\mathbf{A} \in HS(\mathfrak{C})$.

Ahora veamos que $PS \leq SP$.

Sean $\mathfrak{C}$ una clase de álgebras y $\mathbf{A} \in PS(\mathfrak{C})$.

Como $\mathbf{A} \in PS(\mathfrak{C})$, implicamos que $\mathbf{A} = \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ y para cada $i \in I$, $\mathbf{A}_i \leq \mathbf{B}_i$. Entonces $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_{i \in I} \leq \prod_{i \in I} \mathbf{B}_{i \in I}$, con lo cual $\mathbf{A} \in SP(\mathfrak{C})$.
De manera similar se verifica que: $PH \leq HP$, $H^2 = H$, $S^2 = S$ y $(IP)^2 = IP$. □

Definición 3.24. *Una clase $\mathfrak{C}$ de álgebras es llamada* ***variedad*** *si es cerrada bajo subálgebras, imágenes homomorfas, y productos directos, es decir, $S(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{C}$, $H(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{C}$ y $P(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{C}$.*

Definición 3.25. *Si $\mathfrak{C}$ es una clase de álgebras del mismo tipo, sea*

$$V(\mathfrak{C}) = \bigcap \{F : F \text{ variedad y } \mathfrak{C} \subseteq F\}.$$

Decimos que $V(\mathfrak{C})$ es la **variedad generada** por $\mathfrak{C}$. Una variedad es finitamente generada si $V = V(\mathfrak{C})$ para alguna clase finita de álgebras $\mathfrak{C}$.

Teorema 3.26 (Tarski)**.** *Si V es una variedad, entonces $V = HSP(V)$.*

Demostración. Por ser V una variedad se tiene que $H(V) = S(V) = IP(V) = V$ además $I \leq V$, entonces $HSP \leq HSP(V) = V$.

Ahora verifiquemos que para cualquier clase de álgebras $\mathfrak{C}$, $HSP(\mathfrak{C})$ es cerrado bajo imágenes homomorfas, subálgebras y productos directos.

Del Lema 3.23 tenemos que $H(HSP)(\mathfrak{C}) = HSP(\mathfrak{C})$.

Por otro lado, $S(HSP)(\mathfrak{C}) = (SH)(SP)(\mathfrak{C}) \leq (HS)(SP)(\mathfrak{C}) = HSP(\mathfrak{C})$, finalmente tenemos que

$$\begin{aligned} P(HSP)(\mathfrak{C}) = (PH)(SP)(\mathfrak{C}) &\leq (HP)(SP)(\mathfrak{C}) = H(PS)P(\mathfrak{C}) \\ &\leq H(SP)P(\mathfrak{C}) = HSPP(\mathfrak{C}) \\ &\leq HSIPIP(\mathfrak{C}) = HSIP(\mathfrak{C}) \\ &\leq HSHP(\mathfrak{C}) \\ &\leq HHSP(\mathfrak{C}) = HSP(\mathfrak{C}) \end{aligned}$$

Como $V(\mathfrak{C})$ es la clase más pequeña que contiene a $\mathfrak{C}$ y es cerrado bajo imágenes homomorfas, subálgebras y productos directos tenemos que $V = HSP$. □

3.2. Identidades y el Teorema de Birkhoff

En esta sección estudiamos identidades y uno de los más célebres teoremas de Birkhoff que dice que las clases de álgebras definidas por identidades son precisamente aquellas que son cerradas bajo homomorfismos, subálgebras y productos directos. Ya hemos visto ejemplos particulares de identidades en el ejemplo 3.6. Ahora generalizamos la noción de identidad y la noción de identidad en un álgebra $\mathbf{A}$.

Definición 3.27.

1. *Una **identidad** de tipo $\mathfrak{F}$ sobre X es una expresión de la forma*
$$p \approx q$$
donde $p, q \in T(X)$. Denotaremos con $Id(X)$ al conjunto de identidades de tipo $\mathfrak{F}$ sobre X.

2. *Una **álgebra $\mathbf{A}$ de tipo** $\mathfrak{F}$ satisface una identidad:*
$$p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$$
(o la identidad es verdadera en $\mathbf{A}$), abreviada por:
$$\mathbf{A} \models p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n),$$
o más brevemente
$$\mathbf{A} \models p \approx q$$
si para cada elección $a_1, \ldots, a_n \in A$ tenemos que:
$$p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n).$$

3. *Si una clase $\mathfrak{C}$ de álgebras satisface la equivalencia $p \approx q$, escribimos:*
$$\mathfrak{C} \models p \approx q,$$
si para cada $\mathbf{A} \in \mathfrak{C}$, $\mathbf{A} \models p \approx q$.

4. *Si Σ es un conjunto de identidades, decimos que $\mathfrak{C}$ satisface Σ, lo denotamos por*
$$\mathfrak{C} \models \Sigma,$$
si para cada $p \approx q \in \Sigma$, se tiene $\mathfrak{C} \models p \approx q$.

5. *Dados $\mathfrak{C}$ y X, sea*
$$Id_{\mathfrak{C}}(X) = \{p \approx q \in Id(X) : \mathfrak{C} \models p \approx q\}$$

Usamos el símbolo $\mathfrak{C} \not\models \Sigma$ *para expresar que* $\mathfrak{C}$ *no satisface* Σ.

Reformulando la definición de satisfacción usando la noción de homomorfismo tenemos que:

Lema 3.28. *Si* $\mathfrak{C}$ *es una clase de álgebras de tipo* $\mathfrak{F}$ *y* $p \approx q$ *es una identidad de tipo* $\mathfrak{F}$ *sobre* X*, entonces* $\mathfrak{C} \models p \approx q$ *si y sólo si para cada* $\mathbf{A} \in \mathfrak{C}$ *y para* $h : \mathbf{T}(X) \to \mathbf{A}$ *homomorfismo tenemos* $h(p) = h(q)$.

Demostración.

[$\Rightarrow$] Sean $p = p(x_1, \ldots, x_n)$ y $q = q(x_1, \ldots, x_n) \in T(X)$, $\mathbf{A}$ un álgebra de la clase $\mathfrak{C}$ y $h : \mathbf{T}(X) \to \mathbf{A}$ un homomorfismo. Como $\mathfrak{C} \models p \approx q$ y $\mathbf{A} \in \mathfrak{C}$ se tiene que $\mathbf{A} \models p \approx q$, entonces para cada elección $a_1, \ldots, a_n \in A$ tenemos $p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ y dado que h es un homomorfismo, entonces

$$\begin{aligned} p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots a_n) &= q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots a_n) \\ p^{\mathbf{A}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)) &= q^{\mathbf{A}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)) \\ h(p^{\mathbf{T}(X)}(x_1, \ldots, x_n)) &= h(q^{\mathbf{T}(X)}(x_1, \ldots, x_n)) \\ h(p) &= h(q) \end{aligned}$$

[$\Leftarrow$] Sea $\mathbf{A} \in \mathfrak{C}$ y $a_1 \ldots, a_n \in A$. Por la propiedad universal de funciones de $\mathbf{T}(X)$, existe un homomorfismo $h : \mathbf{T}(X) \to \mathbf{A}$ tal que

$$h(x_i) = a_i, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) &= p^{\mathbf{A}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)) \\ &= h(p) \\ &= h(q) \\ &= q^{\mathbf{A}}(h(x_1), \ldots, h(x_n)) \\ &= q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Así $\mathfrak{C} \models p \approx q$. □

Uno de los objetivos del álgebra universal es extraer, siempre que sea posible, los elementos comunes de diferentes clases de álgebras por ejemplo las clases básicas de operadores (I, S, P y V) preservan identidades como lo veremos a continuación.

Lema 3.29. *Para cualquier clase de álgebras* $\mathfrak{C}$ *de tipo* $\mathfrak{F}$ *todas las clases*

$$\mathfrak{C}, I(\mathfrak{C}), S(\mathfrak{C}), P(\mathfrak{C}) \text{ y } V(\mathfrak{C})$$

satisfacen las mismas identidades sobre cualquier conjunto de variables X.

Demostración. Veamos que $\mathfrak{C}$, $I(\mathfrak{C})$ satisfacen las mismas identidades.

Como $I(\mathfrak{C}) \leq IS(\mathfrak{C})$, $I(\mathfrak{C}) \leq H(\mathfrak{C})$ y $I(\mathfrak{C}) \leq IP(\mathfrak{C})$, debemos tener

$$Id_{\mathfrak{C}}(X) \supseteq Id_{S(\mathfrak{C})}(X),\ Id_{H(\mathfrak{C})}(X),\ Id_{P(\mathfrak{C})}(X).$$

Para el resto de la prueba supongamos $\mathfrak{C} \models p(x_1, \ldots x_n) \approx q(x_1 \ldots, x_n)$. Resta verificar

$$Id_{\mathfrak{C}}(X) \subseteq Id_{S(\mathfrak{C})}(X),\ Id_{H(\mathfrak{C})}(X),\ Id_{P(\mathfrak{C})}(X).$$

Veamos primero que $Id_{\mathfrak{C}}(X) \subseteq Id_{S(\mathfrak{C})}(X)$.

Sean $A \in Id_{\mathfrak{C}}(X)$, $\mathbf{B} \leq \mathbf{A} \in \mathfrak{C}$ y $b_1, \ldots, b_n \in B$. Como $B \leq A$ y $b_1, \ldots, b_n \in B$, entonces $b_1, \ldots, b_n \in A$ así

$$p^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n) = q^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n),$$

entonces

$$p^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n) = q^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Así $\mathbf{B} \models p \approx q$. Por lo tanto

$$Id_{\mathfrak{C}}(X) = Id_{S(\mathfrak{C})}(X).$$

Ahora veamos que $Id_{H(\mathfrak{C})}(X) \subseteq Id_{\mathfrak{C}}(X)$. Supongamos que $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un homomorfismo sobreyectivo con $\mathbf{A} \in \mathfrak{C}$.

Si $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq B$ elegimos $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ tal que

$$h(a_i) = b_i \text{ para } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Entonces

$$p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)$$

y como h es un homomorfismo tenemos que

$$h(p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = h(q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)).$$

Por lo tanto

$$p^{\mathbf{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) = h(q^{\mathbf{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))).$$

Entonces

$$p^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n) = q^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Así

$$\mathbf{B} \models p \approx q.$$

Por lo tanto

$$Id_{\mathfrak{C}}(X) = Id_{H(\mathfrak{C})}(X).$$

Finalmente, veamos que $Id_{P(\mathfrak{C})}(X) \subseteq Id_{\mathfrak{C}}(X)$. Supongamos que $\mathbf{A}_i \in \mathfrak{C}$ para $i \in I$. Entonces para $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A = \prod_{i \in I} A_{i \in I}$ tenemos

$$p^{\mathbf{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)) = q^{\mathbf{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i));$$

luego
$$p^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_n)(i) = q^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_n)(i)$$
para $i \in I$, así
$$p^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_n) = q^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_n).$$
Por lo tanto $Id_{\mathfrak{C}}(X) = Id_{P(\mathfrak{C})}(X)$.
Por último para verificar que $Id_{\mathfrak{C}}(X) = Id_{\mathcal{V}(\mathfrak{C})}(X)$ por Teorema 3.26 $V = HSP$, esto junto con los resultados previos de esta demostración completan la prueba.

□

Definición 3.30. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra de tipo* $\mathfrak{F}$ *y sea* $\theta \in Eq(A)$[2], *entonces* θ *es congruente en* $\mathbf{A}$, *si* θ *satisface la "**Propiedad de compatibilidad**":*

(PC) Para cada función de aridad-n, $f \in \mathfrak{F}$ *y elementos* $a_i, b_i \in A$,

si $a_i \theta b_i$ *se tiene para* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *entonces*
$$f^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_n)\theta f^{\mathbf{A}}(b_1,\ldots,b_n).$$

Definición 3.31. *Sea* $\theta \in Eq(A)$. *Para* $a \in A$, *la **clase de equivalencia** de un módulo* θ *es el conjunto:*

$$a/\theta = \{b \in A : \langle a, b\rangle \in \theta\} \;\; y \;\; A/\theta = \{a/\theta : a \in A\}.$$

Definición 3.32. *El conjunto de todas las congruencias en un álgebra* $\mathbf{A}$ *es denotado por* $Con\mathbf{A}$. *Sea* θ *una congruencia en un álgebra* A, *entonces el **álgebra cociente** de* $\mathbf{A}$ *por* θ, *denotado* $\mathbf{A}/\theta$, *es el álgebra cuyo universo es* A/θ *y cuyas operaciones fundamentales satisfacen*

$$f^{\mathbf{A}/\theta}(a_1/\theta,\ldots,a_n/\theta) = f^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_n)/\theta$$

donde $a_1,\ldots,a_n \in A$ *y* f *es un símbolo funcional en* $\mathfrak{F}$ *de aridad* n.

Definición 3.33. *El **álgebra de congruencias** de* $\mathbf{A}$, *es denotada mediante* **Con** $\mathbf{A} = (Con\mathbf{A} \subseteq, \cap, \cup)$.

Definición 3.34. *Sea* $\mathfrak{C}$ *una clase de álgebras de tipo* $\mathfrak{F}$. *Dado un conjunto* X *de variables definimos la **congruencia*** $\theta_{\mathfrak{C}}(X)$ *en* $\mathbf{T}(X)$ *por:*

$$\theta_{\mathfrak{C}}(X) = \bigcap \Phi_{\mathfrak{C}}(X)$$

donde
$$\Phi_{\mathfrak{C}}(X) = \{\phi \in \;\; Con\mathbf{T}(X) : \mathbf{T}(X)/\phi \in IS(\mathfrak{C})\},$$
*entonces definimos la **$\mathfrak{C}$-álgebra libre** sobre* X, *denotada por* $\mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{X})$ *como:*

$$\mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{X}) = \mathbf{T}(X)/\theta_{\mathfrak{C}}(X)$$

[2] $Eq(A)$ es el conjunto de todas las relaciones de equivalencia en A.

donde

$$\overline{X} = X/\theta_{\mathfrak{C}}(X).$$

Para $x \in X$ *escribimos* $\overline{x}$ *para denotar* $x/\theta_{\mathfrak{C}}(X)$, *y para un elemento en el conjunto de términos* $p = p(x_1, \ldots, x_n) \in T(X)$ *escribimos* $\overline{p}$ *para denotar* $p^{\mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{X})}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$.

Si X *es finito,* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, *escribimos a menudo* $\mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ *en vez de* $\mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{X})$. $F_{\mathfrak{C}}(\overline{X})$ *es el universo de* $\mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{X})$.

Definición 3.35. *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra y sea* θ *un elemento en* $Con\mathbf{A}$. *La* ***función natural*** $\nu_\theta : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\theta$ *es definida por* $\nu_\theta(a) = a/\theta$.

Omitimos la prueba de los siguientes teoremas, para ver una demostración de ellos véase [7].

Teorema 3.36. *La función natural* ν_θ *de un álgebra* $\mathbf{A}$ *al cociente del álgebra* A/θ *es un homomorfismo sobreyectivo.*

Teorema 3.37. *Supongamos que* $\mathbf{T}(X)$ *existe, entonces para una clase de álgebras* $\mathfrak{C} \neq \emptyset$, $\mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{X}) \in ISP(\mathfrak{C})$. *Por lo tanto,* $\mathfrak{C}$ *es cerrado bajo* I, S, P. *En particular si* $\mathfrak{C}$ *es variedad, entonces* $\mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{X}) \in \mathfrak{C}$.

Proposición 3.38. *Sean* $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *y* $g : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ *dos homomorfismos, si* $Ker(g) \subseteq Ker(h)$ *y* g *es una función sobreyectiva, entonces existe un homomorfismo* $v : \mathbf{C} \to \mathbf{B}$ *tal que* $h = v \circ g$.

Teorema 3.39. *Dados una clase* $\mathfrak{C}$ *de álgebras de tipo* $\mathfrak{F}$ *y términos* $p, q \in T(X)$ *de tipo* $\mathfrak{F}$, *tenemos que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\mathfrak{C} \models p \approx q$.

2. $\mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{X}) \models p \approx q$.

3. $\overline{p} = \overline{q}$ *en* $\mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{X})$.

4. $\langle p, q \rangle \in \theta_{\mathfrak{C}}(X)$.

Demostración. Sean $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{X})$, $p = p(x_1, \ldots, x_n)$ y $q = q(x_1, \ldots, x_n) \in T(X)$ y sea $\nu : \mathbf{T}(X) \to \mathbf{F}$ el homomorfismo natural.

[$1 \Rightarrow 2$] Por Teorema 3.37 $\mathbf{F} \in ISP(\mathfrak{C}) = \mathfrak{C}$. Por lo tanto $\mathbf{F} \models p \approx q$.

[$2 \Rightarrow 3$] Supongamos que $\mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{X}) \models p \approx q$, entonces:

$$\begin{aligned} p^{\mathbf{F}}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) &= q^{\mathbf{F}}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) \\ \overline{p} &= \overline{q} \quad \text{en } \mathbf{F}. \end{aligned}$$

[3 ⇒ 4] Supongamos que $\overline{p} = \overline{q}$ en $\mathbf{F}$, entonces

$$\begin{aligned} \nu(p) &= \overline{p} \\ &= p^{\mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{X})}(\overline{x_1} \ldots, \overline{x_n}) \\ &= q^{\mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{X})}(\overline{x_1} \ldots, \overline{x_n}) \\ &= \overline{q} \\ &= \nu(q), \end{aligned}$$

así $\nu(p) = \nu(q)$, entonces $\langle p, q\rangle \in Ker(\nu) = \theta_{\mathfrak{C}}(X)$.

[4 ⇒ 1] Supongamos que $\langle p, q\rangle \in \theta_{\mathfrak{C}}(X)$. Por demostrar que $\mathfrak{C} \models p \approx q$. Dados $\mathbf{A} \in \mathfrak{C}$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$ elegimos $h : \mathbf{T}(X) \to A$, tal que $h(x_i) = a_i$, para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como $Ker(h) \in \Phi_{\mathfrak{C}}(X)$, tenemos que

$$Ker(h) \supseteq Ker(\nu) = \theta_{\mathfrak{C}}(X),$$

Así se sigue de la Proposición 3.38 que existe un homomorfismo $g : \mathbf{F} \to \mathbf{A}$ tal que $h = g \circ \nu$. Entonces:

$$\begin{aligned} h(p) &= g \circ \nu(p) \\ &= g \circ \nu(q) \\ &= h(q). \end{aligned}$$

□

Corolario 3.40. *Sea $\mathfrak{C}$ una clase de álgebras de tipo $\mathfrak{F}$ y supongamos que p y q son términos en $T(X)$, entonces para cualquier conjunto de variables Y con $|Y| \geq |X|$ tenemos*

$$\mathfrak{C} \models p \approx q \text{ si y sólo si } \mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{Y}) \models p \approx q.$$

Demostración. Como $\mathbf{F}_{\mathfrak{C}} \in ISP(\mathfrak{C})$, entonces $\mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{Y}) \in \mathfrak{C}$ y por hipótesis tenemos que $\mathfrak{C} \models p \approx q$, esto es, para cada $\mathbf{A} \in \mathfrak{C}, \mathbf{A} \models p \approx q$. Luego en particular $\mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{Y}) \models p \approx q$. Para el recíproco supongamos que $\mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{Y}) \models p \approx q$. Queremos ver que $\mathfrak{C} \models p \approx q$. Elegimos $X_0 \supseteq X$ tal que $|X_0| = |Y|$ entonces $\mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{X_0}) \cong \mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{Y})$ y como $\mathfrak{C} \models p \approx q$ si y sólo si $\mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{X_0}) \models p \approx q$ por Teorema 3.23 se sigue que $\mathfrak{C} \models p \approx q$ si y sólo si $\mathbf{F}_{\mathfrak{C}} \models p \approx q$. □

Corolario 3.41. *Supongamos que $\mathfrak{C}$ es una clase de álgebras de tipo $\mathfrak{F}$ y X es un conjunto de variables, entonces para cualquier conjunto infinito de variables Y*

$$Id_{\mathfrak{C}}(X) = Id_{\mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{Y})}(X).$$

Demostración. Para $p \approx q \in Id_{\mathfrak{C}}(X)$, decimos que

$$p = p(x_1, \ldots, x_n), q = q(x_1, \ldots, x_n),$$

tenemos que $p, q \in T(\{x_1, \ldots, x_n\})$. Como $|\{x_1, \ldots, x_n\}| \leq |Y|$ por Corolario el 3.40, se sigue que $\mathfrak{C} \models p \approx q$ *si y sólo si* $\mathbf{F}_{\mathfrak{C}}(\overline{Y}) \models p \approx q$. □

Las clases más conocidas de álgebras son definidas por identidades.

Definición 3.42. *Sea Σ un conjunto de identidades de tipo $\mathfrak{F}$.*

CA1: $M(\Sigma)$ *es la **clase de álgebras** $\mathbf{A}$ que satisfacen Σ.*

CA2: *Una clase $\mathfrak{C}$ de álgebras es una **clase ecuacional** si existe un conjunto de identidades Σ, tal que $\mathfrak{C} = M(\Sigma)$. En este caso decimos que $\mathfrak{C}$ es definida o axiomatizada por Σ.*

Lema 3.43. *Si V es una variedad y X es un conjunto infinito de variables, entonces $V = M(Id_V(X))$.*

Demostración. Sean V una variedad y X un conjunto infinito de variables. Por demostrar que $V = M(Id_V(X))$.
Sea $V' = M(Id_V(X))$. Claramente tenemos que V' es una variedad, pues tomando $M(Id_V(X)) = HSP(Id_V X)$ por el Lema 3.23, se tiene lo deseado y como V es variedad tenemos que $V = HSP \subseteq V'$. Por lo tanto $V \subseteq V'$. Luego, vimos que subálgebras preservan identidades en el Lema 3.29, así tenemos que $Id_{V'}(X) \subseteq Id_V(X)$. Así por el Lema 3.39, tenemos que $\mathbf{F}_{V'}(\overline{X}) = \mathbf{F}_V(\overline{X})$.

Ahora sea Y un conjunto infinito de variables. Por el Corolario 3.41, tenemos que

$$Id_{V'}(\overline{Y}) = Id_{\mathbf{F}_{V'}(\overline{X})}(\overline{Y}) = Id_{\mathbf{F_V(\overline{X})}}(\overline{Y}) = Id_V(\overline{Y}).$$

Por Lema 3.39, se cumple que $\theta_{V'}(Y) = \theta_V(X)$ y usando $[4 \Rightarrow 2]$ de ese mismo lema, tenemos $\mathbf{F}_{V'}(\overline{Y}) = \mathbf{F}_V(\overline{Y})$. Ahora para $\mathbf{A} \in V'$ tenemos que $\mathbf{A} \in H(\mathbf{F}_{V'}(\overline{Y}))$, para un conjunto Y infinito adecuado, es decir, $\mathbf{A}$ es una imagen homomorfa de algún miembro de $\mathbf{F}_{\mathbf{V}'}(\overline{\mathbf{Y}}) = \mathbf{F}_V(\overline{Y}) \in V$, así $\mathbf{A} \in V$, entonces se tiene $V' \subseteq V$. Por lo tanto $V' = V$. $\square$

Ahora tenemos todos los antecedentes necesarios para probar el famoso teorema de Birkhoff.

Teorema 3.44 (Birkhoff)**.** *$\mathfrak{C}$ es una clase ecuacional si y sólo si $\mathfrak{C}$ es una variedad.*

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{C}$ es una clase ecuacional. Por demostrar que $V = V(\mathfrak{C})$. Como $\mathfrak{C}$ es una clase ecuacional se tiene $\mathfrak{C} = M(\Sigma)$, entonces por Lema 3.23, se tiene que $V(\mathfrak{C}) \models \Sigma$, es decir, $V(\mathfrak{C})$ es una clase de álgebras que satisface Σ. Por lo tanto $V(\mathfrak{C}) \subseteq M(\Sigma)$. Así $\mathfrak{C} \subseteq V(\mathfrak{C})$. Por lo tanto $\mathfrak{C} = V(\mathfrak{C})$, es decir, V es una variedad. El recíproco se tiene por el Lema 3.43. $\square$

3.3. Retículas

Una retícula es una estructura que por sus propiedades básicas, resulta ser más natural intuitivamente que otras estructuras algebraicas. El tema fue promovido en gran medida por Birkhoff en la década de 1930 en su libro Lattice Theory [5]. Por otra parte, las retículas, al igual que los grupos o anillos, son una clase importante de álgebras y brindan uno de los teoremas más bellos del álgebra universal, el teorema de la base finita de Baker, él cual fue inspirado por el teorema de la base finita de McKenzie para las retículas.

Comenzaremos con un breve estudio de retículas para luego definir álgebra de Heyting.

Definición 3.45. *Un conjunto parcialmente ordenado* $\mathbf{R} = (A, \leq)$ *es llamado* ***retícula*** *si para cada subconjunto de* A *de dos elementos se tiene un ínfimo y supremo.*

Observación 3.46. *Sea* $\mathbf{R} = (A, \leq)$ *una retícula. Para cualesquiera* $a, b \in A$ *denotaremos al* $sup\{a, b\}$ *y al* $inf\{a, b\}$ *mediante* $a \vee b$ *y* $a \wedge b$ *respectivamente.*

Definición 3.47. *Una* ***retícula*** *es* ***acotada*** *si tiene un ínfimo y un supremo denotado por* 0 *y* 1 *respectivamente.*

Algunos ejemplos de retículas se presentan en la Figura 3.1, en donde cada elemento en A es representado por un pequeño círculo:

Si $a < b$ dibujamos el punto b por arriba del punto a y una línea del círculo de b al círculo de a.

La siguiente proposición muestra que las retículas también pueden definirse axiomáticamente.

Proposición 3.48. *Una estructura* $\mathbf{R} = (A, \vee, \wedge, 0, 1)$*, donde* $A \neq \emptyset$*,* $\vee$ *y* $\wedge$ *son operaciones binarias y* 0*,* 1 *son dos operaciones binarias de aridad cero que se identifican con el ínfimo y supremo de* A *respectivamente, es una retícula acotada si y sólo si para cualesquiera* $a, b, c \in A$ *las siguientes condiciones se cumplen:*

1. $a \vee a = a$, $\quad a \wedge a = a$,
2. $a \vee b = b \vee a$, $\quad a \wedge b = b \wedge a$,
3. $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $\quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$,
4. $a \vee 0 = a$, $\quad a \wedge 1 = a$,
5. $a \vee (b \wedge a) = a$, $\quad a \wedge (b \vee a) = a$.

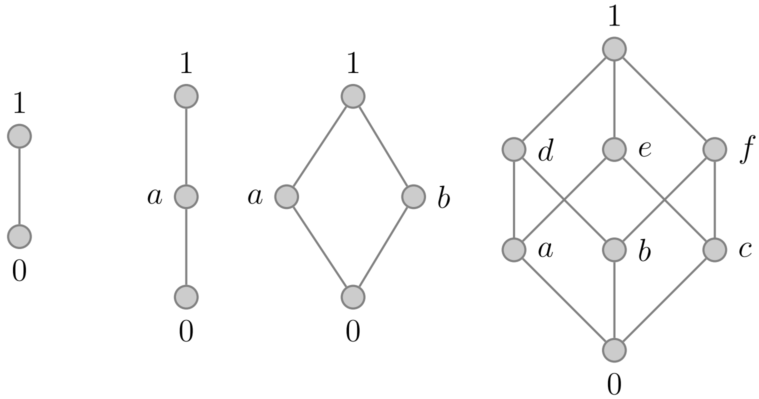

Figura 3.1: Ejemplos de Retículas

Demostración.

[$\Rightarrow$] [3] Por demostrar que se satisfacen los axiomas *1-5*. Veamos solo un caso, específicamente la primera mitad de *3*. Sea $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ una retícula acotada y $a, b, c \in A$.

Veamos que $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, es decir que $\sup\{a, \sup\{b, c\}\} = \sup\{\sup\{a, b\}, c\}$. Si $z = \sup\{a, \sup\{b, c\}\}$, entonces $a \leq z$ y $\sup\{b, c\} \leq z$ luego $a \leq z$ y $b \leq z$ y $c \leq z$, así $\sup\{a, b\} \leq z$ y $c \leq z$. Por lo tanto $\sup\{\sup\{a, b\}, c\} \leq z$.

Por otro lado si $k = \sup\{\sup\{a, b\}, c\}$ tenemos que $\sup\{a, b\} \leq k$ y $c \leq k$, entonces $a \leq k$ y $b \leq k$ y $c \leq k$, esto implica que $a \leq k$ y $\sup\{b, c\} \leq k$. Por lo tanto $\sup\{a, \sup\{b, c\}\} \leq k$.

Así hemos demostrado que $\sup\{a, \sup\{b, c\}\} = \sup\{\sup\{a, b\}, c\}$. Para la demostración del recíproco, veáse [7].

La demostración de los demás incisos es análoga. $\square$

A partir de ahora cuando digamos retícula nos referiremos a una retícula acotada.

Como hemos visto existen dos maneras de definir retículas una de ellas basada en la noción de orden y la otra basada en un sentido algebraico, de la misma manera que se puede definir un grupo o un anillo; a lo largo del trabajo emplearemos ambas indistintamente. A continuación presentamos algunas propiedades que se cumplen en una retícula, para una prueba de estas propiedades véase [26].

Observación 3.49. *Sea* $\mathbf{R} = (A, \vee, \wedge, 0, 1)$ *una retícula y* a*,* b*,* $c \in A$*, se cumplen las siguientes propiedades:*

- $a \leq a \vee b, \qquad b \leq a \vee b.$
- $a \wedge b \leq a, \qquad a \wedge b \leq b.$
- *Si* $a \leq b$*,* $a \leq c$*, entonces* $a \leq b \wedge c$*.*
- *Si* $a \leq c$*,* $b \leq c$*, entonces* $a \vee b \leq c$*.*
- *Si* $a \leq c$*,* $b \leq d$*, entonces* $a \vee b \leq c \vee d$ *y* $a \wedge b \leq c \wedge d$*.*

[3] Usaremos [$\Rightarrow$] como símbolo para indicar que demostraremos la parte necesaria de una proposición y [$\Leftarrow$] como símbolo para indicar que demostraremos la parte suficiente.

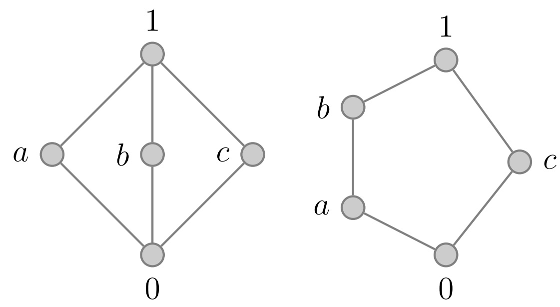

Figura 3.2: Retículas no distributivas M_5 y N_5, respectivamente

Definición 3.50. *Decimos que una retícula* $\mathbf{R} = (A, \vee, \wedge, 0, 1)$ *es* ***completa*** *si para cada subconjunto* $X \subseteq A$ *existe su supremo y su ínfimo y lo denotamos por* $\bigvee X$ *y* $\bigwedge X$ *respectivamente.*

Definición 3.51. *Una retícula* $\mathbf{R} = (A, \vee, \wedge, 0, 1)$ *es llamada* ***distributiva*** *si satisface las leyes distributivas:*

RD1: $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,

RD2: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Observación 3.52. *Las retículas* M_5 *y* N_5 *mostradas en la Figura 3.2 no son distributivas.*

Supongamos que ambas retículas son distributivas.
Para M_5 tenemos que:

$$a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a.$$

Por otro lado

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = 1 \wedge 1 = 1.$$

Observamos que $a \neq 1$.
Para N_5 observemos lo siguiente:

$$a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a.$$

Por otro lado

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = b \wedge 1 = b.$$

Observamos que $a \neq b$.
Así, no se verifica RD1 en ambas retículas. Concluimos que M_5 y N_5 no son retículas distributivas.
La observación anterior es fundamental para identificar retículas no distributivas como se ve en el siguiente Teorema.

Teorema 3.53 (Birkhoff). *L es una retícula no distributiva si y sólo si M_5 o N_5 son isomorfos a una subretícula*[4] *de L.*

Para una prueba vea [Teorema 3.6 [7]].

3.3.1. Noción de Filtro sobre Retículas

La noción de filtro fue acuñada por Henri Cartan en 1937 y utilizada por Bourbaki en su libro Topologie Générale como una alternativa a la noción de red dada por E. H. Moore y H. L. Smith en 1922.

En esta sección presentamos la noción de filtro sobre una retícula $\mathbf{R}$ y presentamos algunas aplicaciones, mismas que serán de utilidad para el estudio de filtros sobre álgebras del mismo tipo.

Definición 3.54. *Sea $\mathbf{R} = (A, \vee, \wedge, 0, 1)$ una retícula. Un conjunto no vacío ∇ de elementos de A se dice que es un **filtro** en $\mathbf{R}$ si para cada $a, b \in A$ se cumple que:*

F1: *Si $a \in \nabla$ y $b \in \nabla$, entonces $a \wedge b \in \nabla$.*

F2: *Si $a \in \nabla$ y $a \leq b$, entonces $b \in \nabla$.*

Ejemplo 3.55. *$\{1\}$ y A son filtros en A, llamados filtro trivial e impropio, respectivamente.*

Observación 3.56. *Si ∇_1 y ∇_2 son filtros sobre una retícula $\mathbf{R}$, entonces $\nabla_1 \cap \nabla_2$ es un filtro en $\mathbf{R}$.*

Definición 3.57. *Un filtro, no trivial, es **propio** si y sólo si $0 \notin A$.*

Definición 3.58. *Un filtro ∇ es **primo** si cada vez que $a, b \in A$ y $a \vee b \in \nabla$, entonces $a \in \nabla$ o $b \in \nabla$.*

Notación 3.59. *$\mathcal{T}(A)$ denota el conjunto de filtros primos de A.*

Definición 3.60. *Sea $\mathbf{R} = (A, \vee, \wedge, 0, 1)$ una retícula. Para cualquier elemento fijo $a_0 \in A$, el **filtro principal generado** por a_0 es:*

$$\nabla(a_0) = \{a \in A : a \geq a_0\}.$$

Definición 3.61. *Sea $\mathbf{R} = (A, \vee, \wedge, 0, 1)$ una retícula. Para cada conjunto A_0 no vacío de elementos de A, el **filtro generado por el conjunto** A_0, es el filtro más pequeño que contiene a A_0, es decir:*

$$\nabla(A_0) = \bigcap \{\nabla' : \nabla' \text{ es filtro, } A_0 \subseteq \nabla'\}.$$

[4]Si L es una retícula y L' es un subconjunto no vacío de L tal que para cualquier par de elementos $a, b \in L'$, $a \vee b$ y $a \wedge b$ ambos están en L' en donde $\wedge$, $\vee$ son las operaciones de L, entonces decimos que L' con las mismas operaciones restringidas a L' es ua subretícula de L.

Proposición 3.62. *El filtro generado por un conjunto no vacío A_0 de una retícula $\mathbf{R} = (A, \vee, \wedge, 0, 1)$ es el conjunto de todos los elementos $a \in A$ tales que:*

$$a \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n,$$

para algunos elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A_0$.

Demostración. Sea

$$\overline{\nabla}(A_0) = \{a \in A : a \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n,\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in A_0\}.$$

Verifiquemos que $\overline{\nabla}(A_0) = \nabla(A_0)$.

[⊆][5] Sea ∇' un filtro tal que $A_0 \subseteq \nabla'$. Veamos que $\overline{\nabla}(A_0) \subseteq \nabla'$.

Sea $b \in \overline{\nabla}(A_0)$, entonces $b \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$, para algunos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A_0$. Como $A_0 \subseteq \nabla'$ y ∇' es filtro se tiene que $b \in \nabla'$. Por lo tanto $\overline{\nabla}(A_0) \subseteq \nabla'$. Como ∇' fue arbitrario concluimos que $\overline{\nabla}(A_0) \subseteq \bigcap\{\nabla' : \nabla'$ es filtro, $A_0 \subseteq \nabla'\}$.

[⊇] Veamos que $\overline{\nabla}(A_0)$ es filtro y $A_0 \subseteq \overline{\nabla}(A_0)$.

Sea $a, b \in \nabla(A_0)$, entonces $a \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$ y $b \geq b_1 \wedge b_2 \wedge \cdots \wedge b_m$ para algunos $a_i \in A_0$, $b_j \in A_0$, donde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Entonces

$$a \wedge b \geq (a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n) \wedge (b_1 \wedge b_2 \wedge \cdots \wedge b_m).$$

Por lo tanto $a \wedge b \in \overline{\nabla}(A_0)$.

Ahora sea $a \in \nabla'$ y $a \leq b$, de esto se tiene que $b \geq a \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$ para algunos $a_i \in A_0$, en donde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, así $b \in \overline{\nabla}(A_0)$. Por lo tanto $\overline{\nabla}(A_0)$ es un filtro. Resta verificar que $A_0 \subseteq \overline{\nabla}(A_0)$. Sea $c \in A_0$, entonces $c \geq c \wedge c$. Así $c \in \overline{\nabla}(A_0)$. □

Proposición 3.63. *Sea $\mathbf{R} = (A, \vee, \wedge, 0, 1)$ una retícula, para cada elemento fijo $a_0 \in A$ y un filtro ∇ en $\mathbf{R}$, la clase de todos los elementos a tal que*

$$a \geq a_0 \wedge c \text{ para cada elemento } c \in \nabla,$$

es el menor filtro que contiene a a_0 y ∇, es decir el filtro generado por el conjunto $\{a_0\} \cup \nabla$.

Demostración. Sean

$$\nabla_1 = \{a \in A : a \geq a_0 \wedge c, c \in \nabla\} \text{ y}$$

$$\nabla_2 = \bigcap\{\nabla' : \nabla' \text{ es filtro y } \{a_0\} \cup \nabla \subseteq \nabla'\}.$$

Veamos que $\nabla_1 = \nabla_2$.

[5] En una demostración de igualdad de conjuntos, digamos $A = B$, usaremos el símbolo [⊆] para denotar que probaremos $A \subseteq B$ y símbolo el [⊇] para denotar que probaremos $A \supseteq B$.

[$\subseteq$] Tomemos ∇' un filtro tal que $\{a_0\}\cup\nabla \subseteq \nabla'$. Sea $b \in \nabla_1$, entonces $b \geq a_0 \wedge c$, para algún $c \in \nabla \subseteq \nabla'$. Como a_0 y $c \in \nabla'$, se sigue que $a_0 \wedge c \in \nabla'$, luego $b \in \nabla'$. Por lo tanto $\nabla_1 \subseteq \nabla'$, dado que ∇' fue arbitrario se sigue que $\nabla_1 \subseteq \nabla_2$.

[$\supseteq$] Verifiquemos que ∇_1 es filtro y $\{a_0\} \cup \nabla \subseteq \nabla_1$.

Sean $a, b \in \nabla_1$, entonces $a \geq a_0 \wedge c_1$ y $b \geq a_0 \wedge c_2$, en donde $c_1, c_2 \in \nabla$, luego $a \wedge b \geq (a_0 \wedge c_1) \wedge (a_0 \wedge c_2) = a_0 \wedge (c_1 \wedge c_2)$. Notar que $c_1 \wedge c_2 \in \nabla$, pues ∇ es filtro y $c_1, c_2 \in \nabla$. Por lo tanto $a \wedge b \in \nabla_1$.

Ahora sea $a \in \nabla_1$ y $a \leq b$ de esto se sigue que $b \geq a \geq a_0 \wedge c$ para algún $c \in \nabla$. Por lo tanto $b \in \nabla_1$.

Resta verificar que $\{a_0\} \cup \nabla \subseteq \nabla_1$. Sea $b \in \{a_0\} \cup \nabla$, entonces $b \in \{a_0\}$ o $b \in \nabla$.

1. Si $b = a_0$, entonces $b \geq b \wedge c = a_0 \wedge c$, para cualquiera $c \in \nabla$.

2. Si $b \in \nabla$, entonces $b \geq a_0 \wedge b$.

Así $b \in \nabla_1$. Por lo tanto $\nabla_2 \subseteq \nabla_1$. □

3.4. Álgebras de Heyting

El Álgebra de Boole (o álgebra booleana) se denomina así en honor a George Boole quien fue el primero en definirla como parte de un sistema lógico en el folleto The Mathematical Analysis of Logic (1847). Ésta era una respuesta a la controversia que había entre Augustus De Morgan y Sir William Hamilton. El álgebra de Boole fue un intento de tratar las expresiones de la lógica proposicional mediante técnicas algebraicas. Las álgebras de Boole caracterizan algebraicamente a la lógica clásica.

Las álgebras de Boole y de Heyting se presentan como ejemplos de tipos de álgebras.

Definición 3.64. *Un **álgebra booleana** se define como* $\mathbf{B} = (A, \wedge, \vee, \neg)$*, donde* $\wedge, \vee$ *son operaciones binarias y* $\neg$ *es una operación unaria, tal que* $(A, \wedge, \vee)$ *es una retícula distributiva con elemento mínimo* 0 *y máximo* 1*, que satisface, para cualesquiera* $a, b \in A$:

$$a \wedge \neg a = 0, \ \ a \vee \neg a = 1$$

Ejemplo 3.65. *Si* X *es un conjunto y tomamos* $\wedge$ *y* $\vee$ *(como las operaciones usuales de conjuntos), entonces* $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$*, donde* $\mathcal{P}(X)$ *es el conjunto potencia de* X*, es una retícula distributiva. Si se define*

$$\neg A := -A := X \setminus A,$$

el complemento usual de conjuntos, entonces $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, -)$ *es un álgebra booleana.*

Observación 3.66. *Si* $\mathbf{B} = (A, \wedge, \vee, \neg)$ *es un álgebra booleana y* $a, b \in A$*, se cumplen las siguientes propiedades:*

- $\neg\neg a = a$.
- $\neg(a \vee b) = (\neg a \wedge \neg b)$.
- $\neg(a \wedge b) = (\neg a \vee \neg b)$.

En matemáticas, las álgebras de Heyting (creadas por Arend Heyting) son conjuntos parcialmente ordenados especiales que generalizan a las álgebras de Boole. Las álgebras de Heyting caracterizan algebraicamente a la lógica intuicionista. Estas álgebras, también son llamadas álgebras pseudo-booleanas o retículas de Brower.

Definición 3.67. *Una retícula distributiva* $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ *se dice que es una* ***álgebra de Heyting*** *si para cada* $a, b \in A$ *existe un elemento denotado por* $(a \to b)$ *tal que para cada* $c \in A$ *tenemos que:*

$$c \leq (a \to b) \text{ si y sólo si } a \wedge c \leq b.$$

Llamamos al símbolo "$\to$" una implicación de Heyting o simplemente una implicación.

Observación 3.68.

1. *Para cada elemento* a *de un álgebra de Heyting,* $\neg a := (a \to 0)$.
2. $(0 \to 0) = 1$. *Por lo tanto, podemos excluir a* 1 *de nuestra notación de álgebra de Heyting.*

De ahora en adelante denotaremos por $\mathbf{U} = (A, \vee, \wedge, \to, 0)$ a una álgebra de Heyting.

Afirmación 3.69. *Sea* $\mathbf{U} = (A, \vee, \wedge, 0, 1)$ *una retícula distributiva con una operación binaria* $\to$ *que satisface que* $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$, *entonces para todo* $a \in A$, *la función* $(a \to \cdot)$ *es monótona.*

Demostración. Supongamos que $b_1 \leq b_2$, entonces $b_1 \wedge b_2 = b_1$, por hipótesis tenemos que $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$ esto implica que

$$(a \to b_1) \wedge (a \to b_2) = a \to (b_1 \wedge b_2) = a \to b_1.$$

Por lo tanto

$$(a \to b_1) \wedge (a \to b_2) = a \to b_1,$$

de esto se tiene que

$$a \to b_1 \leq a \to b_2.$$

$\square$

Similarmente al caso de las retículas, las álgebras de Heyting pueden ser definidas de forma axiomática.

Teorema 3.70. *Una retícula distributiva* $\mathbf{U} = (A, \vee, \wedge, 0, 1)$ *es un álgebra de Heyting si y sólo si existe una operación binaria* $\to$ *en* A *tal que para cualesquiera* $a, b, c \in A$:

i. $(a \to a) = 1$,

ii. $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$,

iii. $b \wedge (a \to b) = b$,

iv. $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$.

Demostración.
[$\Leftarrow$] Supongamos que $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ es una retícula distributiva y existe $\to$ operación binaria en A tal que son satisfechos los incisos i-iv.

Deseamos verificar que $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un álgebra de Heyting.
Sean $a, b \in A$ tal que existe $a \to b$ y sea $c \in A$ tal que $c \leq (a \to b)$.
Por demostrar que $a \wedge c \leq b$.

Como $c \leq (a \to b)$ y $a \leq a$, entonces $c \wedge a \leq (a \to b) \wedge a$. Además por ii tenemos que $(a \to b) \wedge a = a \wedge b$, esto implica que $c \wedge a \leq a \wedge b$, también se tiene que $a \wedge b \leq b$. Por lo tanto $c \wedge a \leq b$.

Para el recíproco sean $a, b \in A$ tal que existe $a \to b$ y sea $c \in A$ tal que $a \wedge c \leq b$. Por demostrar que $c \leq (a \to b)$.

Ahora supongamos que $c \wedge a \leq b$. Como $(a \to c) \leq (a \to c)$ y $c \leq 1$, entonces:

$$c = c \wedge (a \to c) \leq 1 \wedge (a \to c),$$

por i y iv, tenemos que:

$$1 \wedge (a \to c) = (a \to a) \wedge (a \to c) = a \to (a \wedge c).$$

Finalmente, como $c \wedge a \leq b$ y la función es $(a \to \cdot)$ es monótona, por la Afirmación 3.69, entonces:

$$a \to (a \wedge c) \leq (a \to b).$$

Por lo tanto $c \leq (a \to b)$.

[$\Rightarrow$] Supongamos que $\mathbf{U}$ es un álgebra de Heyting.

Por demostrar que existe una operación binaria $\to$ tal que para todo $a, b, c \in A$ se cumplen los incisos i-iv.

i) Por demostrar que $(a \to a) = 1$. Como 1 es el elemento mayor en A tal que para cada $a \in A, a \leq 1$, en particular $(a \to a) \leq 1$. Por otro lado para cada $a \in A$ se tiene que $a \leq a$, entonces $a \wedge 1 \leq a$, entonces $1 \leq (a \to a)$.

ii) Por demostrar que $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$. Tenemos que para cada $a \in A$ se tiene que $a \leq a$ en particular $(a \to b) \leq (a \to b)$, entonces de la definición se sigue que $a \wedge (a \to b) \leq b$ además se tiene que $a \wedge (a \to b) \leq a$. Por lo tanto $a \wedge (a \to b) \leq a \wedge b$. Por otro lado tenemos que $a \wedge b \leq b$ y de la Definición 3.67 se tiene que $b \leq (a \to b)$, de aquí se sigue que $a \wedge b \leq a \wedge (a \to b)$. Por lo tanto $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$.

iii) Por demostrar que $b \wedge (a \to b) = b$. Tenemos que $a \wedge b \leq b$ y de la definición se sigue que $b \leq (a \to b)$. Luego se tiene que $b \wedge (a \to b) = b$.

iv) Por demostrar que $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$.

Veamos que se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} a \to (b \wedge c) &\leq (a \to b) \wedge (a \to c) && (3.1) \\ (a \to b) \wedge (a \to c) &\leq a \to (b \wedge c) && (3.2) \end{aligned}$$

Para 3.1 tenemos que $(b \wedge c) \leq b$ y como $(a \to \cdot)$ es monótona, entonces $a \to (b \wedge c) \leq a \to b$. Análogamente, tenemos que $a \to (b \wedge c) \leq (a \to c)$. Por lo tanto

$$a \to (b \wedge c) \leq (a \to b) \wedge (a \to c).$$

Para 3.2 veamos que $((a \to b) \wedge (a \to c)) \wedge a \leq (b \wedge c)$.

Notemos que:

$$\begin{aligned} ((a \to b) \wedge (a \to c)) \wedge a &= ((a \to b) \wedge a) \wedge (a \to c) \\ &\leq ((a \to b) \wedge a) \\ &= a \wedge b \leq b \end{aligned}$$

Por lo tanto $((a \to b) \wedge (a \to c)) \wedge a \leq b$.

Análogamente, tenemos que:

$$((a \to b) \wedge (a \to c)) \wedge a \leq c.$$

Por lo tanto:

$$((a \to b) \wedge (a \to c)) \wedge a \leq (b \wedge c),$$

es decir:

$$(a \to b) \wedge (a \to c) \leq a \to (b \wedge c).$$

□

Además de la caracterización axiomática del operador $\to$ también se satisface el siguiente resultado:

Proposición 3.71. *En toda álgebra de Heyting* $\mathbf{U} = (A, \vee, \wedge, \to, 0)$ *tenemos que para cada* $a, b \in A$:

$$a \to b = \bigvee \{c \in A : a \wedge c \leq b\}.$$

Demostración. Sean $\mathbf{U} = (A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$ un álgebra de Heyting y $a, b \in A$.
Por demostrar $a \rightarrow b = \bigvee\{c \in A : a \wedge c \leq b\}$.
Para cada $a \in A, a \leq a$, en particular $a \rightarrow b \leq a \rightarrow b$ y como $\mathbf{U}$ es álgebra de Heyting $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$.
Por lo tanto:

$$a \rightarrow b \leq \bigvee\{c \in A : a \wedge c \leq b\}.$$

Por otro lado, si $c \in A$ es tal que $a \wedge c \leq b$, entonces $c \leq a \rightarrow b$. Así $a \rightarrow b$ es una cota superior de $\{c \in A : a \wedge c \leq b\}$.
Por lo tanto:

$$\bigvee\{c \in A : a \wedge c \leq b\} \leq a \rightarrow b.$$

□

Otra caracterización interesante de las álgebras de Heyting en términos de la propiedad distributiva es la siguiente:

Proposición 3.72. *Una retícula distributiva completa* $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ *es un álgebra de Heyting si y sólo si satisface la ley distributiva infinita*

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I}(a \wedge b_i)$$

para cualesquiera $a, b_i \in A, i \in I$.

Demostración. Supongamos que $\mathbf{U}$ es un álgebra de Heyting.
Por demostrar

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I}(a \wedge b_i).$$

Para cada $i \in I$, $b_i \leq \bigvee_{i \in I} b_i$ y como para cada $a \in A, a \leq a$, entonces

$$a \wedge b_i \leq a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i, \text{ para cada } i \in I.$$

Por lo tanto

$$\bigvee_{i \in I}(a \wedge b_i) \leq a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i.$$

Ahora sea $c \in A$ tal que $\bigvee_{i \in I}(a \wedge b_i) \leq c$. Entonces para cada $i \in I$, $a \wedge b_i \leq c$. Por lo tanto para cada $i \in I$, $b_i \leq a \rightarrow c$. Esto implica que $\bigvee_{i \in I} b_i \leq a \rightarrow c$ lo que nos da que $a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i \leq c$. Por lo tanto, tomando $c = \bigvee_{i \in I}(a \wedge b_i)$, obtenemos que

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i \leq \bigvee_{i \in I}(a \wedge b_i).$$

Para la demostración del recíproco véase [3]. □

Ejemplo 3.73.

1. *Toda retícula distributiva finita es un álgebra de Heyting.*
   Se sigue del teorema anterior 3.72. Cada retícula distributiva finita es completa y satisface la ley distributiva infinita.

2. *Cada cadena* $\mathbf{C}$ *con elemento mínimo y máximo es un álgebra de Heyting donde para cada* $a, b \in \mathbf{C}$

$$a \to b := \begin{cases} 1 & si\ a \leq b, \\ b & si\ a > b. \end{cases}$$

Proposición 3.74. *Toda álgebra booleana* $\mathbf{B}$ *es un álgebra de Heyting , donde para cada* $a, b \in \mathbf{B}$ *tenemos*

$$a \to b := \neg a \vee b.$$

Demostración. Veamos que se cumplen i-iv del Teorema 3.70.

Sean $a, b \in \mathbf{B}$.
Verifiquemos primero que $a \to a = 1$.

$$\begin{aligned} a \to a &:= \neg a \vee a \\ &= \neg(\neg\neg a \wedge \neg a) \\ &= \neg(a \wedge \neg a) = \neg 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ahora veamos que $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$.

$$\begin{aligned} a \wedge (a \to b) &:= a \wedge (\neg a \vee b) \\ &= (a \wedge \neg a) \vee (a \wedge b) \\ &= 0 \vee (a \wedge b) \\ &= a \wedge b \end{aligned}$$

Veamos que $b \wedge (a \to b) = b$

$$\begin{aligned} b \wedge (a \to b) &:= b \wedge (\neg a \vee b) \\ &= (b \wedge \neg a) \vee (b \wedge b) \\ &= (b \wedge \neg a) \vee b \\ &= b. \end{aligned}$$

Por último veamos que $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$.

$$\begin{aligned} a \to (b \wedge c) &:= \neg a \vee (b \wedge c) \\ &= (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \\ &= (a \to b) \wedge (a \to c). \end{aligned}$$

□

Cabe mencionar que no toda álgebra de Heyting resulta ser un álgebra booleana. Podemos encontrar un ejemplo de ello tomando un álgebra de Heyting definida en términos topológicos, véase el Apéndice B.

La siguiente proposición caracteriza a las álgebras de Heyting que son booleanas.

Proposición 3.75. *Sea* $\mathbf{U} = (A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$ *un álgebra de Heyting. Entonces las siguientes son equivalentes:*

1. $\mathbf{U}$ *es un álgebra booleana,*

2. *Para cada* $a \in A$*,* $a \vee \neg a = 1$*,*

3. *Para cada* $a \in A$*,* $\neg\neg a = a$*.*

Demostración.

[$1 \Rightarrow 2$] Supongamos que $\mathbf{U}$ es un álgebra booleana.

Por demostrar $a \vee \neg a = 1$.

Como toda álgebra booleana es de Heyting, entonces $a \rightarrow b := \neg a \vee b$. Así para cada $a \in A$, $a \rightarrow a = 1$, entonces $1 = a \rightarrow a := a \vee \neg a$. Por lo tanto $a \vee \neg a = 1$.

[$2 \Rightarrow 1$] Supongamos que para todo $a \in A : a \vee \neg a = 1$.
Por demostrar que $\mathbf{U}$ álgebra booleana.
Bastará ver que para todo $a \in A$, existe $\neg a$ tal que $(\neg a \vee a) \wedge b = b$ y $(\neg a \wedge a) \vee b = b$. Sea $a \in A$ y por hipótesis tenemos que $a \vee \neg a = 1$, esto implica que $\neg a$ es el complemento de a. Por lo tanto $(\neg a \vee a) \wedge b = b$.

Por otro lado tenemos que para todo punto a en A, $a \vee \neg a = 1$, entonces $\neg(a \vee \neg a) = \neg 1$, luego $\neg a \wedge a = 0$, de esto tenemos que $(\neg a \wedge a) \vee b = 0 \vee b = b$.

[$1 \Rightarrow 3$] Supongamos que $\mathbf{U}$ es un álgebra booleana.
Por demostrar $\neg\neg a = a$ para cada $a \in A$.
Sea $a \in A$

$$\begin{aligned}
\neg\neg a &= \neg a \rightarrow 0 \\
&= (a \rightarrow 0) \rightarrow 0 \\
&= \neg(a \rightarrow 0) \vee 0 \\
&= (a \wedge \neg 0) \vee 0 \\
&= (a \wedge 1) \vee 0 \\
&= a \vee 0 \\
&= a
\end{aligned}$$

$3 \Rightarrow 1$] Supongamos, que $\neg\neg a = a$ para cada $a \in A$.
Por demostrar $\mathbf{U}$ álgebra booleana.

Sea $a \in A$

$$\begin{aligned} a \vee \neg a &= \neg\neg a \vee \neg\neg\neg a \\ &= \neg(\neg a \wedge \neg\neg a) \\ &= \neg(\neg a \wedge a) \\ &= \neg 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

Como vimos en la sección 3.1 podemos definir homomorfismos, subálgebras y productos directos de álgebras del mismo tipo. Como un caso particular de estas nociones en álgebras de Heyting, tenemos:

Definición 3.76. *Sean* $\mathbf{U} = (A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$ *y* $\mathbf{U}^{'} = (A', \vee', \wedge', \rightarrow', 0')$ *álgebras de Heyting. Una función* $h : A \rightarrow A'$ *es llamada un* ***homomorfismo de Heyting*** *o simplemente homomorfismo si:*

H1: $h(a \vee b) = h(a) \vee' h(b)$,

H2: $h(a \wedge b) = h(a) \wedge' h(b)$,

H3: $h(a \rightarrow b) = h(a) \rightarrow' h(b)$,

H4: $h(0) = 0'$.

Un álgebra de Heyting $\mathbf{U}^{'}$ es llamada imagen homomorfa de $\mathbf{U}$ si existe un homomorfismo de Heyting de $\mathbf{U}$ en $\mathbf{U}^{'}$.

Definición 3.77. *Sean* $\mathbf{U} = (A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$ *y* $\mathbf{U}^{'} = (A', \vee', \wedge', \rightarrow', 0')$ *álgebras de Heyting. Decimos que* $\mathbf{U}^{'}$ *es* ***subálgebra*** *de* $\mathbf{U}$ *si:*

SA1: $A' \subseteq A$

SA2: *Las operaciones* $\vee', \wedge', \rightarrow'$ *son las restricciones de* $\vee, \wedge, \rightarrow$ *a* A'.

SA3: $0' = 0$.

Definición 3.78. *Sean* $\mathbf{U}_1 = (A_1, \vee_1, \wedge_1, \rightarrow_1, 0_1)$ *y* $\mathbf{U}_2 = (A_2, \vee_2, \wedge_2, \rightarrow_2, 0_2)$ *álgebras de Heyting. El* ***producto de dos álgebras de Heyting*** $\mathbf{U}_1$ *y* $\mathbf{U}_2$ *es el álgebra*

$$\mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2 := (A_1 \times A_2, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$$

donde:

PH1: $(a_1, a_2) \vee (b_1, b_2) := (a_1 \vee_1 b_1, a_2 \vee_2 b_2)$,

PH2: $(a_1, a_2) \wedge (b_1, b_2) := (a_1 \wedge_1 b_1, a_2 \wedge_2 b_2)$,

PH3: $(a_1, a_2) \rightarrow (b_1, b_2) := (a_1 \rightarrow_1 b_1, a_2 \rightarrow_2 b_2)$, PH4: $0 := (0_1, 0_2)$.

Definición 3.79. *Sea* $\{\mathbf{U}\}_{i\in I}$ *una familia de álgebras de Heyting, donde para cada* $i \in I$, $\mathbf{U}_i = (A_i, \vee_i, \wedge_i, \rightarrow_i, 0_i)$. *El* ***producto arbitrario*** *de* $\{\mathbf{U}_i\}_{i\in I}$ *es el álgebra de Heyting*

$$\prod_{i\in I} \mathbf{U}_i := (\prod_{i\in I} A_i, \vee, \wedge, \rightarrow, 0),$$

donde para cualesquiera $f_1, f_2 \in \prod_{i\in I} A_i$, *es decir las funciones* f_1 *y* f_2 *son tales que* $f_1, f_2 : I \rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ *y* $f_1(i), f_2(i) \in A_i$, *tenemos:*

P1: $(f_1 \vee f_2)(i) := f_1(i) \vee_i f_2(i)$,

P2: $(f_1 \wedge f_2)(i) := f_1(i) \wedge_i f_2(i)$,

P3: $(f_1 \rightarrow f_2)(i) := f_1(i) \rightarrow_i f_2(i)$,

P4: $0(i) := 0_i$.

Para finalizar la sección se presentan algunos resultados sobre filtros en álgebras de Heyting mismos que serán necesarios para el capítulo 5.

Lema 3.80. *Sea* ∇ *un filtro en un álgebra de Heyting* $\mathbf{U}$ *y supongamos que* $(a \rightarrow b) \notin \nabla$, *entonces el filtro generado por* $\nabla \cup \{a\}$ *no contiene a* b.

Demostración. Supongamos que el filtro generado por $\nabla \cup \{a\}$ contiene a b, entonces por la Proposición 3.63 tenemos que $b \geq a \wedge c$, para algún $c \in \nabla$ y como $\mathbf{U}$ es un álgebra de Heyting, entonces $c \leq a \rightarrow b$ y dado que ∇ es un filtro se sigue que $a \rightarrow b \in \nabla$, esto es una contradicción con la hipótesis. Por lo tanto el filtro generado por ∇ y a no contiene a b. □

Lema 3.81. *Sea* ∇ *un filtro propio en un álgebra de Heyting* $\mathbf{U}$ *y supongamos que* $\neg a \notin \nabla$, *entonces el filtro generado por* $\nabla \cup \{a\}$ *también es propio.*

Demostración. Sea ∇ un filtro propio en $\mathbf{U}$. Como $\neg a = a \rightarrow 0 \notin \nabla$, por el Lema 3.80 el filtro generado por ∇ y a no contiene a 0 y dicho filtro es propio. □

Lema 3.82. *Sea* ∇ *un filtro en un álgebra de Heyting* $\mathbf{U}$ *y supongamos que* $a \notin \nabla$, *entonces* ∇ *puede extenderse a un filtro primo que no contiene al punto* a.

Demostración. Sea

$$\mathfrak{O} = \{\nabla : \nabla \text{ es un filtro en } \mathbf{U} \text{ y } a \notin \nabla\}.$$

Por hipótesis este conjunto es no vacío y es parcialmente ordenado con la relación de inclusión y es tal que si tomamos la unión de cualquier cadena de filtros en $\mathfrak{O}$ es un filtro que no contiene a a. Dado que se satisfacen las hipótesis del Lema de Zorn en $(\mathfrak{O}, \subseteq)$, entonces existe un elemento maximal en $\mathfrak{O}$, digamos ∇_m tal que $a \notin \nabla_m$.

Afirmación: ∇_m es primo.

En efecto, supongamos que ∇_m no es primo, entonces existen a_1 y $a_2 \in \mathbf{U}$ tales que $a_1 \vee a_2 \in \nabla_m$ pero ni $a_1 \notin \nabla_m$, ni $a_2 \notin \nabla_m$. Entonces por el Lema 3.80, sean ∇_1 el filtro generado por ∇_m y a_1 y ∇_2 el filtro generado por ∇_m y a_2.

Supongamos que $a \in \nabla_1$ y $a \in \nabla_2$. Entonces para algunos $c_1, c_2 \in \nabla_m$ tenemos que $a \geq a_1 \wedge c_1$ y $a \geq a_2 \wedge c_2$. Sea $c = c_1 \wedge c_2$, entonces $a \geq a_1 \wedge c$ y $a \geq a_2 \wedge c$ de estas dos ecuaciones se obtiene que

$$a = a \vee a \geq (a_1 \wedge c) \vee (a_2 \wedge c) = (a_1 \vee a_2) \wedge c.$$

Dado que $c \in \nabla_m$ y $a_1 \vee a_2 \in \nabla_m$, entonces $a \in \nabla_m$, esta afirmación contradice la hipótesis de que $a \notin \nabla_m$.

Supongamos que $a \notin \nabla_1$, entonces $\nabla_m \in \mathfrak{O}$ esto implica que $\nabla_1 \subseteq \nabla_m$. Pero ∇_1 es el filtro generado por ∇_m y a de esto tenemos que $\nabla_m \subset \nabla_1$. Por lo tanto ∇_m no es maximal. Análogamente suponer que $a \notin \nabla_2$ nos conduce a una contradicción.

Por lo tanto ∇_m es primo y además $a \notin \nabla_m$. □

3.5. Modelos Algebraicos

Ahora estamos en condiciones de explicar la conexión entre el álgebra de Heyting y la lógica intuicionista, así como un resultado algebraico para la completitud de **Int**.

Definición 3.83. *Sea* $\mathbf{U} = (A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$ *un álgebra de Heyting y* $\mathcal{V}$ *el conjunto de letras proposicionales de* **Int**. *Una función* $v : FORM \rightarrow A$ *es llamada una* ***valuación*** *en el álgebra de Heyting* $\mathbf{U}$ *si:*

HV1: $v(\phi \vee \psi) = v(\phi) \vee_{\mathbf{U}} v(\psi)$

HV2: $v(\phi \wedge \psi) = v(\phi) \wedge_{\mathbf{U}} v(\psi)$

HV3: $v(\phi \rightarrow \psi) = v(\phi) \rightarrow_{\mathbf{U}} v(\psi)$

HV4: $v(\neg\varphi) = \neg_{\mathbf{U}} v(\varphi)$.

Definición 3.84.

MH1: *Si* $\mathbf{U} = (A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$ *es un álgebra de Heyting y* v *es una valuación, el par* $(\mathbf{U}, v)$ *es llamado un* ***modelo algebraico*** *para el conjunto de fórmulas* $FORM$.

MH2: *Una fórmula* φ *es* ***verdadera en*** $\mathbf{U}$ *bajo* v *(o es llamada algebraicamente válida en el modelo* $M = (\mathbf{U}, v)$*), si* $v(\varphi) = 1$.

MH3: *Una fórmula* φ *es* ***válida*** *(o algebraicamente válida) en* $\mathbf{U}$*, si es verdadera en todo modelo* M.

Definición 3.85. *Definimos en $FORM$ la siguiente relación de equivalencia:*

$$x \equiv y(mod\mathbf{Int}) \quad \textit{si y sólo si} \quad x \to y \in \mathbf{Int} \quad e \quad y \to x \in \mathbf{Int},$$

Entonces tenemos que $FORM/\equiv$ es un conjunto ordenado, donde están definidas cuatro operaciones dadas por:

$$\begin{aligned}
\overline{x} \to \overline{y} &= \overline{x \to y} \\
\overline{x} \wedge \overline{y} &= \overline{x \wedge y} \\
\overline{x} \vee \overline{y} &= \overline{x \vee y} \\
\neg\overline{x} &= \overline{\neg x}
\end{aligned}$$

y la relación de orden

$$\overline{x} \leq \overline{y} \textit{ si y sólo si } x \to y \in \mathbf{Int}.$$

El sistema $(FORM/\equiv, \to, \wedge, \vee, \neg)$ será llamado el ***álgebra de Lindenbaum-Tarski*** *de la Lógica Proposicional Intuicionista.*

Usando la construcción del álgebra de Lindenbaum-Tarski obtenemos la completitud algebraica de **Int**.

Teorema 3.86. $\vdash_{\mathbf{Int}} \varphi$ *si y sólo si φ es válida en toda álgebra de Heyting.*

Demostración.

[$\Rightarrow$] Supongamos que $\vdash_{\mathbf{Int}} \varphi$, entonces φ es válida en toda álgebra de Heyting. Para verificar esto es necesario mostrar que los axiomas de **Int** son válidos y las reglas MP y substitución preservan válidez, presentamos sólo dos casos:

Sea $\mathbf{U} = (A, \vee, \wedge, 0, 1)$ un álgebra de Heyting.

- (Pos1) $p \to (q \to p)$.

  Si $a, b, c \in A$, entonces $a \leq b \to a \equiv a \wedge b \leq a$.

- (Pos2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$.

  Sean $a, b, c \in A$

  $$0 \leq (a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) \equiv (a \to (b \to c)) \wedge (a \to b) \wedge a \leq c$$

  $$\begin{aligned}
  (a \to (b \to c)) \wedge (a \to b) \wedge a &= (a \to (b \to c) \wedge a) \wedge ((a \to b) \wedge a) \\
  &= (a \wedge (b \to c)) \wedge (a \wedge b) \\
  &= a \wedge ((b \to c) \wedge b) \\
  &\leq (b \to c) \wedge b \\
  &= b \wedge c \\
  &\leq c
  \end{aligned}$$

Por lo tanto $(a \to (b \to c)) \wedge (a \to b) \wedge a \leq c$.

[$\Leftarrow$] Supongamos ahora que φ es válida en toda algebra de Heyting. Veamos que $\vdash_{\mathbf{Int}} \varphi$.

Supongamos que $\nvdash_{\mathbf{Int}} \varphi$. Sea $v' : \mathcal{V} \to FORM/\equiv$ dada por $v'(p) = \overline{p}$. Se cumple que $v'(\varphi) = \overline{\varphi} \neq 1$ por lo tanto φ no es válida, lo cual es una contradicción. $\square$

También recordamos la completitud de la Lógica Proposicional Clásica.

Teorema 3.87. $\vdash_{\mathbf{Cl}} \varphi$ *si y sólo si es válida en toda álgebra booleana.*

Para una prueba del Teorema anterior véase [19].

Denotaremos por $\mathcal{HA}$ a la clase de las álgebras de Heyting.

Corolario 3.88. $\mathcal{HA}$ *es una variedad.*

Demostración. Por el Teorema 3.44, veamos que $\mathcal{HA}$ es una clase ecuacional. Sea $\mathbf{U} = (A, \vee, \wedge, \to, 0)$ un álgebra de Heyting y consideremos a $\Sigma = Id_{\mathbf{U}}(A)$.

Afirmación: $\mathcal{HA} = M(Id_{\mathbf{U}}(A))$.

[$\supseteq$] Sea $\mathbf{A} \in M(Id_{\mathbf{U}}(A))$, entonces se tiene que $\mathbf{A}$ es una clase de álgebras tal que $\mathbf{A} \models Id_{\mathbf{U}}(X)$. Por lo tanto $\mathbf{A} \in \mathcal{HA}$.

[$\subseteq$] Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{HA}$ esto implica que $\mathbf{A}$ es un álgebra de Heyting, entonces existe "$\to$" en $\mathbf{A}$ tal que para $a, b, c \in A$ se cumplen los incisos i-iv del Teorema 3.70, entonces $\mathbf{A} \models Id_{\mathbf{U}}(A)$. Así $\mathbf{A} \in M(Id_{\mathbf{U}}(A))$. Por lo tanto $\mathcal{HA} = M(Id_{\mathbf{U}}(A))$. $\square$

Podemos extender la semántica algebraica de **Int** a todas las lógicas intermedias. Con cada lógica intermedia $L \supseteq \mathbf{Int}$ asociamos la clase de álgebras de Heyting en donde todos los teoremas son válidos del siguiente modo:

Definición 3.89. *Sea L una lógica intermedia, entonces definimos V_L de la siguiente forma:*

$$\mathbf{V}_L = \{\mathbf{U} : \mathbf{U} \textit{ es un álgebra de Heyting y } L \subseteq Th(\mathbf{U})\},$$

en donde $Th(\mathbf{U}) = \{\varphi \in FORM : \varphi \textit{ es válida en } \mathbf{U}\}$.

Como consecuencia del Teorema 3.44 tenemos que:

Proposición 3.90. $\mathbf{V}_L$ *es variedad.*

Ejemplo 3.91. $\mathbf{V}_{\mathbf{Int}} = \mathcal{HA}$ *y* $\mathbf{V}_{\mathbf{Cl}} = \mathcal{BA}$*, donde* $\mathcal{BA}$ *denota la variedad de todas las álgebras booleanas.*

La construcción Lindenbaum-Tarski muestra que toda lógica intermedia es completa con respecto a su semántica algebraica.

Teorema 3.92. *Sean L una lógica intermedia, $\mathbf{V}_L$ la clase de álgebras de L y φ una fórmula, entonces se tiene que:*

$$\vdash_L \varphi \textit{ si y sólo si } \varphi \textit{ es válida en } \mathbf{V}_L.$$

Este teorema muestra que toda lógica intermedia queda caracterizada por una colección de álgebras de Heyting que cumple ser variedad. Más aún, toda variedad de álgebras induce una lógica intermedia.

Dada $\mathbf{V} \subseteq \mathcal{HA}$ una variedad, por el Teorema de Birkhoff (Teorema 3.44) $\mathbf{V}$ es una clase ecuacional, a saber, $\{\varphi_i = \psi_i : i \in I\}$.

Sea $L_{\mathbf{V}} = \mathbf{Int} + \Delta$, en donde $\Delta = \{\varphi_i \leftrightarrow \psi_i : i \in I\}$ es el conjunto de axiomas adicionales.

Proposición 3.93. $L_{\mathbf{V}} = \mathbf{Int} + \Delta$ *es una lógica intermedia y* $\mathbf{V}_L = \mathbf{V}$.

Ejemplo 3.94. $L_{\mathcal{HA}} = \mathbf{Int}$ *y* $L_{\mathcal{BA}} = \mathbf{Cl}$.

Para un ejemplo de una lógica intermedia no trivial caracterizada algebraicamente véase el Apéndice A.

Capítulo 4

Semántica de Kripke

La semántica de Kripke, (también conocida como semántica relacional) creada por Saul Kripke y André Joyal a finales de 1950, es una semántica formal para algunas lógicas no clásicas. Esta semántica primero fue creada para lógicas modales, más tarde se retomó para la lógica intuicionista y actualmente se emplea en muchos otros sistemas no clásicos.

4.1. Definiciones Preliminares

Definición 4.1. *Un* ***marco de Kripke*** *es un par* $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ *que consiste en:*

K1: *Un conjunto no vacío* P.

K2: *Un orden parcial* $\leq$ *en* P.

Es decir, $\underline{P}$ *es un conjunto parcialmente ordenado. Los elementos de* P *son llamados puntos del marco* $\underline{P}$ *y* $\alpha \leq \beta$ *se lee como* β *es accesible desde* α *ó* α *ve a* β.

Con el símbolo $\alpha < \beta$ denotamos que $\alpha \leq \beta$ y $\alpha \neq \beta$, también usaremos la notación $\beta \geq \alpha$ y $\beta > \alpha$ como un sinónimo de $\alpha \leq \beta$ y $\alpha < \beta$ respectivamente.

Definición 4.2. *Sean* $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ *un marco de Kripke y* $\mathcal{V}$ *un conjunto de variables proposicionales. Una relación* $\Vdash$ *es llamada* ***relación de forzamiento*** *si* $\Vdash \subseteq P \times \mathcal{V}$ *y es tal que para cualquier punto* α *de* $\underline{P}$ *y cualquier variable proposicional* p *de* $\mathcal{V}$*, se tiene que:*

$$\alpha \Vdash p \text{ y } \alpha \leq \beta, \text{ implican que } \beta \Vdash p.$$

Notación 4.3. $\alpha \Vdash p$ *(*α *fuerza a* p*) significa que el par* $\langle \alpha, p \rangle$ *pertenece a la relación de forzamiento, si esto no es verdadero, diremos que* α *no fuerza a* p *y lo denotamos por* $\alpha \nVdash p$.

Definición 4.4. *Un* ***modelo de Kripke*** *es una terna* $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash\rangle$ *donde:*

MK1: P *es un conjunto no vacío.*

MK2: $\leq$ *es un orden parcial.*

MK3: $\Vdash$ *es una relación de forzamiento.*

Decimos que $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash\rangle$ *es un modelo de Kripke basado en el marco de Kripke* $\underline{P} = \langle P, \leq\rangle$.

Definición 4.5. *Sea* $\underline{P} = \langle P, \leq\rangle$ *un marco y supongamos que la relación de forzamiento* $\Vdash$ *ha sido definida para variables proposicionales. Generalizamos la* ***relación de forzamiento*** $\alpha \Vdash \varphi$, *para cada* $\alpha \in P$ *y cada fórmula* $\varphi \in FORM$, *inductivamente en la estructura de* φ, *como sigue:*

RF1: *Si* $\varphi = \psi \wedge \chi$, *entonces* $\alpha \Vdash \psi \wedge \chi$ *si y sólo si* $\alpha \Vdash \psi$ *y* $\alpha \Vdash \chi$*;*

RF2: *Si* $\varphi = \psi \vee \chi$, *entonces* $\alpha \Vdash \psi \vee \chi$ *si y sólo si* $\alpha \Vdash \psi$ *o* $\alpha \Vdash \chi$*;*

RF3: *Si* $\varphi = \psi \to \chi$, *entonces* $\alpha \Vdash \psi \to \chi$ *si y sólo si para cada* $\beta \in P$, *si* $\alpha \leq \beta$ *y* $\beta \Vdash \psi$, *entonces* $\beta \Vdash \chi$*;*

RF4: *Si* $\varphi = \neg\psi$, *entonces* $\alpha \models \neg\psi$ *si y sólo si para cada* $\beta \in P$, *si* $\alpha \leq \beta$, *entonces* $\beta \nVdash \psi$.

Definición 4.6. *Dado un modelo* $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash\rangle$ *y* $\alpha \in P$, $\Gamma_{\underline{K}}(\alpha)$ *denota el conjunto de* ***fórmulas forzadas*** *en* α. *Si* V *es un conjunto de variables proposicionales,* $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha)$ *denota el conjunto de* V*-fórmulas forzadas en* α.

Definición 4.7.

FV1: *Decimos que una fórmula* φ *es* ***válida*** *en* $\underline{K}$ *y escribimos* $\underline{K} \models \varphi$ *si y sólo si para cada* $\alpha \in P$, $\alpha \Vdash \varphi$.

FV2: *Un conjunto de fórmulas* Δ *es* ***válido*** *en* $\underline{K}$ *y escribimos* $\underline{K} \models \Delta$ *si y sólo si para cada* $\varphi \in \Delta$, $\underline{K} \models \varphi$.

FV3: *Decimos que una fórmula* φ *es* ***válida en un marco*** $\underline{P}$ *y escribimos* $\underline{P} \models \varphi$ *si y sólo si para cada modelo de Kripke basado en* $\underline{P}$, $\underline{K} \models \varphi$.

FV4: *Sean* Γ *y* Δ *dos conjuntos de fórmulas y sea* $\mathcal{F}$ *una clase de marcos. Decimos que* Δ *es* ***consecuencia de*** Γ *con respecto a* $\mathcal{F}$, *y escribimos* $\Gamma \models_{\mathcal{F}} \Delta$ *si y sólo si para todo modelo* $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash\rangle$ *basado en los marcos de* $\mathcal{F}$ *y todo* $\alpha \in P$ *se tiene que:*

$$\forall\varphi \in \Gamma : \alpha \Vdash \varphi \text{ implica que } \exists\psi \in \Delta : \alpha \Vdash \psi.$$

En [24] la noción de modelo de Kripke es definida en términos de v-valuaciones como veremos a continuación.

Definición 4.8. *Sean* $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ *un marco de Kripke y* $\mathcal{V}$ *un conjunto de variables proposicionales. Una función* $v : \mathcal{V} \times P \to \{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{f}\}$*, que satisface la condición:*

$$\textit{Si } v(p,\alpha) = \boldsymbol{t} \textit{ y } \alpha \leq \beta, \textit{ entonces } v(p,\beta) = \boldsymbol{t},$$

la llamamos una P***-valuación****.*

Definición 4.9. *Sea* $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ *un marco de Kripke y* $v : FORM \times P \to \{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{f}\}$ *una* P*-valuación, podemos extender a* v *a todo* $FORM$ *de la siguiente manera:*

Para cualquier α*,* β *en* P*,*

PV1: $v(\varphi \wedge \psi, \alpha) = \boldsymbol{t}$ *si y sólo si* $v(\varphi, \alpha) = \boldsymbol{t}$ *y* $v(\psi, \alpha) = \boldsymbol{t}$*,*

PV2: $v(\varphi \vee \psi, \alpha) = \boldsymbol{t}$ *si y sólo si* $v(\varphi, \alpha) = \boldsymbol{t}$ *o* $v(\psi, \alpha) = \boldsymbol{t}$*,*

PV3: $v(\varphi \to \psi, \alpha) = \boldsymbol{t}$ *si y sólo si para cualquier* γ *en* P *tal que* $\alpha \leq \gamma$*,* $v(\varphi, \gamma) = \boldsymbol{f}$ *o* $v(\psi, \gamma) = \boldsymbol{t}$*,*

PV4: $v(\neg\varphi, \alpha) = \boldsymbol{t}$ *si y sólo si para cualquier* γ *en* P *tal que* $\alpha \leq \gamma$*,* $v(\varphi, \gamma) = \boldsymbol{f}$*.*

Definición 4.10. *Un* ***modelo de Kripke*** *es una terna* $\underline{K} = \langle P, \leq, v \rangle$ *en donde:*

MV1: P *es un conjunto no vacío.*

MV2: $\leq$ *es un orden parcial.*

MV3: v *es una* P*-valuación.*

Decimos que $\underline{K} = \langle P, \leq, v \rangle$ *es un modelo de Kripke basado en el marco de Kripke* $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$*.*

Definición 4.11. *Sea* $\underline{K} = \langle P, \leq, v \rangle$ *un modelo de Kripke.*

V1: *Decimos que una fórmula* φ *es* ***válida*** *en el modelo* $\underline{K}$*, si* $v(\varphi, \alpha) = t$ *para cualquier* α *en* P*.*

V2: *Si para cualquier* P*-valuación* v*,* φ *es* ***válida*** *en* $(\underline{K}, v)$*, decimos que* φ *es válida en* $\underline{P}$*.*

Este concepto es equivalente al concepto de modelo de Kripke en términos de forzamiento.

Proposición 4.12. *Las definiciones de modelos de Kripke en términos de relación de forzamiento y de* P*-valuaciones (Definición 4.5 y 4.10 respectivamente) son equivalentes.*

En el resto de este Capítulo usaremos la definición de modelo de Kripke en términos de forzamiento. Posteriormente en el Capítulo 5 haremos uso de la definición de modelo de Kripke en términos de P-valuaciones.

Proposición 4.13 (Propiedad de Conservación). *Sean α y $\beta \in P$, para cada $\varphi \in FORM$, se tiene que:*

$$\text{Si } \alpha \Vdash \varphi \text{ y } \alpha \leq \beta, \text{ entonces } \beta \Vdash \varphi.$$

Definición 4.14. *Sea $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ un modelo de Kripke. Si un subconjunto $P^{'}$ de P satisface la siguiente condición:*

$$\alpha \in P^{'} \text{ y } \alpha \leq \beta \text{ implica que } \beta \in P^{'}.$$

*decimos que $P^{'}$ es **cerrado** (o cerrado hacia arriba).*

Definición 4.15. *Un **submarco** de $\underline{P}$ es un marco $\underline{P}' = \langle P', \leq' \rangle$ obtenido de considerar un subconjunto P' de P y la restricción $\leq'$ de $\leq$ a $\underline{P}'$. El submarco se dice que es **generado**, si P' es cerrado hacia arriba.*

Definición 4.16. *Si α es un punto de $\underline{P}$, el **cono** $\underline{P}_\alpha$ de $\underline{P}$ es el submarco generado de $\underline{P}$ obtenido por considerar α y todos los puntos accesibles desde α.*

Definición 4.17. *Diremos que un marco $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ es **enraizado** si existe ρ punto minimal de $\underline{P}$. La tripleta $\langle P, \leq, \rho \rangle$ denota un marco con raíz ρ.*

Definición 4.18. *Un punto β es un **sucesor inmediato** de α si:*

S1: $\alpha < \beta$.

S2: Para cada punto γ de $\underline{P}$ tal que $\alpha \leq \gamma \leq \beta$, tenemos

$$\text{o bien que } \gamma = \alpha \text{ o } \gamma = \beta$$

Definición 4.19. *Un **punto final** de un marco $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ es un punto maximal de $\underline{P}$. $Fin(\alpha)$ denota el conjunto de puntos finales accesibles de α. $\underline{P}$ tiene suficientes puntos finales si para cada $\alpha \in P$, $Fin(\alpha) \neq \emptyset$.*

Definición 4.20. *Decimos que α tiene **profundidad** n, $prof(\alpha) = n$, si n es la longitud máxima de una cadena de puntos que comienzan en α (existe una sucesión de n puntos de $\underline{P}$ $\alpha_1 \equiv \alpha < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ y cualquier otra sucesión de este tipo contiene a lo más n puntos). En otro caso diremos que α tiene profundidad infinita.*

Observación 4.21. *Claramente un punto final tiene profundidad* 1.

Definición 4.22. *Decimos que la **profundidad de un marco** $\underline{P}$ es $n < \omega$ si existe un punto α en P tal que la $prof(\alpha) = n$ y para cualquier otro punto β en P, $prof(\beta) \leq n$. Y diremos que la profundidad de P es ω si para cada $n < \omega$ existe un punto en P tal que la profundidad de dicho punto es n, en este caso diremos que la profundidad es infinita.*

Observación 4.23. *Las notaciones de submodelos, submodelos generados y conos de modelos son definidas de manera similar a submarcos, submarcos generados y conos de marcos para mayor referencia consultar [13].*

4.2. Propiedad de Filtro

Es posible definir a las lógicas por diferentes vías por ejemplo de manera axiomática, empleando relaciones de consecuencia usando cálculo de secuentes, etc. Desde un punto de vista semántico, podemos hacerlo mediante clases de marcos.

Definición 4.24. *Sea $\mathcal{F}$ una clase no vacía de marcos de Kripke, la **lógica de la clase de marcos** $\mathcal{F}$ denotada por $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ es*

$$\mathcal{L}(\mathcal{F}) = \{\varphi \in FORM : \text{ para todo } \underline{P} = \langle P, \leq \rangle \in \mathcal{F}, \underline{P} \models \varphi\}.$$

Proposición 4.25. *Sea $\mathcal{F}$ una clase no vacía de marcos, entonces $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ es una lógica proposicional intermedia.*

Para una prueba de esta proposición véase [12].

A partir de ahora todas las lógicas que se considerarán son lógicas proposicionales intermedias y, por simplicidad, las llamaremos lógicas.

Definición 4.26. *Una lógica L se dice que es **caracterizada** (o descrita) por una clase de marcos $\mathcal{F}$, si se tiene que $L = \mathcal{L}(\mathcal{F})$.*

Definición 4.27. *Sea L una lógica proposicional intermedia, un marco de Kripke $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ se dice que es un **marco para** L, si L es válida en $\underline{P}$ y lo denotamos mediante $\underline{P} \models L$.*

Observación 4.28. *$Fr(L)$ denota la clase de marcos para L. Esta clase es no vacía, pues al menos contiene al marco de un solo punto.*

Proposición 4.29. *Sean L cualquier lógica intermedia y Γ, Δ conjuntos de fórmulas, entonces:*

1. $L \subseteq \mathcal{L}(Fr(L))$.

2. $\Gamma \vdash_L \Delta$ *implica que* $\Gamma \models_{Fr(L)} \Delta$.

Demostración.

1. Supongamos que $\varphi \in L$ y $\varphi \notin \mathcal{L}(Fr(L))$, entonces existe $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle \in Fr(L)$ tal que $\underline{P} \not\models \varphi$, pero $\underline{P}$ es un marco para L, esto implica que $\underline{P} \models L$, en particular para $\varphi \in L$, entonces se tiene que $\underline{P} \models \varphi$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto se verifica que $L \subseteq \mathcal{L}(Fr(L))$.

2. Sean $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ un modelo basado en un marco de $Fr(L)$, $\alpha \in P$ y supongamos que para cada $\varphi \in \Gamma$, $\alpha \Vdash \varphi$. Verifiquemos que existe $\psi \in \Delta$ tal que $\alpha \Vdash \psi$.

   Como $\Gamma \vdash_L \Delta$, entonces existen fórmulas

   $$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in \Gamma \text{ y } \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m \in \Delta$$

tales que

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \to \psi_1 \vee \psi_2 \vee \cdots \vee \psi_m \in L,$$

como $\underline{K}$ está basado en un marco de $Fr(L)$

$$\alpha \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \to \psi_1 \vee \psi_2 \vee \cdots \vee \psi_m,$$

además para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, por hipótesis se tiene que $\alpha \Vdash \varphi_i$, esto implica que

$$\alpha \Vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n,$$

por aplicación de regla MP se sigue que $\alpha \Vdash \psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_m$, entonces existe $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $\alpha \Vdash \psi_j$. Por lo tanto $\Gamma \models_{Fr(L)} \Delta$.

□

Proposición 4.30. *Si $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ es un marco para la lógica L, entonces cualquier submarco propio*[1] *generado de $\underline{P}$ es un marco para L.*

Para una prueba de está proposición véase [8].

Definición 4.31. *Sea $\alpha \in P$ y sea $\underline{P}_\alpha$ el cono de $\underline{P}$ generado por α. Decimos que $\underline{P}_\alpha$ tiene la **propiedad de filtro** si y sólo si para cada $\beta, \gamma \in P$, se tiene que*

$$\alpha < \beta \text{ y } \alpha < \gamma \text{ implica que } \exists\delta(\alpha < \delta \text{ y } \delta < \beta \text{ y } \delta < \gamma).$$

Si α es la raíz de $\underline{P}$, decimos que $\underline{P}$ tiene la propiedad de filtro.

Proposición 4.32. *Sean L una lógica intermedia y $\underline{P} = \langle P, \leq, \rho \rangle$ un marco de Kripke con raíz ρ y con la propiedad de filtro, supongamos que todo cono propio de $\underline{P}$ es un marco para L, entonces $\underline{P}$ es un marco para L.*

Demostración. (Por contradicción) Supongamos que $\underline{P}$ no es un marco de Kripke para L, entonces existe un modelo de Kripke $\underline{K} = \langle P, \leq, \rho, \Vdash \rangle$ basado en $\underline{P}$ y una fórmula $\varphi \in L$ tal que $\rho \nVdash \varphi$.

Probaremos primero el siguiente hecho:

(†) Existe un modelo de Kripke $\underline{K}' = \langle P, \leq, \rho, \Vdash' \rangle$ basado en $\underline{P}$ y $\alpha^* \in P$ tal que $\rho < \alpha^*$ y $\alpha^* \nVdash' \varphi$.

Sea $Sf(\varphi)$ el conjunto de todas las subfórmulas de φ y definimos una relación $\equiv_\varphi$ entre los puntos δ y δ' de $\underline{P}$ de la siguiente manera:

$$\delta \equiv_\varphi \delta' \text{ si para cada } \psi \in Sf(\varphi),$$
$$\delta \Vdash \psi \text{ si y sólo si } \delta' \Vdash \psi.$$

Afirmación: $\equiv_\varphi$ es una relación de equivalencia y además tiene un número finito de clases de equivalencia.

[1]Si P' es un subconjunto de P tal que $P' \neq P$. Entonces se dice que P' es un subconjunto propio de P.

Más aún, si $\alpha > \rho$, entonces $\alpha \Vdash \varphi$. En efecto, por hipótesis se tiene que el cono $\underline{P}_\alpha$ es un marco para L y $\varphi \in L$, entonces $\alpha \Vdash \varphi$. Por lo tanto α no es equivalente a ρ.

Definimos un conjunto $P' = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ tal que:

$$\rho < \alpha_1, \ldots, \rho < \alpha_n. \tag{4.1}$$

$$\text{Para cada } \delta > \rho, \text{ existe } \delta' \in P' \text{ tal que } \delta \equiv_\varphi \delta'. \tag{4.2}$$

Como P' es finito y $\underline{P}$ tiene la propiedad de filtro, entonces existe un punto $\alpha^* \in P$ tal que $\alpha^* > \rho$ y para cada $\delta \in P'$, $\alpha^* < \delta$.

Por lo tanto podemos definir un modelo $\underline{K}' = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ basado en $\underline{P}$ donde la relación de forzamiento $\Vdash'$ satisface las siguientes condiciones, para cada variable proposicional p:

(A') Para cada $\delta > \alpha^*$, $\delta \Vdash' p$ si y sólo si $\delta \Vdash p$.

(B') $\alpha^* \Vdash' p$ si y sólo si $\rho \Vdash p$.

Se prueba inmediatamente que:

(A) Para cada $\delta > \alpha^*$ y para cada fórmula ψ, $\delta \Vdash' \psi$ si y sólo si $\delta \Vdash \psi$.

Por inducción en la complejidad en ψ se verifica que:

(B) Para cada $\psi \in Sf(\varphi)$, $\alpha^* \Vdash' \psi$ si y sólo si $\rho \Vdash \psi$.

Caso 1. Si $\psi = p$ fórmula atómica, se sigue de (B').

Caso 2. Si $\psi = \chi \wedge \gamma$, entonces

$$\begin{array}{lll} \alpha^* \Vdash' \psi & \text{si y sólo si} & \alpha^* \Vdash' \chi \wedge \gamma \\ & \text{si y sólo si} & \alpha^* \Vdash' \chi \quad \text{y} \quad \alpha^* \Vdash' \gamma \\ & \text{si y sólo si} & \rho \Vdash \chi \quad \text{y} \quad \rho \Vdash \gamma \\ & \text{si y sólo si} & \rho \Vdash \chi \wedge \gamma. \end{array}$$

Caso 3. Si $\psi = \chi \vee \gamma$ este caso es análogo al caso anterior.

Caso 4. Si $\psi = \chi \to \gamma$. Si $\alpha^* \nVdash' \chi \to \gamma$, entonces existe $\delta \in P$ tal que $\rho < \alpha^* \leq \delta$ y $\delta \Vdash' \chi$ y $\delta \nVdash' \gamma$ por (A), $\delta \Vdash \chi$ y $\delta \nVdash \gamma$. Luego $\rho \nVdash \chi \to \gamma$.

Supongamos ahora que $\rho \nVdash \chi \to \gamma$, entonces existe δ tal que $\rho \leq \delta$, $\delta \Vdash \chi$ y $\delta \nVdash \gamma$.

a) Si $\delta = \rho$, entonces $\chi, \gamma \in Sf(\varphi)$ por hipótesis inductiva se sigue que $\alpha^* \Vdash' \chi$ y $\alpha^* \Vdash' \gamma$. Por lo tanto $\alpha^* \nVdash' \chi \to \gamma$.

b) Si $\delta > \rho$, por (4.2), existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\alpha_k \in P'$ tal que $\delta \equiv_\varphi \alpha_k$. Esto implica que $\alpha_k \Vdash \chi$ y $\alpha_k \nVdash \gamma$, por lo tanto, por (4.1) y por (A) $\alpha_k \Vdash' \chi$ y $\alpha_k \nVdash' \gamma$. Por lo tanto $\alpha_k \nVdash \chi \to \gamma$. Así (B) es verdadero.

Por (B) y el hecho de que $\rho \nVdash \varphi$ y $\varphi \in Sf(\varphi)$ se tiene que $\alpha^* \nVdash' \varphi$.

Por (†), el cono propio $\underline{P}_{\alpha^*}$ no es un marco de Kripke para L, lo cual es una contradicción con la hipótesis. Por lo tanto $\underline{P}$ es un marco de Kripke para L. $\square$

4.3. Conjuntos Especiales de Fórmulas

Intuitivamente un conjunto de fórmulas es consistente cuando no contiene contradicciones. Formalmente la consistencia puede ser definida en términos semánticos o en términos sintácticos.

Definición 4.33. *Sea L una lógica intermedia y Δ un conjunto de fórmulas, entonces Δ es consistente en L si no existe una fórmula φ y su negación $\neg\varphi$ ambas demostrables en Δ.*

Definición 4.34. *Sea L una lógica intermedia. Un conjunto de fórmulas Δ es un conjunto (en el lenguaje $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$) **$L$-saturado** si y sólo si:*

LS1: *Δ es consistente,*

LS2: *$\Delta \vdash_L \varphi$ (donde $\varphi \in FORM$) implica que $\varphi \in \Delta$,*

LS3: *$\varphi \vee \chi \in \Delta$ implica o bien que $\varphi \in \Delta$ o $\chi \in \Delta$.*

Observación 4.35.

1. *Si L es omitido, se entenderá que Δ es un conjunto **Int**-saturado.*
2. *Del punto LS2 De la Definición 4.34, tenemos que si Δ es L saturado, entonces se cumple que $L \subseteq \Delta$.*
3. *El conjunto de V-fórmulas de un conjunto L-saturado Δ es un conjunto L, V-saturado.*

Definición 4.36. *Un conjunto Δ es **maximal consistente** si:*

MC1: *Δ es consistente.*

MC2: *Para toda fórmula φ, o bien $\varphi \in \Delta$ o $\neg\varphi \in \Delta$.*

Ahora enunciamos algunos resultados importantes acerca de conjuntos saturados, para más referencias ver [4].

Proposición 4.37. *Δ es maximal consistente si y sólo si Δ es un conjunto* **Cl**-*saturado.*

Demostración.
[$\Rightarrow$] Supongamos que Δ es maximal consistente y verifiquemos que se satisfacen *LS1-LS3* de la Definición 4.34.
Por hipótesis Δ es consistente. Por lo tanto se verifica *LS1*.
Supongamos que $\Delta \vdash_{\mathbf{Cl}} \varphi$ y $\varphi \notin \Delta$, entonces $\neg\varphi \in \Delta$ esto implica que $\Delta \vdash_{\mathbf{Cl}} \neg\varphi$, es una contradicción con el hecho de que Δ es maximal consistente. Por lo tanto se verifica *LS2*.

Supongamos que $\varphi \notin \Delta$ y $\varphi \vee \chi \in \Delta$, pero $\neg\varphi \to \chi = \varphi \vee \chi \in \Delta$ y $\neg\varphi \in \Delta$, esto implica que $\Delta \vdash_{\mathbf{Cl}} \neg\varphi \to \chi$, luego por aplicación de la regla MP se tiene que $\Delta \vdash_{\mathbf{Cl}} \chi$. Por lo tanto se verifica *LS3*. Así Δ es **Cl**-saturado.

[$\Leftarrow$] Supongamos que Δ es **Cl**-saturado y verifiquemos que se satisfacen *MC1*-*MC2* de la Definición 4.36.
Por hipótesis Δ es consistente. Por lo tanto se verifica *MC1*.
Ahora sea φ una fórmula, sabemos que $\Delta \vdash_{\mathbf{Cl}} \neg\varphi \vee \varphi$ y por hipótesis se tiene que Δ es **Cl**-saturado, entonces $\neg\varphi \vee \varphi \in \Delta$, así se tiene que $\neg\varphi \in \Delta$ o $\varphi \in \Delta$. Por lo tanto se verifica *MC2*. Concluimos que Δ es maximal consistente. $\square$

Observación 4.38. *Dado un modelo de Kripke $\underline{K}$ y un punto α de $\underline{K}$, $\Gamma_{\underline{K}}(\alpha)$ es un conjunto saturado y $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha)$ es un conjunto V-saturado. Entonces los conjuntos $\Gamma_{\underline{K}}(\alpha)$ y $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha)$ son maximal consistentes.*

Definición 4.39. *Un conjunto saturado Δ es realizado en $\underline{K}$ si $\Delta = \Gamma_{\underline{K}}(\alpha)$ para algún punto α de $\underline{K}$.*

Ahora recordamos un resultado importante acerca de conjuntos saturados, para una prueba del lema consultar [8].

Lema 4.40 (Lema de Inclusión-Exclusión)**.** *Sean L una lógica intermedia y Γ y Δ dos conjuntos de fórmulas tales que $\Gamma \nvdash_L \Delta$. Entonces existe un conjunto L-saturado Γ^* tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ y $\Gamma^* \cap \Delta = \emptyset$.*

4.4. Nociones de Completez

Los siguientes conceptos relacionan los aspectos sintácticos y semánticos de una lógica.

Definición 4.41. *Sea L una lógica intermedia, entonces diremos que L es **completa** (o tiene semántica de Kripke) si y sólo si $L = \mathcal{L}(Fr(L))$.*

Definición 4.42. *Sea L una lógica intermedia, entonces diremos que L es **fuertemente completa** si y sólo si para cualesquiera conjuntos de fórmulas Γ y Δ, se tiene que*

$$\Gamma \vdash_L \Delta \text{ si y sólo si } \Gamma \models_{Fr(L)} \Delta.$$

Definición 4.43. *Sea L una lógica intermedia, entonces diremos que L es **fuertemente ω-completa** si y sólo si para cada conjunto finito de variables proposicionales V y para cualquiera dos conjuntos de V-fórmulas Γ^V y Δ^V, se tiene que:*

$$\Gamma^V \vdash_L \Delta^V \text{ si y sólo si } \Gamma^V \models_{Fr(L)} \Delta^V.$$

Proposición 4.44. *Sea L cualquier lógica intermedia.*

1. *L tiene semántica de Kripke si y sólo si para cualquier fórmula φ, se tiene que:*

$$\vdash_L \varphi \text{ si y sólo si } \models_{Fr(L)} \varphi.$$

2. L tiene semántica de Kripke si y sólo si L es caracterizada por alguna clase no vacía de marcos.

3. L es fuertemente completa si y sólo si cada conjunto Δ L-saturado es realizado en algún modelo de Kripke basado en un marco para L.

4. L es fuertemente ω-completa si y sólo si cada conjunto finito V y cada conjunto Δ^V que sea V-saturado en L, se tiene que es realizado en algún modelo de Kripke basado en un marco para L.

Demostración.

1. [$\Rightarrow$] Supongamos que L tiene semántica de Kripke y sea φ una fórmula. Notemos de la Proposición 4.29, que si $\vdash_L \varphi$, entonces $\models_{Fr(L)} \varphi$. Para el converso, supongamos que $\models_{Fr(L)} \varphi$ y $\nvdash_L \varphi$. Esto implica que $\varphi \in \mathcal{L}(Fr(L))$ y $\varphi \notin L$, esto es $L \neq \mathcal{L}(Fr(L))$, es decir, L no tiene semántica de Kripke, esto es una contradicción. Por lo tanto $L = \mathcal{L}(Fr(L))$.

   [$\Leftarrow$] Supongamos que L no tiene semántica de Kripke, entonces existe una fórmula φ tal que $\varphi \in \mathcal{L}(Fr(L))$ y $\varphi \notin L$, es decir, $\models_{Fr(L)} \varphi$ y $\nvdash_L \varphi$, lo cual es una contradicción.

2. [$\Rightarrow$] Si L tiene semántica de Kripke, entonces L es caracterizada por una clase no vacía de marcos de $Fr(L)$. Para el converso supongamos que L es caracterizada por una clase de marcos. Veamos que $\mathcal{L}(\mathcal{F}) = \mathcal{L}(Fr(L))$. Notemos que $\mathcal{F} \subseteq Fr(L)$, en efecto, supongamos que $\mathcal{F} \not\subseteq Fr(L)$, entonces existe $\underline{P} \in \mathcal{F}$ tal que $\underline{P} \notin Fr(L)$, esto implica que $\underline{P}$ no es marco para L, es decir, $\underline{P} \not\models L$, pero por hipótesis $L = \mathcal{L}(\mathcal{F})$, entonces $\underline{P} \not\models \mathcal{L}(\mathcal{F})$, esto implica que existe un $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ tal que $\underline{P} \not\models \varphi$. Pero como $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ se tiene que para cada $\underline{P}^* \in \mathcal{F}$, $\underline{P}^* \models \varphi$, en particular para $\underline{P} \in \mathcal{F}$, $\underline{P} \models \varphi$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{F} \subseteq Fr(L)$, luego $\mathcal{L}(Fr(L)) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{F})$.

   [$\Leftarrow$] Supongamos que existe $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ y $\varphi \notin \mathcal{L}(Fr(L))$, esto implica que existe $\underline{P}_0 \in Fr(L)$ tal que $\underline{P}_0 \not\models \varphi$, pero como $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$, entonces para cada $\underline{P}^* \in \mathcal{F}$, $P^* \models \varphi$, en particular para $\underline{P}_0 \in \mathcal{F}$, se tiene que $\underline{P}_0 \models \varphi$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{L}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{L}(Fr(L))$.

3. [$\Rightarrow$] (Por reducción al absurdo) Supongamos que L es fuertemente completa y que existe un conjunto Δ L-saturado que no es realizado en cualquier modelo $\underline{K}$ basado en un marco para L. Si con Δ^c denotamos el complemento de Δ, tenemos que $\Delta \models_{Fr(L)} \Delta^c$, en efecto, si $\underline{K}$ es cualquier modelo basado en un marco para L y α cualquier punto de $\underline{K}$ tal que $\alpha \Vdash \varphi$ para toda $\varphi \in \Delta$. Esto implica que $\Delta \subset \Gamma_{\underline{K}}(\alpha)$, de donde la inclusión es propia, esto significa que $\alpha \Vdash \varphi$ y $\varphi \notin \Delta$. Como L es fuertemente completa, se sigue que $\Delta \vdash_L \Delta^c$. Entonces existen fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in \Delta$ y $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m \in \Delta^c$ tales que $\vdash_L \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi_1 \vee \psi_2 \vee \cdots \vee \psi_m$. Esto implica que

$\psi_1 \vee \psi_2 \vee \cdots \vee \psi_m \in \Delta$. Por lo tanto $\psi_k \in \Delta$ para algún $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, lo cual es una contradicción pues $\psi_k \in \Delta^c$ y $\Delta \cap \Delta^c = \emptyset$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que L no es fuertemente completa, entonces existen conjuntos Γ y Δ tal que $\Gamma \models_{Fr(L)} \Delta$ y $\Gamma \nvdash_L \Delta$. Por el Lema 4.40, existe un conjunto Γ^* L-saturado tal que $\Gamma \models_{Fr(L)} \Delta$ y $\Gamma \nvdash_L \Delta$. Probaremos que Γ^* no es realizado en cualquier modelo basado en un marco para L. Supongamos que para algún modelo de Kripke $\underline{K}$ y algún punto α de $\underline{K}$, $\Gamma_{\underline{K}}(\alpha) = \Gamma^*$. Obtenemos lo siguiente:

- $\alpha \Vdash \varphi$ para cada $\varphi \in \Gamma$.
- $\alpha \nVdash \chi$ para cada $\chi \in \Delta$.

Por lo tanto $\Gamma \nvDash_{Fr(L)} \Delta$, lo cual es una contradicción.

4. Este caso es análogo al caso anterior, restringiéndose a V-conjuntos.

$\square$

4.5. Nociones de Separabilidad

Definimos algunas nociones relacionadas con la separabilidad de los puntos de un modelo de Kripke por medio de fórmulas, nociones que serán necesarias para caracterizar los modelos de Kripke de ciertas Lógicas Intermedias.

Definición 4.45. *Sea $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ un modelo de Kripke, diremos que $\underline{K}$ es* ***separable*** *si y sólo si para cada $\alpha, \beta \in P$, si $\Gamma_{\underline{K}}(\alpha) = \Gamma_{\underline{K}}(\beta)$, entonces $\alpha = \beta$.*

Definición 4.46. *Sean $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ un modelo de Kripke y V un conjunto de variables proposicionales, diremos que $\underline{K}$ es* ***V-separable*** *si y sólo si para cada $\alpha, \beta \in P$, si $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) = \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$, entonces $\alpha = \beta$.*

Definición 4.47. *Sea $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ un modelo de Kripke, diremos que $\underline{K}$ es* ***bien separable*** *si y sólo si para cada $\alpha, \beta \in P$, si $\Gamma_{\underline{K}}(\alpha) \subseteq \Gamma_{\underline{K}}(\beta)$, entonces $\alpha \leq \beta$.*

Definición 4.48. *Sea $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ un modelo de Kripke, diremos que $\underline{K}$ es* ***completo*** *si y sólo si para cada $\alpha \in P$ y cada conjunto Δ saturado tal que $\Gamma_{\underline{K}}(\alpha) \subseteq \Delta$, existe $\beta > \alpha$ tal que $\Gamma_{\underline{K}}(\beta) = \Delta$.*

Definición 4.49. *Sean $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ un modelo de Kripke y V un conjunto de variables proposicionales, diremos que $\underline{K}$ es* ***V-completo*** *si y sólo si para cada $\alpha \in P$ y cada conjunto Δ^V Δ-saturado tal que $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) \subseteq \Delta^V$, existe $\beta > \alpha$ tal que $\Gamma^V_{\underline{K}}(\beta) = \Delta^V$.*

En [8] la noción de ser separable es denominada ser diferenciado o distinguible (differentiated or distinguishable), bien separable es equivalente a ajustado (tightness) y la noción de completo es similar a marcos generales descriptivos (descriptive general frames).

Proposición 4.50. *Sean $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ un modelo de Kripke y V un conjunto de variables proposicionales, entonces*

1. *Si $\underline{K}$ es separable y completo, entonces $\underline{K}$ es bien separable y tiene suficientes puntos finales.*

2. *Si $\underline{K}$ es V-separable y V-completo, entonces $\underline{K}$ es bien V-separable y tiene suficientes puntos finales.*

3. *Si $\underline{K}$ es V-separable y V finito, entonces $\underline{K}$ tiene un número finito de puntos finales.*

Demostración.

1. Veamos que $\underline{K}$ es bien separable. Sean $\alpha, \beta \in P$ tales que $\Gamma_{\underline{K}}(\alpha) = \Gamma_{\underline{K}}(\beta)$, como $\Gamma_{\underline{K}}(\beta)$ es separable, entonces dado que $\underline{K}$ es completo existe $\beta^{'}$ tal que $\beta^{'} \geq \alpha$ y $\Gamma_{\underline{K}}(\beta) = \Gamma_{\underline{K}}(\beta^{'})$, pero $\underline{K}$ es separable, entonces $\beta = \beta^{'}$. Por lo tanto $\alpha \leq \beta^{'} = \beta$, es decir $\underline{K}$ es bien separable. Veamos que $\underline{K}$ tiene suficientes puntos finales. Sea $\alpha \in P$, definimos:

$$D_\alpha = \{\Delta | \Delta \text{ es saturado y } \Gamma_{\underline{K}}(\alpha) \subseteq \Delta\}.$$

   Este conjunto es ordenado con la inclusión, $\subseteq$ y es tal que si tomamos una cadena Δ_i con $i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} \Delta_i \in D_\alpha$. Dado que se satisfacen todas las hipótesis del Lema de Zorn en $(D_\alpha, \subseteq)$, entonces existe un conjunto maximal en D_α, digamos $\Delta^* \supseteq \Gamma_{\underline{K}}(\alpha)$ el cual es saturado, luego como $\underline{K}$ es completo existe $\alpha_{max} \geq \alpha$ tal que $\Delta^* = \Gamma_{\underline{K}}(\alpha_{max})$, entonces α_{max} es un elemento maximal accesible desde α. Por lo tanto $Fin(\alpha) \neq \emptyset$.

2. Este caso es análogo al caso anterior, restringiéndose a V-conjuntos.

3. Sea $V = \{p_1, \ldots, p_n\}$ un conjunto finito de variables proposicionales y sean $\alpha, \beta \in P$ tales que $\alpha \Vdash p_i$ si y sólo si $\beta \Vdash p_i$, entonces $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) = \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$ y como $\underline{K}$ es separable, esto implica que $\alpha = \beta$. Como V es finito, entonces existe una cantidad finita de subconjuntos $\Delta^V \subseteq V$ tal que $\alpha \Vdash \varphi$ si y sólo si $\varphi \in \Delta^V$, de esto existe una cantidad finita de puntos en P y por lo tanto una cantidad finita de puntos maximales, es decir puntos finales.

$\square$

Proposición 4.51. *Sea $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ un modelo de Kripke V-separable y V-completo, donde V es un conjunto cualquiera de variables proposicionales. Sean φ una V-fórmula y $\alpha \in P$ tal que $\alpha \nVdash \varphi$, entonces existe $\alpha_{max} \geq \alpha$ tal que $\alpha_{max} \nVdash \varphi$ y para cualquier $\delta > \alpha_{max}$, $\delta \Vdash \varphi$.*

Demostración. Sea

$$D = \{\Delta^V | \Delta \text{ es } V\text{-saturado, } \Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) \subseteq \Delta^V \text{ y } \varphi \notin \Delta^V\}.$$

D con la relación de inclusión satisface las hipótesis del Lema de Zorn, esto implica que existe un elemento maximal en D, digamos Δ^* como $\underline{K}$ es V-completo, entonces existe $\alpha_{max} \geq \alpha$ tal que $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha_{max}) = \Delta^*$. Por lo tanto $\alpha_{max} \nVdash \varphi$.

Supongamos que existe $\delta > \alpha_{max}$ tal que $\delta \nVdash \varphi$, $\varphi \notin \Gamma^V_{\underline{K}}(\delta)$, $\Gamma^V_{\underline{K}}(\delta)$ es V-saturado y $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) \subseteq \Gamma^V_{\underline{K}}(\delta)$, es decir que $\Gamma^V_{\underline{K}}(\delta)$ está en D, además Δ^* debe estar contenido propiamente en $\Gamma^V_{\underline{K}}(\delta)$ ya que $\underline{K}$ es V-separable. Por consiguiente si $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha_{max}) = \Gamma^V_{\underline{K}}(\delta)$, entonces tendríamos $\alpha_{max} = \delta$. Por lo tanto tal δ no existe, pues contradice la maximalidad de Δ^*. □

Si V es el conjunto de variables proposicionales, tenemos en particular la siguiente proposición.

Proposición 4.52. *Sea $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ un modelo de Kripke separable y completo. Sean φ una fórmula y $\alpha \in P$ es tal que $\alpha \nVdash \varphi$, entonces existe $\alpha_{max} \geq \alpha$ tal que $\alpha_{max} \nVdash \varphi$ y para cualquier $\delta > \alpha_{max}$, $\delta \Vdash \varphi$.*

4.6. Nociones de Canonicidad

El modelo canónico de una lógica L es, en cierto sentido, el modelo más grande de L, ya que contiene todos los conjuntos saturados que, como ya vimos, son conjuntos de fórmulas que satisfacen ciertas propiedades de cerradura.

Cuando un marco de un modelo canónico es un marco para una lógica L, decimos que L es canónica. Como una consecuencia inmediata de la Definición 4.41 se tiene que las lógicas canónicas son completas e incluso fuertemente completas.

Definición 4.53. *Una lógica se dice que es* ***canónica*** *si y sólo si cada modelo separable y completo de L está basado en un marco para L.*

Definición 4.54. *Una lógica se dice que es* ***ω-canónica*** *si y sólo si para cada modelo V-finito, V-separable, y V-completo de L^V es basado en un marco para L.*

La siguiente proposición es consecuencia directa de las respectivas definiciones.

Proposición 4.55. *Sea L una lógica intermedia. Entonces:*

1. *Si L es canónica, entonces L es ω-canónica.*
2. *Si L es fuertemente completa, entonces L es fuertemente ω-completa.*
3. *Si L es canónica, entonces L es fuertemente completa.*
4. *Si L es ω-canónica, entonces L es fuertemente ω-canónica.*

Observación 4.56. *Los recíprocos de 1 y 2 no se cumplen, los contraejemplos pueden verse en [13], mientras que los recíprocos de 3 y 4 no se sabe cuándo se cumplen, en este sentido es un problema abierto.*

Teorema 4.57 (Van-Benthem)**.** *Si una lógica L es caracterizada por un clase definible de marcos de primer orden*[2]*, entonces L es canónica.*

Definición 4.58. *Sea L una lógica, el* ***modelo canónico*** *de L es el modelo de Kripke $\underline{\mathcal{C}}_L = \langle P_L, \leq, \Vdash \rangle$ tal que:*

C1: *P_L es el conjunto de todos los conjuntos L-saturados.*

C2: *$\leq$ coincide con la relación de inclusión $\subseteq$.*

C3: *Para toda variable proposicional p y todo $\Delta \in P_L$:*

$$\Delta \Vdash p \textit{ si y sólo si } p \in \Delta$$

Proposición 4.59. *Para cada fórmula φ y $\Delta \in P_L$ se tiene que:*

$$\Delta \Vdash \varphi \textit{ si y sólo si } \varphi \in \Delta.$$

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre la longitud de la fórmula.
Sea φ una fórmula, entonces:

Caso 1. Si $\varphi = p$ con $p \in \mathcal{V}$, entonces por la definición de modelo canónico se satisface que

$$\Delta \Vdash p \text{ si y sólo si } p \in \Delta.$$

Caso 2. Si $\varphi = \psi \vee \chi$ y $\Delta \in P_L$, entonces

[$\Rightarrow$] Supongamos que $\Delta \Vdash \psi \vee \chi$ esto implica que $\Delta \Vdash \psi$ o $\Delta \Vdash \chi$, por hipótesis inductiva tenemos que $\psi \in \Delta$ o $\chi \Vdash \Delta$ y dado que $\Delta \in P_L$ se tiene que: $\Delta \vdash_L \psi$ o $\Delta \vdash_L \chi$.

Supongamos que $\Delta \Vdash_L \psi$. Como L es una lógica intermedia tenemos que $\psi \to (\psi \vee \chi) \in L$, entonces $\Delta \vdash_L \psi \to (\psi)$, por aplicación de la regla MP se sigue que $\Delta \vdash_L \psi \vee \chi$, esto es equivalente a $\psi \vee \chi \in \Delta$. Análogamente si suponemos que $\Delta \Vdash_L \chi$ llegamos a que $\psi \vee \chi \in \Delta$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $\varphi = \psi \vee \chi \in \Delta$ y como Δ es L-saturado se sigue que $\psi \in \Delta$ o $\chi \in \Delta$ por hipótesis inductiva se tiene que $\Delta \Vdash \psi$ o $\Delta \Vdash \chi$, esto último es equivalente a $\Delta \Vdash \psi \vee \chi$.

Caso 3. Si $\varphi = \psi \wedge \chi$ y $\Delta \in P_L$, entonces

[$\Rightarrow$] Supongamos que $\Delta \vdash_L \psi \wedge \chi$, esto es equivalente a tener $\Delta \Vdash \psi$ y $\Delta \Vdash \chi$ por hipótesis inductiva se tiene que $\psi \in \Delta$ y $\chi \in \Delta$ esto implica

[2] Para más detalles acerca de una clase definible de marcos de primer orden vea [9].

que $\Delta \vdash_L \psi$ y $\Delta \vdash_L \chi$, entonces $\Delta \vdash_L \psi \wedge \chi$. Como $\varphi \to \varphi \in L$, entonces $\Delta \Vdash_L (\psi \wedge \chi) \to (\psi \wedge \chi)$, aplicando la regla MP se tiene que $\Delta \vdash_L \psi \wedge \chi$ esto es equivalente a $\psi \wedge \chi \in \Delta$.

[$\Leftarrow$]Supongamos que $\psi \wedge \chi \in \Delta$, entonces $\Delta \vdash_L \psi \wedge \chi$. De *Pos3*, *Pos4* y la aplicación de la regla MP tenemos que $\Delta \vdash_L \psi$ y $\Delta \vdash_L \chi$. Como Δ es L-saturado tenemos que $\psi \in \Delta$ y $\chi \in \Delta$ aplicando la hipótesis inductiva se sigue que $\Delta \Vdash \psi$ y $\Delta \Vdash \chi$, esto es equivalente a $\Delta \Vdash \psi \wedge \chi$.

Caso 4. Si $\varphi = \psi \to \chi$ y $\Delta \in P_L$ tal que $\Delta \Vdash \psi \to \chi$ esto equivale a que para todo $\Gamma \in P_L$ tal que $\Delta \subseteq \Gamma$ si $\Gamma \Vdash \psi$ implica que $\Gamma \Vdash \chi$.

[$\Rightarrow$] Si $\Delta \Vdash \psi$, entonces $\Delta \Vdash \chi$, por hipótesis inductiva se sigue que $\psi \in \Delta$ y $\chi \in \Delta$, además $\chi \to (\psi \to \chi) \in L$, esto implica que $\Delta \vdash_L \psi \to \chi$ y como Δ es saturado, se sigue que $\psi \to \chi \in \Delta$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $\psi \to \chi \in \Delta$. Como $\Delta \subseteq \Gamma$ se tiene que $\psi \to \chi \in \Gamma$. Ahora supongamos que $\Gamma \Vdash \psi$, por hipótesis inductiva se sigue que $\psi \in \Gamma$ y además $(\psi \wedge (\psi \to \chi)) \to \chi \in L$, entonces $\Gamma \vdash_L \chi$. Como Γ es saturado se tiene que $\chi \in \Gamma$ y por hipótesis inductiva $\Gamma \Vdash \chi$. Por lo tanto $\Delta \Vdash \psi \to \chi$.

$\square$

Si V es un conjunto finito de variables proposicionales, se define el V-modelo canónico $\underline{\mathcal{C}}_L^V$ de L, como en la definición de modelo canónico tomando en cuenta L, V-conjuntos saturados.

Observación 4.60. *$\underline{\mathcal{C}}_L$ es un modelo completo y separable. Esto ocurre ya que $\Gamma_{\underline{\mathcal{C}}_L}(\Delta) = \Delta$, por lo tanto $\Gamma_{\underline{\mathcal{C}}_L}(\Delta) = \Gamma_{\underline{\mathcal{C}}_L}(\Gamma)$ si y sólo si $\Delta = \Gamma$. Además si $\Gamma \in P_L$ es tal que $\Gamma_{\underline{\mathcal{C}}_L}(\Gamma) \subseteq \Delta$, entonces $\Gamma \subseteq \Delta$ y como $\Gamma_{\underline{\mathcal{C}}_L}(\Delta) = \Delta$, entonces $\underline{\mathcal{C}}_L$ es completo.*

Además $\underline{\mathcal{C}}_L$ contiene como submodelos generados, todos los modelos completos de L.

Una propiedad similar se tiene para $\underline{\mathcal{C}}_L^V$. Por lo tanto $\underline{P}_L$ y $\underline{P}_L^V$ denotan los marcos de $\underline{\mathcal{C}}_L$ y $\underline{\mathcal{C}}_L^V$ respectivamente.

Definición 4.61. *Sea L una lógica intermedia, entonces*

1. *L es **canónica** si y sólo si $\underline{P}_L$ es un marco para L.*
2. *L es ω-**canónica** si y sólo si para cada conjunto V finito, $\underline{P}_L^V$ es un marco para L.*

4.7. p-Morfismos

Introducimos algunos tipos de homomorfismos entre marcos y entre modelos de Kripke, los cuales son funciones que preservan la validez de fórmulas como podemos ver en las siguientes definiciones.

Definición 4.62. *Sean $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ y $\underline{P}^{'} = \langle P^{'}, \leq^{'} \rangle$ marcos de Kripke. Diremos que $\underline{P}$ y $\underline{P}^{'}$ son* ***isomorfos*** *si existe un mapeo biyectivo f de P a $P^{'}$ tal que para cualesquiera $\alpha, \beta \in P$:*

$$\alpha \leq \beta \text{ si y sólo si } f(\alpha) \leq^{'} f(\beta).$$

Definición 4.63. *Sean $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ y $\underline{K}^{'} = \langle P^{'}, \leq^{'}, \Vdash^{'} \rangle$ modelos de Kripke. Diremos que $\underline{K}$ y $\underline{K}^{'}$ son* ***isomorfos*** *si existe un isomorfismo entre P y $P^{'}$ tal que para toda variable proposicional p se tiene que*

$$\alpha \Vdash p \text{ si y sólo si } f(\alpha) \Vdash^{'} p.$$

De la Definición 4.63, tenemos que α y $f(\alpha)$ fuerzan exactamente las mismas fórmulas.

Definición 4.64. *Sean $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ y $\underline{P^{'}} = \langle P^{'}, \leq^{'} \rangle$ marcos de Kripke. Un* ***p-morfismo*** *de P en $P^{'}$ es un mapeo biyectivo $f : P \to P^{'}$ tal que:*

PM1: *f preserva el orden, es decir, para cualesquiera $\alpha, \beta \in P$:*

$$\alpha \leq \beta \text{ si y sólo si } f(\alpha) \leq^{'} f(\beta).$$

PM2: *f es abierta, es decir, para cualquier $\alpha \in P$ y $\beta \in P^{'}$. Si $f(\alpha) \leq^{'} \beta$, entonces existe $\beta^{'} \in P$ tal que $f(\beta^{'}) = \beta$.*

Observación 4.65.

1. *Si f es un mapeo sobreyectivo de P a $P^{'}$, entonces f es llamado reducción de $\underline{P}$ a $\underline{P}^{'}$.*

2. *También decimos que f reduce P a $P^{'}$ o $\underline{P}^{'}$ es una f-reducción de $\underline{P}$ o $\underline{P}$ es f-reducible a $\underline{P}^{'}$.*

Definición 4.66. *Sean $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ y $\underline{K}^{'} = \langle P^{'}, \leq^{'}, \Vdash^{'} \rangle$ modelos de Kripke, decimos que f es un V-p-****morfismo*** *de K en $K^{'}$ si:*

VPM1: *f es un p-morfismo de P en $P^{'}$.*

VPM2: *Para toda variable proposicional p en $\mathcal{V}$ se tiene que:*

$$\alpha \Vdash p \text{ si y sólo si } f(\alpha) \Vdash^{'} p.$$

Proposición 4.67. *Sea f un V-p-morfismo de K en $K^{'}$ donde V es un conjunto de variables proposicionales, entonces para toda $\alpha \in K$, $\Gamma^{V}_{\underline{K}}(\alpha) = \Gamma^{V}_{\underline{K^{'}}}(f(\alpha))$.*

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre la complejidad de φ.

Sea $\varphi \in \Gamma^{V}_{\underline{K}}(\alpha)$, entonces:

Caso 1. Si $\varphi = p$ con $p \in \mathcal{V}$, entonces del inciso *VPM2* de la Definición 4.66, se sigue que $\varphi \in \Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha)$, entonces $\alpha \Vdash p$ si y sólo si $f(\alpha) \Vdash^{'} p$, es decir, $p \in \Gamma^V_{\underline{K}'}(f(\alpha))$.

Caso 2. Si $\varphi = \psi \wedge \chi$, entonces $\alpha \Vdash \psi \wedge \chi$ si y sólo si $\alpha \Vdash \psi$ y $\alpha \Vdash \chi$ aplicando hipótesis inductiva tenemos que $f(\alpha) \Vdash^{'} \psi$ y $f(\alpha) \Vdash^{'} \chi$. Por lo tanto $f(\alpha) \Vdash^{'} \psi \wedge \chi$, así $\varphi \in \Gamma^V_{\underline{K}'}(f(\alpha))$.

Caso 3. Si $\varphi = \psi \vee \chi$ es análogo al caso anterior.

Caso 4. Si $\varphi = \psi \to \chi$ y $\alpha \Vdash \psi \to \chi$. Sea $\beta^{'} \in P^{'}$ tal que $\beta^{'} \Vdash^{'} \psi$ y $f(\alpha) \leq \beta^{'}$, entonces existe un $\beta \in P$ tal que $\alpha \leq \beta$, $f(\beta) = \beta^{'}$, luego $f(\beta) \Vdash^{'} \psi$, por hipótesis inductiva $\beta \Vdash \psi$ como $\alpha \leq \beta$ y $\alpha \Vdash \psi \to \chi$, entonces $\alpha \Vdash \chi$ y nuevamente por hipótesis inductiva tenemos que $f(\beta) \Vdash^{'} \chi$, es decir, $\beta^{'} \Vdash^{'} \chi$. Por lo tanto $f(\alpha) \Vdash \psi \to \chi$ y $\varphi \in \Gamma^V_{\underline{K}'}(f(\alpha))$. Ahora supongamos que $f(\alpha) \Vdash \psi \to \chi$ y sea $\beta \in P$ tal que $\alpha \leq \beta$ y $\beta \Vdash \psi$ aplicando hipótesis inductiva tenemos que $f(\beta) \Vdash^{'} \psi$ con $f(\alpha) \leq f(\beta)$, entonces tenemos que $f(\beta) \Vdash^{'} \chi$ esto implica que $\beta \Vdash \chi$, para cualquier $\beta \geq \alpha$. Así $\alpha \vdash \psi \to \chi$. Por lo tanto $\varphi \in \Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha)$.

□

Proposición 4.68. *Sea $\underline{P}$ un marco de Kripke y supongamos que existe f un p-morfismo de $\underline{P}$ en algún marco $\underline{P}^{'}$. Entonces para cada fórmula φ,*

$$\underline{P} \models \varphi \quad \textit{implica que} \quad \underline{P}^{'} \models \varphi.$$

Demostración. Supongamos que $\underline{P} \models \varphi$ y sea $\underline{K}^{'} = \langle P^{'}, \leq^{'}, \Vdash^{'} \rangle$ un modelo basado en $\underline{P}^{'}$, definimos el modelo $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ del siguiente modo, para $\alpha \in P$ y $p \in \mathcal{V}$

$$\alpha \Vdash p \quad \text{si y sólo si} \quad f(\alpha) \Vdash^{'} p.$$

f es un p-morfismo de $\underline{K}$ en $\underline{K}^{'}$ con $V = \mathcal{V}$, de la Proposición 4.67, tenemos que $\Gamma_{\underline{K}'} = \Gamma_{\underline{K}'}(f(\alpha))$.

Ahora sea $\alpha^{'} \in \underline{P}^{'}$ dado que f es sobreyectiva, entonces existe un punto α en P y $\alpha \in f^{-1}(\alpha^{'})$ y como $\underline{P} \models A$, particularmente $\alpha \models \varphi$, es decir, $\varphi \in \Gamma_{\underline{K}}(\alpha) = \Gamma_{\underline{K}'}(f(\alpha))$, luego $\alpha^{'} \Vdash \varphi$. Como $\alpha^{'}$ y $\underline{K}^{'}$ son arbitrarios, entonces $\underline{P}^{'} \models \varphi$. □

En particular, si $\underline{P}$ es un marco para la lógica L, entonces $\underline{P}^{'}$ es un marco para L.

Definición 4.69. *Sea $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ un marco de Kripke con $Spl(P)$ denotamos el conjunto de todos los marcos de Kripke $\underline{P}^{'}$ tal que para todo submarco generado $\underline{P}^{''}$ contenido en algún cono $\underline{P}^{'}_{\alpha}$ de $\underline{P}^{'}$, no existe un p-morfismo de $\underline{P}^{''}$ en $\underline{P}$.*

Proposición 4.70. *Sean* $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ *y* $\underline{P}' = \langle P', \leq' \rangle$ *marcos de Kripke tales que* $P' \notin Spl(P)$, *entonces para cualquier fórmula* φ,

$$\textit{si } \underline{P}' \models \varphi \textit{ entonces } \underline{P} \models \varphi.$$

Demostración. Supongamos que $\underline{P}' \models \varphi$, como $P' \notin Spl(P)$, entonces existe $\underline{P}''$ submarco generado de $\underline{P}$ tal que $P'' \subseteq P'_\alpha$ para algún $\alpha \in P'$ y existe f un p-morfismo de $\underline{P}''$ en $\underline{P}$. Entonces por la Proposición 4.68 tenemos que $\underline{P}'' \models \varphi$ implica que $\underline{P} \models \varphi$.

Sea $\underline{K}'' = \langle P'', \leq'', \Vdash'' \rangle$ un modelo basado en $\underline{P}''$, entonces definimos $\underline{K}' = \langle P', \leq', \Vdash' \rangle$ de tal modo que:

- Si α está en el complemento de P'' , entonces para cada $p \in \mathcal{V}$, $\alpha \nVdash'' p$.
- Si $\alpha \in P''$, entonces $\alpha \Vdash'' p$ si y sólo si $f(\alpha) \vdash p$.

Entonces $\underline{K}''$ es un submodelo generado de $\underline{K}$. Por lo tanto, si $\underline{P}' \models A$ por el Teorema de Generación (Teorema 3.11 en [8]) $\underline{P}'' \models \varphi$, así $\underline{P} \models \varphi$. □

Definición 4.71. *Sea* V *un conjunto de variables proposicionales. Definimos dado un modelo de Kripke* $\underline{K}$ *la relación* $\equiv^V$ *entre puntos en* $\underline{K}$ *del siguiente modo:*

$$\alpha \equiv^V \beta \textit{ si y sólo si } \Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) = \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta).$$

Observación 4.72.

1. *La relación* $\equiv^V$ *es una relación de equivalencia.*

2. α_V *denotará la clase de equivalencia de* α *en la relación* $\equiv^V$.

Definición 4.73. *Sea* $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ *un modelo de Kripke, definimos el* ***modelo cociente*** *de* $\underline{K}$ *respecto a* V *como* $\underline{K}_V = \langle P', \leq', \Vdash' \rangle$ *donde:*

CO1: $P' = \{\alpha_V : \alpha \in P\}$.

CO2: $\alpha_V \leq' \beta_V$ *si y sólo si* $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) \subseteq \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$.

CO3: *Para cada* $p \in V$ $\alpha_V \Vdash' p$ *si y sólo si* $\alpha \Vdash p$.

CO4: *Para cada* $p \notin V$, *entonces* $\alpha_V \Vdash' p$.

Observación 4.74.

1. $\underline{K}_V$ *es bien separable.*

2. *El mapeo* h *que asocia a cada punto* α *de* $\underline{K}$ *con* α_V *de* $\underline{K}_V$ *es sobreyectivo y preserva el orden.*

4.8. Modelos de Kripke Finitos

Ahora definimos a los modelos de Kripke finitos que son modelos de Kripke con suficientes puntos finales y exponemos algunos resultados interesantes.

Proposición 4.75. *Sea $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ un modelo V-separable finito, donde V es un conjunto de variables proposicionales. Entonces $\underline{K}$ es bien separable.*

Demostración. Vamos a demostrar que para cualesquiera $\alpha, \beta \in P$,

$$\text{si } \Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) \subseteq \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta), \text{ entonces } \alpha \leq \beta.$$

Haremos la prueba por inducción sobre la profundidad de α.
Sea $\beta \in P$ tal que $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) \subseteq \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$.

Caso 1. Si $prof(\alpha) = 1$, entonces α es punto final, entonces $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) = \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$, dado que $\underline{K}$ es separable esto implica que $\alpha = \beta$.

Caso 2. Supongamos que $\alpha \nleq \beta$ y $prof(\alpha) > 1$, entonces existen $\delta_1, \ldots, \delta_n$ sucesores inmediatos de α, entonces $\delta_1 \nleq \beta, \ldots, \delta_n \nleq \beta$, para cada δ_i,(pues de lo contrario $\delta_i \leq \beta$ y como $\alpha \leq \delta_i$ se sigue que $\alpha \leq \beta$, lo cual es una contradicción) usando la contrarecíproca de la hipótesis inductiva, tenemos que $\Gamma^V_{\underline{K}}(\delta_i) \nsubseteq \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces existen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ con $\varphi_i \in \Gamma^V_{\underline{K}}(\delta_i)$ tales que $\delta_1 \Vdash \varphi_1$, $\delta_2 \Vdash \varphi_2, \ldots, \delta_n \Vdash \varphi_n$, pero $\beta \nVdash \varphi_i$ para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por otro lado dado que $\underline{K}$ es separable. Si suponemos que $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) = \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$, entonces $\alpha = \beta$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) \subset \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$ es propia. Es decir, existe χ fórmula tal que $\beta \Vdash \chi$ y $\alpha \nVdash \chi$. Sea $\gamma = \chi \to \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n$, entonces $\alpha \Vdash \gamma$, pero $\beta \nVdash \gamma$, lo cual es una contradicción, pues por hipótesis $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) \subseteq \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$ y así $\alpha \leq \beta$.

Por lo tanto K es bien V-separable. □

Lema 4.76. *Sean $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ un modelo finito, V un conjunto de variables proposicionales y $\underline{K}' = \langle P', \leq', \Vdash' \rangle$ un modelo de Kripke (posiblemente $\underline{K}' = \underline{K}$); sean $\alpha \in P$ y $\alpha' \in P'$ tales que $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) = \Gamma^V_{\underline{K}'}(\alpha')$ y sea Δ un conjunto V-separable tal que $\Gamma^V_{\underline{K}'}(\alpha') \subseteq \Delta^V$. Entonces existe $\beta' \in P'$ tal que $\alpha' \leq \beta'$ y $\Gamma^V_{\underline{K}'}(\beta') = \Delta^V$.*

Demostración. Dado que $\underline{K}$ es finito, entonces podemos encontrar un conjunto finito Σ tal que para cada V-fórmula φ, existe $\psi \in \Sigma$ tal que para toda $\alpha \in P$, $\alpha \Vdash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Supongamos que $\Sigma = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m\}$ en donde $\psi_i \in \Delta^V$ y $\chi_i \notin \Delta^V$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Como Δ^V es saturado, entonces

$$\varrho = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n \to \chi_1 \vee \chi_2 \vee \cdots \vee \chi_m \notin \Delta^V,$$

porque de suponer lo contrario, como Δ^V es saturado y $\bigwedge_{i=1}^n \psi_i$, $\varrho \vdash_L \bigvee_{i=1}^m \chi_i$, se sigue que $\bigvee_{i=1}^m \chi_i \in \Delta^V$ y nuevamente por ser Δ^V un conjunto saturado esto implica que existe χ_i tal que $\chi_i \in \Delta^V$, lo cual es una contradicción.

Por hipótesis tenemos que $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) = \Gamma^V_{\underline{K}'}(\alpha') \subseteq \Delta^V$, entonces $\alpha' \nVdash' \varrho$, esto implica que existe $\beta' \in P'$ tal que $\alpha' \leq \beta'$ y $\beta' \Vdash' \psi_i$, en donde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $\beta' \nVdash' \chi_i$, en donde $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Finalmente, verifiquemos $\Gamma^V_{\underline{K}}(\beta') = \Delta^V$.

[$\supseteq$] Sea $\varphi \in \Delta^V$, entonces para algún $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\alpha \Vdash \varphi \leftrightarrow \psi_i$ ya que $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) = \Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha')$ además como $\beta' \Vdash' \psi_i$, entonces $\beta' \Vdash' \varphi$, luego $\varphi \in \Gamma^V_{\underline{K}'}(\beta')$.

[$\subseteq$] Sea $\varphi \in \Gamma^V_{\underline{K}'}(\beta')$, entonces $\beta' \vdash' \varphi$ además existe $\vartheta \in \Sigma$ tal que $\alpha \vdash \varphi \leftrightarrow \vartheta$, luego $\alpha' \Vdash' \varphi \leftrightarrow \vartheta$ como $\alpha' \leq \beta'$, entonces $\beta' \Vdash' \varphi \leftrightarrow \vartheta$ así $\beta' \Vdash' \vartheta$. Luego para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\vartheta \neq \chi_i$, pues de lo contrario $\beta' \Vdash' \chi_i$, pero β' es tal que $\beta' \nVdash \chi_i$. Por lo tanto $\vartheta = \psi_i$ para algún $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, así $\vartheta \in \Delta^V$ además $\alpha' \Vdash \vartheta$, luego $\alpha \vdash \vartheta$ y como $\alpha \Vdash \varphi \leftrightarrow \vartheta$, entonces $\alpha \Vdash \varphi$, así $\varphi \subseteq \Gamma_{\underline{K}}(\alpha) \subseteq \Delta^V$. $\square$

Tomando $\underline{K} = \underline{K}'$, se prueba que:

Proposición 4.77. *Sean $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ un modelo finito y V cualquier conjunto de variables proposicionales. Entonces $\underline{K}$ es V-completo.*

Particularmente, tomando V el conjunto de todas las variables proposicionales, obtenemos:

Proposición 4.78. *Sea $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ un modelo de Kripke finito. Entonces $\underline{K}$ es completo.*

Proposición 4.79. *Sean $\underline{K} = \langle P, \leq, \rho, \Vdash \rangle$ un modelo finito V-separable y $K' = \langle P', \leq', \rho', \Vdash' \rangle$ un modelo de Kripke tal que $\Gamma^V_{\underline{K}}(\rho) = \Gamma^V_{\underline{K}'}(\rho')$ y sea h un mapeo de los puntos de K' a los puntos de $\underline{K}$ definido como sigue:*

$$h(\alpha') = \alpha \text{ si y sólo si } \Gamma^V_{\underline{K}'}(\alpha') = \Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha).$$

Entonces h es un V-p-morfismo de $\underline{K}'$ en $\underline{K}$.

Demostración. Veamos que h está bien definida. Sea $\alpha' \in P'$, $\rho' \leq' \alpha'$, luego $\Gamma^V_{\underline{K}'}(\rho') \subseteq \Gamma^V_{\underline{K}'}(\alpha')$ y como $\Gamma^V_{\underline{K}}(\rho) = \Gamma^V_{\underline{K}'}(\rho')$, entonces $\Gamma^V_{\underline{K}}(\rho) = \Gamma^V_{\underline{K}'}(\alpha')$ como $\Gamma^V_{\underline{K}'}(\alpha)$ es V-saturado y $\underline{K}$ es finito y separable entonces $\underline{K}$ es completo esto implica que existe $\alpha \in P$ tal que $\rho \leq \alpha$ y $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) = \Gamma^V_{\underline{K}'}(\alpha')$. Por lo tanto $h(\alpha') = \alpha$.

Veamos que h es función. Sea α' un punto en P' y supongamos que $h(\alpha') = \alpha_1$ y $h(\alpha') = \alpha_2$, entonces $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha_1) = \Gamma^V_{\underline{K}'}(\alpha') = \Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha_2)$ y dado que $\underline{K}$ es V-separable esto implica que $\alpha_1 = \alpha_2$.

Afirmación: h es p-morfismo.

Veamos que h es sobreyectiva. Sea $\alpha \in P$, entonces $\rho \leq \alpha$ y así $\Gamma^V_{\underline{K}}(\rho) \subseteq \Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha)$, luego $\Gamma^V_{\underline{K}}(\rho) \subseteq \Gamma^V_{\underline{K}'}(\alpha)$ con $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha)$ V-saturado, entonces por el Lema 4.76 tenemos que $\alpha' \in P'$ y es tal que $\rho' \leq \alpha'$ y $\Gamma'_{\underline{K}}(\alpha') = \Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha)$. Por lo tanto $h(\alpha') = \alpha$.

Veamos que h preserva el orden. Sean $\alpha', \beta' \in P'$ tal que $\alpha' \leq \beta'$ y sean $\alpha, \beta \in P$ tales que $h(\alpha') = \alpha$ y $h(\beta') = \beta$, tenemos que $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha') \subseteq \Gamma_{\underline{K}'}(\beta')$ y así

$\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) \subseteq \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$. Como $\underline{K}$ es finito y V-separable, entonces es bien-V-separable, de esto tenemos que $\alpha \leq \beta$, es decir que $h(\alpha) \leq h(\beta')$.

□

La siguiente proposición nos dice que los modelos finitos para una lógica L están basados en marcos para L.

Proposición 4.80. *Sean L una lógica intermedia y V un conjunto de variables proposicionales y $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ un modelo finito separable de L^V, entonces K está basado en un marco para L.*

Demostración. (Reducción al absurdo) Supongamos que $\underline{P}$ no es un marco para L, entonces existen un modelo $\underline{K}' = \langle P, \leq, \Vdash' \rangle$ y $\alpha \in P$ tal que para alguna fórmula $\varphi \in L$ se tiene que $\alpha \nVdash' \varphi$. Sea $V_\varphi = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ el conjunto de las variables proposicionales de φ, dado que $\underline{K}$ es finito, es V-separable y por lo tanto bien-V-separable, entonces existen V_φ-fórmulas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ tales que para cada $\alpha \in P$, $\alpha \Vdash' q_i$ si y sólo si $\alpha \Vdash \varepsilon_i$.

Consideramos la sustitución σ tal que $\sigma q_i = \varepsilon_i$. Entonces para cualquier V_A-fórmula η y cualquier $\alpha \in P$:

$$\alpha \Vdash' \eta \text{ si y sólo si } \alpha \Vdash \sigma\eta.$$

Haremos la prueba por inducción sobre la complejidad de η.

Caso 1. Si $\eta = p$ con $p \in \mathcal{V}$, entonces por la definición de σ es inmediato el resultado.

Caso 2. Si $\eta = \psi \wedge \chi$. Supongamos que $\alpha \Vdash' \psi \wedge \chi$ si y sólo si $\alpha \Vdash' \psi$ y $\alpha \Vdash' \chi$, por hipótesis inductiva tenemos que $\alpha \Vdash \sigma\psi$ y $\alpha \Vdash \sigma\chi$, es decir $\alpha \Vdash \sigma(\psi \wedge \chi)$.

Caso 3. Si $\eta = \psi \vee \chi$ es análogo al caso anterior.

Caso 4. Si $\eta = \psi \to \chi$. Supongamos que $\alpha \Vdash' \psi \to \chi$ esto es equivalente a decir que para todo $\beta \geq \alpha$, si $\beta \Vdash' \psi$, entonces $\beta \Vdash' \chi$, aplicando hipótesis inductiva tenemos que para todo $\beta \geq \alpha$, si $\beta \Vdash \sigma\psi$, entonces $\beta \Vdash \sigma\chi$, esto es equivalente a $\alpha \Vdash \sigma\psi \to \sigma\chi$, es decir, $\alpha \Vdash \sigma(\psi \to \chi)$.

Por lo tanto como $\alpha \nVdash' \varphi$, entonces $\alpha \nVdash \sigma\varphi$, lo cual es una contradicción, ya que $\varphi \in L$, entonces $\sigma\varphi \in L$ además $\sigma\varphi$ es una V-fórmula, luego $\sigma\varphi \in L^V$, entonces $\underline{K}$ debería forzar a $\sigma\varphi$ en cualquier $\alpha \in P$ particularmente en el α dado. □

Si tomamos a V el conjunto de todas las variables proposicionales, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.81. *Sea L una lógica intermedia y sea $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ un modelo finito separable de L. Entonces $\underline{K}$ está basado en un marco para L.*

Proposición 4.82. *Sea* $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ *un modelo* V*-separable, donde* V *es un conjunto finito de variables proposicionales, y* α *es cualquier punto de* $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ *con profundidad finita. Entonces el cono* $\underline{P}_\alpha$ *de* $\underline{P}$ *es finito.*

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre la profundidad de α.

Caso 1. Si $prof(\alpha) = 1$, entonces α es un punto final esto implica que $\underline{P}_\alpha = \{\alpha\}$, es decir que $\underline{P}_\alpha$ es finito.

Supongamos que $prof(\alpha) < n$, entonces $\underline{P}_\alpha$ es finito.

Caso 2. Supongamos que $prof(\alpha) = n > 1$, sean $\beta, \gamma \in P_\alpha$ con $\beta \neq \gamma$, entonces $\Gamma^V_{\underline{K}}(\beta) \neq \Gamma^V_{\underline{K}}(\gamma)$, esto implica que se da alguna de las siguientes condiciones:

a) Que no fuercen las mismas variables proposicionales.

b) Que no vean los mismos puntos.

Como V es finito, entonces existe una cantidad finita de posibles subconjuntos de V que se fuercen en un punto α y aplicando hipótesis inductiva, entonces tenemos que existe sólo un número finito de puntos de P_α. $\square$

4.9. Marcos con Suficientes Puntos Finales

Si una Lógica Intermedia es caracterizada por marcos con suficientes puntos finales, dicha lógica posee una semántica de Kripke. Para obtener dicho resultado primero presentaremos a los puntos V-finales de un modelo de Kripke y posteriormente definiremos los modelos de Kripke V-podados.

Definición 4.83. *Sea* $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ *un modelo de Kripke y* V *un conjunto finito de variables proposicionales. Un punto* $\alpha \in P$ *se denominará* ***V-final*** *si para cada* $p \in V$, $\alpha \Vdash p$ *o* $\alpha \Vdash \neg p$.

Afirmación 4.84. *Para todo* $\alpha \in P$, *existe* $\alpha^* \geq \alpha$ *tal que* α^* *es* V*-final.*

Demostración. Sea $\alpha \in P$. Veamos que existe $\alpha^* \geq \alpha$ tal que α^* es V-final.

Si $\alpha \Vdash p$ o $\alpha \Vdash \neg p$ para todo $p \in V$, entonces $\alpha^* = \alpha$ y α es final.

Si α no es V-final, entonces existe a lo más un número finito de variables proposicionales $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ tales que $\alpha \nVdash p_i$ y $\alpha \nVdash \neg p_i$ para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pero $\alpha \nVdash \neg p_1$ implica que existe $\alpha' \geq \alpha$ tal que $\alpha' \Vdash p_1$, entonces si en α' se tiene que $\alpha' \nVdash p_2$ y $\alpha' \nVdash \neg p_2$, aplicando el razonamiento anterior podemos encontrar $\alpha'' > \alpha'$ tal que $\alpha'' \Vdash p_3$ y así sucesivamente hasta encontrar $\alpha^n = \alpha^* > \alpha$ tal que $\alpha^* \Vdash p_n$. $\square$

Definición 4.85. *Sean* $\underline{K} = \langle P, \leq, \Vdash \rangle$ *un modelo de Kripke,* α *un punto en* P *y* α_V *la clase de equivalencia de puntos que tienen el mismo* V*-forzamiento que* α, *entonces se define el* ***modelo V-podado***, $\underline{K}^V_{pd} = \langle P', \leq', \Vdash' \rangle$ *de* $\underline{K}$ *como sigue:*

MP1: $P^{'} = \{\alpha : \alpha \in P$ *y* α *no es* V*-final* $\} \cup \{\alpha_V : \alpha \in P$ *y* α *es* V*-final*$\}$.

MP2: *Para cada* $\alpha, \beta \in P$:

1. *Si* β *no es* V*-final, entonces* $\alpha \leq^{'} \beta$ *si y sólo si* $\alpha \leq \beta$.
2. *Si* β *es* V*-final, entonces* $\alpha \leq^{'} \beta_V$ *si y sólo si* $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) \subseteq \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$.

MP3: *Para cada* $p \in V$ *y* $\alpha \in P$:

1. *Si* α *no es* V*-final, entonces* $\alpha \Vdash^{'} p$ *si y sólo si* $\alpha \Vdash p$.
2. *Si* α *es* V*-final, entonces* $\alpha_V \Vdash^{'} p$ *si y sólo si* $\alpha \Vdash p$.

MP4: *Para cada* $p \notin V$ *y* $\alpha^{'} \in P^{'}$, *se tiene que* $\alpha^{'} \Vdash^{'} p$.

Observación 4.86. *En el inciso 2 del punto* MP2 se cumple la igualdad si y sólo si α es V-final y α es equivalente a β.

Afirmación 4.87. $\underline{K}^V_{pd}$ *es un modelo de Kripke.*

Demostración. Veamos que $\underline{K}^V_{pd}$ satisface $MK1$-$MK3$ de la Definición 4.4.

- $P^{'} \neq \emptyset$ ya que $P \neq \emptyset$, luego $|P^{'}| \geq 1$, pues al menos debe existir un punto α y un $\alpha^{'}$ que sea V-final (posiblemente $\alpha = \alpha^{'}$).
- $\leq^{'}$ es una relación de orden. Veamos solamente la antisimetría. Supongamos que $\alpha \leq^{'} \beta$ y $\beta \leq^{'} \alpha$.

  Caso 1. Si α y β no son puntos V-finales es inmediato que $\alpha = \beta$.

  Caso 2. Si α y β son puntos V-finales es inmediato que $\alpha = \beta$.

  Caso 3. Supongamos que α es V-final y β no es V-final. Como $\beta \leq^{'} \alpha$, entonces $\Gamma^V_{\underline{K}}(\beta) \subseteq \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$ y dado que β no es V-final, se sigue que $\alpha \leq^{'} \beta$ esto implica que $\alpha \leq \beta$. Luego $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) \subseteq \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$, entonces $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) = \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$. Por lo tanto β es V-final, lo cual es una contradicción por lo tanto este caso no es posible y de manera análoga se tiene para el caso en que β es V-final y α no es V-final.

- $\Vdash^{'}$ es una relación de forzamiento. Supongamos que $\alpha, \beta \in P^{'}$ son tales que $\alpha \leq^{'} \beta$ además $\alpha \Vdash^{'} p$ con $p \in \mathcal{V}$.
  - Si β es V-final, entonces $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) \subseteq \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$. Así $\beta \Vdash p$ implica que $\beta \Vdash^{'} p$.
  - Si β no es V-final, entonces α no es V-final y así $\alpha \leq \beta$. Entonces $\alpha \Vdash^{'} p$ implica que $\alpha \Vdash p$, luego $\beta \vdash p$ de esto se sigue que $\beta \Vdash^{'} p$. Así $\Gamma^{\alpha}_{\underline{K}} = \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$, entonces β es V-final, lo cual es una contradicción.

$\square$

Lema 4.88. *Sean $\underline{K}$ un modelo de Kripke y V un conjunto de variables proposicionales, entonces existe un V-p-morfismo de $\underline{K}$ en el modelo V-podado $\underline{K}^V_{pd}$ de $\underline{K}$.*

Demostración. Sea $f : P \to P'$ definida de la siguiente manera, para cada $\alpha \in P$

$$f(\alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \text{ no es } V\text{-final} \\ \alpha_V & \text{si } \alpha \text{ es } V\text{-final} \end{cases}$$

- Veamos que f preserva el orden.

  Supongamos que $\alpha \leq \beta$. Entonces tenemos tres casos:

  Caso 1. Si β no es V-final, entonces $f(\alpha) = \alpha \leq \beta = f(\beta)$.

  Caso 2. Si β es V-final y α no es V-final, entonces $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) \subseteq \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$ esto implica que $f(\alpha) = \alpha \leq' \beta = f(\beta)$.

  Caso 3. Si α y β son V-finales, entonces $f(\alpha) = \alpha_V$, $f(\beta) = \beta_V$ y no existe $p \in V$ tal que $\alpha \Vdash p$ y $\beta \nVdash p$ o $\alpha \Vdash \neg p$ y $\beta \nVdash \neg p$. Dado que $\alpha \leq \beta$ se tiene que $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) \subseteq \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$, entonces $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) = \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$ y así $\alpha_V = \beta_V$. Por lo tanto $f(\alpha) = f(\beta)$ de esto se tiene que $f(\alpha) \leq f(\beta)$.

- Ahora veamos que f es abierta.

  Supongamos que $f(\alpha) \leq' \beta$. Entonces tenemos tres casos:

  Caso 1. Si α y β no son V-finales, entonces $\alpha = f(\alpha)$ y $\beta = f(\beta)$ así $\alpha \leq \beta$.

  Caso 2. Si β_V es un representante de clase y α no es V-final, entonces existe $\beta \in P$ tal que $f(\beta) = \beta_V$ además $f(\alpha) \leq' \beta$ luego $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) \subseteq \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$.

  Caso 3. Si $f(\alpha)$ y β_V son V-finales tales que $f(\alpha) \leq' \beta_V$, entonces existe β V-final tal que β_V es su representante de clase y así $f(\beta) = \beta_V$, luego tenemos que $f(\alpha) \leq' \beta_V = f(\beta)$, entonces tenemos que $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) \subseteq \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$ además α y β son V-finales, esto implica que $\Gamma^V_{\underline{K}}(\alpha) = \Gamma^V_{\underline{K}}(\beta)$. Por lo tanto están en la misma clase de equivalencia, entonces $f(\alpha) \leq \beta_V$ y así tenemos que existe $\alpha \geq \alpha$ tal que $f(\alpha) \leq \beta_V$.

Por lo tanto f es un V-p-morfismo de $\underline{K}$ en el modelo V-podado $\underline{K}^V_{pd}$ de $\underline{K}$. □

Teorema 4.89. *Sea $\mathcal{F}$ cualquier clase de marcos, entonces existe una clase $\mathcal{F}^{FIN}$, que contiene únicamente marcos con suficientes puntos finales y tales que:*

$$\mathcal{L}(\mathcal{F}) = \mathcal{L}(\mathcal{F}^{FIN}).$$

Demostración. Sea K la clase de todos los modelos basados en marcos de $\mathcal{F}$ con K^{FIN} denotamos la clase de todos los V-modelos podados de modelos de K, para cada conjunto finito V, $\mathcal{F}^{FIN}$ es la clase de marcos de los modelos de K^{FIN}.

[$\subseteq$] Supongamos que $\varphi \notin \mathcal{L}(\mathcal{F})$, entonces existe un modelo $\underline{K}$ basado en un marco de $\mathcal{F}$ tal que $\underline{K} \not\Vdash \varphi$, sea $V = Var\varphi$, entonces existe un punto $\alpha \in K$ tal que $\alpha \not\Vdash \varphi$, entonces existe α' en K^V_{pd} tal que $\alpha' \not\Vdash' \varphi$. Por lo tanto $\underline{K}^V_{pd} \not\Vdash \varphi$ y así $\varphi \notin \mathcal{L}(\mathcal{F}^{FIN})$.

[$\supseteq$] Supongamos que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^{FIN})$, entonces existe un marco $\underline{P}^{FIN}$ de tal manera que $\underline{P}^{FIN} \not\Vdash \varphi$. Por definición de $\mathcal{F}^{FIN}$ existe $\underline{P}$ en $\mathcal{F}$ y por el Lema 4.88 existe un p-morfismo de $\underline{P}$ en $\underline{P}^{FIN}$, con lo cual tenemos que $\underline{P} \models \varphi$ y así $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$. □

Corolario 4.90. *Una lógica L tiene semántica de Kripke si y sólo si L es caracterizada por una clase de marcos con suficientes puntos finales.*

4.10. Ejemplos de Semánticas de Kripke

Los modelos de Kripke son una herramienta muy eficaz en el estudio de la semántica de algunas lógicas intermedias. En las siguientes secciones introducimos algunos ejemplos de lógicas intermedias y caracterizamos los modelos mediante los cuales cada lógica queda descrita.

4.10.1. La Lógica de Ramificación Acotada

Consideremos la siguiente familia de fórmulas:

$$\mathbf{bb}_n = \bigwedge_{i=0}^{n}((p_i \to \bigvee_{j\neq i} p_j) \to \bigvee_{j\neq i} p_j) \to \bigvee_{i=0}^{n} p_i, n \geq 1.$$

La familia de lógicas de *Gabbay - de Jongh*, se define como:

$$\mathbf{T}_n := \mathbf{Int} + \mathbf{bb}_n.$$

Definición 4.91. *Sea $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ finito y $\alpha \in P$, decimos que α tiene **ramificación** n, si α tiene a lo más n distintos sucesores.*

Proposición 4.92. *Sea $\underline{P}$ un marco finito si cada punto $\alpha \in P$ la ramificación de α es a lo más n, entonces $\underline{P}$ es un marco para la lógica $\mathbf{T}_n$*

Para una prueba de esta proposición vea ([8], Proposición 2.41).

4.10.2. La Lógica de Profundidad Finita

Consideramos la sucesión de fórmulas $\mathbf{bd}_n$ definidas como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{bd}_0 &= \bot \\ \mathbf{bd}_1 &= p_1 \vee \neg p_1 = p_1 \vee (p_1 \to \bot) \\ \mathbf{bd}_{n+1} &= p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to \mathbf{bd}_n) \end{aligned}$$

Se define la familia de lógicas $\mathbf{Bd}_n$ de profundidad finita para $n \geq 1$, como sigue: $\mathbf{Bd}_n := \mathbf{Int} + \mathbf{bd}_n$.

Los marcos para $\mathbf{Bd}_n$ son los marcos de profundidad a lo más n.

Proposición 4.93. *$\underline{P}$ es un marco para $\mathbf{Bd}_n$ para $n \geq 1$ si y sólo si la profundidad de cada punto α en P es a lo más n.*

Demostración.

[$\Rightarrow$] Supongamos que $\mathbf{bd}_n$ no es válida en un punto α_0 en P, entonces tenemos que existe un modelo de Kripke $\underline{K}$ basado en $\underline{P}$ tal que $\alpha_0 \not\Vdash \mathbf{bd}_n$. Esto implica que $\alpha_0 \not\Vdash \mathbf{bd}_n$, de lo cual se sigue que $\alpha_0 \not\Vdash P_n$ y $\alpha_0 \not\Vdash p_n \to \mathbf{bd}_n$, entonces existe $\alpha_1 \geq \alpha_0$ tal que $\alpha_1 \Vdash P_n$ y $\alpha_1 \not\Vdash \mathbf{bd}_{n-1}$ Por la segunda parte tenemos que $\alpha_1 \not\Vdash p_{n-1}$ y $\alpha_1 \not\Vdash p_{n-1} \to \mathbf{bd}_{n-2}$. Continuando de este modo podemos construir la cadena $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de puntos distintos tales que:

$$
\begin{array}{l}
\alpha_0 \not\Vdash p_n \\
\alpha_1 \Vdash p_n \\
\alpha_2 \Vdash p_n, \quad \alpha_2 \Vdash p_{n-1} \\
\quad\vdots \\
\alpha_n \Vdash p_n, \quad \alpha_n \Vdash p_{n-1}\,, \ldots, \quad \alpha_n \Vdash p_1 \text{ y } \alpha_n \not\Vdash \bot.
\end{array}
$$

Entonces tenemos que $prof(\alpha_0) \geq n+1$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que existe un punto α_0 en P tal que $prof(\alpha_0) > n$, entonces existe una cadena de longitud $n+1$, digamos $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$, entonces definimos el modelo de Kripke $\underline{K}$:

Definimos una P-valuación $v : FORM \to \mathcal{P}(P)$ del siguiente modo:

$$v(\varphi) = \{\alpha \in P : v(\varphi, \alpha) = \mathbf{t}\}.$$

$$
\begin{array}{lcl}
v(p_i) & = & \{\alpha_k : k \in \{n-(i-1), \ldots, n\}\},\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}. \\
v(p_n) & = & \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \\
 & \vdots & \\
v(p_2) & = & \{\alpha_{n-1,\alpha_n}\} \\
v(p_1) & = & \{\alpha_n\}
\end{array}
$$

Luego tenemos que $\alpha_i \not\Vdash P_{n-i} \vee (p_{n-i} \to \mathbf{bd}_{n-(i+1)})$.

Por lo tanto

$$\alpha_0 \not\Vdash p_n \vee (p_n \to \mathbf{bd}_{n-1}).$$

□

4.10.3. La Lógica de Dummett

La lógica de Dummett o lógica de cadenas es la lógica:

$$\mathbf{LC} := \mathbf{Int} + (p \to q) \vee (q \to p).$$

Definición 4.94. *Decimos que un marco $\underline{P}$ es* ***fuertemente conectado*** *si para cualesquiera $\alpha, \beta, \gamma \in P$,*

$$\alpha \leq \beta \textit{ y } \alpha \leq \gamma \textit{ entonces } \beta \leq \gamma \textit{ o } \gamma \leq \beta.$$

Proposición 4.95. *$\underline{P}$ es un marco para* **LC** *si y sólo si $\underline{P}$ es fuertemente conectado.*

Para una prueba de esta proposición vea ([8], Proposición 2.36).

4.10.4. Lógicas de Gödel

Las lógicas proposicionales de Gödel de valores finitos fueron introducidas en [14] para probar que la Lógica Proposicional Intuicionista no puede verse como una lógica de valores finitos. En [10], Dummett demostró la completitud de las lógicas de Gödel.

Las lógicas de Gödel, están definidas por:

$$\mathbf{G}_n := \mathbf{Int} + ((p \to q) \vee (q \to p)) + \mathbf{bd}_n, (n \geq 1).$$

Las lógicas $\mathbf{G}_n$ pueden ser caracterizadas semánticamente como sigue:

Teorema 4.96. *$\underline{P}$ es un marco para $\mathbf{G}_n$, $(n \geq 1)$ si y sólo si $\underline{P}$ es fuertemente conectado y la profundidad de cada punto α en P es a lo más n.*

4.10.5. La Lógica de Kreisel-Putnam

La lógica de Kreisel-Putnam **KP** es la lógica:

$$\mathbf{KP} := \mathbf{Int} + \mathbf{kp},$$

donde **kp** es el siguiente esquema:

$$\mathbf{kp} = (\neg p \to q \vee r) \to (\neg p \to q) \vee (\neg p \to r).$$

La lógica **KP** sirvió como contraejemplo a la afirmación de Łukasiewicz de que: "La lógica intuicionista es el sistema más grande cerrado bajo MP, y sustitución que satisface la Propiedad Disyuntiva (PD)".

$$(PD) \quad \varphi \vee \chi \in L \text{ implica que o bien } \varphi \in L \text{ o } \chi \in L.$$

Definición 4.97. *Una lógica se dice que es **constructiva** si satisface la propiedad disyuntiva (PD).*

Proposición 4.98. *Sea L una lógica intermedia y suponga que $L = \mathcal{L}(\mathcal{F})$ para una clase no vacía de marcos $\mathcal{F}$. Si para cada $\underline{P}_1$ y $\underline{P}_2$ en $\mathcal{F}$ existe $\underline{P} \in \mathcal{F}$ tal que $\underline{P}_1$ y $\underline{P}_2$ son submarcos generados de $\underline{P}$, entonces L satisface la propiedad disyuntiva.*

Demostración. Supongamos que $\varphi \vee \psi \in L$ y que $\varphi \notin L$ y $\psi \notin L$, luego existen $\underline{P}_1$ y $\underline{P}_2 \in \mathcal{F}$ tales que $\underline{P}_1 \not\models \varphi$ y $\underline{P}_2 \not\models \psi$. Por hipótesis tenemos que existe $\underline{P} \in \mathcal{F}$ de tal forma que $\underline{P}_1$ y $\underline{P}_2$ son submarcos generados de $\underline{P}$, entonces $\underline{P} \not\models \varphi$ y $\underline{P} \not\models \psi$, por lo tanto $\underline{P} \not\models \varphi \vee \psi$. Por otra parte $\varphi \vee \psi \in L = \mathcal{L}(\mathcal{F})$, entonces para cada $\underline{P} \in \mathcal{F}$ implica que $\underline{P} \models \varphi \vee \psi$, lo que nos conduce a una contradicción. □

Empleando está propiedad se verifica que:

Proposición 4.99.

1. $\mathbf{T}_n$ satisface la propiedad disyuntiva.
2. $\mathbf{Cl}$ y $\mathbf{Bd}_n$ no satisfacen la propiedad disyuntiva.

Demostración.

1. De la Proposición 4.98, se sigue que $\mathbf{T}_n$ satisface (PD).
2. $\mathbf{Cl}$ no satisface la propiedad disyuntiva, pues $(p \to \neg p) \vee (\neg p \to p)$ es una instancia de axioma que pertenece a $\mathbf{Cl}$ pero ni $p \to \neg p$ ni $\neg p \to p$ están en $\mathbf{Cl}$.

   Por otro lado $\mathbf{Bd}_n$ no satisface la propiedad disyuntiva, pues $\mathbf{bd}_1 = p_1 \vee \neg p_1$, $\mathbf{Bd}_1 = \mathbf{Int} + \mathbf{bd}_1 = \mathbf{Cl}$ y $\mathbf{Cl}$ no tiene la propiedad disyuntiva.

□

Algunos esquemas si permiten que los disyuntandos estén en $\mathbf{Bd}_2$. Por ejemplo si $p_1 = p_2$, entonces $p_1 \vee (p_1 \to p_1 \vee \neg p_1)$, pero $p_1 \to p_1 \vee \neg p_1$ es una instancia de axioma (Pos6) y está en $\mathbf{Bd}_2$.

Por contrario tenemos que $p_2 = \neg\neg p_1 \notin \mathbf{Bd}_2$ y $\neg\neg p_1 \to p_1 \vee \neg p_1 \notin \mathbf{Bd}_2$.

Proposición 4.100. *Sea $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ un marco con suficientes puntos finales $\underline{P}$ es un marco para la lógica* $\mathbf{KP}$ *si y sólo si para todo $\alpha, \beta, \gamma \in P$ se satisface que si $\alpha \leq \beta$ y $\alpha \leq \gamma$, entonces existe δ tal que $\alpha \leq \delta$, $\delta \leq \beta$, $\delta \leq \gamma$ y $Fin(\delta) = Fin(\beta) \cup Fin(\gamma)$.*

Para una prueba de esta proposición véase [20].

4.10.6. La Lógica de Shehtman

Vimos en la sección 4.4 que una lógica es completa si está es caracterizada por una clase no vacía de marcos de Kripke. En 1977, V.B. Shehtman, construyó la primera lógica proposicional intermedia no completa. Su construcción está basada en considerar la siguiente familia de fórmulas:

$$\begin{array}{ll}
\alpha^1_{-1} = p, \quad \alpha^2_{-1} = q, & \alpha^1_0 = q \to p, \quad \alpha^2_0 = p \to q, \\
\alpha^1_{n+1} = \alpha^2_n \to \alpha^1_n \vee \alpha^2_{n-1}, & \alpha^2_{n+1} = \alpha^1_n \to \alpha^2_n \vee \alpha^1_{n-1}, \\
\beta_n = \alpha^1_{n+1} \wedge \alpha^2_{n+1} \to \alpha^1_n \vee \alpha^2_n, & (n < \omega) \\
\pi = \beta_0 \to \beta_1 \vee \beta_2, \quad \mu = \beta_0 \vee \beta_1 & \varpi = \pi \to \mu, \quad \iota = \beta_1 \to \beta_0 \vee \alpha^1_2.
\end{array}$$

La lógica de Shehtman se puede axiomatizar como sigue:

$$\mathbf{Sh} := \mathbf{Int} + \varpi + \iota + \mathbf{bb}_2.$$

Teorema 4.101. *La lógica* $\mathbf{Sh}$ *no es completa.*

Para una prueba de está proposición véase [22].

$\mathbf{T_n}$	$:=$	$\mathbf{Int} + \bigwedge_{i=0}^{n}((p_i \to \bigvee_{j\neq i} p_j) \to \bigvee_{j\neq i} p_j) \to \bigvee_{i=0}^{n} p_i, (n \geq 1)$
$\mathbf{Bd_n}$	$:=$	$\mathbf{Int} + p_n \vee (p_n \to \mathbf{bd}_{n-1})$
$\mathbf{LC}$	$:=$	$\mathbf{Int} + (p \to q) \vee (q \to p)$
$\mathbf{G}_n$	$:=$	$\mathbf{Int} + ((p \to q) \vee (q \to p)) + \mathbf{bd}_n,\ (n \geq 1)$
$\mathbf{KP}$	$:=$	$\mathbf{Int} + (\neg p \to q \vee r) \to (\neg p \to q) \vee (\neg p \to r)$
$\mathbf{Sh}$	$:=$	$\mathbf{Int} + \varpi + \iota + \mathbf{bb}_2$

Tabla 4.1: Lógicas Intermedias.

4.10.7. Lógicas Axiomatizadas por Fórmulas en una Variable

Las lógicas en una variable son lógicas súper intuicionistas teniendo como axioma adicional una fórmula que contiene sólo una variable proposicional, en esta sección presentaremos algunos ejemplos de dichas lógicas y estudiaremos su caracterización semántica.

Sobolev en [28], muestra que todas las lógicas axiomatizadas por fórmulas en una variable tienen la propiedad del modelo finito y por lo tanto son decidibles y admiten una semántica en términos de modelos de Kripke.

Definición 4.102. *El* **Int**-$\{p\}$-***modelo canónico*** $\underline{K}_\omega = \langle P_\omega, \leq, \sigma_\omega, \Vdash\rangle$ *se define en el marco* $\underline{P}_\omega = \langle P_\omega, \leq, \sigma_\omega\rangle$ *de la Figura 4.1 (las líneas rectas representan la relación de sucesor inmediato) y donde la relación de forzamiento es definida como sigue:*

$$\delta \Vdash p \textit{ si y sólo si } \delta = \sigma_1.$$

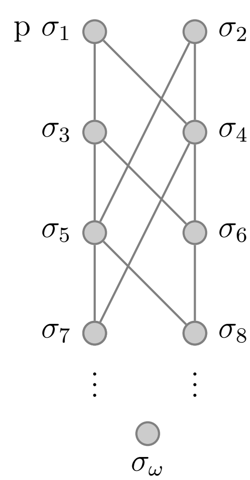

Figura 4.1: **Int**-$\{p\}$-modelo canónico de $\underline{K}_\omega$.

Consideremos ahora la familia de fórmulas $\mathbf{nf}_n$:

$$\begin{array}{lcl}\mathbf{nf}_1 & = & p\\ \mathbf{nf}_2 & = & \neg p\\ \mathbf{nf}_3 & = & \neg\neg p\\ \mathbf{nf}_4 & = & \neg\neg p \to p\\ \mathbf{nf}_k & = & \mathbf{nf}_{k-1} \to \mathbf{nf}_{k-3} \vee \mathbf{nf}_{k-4},\ k \geq 5.\end{array}$$

Ejemplo 4.103. *Particularmente los esquemas* $\mathbf{nf}_n$ *para* $n \in \{5, 6, 7\}$ *son:*

$$\begin{array}{lcl}\mathbf{nf}_5 & = & (\neg\neg p \to p) \to (\neg p \vee p)\\ \mathbf{nf}_6 & = & ((\neg\neg p \to p) \to \neg p \vee p) \to (\neg\neg p \vee \neg p)\\ \mathbf{nf}_7 & = & \mathbf{nf}_6 \to ((\neg\neg p \to p) \vee \neg\neg p).\end{array}$$

Esta familia de fórmulas se denomina fórmulas de Nishimura (1960). Toda lógica con axiomas extra en una variable se puede axiomatizar empleando fórmulas en una variable; para más detalles acerca de las fórmulas de Nishimura véase [3], [4].

Algunos resultados acerca de esta familia de fórmulas son los siguientes:

Afirmación 4.104.

1. $\delta \Vdash \mathbf{nf}_k$ *si y sólo si* $\sigma_k \leq \delta$.
2. *Si* $\sigma_m \leq \sigma_n$, *entonces* $\vdash_{\mathbf{Int}} \mathbf{nf}_n \to \mathbf{nf}_m$.

Para una demostración véase [21].

4.10.8. La Lógica de Jankov

Esta lógica se puede axiomatizar como sigue:

$$\mathbf{Jn} := \mathbf{Int} + \neg p \vee \neg\neg p = \mathbf{Int} + (\neg\neg p \to p) \to (p \vee \neg p).$$

Estas dos axiomatizaciones en realidad conducen a la misma lógica.
Veamos que $\vdash_{\mathbf{Int}+\neg p\vee\neg\neg p} (\neg\neg p \to p) \to (p \vee \neg p)$.

(1)	$\neg\neg p \to p$	hipótesis
(2)	$\neg p \to (p \vee \neg p)$	(Pos7)
(3)	$p \to (p \vee \neg p)$	(Pos6)
(4)	$\neg\neg p \to (p \vee \neg p)$	transitividad 1 y 3
(5)	$(\neg p \to (p \vee \neg p)) \to ((\neg\neg p) \to (p \vee \neg p))$	(Pos8)
(6)	$((\neg\neg p) \to (p \vee \neg p))$	(MP 2 y 5)
(7)	$p \vee \neg p$	(MP 4 y 6)

Por el Teorema de la Deducción tenemos que

$$\vdash_{\mathbf{Int}+\neg p\vee\neg\neg p} (\neg\neg p \to p) \to (p \vee \neg p).$$

Ahora veamos que $\vdash_{\mathbf{Int}+(\neg\neg p\to p)\to p\vee\neg p} (\neg p \vee \neg\neg p)$.

(1)	$(\neg\neg\neg p \to \neg p) \to (\neg p \vee \neg\neg p)$	Esquema $(\neg\neg p \to p) \to (p \vee \neg p)$
(2)	$(\neg\neg\neg p \to \neg p)$	$\neg\neg\neg p \to \neg p \in \mathbf{Int}$
(3)	$\neg p \vee \neg\neg p$	(MP 1 y 2)

Definición 4.105. *Un marco $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ es **fuertemente dirigido** si para cualquier $\alpha, \beta, \gamma \in P$ si $\alpha \leq \beta$ y $\alpha \leq \gamma$, entonces $\exists\delta(\beta \leq \delta$ y $\gamma \leq \delta)$.*

Un ejemplo de marco fuertemente dirigido se presenta en la Figura 4.2.

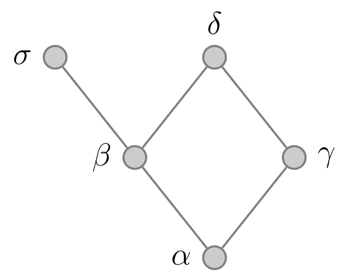

Figura 4.2: Marco fuertemente dirigido

Proposición 4.106. *$\underline{P}$ es un marco para* **Jn** *si y sólo si $\underline{P}$ es fuertemente dirigido.*

Para una prueba de esta proposición véase [8].

4.10.9. La Lógica de Scott

Esta lógica se puede axiomatizar como sigue:

$$\mathbf{St} := \mathbf{Int} + ((\neg\neg p \to p) \to \neg p \vee p) \to (\neg\neg p \vee \neg p)).$$

Definición 4.107. *Sea $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ un marco y α un punto que no es final en $\underline{P}$, α es **pre-final** si $\forall\ \delta \in P$, $\delta > \alpha$, entonces δ es final en P.*

Un ejemplo de puntos pre-finales se muestran en la Figura 4.3.

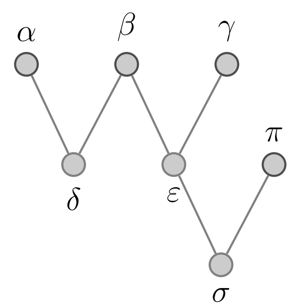

Figura 4.3: δ y ε son puntos pre-finales y σ no es un punto pre-final

Definición 4.108. *Sean $\alpha, \beta \in P$ puntos finales de $\underline{P}$, se dice que α y β están **conectados prefinalmente** en $\underline{P}$ si y sólo si satisfacen alguna de las siguientes condiciones*

CP1: $\alpha = \beta$

CP2: *Existe una sucesión* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ *con* $n \geq 1$ *de puntos finales en* $\underline{P}$ *tales que:*

1. $\gamma_1 = \alpha$ *y* $\gamma_n = \beta$
2. *Si* $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, *entonces existe* δ_i *un punto prefinal en* P *tal que* $\{\gamma_i, \gamma_{i+1}\} \subseteq Fin(\delta_i)$.

Un ejemplo de puntos conectados prefinalmente se muestran en la Figura 4.4.

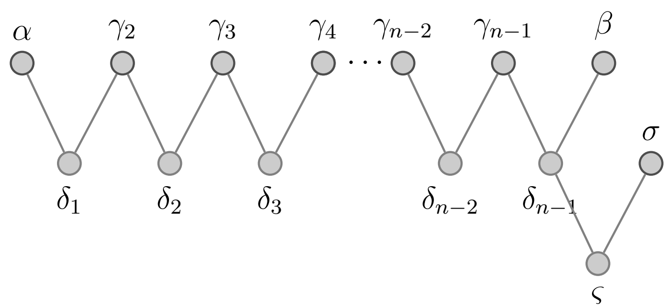

Figura 4.4: α y β están conectados prefinalmente, pero α y σ no lo están.

Observación 4.109. *Si* $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ *es un marco de profundidad finita y* $\alpha, \gamma \in P$ *son tales que* α *no es final y* $\gamma \in Fin(\alpha)$ *y para todo* β *con* $\alpha \leq \beta < \gamma$ *se tiene* β *no es prefinal, entonces* $\underline{P}$ *no es un marco para* **St**.

Demostración. Como α tiene profundidad finita, entonces existe $\alpha \leq \beta < \gamma$ y γ un sucesor inmediato de β.

Además debe existir δ un sucesor de β tal que $\gamma \notin Fin(\delta)$. Entonces definimos un p-morfismo h del cono $\underline{P}_\beta$ de $\underline{P}$ en el cono $\underline{P}_{\sigma_5}$ del siguiente modo:

$$h(\gamma) = \sigma_2$$
$$h(\beta) = \sigma_5$$

$$h(\delta) = \begin{cases} \sigma_1 & \text{si } \delta \text{ es final} \\ \sigma_3 & \text{si } \delta \text{ no es final} \end{cases}$$

$\beta \leq \delta$ pero no tiene a γ como punto final.

h es un p-morfismo, pero tenemos que $\sigma_5 \nvDash \mathbf{nf}_6$ pues σ_5 no es mayor que σ_6. Por lo tanto dado que existe un p-morfismo entre $\underline{P}_\beta$ y $\underline{P}_{\sigma_5}$, entonces $\underline{P}_\beta \nvDash \mathbf{nf}_6$. $\square$

Proposición 4.110. *Sea* $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ *un marco de Kripke de profundidad finita este será un marco para* **St** *si y sólo si para todo* $\alpha \in P$ *y* $\delta, \gamma \in Fin(\alpha)$, δ *y* γ *están conectados prefinalmente en* $\underline{P}_\alpha$.

Para una prueba detallada de esta proposición véase el Apéndice C.

Cl	:=	$\mathbf{Int} + (\mathbf{nf}_1 \vee \mathbf{nf}_2) = \mathbf{Int} + \mathbf{nf}_4$
Jn	:=	$\mathbf{Int} + (\mathbf{nf}_2 \vee \mathbf{nf}_3) = \mathbf{Int} + \mathbf{nf}_5$
$\mathbf{NL}_m$	:=	$\mathbf{Int} + \mathbf{nf}_m$, $(m \geq 6)$
St	:=	$\mathbf{NL}_6$
Ast	:=	$\mathbf{NL}_7$

Tabla 4.2: Lógicas Axiomatizadas por Fórmulas en una Variable.

4.10.10. La Lógica Anti-Scott

La lógica Anti-Scott se puede axiomatizar como sigue:

$$\mathbf{Ast} := \mathbf{Int} + \mathbf{nf}_7.$$

Proposición 4.111. *Sea $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ un marco de profundidad finita, $\underline{P}$ es un marco para* **Ast** *si y sólo si para cada $\alpha \in P$ si α no es un punto final de $\underline{P}$, entonces satisface alguna de las condiciones:*

1. *Para todo sucesor inmediato δ de α, $|Fin(\delta)| = 1$.*
2. *Para cualquier par de sucesores inmediatos β y γ, si β y γ no son puntos finales, entonces $Fin(\beta) = Fin(\gamma)$.*

Observación 4.112. *En [11] [Miglioli y Ferrari]*

1. *Presentan extensiones de* **St** *y particularmente una extensión maximal*[3] *en la familia de lógicas intermedias constructivas* **EST**.

   $$\mathbf{EST} = \mathbf{St} \cup \{Est_n\}.$$

   donde Est_n se define de la siguiente manera:

   $$\begin{aligned} Est_n \quad = \quad & ((\neg\neg\varphi_1 \to \neg\varphi_2 \vee \neg\neg\varphi_2 \vee \cdots \vee \neg\varphi_n \vee \neg\neg\varphi_n) \\ & \to \neg\neg\varphi_1 \vee \neg\neg\varphi_2 \vee \cdots \vee \neg\neg\varphi_n) \\ & \to \neg\neg\varphi_1 \vee \neg\neg\varphi_2 \vee \cdots \vee \neg\neg\varphi_n. \end{aligned}$$

2. *Muestran que* **St** *es maximal en el fragmento de lógicas intermedias axiomatizadas en una variable y además el fragmento en una variable de cualquier lógica constructiva está constituido en:*

   a) *En el fragmento de una variable de* **St**.

   b) *En el fragmento de una variable de* **Ast**.

3. *Así como para* **St** *también construyen para* **Ast** *una lógica constructiva que la extiende y es maximal.*

4. **St** *y* **Ast** *son constructiblemente incompatibles, es decir, que la unión de ellas no admite una extensión constructiva.*

[3]Si se agrega una fórmula más a la lógica, está deja de ser constructiva.

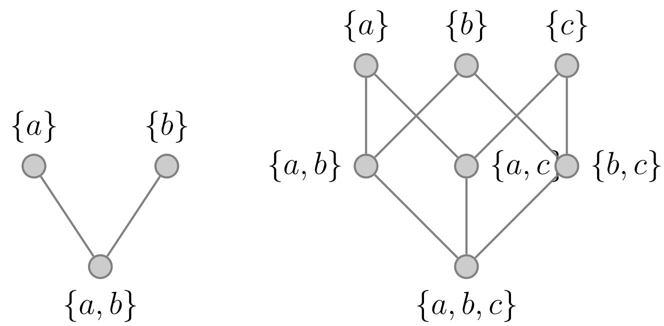

Figura 4.5: MV-marcos con 2 y 3 puntos finales.

4.10.11. La Lógica de Medvedev

La lógica de Medvedev **MV** es conocida en la literatura como la lógica del problema finito y surge en el contexto de la interpretación algorítmica de los conectivos intuicionistas. En este trabajo estamos interesados en su semántica de Kripke.

Definición 4.113. *Sea X un conjunto finito no vacío. El **marco de Medvedev** (MV-marco) determinado por X, es el marco $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ definido como sigue:*

M1: $P = \{Y : Y \subseteq X \text{ y } Y \neq \emptyset\}$.

M2: $Y \leq Z$ *si y sólo si* $Z \subseteq Y$.

Observación 4.114.

1. *X es la raíz de $\underline{P}$.*
2. *Para cada $x \in X$, $\{x\}$ es punto final de $\underline{P}$.*

Ejemplo 4.115. *Para $X_2 = \{a, b\}$ y $X_3 = \{a, b, c\}$, los correspondientes MV-marcos son representados en la Figura 4.5.*

Observación 4.116. *Sea $\mathcal{F}_{MV}$ la clase de todos los MV-marcos, entonces*

$$\mathbf{MV} = \mathcal{L}(\mathcal{F}_{MV}).$$

De esta caracterización se tienen los siguientes hechos:

MV1. $\mathbf{St} \subseteq \mathbf{MV}$.

MV2. $\mathbf{KP} \subseteq \mathbf{MV}$.

Aplicando la Proposición 4.98 se verifica que:

Afirmación 4.117. *La lógica de Medvedev* **MV** *satisface la propiedad disyuntiva.*

Observación 4.118.

1. **MV** *es el primer ejemplo de lógica maximal constructiva, para mas referencias véase [15].*

2. **MV** *no es finitamente axiomatizable ([16]), sólo la semántica es conocida y es un problema abierto demostrar si es decidible.*

4.10.12. La Lógica de Rombos

La lógica de rombos **RH** presenta una cierta analogía con la lógica de Medvedev de igual forma damos una caracterización semántica de esta lógica.

Definición 4.119. *Sea T un orden lineal, un intervalo de T es una pareja $[t_1, t_2]$, donde $t_1 \leq t_2$.*

Denotamos el intervalo $[t, t]$ simplemente con t.

El orden en T induce un orden parcial $\subseteq$ en los intervalos de T definido de la siguiente manera:

$$[t_1, t_2] \subseteq [u_1, u_2] \text{ si y sólo si } u_1 \leq t_1 \text{ y } t_2 \leq u_2.$$

Definición 4.120. *Sea T un orden lineal finito, el RH-**marco** $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ determinado por T es definido como sigue:*

R1: $P = \{[t_1, t_2]; t_1, t_2 \in T \text{ y } t_1 \leq t_2\}$.

R2: $[t_1, t_2] \leq [u_1, u_2]$ *si y sólo si* $[u_1, u_2] \subseteq [t_1, t_2]$.

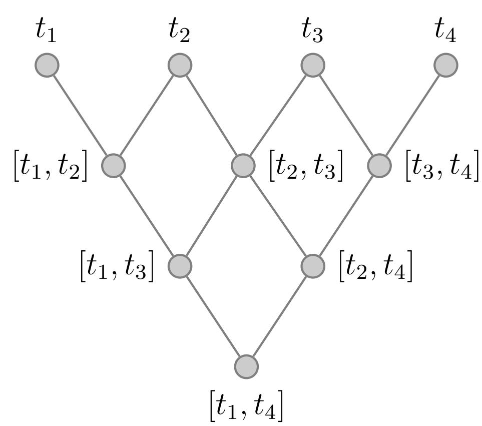

Figura 4.6: Ejemplo de un RH-marco con 4 puntos finales.

Observación 4.121. *Los intervalos de la forma t son los puntos finales de $\underline{P}$ y los intervalos correspondientes a los puntos finales de T es la raíz de $\underline{P}$.*

Ejemplo 4.122. *Sea* $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$*, con* $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$*. El* RH*-marco determinado por* T *está representado en la Figura 4.6.*

Observación 4.123. *Sea* $\mathcal{F}_{RH}$ *la clase de todos los* RH*-marcos, entonces*

$$\mathbf{RH} = \mathcal{L}(\mathcal{F}_{RH}).$$

De esta caracterización se tienen los siguientes hechos:

RH1. $\mathbf{St} \subseteq \mathbf{RH}$.

RH2. $\mathbf{T}_2 \subseteq \mathbf{RH}$.

Observación 4.124.

1. *Las lógicas* **MV** *y* **RH** *son incomparables ya que* **KP** *no está contenida en* **RH** *y* $\mathbf{T}_2$ *no está contenida en* **MV**

2. **RH** *no tiene una axiomatización, sólo la semántica es conocida.*

Capítulo 5

Relación entre Semánticas Algebraicas y de Kripke

En el Capítulo 3 hemos estudiado la semántica algebraica que caracteriza a las Lógicas Intermedias, de igual forma en el Capítulo 4 se ha tratado la semántica de Kripke y se dieron ejemplos de algunas lógicas intermedias y de las semánticas de Kripke que las caracterizan. En [13] [Fitting] muestra que los modelos de Kripke son equivalentes a los modelos algebraicos en cierto sentido.

También sabemos que toda lógica intermedia acepta una semántica algebraica no así una semántica de Kripke, pero mostraremos que cualquier lógica intermedia finita tiene un modelo de Kripke.

Teorema 5.1. *Para cualquier modelo de Kripke $\underline{K} = \langle P, \leq, v\rangle$, existe un modelo algebraico $M = (\mathbf{U}, v_{\mathbf{U}})$ donde $\mathbf{U}$ es un álgebra de Heyting y $v_{\mathbf{U}}$ es una valuación de $FORM$ en $\mathbf{U}$ tal que para cualquier fórmula φ, se tiene que:*

$$\varphi \textit{ es válida en } \underline{K} \textit{ si y sólo si } v_{\mathbf{U}}(\varphi) = 1.$$

Demostración. Sea $\underline{K} = \langle P, \leq, v\rangle$ un modelo de Kripke.

Definiremos un modelo de algebraico $M = (\mathbf{U}, v_{\mathbf{U}})$ tal que para cualquier fórmula φ:

$$\varphi \text{ es válida en } \underline{K} \text{ si y sólo si } v_{\mathbf{U}}(\varphi) = 1.$$

Tomamos la colección,

$$A = \{N \subseteq P : N \text{ es cerrado } \}.$$

La relación de orden en A es la inclusión de conjuntos $\subseteq$.

$(A, \subseteq)$ es una retícula distributiva en donde $\wedge$ y $\vee$ son la intersección y la unión de conjuntos respectivamente. Además $\emptyset \in A$ es el elemento mínimo y P es el elemento máximo.

Resta verificar que la retícula tiene pseudocomplemento, es decir que por un lado si N_1, $N_2 \in A$, existe un elemento $N \in A$ más grande tal que $N_1 \cap N \subseteq N_2$.

Sea N el subconjunto cerrado más grande de $(P \setminus N_1) \cup N_2$.

Por otro lado veamos que para cada $N_3 \in P$,

$$N_3 \subseteq N \text{ si y sólo si } N_1 \cap N_3 \subseteq N_2.$$

[⇒] Supongamos $N_3 \subseteq N$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} N & \subseteq & (P \setminus N_1) \cup N_2 \\ N_3 & \subseteq & (P \setminus N_1) \cup N_2 \\ N_1 \cap N_3 & \subseteq & N_1 \cap [(P \setminus N_1) \cup N_2] \\ N_1 \cap N_3 & \subseteq & N_1 \cap N_2 \subseteq N_2 \end{array}$$

[⇐] Ahora supongamos que $N_1 \cap N_3 \subseteq N_2$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} N_1 \cap N_3 & \subseteq & N_2 \\ (N_1 \cap N_3) \cup (N_3 \setminus N_1) & \subseteq & N_2 \cup (N_3 \setminus N_1) \\ N_3 & \subseteq & N_2 \cup (N_3 \setminus N_1) \text{ Prop. Distributiva} \end{array}$$

Pero $N_3 \in A$, así N_3 es cerrado. Por lo tanto $N_3 \subseteq N$.
Así $\mathbf{U} = (A, \cap, \cup, \emptyset, P)$ es un álgebra de Heyting.
Ahora definimos $v_{\mathbf{U}}$ una valuación en $\mathbf{U}$ de la siguiente manera, para cualquier fórmula φ,

$$v_{\mathbf{U}}(\varphi) = \{u \in P : v(\varphi, u) = \mathbf{t}\}.$$

Veamos que $v_{\mathbf{U}}$ es una valuación.

1.

$$\begin{array}{rcl} v_{\mathbf{U}}(\varphi \wedge \psi) & = & \{u : v(\varphi \wedge \psi, u) = \mathbf{t}\} \\ & = & \{u : v(\varphi, u) = \mathbf{t} \text{ y } v(\psi, u) = \mathbf{t}\} \\ & = & \{u : v(\varphi, u) = \mathbf{t}\} \cap \{u : v(\psi, u) = \mathbf{t}\} \\ & = & v_{\mathbf{U}}(\varphi) \cap v_{\mathbf{U}}(\psi). \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcl} v_{\mathbf{U}}(\varphi \vee \psi) & = & \{u : v(\varphi \vee \psi, u) = \mathbf{t}\} \\ & = & \{u : v(\varphi, u) = \mathbf{t} \text{ o } v(\psi, u) = \mathbf{t}\} \\ & = & \{u : v(\varphi, u) = \mathbf{t}\} \cup \{u : v(\psi, u) = \mathbf{t}\} \\ & = & v_{\mathbf{U}}(\varphi) \cup v_{\mathbf{U}}(\psi). \end{array}$$

3. $v_{\mathbf{U}}(\neg p) = -v_{\mathbf{U}}(p)$.

   Sea $u \in v_{\mathbf{U}}(\neg p)$ tal que $u \notin -v_{\mathbf{U}}(p)$, entonces de la definición tenemos que $v(\neg p, u) = \mathbf{t}$ y $v(p, u) = \mathbf{t}$. Como $v(\neg p, u) = \mathbf{t}$, de la definición de P-valuación se tiene que para cada $r \geq u$, $v(p, r) = \mathbf{f}$. Por otro lado como $v(p, u) = \mathbf{t}$ y $r \geq u$ tenemos que $v(p, r) = \mathbf{t}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $v_{\mathbf{U}}(\neg p) \subseteq -v_{\mathbf{U}}(p)$. La otra contención se prueba de forma análoga.

4. $v_{\mathbf{U}}(p \to q)$ es el elemento más grande en A tal que:

$$v_{\mathbf{U}}(p) \cap v_{\mathbf{U}}(p \to q) \subseteq v_{\mathbf{U}}(q).$$

   Veamos primero que $v_{\mathbf{U}}(p) \cap v_{\mathbf{U}}(p \to q) \subseteq v_{\mathbf{U}}(q)$.

   Sea $v \in v_{\mathbf{U}}(p) \cap v_{\mathbf{U}}(p \to q)$ tal que $v \notin v_{\mathbf{U}}(q)$, entonces tenemos que $v(p, v) = \mathbf{t}$, $v(p \to q) = \mathbf{t}$ y $v(q, v) = \mathbf{f}$. Como $v(p, v) = \mathbf{t}$ y $v(q, v) = \mathbf{f}$ se sigue que $v(p \to q) = \mathbf{f}$, entonces $v(p \to q) = \mathbf{f}$ esto último es una contradicción. Por lo tanto $v_{\mathbf{U}}(p) \cap v_{\mathbf{U}}(p \to q) \subseteq v_{\mathbf{U}}(q)$.

   Ahora supongamos que existe un $B \in A$ tal que $v_{\mathbf{U}}(p) \cap B \to v_{\mathbf{U}}(q)$, pero $v_{\mathbf{U}}(p \to q) \subset B$. Entonces existe $r \in P$ tal que $r \in B$, pero $r \notin v_{\mathbf{U}}(p \to q)$, es decir $v(p \to q, r) = \mathbf{f}$, de la definición esto implica que existe $s \in P$ tal que $s \geq r$ y en donde $v(p, s) = \mathbf{t}$ y $v(q, s) = \mathbf{f}$. Como $B \in P$ se sigue que B es cerrado, entonces $s \in B$, también $s \in v_{\mathbf{U}}(p)$. Por lo tanto $s \in v_{\mathbf{U}}(p) \cap B$, lo cual a su vez implica que $s \in v_{\mathbf{U}}(q)$, es decir $v(q, s) = \mathbf{t}$, lo cual es una contradicción.

   Por lo tanto $v_{\mathbf{U}}(p \to q)$ es el elemento más grande en A tal que

$$v_{\mathbf{U}}(p) \cap v_{\mathbf{U}}(p \to q) \subseteq v_{\mathbf{U}}(q).$$

   Claramente la unidad en A es P.

   Por lo tanto $v_{\mathbf{U}}$ es una valuación de $FORM$ en $\mathbf{U}$ y así tenemos:

$$v_{\mathbf{U}}(\varphi) = 1 \text{ si y sólo si } \varphi \text{ es válida en } \underline{K}.$$

$\square$

Teorema 5.2. *Para cualquier modelo algebraico $M = (\mathbf{U}, v_{\mathbf{U}})$ donde $\mathbf{U}$ es un álgebra de Heyting y $v_{\mathbf{U}}$ es una valuación de $FORM$ en $\mathbf{U}$, existe un modelo de Kripke $\underline{K}$ tal que para cualquier fórmula φ,*

$$\varphi \text{ es válida en } \underline{K} \text{ si y sólo si } v_{\mathbf{U}}(\varphi) = 1.$$

Demostración. Sea

$$P = \{\nabla : \nabla \text{ es filtro primo de } A\}.$$

P con la relación de contención es un conjunto parcialmente ordenado.

Definimos una P-valuación v de la siguiente manera:

$$v(p, \nabla) = \mathbf{t} \text{ si y sólo si } v_{\mathbf{U}}(p) \in \nabla.$$

Veamos que la estructura $\langle P, \subseteq, v\rangle$ es un modelo de Kripke.

1. El caso base es inmediato de la definición.

2.
$$\begin{aligned} v(\varphi \wedge \psi, \nabla) = \mathbf{t} \quad & \text{si y sólo si} \quad v_{\mathbf{U}}(\varphi \wedge \psi) \in \nabla \\ & \text{si y sólo si} \quad v_{\mathbf{U}}(\varphi) \wedge v_{\mathbf{U}}(\psi) \in \nabla \\ & \text{si y sólo si} \quad v_{\mathbf{U}}(\varphi) \in \nabla \quad \text{y} \quad v_{\mathbf{U}}(\psi) \in \nabla \\ & \text{si y sólo si} \quad v(\varphi, \nabla) = \mathbf{t} \quad \text{y} \quad v(\psi, \nabla) = \mathbf{t}. \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} v(\varphi \vee \psi, \nabla) = \mathbf{t} \quad & \text{si y sólo si} \quad v_{\mathbf{U}}(\varphi \vee \psi) \in \nabla \\ & \text{si y sólo si} \quad v_{\mathbf{U}}(\varphi) \vee v_{\mathbf{U}}(\psi) \in \nabla \\ & \text{si y sólo si} \quad v_{\mathbf{U}}(\varphi) \in \nabla \quad \text{o} \quad v_{\mathbf{U}}(\psi) \in \nabla \\ & \text{si y sólo si} \quad v(\varphi, \nabla) = \mathbf{t} \quad \text{o} \quad v(\psi, \nabla) = \mathbf{t}. \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} \text{Si } v(\neg\varphi, \nabla) = \mathbf{t}, \quad & \text{entonces} \quad v_{\mathbf{U}}(\neg\varphi) \in \nabla, \\ & \text{entonces} \quad (\forall \nabla_* \leq \nabla \in P)(-v_{\mathbf{U}}(\varphi) = v_{\mathbf{U}}(\neg\varphi) \in \nabla_*), \\ & \text{entonces} \quad (\forall \nabla_* \geq \nabla)(v_{\mathbf{U}}(\varphi) \notin \nabla_*), \\ & \text{entonces} \quad v(\varphi, \nabla_*) = \mathbf{f}. \end{aligned}$$

   Supongamos que $v(\neg\varphi, u) = \mathbf{f}$, entonces $v_{\mathbf{U}}(\neg\varphi) \notin u$, por el Lema 3.81 el filtro generado por u y $v_{\mathbf{U}}(\neg\varphi)$ es propio, por el Lema 3.82 u puede extenderse a un filtro propio primo r. Entonces $u \leq r$ y $v_{\mathbf{U}}(\varphi) \in r$. Por lo tanto existe $r \in P, u \leq r$ y $v(\varphi, v) = \mathbf{t}$.

5. El caso de la implicación se demuestra de forma análoga al de la negación aplicando el Lema 3.82.

Por lo tanto $\underline{K} = \langle P, \subseteq, v\rangle$ es un modelo de Kripke. Notar que la unidad en $\underline{K}$ es P.

Resta verificar que:

$$\varphi \text{ es válida en } \underline{K} \text{ si y sólo si } v_{\mathbf{U}}(\varphi) = 1.$$

[$\Leftarrow$] Supongamos que $v_{\mathbf{U}}(\varphi) = 1$. Como 1 es un elemento de cada filtro, entonces para cada $\nabla \in P$, $v(\varphi, \nabla) = \mathbf{t}$.

[$\Rightarrow$] Supongamos que $v_{\mathbf{U}}(\varphi) \neq 1$. Pero $\{1\}$ es filtro y $v_{\mathbf{U}}(\varphi) \notin \{1\}$. Por el Lema 3.82 el filtro $\{1\}$ se puede extender a un filtro primo ∇_p tal que $v_{\mathbf{U}}(\varphi) \notin \nabla_p$. Por lo tanto $\nabla_p \in P$ y $v(\varphi, \nabla_p) = \mathbf{f}$. $\square$

La construcción de $v_{\mathbf{U}}$ a partir de v en el Teorema 5.1 es biunívoca por lo tanto dada cualquier valuación en $\mathbf{U}$ esta se puede traducir en una P-valuación en $\underline{K}$ de manera análoga. Por lo tanto tenemos como corolario del Teorema 5.1 que:

Corolario 5.3. *Para cualquier marco de Kripke $\underline{P}$, existe un álgebra de Heyting $\mathbf{U}$ tal que para cualquier fórmula φ,*

$$\varphi \text{ es válida en } \underline{P} \text{ si y sólo si } \varphi \text{ es válida en } \mathbf{U}.$$

Por el contrario la definición de la P-valuación en la construcción del Teorema 5.2 no nos permite dada una P-valuación arbitraria en $\underline{K}$ obtener una valuación en $\mathbf{U}$, pues la relación entre ellas no se basa en la construcción de las fórmulas si no en los filtros primos. Por ello del Teorema 5.2 únicamente podemos obtener como corolario que:

Corolario 5.4. *Para cualquier álgebra de Heyting $\mathbf{U}$, existe un marco de Kripke $\underline{P}$ tal que para cualquier fórmula φ,*

$$\text{Si } \varphi \text{ es válida en } \underline{P} \text{ entonces } \varphi \text{ es válida en } \mathbf{U}.$$

No sabemos cuándo el recíproco del Corolario 5.4 se tiene y cuando en efecto una lógica intermedia tiene un modelo de Kripke. Pero demostraremos que si $\mathbf{U} = (A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$ es un álgebra de Heyting en donde A es finito, entonces el recíproco se cumple. Esto implica que cualquier lógica intermedia finita tiene un modelo de Kripke.

Definición 5.5. *Sean $\underline{K} = (P, \leq, v)$ un modelo de Kripke y $\mathbf{U} = (A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$ un álgebra de Heyting. Denotamos por:*

$\mathbf{U}_{\underline{K}}$ el álgebra de Heyting construida de un modelo de Kripke $\underline{K}$ como en el Teorema 5.1.

$\underline{K}_{\mathbf{U}}$ el modelo de Kripke construido de un álgebra de Heyting $\mathbf{U}$ como en el Teorema 5.2.

Observación 5.6. *Del Corolario 5.3 sabemos que*

$$\varphi \text{ es válida en } \underline{K}_{\mathbf{U}} \text{ si y sólo si } \varphi \text{ es válida en } \mathbf{U}_{\underline{K}_{\mathbf{U}}}.$$

Proposición 5.7. *Sean $\mathbf{U} = (A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$ y $\mathbf{U}_{\underline{K}_{\mathbf{U}}} = (A', \vee', \wedge', \rightarrow', 0)$ álgebras de Heyting, definimos una función $h : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}_{\underline{K}_{\mathbf{U}}}$ de la siguiente manera:*

$$h(a) = \{\nabla : a \in \nabla \text{ y } \nabla \in \mathcal{T}(A)\},$$

entonces h es un homomorfismo de $\mathbf{U}$ en $\mathbf{U}_{\underline{K}_{\mathbf{U}}}$.

Demostración. Sean $a, b \in A$, entonces

1. $h(a \wedge b) = h(a) \wedge' h(b)$.

   [$\subseteq$] Sea $\nabla \in h(a \wedge b)$ entonces $a \wedge b \in \nabla$ además sabemos que $a \wedge b \leq a$ y $a \wedge b \leq b$. Como ∇ es un filtro esto implica que $a \in \nabla$ y $b \in \nabla$ esto a su vez significa que $\nabla \in h(a)$ y $\nabla \in h(b)$. Así $\nabla \in h(a) \wedge' h(b)$.

   [$\supseteq$] Sea $\nabla \in h(a) \wedge' h(b)$, entonces $\nabla \in h(a)$ y $\nabla \in h(b)$ esto implica que $a \in \nabla$ y $b \in \nabla$, dado que ∇ es filtro se tiene que $a \wedge b \in \nabla$, entonces $\nabla \in h(a \wedge b)$.

2. $h(a \vee b) = h(a) \vee' h(b)$.

   [$\subseteq$] Sea $\nabla \in h(a \vee b)$, entonces $a \vee b \in \nabla$ y como ∇ es filtro primo esto implica que $a \in \nabla$ o $b \in \nabla$, entonces $\nabla \in h(a)$ o $\nabla \in h(b)$. Así $\nabla \in h(a) \vee' h(b)$.

   [$\supseteq$] Sea $\nabla \in h(a) \vee' h(b)$, entonces $\nabla \in h(a)$ o $\nabla \in h(b)$ además sabemos que $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$. En ambos casos se tiene $a \vee b \in \nabla$. Así $\nabla \in h(a \vee b)$.

3. $h(\neg a) = -'h(a)$.

   Sea $\nabla \in h(\neg a)$ tal que $\nabla \notin -'h(a)$, esto implica que $v(\neg a, \nabla) = \mathbf{t}$ y $v(a, \nabla) = \mathbf{t}$ de esta ultima ecuación tenemos que para cada $\nabla_* \geq \nabla$, $v(a, \nabla_*) = \mathbf{f}$, entonces $v(\neg a \wedge a, \nabla) = \mathbf{t}$, pero esto es $v(\perp, \nabla) = \mathbf{t}$ es una contradicción.

   Por otro lado sea $\nabla \in -'h(a)$ tal que $\nabla \notin h(\neg a)$, entonces $v(a, \nabla) = \mathbf{f}$ y $v(\neg a, \nabla) = \mathbf{f}$ de esta última tenemos que para cada ∇_* tal que $\nabla_* \geq \nabla$, $v(a, \nabla_*) = \mathbf{t}$, en particular para $\nabla \geq \nabla$ se tiene que $v(a, \nabla) = \mathbf{t}$, esto nos da una contradicción.

4. $h(a \to b) = h(a) \to' h(b)$.

   Veamos que $h(a \to b)$ es el elemento más grande tal que

   $$h(a) \wedge h(a \to b) \leq h(b).$$

   Sea $\nabla \in h(a) \wedge h(a \to b)$, entonces $\nabla \in h(a)$ y $\nabla \in h(a \to b)$ esto a su vez implica que $a \in \nabla$ y $a \to b \in \nabla$ y dado que ∇ es filtro se tiene que $a \wedge (a \to b) \in \nabla$ más aún sabemos que $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$ y nuevamente como ∇ es filtro se cumple que $b \in \nabla$, es decir $\nabla \in h(b)$.

   Ahora supongamos que existe $h(z)$ en P_{M_p} tal que $h(a) \wedge h(z) \leq h(b)$ pero $h(a \to b) \lneq h(z)$, entonces existe $\nabla \in \mathcal{T}(A)$ tal que $\nabla \in h(z)$, pero ∇ no pertenece a $h(a \to b)$, entonces $z \in \nabla$ y $a \to b \notin \nabla$.

   Sea
   $$\nabla^* = \{a_0 \in A : a_0 \geq a \wedge c \text{ para algún } c \in u\},$$
   el filtro generado por ∇ y a que no contiene a b.

Claramente $z \in \nabla^*$. Veamos que ∇^* es filtro primo.

Sean $c, d \in P$ con $c \vee d \in \nabla^*$, esto implica que $c \vee d \geq a \wedge k$ para algún $k \in u$, entonces $c \geq a \wedge k$ o $d \geq a \wedge k$. Así $c \in \nabla^*$ o $d \in \nabla^*$.

Por lo tanto $\nabla \in h(a) \wedge h(z)$, de esto se implica que $\nabla \in h(b)$, es decir $b \in \nabla^*$ esto es una contradicción pues b no esta en el filtro primo generado por ∇ y a.

$\square$

Lema 5.8. *Sea* $\mathbf{U} = (A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0)$ *un álgebra de Heyting tal que* A *es finito, entonces el homomorfismo* $h : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}_{\underline{K}_{\mathbf{U}}}$ *de la Proposición 5.7 es sobreyectivo.*

Demostración. Sea N un elemento en $\mathbf{U}_{\underline{K}_{\mathbf{U}}}$. Entonces $N \subseteq P$ cerrado, en donde P es la clase de todos los filtros primos de A. Decimos que un elemento f en N es minimal, si para cualquier g en N tal que $g \leq f$, entonces, $g = f$. Dado que A es finito, entonces N es finito. Por lo tanto para cualquier $g \in N$, existe un elemento minimal f tal que $f \leq g$.

Sean $f_1, f_2, \ldots, f_k$ todos los elementos minimales en N.

Para $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, definimos

$$u_i = \{g : f_i \leq g \text{ y } g \in \mathcal{T}(A)\}.$$

Afirmación: $N = \bigvee_{i=1}^{k} u_i$, pues $N \in \mathbf{U}_{\underline{K}_{\mathbf{U}}}$

Sea $f_i = \{a_{ij} : j \in \{1, 2, \ldots, n_i\}\}$, entonces denotamos por $(f_i)_* = \bigwedge_{j=1}^{n_i} a_{ij}$.

Afirmación: $g \in u_i$ si y sólo si $(f_i)_* \in g$.

[$\Rightarrow$] Supongamos que $g \in u_i$, entonces $f_i \leq g$ y $g \in \mathcal{T}(A)$ esto implica que para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$, $a_{ij} \in g$. Así $\bigwedge_{j=1}^{n_i} a_{ij} \in g$. Por lo tanto $(f_i)_* \in g$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $(f_i)_* \in g$. Veamos que $f_i \leq g$ y $g \in \mathcal{T}(A)$.

Como $g \in N$, entonces g es un filtro primo en A. Por lo tanto $g \in \mathcal{T}(A)$.

Sea $b \in f_i$, entonces $b = a_{ij}$ para algún $j \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$. Como

$$(f_i)_* = \bigwedge_{j=1}^{n_i} a_{ij} \leq a_{ij}$$

y g es un filtro esto implica que $b = a_{ij} \in g$. Por lo tanto hemos verificado que $f_i \leq g$.

Hemos verificado que $h((f_i)_*) = u_i$.

Por lo tanto

$$h(\bigvee_{i=1}^{k} (f_i)_*) = \bigvee_{i=1}^{k} h((f_i)_*) = \bigvee_{i=1}^{k} u_i = u.$$

$\square$

Corolario 5.9. *Para cualquier álgebra de Heyting finita* $\mathbf{U}$, *existe un modelo de Kripke* $\underline{K}$ *tal que para cualquier fórmula* φ,

$$\textit{Si } \varphi \textit{ es válida en } \mathbf{U} \textit{ entonces } \varphi \textit{ es válida en } \underline{K}.$$

Conclusión

La Lógica Intuicionista, es un sistema lógico desarrollado por Arend Heyting para proveer de una base formal al proyecto intuicionista de Brouwer. El sistema enfatiza las pruebas, en vez de la verdad, rechaza el principio del tercero excluido, pero conserva el principio de explosión. Esto se debe a que si enfatizamos las pruebas en vez de la verdad, entonces en los conjuntos infinitos el principio del tercero excluido falla cuando se aplica a una proposición para la que no existe demostración ni de su verdad ni de su falsedad.

Una Lógica Súper Intuicionista es una lógica proposicional que extiende a la Lógica Intuicionista. La Lógica Clásica es la Lógica Súper Intuicionista consistente más fuerte. Así, las Lógicas Súper Intuicionistas consistentes son llamadas Lógicas Intermedias.

Existe un continuo de diferentes Lógicas Intermedias. Una Lógica Intermedia se puede construir a partir de agregar uno o más axiomas la Lógica Intuicionista.

Ejemplos de Lógicas Intermedias son:

Lógica Clásica	**Cl**
Lógica de Jankov	**Jn**
Lógica de Scott	**St**
Lógica Anti-Scott	**Ast**
Lógica de Dummett	**LC**
Lógica de Kreisel-Putnam	**KP**
Lógica de Medvedev	**MV**
Lógica de Rombos	**RH**

Las herramientas para estudiar a las Lógicas Intermedias son similares a aquellas usadas para la Lógica Intuicionista. Se estudiarón las semánticas de una amplia familia de lógicas, especialmente lógicas axiomatizadas por fórmulas en una variable.

Por otro lado de manera general se estudiarón las Lógicas Intermedias y sus caracterizaciones semánticas a este respecto tenemos que:

1. Dada un álgebra de Heyting, el conjunto de fórmulas que son válidas en

el álgebra es una Lógica Intermedia. Recíprocamente si damos una Lógica Intermedia es posible construir el álgebra de Lindenbaum-Tarski que es un álgebra de Heyting. Y así obtenemos una semántica algebraica para las Lógicas Intermedias.

2. Un marco de Kripke es un conjunto parcialmente ordenado y un modelo de Kripke es un marco de Kripke dotado de una valuación. El conjunto de fórmulas que son válidas en el marco de Kripke es una Lógica Intermedia. Y dada una Lógica Intermedia es posible construir una clase modelos de Kripke en donde la lógica es descrita por esa clase de marcos.

En nuestro resultado principal hemos mostrado que toda Lógica Intermedia finita tiene un modelo basado en marcos de Kripke.

Concluimos que toda Lógica Proposicional Intermedia posee una semántica algebraica y si la Lógica Proposicional Intermedia es finita entonces posee una semántica basada en marcos de Kripke y es importante mencionar que el caso general aún es una pregunta abierta.

Con el trabajo realizado en esta tesis se logra dar una panorámica de las Lógicas Proposicionales Intermedias y se sientan las bases para atacar el problema general.

Parte del trabajo futuro es obtener un resultado genérico que describa por qué no es posible caracterizar una lógica intermedia vía semántica de Kripke.

Apéndice A

Lógicas de Gödel

Recordemos que las lógicas de Gödel, están definidas por:

$$\mathbf{G}_n := \mathbf{Int} + ((p \to q) \vee (q \to p)) + \mathbf{bd}_n, (n \geq 1).$$

Para definir la semántica algebraica que caracteriza a las lógicas de Gödel definiremos primero un Aro, para un estudio más exhaustivo acerca del tema se puede consultar [2] y [6].

Definición A.1. *Un* ***Aro*** *es un álgebra* $\mathbf{A} = (A, \to, \cdot, 1)$ *tal que:*

Ar1. $(A, \cdot, 1)$ *es un monoide conmutativo.*

Ar2. *Para todo* $x, y, z \in A$ *se cumple que:*

- $(x \to x) = 1$.
- $x \cdot (x \to y) = y \cdot (y \to x)$.
- $x \to (y \to z) = (x \cdot y) \to z$.

Proposición A.2. *Sea* $\mathbf{A} = (A, \to, \cdot, 1)$ *un Aro, entonces :*

1. $(A, \cdot, 1)$ *es un monoide conmutativo parcialmente ordenado con una operación residual "$\to$", donde el orden es definido de la siguiente manera, para cada* $a, b, c \in A$*:*
$$a \leq b \text{ si y sólo si } (a \to b) = 1$$
y la operación residual cumple que:
$$a \cdot b \leq c \text{ si y sólo si } a \leq (b \to c).$$

2. *El orden parcial en cualquier Aro es una semiretícula*[1] *ordenada, en donde* $a \wedge b = a(a \to b)$.

[1] Una semiretícula es un semigrupo $(A, \cdot)$ que satisface la ley conmutativa y la ley de idempotencia: $x \cdot x \approx x$.

3. Para cualquier $a, b, c \in A$ se cumplen las siguientes propiedades:

- $(1 \to a) = a$.
- $(a \to 1) = 1$.
- $(a \to b) \leq (c \to a) \to (c \to b)$.
- $a \leq (b \to a)$.
- $a \leq (a \leq b) \to b$.
- $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$.
- $(a \to b) \leq (b \to c) \to (a \to c)$.
- $a \leq b$ *implica que* $(b \to c) \leq (a \to c)$ *y* $(c \to a) \leq (c \to b)$.

Definición A.3. *Un **Aro acotado** es un álgebra $\mathbf{A} = (A, \to, \cdot, 0, 1)$ que cumple lo siguiente:*

1. $(A, \to, \cdot, 1)$ es un Aro,

2. Para cada $a \in A$, $0 \leq a$.

Definición A.4. *Una álgebra $\mathbf{A}$ es un producto subdirecto de una familia indexada de álgebras $(\mathbf{A})_{i \in I}$ si:*

1. $\mathbf{A} \leq \prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$

2. $\pi_i(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_i$, para cada $i \in I$.

Definición A.5. *Un **Aro básico** es un producto subdirecto de Aros totalmente ordenados.*

Observación A.6. *Como se puede ver en [1] tenemos que los Aros básicos forman una variedad axiomatizada, relativa a Aros, por la ecuación:*

$$(x \to y) \to z \leq ((y \to x) \to z) \to z.$$

Definición A.7. *Una **BL-álgebra** es un Aro básico acotado.*

Definición A.8. *Una **álgebra de Gödel** es una **BL**-álgebra que satisface la ecuación $x \cdot x = x$, para cada $x \in A$.*

Las variedades de **BL**-álgebras, álgebras de Gödel y Aros básicos se denotan mediante $\mathcal{BL}$, $\mathcal{G}$ y $\mathcal{BH}$, respectivamente. Por el Teorema de Birkhoff 3.44 estas variedades son clases ecuacionales, por la Proposición 3.93 $L_{\mathcal{BL}}$, $L_{\mathcal{G}}$ y $L_{\mathcal{BH}}$ son lógicas intermedias.

Apéndice B

No toda Álgebra de Heyting es un Álgebra de Boole

Analicemos algunas definiciones topológicas para definir dicha álgebra.

Definición B.1.

T1: *Una **topología** en un conjunto X es una familia T de subconjuntos de X que satisface:*

1. $\emptyset$, $X \in T$.
2. *Si* $U, V \in \tau$, *entonces* $U \cap V \in T$.
3. *Si* $\{U_i\}_{i \in I}$, *entonces* $\bigcup_{i \in I} U_i \in T$.

T2: *Si T es una topología en X a la pareja (X, T) le llamamos **espacio topológico** y a los elementos que pertenecen a T, conjuntos abiertos.*

Ejemplo B.2. *Sea X cualquier conjunto.*

1. *La colección de todos los conjuntos de X, $\mathcal{P}(X)$ satisfacen los axiomas que satisfacen una topología. A esta topología le llamamos la topología discreta y al conjunto de X con esta topología, espacio discreto.*

2. *La colección $\{\emptyset, X\}$ es una topología para X. A esta familia le llamamos la topología indiscreta y al conjunto X con esta topología le llamamos espacio indiscreto.*

Definición B.3. *Sean (X, T) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces el **interior** de A, (Int(A)), se define como:*

$$Int(A) = \bigcup \{U \in T : U \subseteq A\}.$$

Proposición B.4. *Sea* (X, T) *un espacio topológico. Entonces* $(T, \wedge, \vee, \rightarrow)$ *es un álgebra de Heyting, donde* $\wedge$ *y* $\vee$ *son la intersección y unión de conjuntos,* $\emptyset$ *es su elemento mínimo y* $\rightarrow$ *está dada por:*

$$A \rightarrow B := Int(-A \cup B).^1$$

Para una prueba de esta proposición véase [17].

Observación B.5. *El álgebra que se construyó en la proposición anterior es llamada álgebra de Heyting topológica que resulta no ser un álgebra booleana, a menos que la topología* T *sea la topología discreta.*

En efecto si tomamos $A \in T$ tal que $-A \notin T$, entonces $Int(-A) \neq -A$, esto implica que $Int(-A) \not\supseteq -A$. Luego recordemos que $\neg A = A \rightarrow \perp$, en este caso $A \rightarrow \perp = Int(-A \cup \emptyset) = Int(-A)$ y tenemos que:

$$\neg\neg A = Int(-Int(-A)) \subseteq -Int(-A) \not\subseteq - - A = A = Int(A).$$

Por lo tanto no se verifica que para cada $A \in T$, $\neg\neg A = A$ y así dicha álgebra no es un álgebra de Boole.

[1] El símbolo $-$ denota el complemento usual de conjuntos.

Apéndice C

Semántica de Kripke para St y Ast

Proposición C.1. *Sea* $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ *un marco de Kripke de profundidad finita, éste será un marco para* **St** *si y sólo si para todo* $\alpha \in P$ *y* $\delta, \gamma \in Fin(\alpha)$*,* δ *y* γ *están conectados prefinalmente en* $\underline{P}_{\alpha}$*.*

Demostración.

[$\Rightarrow$] Supongamos que existe $\alpha \in P$ tal que δ, $\gamma \in Fin(\alpha)$ son tales que no están conectados prefinalmente en $\underline{P}_{\alpha}$. Por la Observación 4.109 únicamente es necesario considerar el caso en donde para cualquier punto no final $\beta \geq \alpha$ y cada punto final $\delta^* \in Fin(\beta)$ existe un punto prefinal λ tal que $\beta \leq \lambda < \delta^*$.

Sea Φ el conjunto de todos los puntos finales ξ de $\underline{P}_{\alpha}$ que están conectados prefinalmente con γ ($\gamma \in \Phi$ y $\delta^* \notin \Phi$).

Se define el mapeo h entre $\underline{P}_{\alpha}$ y $\underline{P}_{\sigma_5}$ como:

- Si ρ es un punto final de $\underline{P}_{\alpha}$.

$$\begin{array}{lll} h(\rho) = \sigma_1 & \text{si} & \rho \in \Phi \\ h(\rho) = \sigma_2 & \text{si} & \rho \notin \Phi \end{array}$$

- Si ϵ es un punto no final de $\underline{P}_{\alpha}$.

$$\begin{array}{lll} h(\epsilon) = \sigma_3 & \text{si} & Fin(\epsilon) \subseteq \Phi \\ h(\epsilon) = \sigma_2 & \text{si} & Fin(\epsilon) \cap \Phi = \emptyset \\ h(\epsilon) = \sigma_5 & & \text{en otro caso} \end{array}$$

Veamos que h es un p-morfismo.

(i) h es sobreyectivo.

$$\begin{array}{lll} h(\alpha) & = & \sigma_5 \\ h(\beta) & = & \sigma_2 \\ h(\gamma) & = & \sigma_1 \\ h(\delta) & = & \sigma_2 \\ h(\lambda) & = & \sigma_3 \end{array}$$

(ii) h preserva el orden.

Supongamos que $\mu, \kappa \in \underline{P}_{\alpha}$ tales que $\mu \leq \kappa$.

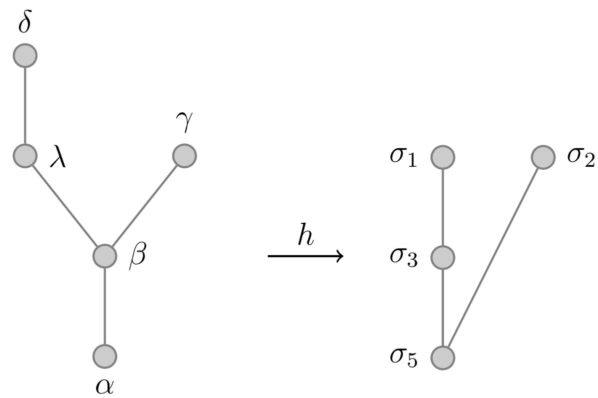

Figura C.1: p-morfismo de P_α en P_{σ_5}.

Caso 1. Si κ es un punto final entonces $h(\kappa) = \sigma_1$ o $h(\kappa) = \sigma_2$.

(a) Si μ es un punto final entonces κ y μ están prefinalmente conectados. Por lo tanto $h(\mu) = \sigma_1$ o $h(\mu) = \sigma_2$, respectivamente.

(b) Si μ no es un punto final entonces varios casos:

- Si $Fin(\mu) \subseteq \Phi$, entonces $h(\mu) = \sigma_3$, pero como κ es final y $\mu \leq \kappa$, esto implica que $\kappa \in \Phi$ por lo tanto $h(\kappa) = \sigma_1$ y así $h(\mu) \leq h(\kappa)$.
- $Fin(\mu) \cap \Phi = \emptyset$, entonces $h(\mu) = \sigma_2$ pero dado que $\mu \leq \kappa$, esto implica que $\kappa \notin \Phi$ y así $h(\kappa) = \sigma_2$ y efectivamente $h(\mu) \leq h(\kappa)$.
- Existen δ' y γ' finales tales que $\mu \leq \delta'$, $\mu \leq \gamma'$ y $\gamma' \in \Phi$ y $\delta' \notin \Phi$. Luego tenemos que si κ está conectado prefinalmente con δ' entonces $h(\kappa) = \sigma_2$ y si κ está conectado prefinalmente con γ', esto implica que $h(\kappa) = \sigma_1$ en cualquier caso $h(\mu) \leq h(\kappa)$.

Caso 2. Si κ no es un punto final, entonces tenemos varios casos:

(a) Si $Fin(\kappa) \subseteq \Phi$, entonces $h(\kappa) = \sigma_3$. Como $\mu \leq \kappa$ entonces μ no es final y existen varios casos:

- Si $Fin(\mu) \subseteq \Phi$, entonces $h(\mu) = \sigma_3$.
- No es posible que $Fin(\mu) \cap \Phi = \emptyset$.
- Si existen $\delta', \gamma' \in Fin(\mu)$ tal que $\delta' \in \Phi$ y $\gamma' \in \Phi$, entonces $h(\mu) = \sigma_5$.

Por lo tanto en todos los casos $h(\mu) \leq h(\kappa)$.

(b) Si $Fin(\mu) \cap \Phi = \emptyset$, entonces $h(\kappa) = \sigma_2$. Como $\mu \leq \kappa$, entonces μ no es final tenemos varios casos:

- No es posible que $Fin(\mu) \subseteq \Phi$ ya que $Fin(\kappa) \neq \emptyset$ además $Fin(\kappa) \subseteq Fin(\mu)$ y $Fin(\kappa) \subseteq \Phi^c$.
- Si $Fin(\kappa) \cap \Phi = \emptyset$, entonces $h(\mu) = \sigma_2$.
- Si existen δ', $\gamma' \in Fin(\mu)$ y δ', $\gamma' \in \Phi$, entonces $h(\mu) = \sigma_5$.

En todos los casos $h(\mu) \leq h(\kappa)$.

(c) Si existen $\delta^{'}$, $\gamma^{'} \in Fin(\kappa)$ y $\delta^{'} \notin \Phi$ y $\gamma^{'} \in \Phi$ como $\mu \leq \kappa$, entonces $\delta^{'}$, $\gamma^{'} \in Fin(\mu)$ y así $h(\mu) = h(\kappa) = \sigma_5$.

(iii) h es abierta.

Supongamos que $h(\alpha) \leq \gamma$, tenemos varios casos:

Caso 1. Si $\sigma = \sigma_1$, entonces:

(a) Si $h(\alpha) = \sigma_1$, el punto que sirve es el mismo α.

(b) Si $h(\alpha) = \sigma_3$, entonces $Fin(\alpha) \subseteq \Phi$, luego existe un punto $\gamma^{'}$ final el cual esta prefinalmente conectado con γ, como $\gamma^{'}$ es final y accesible desde α, $\alpha \leq \gamma^{'}$ y $h(\gamma^{'}) = \sigma_1$.

Caso 2. Si $\sigma = \sigma_2$, entonces:

(a) Si $h(\alpha) = \sigma_2$, entonces el punto α sirve como preimagen de σ_2.

(b) Si $h(\alpha) = \sigma_5$, entonces $Fin(\alpha) \cap \Phi^c \neq \emptyset$. Por lo tanto existe un punto final $\delta^{'}$ prefinalmente conectado con δ luego $\alpha \leq \delta^{'}$ y $h(\delta^{'}) = \sigma_2$ ya que $\delta^{'} \notin \Phi$ de lo contrario tendríamos que $\delta^{'}$ está conectado prefinalmente con δ y con γ, luego δ y γ estarían conectados prefinalmente.

Caso 3. Si $\sigma = \sigma_3$, entonces:

(a) Si $h(\alpha) = \sigma_3$ es inmediato tomando el mismo α como preimagen de σ_3.

(b) Si $h(\alpha) = \sigma_5$, entonces $Fin(\alpha) \cap \Phi = \emptyset$ por lo tanto existe un punto final $\gamma^{'} \in Fin(\alpha)$, luego como el marco es de profundidad finita tenemos que existe $\gamma^{''}$ tal que $\alpha \leq \gamma^{''} < \gamma$.
Si $\gamma^{''}$ no es prefinal por la Observación 4.109, $\underline{P}_{\alpha}$ no es un marco para **St**.
Si $\gamma^{''}$ es prefinal, entonces $Fin(\gamma^{''}) \subseteq \Phi$, de esto tenemos que $h(\gamma) = \sigma_3$.

Caso 4. Si $\sigma = \sigma_5$, entonces $h(\alpha) = \sigma_5$ y el mismo α sirve como preimagen de σ_5.

Por lo tanto h es un p-morfismo de $\underline{P}_{\alpha}$ en $\underline{P}_{\sigma_5}$ y como $P_{\sigma_5} \nvDash \mathbf{nf}_6$, entonces por la Proposición 4.68 $\underline{P}_{\alpha} \nvDash \mathbf{nf}_6$. Por lo tanto $\underline{P}$ no es un marco para **St**.

[$\Leftarrow$] Veamos que si $\underline{P}$ no es un marco para **St**, entonces existen $\delta, \gamma \in Fin(\alpha)$ para algún $\alpha \in P$ y tales que no están conectados prefinalmente.

Supongamos que $\underline{P}$ no es un marco para **St** entonces existe un punto $\alpha \in P$ tal que $(\underline{P}, \alpha) \nvDash \mathbf{nf}_6$, es decir, $(\underline{P}, \alpha) \nvDash \mathbf{nf}_5 \rightarrow \mathbf{nf}_3 \vee \mathbf{nf}_2$, es decir existe $\beta \geq \alpha$ tal que:

$$
\begin{aligned}
(\underline{P}, \beta) &\models \mathbf{nf}_5 && \text{(C.1)}\\
(\underline{P}, \beta) &\not\models \mathbf{nf}_3 \text{ y} && \text{(C.2)}\\
(\underline{P}, \beta) &\not\models \mathbf{nf}_2 && \text{(C.3)}
\end{aligned}
$$

De la condición (C.2) tenemos que existe $\beta' \geq \beta$ tal que $(\underline{P}, \beta') \models \neg p$.
De la condición (C.3) tenemos que existe $\delta \geq \beta$ tal que $(\underline{P}, \delta) \models p$.
Sea $h : P_\beta \to P_{\sigma_5}$ definida por:

$$h(\beta) = \sigma_5$$

$$
\begin{cases}
h(\beta') = \sigma_2 & \text{si} \quad (P, \beta) \not\models \mathbf{nf}_1 \quad \text{y} \quad (P, \beta') \models \mathbf{nf}_2\\
h(\gamma) = \sigma_3 & \text{si} \quad (P, \gamma) \not\models \mathbf{nf}_1 \quad \text{y} \quad (P, \gamma) \models \mathbf{nf}_3\\
h(\delta) = \sigma_1 & \text{si} \quad (P, \delta) \models \mathbf{nf}_1
\end{cases}
$$

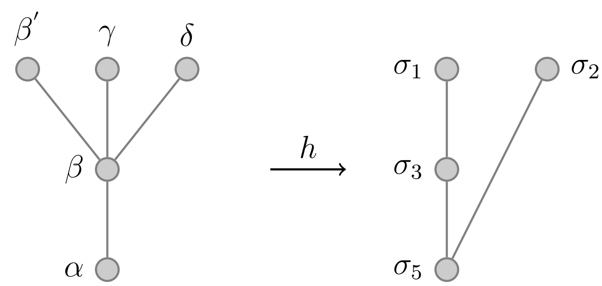

Figura C.2: p-morfismo de P_β en P_{σ_5}.

Veamos que h es un p-morfismo.

(i) h está bien definida.

Si $\epsilon \in P_\beta$ tenemos varios casos:

Caso 1. Si $\epsilon = \beta$, entonces $h(\epsilon) = \sigma_5$.

Caso 2. Si ϵ es tal que $(\underline{P}, \epsilon) \models \mathbf{nf}_1$, entonces $h(\epsilon) = \sigma_1$ y no puede ocurrir algún otro caso.

Caso 3. Si ϵ es tal que $(\underline{P}, \epsilon) \not\models \mathbf{nf}_1$ tenemos varios subcasos:

(a) Si $(\underline{P}, \epsilon) \models \mathbf{nf}_3$, entonces $h(\epsilon) = \sigma_3$ y no puede ocurrir algún otro caso.

(b) Si $(\underline{P}, \epsilon) \not\models \mathbf{nf}_3$, entonces como $\epsilon > \beta$ y $(\underline{P}, \beta) \models \mathbf{nf}_5$ también $(\underline{P}, \epsilon) \models \neg\neg p \to p$, de esto se sigue que $(\underline{P}, \epsilon) \models \neg p \vee p$, pero $(\underline{P}, \epsilon) \models \neg p$, es decir $(\underline{P}, \epsilon) \models \mathbf{nf}_2$.

Por lo tanto $h(\epsilon) = \sigma_2$.

(ii) h es sobreyectiva.

Tenemos que $h(\beta) = \sigma_5$, entonces por C.2 y C.3 existen $\beta^{'}$ y δ tales que $h(\beta^{'}) = \sigma_2$ y $h(\delta) = \sigma_1$. $\beta \neq \beta^{'} \neq \delta$. Además tenemos que $(\underline{P}, \beta) \not\models \neg p$ pues existe $\delta \geq \beta$ tal que $(\underline{P}, \delta) \models p$. También tenemos que $(\underline{P}, \beta) \not\models p$ pues existe $\beta^{'} \geq \beta$ tal que $(\underline{P}, \beta^{'}) \not\models p$. Además como $\mathbf{nf}_5 = (\neg\neg p \to p) \to (\neg p \vee p)$, $(\underline{P}, \beta) \models (\neg\neg p \to p) \to (\neg p \vee p)$. Como $(\underline{P}, \beta) \not\models \neg p \vee p$, entonces se tiene que $(\underline{P}, \beta) \not\models \neg\neg p \to p$ pues existe $\gamma \geq \beta$, $(\underline{P}, \gamma) \models \neg\neg p$ y $(\underline{P}, \gamma) \not\models p$. Particularmente $h(\gamma) = \sigma_3$.

(iii) h preserva el orden.

Supongamos que $\mu \leq \chi$ entonces tenemos varios casos:

Caso 1. Si $\mu = \chi$, entonces $h(\mu) = h(\chi)$ y no hay algo que probar.

Caso 2. Si $\mu < \chi$, tenemos a su vez varios casos:

(a) Si $h(\mu) = \sigma_1$, entonces $(\underline{P}, \mu) \models \mathbf{nf}_1$ y $(\underline{P}, \chi) \models \mathbf{nf}_1$. Por lo tanto $h(\chi) = \sigma_1$.

(b) Si $h(\mu) = \sigma_2$, entonces $(\underline{P}, \mu) \not\models \mathbf{nf}_1$ y $(\underline{P}, \mu) \models \mathbf{nf}_2$, luego $(\underline{P}, \chi) \not\models \mathbf{nf}_1$ y $(\underline{P}, \chi) \models \mathbf{nf}_2$. Por lo tanto $h(\chi) = \sigma_2$.

(c) Si $h(\mu) = \sigma_3$, entonces $(\underline{P}, \mu) \models \mathbf{nf}_1$ y $(\underline{P}, \mu) \models \mathbf{nf}_3$, así en principio si $(\underline{P}, \chi) \models \mathbf{nf}_3$, si $(\underline{P}, \chi) \models \mathbf{nf}_1$, entonces $h(\chi) = \sigma_1$ y si $(\underline{P}, \chi) \not\models \mathbf{nf}_1$, entonces $h(\chi) = \sigma_3$.

(d) Si $h(\mu) = \sigma_5$, entonces para cualquier χ se tiene que $h(\mu) \leq h(\chi)$.

(iv) h es abierta.

Supongamos que $h(\alpha) \leq \sigma$.

(a) Si $h(\alpha) = \sigma$, entonces α nos sirve como preimagen.

(b) Si $h(\alpha) < \sigma$, tenemos varios casos:

- Si $h(\alpha) = \sigma_3$, entonces $(\underline{P}, \alpha) \models \mathbf{nf}_3$ y $(\underline{P}, \alpha) \not\models \mathbf{nf}_1$ esto implica que para cada $\alpha^{'} \geq \alpha$ $(\underline{P}, \alpha^{'}) \not\models \mathbf{nf}_2$ de esto último se tiene que existe $\alpha^{''} > \alpha^{'}$ tal que $(\underline{P}, \alpha^{''}) \models \mathbf{nf}_1$ y así $h(\alpha^{''}) = \sigma_1$.
- Si $h(\alpha) = \sigma_5$, entonces $\alpha = \beta$ y por C.3 existe $\delta > \beta$ tal que $(\underline{P}, \delta) \models \mathbf{nf}_1$, luego $h(\delta) = \sigma_1$.
- Si $\sigma = \sigma_2$, entonces $h(\alpha) = \sigma_5$, esto implica que $\alpha = \beta$ por C.2 existe $\beta^{'} \geq \beta$ tal que $(\underline{P}, \beta^{'}) \not\models \neg\neg p$, entonces existe $\beta^{''} \geq \beta^{'}$ tal que $(\underline{P}, \beta^{''}) \models \neg p$, esto es $h(\beta^{''}) = \sigma_2$.
- Si $\sigma = \sigma_3$, entonces $h(\alpha) = \sigma_5$, esto implica que $\alpha = \beta$ pero por el caso donde se verifica que h es sobreyectiva y que existía un punto cuya imagen era σ_3, encontramos que existe $\gamma \geq \beta$ tal que $(\underline{P}, \gamma) \models \mathbf{nf}_3$, luego $h(\gamma) = \sigma_3$.

Por lo tanto P_β es h-reducible a P_{σ_5} y como se observa en la escalera de Nishimura los puntos σ_1 y σ_2 no están conectados prefinalmente. $\square$

Proposición C.2. *Sea $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ un marco de profundidad finita, $\underline{P}$ es un marco para* **Ast** *si y sólo si para cada $\alpha \in P$ si α no es un punto final de $\underline{P}$, entonces satisface alguna de las condiciones:*

1. *Para todo sucesor inmediato δ de α, $|Fin(\delta)| = 1$.*
2. *Para cualquier par de sucesores inmediatos β y γ si β y γ no son puntos finales, entonces $Fin(\beta) = Fin(\gamma)$.*

Demostración.
[⇒] (Contrarrecíproca) Supongamos que existe un punto no final α tal que no satisface *1* y no satisface *2*, entonces:

(A) De *1* tenemos que existe un sucesor inmediato de α digamos δ tal que $|Fin(\delta)| \geq 2$.

(B) De *2* tenemos que existen dos sucesores inmediatos de α digamos β y γ no finales tales que $Fin(\beta) \neq Fin(\gamma)$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe un punto $\varphi_0 \in \underline{P}_\alpha$ tal que $\varphi_0 \in Fin(\beta)$ y $\varphi_0 \notin Fin(\gamma)$. Entonces existen dos casos:

Caso 1. $Fin(\beta) = \{\varphi_0\}$.

Por (A) existe $\varphi_1 \in Fin(\delta)$ tal que $\varphi_1 \neq \varphi_0$.

Definimos un mapeo h de $\underline{P}_\alpha$ en $\underline{P}_{\sigma_6}$ del siguiente modo:

$h(\varphi_1) = \sigma_2$.
$h(\varphi') = \sigma_1$ si φ' es un punto final y $\varphi' \neq \varphi_1$.
$h(\beta) = \sigma_3$.
$h(\alpha) = \sigma_6$.
Si ϵ es tal que $\alpha \leq \epsilon$ y $\epsilon \neq \beta$, entonces

$$h(\epsilon) = \begin{cases} \sigma_1 & \text{si } \varphi_1 \notin Fin(\epsilon) \\ \sigma_2 & \text{si } Fin(\epsilon) = \{\varphi_1\} \\ \sigma_4 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Nuevamente se puede verificar que h está bien definida y es un p-morfismo.

Veamos que h es un p-morfismo.

(i) h es sobreyectiva.

$$\begin{aligned} h(\varphi_0) &= \sigma_1 \\ h(\varphi_1) &= \sigma_2 \\ h(\varphi_2) &= \sigma_1 \\ h(\beta) &= \sigma_3 \\ h(\delta) &= \sigma_4 \\ h(\alpha) &= \sigma_6 \end{aligned}$$

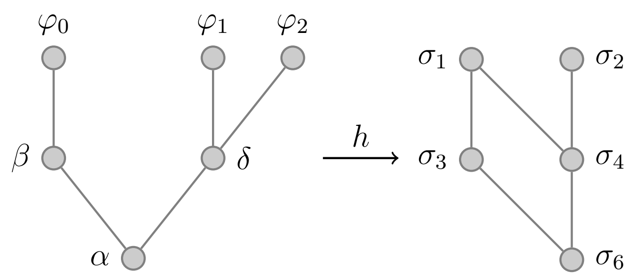

Figura C.3: p-morfismo de P_α en P_{σ_6}.

(ii) h preserva el orden.

Subcaso 1. Si ρ, $\kappa \in P$ tal que $\rho = \kappa$, entonces $h(\rho) = h(\kappa)$.

Subcaso 2. Si $\rho < \kappa$ con κ punto final, tenemos dos casos:

(a) Si $\kappa \neq \varphi_1$, entonces $h(\kappa) = \sigma_1$, luego $\rho \neq \varphi_1$, pues ρ no es final. Por lo tanto $h(\rho) \in \{\sigma_3, \sigma_4, \sigma_6\}$, pero $\sigma_3 \leq \sigma_1$, $\sigma_4 \leq \sigma_1$, $\sigma_6 \leq \sigma_1$ y así $h(\rho) \leq h(\kappa)$.

(b) Si $\kappa = \varphi_1$, entonces $h(\kappa) = \sigma_2$, nuevamente ρ no es final y $\varphi_1 \in Fin(\varphi)$ y como $Fin(\beta) = \{\varphi_0\}$, entonces $\rho \neq \beta$. Por lo tanto $h(\rho) \neq \sigma_3$ ni $h(\rho) \neq \sigma_1$. Por lo tanto $h(\rho) \leq h(\kappa)$.

Subcaso 3. $\rho < \kappa$ y κ no es punto final, entonces tenemos varios casos:

(a) Si $h(\kappa) = \sigma_1$, entonces $\varphi_1 \notin Fin(\kappa)$, luego ρ no es punto final. No es posible que $Fin(\rho) = \{\varphi_1\}$ pues $\underline{P}_\alpha$ es de profundidad finita por lo cual existe un punto final $\kappa^{'} > \kappa > \rho$ tal que $\kappa^{'} \neq \varphi_1$. Por lo tanto $h(\rho) \neq \sigma_2$, así $h(\rho) \in \{\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_6\}$ de esto tenemos que $h(\rho) \leq h(\kappa)$.

(b) Si $h(\kappa) = \sigma_2$, entonces $Fin(\kappa) = \{\varphi_1\}$, luego $\varphi_1 \in Fin(\rho)$. Por lo tanto $h(\rho) \neq \sigma_1$. Además $\rho \neq \beta$ de esto se tiene que $h(\rho) \neq \sigma_3$, entonces $h(\rho) \in \{\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6\}$ y así $h(\rho) \leq h(\kappa)$.

(c) Si $h(\kappa) = \sigma_3$, entonces $\kappa = \beta$, como $\alpha \leq \rho < \kappa$ y β es sucesor inmediato de α se tiene que $\rho = \alpha$ y así $\sigma_6 = h(\rho) \leq h(\beta) = \sigma_3$.

(d) Si $h(\kappa) = \sigma_4$, entonces existen dos puntos distintos accesibles desde κ, digamos φ_1, $\varphi^{'} \in Fin(\kappa)$, luego φ_1, $\varphi^{'} \in Fin(\rho)$ por lo cual $h(\rho) \notin \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Por lo tanto $h(\rho) \in \{\sigma_4, \sigma_6\}$ y así $h(\rho) \leq h(\kappa)$.

(e) No es posible que $h(\kappa) = \sigma_6$ puesto que esto indicaría que $\kappa = \alpha$ y que $\rho < \alpha$.

(iii) h es abierta.

Supongamos que $h(\rho) < \sigma$ tenemos varios casos:

Subcaso 1. Si $\sigma = \sigma_1$, entonces $h(\rho) < \sigma_1$, tenemos a su vez varios casos:

(a) Si $h(\rho) = \sigma_3$, entonces $\rho = \beta$, $Fin(\beta) = \{\varphi_3\}$. Luego $\rho < \varphi_3$ y $h(\varphi_3) = \sigma_1$.

(b) Si $h(\rho) = \sigma_4$, entonces $\varphi_1 \in Fin(\rho)$ y $Fin(\rho) \neq \{\varphi_1\}$, luego existe $\varphi' \neq \varphi_1$ tal que $\rho \leq \varphi'$ y $h(\varphi') = \sigma_1$.

(c) Si $h(\rho) = \sigma_6$, entonces $\rho < \alpha$ y $\varphi_0 \in Fin(\alpha)$, luego $\rho \leq \varphi_0$ y $h(\varphi_0) = \sigma_1$.

Subcaso 2. Si $\sigma = \sigma_2$, esto implica que $h(\rho) < \sigma_2$, entonces tenemos dos subcasos:

(a) Si $h(\rho) = \sigma_4$, entonces $\varphi_1 \in Fin(\rho)$, luego $\rho \leq \varphi_1$ y $h(\varphi_1) = \sigma_2$.

(b) Si $h(\rho) = \sigma_6$, entonces $\varphi = \rho$ y $\varphi_1 \geq \alpha = \rho$. Por lo tanto $h(\varphi_1) = \sigma_2$.

Subcaso 3. Si $\sigma = \sigma_3$ luego $h(\rho) < \sigma_3$, entonces $h(\rho) = \sigma_6$. Por lo tanto $\rho = \alpha$ y $\beta \geq \alpha = \rho$. Además $h(\beta) = \sigma_3$.

Subcaso 4. Si $\sigma = \sigma_4$ luego $h(\rho) < \sigma_4$, entonces $h(\rho) = \sigma_6$, nuevamente $\rho = \alpha$ y $\delta \geq \alpha > \rho$ y así $h(\delta) = \sigma_4$.

Caso 2. $Fin(\beta) \neq \{\varphi_0\}$.

Este caso es simétrico al anterior, donde ahora $h : P_\alpha \to P_{\sigma_6}$ es definida por:

$h(\varphi_0) = \sigma_2$
$h(\beta) = \sigma_4$
$h(\delta) = \sigma_3$
$h(\varphi_1) = \sigma_1$
$h(\alpha) = \sigma_6$

Por lo tanto es posible reducir el cono $\underline{P}_\alpha$ en el cono $\underline{P}_{\sigma_6}$ y como $\underline{P}_{\sigma_6} \not\models \mathbf{nf}_7$, entonces $\underline{P}_\alpha \not\models \mathbf{nf}_7$. Así $\underline{P}$ no es un marco para **Ast**.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $\underline{P} = \langle P, \leq \rangle$ es un marco que no válida a **Ast**.

Veamos que existe un punto α en P tal que $\underline{P}_\alpha$ se puede reducir a $\underline{P}_{\sigma_6}$.

Como $\underline{P}$ es un marco que no válida a **Ast**, entonces existe un punto α en P tal que

$$(P, \alpha) \not\models \mathbf{nf}_6 \to \mathbf{nf}_4 \vee \mathbf{nf}_3.$$

Entonces existe un punto $\beta \geq \alpha$ tal que:

$$(\underline{P}, \beta) \models \mathbf{nf}_6 \quad (C.4)$$
$$(\underline{P}, \beta) \not\models \mathbf{nf}_4 \text{ y} \quad (C.5)$$
$$(\underline{P}, \beta) \not\models \mathbf{nf}_3 \quad (C.6)$$

De la condición (C.5), tenemos que $(\underline{P}, \beta) \not\models \neg\neg p \to p$, entonces existe $\psi \geq \beta$ tal que $(\underline{P}, \psi) \models \neg\neg p$ pero $(\underline{P}, \psi) \not\models p$, notemos que $\psi \neq \beta$ ya que $(\underline{P}, \beta) \not\models \neg\neg p$ esto último por la condición (C.6).

También de la condición (C.6) tenemos que $(\underline{P}, \beta) \not\models \neg\neg p$, entonces existe un punto $\psi^{'}$ tal que $(\underline{P}, \psi^{'}) \models \neg p$. Por lo tanto $\psi^{'} \neq \psi$.

Por otra parte como $(\underline{P}, \psi) \models \neg\neg p$, $(\underline{P}, \psi) \not\models \neg p$ y $(\underline{P}, \psi) \not\models p$, entonces existe $\psi^{''} > \psi$ tal que $(\underline{P}, \psi^{''}) \models p$, luego $\psi^{'} \neq \beta$ porque $\psi^{'}$ válida a $\neg p$, entonces para ningún $\delta \geq \psi^{'}$, $(\underline{P}, \delta) \models p$, pero $\psi^{''} \geq \beta$ y $(\underline{P}, \psi^{''}) \models p$.

Definimos un mapeo $h : \underline{P}_\alpha \to \underline{P}_{\sigma_6}$ de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
h(\beta) &= \sigma_6 \\
h(\delta) &= \begin{cases} \sigma_6 & \text{si} \quad \delta \not\models \mathbf{nf}_4 \text{ y } \delta \not\models \mathbf{nf}_3 \\ \sigma_4 & \text{si} \quad \delta \models \mathbf{nf}_4 \text{ y } \delta \not\models \mathbf{nf}_2 \\ \sigma_3 & \text{si} \quad \delta \models \mathbf{nf}_3 \text{ y } \delta \not\models \mathbf{nf}_1 \\ \sigma_2 & \text{si} \quad \delta \models \mathbf{nf}_4 \text{ y } \delta \models \mathbf{nf}_2 \\ \sigma_1 & \text{si} \quad \delta \models \mathbf{nf}_3 \text{ y } \delta \models \mathbf{nf}_1 \\ \sigma_1 & \text{si} \quad \delta \models \mathbf{nf}_4 \text{ y } \delta \models \mathbf{nf}_1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

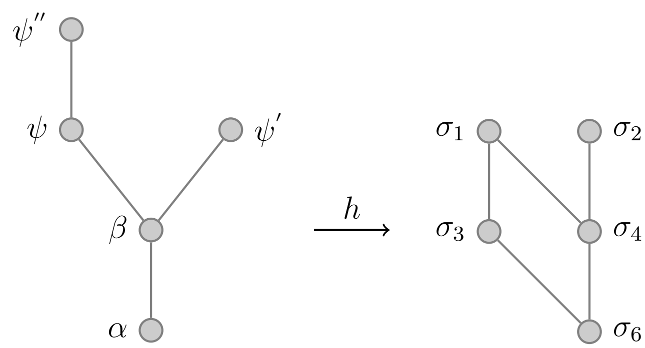

Figura C.4: p-morfismo de P_α en P_{σ_6}.

Se puede verificar que h está bien definida, veamos que h es un p-morfismo.

(i) h es sobreyectiva.

$$
\begin{aligned}
h(\beta) &= \sigma_6 \\
h(\psi) &= \sigma_1 \\
h(\psi^{'}) &= \sigma_2 \\
h(\psi^{''}) &= \sigma_1
\end{aligned}
$$

(ii) h preserva el orden.

Supongamos que $\alpha \leq \beta$, entonces tenemos varios casos:

Caso 1. Si $h(\alpha) = \sigma_1$, entonces $\alpha \models \mathbf{nf}_1$ y $\alpha \leq \beta$, esto implica que $\beta \models \mathbf{nf}_1$ y así $h(\beta) = \sigma_1$.

Caso 2. Si $h(\alpha) = \sigma_2$, entonces $\alpha \models \mathbf{nf}_2$ y como $\alpha \leq \beta$ se tiene que $\beta \models \mathbf{nf}_2$ y así $h(\beta) = \sigma_2$.

Caso 3. Si $h(\alpha) = \sigma_3$, entonces $\alpha \models \mathbf{nf}_3$ y $\alpha \not\models \mathbf{nf}_1$, pero como $\alpha \leq \beta$, esto implica que $\beta \models \mathbf{nf}_3$ y así $h(\beta) \in \{\sigma_1, \sigma_3\}$.

Caso 4. Si $h(\alpha) = \sigma_4$ y como $\alpha \leq \beta$ tenemos que $\beta \models \mathbf{nf}_4$ de esto tenemos dos casos:

(a) Si $\beta \not\models \mathbf{nf}_2$, entonces $h(\beta) = \sigma_2$.

(b) Si $\beta \models \mathbf{nf}_1$, entonces $h(\beta) = \sigma_1$.

Caso 5. Si $h(\alpha) = \sigma_6$, entonces $\alpha \not\models \mathbf{nf}_4$ tenemos varios casos:

(a) Si $\beta \not\models \mathbf{nf}_4$ y $\beta \not\models \mathbf{nf}_2$, entonces $h(\beta) = \sigma_6$.

(b) Si $\beta \models \mathbf{nf}_4$ y $\beta \not\models \mathbf{nf}_2$, entonces $h(\beta) \in \{\sigma_4, \sigma_1\}$.

(c) Si $\beta \models \mathbf{nf}_2$, entonces $h(\beta) = \sigma_2$.

(d) Si $\beta \models \mathbf{nf}_2$, entonces $h(\beta) \in \{\sigma_3, \sigma_1\}$.

(iii) h es abierta.

Supongamos que $h(\alpha) < \sigma$, entonces tenemos varios casos:

Caso 1. Si $h(\alpha) < \sigma_1$, entonces $h(\alpha) \in \{\sigma_3, \sigma_4, \sigma_6\}$.

(a) $h(\alpha) = \sigma_3$, entonces $\alpha \models \mathbf{nf}_3$ y $\alpha \not\models \mathbf{nf}_1$, entonces para cada $\beta \geq \alpha$, $\beta \not\models \neg p$ luego existe $\gamma \geq \beta$ tal que $\gamma \models p$, así $h(\gamma) = \sigma_1$.

(b) Si $h(\alpha) = \sigma_4$, entonces $\alpha \models \neg\neg p \to p$ y $\alpha \not\models \neg p$, esto implica que existe $\beta \geq \alpha$ tal que $\beta \models p$, luego $h(\beta) = \sigma_1$.

(c) Si $h(\alpha) = \sigma_6$, entonces $\alpha \not\models \neg\neg p \to p$ y $\alpha \not\models \neg\neg p$ de esto existe $\beta \geq \alpha$ tal que $\beta \models \neg\neg p$ y $\beta \not\models p$, análogo al primer caso tenemos que existe $\gamma \geq \beta$ tal que $\gamma \models p$ y así $h(\gamma) = \sigma_1$.

Caso 2. Si $h(\alpha) < \sigma_2$, entonces $h(\alpha) \in \{\sigma_4, \sigma_6\}$.

(a) Si $h(\alpha) = \sigma_4$, entonces $\alpha \models \mathbf{nf}_4$ y $\alpha \not\models \mathbf{nf}_2$. Como $\alpha \models p$, se tiene que $\alpha \not\models \neg\neg p$, esto implica que existe $\beta \geq \alpha$ tal que $\beta \models \neg p$. Por lo tanto $h(\beta) = \sigma_2$.

(b) Si $h(\alpha) = \sigma_6$, entonces $\alpha \not\models \neg\neg p \to p$ y $\alpha \not\models \neg\neg p$ de esto existe $\beta \geq \alpha$ tal que $\beta \models \neg p$ y así $h(\beta) = \sigma_2$.

Caso 3. Si $h(\alpha) < \sigma_3$, entonces $h(\alpha) = \sigma_6$, luego $\alpha \not\models \neg\neg p \to p$ y $\alpha \not\models \neg\neg p$ de esto existe $\beta \geq \alpha$ tal que $\beta \models \neg\neg p$ y $\beta \not\models p$ y así $h(\beta) = \sigma_3$.

Caso 4. Si $h(\alpha) < \sigma_4$, entonces $h(\alpha) = \sigma_6$ luego $\alpha \not\models \neg\neg p \to p$ y $\alpha \not\models \neg\neg p$. Como $\alpha \leq \beta$ tenemos que $\beta \models \mathbf{nf}_6$ y como h es sobreyectiva tenemos que existe $\gamma \geq \alpha$ tal que $h(\gamma) = \sigma_4$.

Por lo tanto existe un punto α en P de tal manera que $\underline{P}_\alpha$ se puede reducir a $\underline{P}_{\sigma_6}$. $\square$

Apéndice D

Resumen de las Lógicas Utilizadas

D.1. Esquemas de Axioma

		Esquemas de axioma
$\mathbf{bd}_1$	$=$	$p_1 \vee \neg p_1$
$\mathbf{bd}_{n+1}$	$=$	$p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to \mathbf{bd}_n)$, $(n \geq 1)$
$\mathbf{bb}_n$	$=$	$\bigwedge_{i=0}^{n}((p_i \to \bigvee_{j \neq i} p_j) \to \bigvee_{i=0}^{n} p_j) \to \bigvee_{i=0}^{n} p_i$, $(n \geq 2)$
$\mathbf{dum}$	$=$	$(p \to q) \vee (q \to p)$
$\mathbf{kp}$	$=$	$(\neg p \to q_1 \vee q_2) \to (\neg p \to q_1) \vee (\neg p \to q_2)$
$\mathbf{nf}_1$	$=$	p
$\mathbf{nf}_2$	$=$	$\neg p$
$\mathbf{nf}_3$	$=$	$\neg\neg p$
$\mathbf{nf}_4$	$=$	$\neg\neg p \to p$
$\mathbf{nf}_k$	$=$	$\mathbf{nf}_{k-1} \to nf_{k-3} \vee \mathbf{nf}_{k-4}$, $(k \geq 5)$

D.2. Lógicas Intermedias

		Lógicas Intermedias
$\mathbf{T_n}$	$:=$	$\mathbf{Int} + \mathbf{bb}_n$, $(n \geq 2)$
$\mathbf{Bd_n}$	$:=$	$\mathbf{Int} + \mathbf{bd}_n$, $(n \geq 1)$
$\mathbf{LC}$	$:=$	$\mathbf{Int} + \mathbf{dum}$
$\mathbf{G}_n$	$:=$	$\mathbf{Int} + ((p \to q) \vee (q \to p)) + \mathbf{bd}_n$, $(n \geq 1)$
$\mathbf{KP}$	$:=$	$\mathbf{Int} + \mathbf{kp}$
$\mathbf{Sh}$	$:=$	$\mathbf{Int} + \varpi + \iota + \mathbf{bb}_2$

D.3. Lógicas en una Variable

Lógicas en una Variable		
$\mathbf{Cl}$	$:=$	$\mathbf{Int} + (\mathbf{nf}_1 \vee \mathbf{nf}_2) = \mathbf{Int} + \mathbf{nf}_4$
$\mathbf{Jn}$	$:=$	$\mathbf{Int} + (\mathbf{nf}_2 \vee \mathbf{nf}_3) = \mathbf{Int} + \mathbf{nf}_5$
$\mathbf{NL}_m$	$:=$	$\mathbf{Int} + \mathbf{nf}_m$, $(m \geq 6)$
$\mathbf{St}$	$:=$	$\mathbf{NL}_6$
$\mathbf{Ast}$	$:=$	$\mathbf{NL}_7$

Bibliografía

[1] Agliano, P., Ferreirim, I.M.A., Montagna, F., *Basic Hoops: An Algebriac Study of Continuous t-norms*, Studia Logica, Vol 87, pag. 73-98, (2007).

[2] Agliano, P. and Montagna, F., *Varieties of BL-algebras I: General Properties*, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol 181, pag. 105-129, (2003).

[3] Bezhanishvili, N., *Lattices of Intermediate and Cylindric Modal Logics*, PhD thesis, ILLC University of Amsterdam, (2006).

[4] Bezhanishvili, N. and de Jong, D., *Intuitionistic Logic*, Inst. for Logic, Language and Computation, ISSN 1389-3033, (2006).

[5] Birkhoff, G., *Lattice Theory*, American Mathematical Society Coloquio Publicaciones 25, Providence, RI: American Mathematical Society, ISBN 978-0-8218-1025-5, (1963).

[6] Blok, W.J. and Pigozzi D., *On the Structure of Varieties with Equationally Definable Principal Congruences III*, Journal Universalis, Vol 32, pag. 545-608, (1994).

[7] Burris, S. and Sankappanavar, H. P., *A Course in Universal Algebra*, The Millennium Edition, ISBN 978-0-9880552-0-9, (1981).

[8] Chagrov, A. and Zakharyaschev, M., *Modal Logic*, Russian Academy of Sciencies, Clarendon Press Oxford, ISBN 0 19 853779 4, (1997).

[9] Chang, C.C. and Keisler, H.J., *Model Theory*, North-Holland, (1973).

[10] Dummett, M., *A Propositional Calculus with Denumerable Matrix*, The Journal of Symbolic Logic, Vol 24, pag. 97-106, (1959).

[11] Ferrari, M. and Miglioli, P., *A Method to Single Out Maximal Propositional Logics with the Disjunction Property I*, Annals of Pure and Applied Logic, (1995).

[12] Fiorentini, C., *Kripke Completeness for Intermediate Logics*, PhD thesis, Università degli Studi di Milano Dipartimento di Informatica, (2000).

[13] Fitting, M., *Intuitionistic Logic Model Theory and Forcing*, Studies in logic and the foundations of mathematics, (1969).

[14] Gödel, K., *Zum Intuitionistischen Aussagenkalkül*, Anzeiger Akademie der Wissenschaften Wien, Math.-naturwissensch. Klasse, Vol 69, pag. 65-66, (1932).

[15] Maksimova, L.L., *On The Maximal Intermediate Logics with the Disjuntion Property*, Studia Logica, Vol. 45, pag. 69-75, (1986).

[16] Maksimova, L.L., and Shethman, Skvortsov D.P., *The Impossibility of a Finite Axiomatization of Medvedev's Logic of Finitary Problems*, Soviet Mathematis Doklady, Vol. 20(2), pag. 394-398, (1979).

[17] Martinez, I., *Álgebras de Heyting y Lógica Constructiva*, Tesis de Licenciatura, FCFM Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, (2004).

[18] McKay, C.G., *On Finite Logics*, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 36, (1971).

[19] Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, CRC Press Taylor & Francis Group, fifth edition, ISBN 978 1 58488 876 5, (2010).

[20] Miglioli, P., *An Infinite Class of Maximal Intermediate Propositional Logics with the Disjuntion Property*, Archive for Mathematical Logic, Vol. 31, pag. 415-432, (1992).

[21] Nishimura, I., *On Formulas of One Variable in Intuitionistic Propositional Calculus*, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 25, pag. 327-331, (1960).

[22] Litak, T., *A Continuum of Incomplete Intermediate Logics*, Reports on Mathematical Logic, Vol 36, pag. 31-044, (2002).

[23] Odintsov, S. P., *Constructive Negations and Paraconsistency*, Springer Science+Business Media B.V., ISBN 978 1 4020 6866 9, (2008).

[24] Ono, H., *Kripke Models and Intermediate Logics*, Publ. RIMS Kyoto Univ., Vol. 6, (1970/71).

[25] Ono, H. and Rauszer, C., *On an Algebraic and Kripke Semantics for Intermediate Logics*, Universal Algebra and Applications Banach Center Publications, Vol. 9, (1982).

[26] Rasiowa, H. and Sikorski, R., *The Mathematics of Metamathematics*, PWN-Polish Scientific Publishers Warszawa, Third Edition, (1970).

[27] Simpson, E.G., *Mathematical Logic*, Departament of Mathematics, The Pennsulvania State University, University Park, State Collage PA 16802, (2013).

[28] Sobolev, S.K., *On The Finite Approximability of Superintuitionistic Logics*, Mathematics of USSR, Sbornik, Vol. 31, pag. 257-268, (1977).

[29] van Dalen, D., *Logic and Structure*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, fifth edition, ISBN 978 1 4471 4558 5, (2004).